

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique

Option : Astrophysique

par

Amina GUEHAM

THEME

La cosmologie avec les extra dimensions et énergie noire

Soutenu le : / /201

Devant le Jury :

Président :	N.Belaloui	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	N.Mebarki	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Examineurs :	H.Aissaoui	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
	A.Ahriche	M.C.	Univ. Jijel

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mentouri de Constantine

Tous mes remerciements vont premièrement à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur Mr. N. Mebarki, Professeur à l'université Mentouri Constantine, pour ses discussions, sa disponibilité infaillible à mon égard, son aide, son soutien moral et scientifique. Qu'il en soit grandement remercié.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, Mr. N. Belaloui, Professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs : Mr. A. Ahriche, Maîtres de conférences à l'université de Jijel et Mr. H. Aissaoui, maître de conférence à l'université de Constantine, qui ont bien accepté de juger ce travail.

Je remercie vivement ,Douria, Charaf et A. Zoghbi pour l'aide scientifique qu'il m'ont accordé .

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de DEA . En particulier, Mrs. J. Mimouni, A. Benslama, Maîtres de conférences à l'université de Constantine, Mr. A. Bouljedri, A. Sid, Maîtres de conférences à l'université de Batna, N. Seghouani et T. Abdellatif Directeurs de Recherche au CRRAG (Alger), Mme. N. Aghanim Dierctrice de recherche au CNRS (France), Mr. N. Guessoum, maître de conférence à l'université américaine au Sharjah, Mr. R. Attalah, professeur à l'université de Annaba.

Je remercie, encore tous mes collègues de la promotion 2008/2009.

Merci également à mes amies Yasmine, Fatiha, Karima, Messaouda, Hanane, Dounia, Nabila, Zohra, Meriem, Sana, Dallel, Sihem et Zineb.

Je voudrais bien remercier mes professeurs de Physique Théorique de l'université de Jijel.

Mes remerciements également à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail au niveau du pôle de recherche et laboratoire de Physique mathématique

et Subatomique notamment : Amel et Dallel.

Quand à mes très chers parents, je ne trouverai jamais les mots pour les remercier suffisamment, pour leur soutien moral et financier, leur assistance et engagement permanents. Je les remercie infiniment et j'implore Allah le tout puissant de les protéger et leur prêter une longue vie.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes beaux frères Zoubir, Abdelmalek, mes frères : Youssouf, Abdelmounaim, Abdelmadjid et mes sœurs : Naouel, Mounia, Rekia, Soumia, Aicha, Samah et Sana qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Et tous ceux que j'oublie mais auxquels je pense!!!

Amina

Table des matières

1	Introduction	7
I	Le Modèle Standard Cosmologique	10
2	Modèle du Big Bang	11
2.1	Modèle de Friedmann-Robertson-Walker	11
2.1.1	Métrie de Robertson Walker	11
2.1.2	Equations d'Einstein	12
2.1.3	Contenu de l'Univers	14
2.1.4	Equation de Friedmann	15
2.1.5	Paramètre cosmologique	15
2.2	Expansion et Accélération de l'Univers	16
2.2.1	Energie noire	17
2.2.2	Origine de l'énergie noire	18
II	Modification de la relativité générale et Energie noire	19
3	Dimensions Supplémentaires	21
3.1	Pourquoi (pas) des dimensions supplémentaires?	21
3.2	Signatures expérimentales	22
3.3	Les différentes types de dimensions supplémentaires	22
3.3.1	Compactification à la Kaluza-Klein	22
3.3.2	Monde de brane	23

3.3.3	La gravité dans le monde de brane	23
4	Modèle ΛCDM	25
4.1	Problème de la constante cosmologique	27
4.2	Modèle de FLRW avec extra dimension	28
4.2.1	Equations du champs	28
4.2.2	L'étude dynamique	30
5	Modèle d'univers non homogène	34
5.1	Modèle d'univers de Lemaitre-Tolman-Bondi	34
5.2	Modèle d'Univers LTB dominée par la poussière	37
5.3	LTB avec extra dimension	40
5.3.1	Equations du champ	40
6	Théories $f(R)$	45
6.1	Equation du champ dans le formalisme metrique	45
6.1.1	Equations de Friedmann généralisées	47
6.2	Le formalisme de Palatini	48
6.2.1	Equation du champs	48
6.3	Théories $f(R)$ dans un espace-temps a cinq dimensions	49
6.3.1	Equation d'Einstein dans le formalisme métrique	50
6.3.2	Les équations du champs	53
6.4	Le Modèle	55
	Conclusion Générale	57
7	Conclusion	57
	Bibliographie	58
	Annexe A	61
	Annexe B	63

Chapitre 1

Introduction

Une nouvelle ère dans l'histoire de la cosmologie a commencé durant les dernières années. Les observations, ont apporté de nouvelles perspectives dans la quête d'une théorie globale du cosmos.

Le scénario du hot big bang semble se confirmer. Pourtant, de nombreux mystères et "zones sombres" de notre compréhension demeurent. Le mot "sombre" prend toute sa valeur lorsqu'on pense à la présence d'énergie noire et matière noire.

Les observations récentes de la température cosmique du fond micro-onde (CMB)[1], la distribution de distance de décalage vers le rouge du supernovae de type Ia [2], [3] indiquent que l'expansion de notre univers actuelle est accélérée. L'histoire pourrait commencer par une observation, celle des galaxies. celle-ci s'éloignent les unes des autres dans un mouvement qui ne leur est pas propre. En effet, c'est l'espace lui-même qui se dilate. Ce fait observationnel dû à Hubble[4] est un écho exceptionnel de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

L'accélération de l'expansion a été interprétée comme la présence d'une force répulsive à grande échelle, capable de surmonter la force gravitationnelle entre les différents constituants de l'univers. La nature de cette force reste pour l'instant très mystérieuse et on lui a donné le nom d'énergie noire. Les dernières observations montrent que l'univers est composé de 25% de matière et de 75% d'énergie sombre. Les observations du rayonnement fossile faites par le satellite WMAP ont donné une réponse encore plus précise : 4% de matière ordinaire, 23% de matière exotique et 73% d'énergie sombre. Les observations de ce satellite ont également montré que l'univers était plat, du moins dans la limite des incertitudes de mesure.

Le problème de l'énergie noire soulève une question fondamentale qui concerne de nombreuses échelles de la cosmologie et de l'astrophysique. De nombreux modèles tentent d'expliquer les différentes observations, mais le sujet reste d'actualité. L'une des explications possibles de la force répulsive qui accélère l'expansion fait appel au concept assez ancien de la constante cosmologique[5]. D'autres explications sont fondées sur des différentes modifications du modèle standard cosmologique.

Parmi les modifications possibles du modèle standard cosmologique, les dimensions supplémentaires. Ces dimensions enroulées, ou dimensions supplémentaires sont les fondements de la théorie de Kaluza-Klein mais apparaissent également dans des modèles plus généraux de la compactification utilisés en cosmologie branaire ou en théorie des supercordes. L'idée générale est la suivante : notre univers ne contient pas seulement les quatre dimensions spatio-temporelles que nous connaissons, appelées dimensions étendues, mais il contient aussi des dimensions supplémentaires, minuscules et enroulées sur elles-mêmes. Cette extension du modèle standard est très appréciée par les physiciens car le problème dit de la hiérarchie est résolu par la taille et la géométrie des extra dimensions[6].

Pourquoi travailler dans ce contexte ? Quelles sont les motivations d'un tel choix ?

Les raisons sont d'ordre théorique. Depuis plus de vingt ans, une théorie appelée théorie des cordes tentent d'inclure la gravitation dans le contexte de la théorie quantique des champs : réaliser le rêve d'avoir une théorie qui permet de tout décrire dans un seul schéma théorique. Einstein a démontré que l'espace et le temps ont un comportement très étrange. Aujourd'hui, ses découvertes ont été intégrées à un univers quantique présentant de nombreuses dimensions cachées, étortillées dans la structure de l'espace temps, et la géométrie complexe de ces nouvelles dimensions pourrait bien receller la réponse à certaines des questions les plus fondamentales qu'on ait jamais posées. Ces idées nous offrent alors une vision tout à fait inattendue de l'univers.

Les travaux entrepris sur les dimensions supplémentaires ont été fait, soit pour traiter la phénoménologie des particules, soit pour étudier la cosmologie. Nous reviendrons dans un paragraphe sur les différents modèles d'extra-dimensions.

Le présent document s'organisera comme suit. Dans une première partie de ce mémoire, nous faisons une introduction à la cosmologie où nous présentons des généralités théoriques sur le modèle standard cosmologique. Pour cela, je présenterai le modèle de Friedmann-Lemaître

d'univers homogène en expansion avec une constante cosmologique. Nous nous intéresserons ensuite succinctement à l'expansion et l'accélération de l'univers.

Dans une seconde partie, nous traiterons le problème de l'énergie noire par une modification de la relativité générale selon le schéma suivant : nous présenterons dans le deuxième chapitre le modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson et Walker avec une constante cosmologique dans un espace à cinq dimensions. Nous traiterons aussi le modèle d'univers non homogène avec un bref aperçu et la généralisation à cinq dimensions.

Dans le troisième chapitre nous traiterons la théorie $f(R)$ où l'idée originale était de savoir comment ces nouvelles théories pouvaient différer de la relativité générale. Pour cela il faut abandonner l'idée que la gravitation soit décrite par une équation de second ordre, comme nous verrons plus loin. Puis nous étudierons la généralisation de ces théories dans un espace à cinq dimensions.

Nous terminerons par des perspectives du présent travail au niveau du problème de l'énergie noire, et nous évoquerons l'extension possible à des modèles d'extra dimensions.

Première partie

Le Modèle Standard Cosmologique

Chapitre 2

Modèle du Big Bang

2.1 Modèle de Friedmann-Robertson-Walker

Le modèle standard cosmologique est en fait une description complète de l'évolution cosmologique de l'univers du Big Bang jusqu'à aujourd'hui. Dans ce chapitre, je vais rappeler ce que c'est le Modèle Standard Cosmologique d'un point de vue théorique. Il est possible de trouver des présentations plus longues dans des ouvrages classiques[[7]– [9]].

De nombreuses observations astronomiques tendent à montrer que l'univers est globalement homogène et isotrope, c'est l'hypothèse de base du modèle cosmologique de Friedmann et Lemaitre.

2.1.1 Métrique de Robertson Walker

Le modèle de Friedmann-Lemaitre est un modèle de relativité générale. Il est fondé sur une métrique qui décrit correctement les conditions d'isotropie et d'homogénéité, la métrique de Robertson et Walker

$$d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}. \quad (2.1)$$

$a(t)$ est le "facteur d'échelle", qui décrit la dilatation de l'univers en fonction du temps, on peut le déterminer par les équations d'Einstein (voir la section suivante).

k est la courbure. Si k est positif, l'univers est "fermé", et si k est négatif il est "ouvert".

Les différentes observations suggèrent que k est presque nul [10], [11] c'est-à-dire que l'univers a des sections spatiales plates.

2.1.2 Equations d'Einstein

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'espace-temps à l'énergie et à la matière, la présence de matière ou d'énergie induisent une modification de la géométrie.

Ainsi, la gravitation s'explique simplement par le fait que les trajectoires suivent la géométrie courbée par la matière ou l'énergie. La gravitation est une force fondamentale comme les trois autres forces : sa particularité est d'être expliquée géométriquement.

Nous allons utiliser le principe variationnel d'Hilbert pour déduire les équations du champ d'Einstein

$$\delta(S_G + S_M) = 0 \quad (2.2)$$

où S_G est l'action intégrale pour la gravitation pure.

On peut écrire

$$S_G = \frac{1}{2k} \int \mathcal{L}[g_{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x \quad (2.3)$$

Où k est une constante. La fonction $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$ est telle que :

$$\mathcal{L}[g_{\mu\nu}] = R - 2\Lambda,$$

Où Λ est une constante cosmologique. Donc l'action se réécrit sous la forme :

$$S_G = \frac{1}{2k} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x,$$

Nous allons varier l'action à l'intérieur d'une région infinitésimale V , laissant la variation de la métrique et de ses dérivés nulle à la limite de cette région. Ensuite, nous calculons la variation des intégrales d'action et en déduire les équations du champ d'Einstein en imposant $\delta S_G = 0$ pour des variations arbitraires de la métrique.

Ecrivons

$$S_G = \frac{1}{2k} \int (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.4)$$

Nous obtenons

$$\delta S_G = \frac{1}{2k} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] - 2\Lambda \delta \sqrt{-g}) d^4x,$$

Après une série des calculs, on a

$$\delta S_G = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.5)$$

Maintenant S_M est l'action intégrale pour la matière et de l'énergie. Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$S_M = \int d^4x \mathcal{L}_M \sqrt{-g}, \quad (2.6)$$

Où \mathcal{L}_M est la densité lagrangienne pour la matière et l'énergie.

La variation de l'argument dans l'équation (2.6) donne

$$\delta[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M] = \frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}. \quad (2.7)$$

Substituant dans l'équation (2.6) et après une série de calcul, nous obtenons

$$\delta S_M = \int \left(\frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.8)$$

Le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ d'un système avec une densité lagrangienne \mathcal{L}_M est un tenseur symétrique défini par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \right). \quad (2.9)$$

Cela donne

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.10)$$

Utilisant les équations (2.5) et (2.10), le principe variationnel donne alors les équations du champ gravitationnel de la théorie de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

Où $R_{\mu\nu}$ et R sont respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion énergie, et Λ "la constante cosmologique". Ce sont les célèbres equations du champs d'Einstein, χ peut être déterminée à

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Cette équation modifiée admet une solution particulière d'univers statique, cependant instable.

Plus tard, Hubble découvre l'expansion de l'univers, et par conséquent la constante cosmologique n'était plus nécessaire. Einstein l'a alors abandonné pour revenir à la loi originale.

Finalement, les mesures actuelles semblent indiquer la necessite de cette constante cosmologique pour l'expansion de l'univers.

2.1.3 Contenu de l'Univers

Le tenseur énergie-impulsion permet de représenter la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps. Ainsi sous l'hypothèse d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme suivante

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Où $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ désigne le quadri-vitesse du gaz, x^μ étant sa position et τ le temps propre. Ici p et ρ sont respectivement la pression et la densité dépendentes du temps. Le fluide est choisi parfait car c'est la plus simple réalisation d'un tenseur énergie-impulsion diagonal et qui, par isotropie a toutes ses composantes spatiales égales.

Les différents types de fluide seront alors différenciés selon le rapport

$$\omega = \frac{p}{\rho} \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{pour les particules non relativiste} \\ = 1/3 & \text{pour des particules relativiste} \\ < -1/3 & \text{pour un fluide qui provoquerait une accélération de l'univers} \\ = -1 & \text{pour une constante cosmologique} \end{array} \right.$$

2.1.4 Equation de Friedmann

En combinant les équations d'Einstein avec la métrique de Robertson et Walker (2.1), on obtient les équations de Friedmann avec $\Lambda = 0$. Pour être plus précis, nous dirons que d'abord, on tire de la métrique l'expression des connexions affines puis celle du tenseur de Ricci et de sa trace.

On place ces expressions dans les équations d'Einstein dans lesquelles on a bien évidemment, placé le tenseur d'énergie-impulsion décrit précédemment dans l'équation (2.12). On obtient

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho, \quad (2.13)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2} p. \quad (2.14)$$

Par conservation du tenseur énergie-impulsion (2.12), on déduit aussi cette équation

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \quad (2.15)$$

La deuxième de ces trois équations de Friedmann correspond à la composante 00 des équations d'Einstein. On pourra remarquer que les trois équations précédentes sont liées. La dernière équation va permettre de déterminer totalement l'évolution de $a(t)$.

2.1.5 Paramètre cosmologique

On définit la densité critique ρ_c comme la densité qu'aurait un univers homogène et isotrope en expansion pour que sa courbure spatiale k soit nulle. Soit

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.16)$$

A l'heure actuelle, l'équation (2.13) devient

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0^0 - \frac{k}{a_0^2} \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_c^0.$$

Ce qui permet de définir la densité critique ρ_c^0 comme la valeur critique pour laquelle l'univers a des sections spatiales plates ($k = 0$). Pour d'autres valeurs de la densité, la géométrie

de l'univers est globalement courbée. Les indices 0 indiquent que les valeurs sont prises à l'heure actuelle. H_0 est appelée constante de Hubble.

Si on veut résoudre les équations de Friedmann-Lemaître, il faut donner une forme précise au fluide cosmique. Pour cela nous postulons une équation d'état reliant la densité et la pression

$$p = \omega \rho \quad (2.17)$$

avec ω constant, car l'univers primordial est suffisamment homogène, pour cela, on trouve que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.18)$$

Où, pour la matière ($\omega = 0$), on obtient $\rho \propto a^{-3}$ et pour la radiation ($\omega = \frac{1}{3}$), on déduit que $\rho \propto a^{-4}$.

La découverte du fond de rayonnement cosmologique (CMB) [12] a été un événement essentiel qui a donné un fondement observationnel solide au modèle du Big Bang, et qu'après le Big Bang, l'univers a tout d'abord été dominé par la radiation [13]. Par conséquent, les équations précédentes donnent $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ et $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ pour un univers dominé par la radiation et la matière respectivement.

2.2 Expansion et Accélération de l'Univers

L'expansion de l'univers est l'une des caractéristiques majeures de la cosmologie standard. L'expansion fut découverte au cours des années 1920.

La première preuve expérimentale de l'expansion de l'univers a été donnée par E.Hubble[4], qui a mesuré simultanément la distance des galaxies par la méthode des Céphides, et leur vitesse radiale par le décalage vers le rouge z de leur spectre qui est défini comme le taux d'accroissement de la longueur d'onde d'un rayon lumineux entre son point d'émission et l'observateur

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.19)$$

Où λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement observée (au temps t_0 , c'est à dire aujourd'hui), et λ_e la longueur d'onde du rayonnement au moment de son émission (au temps t_e). Ce

décalage est interprété comme étant dû à l'effet Doppler.

Le premier diagramme de Hubble [4] montre une relation linéaire entre les deux (distance et vitesse des galaxies), caractérisée par la constante H_0

$$v = H_0 d,$$

Ici v est la vitesse relative des galaxies, et d son distance. D'après cette relation plus grande est la distance, plus la vitesse d'éloignement sera élevée.

On rappelle que l'expansion est prise en compte dans la métrique FRW par le biais du facteur $a(t)$. La valeur $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ est le taux d'expansion actuelle. Il est de $70 \text{ Km.S}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$??.

Cependant en 1998 deux équipes d'astronomes, "The Supernova Cosmology Project"[2] et "High- z Supernova Team"[3] sont parvenues au résultat inattendu que l'expansion de l'univers s'accélère. Ce résultat est surprenant car il n'existe aucune théorie pour l'interpréter. Il implique en effet l'existence d'une forme inconnue de la matière dont la pression serait négative, avec un comportement répulsif et non pas attractif vis-à-vis de la gravitation Cette forme hypothétique est inhabituelle de la matière d'une nature inconnue, appelée énergie noire ou parfois la constante cosmologique et représente à l'heure actuelle un des problèmes non résolus de la cosmologie moderne.

2.2.1 Énergie noire

Historiquement, la seule forme de la matière (hypothétique) se comportant comme de l'énergie sombre était la constante cosmologique, proposée dans un autre contexte par Albert Einstein en 1916, et les seuls modèles faisant appel à l'énergie sombre utilisaient en réalité une constante cosmologique. La motivation initiale d'Einstein restait cependant fort éloignée de celles qui motivent l'intérêt actuel pour l'énergie sombre. En effet, en 1916, date à laquelle l'expansion de l'univers n'était pas connue, Albert Einstein considérait que l'univers devait être statique, aussi lui fallait-il introduire une nouvelle force s'opposant à l'attraction gravitationnelle. Le candidat idéal fut trouvé avec la constante cosmologique, qui permettait, dans certaines conditions très particulières de contrebalancer exactement l'effet attractif de la force gravitationnelle.

Ce n'est que bien plus tard, en 1988, que fut proposé par l'astrophysicien indien Bharat

Ratra un autre modèle d'énergie sombre, qui fut plus tard appelé quintessence[14]. L'intérêt pour l'énergie sombre ne prit son essor qu'à partir de la fin des années 1990, époque où fut mise en évidence la réalité de l'énergie sombre par le phénomène d'accélération de l'expansion de l'univers. Par la suite, d'autres modèles furent proposés, parmi lesquels l'énergie fantôme[15], la k-essence[16], et le gaz de Chaplygin[17]. Tous possèdent la même caractéristique essentielle, celle de posséder une pression suffisamment négative pour permettre d'expliquer, au moins quantitativement, l'accélération de l'expansion de l'univers.

Les recherches astrophysiques actuelles sur le sujet ont pour but principal de mesurer avec précision l'histoire de l'expansion de l'univers afin de déterminer la manière dont l'expansion varie avec le temps et en déduire les propriétés de l'énergie sombre, en particulier son équation d'état

2.2.2 Origine de l'énergie noire

Si la relativité générale est correcte, l'accélération cosmique implique la présence d'une densité d'énergie noire qui diminue relativement lentement pendant que l'univers est en expansion. Ceci peut être vu directement de l'équation de Friedmann (2.13)

$$\dot{a}^2 \propto a^2 \rho + \text{cons} \quad (2.20)$$

De cette relation, il est clair que la seule manière d'obtenir une accélération (a^2 augmente) dans un univers en expansion est que ρ diminue plus lentement que a^2 . On remarque que ni un univers domine par la matière ($\rho_M \propto a^{-3}$), ni domine par le rayonnement ($\rho_R \propto a^{-4}$) fera l'affaire.

Plusieurs modèles sont proposés. Je discuterai quelques modèles dans ce qui suit.

Deuxième partie

Modification de la relativité générale et
Energie noire

La relativité générale est l'une des théories les mieux vérifiées. Elle a notamment permis de calculer avec précision l'avance du périhélie de Mercure, la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation, de donner une explication élégante du déplacement vers le rouge des raies spectrales, ainsi que de nombreuses prédictions cosmologiques. Cependant, il a fallu compléter par des différents modèles la cosmologie afin de comprendre certains paradoxes. Il s'agit notamment de l'inflation, c'est-à-dire une expansion accélérée de l'univers. De nouveau, il semble que nous vivions une phase d'expansion accélérée. Ainsi tout comme pour l'inflation, il nous faut compléter notre théorie afin d'être en accord avec les faits.

La première observation et confirmation de cette expansion accélérée fut établie par l'observation des SNIa et donc de leur luminosité par deux équipes, celles du High-Z SN search et le SuperNovae Cosmology Project [3]. Ce fait expérimental fut confirmé par l'observation des anisotropies du CMB, des "Baryon Acoustic Oscillation" (BAO)[18]. Celui-ci est ainsi devenu une vérité "indiscutable". Cependant, jusqu'en 1998 le modèle théorique était celui d'un univers en expansion décéléré. La grande question était de savoir si celle-ci serait ou pas éternelle. Assisterons-nous à un Big-Crunch ?

Depuis ces observations notre regard a changé. Le big-crunch a été "enterré" et il faut aujourd'hui avoir une théorie qui prédit cette accélération de notre espace. Différents modèles sont possibles. On peut soit ajouter un élément (énergie du vide, champ scalaire...) dans l'univers ou bien modifier la gravitation par son action à quatre dimensions ou bien par introduire des dimensions supplémentaires. J'exposerai quelques modèles par la suite.

Chapitre 3

Dimensions Supplémentaires

3.1 Pourquoi (pas) des dimensions supplémentaires ?

L'idée d'un espace à plus de quatre dimensions date des années 1920 : Kaluza et Klein furent les premiers à introduire une dimension supplémentaire dans le but d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. L'électromagnétisme pouvait s'expliquer géométriquement comme la gravitation si l'on ajoutait une dimension supplémentaire (une ligne et une colonne de plus à la matrice représentant son tenseur métrique). En compactifiant cette dimension, ils montrèrent que l'on retrouvait les lois de l'électromagnétisme telles qu'elles sont dans notre monde à quatre dimensions.[19]

En 1999, Lisa Randall et Raman Sundrum ont présenté un modèle d'univers à cinq dimensions. Ils ont imaginé notre monde quadri-dimensionnel comme un monde de brane ou une couche extérieure dans un volume à cinq dimensions. Ce volume peut être infini dans la taille, mais dû aux propriétés spéciales du volume, les champs du modèle standard sont confinés dans la brane, seule la gravitation est permise de se propager dans la cinquième dimension (où le volume)[20], [6]. De nombreuses études phénoménologiques existent pour étudier les conséquences de l'existence de ces dimensions supplémentaires, elles peuvent en fait aider à résoudre le problème de la hiérarchie en réduisant l'énergie de Planck par "dilution" de la gravitation dans les dimensions supplémentaires.

3.2 Signatures expérimentales

Il est possible de déceler la présence des dimensions supplémentaires à l'échelle du TeV au LHC. Pour cela, il faut bien évidemment que les particules en jeu puissent sentir la présence de la (ou des) dimension(s) supplémentaire(s). Les signatures typiques sont des excitations dites de Kaluza-Klein ; des résonances dans l'évolution des sections efficaces des réactions en fonction de l'énergie peuvent apparaître. Elles sont dues au "tours" d'excitation de Kaluza-Klein. On peut comprendre ces "tours" en faisant une analogie avec une particule qui rencontre un puit de potentiel en mécanique quantique : son énergie va être quantifiée dans le puit fournissant un tour d'excitations. Dans notre cas, la dimension supplémentaire joue le rôle du puit.

D'autres signatures pourraient être fournies par la création d'un micro trou noir[21]. En effet, tout objet peut se transformer en trou noir s'il est contracté au dessous de son rayon de Schwarzschild qui est défini par $2\frac{Gm}{c^2}$. Bien évidemment plus la masse est grande, plus l'on peut obtenir facilement le rayon de Schwarzschild. Or, comme on l'a vu, les dimensions supplémentaires peuvent augmenter la valeur de G . Donc s'il y a des dimensions supplémentaires de tailles suffisantes, on peut espérer avec les énergies en jeu au LHC passer au dessous du rayon de Schwarzschild et créer des micro trous noirs. Ceux-ci devraient s'évaporer rapidement, puisque le rayonnement de Hawking implique que le trou noir rayonne de manière inversement proportionnelle à sa masse au carré. Des études par les collaborations ATLAS et CMS ont montré que ce rayonnement de Hawking serait sans doute visible au LHC.

3.3 Les différents types de dimensions supplémentaires

3.3.1 Compactification à la Kaluza-Klein

Nous vivons apparemment dans un univers à 4 dimensions spatio-temporelles. Cette théorie suggère que nous vivons, en fait, dans un univers comportant un nombre plus élevé de dimensions. Au départ, la théorie avançait l'existence de 5 dimensions d'espace-temps. La 5ème dimension serait une dimension enroulée en cercle. Cette nouvelle dimension est invisible à nos yeux, sa taille vaut la longueur de Planck, c'est-à-dire 10^{-33} cm. Il nous est impossible de se déplacer sur cette dimension vu que notre taille est relativement très grande.

Ensuite, la théorie des cordes, puis la théorie M, s'inspirèrent des idées de cette théorie. Les équations de la théorie des cordes n'ont de sens que si les cordes évoluent dans un univers muni de 10 dimensions spatio-temporelles. Dans ce cas, l'enroulement des dimensions se fait alors en une forme plus complexe qu'est l'espace de Calabi-Yau, variété ayant des extensions dans 6 dimensions.

3.3.2 Monde de brane

Les premiers modèles de la cosmologie branaire remontent aux travaux de Lisa Randall et Raman Sundrum en 1999[20] inspirés par les travaux de I. Antoniadis, Arkhoni-Hamed, Dimopoulos et Dvali en 1998[6]. L'idée principale est de tenter d'expliquer l'extraordinaire faiblesse de l'intensité de la force de la gravitation devant les autres forces par l'existence de dimensions supplémentaires. La gravité vivant naturellement dans toutes les dimensions et c'est la constante donnant son intensité dans toutes les dimensions qui est alors fondamentale et choisie du même ordre de grandeur que les autres échelles fondamentales. La gravitation observée dans les quatre dimensions est alors régie par une constante effective, obtenue de cette constante fondamentale ainsi que d'une échelle de longueur associée aux dimensions supplémentaires.

Plusieurs descriptions de ces dimensions supplémentaires compatibles avec cette idée ont été proposées. Tout d'abord, elles peuvent être choisies compactes mais de grande taille (modèle Randall-Sundrum I) devant l'échelle électrofaible du modèle standard (en pratique de l'ordre de 1 mm afin de rester compatible avec les tests actuels de la force de gravitation) ou alors de taille infinie (Randall-Sundrum II) mais possédant une courbure donnée par une constante cosmologique dans le bulk (qui est distincte d'une éventuelle constante cosmologique dans les quatre dimensions visibles) qui fixe elle aussi une échelle rendant la constante de gravitation effective à quatre dimensions petite devant l'intensité des autres forces.

3.3.3 La gravité dans le monde de brane

Comme décrit ci-dessus, les théories $f(R)$ ajoutent un degré de liberté additionnel à la gravité, un champ scalaire, par conséquent il a des chances potentiellement meilleures d'expliquer notre univers. Ces modèles peuvent être vus comme une alternative à l'énergie noire et

à la matière noire, s'ils sont phénoménologiquement conformes aux observations. D'un point de vue plus général, on devrait considérer qu'il y a déjà deux compétiteurs à une théorie de la gravitation quantique : M-Théorie [23] et la gravité quantique en boucle. Dans cette thèse, nous considérerons des modèles $f(R)$ dans le contexte d'un dispositif important motivé par String Theory : une dimension spatiale supplémentaire.

Une conséquence qui est souvent associée à ces nouveaux modèles de dimensions supplémentaires est celle de l'échelle de Planck. L'échelle à 4 dimension $M_p(4)$ n'est plus l'échelle fondamentale, car on a maintenant 5 dimensions $M_p(5)$. En d'autres termes, $M_p(4)$ est maintenant une échelle efficace, et sa grandeur est expliquée par le fait que la gravité peut se propager dans l'espace à 5-dimensions, ce qui nommée espace en bloc "bulk space". Ceci "dilue" la force de la gravité sur le brane qui est l'espace à 4-dimensions ou nous vivons (une hypersurface du volume 5D). Cette relation peut être établie dans quelques modèles à travers la loi de Gauss

$$V(r) \sim \begin{cases} \frac{1}{M_{p(5)}^3} \frac{1}{r^2} & \text{si } r \ll R_c \\ \frac{1}{M_{p(5)}^3 R_c} \frac{1}{r} & \text{si } r \gg R_c \end{cases}, \quad (3.1)$$

Où R_c est la taille de la dimension supplémentaire. Comparer l'équation pour $r \gg R_c$ au potentiel Newtonien,

$$V(r) \sim G \frac{1}{r} = \frac{1}{M_{p(4)}^2} \frac{1}{r}, \quad (3.2)$$

on obtient

$$M_{p(4)}^2 = M_{p(5)}^3 R_c \quad (3.3)$$

Ceci peut être utilisé pour résoudre le problème de la hiérarchie quand la matière est limitée au brane, avec la gravitation étant la seule force à se propager dans le volume. Dans cet arrangement, la dimension supplémentaire doivent être minuscules pour être en accord avec notre expérience, permettant pour réduire l'échelle fondamentale de Planck par l'intermédiaire de l'équation (3.3) et, par exemple, de mettre la gravité au la même échelle que la théorie d'électrofaible.

Chapitre 4

Modèle Λ CDM

Comme nous avons vu précédemment le principe cosmologique stupide que l'homme n'occupe pas une place privilégiée. Ainsi l'univers doit être spatialement homogène et isotrope. ce qui conduit à la forme de la métrique de FRW (2.1).

Einstein introduit en 1917 une constante cosmologique Λ dans ces équations parce qu'il pensait trouver ainsi un univers fermé statique qui serait en accord avec le principe de Mach, l'inertie n'a pas de sens dans un univers vide. Cependant, la découverte des solutions d'un univers en expansion sans constante cosmologique par Friedmann en 1922 et enfin l'observation de l'éloignement des galaxies par Hubble en 1929 finissent par achever l'existence d'une constante cosmologique. Le modèle d'un univers statique venait de s'effondrer et la constante cosmologique n'avait donc plus d'utilité. Elle fut "ranger au placard" pour un petit moment, avant de renaître de nouveau.

Cependant, durant toutes ces années elle ne fut pas totalement oubliée. En effet, pour remédier au problème de la singularité primordiale dans la solution de Friedmann, Lemaître avait développé en 1927 un modèle d'un univers d'origine statique dans lequel le facteur d'échelle est constant. C'est seulement en 1968 que Yakov Borisovich Zel'dovich [24] considéra l'importance de la constante cosmologique en faisant le lien avec l'énergie du vide. En effet son calcul à une boucle de la fluctuation du vide après renormalisation donne un tenseur énergie impulsion de l'énergie du vide qui a la même forme que celle de la constante cosmologique.

En fait, ajouter une constante cosmologique à l'équation d'Einstein est équivalent à inclure un tenseur d'énergie-impulsion de la forme

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

Elle peut être considérée simplement comme un fluide parfait où la densité de matière et la pression sont obtenus d'un tenseur énergie-impulsion avec

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda.$$

Ainsi venait de naître le lien entre la constante cosmologique et l'énergie du vide, ce qui va poser certains problèmes dont je parlerai par la suite. Pour l'instant concentrons-nous sur les solutions des équations en présence du terme Λ .

L'introduction de la constante cosmologique apporte dans les équations d'Einstein une modification sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Ainsi le terme supplémentaire peut être vu comme un terme "géométrique" (partie gauche) donc une modification à l'action d'Einstein-Hilbert ou bien comme un terme de "source" (partie droite), i.e. un fluide supplémentaire.

Dans les conditions d'un univers homogène et isotrope, i.e. la métrique FLRW, on a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3P_i) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.5)$$

Ainsi si on définit le paramètre de décélération

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) s'écrit alors

$$q = \sum \frac{\Omega_i}{2} (1 + 3\omega_i) \quad (4.7)$$

Où

$$\Omega_i = 8\pi G \frac{\rho_i}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (4.8)$$

On voit que la présence uniquement de la matière conduit à un univers en expansion décélérée

$$q = \frac{\Omega_m}{2} (> 0) \quad (4.9)$$

Alors que la présence d'une constante cosmologique positive conduit à une accélération de l'univers

$$q = -\Omega_\Lambda (< 0) \quad (4.10)$$

Dans un univers composé de matière et d'énergie noire sous la forme d'une constante cosmologique

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \quad (4.11)$$

On voit alors que la présence d'une constante cosmologique peut entraîner une accélération de l'univers.

Ainsi cette énergie est constante tout au long d'espace-temps, implique que la constante cosmologique est équivalente à l'énergie du vide, où le calcul des fluctuations du vide donne un tenseur énergie-impulsion de l'énergie du vide sous une forme similaire celle de la constante cosmologique.

4.1 Problème de la constante cosmologique

Nous avons vu le lien entre la constante cosmologique et l'énergie du vide.

En théorie quantique des champs la densité d'énergie du vide pour un champs scalaire est

$$\langle T_{00} \rangle \simeq \frac{c^5}{G^2 h} \simeq 10^{76} \text{Gev}^{-4} \quad (4.12)$$

Alors que la mesure de la densité d'énergie associée à la constante cosmologique est

$$\rho_\Lambda = 10^{-47} GeV^{-4} \quad (4.13)$$

Soit une différence de 123 ordres de grandeur !

Il s'agit du problème majeure de la constante cosmologique. Il n'y a pas pour l'instant de modèle qui a réussi à résoudre ce problème. Le second problème est celui de la coïncidence. En effet durant l'expansion de l'univers, la densité d'énergie associée à la constante cosmologique reste constante mais les données sont conformes aux sources d'énergie noire qui changent lentement avec le temps.

4.2 Modèle de FLRW avec extra dimension

4.2.1 Equations du champs

Nous allons étudier la généralisation de FLRW dans des dimensions supplémentaires, dans ce contexte nous avons étendu des travaux récents de Mohammadi[25]. La métrique d'un espace-temps (1+4) avec un univers 4D symétrique sphérique, isotrope et homogène a la forme suivante

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] - A^2(t) dy dy \quad (4.14)$$

Où y est la dimension supplémentaire, $k = 0, -1, +1$ selon le type de la géométrie de l'espace 3D, $R(t)$ et $A(t)$ sont des facteurs d'échelles dépendants du temps. Dans les coordonnées co-moving avec une constante cosmologique nulle on a les équations indépendantes d'Einstein suivantes

$$\rho = \left(3\frac{\dot{R}^2 + K}{R^2}\right) + 3\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA} \quad (4.15)$$

$$= \left(3\frac{\dot{R}^2 + K}{R^2}\right) + \rho_0, \quad (4.16)$$

$$p = \left(-2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2}\right) - \frac{\ddot{A}}{A} - 2\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA}$$

$$= \left(-2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2}\right) + p_0, \quad (4.17)$$

$$p_5 = -3\frac{\ddot{R}}{R} - 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 3\frac{K}{R^2}.$$

Où λ est une constante cosmologique de l'extra dimension, k est la courbure de l'espace supplémentaire. Dans ce qui suit nous supposons pour la simplicité un espace-temps de 5D ($d = 1$).

Considérons un espace-temps plat ($k = 0$), et la cinquième dimension a une vitesse d'expansion constante, et un fluide 3D parfait avec une équation d'état de la forme $p = \omega\rho$ on a alors :

$$2\dot{H} + 3(1 + \omega)H^2 + \frac{\ddot{A}}{A} + (2 + 3\omega)H\frac{\dot{A}}{A} = 0 \quad (4.18)$$

$\ddot{A} = 0$ donne

$$\dot{H} + \frac{3}{2}(1 + \omega)H^2 + \left(\frac{2 + 3\omega}{2}\right)\left(\frac{c}{ct + c_0}\right)H = 0 \quad (4.19)$$

Où c, c_0 sont des constantes d'intégration et $H = \frac{\dot{R}}{R}$ est le paramètre de Hubble. Il est facile de montrer que la solution exacte de cette équation est

$$H = H_0 u^{-\delta-1} [1 + \Delta_0(1 - u^{-\delta})]^{-1} \quad (4.20)$$

Où

$$\delta = \frac{3\omega}{2}, \quad u = \frac{\hat{t} + F}{1 + F}, \quad \Delta_0 = \frac{cH_0 t_0(1 + \omega)(1 + F)}{\omega}, \quad F = \frac{c_0}{ct_0}$$

Ici $\hat{t} = t/t_0$ et (resp. H_0) sont l'époque actuelle et le paramètre de Hubble respectivement.

Concernant la luminosité de distance $D_L(z)$ en fonction du déplacement vers le rouge z , les simplifications directes donnent

$$D_L(z) = \Omega(1 + z)^{-(\delta+3/2)}(1 - G)^{-(\delta+1)/\delta} F_1(1; \beta, \beta', 2, X, Y) \quad (4.21)$$

Où $F_1(1; \beta, \beta', 2, X, Y)$ est la fonction hypergeometrique a deux variables, et

$$\Omega = \frac{-2}{3(1+\omega)} \Delta_0^{(1+\delta)/\delta} [1 + \Delta_1(1 - \nu_0)](1 + \Delta_0)^{-(1+\delta)/\delta}$$

Ici $G = \frac{1}{(1+\Delta_0)}$, $X = 1 - \Delta_1$, $Y = \frac{GX}{G-1}$ et $\Delta_1 = (1+z)^{-(3/2+\delta)}$.

La connaissance de la relation entre ω et le parametre de Hubble H à partir de l'équation(4.20) permet de connaître la dynamique de l'énergie noire.

Nous voyons bien que sous la conditions $p = \omega\rho$, on a des solutions exactes du paramètre de Hubble.

4.2.2 L'étude dynamique

Considérons les équations de Friedmann généralisées à 5D avec des fluides parfaits où les équations d'état sont $p = \omega\rho$ et $p_5 = \gamma\rho$.

$$\begin{aligned}\rho &= 3H_R^2 + \frac{3K}{R^2} + 3H_R H_A, \\ p &= -3H_R^2 - \frac{K}{R^2} - 2\dot{H}_R - \dot{H}_A - H_A^2 - 2H_R H_A, \\ p_5 &= -3\dot{H}_R - 6H_R^2 - 3\frac{K}{R^2}.\end{aligned}$$

Où $H_R = \frac{\dot{R}}{R}$, $H_A = \frac{\dot{A}}{A}$.

D'après la première équation, on a

$$\frac{K}{R^2} = \frac{\rho}{3} - H_R^2 - H_R H_A$$

en faisant une substitution de cette équation dans $p = \omega\rho$ et $p_5 = \gamma\rho$ trouvons

$$\dot{H}_R = -(1+\gamma)\frac{\rho}{3} - H_R^2 + H_R H_A, \quad (4.22)$$

$$\dot{H}_A = \left(\frac{1+2\gamma}{3} - \omega\right)\rho - H_A^2 - 3H_R H_A, \quad (4.23)$$

en derivant ρ et la substitution de \dot{H}_R et \dot{H}_A , nous trouvons

$$\dot{\rho} = -[3(1+\omega)H_R + (1+\gamma)H_A]\rho, \quad (4.24)$$

Où $H_R = \frac{\dot{R}}{R}$ et $H_A = \frac{\dot{A}}{A}$ sont les paramètres de Hubble de l'Univers à 4D et l'espace de 1D dimension supplémentaire respectivement. Si nous prenons comme variables dynamiques ρ, H_R et H_A , l'analyse mène aux cas suivants

1) Si $\gamma \neq -1, \omega \neq -1$ et $\rho \neq 0$ et afin d'avoir les points critiques non triviales, l'équation suivante de compatibilité doit être satisfaite

$$-18\gamma - 5\omega\gamma + 19\omega - 2\gamma^2 + 12\omega^2 = 0 \quad (4.25)$$

Eq.(4.25) peut être résolue numériquement. Les régions permises sont pour $\gamma < -4.97$ ou $\gamma > -0.6$. Par exemple pour $\gamma \approx -9$ on a $\omega \approx 0$ ou $\omega \approx -5.33$ et pour $\gamma \approx 8$ on a $\omega \approx 5.715$ ou $\omega \approx -3.96$. La figure(4.1)(resp. figure4.2) montre les valeurs permises de ω (dénotés par ω^-, ω^+) comme une fonction de γ pour $\gamma < -4.97$ (resp. $\gamma > -0.6$).

2) Si $\gamma = -1$ et $\omega = -1$ on a dans la base (ρ, H_A, H_R) , les points critiques suivants :

i) $M_1(0, 0, 0)$ ce qui correspond à un espace plat et statique pour l'espace 4D et l'espace de dimension supplémentaire 1D

ii) $M_2(\rho, 0, H_A)$ tels que $\rho = 3H_A^2/2$. Il correspond à un espace de 4D statique et univers fermée mais l'espace de dimension supplémentaire est accélérée. La figure(3-3a) montre le portrait de phase de (H_A, H_R) pour $\omega = -1$ et $\gamma = -1$ et la projection sur le plan $\rho = 3/2$. Noter qu'un de ces points critiques est le noeud instable asymptotique $(H_A, H_R)=(0,1)$.

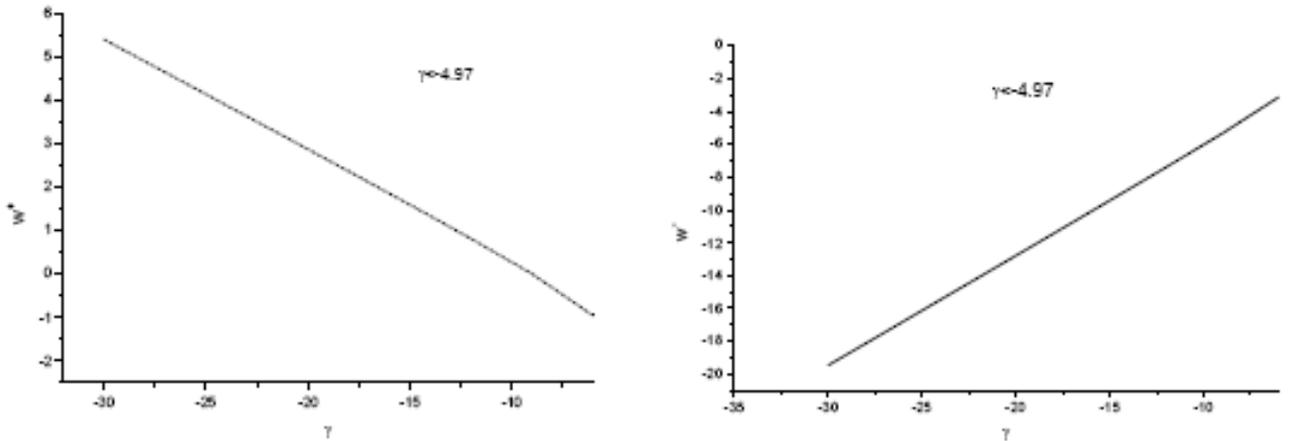


FIG. 4.1 – Figure 4.1 les valeurs permises de ω en fonction de γ pour $\gamma < -4.97$

iii) $M_3(\rho, H_R, H_A)$ tels que $\rho = 6H_A^2$. Il correspond à un espace plat et accéléré (l'espace à 4D et 1D extra dimension). La figure (3-3b) montre le portrait de phase (H_A, H_R) pour $\omega = -1$ et $\gamma = -1$ et la projection sur le plan $\rho = 6$. Noter qu'un de ces points critiques est le noeud asymptotique stable $(H_A, H_R) = (1, 1)$.

3) Si $\gamma = -1$ et $\omega \neq -1$ ou $\gamma \neq -1$ et $\omega = -1$, on a un point d'équilibre au point M_1 . Il correspond à un univers (4D et 1D espace supplémentaire) plat et statique.

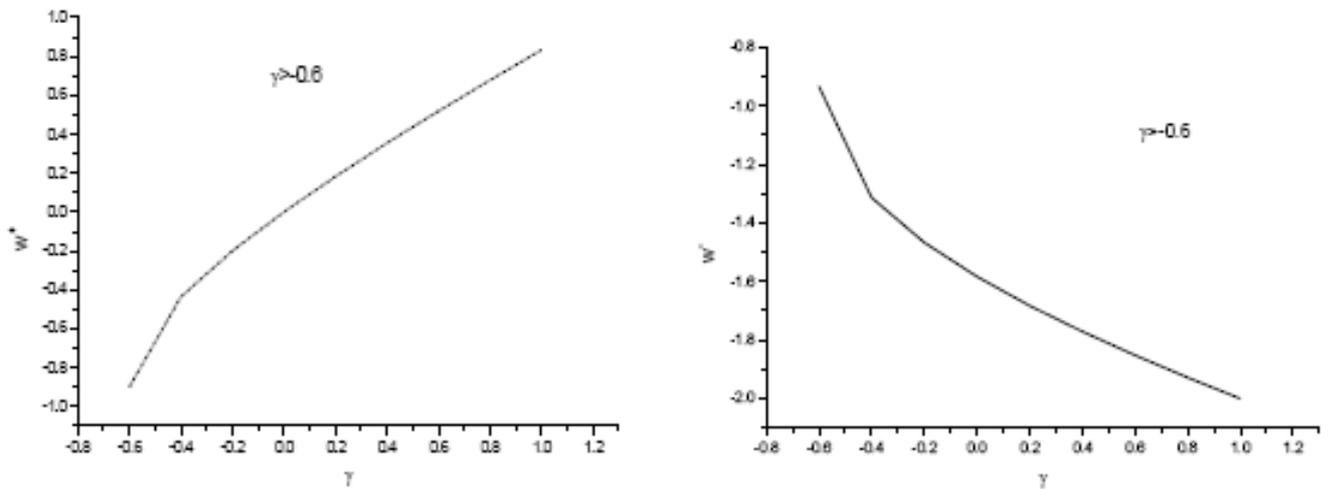


FIG. 4.2 – Figure 4.2 Les valeurs permises de ω en fonction de γ pour $\gamma > -0.6$

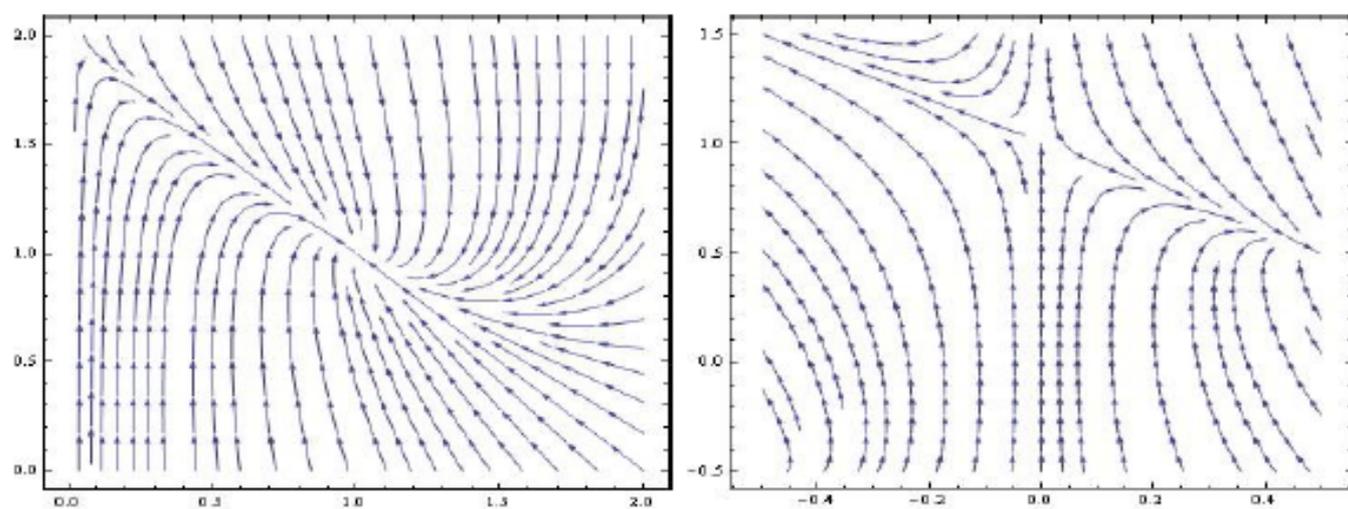


FIG. 4.3 – Figure 4.3 Projection de portrait de phase(H_R, H_A) sur le plan (a) $\rho = 3/2$ (b) $\rho = 6$

Chapitre 5

Modèle d'univers non homogène

Dans un univers homogène, du chapitre précédent, les modèles avec l'énergie noire ont été considérés. Cependant, nous ne savons pas quelle sorte d'énergie qui domine l'évolution de Hubble de l'univers. Une motivation pour présenter l'énergie noire dans les modèles cosmologiques était expliquée par l'état d'une expansion accélérée actuelle de notre univers suggérée par l'observation du supernova type Ia. Cependant, les modèles d'univers non homogènes peuvent permettre une explication alternative. Nous observons les supernovas le long du cône de lumière vers l'arrière. Peut-être l'expansion apparemment accélérée est une sorte d'illusion venant de l'inhomogénéité de l'espace? Si nous sommes dans une position avec une plus grande vitesse du flux Hubble que dans les environs à grande échelle, le manque d'homogénéité nous amène à observer une plus grande valeur du paramètre de Hubble pour les supernovae plus proche de nous. Dans ce cas nous n'aurions pas besoin d'énergie noire pour expliquer les observations de supernovae. Cependant, il signifierait que nous sommes placés à un endroit très spécial dans l'univers [26]. Afin de pouvoir discuter de ce et les problèmes semblables que nous devons devenir familier avec ce que la théorie de relativité générale peut nous indiquer au sujet de modèles d'univers non homogène.

5.1 Modèle d'univers de Lemaitre-Tolman-Bondi

L'élément de ligne pour un univers sphériquement symétrique et non homogène, peut être écrit sous la forme [27]

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(r, t)dr^2 + R^2(r, t)d\Omega^2 \quad (5.1)$$

Où les coordonnées sont co-moving avec le fluide cosmique de sorte que le quadri-vitesse du fluide est $u^\mu = \delta_t^\mu$. Nous considérons des modèles contenant seulement le fluide parfait avec Lorenz Invariant Vacuum Energy (LIVE).

La composante 01 du Tenseur d'Einstein pour la métrique(5.1) est

$$E_1^0 = -2\left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{X}}{X} \frac{R'}{R}\right), \quad (5.2)$$

Où nous utilisons la notation $' = \frac{\partial}{\partial r}$ et $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$. Solution de l'équation(5.2) donne

$$X(r, t) = \frac{R'(r, t)}{f(r)},$$

Où f est une fonction arbitraire de la coordonnée radiale.

Nous définissons deux paramètres de Hubble

$$H_\perp \equiv \frac{\dot{R}}{R}, H_r \equiv \frac{\dot{R}'}{R}.$$

Donc les équations d'Einstein peut être écrites sous la forme :

$$H_\perp^2 + 2H_r H_\perp - \frac{\beta}{R^2} - \frac{\beta'}{RR'} = \chi\rho + \Lambda \quad (5.3)$$

$$-6H_\perp^2 q_\perp + 2H_\perp^2 - 2H_r H_\perp - 2\frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta'}{RR'} = -\chi(\rho + 3p) + 2\Lambda \quad (5.4)$$

Où $\beta(r) = f(r) - 1$ et

$$q_\perp = -\frac{1}{H_\perp^2} \frac{\ddot{R}}{R} \quad (5.5)$$

Pour voir plus clairement comment le modèle de Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) généralise le modèle homogène de Friedmann, nous introduisons un facteur d'échelle, $a(r, t)$, et un paramètre de courbure spatiale, $k(r)$, comme suit

$$a(r, t) \equiv \frac{R}{r}, k(r) \equiv -\frac{\beta}{r^2}.$$

Alors la métrique prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[\left(1 + \frac{ra'}{a}\right)^2 \frac{dr^2}{1 - k(r)r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (5.6)$$

Bien que $k(r)$ soit lié à la courbure spatiale, le rapport entre la courbure et $k(r)$ est plus compliquée que dans les modèle d'Univers homogène. Le tenseur de Ricci pour la partie spatiale de la métrique est

$$R = 2 \left[\frac{k}{a^2} + 2 \frac{(r^2 k)'}{(r^2 a^2)'} \right]. \quad (5.7)$$

En ajoutant eqs(5.3) et (5.4) nous obtenons pour le paramètre de décélération,

$$q_{\perp} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k(r)}{a^2} + \frac{\chi p - \Lambda}{H_{\perp}^2} \right). \quad (5.8)$$

On peut définir un paramètre effective de Hubble

$$H_{eff} = \frac{1}{3} (H_r + 2H_{\perp}), \quad (5.9)$$

et une grandeur scalaire "shear scalar" par[27]

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} (H_r - H_{\perp})^2. \quad (5.10)$$

Utilisant l'équation (5.8) et les définitions ci-dessus, l'équation de Friedmann (5.3) peut être écrite sous la forme :

$$3H_{eff}^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{2} R_s + \chi\rho + \Lambda \quad (5.11)$$

La densité critique est la densité d'un univers dominé par la poussière,

$$\rho_{cr} = 3H_{eff}^2 - \sigma^2 \quad (5.12)$$

En définissant un paramètre de courbure et un paramètre de densité pour la poussière et LIVE par

$$\Omega_k \equiv -\frac{R_s}{2\chi\rho_{cr}}, \Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}}, \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{\chi\rho_{cr}}. \quad (5.13)$$

L'équation(5.11) peut être écrite comme :

$$\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.14)$$

Par conséquent on peut définir un triangle cosmique pour les modèles de LTB avec l'analogie au triangle des modèles de Friedmann-Lemaitre.

5.2 Modèle d'Univers LTB dominée par la poussière

Nous considérerons maintenant un modèle d'univers de Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) [28], [29], [30] avec la poussière seulement. Posant $p = \Lambda = 0$ et additionnant les eqs (5.3) et (5.4), nous obtenons alors pour le paramètre de décélération,

$$q_\perp = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\dot{R}^2}. \quad (5.15)$$

La condition pour une expansion accélérée prend maintenant la forme

$$\beta > \dot{R}^2 > 0 \quad \text{ou} \quad f^2 > 1 + \dot{R}^2. \quad (5.16)$$

Insérant l'expression du paramètre de décélération, l'équation (5.8) prend la forme

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = \beta. \quad (5.17)$$

L'intégration mène à

$$\dot{R}^2 = \beta R + \alpha(r) \quad \text{ou} \quad H_\perp^2 = \frac{\beta}{R^2} + \frac{\alpha}{R^3} \quad (5.18)$$

Par conséquent, les effets dynamiques de α et β sont semblables à celui de la courbure et la poussière, respectivement. Par conséquent $\alpha(r)$ est considéré comme une fonction de masse de la gravité. Substitution de l'eq (5.18) dans l'eq (5.4) nous trouvons

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{R^2} \quad \text{ou} \quad q_{\perp} = \frac{\alpha}{RR}. \quad (5.19)$$

Tenir compte de l'inhomogénéité avec $-\beta R < \alpha(r) < 0$ semble laisser l'expansion accélérée même des modèles d'univers dominé par la poussière.

L'effet dynamique de $\alpha < 0$ correspond à celui de la poussière à la densité négative dans un modèle d'univers homogène .Il est a noter, cependant, que l'inégalité ci-dessus interdit l'expansion accélérée dans un modèle de "big bang" où le facteur d'échelle a la valeur initiale $R(r, 0) = 0$ qui implique $\alpha(r) \geq 0$. Cependant ce premier état ne peut pas être physiquement réaliste. L'univers a pu avoir commencé avec un facteur d'échelle fini, ou peut-être s'est effondré et a atteint un rayon minimum fini. Dans de tels modèles l'expansion accélérée ne semble pas être interdite.

L'intégration de l'équation (5.18) avec $R(r, t_0) = R_0(r)$ donne

$$\sqrt{\beta R(\alpha + \beta R)} - \sqrt{\beta R_0(\alpha + \beta R_0)} - \alpha \ln\left(\frac{\sqrt{\beta R} + \sqrt{(\alpha + \beta R)}}{\sqrt{\beta R_0} + \sqrt{(\alpha + \beta R_0)}}\right) = t - t_0. \quad (5.20)$$

Introduisant le temps conforme η par $\sqrt{|\beta|}dt = R d\eta$ et choisissant $t_0 = \eta_0 = 0$ nous trouvons

$$\beta > 0 : \begin{cases} R = \frac{\alpha}{2\beta}(\cosh \eta - 1) + R_0[\cosh \eta + \sqrt{\frac{\alpha + \beta R}{\beta R_0}} \sinh \eta], \\ \sqrt{\beta}t = \frac{\alpha}{2\beta}(\sinh \eta - \eta) + R_0[\sinh \eta + \sqrt{\frac{\alpha + \beta R}{\beta R_0}}(\cosh \eta - 1)], \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\beta = 0 : R = (R_0^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\alpha t})^{\frac{2}{3}}, \quad (5.22)$$

$$\beta < 0 : \begin{cases} R = \frac{\alpha}{2|\beta|}(\cos \eta + 1) + R_0[\cos \eta + \sqrt{\frac{\alpha + \beta R}{|\beta|R_0}} \sin \eta], \\ \sqrt{\beta}t = \frac{\alpha}{2|\beta|}(\eta - \sin \eta) + R_0[\sin \eta + \sqrt{\frac{\alpha + \beta R}{\beta R_0}}(1 - \cos \eta)]. \end{cases} \quad (5.23)$$

Les equations (5.21 – 5.23) représentent la solution des équations des champs pour LTB à partir du "Big Bang" à $t = \eta = 0$, le facteur d'échelle en fonction du temps est montré pour quelque modèles typiques sur le schéma (figure 4.1)[27]

Des eqs.(5.21 – 5.23) nous voyons que le taux d'expansion dépend de la position par les fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$. Par conséquent, une explication possible d'observations de supernova

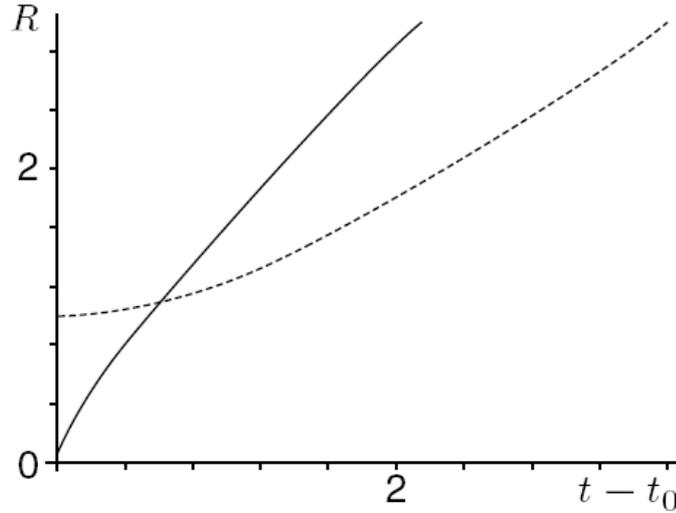


FIG. 5.1 – graphique de eq (5.20) pour $\alpha = \beta = 1$ (ligne solide) et pour $\alpha = -1, \beta = 1.001$ (ligne pleine)

type Ia qui indique un état actuel de l'accélération cosmique, est que nous sommes placés à $r = 0$, à une position où le taux d'expansion est maximale diminuant avec l'augmentation de r . Nous obtenons la distribution de densité pour cette classe des modèles

$$\chi\rho = \frac{\alpha'}{R^2 R'} = 3 \frac{\alpha'}{V'}. \quad (5.24)$$

Par conséquent un modèle physiquement réaliste doit avoir $\alpha' > 0$. Le schéma (4.1) montre l'expansion cosmique accélérée pour un modèle d'univers de LTB dominé par la poussière avec $\alpha(r) < 1$. Cependant ce modèle ne peut pas être physiquement réaliste après tous. La partie angulaire de la métrique est $R^2 d\Omega^2$, où le $d\Omega$ est l'élément d'angle solide. il représente le secteur d'une surface prolongeant un certain angle solide. À l'origine $r = 0$, ce secteur doit disparaître, et ainsi $R(0, t) = 0$. De l'eq. (5.8) nous obtenons alors $\alpha(0) = 0$. Puisque $\alpha' > 0$, il suit que $\alpha(r) > 0$ pour tous r . Mais l'expansion accélérée est seulement possible aux modèles avec $\alpha < 0$. Par conséquent les modèles d'univers de LTB dominés par la poussière ralentissent l'expansion.

5.3 LTB avec extra dimension

Comme nous l'avons vu précédemment les modèles d'univers de LTB peuvent expliquer les observations des supernovae type Ia, mais ces modèles ralentissent l'expansion de l'univers. Cependant les dimensions supplémentaires peuvent résoudre ce problème physique.

Alors dans ce chapitre nous allons proposer un modèle d'univers de LTB avec extra dimensions ou certains paramètres cosmologiques comme l'énergie noire sont discutés

5.3.1 Equations du champ

L'élément de ligne de l'espace temps à cinq dimensions peut être écrit sous la forme :

$$ds^2 = dt^2 - X(r, t)dr^2 - R^2(r, t)d\Omega^2 - B^2(t)dy^2 \quad (5.25)$$

Où y est la cinquième coordonnée.

Les équations d'Einstein pour un monde à cinq dimensions sont

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = k_5^2 T_{AB} \quad (5.26)$$

Où R_{AB} est le tenseur de Ricci à cinq dimension, R sa trace, $k_5 = 8\pi G_5$ est la constante gravitationnelle dans l'espace-temps à cinq dimensions et T_{AB} est le tenseur d'énergie impulsion.

$$T_{AB} = \text{diag}(\rho_B, -p_B, -p_B, -p_B, -p_B) \quad (5.27)$$

Les équations d'Einstein sont

$$E_t^t = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'} \quad (5.28)$$

$$E_r^r = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} \quad (5.29)$$

$$E_\theta^\theta = E_\varphi^\varphi = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{R}'}{R'} + \frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{2RR'} + \frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'} \quad (5.30)$$

$$E_y^y = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R'} \quad (5.31)$$

Où k est la courbure de l'espace temps, R le facteur d'échelle de l'espace à 4D, A le facteur d'échelle pour la dimension supplémentaire.

Pour simplifier, nous supposons une solution en loi de puissance pour les facteurs d'échelle

$$R = r(t^n + t^m r^l) \quad (5.32)$$

$$A = t^s \quad (5.33)$$

L'isotropie de l'espace donne :

$$E_r^r = E_\theta^\theta = E_\varphi^\varphi$$

donc

$$\frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}'}{R} \right) = \frac{\ddot{R}'}{R} + \frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad (5.34)$$

En utilisant les formes de R et A , on a

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} &= \frac{1}{t} \left(\frac{nt^n + mt^m r^l}{t^n + t^m r^l} \right), & \frac{\dot{R}'}{R} &= \frac{1}{t} \left(\frac{nt^n + m(l+1)t^m r^l}{t^n + (l+1)t^m r^l} \right), \\ \frac{\ddot{R}}{R} &= \frac{1}{t^2} \left(\frac{n(n-1)t^n + m(m-1)t^m r^l}{t^n + t^m r^l} \right), & \frac{\ddot{R}'}{R} &= \frac{1}{t^2} \left(\frac{n(n-1)t^n + m(m-1)(l+1)t^m r^l}{t^n + (l+1)t^m r^l} \right), \\ \frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} &= \frac{1}{t^2} \left(\frac{n^2 t^{2n} + m^2 (l+1)t^{2m} r^{2l} + nm(l+2)t^{m+n} r^l}{t^{2n} + (l+1)t^{2m} r^{2l} + (l+2)t^{m+n} r^l} \right), & \frac{\dot{A}}{A} &= \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

En substituant ces formules dans l'équation (5.34) on trouve :

$$s[(n+mz)(1+z)(1+(l+1)z) - (n+m(l+1)z)(1+z)^2] = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

avec

$$A_1 = (n(n-1) + m(m-1)z)(1+z)(1+(l+1)z)$$

$$A_2 = -(n+mz)^2(1+(l+1)z)$$

$$A_3 = (n+m(l+1)z)(n+mz)(1+z)$$

$$A_4 = n(n-1) + m(m-1)(l+1)z$$

et

$$z = r^l t^{m-n}$$

Par consequent, on déduit que :

$$\begin{aligned} s[(n-m)lz - (n-m)lz^2] &= [m^2 - 2n^2 + (n-m) + nm]lz \\ &+ [2m^2 - n^2 + (n-m) - nm]lz^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (n-m)(s-1) + 2n^2 - m^2 - nm &= 0, \\ (n-m)(s+1) - 2m^2 + n^2 + nm &= 0, \end{aligned}$$

En résolvant ces deux dernières equations, nous trouvons

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2}(n-m), \\ n &= \frac{2}{3} - m. \end{aligned}$$

Si nous supposant les deux équations d'état

$$p = \omega\rho, \tag{5.35}$$

$$p_5 = \gamma\rho, \tag{5.36}$$

Où p est la pression dans l'espace 3D et p_5 la pression dans l'extra dimension, avec

$$\rho = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'}, \tag{5.37}$$

$$p = \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{A}}{A} - 2\frac{\ddot{R}'}{R} - 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - \frac{K'}{RR'} + \frac{K}{R^2} - 2\frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'}, \tag{5.38}$$

$$p_5 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R}. \tag{5.39}$$

Où ρ, p, p_5 et R sont des fonctions dépendent de (r, t) et K la courbure est une fonction de r , A est le facteur d'échelle de l'extra dimension dépend de t . Pour simplifier, nous supposons $K = 0$.

Tout calcul fait, nous trouvons

$$\begin{aligned} 5n^2 - 2n + 3\omega n^2 + s[2n + 3n\omega + s - 1] &= 0, \\ 5m^2 - 2m + 3\omega m^2 + s[2m + 3m\omega + s - 1] &= 0, \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons les solutions exactes suivantes

$$R(r, t) = r(t^{5/6} + t^{-1/6}r^{-3}), \quad (5.40)$$

$$A(t) = t^{-1/2}, \quad (5.41)$$

$$\rho(r, t) = -\frac{1}{36} \frac{54r^3t + 30r^9t^3 - 24}{r^9t^5 + 3r^3t^3 - 2t^2}, \quad (5.42)$$

$$q(r, t) = \frac{r(5t^2 - 2tr^{-3} - 7r^{-6})}{25t^2 - 10tr^{-3} + r^{-6}}, \quad (5.43)$$

Ici q est le paramètre de décélération. Le schéma 4 montre pour une valeur fixe de r , l'évolution des facteurs d'échelle R et A , le paramètre q de décélération, le temps et les paramètres de Hubble de l'espace $H_T = \frac{\dot{R}}{R}$ et $H_L = \frac{\dot{A}}{A}$ respectivement. Notons que :

D'abord, nous avons un grand craquement, "Big Crunch" (contraction accélérée) où le paramètre de Hubble H_T est négatif (mais la valeur absolue de H_T diminue), R diminue et q est négatif (mais la valeur absolue de q diminue). Naturellement, le facteur d'échelle A de l'espace supplémentaire de 1D diminue (contraction de l'espace supplémentaire de 1D). H_T s'annule et R tend vers R_0 (différents de zéro) et le facteur d'échelle des dimensions supplémentaires diminue toujours.

Après que H_T devient positif (expansion) et fonction croissante, R augmente et la décélération q est négative (c'est une expansion accélérée qui ressemble à un (big bang). H_T atteint un maximum quand $q = 0$ bien que R augmente toujours et A diminue. Finalement, H_T commence à diminuer et q est positif (expansion ralentie) et le facteur dimensionnelle A de 1D supplémentaire tend à une constante. Pendant toute cette évolution le paramètre de Hubble de l'espace diminue d'une manière continue. Ce scénario peut se produire après le premier "big bang" et ressemble au modèle cyclique du Turok où nous avons un "big crunch" suivi d'un

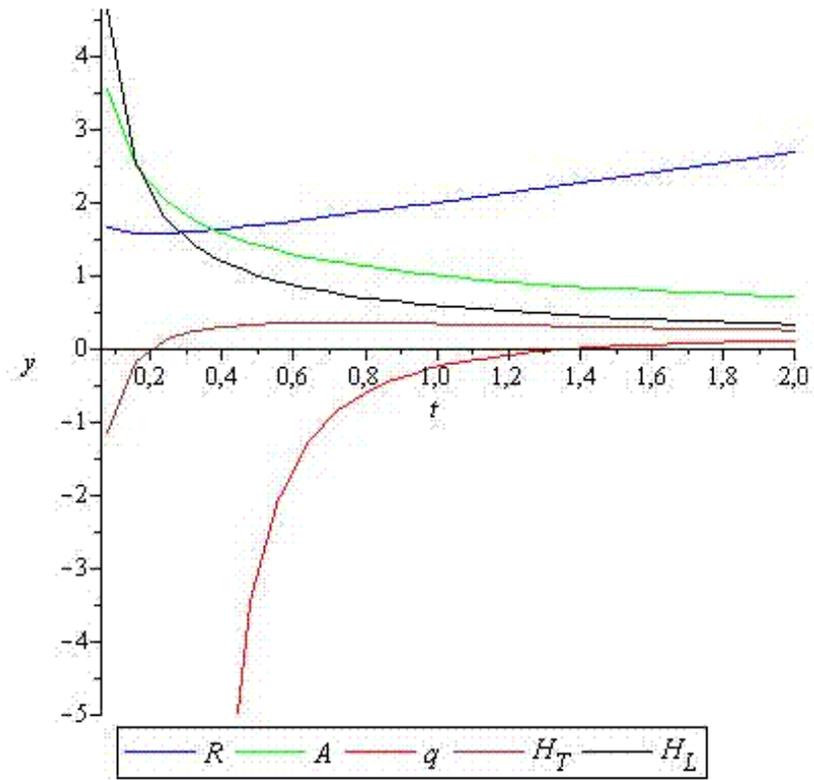


FIG. 5.2 – L'évolution de temps du 4D, Facteur d'échelle de 1D dimension supplémentaire, de décélération, paramètre de Hubble d'espace et de temps.

"Big Bang" mais avec des mécanismes différents. Dans le modèle du Turok les branes sont responsables de ce scénario, toutefois dans notre cas il est dû à l'effet de la non homogénéité d'espace-temps et des dimensions supplémentaires.

Chapitre 6

Théories $f(R)$

6.1 Equation du champ dans le formalisme metrique

On peut alors généraliser l'action précédente à une fonction quelconque $f(R)$ de la courbure scalaire,

$$S_G = \frac{1}{2k^2} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + S_M, \quad (6.1)$$

ou $f(R)$ peut prendre une forme comme :

$$f(R) = R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2} + \dots \quad (6.2)$$

et ainsi la relativité générale avec ou sans constante cosmologique ne serait qu'un cas particulier de tels modèles.

Les équations des champs ont été obtenues pour la première fois par [31]

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = k^2 T_{\mu\nu}^{(D)} \quad (6.3)$$

Où

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_M \quad (6.4)$$

Ceci satisfait l'équation de continuité

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

La trace de l'équation (6.3) donne

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = k^2 T. \quad (6.5)$$

et apporte une relation différentielle entre le tenseur énergie-impulsion et la courbure scalaire contrairement à la relation algébrique que l'on avait dans le cadre de la relativité générale

$$R = -k^2 T. \quad (6.6)$$

Ceci peut donc nous faire penser que ces équations apporteront un nombre plus important des solutions. Il est à noter également que le théorème de Birkhoff, qui indique que la solution de Schwarzschild est l'unique solution à symétrie sphérique dans le vide, n'est plus vérifiée. En effet $T = 0$ n'implique plus forcément $R = 0$. Si l'on regarde les solutions maximale-ment symétriques, i.e. pour R constant et dans le vide, on a

$$f'(R)R = 2f(R). \quad (6.7)$$

qui est une équation algébrique en R . Ainsi la solution de cette équation nous indiquera si $R = 0$ comme en relativité générale, un espace de De Sitter $R > 0$ ou anti de Sitter $R < 0$, comme un univers en présence d'une constante cosmologique de même signe. Contrairement à la relativité générale sans constante cosmologique, un espace sans matière ne conduit plus à un espace de Ricci plat.

Enfin on peut remarquer que le tenseur énergie-impulsion reste conservé comme en relativité générale, en effet on a

$$\nabla^\mu [f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R)] = 0. \quad (6.8)$$

Ainsi d'après l'équation(2.27)

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(D)} = 0. \quad (6.9)$$

Par conséquent l'équation de continuité est vraie non seulement pour $T_{\mu\nu}$, mais également pour le tenseur effective d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}^{(D)}$.

L'un des modèles étudiés dans les années 80 fut celui proposé par Starobinsky [32] où l'on définit

$$f(R) = R + \alpha R^2.$$

Celui-ci permet d'avoir une phase d'accélération dans l'univers primordial, mais le second terme (αR^2) devient trop petit aujourd'hui, il est alors négligeable et ne contribue plus. En effet la courbure scalaire est en général une fonction décroissante dans le temps. Aujourd'hui nous avons donc $f(R) \simeq R$, soit un univers en expansion décélérée. Ainsi le modèle ne permet pas de décrire l'énergie noire.

6.1.1 Equations de Friedmann généralisées

Nous considérons un espace-temps plat de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) avec

$$d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 dx^2. \quad (6.10)$$

Où t est le temp cosmique. Pour la métrique le tenseur de Ricci est donne par

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (6.11)$$

Où $H = \frac{\dot{a}}{a}$ est le parametre de Hubble.

Le tenseur énergie-impulsion est donné par $T^{\mu\nu} = (-\rho_M, p_M, p_M, p_M)$, où ρ_M est la densité d'énergie et p_M est la pression. Les équations du champ (2.27) pour FLRW donnent

$$3f'H^2 = \frac{(f'R - f)}{2} - 3Hf' + k^2\rho_M, \quad (6.12)$$

$$-2f'\dot{H} = f' - H\dot{f}' + k^2(\rho_M + p_M), \quad (6.13)$$

Où le fluide parfait satisfait l'équation de continuité

$$\dot{\rho} + 3H(\rho_M + p_M) = 0. \quad (6.14)$$

Nous introduisons aussi l'équation d'état de la matière, $\omega_M = \frac{p_M}{\rho_M}$. Le paramètre ω_M est constant, l'intégration de l'équation (6.14) donne

$$\rho_M \propto a^{-3(1+\omega_M)}. \quad (6.15)$$

Dans la section prochaine, nous tiendrons en compte les deux cas, matière non relativiste ($\omega_M = 0$) et rayonnement ($\omega_M = \frac{1}{3}$), pour discuter la dynamique de l'énergie noire.

6.2 Le formalisme de Palatini

Dans cette section nous discutons les théories de $f(R)$ dans le formalisme de palatini. Dans cette approche l'action est variée selon la métrique $g_{\mu\nu}$ et la connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, avec $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ sont traités comme des variables indépendents.

6.2.1 Equation du champs

Comme il a été mentionné dans l'introduction, dans le formalisme de Palatini, on traite la métrique et les connexions affines en tant que quantités indépendantes. Par conséquent, nous devons varier l'action par rapport aux deux afin d'obtenir les équations des champs. La variation par rapport à la métrique, $g_{\mu\nu}$ donne

$$f'(R)R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu}^{(M)}. \quad (6.16)$$

et

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_M$$

Où $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ est le tenseur de Ricci correspondant aux connexions $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Il est à noter que $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ est en générale différent du tenseur de Ricci en terme de connexions métrique $R_{\mu\nu}(g)$.

La trace de l'équation (6.16) donne

$$f'(R)R - 2f(R) = k^2 T, \quad (6.17)$$

Où $R(T)$ est relié directement à T et il est différent du scalaire de Ricci dans le formalisme métrique.

Plus explicitement nous avons la relation suivante

$$R(T) = R(g) + \frac{3}{2(f'(R(T)))^2}(\nabla_\mu f'(R(T)))(\nabla^\mu f'(R(T))) + \frac{3}{f'(R(T))}\square f'(R(T)) \quad (6.18)$$

Donc la variation de l'action donne

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{k^2 T_{\mu\nu}}{f'} - \frac{f'(R(T)) - f}{2f'}g_{\mu\nu} + \frac{1}{f'}(\nabla_\mu \nabla_\nu f' - g_{\mu\nu} \nabla f') - \frac{3}{2}(\partial_\mu f' \partial_\nu f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f')^2). \quad (6.19)$$

Dans la relativité générale ($f(R) = R - 2\Lambda$ et $f'(R) = 1$) les équations du champs (2.40) et (2.42) sont identiques aux équations (6.3) et (6.5) respectivement. Cependant la différence apparaît pour les modèles de $f(R)$ incluant des termes non linéaires dans R . Tandis que le terme cinétique $\square f'$ est présent dans l'équation (6.3) et absent dans le formalisme de Palatini. Ceci a une conséquence importante est que le mode oscillant, qui apparaît dans le formalisme métrique, n'existe pas dans le formalisme de Palatini.

6.3 Théories $f(R)$ dans un espace-temps a cinq dimensions

L'idée originale était de savoir comment ces nouvelles théories pouvaient différer de la relativité générale. Ces modèles ne sont pas récents, déjà en 1919 Weyl[33] s'y intéressait. Pour cela, il faut abandonner l'idée que la gravitation soit décrite par une équation du second ordre, comme nous le verrons plus loin,[34], [35]. Ces théories peuvent jouer un rôle important en tant que modèles phénoménologiques, guidant encore d'autres études théoriques de la gravité quantique. Ce genre de théories est semblable à ce que les théoriciens utilisent en physique des particules.

Dans ce chapitre nous considérons la généralisation du lagrangien d'Einstein-Hilbert à cinq dimensions. Les équations d'Einstein dans le repère de Jordan sont obtenues par des principes

variationnels. Puis, une transformation conforme est utilisée pour obtenir les équations dans le repère d'Einstein. Ce qui va suivre, nous allons étudier un modèle et chercher des solutions exactes.

6.3.1 Equation d'Einstein dans le formalisme métrique

Nous considérons la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L}_{GR} = f(R) \quad (6.20)$$

Où $f(R)$ est une fonction générale de la grandeur scalaire de courbure, R .

L'action donc est

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} (f(R) - 2\Lambda_5) M_{p(5)}^3 + 2\mathcal{L}_M, \quad (6.21)$$

Où Λ_5 est la constante cosmologique à 5-dimensions et \mathcal{L}_M le lagrangien de la matière, $\sqrt{-g}d^5x$ est le volume invariant avec g étant le déterminant de la métrique avec une signature $(-, +, +, +, +)$, $M_{p(5)}^3 = c^4/8\pi G^5$ est l'échelle fondamentale avec G^5 désigne la constante de gravitation dans l'espace temps à 5D.

Les équations d'Einstein sont obtenues par la variation de l'action

$$\delta S = \int d^5x [(\delta\sqrt{-g})f(R)M_{p(5)}^3 + \sqrt{-g}f'(R)(\delta R)M_{p(5)}^3 - 2\Lambda_5(\delta\sqrt{-g})M_{p(5)}^3 + 2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)], \quad (6.22)$$

Où $f'(R)$ est la dérivée de f par rapport à R .

Pour $\sqrt{-g}$ on a :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}. \quad (6.23)$$

La densité lagrangienne de la matière peut être identifiée avec le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ab}}. \quad (6.24)$$

Par conséquent, la variation de l'action est

$$\delta S = \int d^5x \sqrt{-g} \delta g^{ab} \left[-\frac{1}{2} g_{ab} f(R) M_{P(5)}^3 + \Lambda_5 g_{ab} M_{P(5)}^3 - T_{\mu\nu} + f'(R) R_{ab} M_{P(5)}^3 \right] \quad (6.25)$$

$$+ \int d^5x \sqrt{-g} f'(R) \delta R_{ab} g^{ab} M_{P(5)}^3. \quad (6.26)$$

Le tenseur de Riemann peut être écrit sous la forme :

$$R_{ijk}^m = \partial_j \Gamma_{ik}^m - \partial_k \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{ik}^c \Gamma_{cj}^m - \Gamma_{ij}^c \Gamma_{ck}^m. \quad (6.27)$$

En utilisant des coordonnées géodésiques ($\Gamma_{kj}^m = 0$), le tenseur de Riemann se réduit à

$$R_{ijk}^m = \partial_j \Gamma_{ik}^m - \partial_k \Gamma_{ij}^m. \quad (6.28)$$

Par conséquent, le tenseur de Ricci devient :

$$\begin{aligned} R_{ik} &= (\partial_j \Gamma_{ik}^m) g_m^j - (\partial_k \Gamma_{ij}^m) g_m^j \\ &= \partial_j \Gamma_{ik}^j - \partial_k \Gamma_{ij}^j. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dans ce système de coordonnées, on a $\partial_n g_{ij} = 0$. On utilise le fait aussi que la variation δ permute avec la dérivée partielle, c'est à dire la variation du tenseur de Ricci devient :

$$\delta R_{ik} = \partial_j (\delta \Gamma_{ik}^j) - \partial_k (\delta \Gamma_{ij}^j). \quad (6.30)$$

Il est à noter que la variation du tenseur de Ricci reste un tenseur.

Pour calculer la variation δR nous utilisons l'expression de la connection

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\gamma g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\gamma\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}), \quad (6.31)$$

La variation dans les coordonnées géodésiques donne

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\lambda} (\partial_\gamma g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\gamma\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\gamma \delta g_{\beta\lambda} + \partial_\beta \delta g_{\gamma\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\beta\gamma}). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Puisque nous travaillons dans les coordonnées géodésiques, ∂_μ est égal au $\nabla_{\mu\cdot}$, ce qui signifie que $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Donc

$$\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\lambda} (\nabla_\gamma g_{\beta\lambda} + \nabla_\beta g_{\gamma\lambda} - \nabla_\lambda g_{\beta\gamma}). \quad (6.33)$$

Nous pouvons maintenant aller à l'équation (6.26) et en utilisant (6.30), elle devient

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) \delta R_{ab} g^{ab} &= \sqrt{-g} [\nabla_c (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ac}^c)] \\ &\quad - \sqrt{-g} [(\nabla_c f') g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b (f') g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

L'integration du premier terme dans le coté droit de l'équation disparaît par le théorème de Stokes

$$\int_{\text{volume}} dx^5 \sqrt{-g} \nabla_c X^c = \int_{\text{surface}} d\Sigma_c X^c, \quad (6.35)$$

en considérant, naturellement, la frontière à l'infini de telle sorte que les variations des quantités physiques s'annule. Pour retrouver la relativité générale, nous devons juste choisir $f(R) = R$, qui implique $f'(R) = 1$. Dans cette situation, les limites contenant la variation dans les symboles de Christoffel s'annule, expliquant pourquoi son calcul n'est pas nécessaire en relativité générale.

Utilisons l'équation (6.33) pour calculer (6.34)

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) \delta R_{ab} g^{ab} &= \sqrt{-g} [\nabla_c (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ac}^c)] \\ &+ \sqrt{-g} [g^{cd} \nabla^b (\delta g_{cd}) \nabla_b f' - \nabla^b (\delta g_{bd}) \nabla^d f'] \\ &= \sqrt{-g} [\nabla_c (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (g^{ab} f' \delta \Gamma_{ac}^c)] \\ &+ \sqrt{-g} [\delta g_{ab} \nabla^a \nabla^b f' - g^{ab} \delta g_{ab} \square f'] \\ &+ \sqrt{-g} [\nabla^b (g^{cd} \delta g_{cd} \nabla_b f') - \nabla^b (\delta g_{bd} \nabla^d f')]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

D'après le théorème de Stokes, la première ligne et la dernière s'annulent. Avant d'utiliser ceci sur l'intégral de δS , il est nécessaire d'exprimer les variations dans l'équation (6.36) comme par exemple la variation de l'inverse de la métrique. Dans la (6.36), il y a un terme $\delta g_{ab} g^{ac} g^{bd} \nabla_c \nabla_d f'$ en plus. En utilisant le fait que :

$$\delta g_{ab} g^{ac} g^{bd} = \delta g^{cd} - g_a^d \delta g^{ac} - g_b^c \delta g^{bd}. \quad (6.37)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^5 x \sqrt{-g} \delta g^{ab} \left[-\frac{1}{2} g_{ab} f M_{P(5)}^3 + \Lambda_5 g_{ab} M_{P(5)}^3 - T_{ab} + f' R_{ab} M_{P(5)}^3 \right] \\ &+ \int d^5 x \sqrt{-g} \delta g^{ab} [g^{ab} \delta g_{ab} \square f' - \nabla_a \nabla_b f'] M_{P(5)}^3. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Donc, l'équation d'Einstein a 5-dimensionse dans le formalisme métrique est donnée par

$$f' R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f - (\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square) f' = \frac{1}{M_{P(5)}^3} T_{ab} - g_{ab} \Lambda_5, \quad (6.39)$$

Ou $\frac{1}{M_{P(5)}^3} = k = 8\pi G^{(5)}/c^4$, ou $G^{(5)}$ est la constante de gravité dans l'espace-temps à 5D

Elle peut se mettre sous la forme :

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{1}{2}g_{ab}\frac{f - Rf'}{f'} + \frac{1}{f'}\nabla_a\nabla_b f' - g_{ab}\frac{1}{f'}\square f' - g_{ab}\frac{1}{f'}\Lambda_5 + \frac{1}{M_{P(5)}^3}\frac{1}{f'}T_{ab}. \quad (6.40)$$

Contractant l'équation (6.39) avec g_{ab} , nous obtenons l'équation dynamique pour le champ scalaire $f'(R)$

$$\square f' = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{M_{P(5)}^3}T - Rf' + \frac{5}{2}f'\right]. \quad (6.41)$$

Ici $g_{ab}g^{ab} = 5$ au lieu de 4. l'équation dynamique de $f'(R)$ diffère de celle à 4D.

6.3.2 Les équations du champs

Soit un espace plat à cinq dimensions ou la metrique a la forme generale :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \lambda dx^5 dx^5, \quad (6.42)$$

ou le système de coordonnées est $\{x^\mu, x^5\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Le tenseur de Ricci et l'équation dynamique de λ dans l'espace 5D et 4D, prends les formes suivantes[36]

$$R_{ab}^{(4)} = \frac{1}{2}\lambda^{-1}D_a D_b \lambda - \frac{1}{4}\lambda^{-2}(D_a \lambda)D_b \lambda + h_a^m h_b^n R_{mn}, \quad (6.43)$$

$$D^a D_a \lambda = \frac{1}{2}\lambda^{-1}(D^a \lambda)D_a \lambda - 2R_{ab}\xi^a \xi^b. \quad (6.44)$$

Avec $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^5}\right)^a$ est le vecteur de Killing, et D_a est la dérivée covariante dans l'espace à 4D, et est définie comme[37]

$$D_a T_{b_1 \dots b_n}^{c_1 \dots c_m} = h_a^d h_{b_1}^{e_1} \dots h_{b_n}^{e_n} h_{f_1}^{c_1} \dots h_{f_m}^{c_m} \nabla_d T_{e_1 \dots e_n}^{f_1 \dots f_m} \quad (6.45)$$

Les équations du champs donné par[36] sont :

$$\begin{aligned}
G_{ab}^{(4)} &= \frac{\lambda^{-1/2}}{f'(R)} T_{ab}^{(4)} + h_{ab} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} \\
&+ \frac{1}{2} \lambda^{-1} (D_a D_b - h_{ab} D^c D_c) \lambda - \frac{1}{4} \lambda^{-2} [(D_a \lambda) D_b \lambda - h_{ab} (D^c \lambda) D_c \lambda] \\
&+ \frac{1}{f'(R)} (D_a D_b - h_{ab} D^c D_c) f'(R) - \frac{1}{2f'(R)} \lambda^{-1} h_{ab} (D^c \lambda) D_c f'(R), \tag{6.46}
\end{aligned}$$

Et les équations dynamiques de λ et $f'(R)$ sont :

$$\begin{aligned}
D^a D_a \lambda &= \frac{\lambda^{1/2}}{f'(R)} \left(\frac{1}{2} T^{(4)} - \frac{3}{2} p \right) + \frac{1}{2} \lambda^{-1} (D^a \lambda) D_a \lambda - \frac{1}{f'(R)} (D^a \lambda) D_a f'(R) \\
&+ \frac{\lambda}{f'(R)} \left[\frac{1}{4} f(R) - \frac{1}{2} R f'(R) \right], \tag{6.47}
\end{aligned}$$

$$D^a D_a f'(R) = \frac{\lambda^{-1/2}}{4} (T^{(4)} + p) - \frac{1}{2} \lambda^{-1} (D^a \lambda) D_a f'(R) + \frac{1}{4} \left[\frac{5}{2} f(R) - R f'(R) \right], \tag{6.48}$$

Soit un univers plat de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \tag{6.49}$$

Donc, les deux composantes des équations du champs(6.46) sont :

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\lambda^{-1/2}}{f'(R)} \rho - \frac{3 \dot{a} \dot{\lambda}}{2 a \lambda} - 3 \frac{\dot{a} f''(R) \dot{R}}{a f'(R)} - \frac{1 \dot{\lambda} f''(R) \dot{R}}{2 \lambda f'(R)} - \frac{f(R) - R f'(R)}{2 f'(R)} \tag{6.50}$$

et

$$\begin{aligned}
-(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}) &= \frac{\lambda^{-1/2}}{f'(R)} P + \frac{\dot{a} \dot{\lambda}}{a \lambda} - \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 + 2 \frac{\dot{a} f''(R) \dot{R}}{a f'(R)} + \frac{1 \dot{\lambda} f''(R) \dot{R}}{2 \lambda f'(R)} - \frac{f(R) - R f'(R)}{2 f'(R)} \\
&+ \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} + \frac{f'''(R) \dot{R}^2 + f''(R) \ddot{R}}{f'(R)}. \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Les équations dynamiques de λ et $f'(R)$ sont respectivement

$$\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\lambda^{-1/2}}{f'(R)} \left(\frac{\rho}{2} \right) - 3 \frac{\dot{a} \dot{\lambda}}{a \lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda} f''(R) \dot{R}}{\lambda f'(R)} - \frac{f(R) - 2R f'(R)}{4 f'(R)}, \tag{6.52}$$

et

$$\frac{f'''(R) \dot{R}^2 + f''(R) \ddot{R}}{f'(R)} = \frac{\lambda^{-1/2}}{f'(R)} \left(\frac{\rho}{4} - P \right) - 3 \frac{\dot{a} f''(R) \dot{R}}{a f'(R)} - \frac{1 \dot{\lambda} f''(R) \dot{R}}{2 \lambda f'(R)} - \frac{\frac{5}{2} f(R) - R f'(R)}{4 f'(R)} \tag{6.53}$$

Ici "''" denote une dérivation par rapport au temps.

Notons que l'équation de continuité est donnée par

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}P = 0, \quad (6.54)$$

6.4 Le Modèle

Dans notre modèle, on suppose que la fonction $f(R)$ a la forme suivante :

$$f(R) = R^m, \quad m \in]-\infty, +\infty[.$$

Nous considérons aussi des formes en loi de puissance pour le facteur d'échelle a , le tenseur de Ricci R respectivement :

$$\frac{a}{a_0} = t^n, \quad R = t^s.$$

De plus, nous avons supposons une équation d'état d'un fluide parfait :

$$p = w\rho.$$

et prendre $\ddot{\lambda} = 0$ qui implique $\lambda = bt + b_0$ où b et b_0 sont des constantes d'intégration.

Des simplifications directes donnent :

$$\begin{aligned} f'(R) &= mR^{m-1}, \quad f''(R) = m(m-1)R^{m-2}, \quad f'''(R) = m(m-1)(m-2)R^{m-3}, \\ \dot{R}(t) &= st^{s-1}, \quad \ddot{R} = s(s-1)t^{s-2}, \\ \frac{\dot{a}}{a} &= nt^{-1}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = n(n-1)t^{-2}. \end{aligned}$$

Substituant ces formules dans les équations du champs[(6.50),(6.51),(6.52) et (6.53)], on trouve :

$$2b^{-1/2}t^{2m-5/2}\rho = [6n^2m - 12nm^2 + 15nm - 2m^2 + m + 1]t^{-2}, \quad (6.55)$$

$$2b^{-1/2}t^{2m-5/2}w\rho = [-8m^3 - 6n^2m + 8nm^2 - 6nm + 14m^2 - \frac{9}{2}m - 1]t^{-2}, \quad (6.56)$$

$$2b^{-1/2}t^{2m-5/2}\rho = [12nm - 8m^2 + 4m + 1]t^{-2}, \quad (6.57)$$

$$2b^{-1/2}t^{2m-5/2}(1 - 4w)\rho = [32m^3 - 48nm^2 + 48nm - 56m^2 + 22m + 5]t^{-2}, \quad (6.58)$$

Où $s = -2$.

Donc, on a d'après(6.55) et (6.57),

$$6n^2m - 12nm^2 + 3nm + 6m^2 - 3m = 0 \quad (6.59)$$

Et (6.56) ,(6.57) et (6.58) donne

$$-12nm - 8m^2 + 16nm^2 + 24n^2m = 0 \quad (6.60)$$

Si nous utilisons les équations(6.55) et(6.56), nous trouvons

$$w = \frac{8nm^2 + 14m^2 - 8m^3 - \frac{9}{2}m - 6nm - 6n^2m - 1}{6n^2m - 12nm^2 + 15nm - 2m^2 + m + 1} \quad (6.61)$$

Des équations(6.59) et (6.60), on a

$$n = -0.25 \quad m = 0.375$$

$$n = 0.5$$

Donc, nous trouvons les solutions exactes suivantes

$$f(R) \approx R^{-0.25}, f(R) = R^{0.5} \quad (6.62)$$

$$R = t^{-2} \quad (6.63)$$

et

$$\frac{a}{a_0} = t^{-0.25}, \frac{a}{a_0} = t^{0.5} \quad (6.64)$$

Où a_0 est le facteur d'échelle actuel. Donc, d'après ces résultats, on a une expansion de l'univers.

Des simplifications directes donnent le paramètre de décélération q avec une valeur négative :

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{n(n-1)}{n^2}$$

$$q = -5,$$

$$q = 1.$$

Par conséquent, on a deux phase la première est contraction accéléré, et la deuxième expansion décéléré.

Chapitre 7

Conclusion

Cette these porte sur le probleme de l'énergie noire cosmologique et l'expansion acceleree de notre univers.

Dans la premiere partie, on a présenté le modèle standard cosmologique du Big Bang chaud, ainsi que les observations qui soulèvent la question de la nature de l'énergie noire. Puis nous avons considere la physique au-delà du modèle standard : les dimensions supplémentaires. Nous nous somme intéressés dans le troisieme chapitre par le modèle de la constante cosmologique, où on a introduit un modele de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker (FLRW) avec une dimension supplémentaire où l'acceleration de la cinquieme dimension est nulle . Nous nous somme aussi intéressé à l'étude dynamique de ce modèle.

Dans le chapitre suivant nous avons montré que l'expansion peut etre due à la non homogénéité de l'espace temps. Donc nous n'aurions pas besoin d'introduire l'énergie noire pour expliquer les observations du supernovae. Dans ce même chapitre, nous nous avons aussi etudie un modèle d'univers non homogène avec une dimension supplémentaire.

Enfin dans le dernier chapitre et après que nous avons donné un aperçu des théories $f(R)$ dans l'éqpace-temps à 4 dimensions, nous avons étendu l'étude de ces théories où la gravité est décrite par des équations à cinq dimensions,

Comme conclusion nous avons montré au cours de ce memoire que ces modèles etudies globalement explique bien l'expansion accélérée de l'univers sans aucun besoin d'introduire le scenario de l'énergie noire.

Bibliographie

- [1] D.N. Spergel, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377 (2007).
- [2] S. Perlmutter, *et al.*, *Astro. J.* 517, 586, (1999).
- [3] A. Riess, *et al.*, *Astro. J.* 116, 1038 (1998).
- [4] C. Rosset, These de doctorat de l'université paris VII, (2003).
- [5] Y.B. Zel'dovich, *Sov. Phys. Usp.*, vol.11, 393 (1968).
- [6] I. Antoniadis, N.Arkani Hammed, S.Dimopolous and G.R.Dvali, *Phys. Lett. B* 436, 257 (1998).
- [7] S.Weinberg "*Gravitational and Cosmology*". John Weily & sons, New York, (1972).
- [8] E. W. Kolb & M. S. Turner, "*The Early Universe*", Addison-Wesley,Reading, (1990).
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, "*Gravitation*", W. H.Freeman, San Francisco (1973).
- [10] P.de Bernadis,*et al.*, "A flat universe from high resolution maps of cosmic microwave background radiation" ,*Nature* 404, 955 (2000).
- [11] A.Arbey, thèse de Doctorat de l'université de savoie en physique, LAPTH, (2002).
- [12] A.A. Penzias & R.W. Wilson, *Astro. J.* 142 (1965).
- [13] .G. Gamow, *Phys. Rev. Lett.* 70, 572 (1946).
- [14] L. Wang, P.J. Stenhard, *Astro. J.*508, 483 (1998).
- [15] R. Caldwell , M. Kamionkowski, *Phys .Rev. Lett.*91, 071301 (2003).
- [16] R. de Putter, E.V. Linder, *Astropart. Phys.*28, 272 (2007).
- [17] M.C. Bento, O. Bertolami, A.A. Sen, *Phys. Rev. D*66, 043507 (2002).

-
- [18] *D.J. Eisenstein , et al. Astrophys. J., vol. 633, 574 (2005).*
- [19] C.Csàki." *TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes "* .(2001), hep-ph/0404096.
- [20] L.Randell and R.Sundrum, *Phy. Rev. Lett.* 83, 3373 (1999).
- [21] B. Koch, M. Bleicher, H. Stocker, *Phys. Lett.* B672, 76 (2009).
- [22] S. Dimopoulos, G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* 87, 161602 (2002).
- [23] K. Becker, M. Becker , J.H. Schwarz, Cambridge, UK : Cambridge Univ. Pr. 739 (2007).
- [24] Yakov B. Zel'dovich. *Sov. Phys. Usp., vol. 11, 393 (1968).*
- [25] Mohammedi, *Phys. Rev.* D65, 104018 (2002).
- [26] H. Alnes, M. Amarzguioui, and Ø. Grøn. *Phys. Rev.*, D73, 083519 (2006).
- [27] Ø.GrØn, S.Hervik, "*Einstein's General Theory of Relativity*" ,Springer (2007).
- [28] G. Lemaître., *Annals Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys.*, A53, 85 (1933).
- [29] R.C.Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci.*,20, 176 (1934).
- [30] H.Bondi, *Mon. Not. Roy. Astrn. Soc.*,107, 426 (1947).
- [31] Hans A. Buchdahl, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 150, 1(1970).
- [32] Alexei A. Starobinsky, *Phys. Lett.*, vol. B91, 102 (1980).
- [33] H.Weyl, *Annalen phys*, vol. 59,101 (1919).
- [34] T.Sotiriou, *class.Quant. Grav.* D75, 440042 (2007).
- [35] T.Sotiriou et s. Liberati, *Annal. Phys.*, vol. 322, 966 (2007).
- [36] Yongge Ma ,et al , "*Five-dimensional metric $f(R)$ gravity and the accelerated universe*". *Phys.Rev.*D81, 064003 (2010).
- [37] Yongge Ma,et al, "*Cosmological Implications of 5-dimensional Brans-Dicke Theory*". *phys. Lett. B* 681, 210 (2009).

Annexe A

Les équations d'Einstein

Comme nous avons vu dans le chapitre 2, les équations d'Einstein sont donné par

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (7.1)$$

Où $G_{\mu\nu}$ est le Tenseur d'Einstein, $T_{\mu\nu}$ est le Tenseur impulsion énergie, $R_{\mu\nu}$, R sont le tenseur et le scalaire de Ricci respectivement.

Le Tenseur de Ricci est donné par

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (7.2)$$

Où $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ est le symbol de Christoffel qui peut être écrit sous la forme :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (7.3)$$

et R est la trace de $R_{\mu\nu}$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7.4)$$

Pour le métrique de Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB)

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2(r,t)}{1-k(r)} dr^2 - R^2(r,t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - A^2(t)dy^2 \quad (7.5)$$

Les symboles de Christoffel sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{R}'(r,t)}{R'(r,t)}, & \Gamma_{ty}^y &= \Gamma_{yt}^y = \frac{\dot{A}(r,t)}{A(r,t)}, & \Gamma_{yy}^t &= A(t)\dot{A}(t), \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{\dot{R}'(r,t)R'(r,t)}{1-k(r)}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= \dot{R}(r,t)R(r,t), & \Gamma_{\phi\phi}^t &= \dot{R}(r,t)R(r,t)\sin^2 \theta, & \Gamma_{yy}^t &= A(r,t)\dot{A}(r,t), \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{2R''(r,t)(1-k(r)) + R'(r,t)k'(r)}{R'(r,t)(1-k(r))}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{(k(r)-1)R(r,t)}{R'(r,t)}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{(k(r)-1)R(r,t)}{R'(r,t)}, \\ \Gamma_{\theta t}^\theta &= \Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{\dot{R}(r,t)}{R(r,t)}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{R'(r,t)}{R(r,t)}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\phi t}^\phi &= \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{R}(r,t)}{R(r,t)}, & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{R'(r,t)}{R(r,t)}, & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \end{aligned}$$

Donc les Tenseurs de Ricci sont

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R'}, \\
R_{rr} &= \frac{1}{k(r)-1} \left[\frac{\dot{R}'R'\dot{A}}{RA} + k'(r) + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R} + \ddot{R}' \right], \\
R_{\theta\theta} &= \frac{\dot{A}}{A}\dot{R}R + k(r) + \dot{R}^2 + \frac{k'(r)R}{R'} + \frac{\dot{R}'\dot{R}R}{R'} + \ddot{R}R, \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}, \\
R_{yy} &= 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{A}A + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{R'} + \ddot{A}.
\end{aligned}$$

Le scalaire de Ricci est

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 4\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR} + 2\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{k(r)}{R^2} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{k'}{RR'} + 4\frac{\dot{R}'\dot{R}}{RR} + 4\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\ddot{R}'}{R'} \quad (7.6)$$

Substituant dans l'équation d'Einstein; nous trouvons

$$\begin{aligned}
E_t^t &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'} \\
E_r^r &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} \\
E_\theta^\theta = E_\varphi^\varphi &= \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{R}'}{R} + \frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{2RR'} + \frac{\dot{A}\dot{R}}{AR} + \frac{\dot{A}\dot{R}'}{AR'} \\
E_y^y &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} + \frac{K'}{RR'} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}'}{R}
\end{aligned}$$

Annexe B

Portrait de phase

Les portraits de phase constituent un outil précieux pour l'étude des systèmes dynamiques ; ils consistent en un ensemble de trajectoires-types dans l'espace d'état. Cela permet de caractériser la présence d'un attracteur, d'un répulseur ou d'un cycle limite pour les valeurs de paramètres choisies. Pour comparer les comportements des systèmes, on utilise le concept d'homéomorphisme, qui permet d'analyser les analogies entre deux portraits de phase différents pour déterminer s'ils représentent le même comportement dynamique qualitatif.

Une autre représentation graphique présente les trajectoires-types du système par des flèches, les états d'équilibre stables par des points et les états d'équilibre instables par des cercles dans un espace d'état. Les axes sont des variables d'état.

Soit un système (autonome) d'équations différentielles $\dot{x}(t) = f(x(t))$, où $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On va vu que, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution maximale (J_a, x_a) de l'équation satisfaisant la condition initiale $x_a(0) = a$: c'est la solution (ou trajectoire) passant par a .

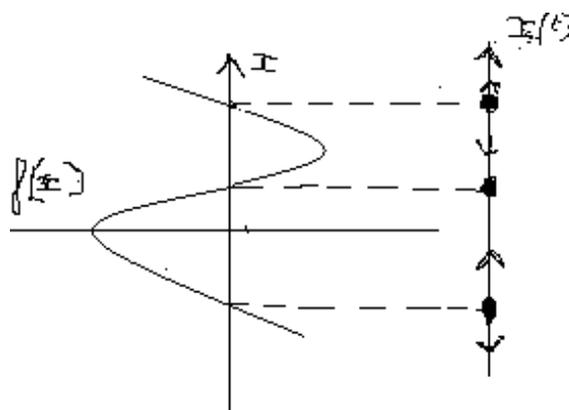
L'étude qualitative des solutions de ce système est l'étude de l'ensemble des solutions (ou trajectoires) d'un point de vue géométrique : on s'intéresse non pas à une solution particulière mais l'ensemble $\{(J_a, x_a) ; a \in \mathbb{R}^d\}$.

Définition 1

Le portrait de phase de l'équation $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est le dessin des trajectoires $\{\{x_a(t)\} ; a \in \mathbb{R}^d, t \in J_a\}$

Exemples : On se limite au cas de la dimension 1 et au cas dimension deux.

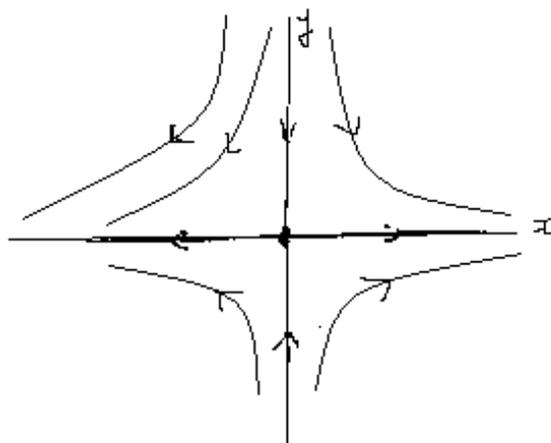
Un exemple en dimension 1 :



En deux dimensions :

Le système linéaire
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases}$$

Solutions : $x(t) = x_0 \exp(2t)$, $y(t) = y_0 \exp(-t)$: courbes paramétrées telles que $xy^2 = cst$.



Portrait de phase des systèmes linéaires en dimensions 2

On donne ici les portraits de phase des systèmes linéaires en dimension 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{y}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

On commence par remarquer que, si $P \in GL_2(\mathbb{R})$, l'application $x \mapsto y = Px$ est un isomorphisme linéaire qui envoie les trajectoires de $\dot{x} = Ax$ sur les trajectoires de $\dot{y} = (PAP^{-1})y$, donc seule compte la classe de similitude de A . Pour déterminer cette dernière, on introduit le polynôme caractéristique de A :

$$p_A(X) - \det(A - XI_2) = X^2 - (a + d)X - (ad - bc) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A).$$

Soit Δ le discriminant $\Delta := \text{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc$.

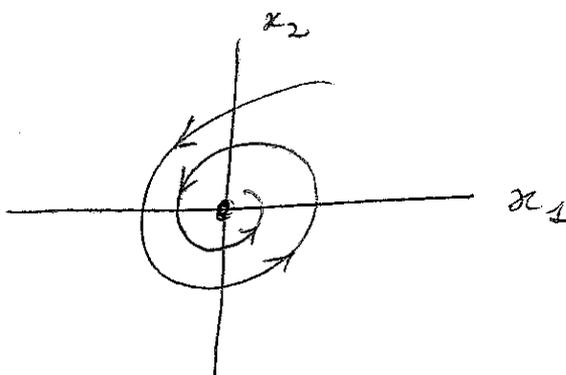
Premier cas : $\Delta < 0$. Il y a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

A semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. En passant en coordonnées polaire, on obtient les équations

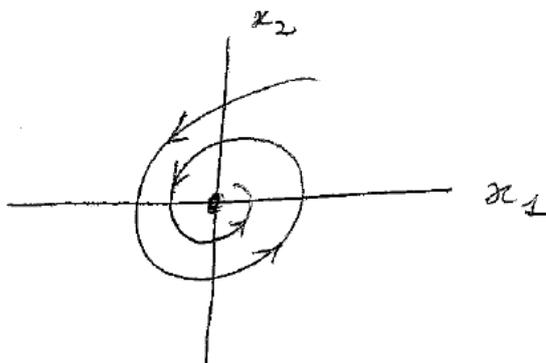
$$\dot{r} = \alpha, \quad \dot{\theta} = \beta.$$

Trois cas (on remarque que $\text{Tr}(A) = 2\alpha$) :

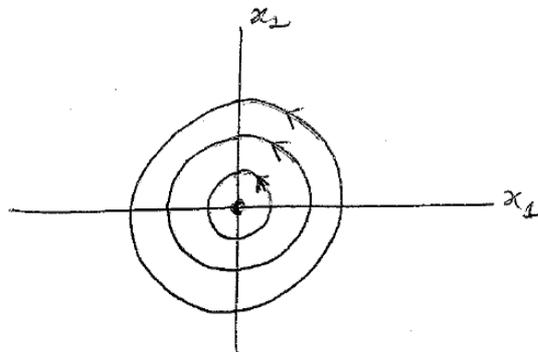
1. $\text{Tr}(A) > 0$: foyer instable



2. $\text{Tr}(A) < 0$: foyer stable



3. $\text{Tr}(A) = 0$: Centre

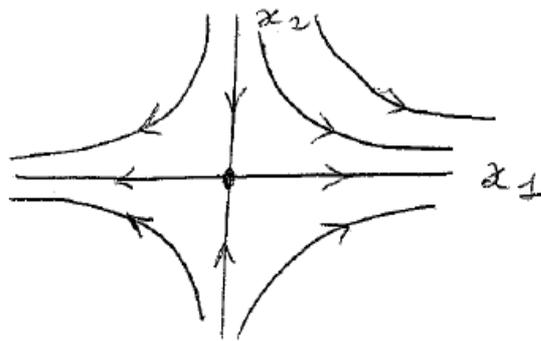


Deuxième cas : $\Delta > 0$, Il y a deux valeurs propres distinctes λ, μ . La matrice A est alors diagonalisable et on est ramené au cas où

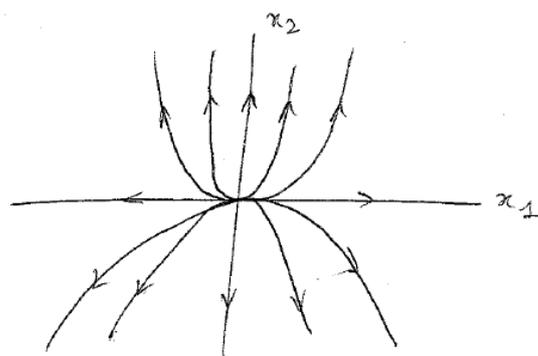
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Quatre cas (on remarque que $Tr(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$) :

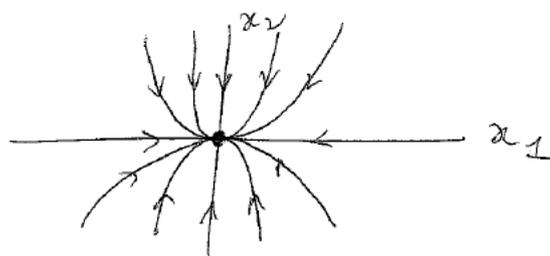
1. $\det(A) < 0$: les valeurs propres sont de signe différent : point selle,



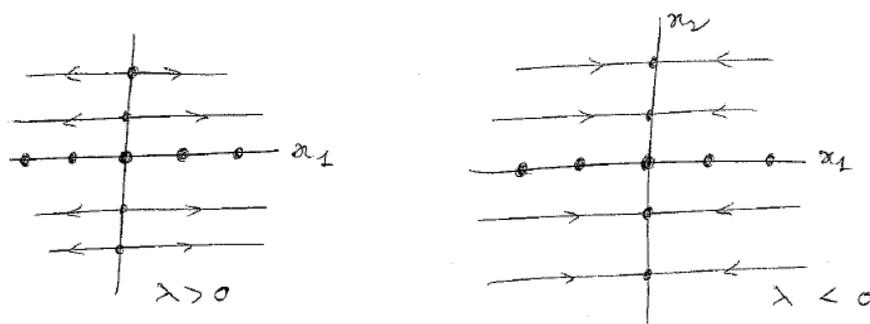
2. $\det(A) > 0$ et $Tr(A) > 0$: les valeurs propres sont positives : noeud instable,



3. $\det(\mathbf{A}) > 0$ et $\text{Tr}(\mathbf{A}) < 0$: les valeurs propres sont négatives : noeud stable.



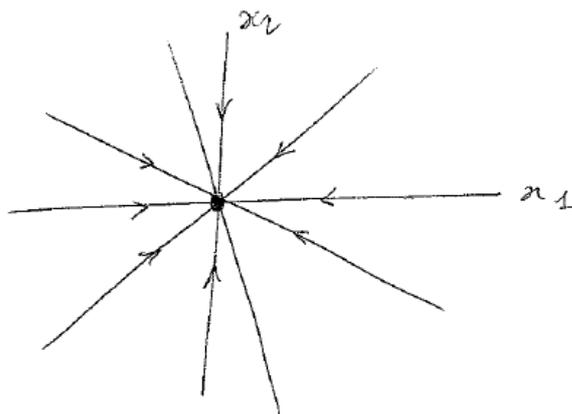
4. $\det(\mathbf{A}) = 0$: une des valeurs propre, disons μ est nulle (cela est un cas dégénéré). Selon le signe de λ , on a les portrait de phase suivants.



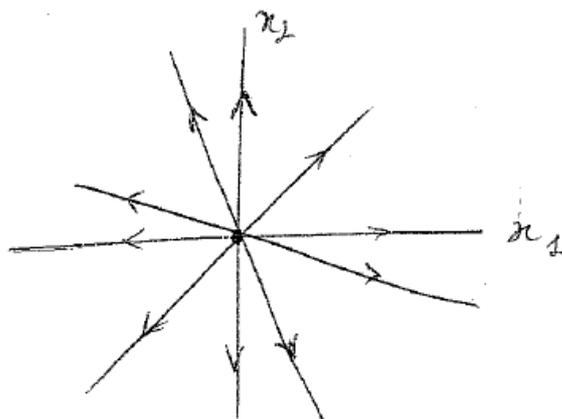
On aborde maintenant des cas plus dégénérés

Troisième cas : $\Delta = 0$. Il y a une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$. Si A est diagonalisable, on est ramené à la situation $A = \lambda I_2$. En écartant le cas trivial $\lambda = 0$, on obtient deux cas.

1. $\lambda < 0$: noeud stable,



2. $\lambda > 0$: noeud instable,

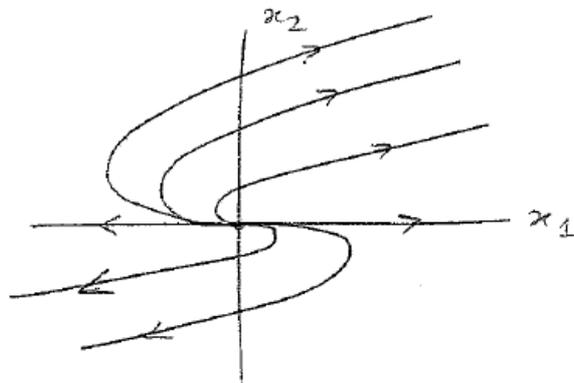


Si A est non diagonalisable alors A est semblable à la matrice

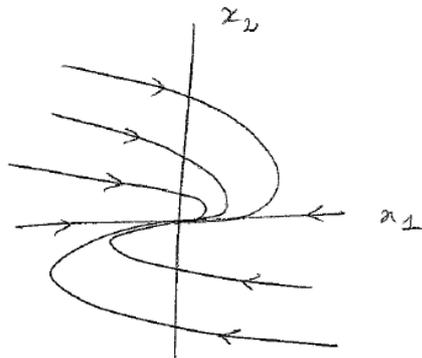
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Encore trois cas :

1. $\lambda > 0$: noeud dégénéré instable



$2.\lambda < 0$: noeud dégénéré instable



Resumé

Plusieurs étapes furent nécessaires à la construction du modèle standard de la cosmologie, basée sur l'observation de notre univers, et la représentation de l'infiniment grand. Depuis 1915 avec l'élaboration de la relativité générale et confrontation à certaines observations de l'univers, les physiciens ont confirmé théoriquement une expansion décélérée de l'univers. Cependant, récemment en 1998, deux équipes américaines ont mis en évidence son accélération. Ceci pose alors un problème entre le théorie et l'observation. Pour cela de très nombreux modèles d'énergie noire furent élaborés. Dans ce mémoire, j'aborde plusieurs modèles utilisant l'idée d'extra dimensions et construits avec des différentes contraintes reposant sur leur viabilité.

Mots-clefs : cosmologie, énergie noire, modèle FRW, modèle LTB, théories $f(R)$.

Cosmology with extra dimensions and Dark Energy

Abstract

Several steps were necessary for the construction of the standard model of cosmology, the vision of our universe, the representation of the infinity. Since 1915, with Einstein's formulation of general relativity and several observations of the universe, the physicists are confirmed theoretically an expanding decelerated universe. However, in 1998, two U.S. research teams pointed out an acceleration. This fact was largely confirmed since then. This raises a problem between the theory and the observation. Many models of dark energy were developed in order to resolve this problem. I address in this thesis major many models where we used the idea of extra dimensions where our universe are more than 4 dimensions and built with different several constraints on the local viability of this model.

Keys-words : cosmology, dark energy, FRW model, LTB model, $f(R)$ theories.