

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L 'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE CONSTANTINE I

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:

Série:

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER

EN PHYSIQUE

SPECIALITE

PHYSIQUE THEORIQUE

THEME

Etudes et applications à la Physique du LHC

PAR

HAFFAR BAKIR

SOUTENU LE: /.../2013

Devant le jury :

Président	N. MEBARKI	Prof. Univ. Constantine 1
Rapporteur	O. BENABBES - SAHLI	Prof. Univ. Constantine 1
Examineurs	A. BENSLAMA	Prof. Univ. Constantine 1
	H. AISSAOUI	M.C. Univ. Constantine 1
	S. ZAIM	M.C. Univ. H.Lakhdar Batna

تقدير و عرفان

تم إتمام إنجاز هذا العمل – بتوفيق الله وعونه - بمخبر الفيزياء الرياضية ودون الذرية (LPMS)¹ جامعة قسنطينة 1، وتحريره بواسطة برنامج كتابة النصوص العلمية – المتميز (SWP 5.5)² تحت إشراف البروفسور وناسة بن عباس التي أتقدم إليها بجزيل شكري واحترامي على اقتراحها موضوع البحث علي ومساعدتها لي في عديد الجوانب منه.

كما أتقدم بخالص امتناني وتقديري للأستاذ البروفسور نور الدين مباركي على مرافقته لي في هذه الخطوات الأولى لي في طريق البحث العلمي الشاق والطويل، ولما يبذله من جهود في سبيل نشر العلم والمعرفة .

أثني حسناً على السادة أعضاء لجنة المناقشة، الأساتذة :

* البروفسور عاشور بن سلامة على قبوله فحص هذا الجهد ومناقشته، وعلى مناقشاته العلمية القيمة .

* الدكتور سليمان زعيم أستاذ محاضر بجامعة باتنة على قبوله مناقشة هذه المذكرة .

* الدكتور حبيب عيساوي، أستاذ محاضر بجامعة قسنطينة 7 على قبوله مناقشة هذه المذكرة .

أتقدم بشكري الجزيل وامتناني لـ :

* والديّ الكريمين - أمي وأبي - اللذان تعلمت منهما حب العلم والمثابرة في سبيله ، ولم يتوقفا يوماً عن دعم، أترك مكافأتهما للعلي القدير لأنه ليس لي إلى ذلك سبيل .

* أهلي على صبرهم الجميل ، وابنتي 'فائزة' وكل من أخي وأختي اللذين ساهما في هذا الجهد البسيط .

* كل من له أيادي بيضاء علينا- من أساتذة كرام تتلمذنا على أيديهم وزملاء دراسة استفدنا من خبرتهم وأصحاب وغيرهم ممن التقينا- طوال مسيرتنا الدراسية منذ ما يقرب من خمسة وعشرين سنة .

* لجنة دعم البحث العلمي بالعاصمة على جهودها المباركة .

إلى

* ورح الشيخ النحرير إبراهيم بن أبي بكر ³ ، أحد رواد النهضة العلمية المباركة بجنوبنا الكبير

- وادي ميزاب - فجر القرن الماضي .

* كل من يؤمن بأنه لن تقوم لنا قائمة - نحن المسلمون - إلا بالعلم والعمل .

* كل محبي العلوم والمعرفة .. وخاصة محبي الفيزياء النظرية وعددهم قليل !

لكل هؤلاء جزاكم الله عنا كل خير، وإليكم أهدي هذا الجهد..

¹ Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique

² Scientific Work Place 5.5 (<http://www.mackichan.com>)

³ دَرَس ببلدة بني يزقن بـ مزاب خلال النصف الأول من القرن الماضي ، تخرج على يديه عديد علماء ومشائخ مزاب الحاليين، رحمه الله (1885 - 1954)

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modèle standard de la Physique des particules élémentaires	3
1.1 Modèle standard électrofaible (Salam-Glashow-Weinberg)	3
1.1.1 le groupe abélien $U(1)$	3
1.1.2 Le groupe non abélien $SU(2)$	6
1.2 Lagrangien du modèle standard électrofaible	8
1.3 Modèle standard	9
1.3.1 Le groupe non abélien $SU(3)$	9
1.4 Génération des masses pour les bosons de jauge du modèle standard : . .	14
1.5 Lagrangien final	16
2 Modèle standard dans le cadre de la géométrie non commutative	18
2.1 Géométrie non commutative :	18
2.2 Produit star :	22
2.2.1 Définition :	22
2.2.2 Propriétés :	22
2.3 Théorie de jauge sur un espace-temps non commutative :	27
2.3.1 Exemple : QED non commutative :	27
2.4 Construction du Lagrangien du Modèle standard non commutative : . . .	34
2.4.1 Quelques règles de Feynman du MSNCm	40

3 Etude Phénoménologique	43
3.1 Introduction	43
3.2 Calcul de la section efficace du processus $f\bar{f} \rightarrow ZZ$	44
3.2.1 Définition de la section efficace différentielle	44
3.2.2 Cinématique du processus	46
3.2.3 Calcul de l'amplitude de transition	48
3.2.4 Section efficace :	71
3.3 Conclusion :	71
Conclusion générale	74
Annexe	75
Bibliographie	78

Introduction générale

La physique des particules élémentaires a eu un grand succès durant les dernières décennies grâce à l'unification des interactions faibles et électromagnétiques dans ce qu'on appelle le modèle standard de *Salam-Weinberg-Glashow*, ce modèle qui se base sur le groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (L et Y dénote l'hélicité gauche et l'hypercharge faible respectivement). L'une des prédictions les plus importantes de ce modèle est l'existence du courant neutre et du boson de Higgs pour générer les masses des trois bosons de jauge du modèle (W^\pm, Z) pour que l'interaction faible ait une portée finie. L'existence du boson de Higgs a été confirmée par l'expérience. Il est aussi à noter que dans ce modèle la masse du neutrino est nulle.

Malgré les succès du modèle standard, il souffre de plusieurs lacunes notamment l'origine de la violation CP , les angles de mixages, les masses des particules (non prédites par le modèle mais déterminées expérimentalement) en tout 19 paramètres au minimum non prédits par le modèle ..etc.[26, p 303] De plus, l'expérience nous confirme que le neutrino possède une masse ce qui est inexplicable par le modèle standard. Ces défauts nous poussent à chercher des solutions ou d'autres modèles qui permettent d'expliquer les résultats expérimentaux. Parmi ces solutions il y a les différentes extensions du modèle standard notamment l'extradimension, la supersymétrie, modèle de la grande unification, l'espace-temps non commutative, etc...

Dans ce mémoire nous avons choisi l'approche de la géométrie non commutative à la *Seiberg–Witten*. Dans le premier chapitre nous présentons le modèle standard ordinaire en passant par le secteur électrofaible et la brisure spontanée de la symétrie tout en exposant le mécanisme de génération des masses aux particules du *MS* ainsi que les différents couplages existents dans ce modèle. Dans le chapitre 2 nous présentons le modèle standard basé sur un espace-temps non commutatif avec le formalisme mathématique correspondant, et ce à travers une théorie de jauge non commutative (QED_{NC}). Dans le dernier chapitre nous présentons une étude phénoménologique du processus $f + \bar{f} \rightarrow Z + Z$ (f dénote les fermions et Z le boson de jauge neutre). On terminera avec une

conclusion générale où on présente tout ce que nous avons étudié avec quelques discussions des résultats obtenus, ces derniers pourraient être considérés comme un bon signal de la physique au delà du modèle standard.

Chapitre 1

Modèle standard de la Physique des particules élémentaires

1.1 *Modèle standard électrofaible* (Salam-Glashow-Weinberg)

1.1.1 *le groupe abélien* $U(1)$

Le lagrangien d'une particule libre de spin $\frac{1}{2}$, nommée "particule de Dirac" est donné par [2] :

$$L_{Dirac} = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi \quad (1.1)$$

Le lagrangien contient deux termes, l'un représente la cinétique de la particule et l'autre sa masse.

Nous pouvons vérifier que le lagrangien est invariant sous les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \psi(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

L'ensemble des transformations $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$ où α prend des valeurs réelles forment un groupe abélien unitaire noté $U(1)$, à cette symétrie on associe une quantité conservée d'après *le théorème de Noether*, dans le cas de *l'électrodynamique quantique* cette quantité représente la charge électrique Q . [21][26]

La généralisation de la transformation précédente sous la forme :

$$\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (1.3)$$

où le paramètre α dépend maintenant de l'espace et du temps conduit à la *symétrie de jauge locale*.

Le lagrangien n'est plus invariant sous les transformations considérées en raison de l'apparition d'un deuxième terme dans la dérivée du champ

$$\partial_\mu\psi = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) \quad (1.4)$$

L'invariance de jauge pourrait cependant être conservée si nous introduisons une nouvelle dérivée D_μ appelée *dérivée covariante*, qui sera invariante sous la transformation de jauge suivante :

$$D\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \quad (1.5)$$

Pour cela un nouveau champ vecteur doit être introduit pour compenser le terme non désiré, la dérivée covariante est alors définie par :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (1.6)$$

où e est *la constante de couplage*.

A_μ se transforme comme :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (1.7)$$

L'invariance de jauge est donc vérifiée en remplaçant la dérivée ordinaire par la dérivée covariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu$$

donc nous avons[26] :

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \quad (1.8)$$

Le fait d'imposer l'invariance de jauge locale conduit à l'introduction d'un nouveau champ vectoriel A_μ , appelé *champ de jauge*, qui se couple aux fermions libres.

Donc pour que le lagrangien décrit des particules en interaction avec un champ de jauge A_μ soit complet, il faut lui ajouter un terme cinétique qui représente le champ de jauge A_μ , pour introduire un terme invariant de jauge il faut intervenir le tenseur $F_{\mu\nu}$, définit tel que :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.9)$$

Ce qui conduit au lagrangien total invariant sous les transformations de jauge locale [21] :

$$L_{Total} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Il est à remarquer que l'ajout d'un terme du type $\frac{1}{2}mAA$ brise l'invariance de jauge, c-à-d qu'en utilisant la relation (1.7) :

$$\frac{1}{2}m A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2}m \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha \right) \neq \frac{1}{2}m A_\mu A^\mu$$

La particule décrite par le champ de jauge doit être sans masse, c'est le cas de l'*électrodynamique quantique* décrite ici, les fermions et les photons (sans masse sont

décrits par le champ de jauge A_μ) se couplent entre eux à l'aide d'une intensité appelé *constante de couplage* donné par la charge électrique.

En résumé, le fait d'exiger une invariance de jauge locale revient à introduire le champ de jauge d'une manière mathématique stricte et non pas à la main (*by hand*)!

1.1.2 Le groupe non abélien $SU(2)$

Les bosons (W^\pm, Z^0)-médiateurs de l'interaction faible- se couplent de la même manière que les gluons aux quarks et aux leptons.

Seuls les fermions d'hélicité gauche (ou des anti fermions d'hélicité droite) sont concernés par l'interaction faible.

Dans le cas des particules de spin non nul, l'hélicité est la projection du spin dans la direction du mouvement, une particule dite d'hélicité gauche si la projection est négative.

Toute particule peut se décomposer en une partie de chiralité gauche et une partie de chiralité droite :

$$L + R = P_L + P_R \tag{1.11}$$

où P_L et P_R sont les *projecteurs de chiralité*.

Pour tenir compte de ces observations, les leptons de chiralité gauche seront assemblés en doublets et l'interaction faible sera décrite par une théorie de jauge basée sur un groupe de symétrie du type $SU(2)_L$ (L pour *Left* en anglais).

$$\psi_{L_l} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, l \text{ leptons} \tag{1.12}$$

Les leptons de chiralité droite seront quant à eux décrits sous forme des singulets invariants sous l'interaction faible :

$$\psi_{L_l} = e_R^- \tag{1.13}$$

Seuls des neutrinos de chiralité gauche sont formés lors des désintégrations β et par

conséquent ils n'interviennent pas dans cette théorie.

De même pour les quarks nous avons :

Pour les quarks gauche-*Left*-sont des doublets :

$$\psi_{Lq} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (1.14)$$

Contrairement aux quarks droite-*Right*-qui sont des singulets :

$$\begin{cases} \psi_{R1} = u_R \\ \psi_{R2} = d_R \end{cases} \quad (1.15)$$

La dérivée covariante associée à ce groupe de jauge pour des fermions gauche est [21] :

$$D_\mu^L = \partial_\mu + \frac{i}{2}g_1\tau_a W_\mu^a \quad (1.16)$$

$W_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ représentent les bosons de jauge du groupe $SU(2)$

g_1 Constante de couplage de l'interaction.

τ_a générateurs du groupe $SU(2)$ liés aux *matrices de Pauli* par la relation $\tau_a = \sigma_a/2$.

Pour les fermions de chiralité droite, nous avons :

$$D_\mu^R = \partial_\mu \quad (1.17)$$

Le lagrangien décrit l'interaction faible s'écrit alors [26] :

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi} [i (D_\mu^L + D_\mu^R) \gamma^\mu - m] \psi - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} \left\{ i \left[\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g_1\tau_a W_\mu^a \right) + \partial_\mu \right] \gamma^\mu - m \right\} \psi - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} \\ &= i\bar{\psi}_R \partial_\mu \gamma^\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \partial_\mu \gamma^\mu \psi_L - \frac{1}{2}g_1\bar{\psi}_L \tau_a W_\mu^a \gamma^\mu \psi_L - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.2 Lagrangien du modèle standard électrofaible

L'unification des interactions faibles et électromagnétiques se fait en considérant le groupe de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ce modèle - qui a été construit par les physiciens *Abdus salam_Glashow_Weinberg* séparément en 1967- a le lagrangien suivant

$$L = \bar{\psi}_L [\partial_\mu + ig_1 \tau_a W_\mu^a - ig_2 A_\mu] \psi_L + \bar{\psi}_R [\partial_\mu - ig_2 A_\mu] \psi_R - \frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

où g_1, g_2 sont les constantes de couplage associées à l'interaction véhiculée par les bosons de jauge $B_\mu, W_a^{\mu\nu}$ respectivement.

Les quatre bosons de jauge (W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) et B_μ) ne sont pas les quatre bosons physiques médiateurs des interactions faibles (W^\pm et Z) et électromagnétiques A_μ (photon).

Ces champs physiques sont des combinaisons linéaires des champs de jauge.

Les courants chargés s'obtiennent à partir de W_μ^1 et W_μ^2 par les relations [3] :

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [W_\mu^1 \mp W_\mu^2] \quad (1.20)$$

Et les courants neutres à partir de W_μ^3 et B_μ :

$$\begin{cases} A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3 \\ B_\mu = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3 \end{cases} \quad (1.21)$$

où θ est l'angle de mélange de *Weinberg*, il relie les deux constantes de couplage g_1, g_2 par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \\ \cos \theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \end{cases} \quad (1.22)$$

Enfin, l'invariance de jauge du groupe $U(1)$ implique la conservation d'une quantité physique appelé l'*hypercharge*. Elle est reliée à la charge électrique Q et à l'isospin T_3

par la relation de *Gell-Mann-Nishijama* [2] :

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.23)$$

1.3 Modèle standard

1.3.1 Le groupe non abélien $SU(3)$

L'interaction forte est décrite par la théorie appelé chromodynamique quantique *QCD(Quantum Chromo Dynamics)* les hadrons sont des particules sensibles a l'interaction forte. Le spectre hadronique peut être expliqué comme des états liés de quarks de spin $\frac{1}{2}$ et de six saveurs différentes (u, d, c, s, t, b) dans la mesure où on introduit un nouveau nombre quantique appelé *couleur*. Il existe trois couleurs différentes, sont données par analogie aux couleurs primitives : *rouge, bleu et vert*, seuls des états non coloré ou blanche sont observables.

L'expérience nous montre que seuls les *baryons* (états liés de trois quarks) et les *mésons* (états liés d'un quark et d'un anti quark) sont observables, les quarks tous seuls sont inobservables, c'est le phénomène du *confinement* [5][26]

La description de l'interaction forte est basée sur une symétrie représentée par le groupe de jauge $SU(3)$.

La dérivée covariante associée s'écrit [26] :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a \quad (1.24)$$

où G_μ^a , ($a = 1, \dots, 8$) représentent les bosons de jauge médiateurs de l'interaction forte, ils sont appelés *les gluons*.

g_s : est la constante de couplage de l'interaction.

T_a : représentent les générateurs du groupe $SU(3)$.

le lagrangien décrit l'interaction forte a la forme [2][21] :

$$\begin{aligned}
L_{QCD} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\
&= i\bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - g_s \bar{\psi} T_a G_\mu^a \gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

le terme cinétique de champs des *gluons* G_μ^a donné par :

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \tag{1.26}$$

g_s constante de couplage de l'interaction forte.

f^{abc} sont appelées *constantes de structure* du groupe $SU(3)$. Elles sont définies à partir de la relation :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{1.27}$$

T^a , générateurs du groupe $SU(3)$ liées aux *matrices de Gell-Mann* par la relation $T^a = \lambda^a / 2$.

le terme $\{f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c\}$ est nouveau par rapport au groupe $U(1)$, il provient du caractère non abélien du groupe $SU(3)$, et se traduit par le couplage des gluons entre eux.

le lagrangien du modèle standard peut alors être formulé en rassemblant les parties forte et électrofaible [21] :

$$\begin{aligned}
L_{MS} &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i g_s \bar{\psi} T_a G_\mu^a \psi + i\bar{\psi}_L \left[\frac{1}{2} g_1 \tau_a W_\mu^a - g_2 B_\mu \right] \psi_L \\
&\quad + i g_1 \bar{\psi}_R B_\mu \psi_R - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

A ce stade là, le lagrangien ne contient pas des termes de masse. les gluons et le photon sont effectivement de masse nulle mais ce n'est pas le cas pour les fermions ni pour les bosons W^\pm et Z de l'interaction faible.

Le problème est que l'ajout des termes du type $m\psi\bar{\psi}$ qui représentent la masse des fermions bien qu'il ne brise pas la symétrie $SU(3)$ brise la symétrie $SU(2)$.

De plus, des termes du type $\frac{1}{2}W_\mu W^\mu$ peuvent rendre massif les bosons de jauge de l'interaction faible, mais ces termes ne sont pas invariants sous la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Une possibilité pourrait être d'abandonner l'invariance de jauge afin de pouvoir introduire ces termes de masse, mais ceci pose des problèmes et rend la théorie non renormalisable.

IL a été nécessaire de pallier ce problème de génération de masse en trouvant un mécanisme différent permettant l'introduction des termes massifs tout en conservant les symétries de Jauge.

Ce mécanisme est connu sous le nom de *mécanisme de Higgs* (introduit indépendamment en 1964 par les physiciens *F.Englert,R.Brout,P.Higgs,G.Guralnik,CR. Hagen et T.Kibble*).

Mécanisme de Higgs :

Il est possible de générer des masses pour les particules grâce à une *brisure spontanée de la symétrie*.

Considérons des particules représentées par un champ scalaire complexe ϕ [1][2][3][21] :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (1.29)$$

Ce champ vérifie le Lagrangien :

$$L = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.30)$$

où μ est un nombre complexe arbitraire.

($\lambda > 0$) est un paramètre d'auto-couplage sans dimension

Ce lagrangien peut être rendu invariant sous la symétrie de jauge locale $U(1)$ par l'introduction d'une dérivée covariante et l'ajout d'un terme qui décrit la cinétique du

champ d'interaction. Le lagrangien s'écrit alors :

$$L = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) V(\phi^\dagger, \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.31)$$

où

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

et le champ A_μ se transforme selon la relation :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

Le potentiel $V(\phi^\dagger, \phi)$ a comme expression :

$$V(\phi^\dagger, \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.32)$$

Minimisons le potentiel par rapport aux champs (ϕ^\dagger, ϕ) c-à-d :

$$\frac{\partial V(\phi^\dagger, \phi)}{\partial \phi^\dagger} = \frac{\partial V(\phi^\dagger, \phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (1.33)$$

L'état fondamental du système dépend du signe de μ^2 .

► Si $\mu^2 > 0$

L'état fondamental correspond à un champ nul et le lagrangien est celui du *QED* pour une particule scalaire de masse μ .

► Si $\mu^2 < 0$

Dans ce cas-là il n'y a pas un seul minimum, mais une infinité décrite par un cercle dans le plan (ϕ_1, ϕ_2) .

tel que :

$$|\phi|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = \nu^2 \quad (1.34)$$

Avec

$$\nu^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (1.35)$$

représente l'état fondamental correspond au choix d'un des points du cercle et donc ne respecte plus la symétrie $U(1)$, qui est spontanément brisée.

Afin de s'intéresser au contenu des particules de cette théorie. Nous considérons l'état fondamental suivant :

$$\begin{cases} \phi_1 = \nu \\ \phi_2 = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Un développement autour de ce minimum peut se faire en substituant :

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} [\nu + \eta(x)] e^{i\xi(x)} \quad (1.37)$$

où $\nu(x)$ et $\eta(x)$ sont des champs dans le lagrangien précédent.

Supposons les fluctuations autour du minimum faible :

Nous avons les termes non quadratiques suivants :

$$L = \frac{1}{2} (\partial\eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial\xi)^2 - \nu^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2} e^2 \nu^2 A_\mu^2 \quad (1.38)$$

Le spectre en particule présente dans ce lagrangien se compose alors d'une particule non massive décrite par ce champ, d'un scalaire massif η et d'un boson vecteur massif A_μ .

Leurs masses sont données par :

$$\begin{cases} m_\xi = 0 \\ m_\eta = \sqrt{2\lambda\nu^2} \\ m_A = e\nu \end{cases} \quad (1.39)$$

Ainsi la brisure spontanée de la symétrie permet de générer une masse pour le boson de jauge de la symétrie $U(1)$. Elle fait aussi apparaître une particule massive et une autre

non massive appelée boson de *Goldstone*.

Cette particule sans masse est prédite par le *théorème de Goldstone* qui stipule qu'un scalaire sans masse apparaît quand une symétrie continue est spontanément brisée.

Il est possible de faire disparaître ce boson de Goldstone grâce à la transformation de champ de jauge A_μ :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e\nu} \partial_\mu \eta(x) \quad (1.40)$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} (\partial\eta)^2 - \lambda\nu^2\eta^2 + \frac{1}{2}e^2\nu^2A_\mu^2 - \lambda\nu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2\eta + \nu^2eA_\mu^2\eta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.41)$$

1.4 Génération des masses pour les bosons de jauge du modèle standard :

L'application de ce mécanisme peut se faire dans le cadre du modèle standard afin de générer des masses pour les bosons de jauge et pour les fermions.

Un champ de *Higgs* doublet de $SU(2)$ est introduit [3] :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Ce doublet de champ est décrit par le lagrangien :

$$L_H = (D_\mu\phi)^\dagger (D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (1.43)$$

où

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a + ig_3 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (1.44)$$

► Pour $\mu^2 < 0$

Le doublet aura une valeur moyenne non nulle dans le vide :

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (1.45)$$

Cette valeur n'a pas la symétrie du $SU(2)_L$, mais elle est invariante sous $U(1)$ nous avons donc brisé la symétrie du $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Pour déterminer les termes de masses associés aux bosons de jauge, il faut étudier le voisinage du minimum, on définit :

$$\phi(x) = e^{i \xi_a(x) \tau_a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta_a(x) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Les champs $\eta_a(x)$, ($a = 1, 2, 3$) sont les *bosons de Gladstone* qui apparaissent après la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{W^\pm} = \frac{g_2 \nu}{2} \\ M_Z = \frac{\nu}{2} \sqrt{g_2^2 + g_3^2} \\ M_A = 0 \\ M_H = \sqrt{-2\mu^2} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Les masses des bosons Z et W sont liées par la relation :

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W \quad (1.48)$$

Le mécanisme de Higgs conduit à la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ par l'introduction d'un champ scalaire dans le lagrangien auquel est associé un boson massif, *le boson de Higgs*.

Par cette brisure, les bosons de jauge Z et W deviennent massifs ce qui est en accord avec l'expérience.

La symétrie $SU(3)_C$ liée à l'interaction forte est conservée lors de ce mécanisme.

Récemment, le 4 Juillet 2012, les physiciens du grand collisionneur des Hadrons "LHC" ont annoncé la confirmation officielle de l'existence de la "particule de Dieu" le boson de Higgs ce qui permet de renforcer le modèle. Ils ont découvert que sa masse est comprise entre $125 - 126 \text{ GEV}$ [25].

Le secteur fermionique :

Pour le moment, seuls les bosons de jauge possèdent une masse, à l'aide du mécanisme de Higgs ce dernier permet également de générer une masse aux fermions du modèle standard par leur couplage au boson de Higgs, il faut pour cela ajouter au lagrangien du modèle standard un lagrangien dit de Yukawa qui décrit ces couplages :

$$L_{Yukawa} = -\lambda_e \bar{\psi}_{L_l} \phi \psi_{R_l} - \lambda_d \bar{\psi}_{L_d} \phi \psi_{R_{q2}} - \lambda_u \bar{\psi}_{L_l} \phi \psi_{R_{q1}} + \text{Conjuguais hermitien}$$

ϕ est le champ de Higgs définie précédemment.

λ_i sont appelés *couplages de Yukawa*.

Nous pouvons refaire le même développement pour les fermions qui acquerront une masse donnée par :

$$m_f = \lambda_f \frac{\nu}{\sqrt{2}} \quad (1.49)$$

Les couplages de Yukawa traduisent *l'intensité du couplage* des fermions au boson de Higgs celui-ci est proportionnel à la masse des fermions.

Le quark top étant le plus lourd des fermions, il aura donc le plus grand couplage au boson de Higgs.

1.5 Lagrangien final

Pour décrire l'ensemble des interactions faible, forte et électromagnétique, il faut former une théorie quantique relativiste basée sur le groupe de symétrie $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes$

$U(1)_Y$ afin de générer les masses des bosons et des fermions, il faut ajouter un champ scalaire de Higgs.

Le lagrangien final du Modèle Standard est alors [21] :

$$\mathfrak{L}_{MS} = \mathfrak{L}_{Fermions} + \mathfrak{L}_{Int.fortes} + \mathfrak{L}_{Int.elect.faibles} + \mathfrak{L}_{Higgs} + \mathfrak{L}_{Yukawa} \quad (1.50)$$

Tel que :

$$\mathfrak{L}_{MS} = \underbrace{\bar{\psi}\partial_\mu\psi}_{Fermions\ libres} \quad (1.51)$$

$$\underbrace{+ig_s\bar{\psi}T_aG_\mu^a\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^aG_a^{\mu\nu}}_{Interactions\ fortes} \quad (1.52)$$

$$\underbrace{+\bar{\psi}_L \left[ig_2\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a\gamma^\mu + ig_1\frac{1}{2}Y_LB_\mu\gamma^\mu \right] \psi_L + i\bar{\psi}_R \left[ig_1\frac{1}{2}Y_RB_\mu\gamma^\mu \right] - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^aW_a^{\mu\nu}}_{Interactions\ électrofaibles} \quad (1.53)$$

$$\underbrace{-\lambda_e\bar{\psi}_{Ll}\phi\psi_{Rl} - \lambda_d\bar{\psi}_{Ld}\phi\psi_{Rq2} - \lambda_u\bar{\psi}_{Ll}\phi\psi_{Rq1} + Conjugais\ hermitien}_{Couplages\ entre\ fermions\ et\ Higgs} \quad (1.54)$$

Chapitre 2

Modèle standard dans le cadre de la géométrie non commutative

2.1 *Géométrie non commutative :*

Travailler dans un espace-temps non commutative revient à remplacer les coordonnées ordinaires x_μ et leurs moments conjugués p_μ par des opérateurs hermétiques \hat{x}_μ, \hat{p}_μ qui vérifient les relations de commutation suivantes [9][11] :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \\ [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$\theta_{\mu\nu}$ est une matrice antisymétrique $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ qui représente la non commutativité de l'espace-temps à une dimension de surface $[L]^2$.

Pour des raisons de dimensions de $\theta_{\mu\nu}$ nous introduisons le paramètre non commutatif Λ_{NC} tel que [6][10] :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} = i\frac{C_{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} \quad (2.2)$$

cette dernière (2.2) est nomée la paramétrisation de *Hewett – Petriello – Rizzo*.

($[\Lambda_{NC}] \equiv [\text{énergie}]$) représente le seuil d'énergie où la non commutativité de l'espace-temps devient appréciable, il est de l'ordre de TEV .

$C_{\mu\nu}$ sont les éléments d'une matrice antisymétrique. Avec cette définition introduite dans (2.2) on peut voir $\theta_{\mu\nu}$ comme la *surface minimale mesurable* au sens de la mécanique quantique (correspondance entre \hbar et $\theta_{\mu\nu}$). [22]

Pour aborder la version non commutative de la théorie quantique des champs, nous allons considérer l'approche de *Seiberg – Witten maps* avec le *produit star* de *Weyl – Moyal* [14].

Quantification de Weyl

La *quantification de Weyl* est une technique qui a pour but d'étudier la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique [8][14][20]

C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique définie sur l'espace vectoriel euclidien R^D .

Toute fonction $\phi(x)$ peut s'écrire à l'aide de sa transformé de fourrier $\tilde{f}(k)$ comme :

$$\tilde{f}(k) = \int d^D k x e^{-ik_i x^i} f(x) \quad (2.3)$$

remarquons que si $f(x)$ est réelle alors

$$\tilde{f}(k)^* = \tilde{f}(-k)$$

autrement dit, la quantification de Weyl consiste à faire une *bijection* entre l'algèbre des fonctions commutatives et l'algèbre des opérateurs non commutatifs.

On définit l'*opérateur de Weyl* par [14][20] :

$$W[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{-ik_i \hat{x}^i} \quad (2.4)$$

\hat{x}^i est un opérateur.

où $\tilde{f}(k)$ est la transformée de fourrier de $f(x)$

Si $f(x)$ est réelle alors l'opérateur de Weyl est *hermétique* :

$$\widehat{W} [f] = \widehat{W}^+ [f] \quad (2.5)$$

L'expression (2.4) on peut la réécrire comme :

$$\widehat{W} [f] = \int d^D x f(x) \widehat{\Delta}(x) \quad (2.6)$$

avec

$$\widehat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \widehat{x}^i} \quad (2.7)$$

La dérivée vérifie les relations de commutations suivantes [20] :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\widehat{\partial}_i, \widehat{X}_j] = \delta_i^j \\ [\widehat{\partial}_i, \widehat{\partial}_j] = 0 \\ [\widehat{\partial}_i, \widehat{\Delta}(x)] = -\widehat{\partial}_i \widehat{\Delta}(x) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} [\widehat{\partial}_i, \widehat{W} [f]] &= \widehat{W} [\partial_i f] \\ e^{\nu^i \widehat{\partial}_i} \widehat{\Delta}(x) e^{-\nu^i \widehat{\partial}_i} &= \widehat{\Delta}(x + \nu) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Calculons la trace des deux membres de l'équation (2.9)

$$Tr \left[e^{\nu^i \widehat{\partial}_i} \widehat{\Delta}(x) e^{-\nu^i \widehat{\partial}_i} \right] = Tr \left[\widehat{\Delta}(x + \nu) \right]$$

sachant que :

$$Tr [ABC] = Tr [BCA] = Tr [CBA]$$

nous avons investi la relation de *Baker-Campbell-Hausdorff* [15]

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad (2.10)$$

valable pour les opérateurs A et B tel que :

$$[A; [A, B]] = [B; [A, B]] \quad (2.11)$$

et de la propriété :

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0 \quad (2.12)$$

on déduit que :

$$Tr [\hat{\Delta}(x)] = Tr [\hat{\Delta}(x+v)] \quad (2.13)$$

La propriété précédente implique que $Tr [\hat{\Delta}(x)]$ est une constante indépendante de $x \in R^D$ donc on peut poser que $Tr [\hat{\Delta}(x)] = 1$

$$\begin{aligned} Tr \widehat{W} [f] &= \left[d^D x f(x) Tr \hat{\Delta}(x) \right] \\ &= \int d^D x f(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Résultat important [14] :

Evaluer la trace du *symbole de Weyl* de la fonction classique f est équivalent à faire une intégration sur tout l'espace-temps.

2.2 *Produit star :*

2.2.1 *Définition :*

L'opération notée " * " pour les fonctions ordinaires qui permet au symbole de Weyl d'être un *homomorphisme* d'elle est définie tel que [11][14] :

$$(f * g)(x) = \exp \left[\frac{1}{2} \theta_{\mu\nu} \partial_{\mu}^{\xi} \partial_{\nu}^{\eta} \right] f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \quad (2.15)$$

On peut développer le produit star comme [8][18] :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x) \quad (2.16)$$

comme nous pouvons l'écrire sous la forme compacte suivante [14] :

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_{\nu} \right] g(x) \quad (2.17)$$

2.2.2 *Propriétés :*

Puisque le symbole de Weyl est un homomorphisme par rapport au produit star pour les fonctions ordinaires, nous avons donc [9] :

$$\widehat{W}[f] \widehat{W}[g] = \widehat{W}[f * g] \quad (2.18)$$

et aussi [14] :

$$Tr \left[\widehat{W}(f_1) \dots \widehat{W}(f_n) \right] = \int d^D x f_1(x_1) * \dots * f_n(x_n) \quad (2.19)$$

pour avoir le cas ordinaire (commutatif) à partir de l'espace - temps non commutatif, il suffit de mettre $\theta \rightarrow 0$.

d'après (2.16) nous avons :

$$f(x) * g(x) = f(x) g(x) |_{\theta \rightarrow 0}$$

L'information sur la non commutativité de l'espace-temps est codée dans le produit star.

Le produit star est non commutatif c-à-d :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x), \theta \text{ antisymétrique}$$

mais [9] :

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) |_{\theta \rightarrow -\theta} \quad (2.20)$$

et

$$\{f * g\}_{MB} = f * g |_{\theta} - f * g |_{-\theta} \quad (2.21)$$

Représentation du produit star dans l'espace d'impulsion :

Soient f, g et h trois fonctions arbitraires de l'espace R^4 tel que :

$$\begin{cases} f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ikx} d^4k \\ g(x) = \int \tilde{g}(k) e^{ikx} d^4k \\ h(x) = \int \tilde{h}(k) e^{ikx} d^4k \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\tilde{f}(k), \tilde{g}(k), \tilde{h}(k)$ sont les transformées de Fourier des fonctions $f(x), g(x), h(x)$ respectivement.

tenons compte de la relation (2.37), le produit star est donné par [11] :

$$(f * g)(x) = \int d^4k d^4q \tilde{f}(k), \tilde{g}(q) e^{-\frac{i}{2}(k\theta p)} e^{i(k+p)x} \quad (2.23)$$

L'associativité

on utilise la propriété (2.40), nous pouvons écrire [9][11] :

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](x) &= \int d^4k d^4q d^4p \tilde{f}(k), \tilde{g}(q), \tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}(k\theta p)} e^{-\frac{i}{2}((k+q)\theta p)} e^{i(k+q+p)x} \\
[f * (g * h)](x) &= \int d^4k d^4q d^4p \tilde{f}(k), \tilde{g}(q), \tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}(q\theta p)} e^{-\frac{i}{2}(k\theta(q+p))} e^{i(k+q+p)x}
\end{aligned}$$

donc

$$(f * g) * h = f * (g * h) = (f * g) * h \quad (2.24)$$

Produit star en présence de signe intégral [11][14] :

$$\int d^4x (f(x) * g(x)) = \int d^4x (g(x) * f(x)) = \int d^4x (f(x) . g(x)) \quad (2.25)$$

et il en est de même pour les dérivées :

$$\int d^Dx \partial f(x) * \partial g(x) = \int d^Dx \partial g(x) . \partial f(x) \quad (2.26)$$

Permutation cyclique [11].

$$\int d^Dx (f(x) * g(x) * h(x)) = \int d^Dx h(x) * (f(x) * g(x)) = \int d^Dx (g(x) * h(x) * f(x)) \quad (2.27)$$

Cas général :

$$\int (f_1 * \dots * f_n)(x) d^4x = \int (f_n * f_{n-1} * \dots * f_1)(x) d^4x \quad (2.28)$$

nous avons [9] :

$$f * g * h |_{\theta} = f * g * h |_{-\theta} \quad (2.29)$$

pour le *complexe conjugué* nous avons [11] :

$$(f * g)^{cc} = f^{cc} * g^{cc} \quad (2.30)$$

Règle de Leibnitz :

$$\partial_\mu (f * g) = (\partial_\mu f) * g + f * (\partial_\mu g) \quad (2.31)$$

Commutateur de Moyal

Le commutateur de Moyal (*Moyal Bracket*) de deux fonctions quelconques est défini par

$$[f(x) * g(x)]_{MB} \equiv [f(x) * g(x)] = f(x) * g(x) - g(x) * f(x) \quad (3.32)$$

Calculons le commutateur suivant : $[x^\mu * f(x)]$

par définition nous avons :

$$[x^\mu * f(x)] = x^\mu * f(x) - f(x) * x^\mu \quad (2.33)$$

dans le cas général nous pouvons écrire que :

$$f(x) * g(x) = f(x) g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} (\partial_\mu f) (\partial_\nu g) + \dots$$

d'une part nous avons :

$$\begin{aligned} x^\mu * f(x) &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha x^\mu) (\partial_\beta f) + \dots \\ &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu (\partial_\beta f) + \dots \\ &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\beta} (\partial_\beta f) + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

d'autre part l'addition de (2.51) et (2.52) donne :

$$[x^\mu * f(x)] = \frac{i}{2} \theta^{\mu\beta} (\partial_\beta f) - \frac{i}{2} \theta^{\alpha\mu} (\partial_\alpha f)$$

$$[x^\mu * f(x)] = \frac{i}{2} \theta^{\mu\beta} (\partial_\beta f) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\alpha} (\partial_\alpha f)$$

sachons que $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ nous obtenons alors :

$$[x^\mu * f(x)]_{MB} = i\theta^{\mu\alpha} (\partial_\alpha f) \quad (2.35)$$

Résultat important :

Pour évaluer le commutateur de Moyal d'une fonction quelconque avec x^μ , il suffit de calculer la dérivée de cette fonction par rapport à la coordonnée canonique x^μ .

Pour $f(x) = x^\mu$

$$[x^\mu * x^\nu]_{MB} = i\theta^{\mu\alpha} (\partial_\alpha x^\nu) \quad (2.36)$$

nous aurons la relation fondamentale d'anticommutation entre les coordonnées x^μ, x^ν .

$$[x^\mu * x^\nu]_{MB} = i\theta^{\mu\nu}$$

En utilisant la définition du produit star introduite dans (2.32), nous pouvons écrire [14] :

$$\begin{cases} [f(x) * g(x)]_{MB} = 2if(x) \sin\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \\ \{f(x) * g(x)\}_{MB} = 2f(x) \cos\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \end{cases} \quad (2.37)$$

Résultat important :

Il est plus pratique de travailler avec des "fonctions classiques" en utilisant le produit star, plutôt que de manipuler des opérateurs en utilisant le produit ordinaires.

2.3 Théorie de jauge sur un espace-temps non commutative :

2.3.1 Exemple : QED non commutative :

Pour obtenir le lagrangien de la QED non commutative, on garde la même forme du lagrangien de la QED commutative :

$$\mathcal{L}_{QED}^{commutative} \equiv \mathcal{L}_{QED}^C = \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

on définit l'action S par :

$$S = Tr \widehat{\mathcal{L}} \quad (2.39)$$

$\widehat{\mathcal{L}}$ représente la transformée de fourrier du lagrangien \mathcal{L} , alors

$$\mathcal{L} = \widehat{\psi} \left(i\widehat{\mathcal{D}} - m \right) \widehat{\psi} - \frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{F}^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

utilisons le produit star on peut écrire $\widehat{\mathcal{L}}$ sous la forme :

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\psi} \left(i\widehat{\mathcal{D}} - m \right) * \widehat{\psi} - \frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} * \widehat{F}^{\mu\nu} \quad (2.41)$$

avec

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (2.42)$$

dans le cas du QED commutative le lagrangien \mathcal{L} est invariant sous les transformations de la forme :

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \widehat{\psi} = U\psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \widehat{\bar{\psi}} = \bar{\psi}U^+ \\ U^+U = UU^+ = 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

avec

$$U \equiv e^{i\alpha(x)} T^a \quad (2.44)$$

Sachons que pour avoir cette invariance il faut que le champ A_μ se transforme comme :

$$A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.45)$$

de même pour le cas non commutatif on exige que :

$$i\bar{\psi} * D * \psi = i\bar{\psi}' * D * \psi' \quad (2.46)$$

tenons compte des transformations (2.63) et des relations suivantes :

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu \hat{\partial}_\mu + ie\gamma^\mu \hat{A}_\mu \quad (2.47)$$

$$i\bar{\psi} * \mathcal{D} * \psi = i\bar{\psi} * U^+ * \hat{\mathcal{D}} * U * \psi$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} eA_\mu &= iU^+ * \partial_\mu U + eU^+ * \hat{A}_\mu U \\ \Rightarrow \hat{A}_\mu &= U * A_\mu * U^+ + \frac{i}{e} \partial_\mu U * U^+ \end{aligned} \quad (2.48)$$

de la même façon que dans le cas commutatif on définit :

$$-ieF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]_{MB} = D_\mu * D_\nu - D_\nu * D_\mu \quad (2.49)$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$-ieF_{\mu\nu} * \psi = D_\mu * D_\nu * \psi - D_\nu * D_\mu * \psi$$

ce qui conduit à :

$$-ieF_{\mu\nu} * \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) * (\partial_\nu - ieA_\nu) * \psi - (\partial_\nu - ieA_\nu) * (\partial_\mu - ieA_\mu) * \psi \quad (2.50)$$

Après développement, en remplaçant les indices l'un à la place de l'autre $\mu \leftrightarrow \nu$ nous obtiendrons la forme de $F_{\mu\nu}$ [9][12] :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu * A_\nu] \quad (2.51)$$

Sachons que la dérivée covariante se transforme elle-même d'une manière covariante comme son nom l'indique, c-à-d :

$$\acute{D}_\mu = U * D_\mu * U^+$$

nous aurons la loi de transformation de $F_{\mu\nu}$:

$$\acute{F}_{\mu\nu} = U * F_{\mu\nu} * U^+$$

Pour le lagrangien de Maxwell nous avons :

$$\acute{\mathcal{L}}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}U * F_{\mu\nu}^+ * F^{\mu\nu} * U \quad (2.52)$$

il en est de même pour l'action S [12] :

$$\acute{S}_{Maxwell} = \int d^4x \acute{\mathcal{L}}_{Maxwell} = S_{Maxwell} \quad (2.53)$$

Conclusion

L'action de Maxwell S est un invariant de jauge, par conséquent l'action total de la QED non commutative est invariant sous le groupe de jauge $U(1)_{NC}$ qui est généré par des éléments du type $e^{*i\alpha(x)}$ ou $(e^{i\alpha(x)})_*$

tel que :

$$e^{*i\alpha(x)} = 1 + \alpha(x) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \alpha(x) * \alpha(x) + \dots \quad (2.54)$$

Remarquons que le groupe est non abélien, car si nous considérons U_1 et U_2 deux éléments de $U(1)_{NC}$ alors :

$$U_1 * U_2 \neq U_2 * U_1 \quad (2.55)$$

Pour la forme de $F_{\mu\nu}$, nous avons :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \underbrace{ie [A_\mu * A_\nu]}_{\text{Terme non abélien}}$$

$F_{\mu\nu}$ ressemble à celui des groupes non abéliens vu la présence du dernier terme (non abélien et absent dans le QED ordinaire). Du point de vue phénoménologique cette ressemblance se traduit par la présence de couplage entre photons, par conséquent de nouveaux vertex

apparaissent ce qui est interdit en QED commutative.

Problème de la charge électrique [12][16] :

Pour avoir l'invariance de jauge de l'action S en QED_{NC} , la charge électrique Q doit prendre des valeurs bien déterminées, elle dépend des représentations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{représentation fondamentale} &\Rightarrow Q = 1 \\ \text{représentation anti - fondamentale} &\Rightarrow Q = -1 \\ \text{représentation adjointe} &\Rightarrow Q = 0 \end{aligned}$$

Résultat important :

Dans le cadre de QED_{NC} , les particules représentées par des champs de matière ψ se couplent aux champs électromagnétiques A_μ suivant les trois représentations possibles (*fondamental, anti – fondamental et adjointe*), ces particules ayant comme charge $Q = 0, \pm 1$ seulement (en unité de charge de l'électron). Ce qui permet de dire que QED_{NC} est incapable de décrire des particules de charge fractionnel (*Ex.les quarks*)!

Règles de Feynman pour QED non commutative [7][9] :

Le lagrangien du QED non commutative est donné par :

$$\mathcal{L}_{QED}^{NC} = \psi (i\mathcal{D} - m) * \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.56)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie [A_\mu * A_\nu] \quad (2.57)$$

Nous pouvons décomposer \mathcal{L} sous la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Libre} + \mathcal{L}_{Interactions} \quad (2.58)$$

tel que :

$$\mathcal{L}_{Libre} = i\bar{\psi} * \mathcal{D} * \psi - m\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.59)$$

et

$$\mathcal{L}_{Interactions} = e\bar{\psi} * A_\mu * \psi \quad (2.60)$$

Citons ici quelques règles de Feynman qu'on peut les extraire à partir du lagrangien (2.41) [7]

1. pour chaque ligne interne de fermions marqué de l'impulsion p , un facteur $\left(\frac{i}{\not{p} - m} \right)$.

2. pour chaque ligne interne du photons marqué de l'impulsion k , un facteur $(-ie\gamma^\mu)$.

Remarquons que les règles de Feynman pour la particule libre restent inchangées, au fait la modification affecte seulement le vertex de deux leptons et un photon, ce dernier est donné par le facteur $(-ie\gamma^\mu \exp(ip_1 \times p_2))$.

L'opérateur " \times " est défini tel que :

$$p_1 \times p_2 = \frac{1}{2} p_{1\mu} \theta^{\mu\nu} p_{2\nu} \quad (2.61)$$

nous pouvons retrouver le cas ordinaire si on pose $\theta \rightarrow 0$.

pour $\theta \rightarrow 0$, nous avons $p_1 \times p_2 \rightarrow 0$.

$$-ie\gamma^\mu \exp(ip_1 \times p_2) \rightarrow -ie\gamma^\mu |_{\theta \rightarrow 0} \quad (2.62)$$

Les autres règles de Feynman restent inchangées. Pour obtenir les deux vertex de $U(1)$ non commutatif (noté $U(1)^*$) on exploite la similitude entre les théories de jauge non abéliens et $U(1)^*$.

dans une théorie de jauge non abélien $F_{\mu\nu}$ est donné par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie [A_\mu, A_\nu] \quad (2.63)$$

avec :

$$[A_\mu, A_\nu] = [A_\mu^a T^a, A_\nu^b T^b] = ig A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} T^c \quad (2.64)$$

où $\{T^a\}$ sont les générateurs du groupe de jauge.

f^{abc} représentent les constantes de structure du groupe.

g est la constante de couplage du group.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} T^c \quad (2.65)$$

pour QED_{NC} nous avons :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie [A_\mu * A_\nu]$$

avec [9]

$$\begin{cases} A_\mu = \int d^4 p A_\mu(p) e^{ipx} \\ A_\nu = \int d^4 \acute{p} A_\nu(\acute{p}) e^{i\acute{p}x} \end{cases} \quad (2.66)$$

le commutateur de Moyal donne :

$$\begin{aligned} [A_\mu * A_\nu] &= \int d^4 p d^4 \acute{p} A_\mu(p) A_\nu(\acute{p}) \left\{ e^{ipx} e^{i\acute{p}x} - e^{i\acute{p}x} e^{ipx} \right\} \\ &= \int d^4 p d^4 \acute{p} A_\mu(p) A_\nu(\acute{p}) \left\{ e^{-i(p \wedge \acute{p})} - e^{i(\acute{p} \wedge p)} \right\} e^{i(\acute{p}+p)x} \end{aligned}$$

$$[A_\mu * A_\nu] = \int d^4 p d^4 \acute{p} A_\mu(p) A_\nu(\acute{p}) \{2 \sin(p \wedge \acute{p})\} e^{i(\acute{p}+p)x} \quad (2.67)$$

remarquons que le facteur $2 \sin(p \wedge \acute{p})$ joue le rôle de la constante de structure f^{abc} dans le cadre de la théorie commutative non abélien. [26]

La règle de Feynman associé au diagramme de trois pattes pour la théorie commutative non abélien est :

$$g f^{abc} [(p_1 - p_2)^\rho g^{\mu\nu} + (p_2 - p_3)^\mu g^{\nu\rho} + (p_3 - p_1)^\nu g^{\mu\rho}] \quad (2.68)$$

remplaçons f^{abc} par le facteur $2 \sin(p \wedge \acute{p})$ dans le but d'avoir la règle de Feynman pour QED_{NC} :

$$2g \sin(p \wedge \acute{p}) [(p_1 - p_2)^\rho g^{\mu\nu} + (p_2 - p_3)^\mu g^{\nu\rho} + (p_3 - p_1)^\nu g^{\mu\rho}] \quad (2.69)$$

de même pour le vertex à quatre pattes :

$$g^2 [f^{abc} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bed} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma})] \quad (2.70)$$

tenons compte des correspondances suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{abc} = \sin(p_1 \wedge p_2) \\ f^{cde} = \sin(p_3 \wedge p_4) \\ f^{ace} = \sin(p_3 \wedge p_1) \\ f^{bed} = \sin(p_2 \wedge p_4) \\ f^{ade} = \sin(p_1 \wedge p_4) \\ f^{bce} = \sin(p_2 \wedge p_3) \end{array} \right. \quad (2.71)$$

nous obtiendrons le vertex correspondant au diagramme de Feynman à quatre pattes pour QED_{NC} :

$$4ig^2 \left[\begin{array}{l} \sin(p_1 \wedge p_2) \sin(p_3 \wedge p_4) (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \\ + \sin(p_3 \wedge p_1) \sin(p_2 \wedge p_4) (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}) \\ + \sin(p_1 \wedge p_4) \sin(p_2 \wedge p_3) (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \end{array} \right] \quad (2.72)$$

2.4 Construction du Lagrangien du Modèle standard non commutative :

Dans le cadre de la théorie de jauge non commutative les différents champs qui interviennent dans la théorie (champs de matières et de jauge) sont redéfinis en utilisant les transformations de "Seiberg – Witten " qui relient les champs non commutatifs aux champs ordinaires par des séries en puissance de θ .

Le lagrangien du $MSNC$ ressemble formellement au lagrangien du MS commutative, en tenant compte des remarques suivantes :

1. Le produit ordinaire entre les différents champs est remplacé par le produit star.

2. Les champs de (matières et jauge) sont remplacés par leurs *Seiberg – Witten maps*.

Par définition nous avons les transformations de "Seiberg – Witten" [13][18] :

$$\begin{cases} \widehat{\psi} = \widehat{\psi}[V] = \psi - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}V_\alpha\partial_\beta\psi + \frac{i}{8}\theta^{\alpha\beta}[V_\alpha, V_\beta]\psi + o(\theta^2) \\ \widehat{V}_\mu = \widehat{V}_\mu[V] = V_\mu + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha V_\mu + F_{\alpha\mu}, V_\beta\} + o(\theta^2) \end{cases} \quad (2.73)$$

où ψ et V_μ sont les fermions et les champs de jauge ordinaires. $F_{\mu\nu}$ est le champ ordinaire définit par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \quad (2.74)$$

au fait le lagrangien se compose de quatre termes [13][18] :

$$\mathcal{L}_{MSNC} = \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Fermions} + \mathcal{L}_{Jauge} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2.75)$$

La forme générale du terme cinétique est donnée par :

$$\mathcal{L}_{Jauge} = -\frac{1}{2} \sum_R C_R Tr \left(R \left(\widehat{F}_{\mu\nu} \right) * R \left(\widehat{F}^{\mu\nu} \right) \right) \quad (2.76)$$

tel que le champ non commutatif $F_{\mu\nu}$ à la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \widehat{V}_\nu - \partial_\nu \widehat{V}_\mu - i \left[\widehat{V}_\mu * \widehat{V}_\nu \right] \\ \widehat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\{F_{\mu\alpha}, F_{\nu\beta}\} - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{V_\alpha, (\partial_\beta + D_\beta) F_{\mu\nu}\} + o(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$F_{\mu\nu}$ est le champ ordinaire donné par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu]$$

et sa dérivée covariante est donnée par :

$$D_\beta F_{\mu\nu} = \partial_\beta F_{\mu\nu} - i[V_\beta, F_{\mu\nu}] \quad (2.78)$$

V_μ représente une combinaison linéaire des potentiels de jauge des groupes de Lie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ [13][18]

$$V_\mu(x) = \acute{g}A_\mu(x)Y + g \sum_{a=1}^3 B_\mu^a(x)T_L^a + g_S \sum_{b=1}^8 G_\mu^a(x)T_S^a \quad (2.79)$$

où g, \acute{g} et g_S représentent les couplages.

Y, T_L^a et T_S^a sont les générateurs des groupes de Lie.

$A_\mu(x), B_\mu^a(x)$ et $G_\mu^a(x)$ sont les bosons de jauges qui véhiculent les interactions électrofaibles et fortes.

les coefficients C_R sont soumis à la contrainte :

$$\frac{1}{g_L^2} = \sum_R C_R \text{Tr} (R(T_L^a) * R(T_L^a)) = \text{Tr} \frac{1}{G^2} T_L^a T_L^a \quad (2.80)$$

La forme générale du \mathcal{L}_{Jauge} en fonction des champs du modèle standard s'écrit :

$$\mathcal{L}_{Jauge} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{1}{G^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{\theta^{\rho\sigma} \text{Tr} \frac{1}{G^2} \left[\left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} - F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} \right) F^{\mu\nu} \right]}_{\text{Terme provient de l'aspect non commutatif de l'espace-temps}} + o(\theta^2) \quad (2.81)$$

Pour le secteur fermionique nous avons [13][18] :

$$\mathcal{L}_{Fermions} = \sum_{a=1}^3 \left(\begin{array}{l} \overline{\widehat{L}}_L^{(i)} * (i\widehat{\mathcal{P}}\widehat{L}_L^{(i)}) + \overline{\widehat{Q}}_L^{(i)} * (i\widehat{\mathcal{P}}\widehat{Q}_L^{(i)}) + \overline{\widehat{e}}_R^{(i)} * (i\widehat{\mathcal{P}}\widehat{e}_R^{(i)}) + \overline{\widehat{u}}_R^{(i)} \\ * (i\widehat{\mathcal{P}}\widehat{u}_R^{(i)}) + \overline{\widehat{d}}_R^{(i)} * (i\widehat{\mathcal{P}}\widehat{d}_R^{(i)}) \end{array} \right) \quad (2.82)$$

Le lagrangien du Higgs est défini par [13][18] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= h_0^\dagger \left(\widehat{D}_\mu \widehat{\Phi} \right) * h_0 \left(\widehat{D}^\mu \widehat{\Phi} \right) - \mu^2 h_0^\dagger \left(\widehat{\Phi} \right) \\ &\quad - \lambda h_0^\dagger \left(\widehat{\Phi} \right) * h_0 \left(\widehat{\Phi} \right) * h_0^\dagger \left(\widehat{\Phi} \right) * h_0 \left(\widehat{\Phi} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

\mathcal{L}_{Yukawa} a la forme [13][18] :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{i,j=1}^3 \left(\begin{array}{l} G_e^{(ij)} \left(\overline{\widehat{L}}_L^{(i)} * h_e \left(\widehat{\Phi} \right) \widehat{e}_R^{(i)} \right) + G_e^{\dagger(ij)} \left(\overline{\widehat{e}}_R^{(i)} * h_e \left(\widehat{\Phi} \right)^\dagger * \widehat{L}_L^{(j)} \right) \\ + G_u^{(ij)} \left(\overline{\widehat{Q}}_L^{(i)} * h_u \left(\widehat{\Phi}_c \right) \widehat{u}_R^{(j)} \right) + G_u^{\dagger(ij)} \left(\overline{\widehat{u}}_R^{(i)} * h_u \left(\widehat{\Phi}_c \right)^\dagger * \widehat{Q}_L^{(j)} \right) \\ + G_d^{(ij)} \left(\overline{\widehat{Q}}_L^{(i)} * h_d \left(\widehat{\Phi} \right) \widehat{d}_R^{(j)} \right) + G_d^{\dagger(ij)} \left(\overline{\widehat{d}}_R^{(i)} * h_d \left(\widehat{\Phi} \right)^\dagger * \widehat{Q}_L^{(j)} \right) \end{array} \right) \quad (2.84)$$

de la même façon que dans le modèle standard ordinaire, pour les champs des fermions on définit $\overline{\widehat{\psi}} = \widehat{\psi}^\dagger \gamma^0$

Les indices L et R dénotent les composantes gauche (*Left*) et droite (*Right*) définies par :

$$\begin{cases} \psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi \\ \psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi \end{cases} \quad (2.85)$$

Pour le champ du Higgs conjugué nous avons $\tau_c = i\tau_2 \Phi^*$.

où τ_2 est la matrice ordinaire de Pauli, et les indices $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ dénotent les générations des particules.

les matrices G_u, G_e et G_d sont les *couplages de Yukawa*.

Le champ de Higgs non commutatif $\widehat{\Phi}$ est relié par sont *SW maps* de la façon suivante [13][18] :

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi} [\Phi, V, \dot{V}]$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} &= \Phi + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} V_\beta \left(\partial_\alpha \Phi - \frac{i}{2} (V_\alpha \Phi - \Phi \dot{V}_\alpha) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \Phi - \frac{i}{2} (V_\alpha \Phi - \Phi \dot{V}_\alpha) \right) \dot{V}_\beta + o(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.86)$$

$\widehat{\Phi}$ est une fonctionnelle des deux champs de jauge V et \widehat{V} qui se transforme d'une manière covariante sous les transformations de jauge :

$$\delta \widehat{\Phi} [\Phi, V, \widehat{V}] = i \widehat{\Lambda} * \widehat{\Phi} - i \widehat{\Phi} * \widehat{\Lambda} \quad (2.87)$$

où $\widehat{\Lambda}$ et $\widehat{\Lambda}$ sont les paramètres de jauge correspondants.

Pour le conjugué hermétique nous avons :

$$\widehat{\Phi} [\Phi, V, \widehat{V}]^\dagger = \widehat{\Phi} [\Phi^\dagger, \widehat{V}, V] \quad (2.88)$$

La dérivée covariante du champ de Higgs non commutatif $\widehat{\Phi}$ est donnée par :

$$\widehat{D}_\mu \widehat{\Phi} = \partial_\mu \widehat{\Phi} - i \widehat{V}_\mu * \widehat{\Phi} + i \widehat{\Phi} * \widehat{V}_\mu$$

le spectre des particules présent dans le *MSNC* est le même que pour le *MS* commutatif [13][18] :

/	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_Q$	T_3
$e_R^{(i)}$	1	1	-1	-1	0
$L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$u_R^{(i)}$	3	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$d_R^{(i)}$	1	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$Q_L^{(j)} = \begin{pmatrix} u_L^{(j)} \\ d_L^{(j)} \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$	1	2	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
W^+, W^-, Z	1	3	0	$(\pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0)$
A	1	1	0	0	0
G^b	8	1	0	0	0

Tableau : Les différents champs du modèle standard selon les représentations des groupes de Lie.

La charge électrique est obtenue à l'aide de la relation de *Gell – Mann – Nishijama* (1.23).

Les champs physiques électrofaibles (W^\pm, Z et A) sont représentés par des champs non physiques du $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ qui sont $\{A$ et $B^a(a = 1, 2, 3)\}$.

Les gluons $\{G^b(b = 1, 2, \dots, 8)\}$ sont représentés dans un octet de $SU(3)_C$.

Il est à noter qu'en raison de l'apparition de nouveaux couplages entre différents bosons de jauge, et des corrections de plus en fonction de $\theta^{\mu\nu}$, le *MSNC* se présente en deux versions : *MSNC minimal* et *non minimal*, la dernière version se caractérise par la présence de quelques vertex comme le tri-couplage entre les bosons neutres (γ, Z), tel que $\gamma\gamma\gamma, \gamma\gamma Z$ et γZZ qu'ils n'existent que dans cette version du *MSNC*. Dans ce mémoire on se restreint à la version minimal du *MSNC* noté *MSNCm*.

Le terme de jauge du *MSNCm* est donné par :

$$\mathcal{L}_{Jauge}^{MSNCm} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hat{g}^2} Tr_1 + \frac{1}{g^2} Tr_2 + \frac{1}{g_S^2} Tr_3 \right) \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} \quad (2.89)$$

On simplifie le lagrangien de jauge par un choix qui consiste à faire la somme des trois traces des générateurs des groupes $SU(3), SU(2)$ et $U(1)$ dans la représentation fondamentale avec la matrice de l'hypercharge définit tel que [18] :

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Dans ce choix là, nous écrivons le lagrangien en fonction des champs physiques usuels [13] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Jauge}^{MSNCm} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + Tr B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + Tr G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right) \\ & + \frac{1}{4} g_s d^{abc} \theta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} G_{\rho\sigma}^a G_{\mu\nu}^b - G_{\rho\mu}^a G_{\sigma\nu}^b \right) G^{\mu\nu,c} + o(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.91)$$

où $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^a T_L^a$ et $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T_S^a$ représentent les champs de forces des groupes

$U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ respectivement tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g\epsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c \\ G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_S f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \end{array} \right. \quad (2.92)$$

d^{abc}/f^{abc} sont les constantes de structure totalement symétrique/anti symétrique du groupe $SU(3)$.

les champs physiques des bosons électrofaibles (W^\pm, Z, A) sont donnés par [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_\mu^\pm = \frac{(B_\mu^1 \mp B_\mu^2)}{\sqrt{2}} \\ Z_\mu = \frac{-\acute{g}A_\mu + gB_\mu^3}{\sqrt{g^2 + \acute{g}^2}} = -\sin\theta_w A_\mu + \cos\theta_w B_\mu^3 \\ A_\mu = \frac{gA_\mu + \acute{g}B_\mu^3}{\sqrt{g^2 + \acute{g}^2}} = \cos\theta_w A_\mu + \sin\theta_w B_\mu^3 \end{array} \right. \quad (2.93)$$

où la charge électrique e est reliée aux constantes de couplage par la relation :

$$e = g \sin\theta_w = \acute{g} \cos\theta_w \quad (2.94)$$

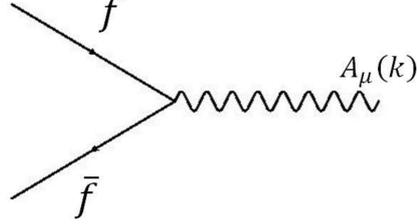
θ_w est l'angle de Weinberg

2.4.1 Quelques règles de Feynman du MSNCm

On note ici que à cause de la non commutativité de l'espace-temps de nouveaux couplages apparaissent comme le vertex ZZZ , aussi des corrections en fonction du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps $\theta^{\mu\nu}$ sont apparues dans quelques couplages. Nous citerons quelques vertex qui nous intéressent dans notre étude, quelques-uns sont déjà présents dans le MS ordinaire mais ils ont reçu des corrections en fonctions de $\theta^{\mu\nu}$, et d'autres n'apparaissent pas dans le MS commutatif comme les couplages entre trois et quatre bosons de jauge [18].

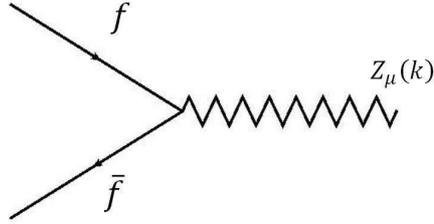
Pour les vertex déjà existants dans le MS , nous avons:

1. *FIG A* :



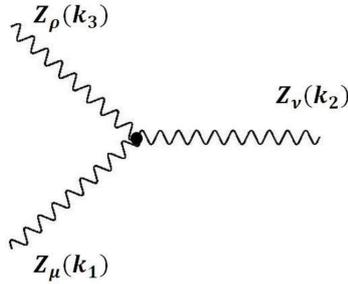
$$ieQ_f\gamma_\mu + \underbrace{\frac{1}{2}eQ_f(p_{out}\theta p_{in})\gamma_\mu - (p_{out}\theta)_\mu(\not{p}'_{in} - m_f) - (\not{p}'_{out} - m_f)(p_{in}\theta)_\mu}_{\text{correction en fonction de } \theta} \quad (2.95)$$

2. *FIG B* :



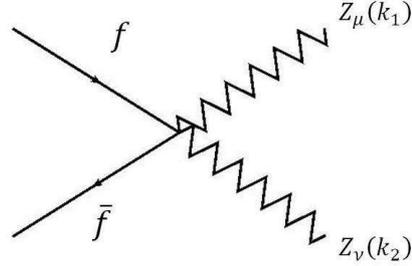
$$\frac{ie}{\sin 2\theta} \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_\mu - \frac{i}{2}K^\nu\theta_{\mu\nu\rho}p_{in}^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f}\gamma) \\ -\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}m_f [p_{in}^\nu(C_{V,f} - C_{A,f}\gamma^5) - p_{out}^\nu(C_{V,f} + C_{A,f}\gamma^5)] \end{array} \right\} \quad (2.96)$$

3. *FIG C* : On cite ici le nouveau couplage de trois bosons de jauge Z , absent dans le MS .



$$\frac{eM_Z^2}{2\sin^2 2\theta_W} \left\{ \begin{array}{l} \theta^{\mu\nu}(K_1 - K_2)^\rho + \theta^{\nu\rho}(K_2 - K_3)^\mu + \theta^{\mu\rho}(K_3 - K_1)^\nu \\ -2g^{\mu\nu}(\theta K_3)^\rho - 2g^{\nu\rho}(\theta K_1)^\mu - 2g^{\rho\mu}(\theta K_2)^\nu \end{array} \right\} \quad (2.97)$$

4. *FIG D* :Vertex à quatre jambes qui couple deux fermions avec deux bosons de jauge, couplage inexistant dans le *MS*



$$\frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \quad (2.98)$$

Ce dernier vertex est l'objet de notre étude, car nous nous intéresserons par la suite à l'apport pure non commutative de la section efficace du processus en question. On remarque que pour les deux derniers vertex si on fait $\theta \rightarrow 0$, le vertex disparaît caremment! donc ces deux couplages n'existent pas dans le *MS* cependant, d'autres vertex entre fermions et bosons de jauge sont apparus dans le *MSNCm*.

Chapitre 3

Etude Phénoménologique

3.1 *Introduction*

Le modèle standard de la physique des particules élémentaires -version non commutative- a créé de nouvelles interactions par rapport au MS ordinaires (citons par exemple, le couplage de photons en QED_{NC} , couplage ZZZ , etc). Cette nouvelle physique doit être mise en évidence par les accélérateurs de particules notamment "*le grand collisionneur des hadrons*" LHC , par la suite aller au delà du modèle standard peut résoudre quelques problèmes de la physique contemporaine.

Dans ce chapitre nous allons sonder l'aspect non commutatif de la physique des particules par l'étude de l'un des processus physique très important au près du LHC , c'est un processus d'annihilation inélastique $f\bar{f} \rightarrow ZZ$ ($f\bar{f}$ dénote un fermion et un anti-fermion respectivement), il sert à produire le boson de jauge faible Z^0 , il contribue aussi au processus physique $P\bar{P} \rightarrow ZZ$ (P représente le proton). D'ailleurs c'est à travers ce processus que les physiciens ont pu confirmer l'existence du photon lourd Z^0 en 1983.

Les diagrammes possibles du processus étudié sont :

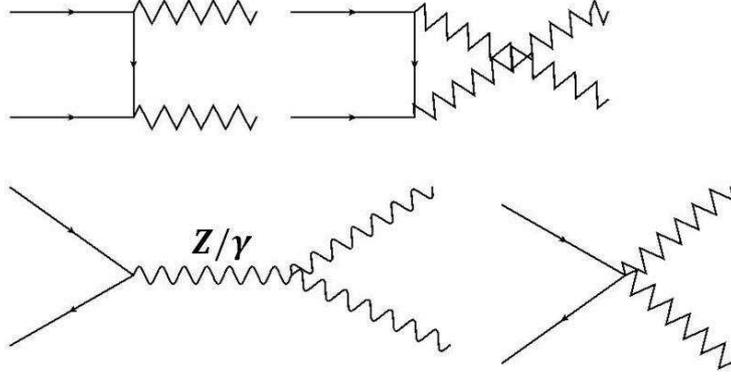


FIG E :diagrammes possibles pour le processus $f\bar{f} \rightarrow ZZ$

On s'intéresse par la contribution pure non commutative du processus en question, pour cela nous allons considerer uniquement le dernier diagramme figuré dans l'image en haut (diagramme en bas de l'image à droite,voir aussi FIG D), car ce couplage est d'origine pure non commutatif, contrairement aux autres couplages qu'ils existent déjà en MS (sauf pour le vertex de trois bosons Z qui est aussi de nature non commutative).

3.2 Calcul de la section efficace du processus $f\bar{f} \rightarrow ZZ$

3.2.1 Définition de la section efficace différentielle

On définit la section efficace différentielle (SED) pour une interaction de la forme $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ par [2][24] :

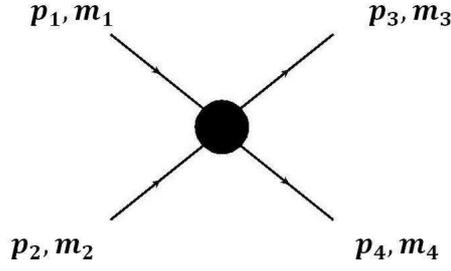


FIG F :Définition de la SED, cas de deux corps à l'état final

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{|p_{1cm}|^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.1)$$

avec la convention ($\hbar = c = 1$), t variable de Mandelstam.

Dans le référentiel du "centre de masse" nous avons :

$$|p_{1cm}|^2 = (E_1^2)^2 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 = \frac{s}{4} \quad (3.2)$$

$$t = -\frac{\sqrt{s}}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$dt = \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta d\theta \quad (3.3)$$

L'élément de l'angle solide $d\Omega$ est défini tel que :

$$d\Omega = (d \cos \theta) d\varphi = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.4)$$

à partir des équations (3.3) et (3.4) nous pouvons écrire :

$$dt = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{d\Omega}{d\varphi} \quad (3.5)$$

d'autre part nous pouvons écrire que :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi$$

nous obtiendrons, alors :

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} |\mathcal{M}|^2 d\varphi \quad (3.7)$$

Remarque importante :

Dans le cas commutatif, l'amplitude de transition $|\mathcal{M}|^2$ est indépendante de l'angle azimutal φ , ce qui explique l'apparition d'un facteur de 2π de plus après l'intégration par rapport à φ , ce résultat est différent dans le cas non commutatif, comme nous allons le voir.

3.2.2 Cinématique du processus

On fait intervenir les *variables de Mandelstam*, ces derniers sont des invariants de Lorentz [24] :

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{cases}$$

avec, la contrainte :

$$s + t + u = m_f^2 + m_{\bar{f}}^2 + M_Z^2 + M_Z^2$$

Dans le référentiel "*centre de masse*" nous avons [2]

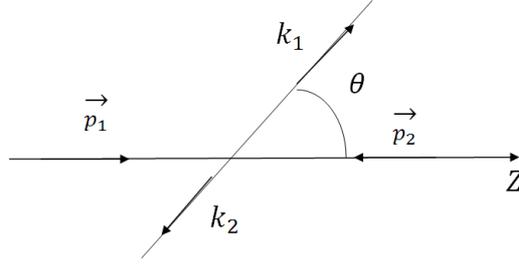


FIG G :L'interaction est suivant l'axe
OZ

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \text{ ce qui implique que } \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$$

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = p_1^0 = p_2^0 = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad (3.8)$$

On suppose que les collisions se produisent suivant l'axe OZ , nous avons donc :

$$\begin{cases} p_1^o(p_1^0, p_1^1, p_1^2, p_1^3) \equiv \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \\ p_2^o(p_2^0, p_2^1, p_2^2, p_2^3) \equiv \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{s}}{2} \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ &= p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 \\ &= M_Z^2 - \frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \\ &= M_Z^2 - 2p_1p_3 \end{aligned}$$

avec l'approximation ($m_f \ll M_Z$), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} p_1 p_3 = -\frac{1}{2}(t - M_Z^2) \\ p_1 p_3 = p_1 k_1 = p_2 k_2 = \frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -\frac{1}{2}(t - M_Z^2) \\ p_1 k_2 = p_2 k_1 = \frac{s}{2}(1 + \cos \theta) = -\frac{1}{2}(u - M_Z^2) \end{cases} \quad (3.10)$$

nous aurons donc :

$$\begin{cases} p_1 k_1 = p_2 k_2 = -\frac{1}{2}(t - M_Z^2) \\ p_1 k_2 = p_2 k_1 = -\frac{1}{2}(u - M_Z^2) \end{cases} \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{cases} K_1^\rho (K_1^0, K_1^1, K_1^2, K_1^3) \equiv \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \cos \varphi, \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \sin \varphi, \frac{\sqrt{s}}{2} \cos \theta \right) \\ K_2^\rho (K_2^0, K_2^1, K_2^2, K_2^3) \equiv \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, -\frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \cos \varphi, -\frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \sin \varphi, -\frac{\sqrt{s}}{2} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

d'après (3.10) nous avons :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{t - u}{2s} \\ \sin \theta = \frac{1}{2s} (2s + t - u)^{\frac{1}{2}} (2s - t + u)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.13)$$

3.2.3 Calcul de l'amplitude de transition

Dans cette partie nous nous intéressons par la contribution non commutative de la section efficace différentielle du processus en question. Pour cela, nous allons considérer le diagramme de Feynman provient de l'aspect non commutatif de l'espace-temps (n'existe pas dans le *MS*)(voir *FIG F*).

Nous allons calculer l'amplitude de transition en utilisant le vertex modifié du *MSNCm*. l'amplitude de transition s'écrit :

$$\mathcal{M} = \bar{v}(p_2) \left\{ \frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} u(p_1) \epsilon_\mu(K_1) \epsilon_\nu^*(K_2) \quad (3.14)$$

son complexe conjugué a la forme suivante :

$$\mathcal{M}^* = \bar{u}(p_1) \left\{ \frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} v(p_2) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \quad (3.15)$$

Calculons maintenant le carré de l'amplitude de transition :

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M} \mathcal{M}^* \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= \bar{v}(p_2) \left\{ \frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} u(p_1) \bar{u}(p_1) \\ &\left\{ \frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} \theta_{\mu'\nu'\rho'} (K_1^{\rho'} - K_2^{\rho'}) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} v(p_2) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= \frac{e^4}{4 \sin^4 2\theta_W} \bar{v}(p_2) \left\{ \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} u(p_1) \bar{u}(p_1) \\ &\left\{ \theta_{\mu'\nu'\rho'} (K_1^{\rho'} - K_2^{\rho'}) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} v(p_2) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \end{aligned}$$

la sommation sur les spins des particules initiales et les polarisations des particules finales donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Spin \\ Pol}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{4 \sin^4 2\theta_W} \left[-g_{\mu\mu'} + \frac{K_{1\mu} K_{1\mu'}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\nu'} + \frac{K_{2\nu} K_{2\nu'}}{M_Z^2} \right] \bar{v}(p_2) \\ &\left\{ \frac{-e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} u(p_1) \bar{u}(p_1) \\ &\left\{ \theta_{\mu'\nu'\rho'} (K_1^{\rho'} - K_2^{\rho'}) (C_{V,f} - C_{A,f} \gamma^5)^2 \right\} v(p_2) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \epsilon_{\nu'}(K_2) \epsilon_{\mu'}^*(K_1) \end{aligned} \quad (3.18)$$

pour simplifier, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} = \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \\ \alpha = \frac{e^4}{4 \sin^4 2\theta_W} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

tenons compte des relations suivantes [4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{Spin} u(p_1) \bar{u}(p_1) = \not{p}_1 + m \\ \sum_{Spin} v(p_2) \bar{v}(p_2) = \not{p}_2 + m \end{array} \right. \quad (3.20)$$

et du fait que à très haute énergie, les masses des fermions sont négligeables devant celles des bosons de jauge, de sorte qu'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \not{p}_1 + m \approx \not{p}_1 \\ \not{p}_2 + m \approx \not{p}_2 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

cette approximation est justifiée, car nous avons une interaction proton-antiproton ce qui signifie que les fermions qui contribuent aux interactions sont des quarks legés ($u; d$) et leurs antimatière, en effet :

le rapport $\frac{M_Z}{m_d} \simeq 18958$ [24] pour le quark le plus lourd entre ces deux ce qui rend l'approximation valable à une certaine limite acceptable dans la présente étude.

la relation (3.18) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Spin \\ Pol}} |\mathcal{M}|^2 &= \alpha G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \begin{array}{l} -\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \left(C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2 - 2C_{V,f} C_{A,f} \gamma^5 \right) \\ \left(C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2 + 2C_{V,f} C_{A,f} \gamma^5 \right) \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \end{array} \right\} \\ &= \alpha G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} Tr \left\{ -\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \left[\left(C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2 \right)^2 - 4C_{V,f}^2 C_{A,f}^2 \right] \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \right\} \\ &= \alpha G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \left(C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2 \right)^2 Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] - 4C_{V,f}^2 C_{A,f}^2 Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \gamma^5 \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] \right\} \quad (3.22) \end{aligned}$$

remarquons que :

$$Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \gamma^5 \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] = 0 \quad (3.23)$$

en effet

$$\begin{cases} \not{p}_1 = \gamma_\alpha p_1^\alpha \\ \not{p}_2 = \gamma_\beta p_2^\beta \end{cases}$$

une des propriétés des matrices γ^5 est que (voir *Annexe*) :

$$Tr (\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\sigma) = 4i \epsilon^{\alpha\beta\delta\sigma} = -4i \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}$$

$\epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}$ tenseur de *Levi – Civita* complètement antisymétrique

$\theta_{\mu\nu\rho}$ peut se décomposer sous la forme :

$$\theta_{\mu\nu\rho} = \theta_{\mu\nu} \gamma_\rho + \theta_{\rho\mu} \gamma_\nu + \theta_{\nu\rho} \gamma_\mu \quad (3.24)$$

l'équation (3.22) devient :

$$Tr \left\{ \left(\gamma_\beta p_2^\beta \right) \left(\theta_{\mu\nu} \gamma_\rho + \theta_{\rho\mu} \gamma_\nu + \theta_{\nu\rho} \gamma_\mu \right) \gamma^5 \left(\gamma_\alpha p_1^\alpha \right) \left(\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} \gamma_{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} \gamma_{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} \gamma_{\dot{\mu}} \right) \right\} \quad (3.25)$$

après développement, nous aurons des produits entre des parties symétriques et d'autres parties antisymétriques ce qui rend la contribution de ce terme nulle (le produit donne *zéro*).

Il nous reste donc à calculer le terme : $Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}]$

d'après les propriétés des traces (voir *Annexe*) nous avons :

$$Tr (\gamma^\alpha \gamma^\beta \not{a} \not{b}) = 4 [g^{\alpha\beta} (ab) + a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha] \quad (3.26)$$

tenons compte de la décomposition de $\theta^{\mu\nu\rho}$ (3.24) nous pouvons écrire :

$$Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] = Tr \left\{ \left(\gamma_{\beta} p_2^{\beta} \right) \left(\theta_{\mu\nu} \gamma_{\rho} + \theta_{\rho\mu} \gamma_{\nu} + \theta_{\nu\rho} \gamma_{\mu} \right) \left(\gamma_{\alpha} p_1^{\alpha} \right) \left(\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} \gamma_{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} \gamma_{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} \gamma_{\dot{\mu}} \right) \right\} \quad (3.27)$$

après développement et la mise en facteur commun des termes nécessaires, nous obtenons l'expression suivante :

$$Tr [\not{p}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \not{p}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] = 4\theta_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{l} p_2^{\rho} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \\ - (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} g^{\rho\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\rho\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} g^{\rho\dot{\nu}} \right] + p_1^{\rho} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\nu}} \right] \end{array} \right\} \\ + 4\theta_{\nu\rho} \left\{ \begin{array}{l} p_2^{\mu} \left[\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} \right] - (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} g^{\mu\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\nu}} \right] \\ + p_1^{\mu} \left[\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}} \right] \end{array} \right\} \\ + 4\theta_{\rho\mu} \left\{ \begin{array}{l} p_2^{\nu} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} \right] - (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} g^{\nu\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\nu\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\mu}\rho} g^{\nu\dot{\rho}} \right] \\ + p_1^{\nu} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} \right] \end{array} \right\} \quad (3.28a)$$

On introduit les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\mu\nu} p_2^{\rho} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_2 = -G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\mu\nu} (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} g^{\rho\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\rho\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} g^{\rho\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_3 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\mu\nu} p_1^{\rho} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_4 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\nu\rho} p_2^{\mu} \left[\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_5 = -G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\nu\rho} (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} g^{\mu\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_6 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\nu\rho} p_1^{\mu} \left[\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}} \right] \right\} \\ T_7 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\rho\mu} p_2^{\nu} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} \right] \right\} \\ T_9 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\rho\mu} p_1^{\nu} \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3.28b)$$

L'expression (3.28a) devient :

$$Tr [\not{D}_2 \theta_{\mu\nu\rho} \not{D}_1 \theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}}] = 4\alpha (C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2) \{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9\} \quad (3.29)$$

tenons compte de (2, 2), on fait le choix suivant, pour le paramètre de la non commutativité de l'espace-temps $\theta^{\mu\nu}$ [22] :

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{C_{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} = \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$C_{\mu\nu}$: sont les éléments d'une matrice complètement anti-symétrique, définis ainsi (3.30) .

avec ce choix de la matrice $\theta^{\mu\nu}$, nous pouvons vérifier que :

$$K_1 \theta K_1 = K_2 \theta K_2 = 0$$

en effet :

$$\begin{aligned} K_1 \theta K_1 &= K_1^\mu \theta_{\mu\nu} K_1^\nu = K_1^\mu (\theta K_1)_\mu \\ K_1 \theta K_1 &= K_1^0 [\theta_{00} K_1^0 + \theta_{01} K_1^1 + \theta_{02} K_1^2 + \theta_{03} K_1^3] \\ &+ K_1^1 [\theta_{10} K_1^0 + \theta_{11} K_1^1 + \theta_{12} K_1^2 + \theta_{13} K_1^3] \\ &+ K_1^2 [\theta_{20} K_1^0 + \theta_{21} K_1^1 + \theta_{22} K_1^2 + \theta_{23} K_1^3] \\ &+ K_1^3 [\theta_{30} K_1^0 + \theta_{31} K_1^1 + \theta_{32} K_1^2 + \theta_{33} K_1^3] \end{aligned}$$

après développement en tenant compte des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^0 = K_2^0 \\ K_1^1 = -K_2^1 \\ K_1^2 = -K_2^2 \\ K_1^3 = -K_2^3 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

nous aurons le résultat cherché :

$$\begin{cases} K_1 \theta K_1 = K_1^\mu \theta_{\mu\nu} K_1^\nu = K_1^\mu (\theta K_1)_\mu = 0 \\ K_2 \theta K_2 = K_2^\mu \theta_{\mu\nu} K_2^\nu = K_2^\mu (\theta K_2)_\mu = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

de même, à travers les relations (3.12) nous pouvons écrire :

$$K_1 \theta K_2 = -K_2 \theta K_1 = -\frac{s}{2\Lambda_{NC}^2} (\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) \quad (3.33)$$

on remarque que :

$$\begin{cases} T_3 = T_1 (p_1 \longleftrightarrow p_2) \\ T_6 = T_4 (p_1 \longleftrightarrow p_2) \\ T_9 = T_7 (p_1 \longleftrightarrow p_2) \end{cases} \quad (3.34)$$

Il suffit donc de calculer les termes : $T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_8$.

Calcul des termes $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9$

$$T_1 = G_{\mu\nu\rho\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}} \left\{ \theta_{\mu\nu} p_2^\rho \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \right\}$$

tenons compte de (3.19) et (3.28) nous aurons:

$$T_1 = \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu} K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu} K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \left\{ \theta_{\mu\nu} p_2^\rho \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \right\} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
T_1 = & -\frac{p_2(K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(p_1(K_1 - K_2)) [(K_2\theta)\theta K_2] + (K_1 p_1) [(K_1\theta)((K_1 - K_2)\theta)]] \\
& -\frac{p_2(K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(K_1\theta K_2)((K_1\theta)p_1) + (p_1(K_1 - K_2)) [(K_2\theta)\theta K_2]] \\
& -\frac{p_2(K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(K_1\theta K_2)((K_2\theta)p_1) + (K_2 p_1)(K_2\theta)((K_1 - K_2)\theta)] \\
& +\frac{2p_2(K_1 - K_2)}{M_Z^4} [(K_1 p_1)(K_1\theta K_2)^2]
\end{aligned}$$

et de même pour les autres T , nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
T_2 = & -\left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2}\right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2}\right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.36) \\
& \theta_{\mu\nu}(p_1 p_2) [\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}}g^{\rho\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}}g^{\rho\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}}g^{\rho\dot{\nu}}]
\end{aligned}$$

après le développement et la simplification nous aurons :

$$\begin{aligned}
T_2 = & \frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} [-2(K_1 K_2) [(K_2\theta)\theta K_2] + (K_1\theta K_2)((K_2\theta)(K_1 - K_2))] \\
& +\frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} [(K_1 K_2)((K_2\theta)((K_1 - K_2)\theta)) - 2(K_1 K_2)[K_1\theta(K_1\theta)]] \\
& +\frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} [-(K_1 K_2)[(K_1\theta)((K_1 - K_2)\theta)] + ((K_1\theta)(K_1 - K_2))[K_1((K_1 - K_2)\theta)] \\
& -\frac{2(p_1 p_2)}{M_Z^4} (K_1 K_2)(K_1\theta K_2)^2
\end{aligned}$$

$$T_3 = T_1(p_1 \longleftrightarrow p_2)$$

$$T_3 = \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.37)$$

$$\left\{ \theta_{\mu\nu} p_1^\rho \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\nu}} \right] \right\}$$

$$T_3 = -\frac{p_1 (K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(p_2 (K_1 - K_2)) [(K_2\theta)\theta K_2] + (K_1 p_2) [(K_1\theta)((K_1 - K_2)\theta)]]$$

$$-\frac{p_1 (K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(K_1\theta K_2) ((K_1\theta) p_2) + (p_2 (K_1 - K_2)) ((K_2\theta)\theta K_2)]$$

$$-\frac{p_1 (K_1 - K_2)}{M_Z^2} [(K_1\theta K_2) ((K_2\theta) p_2) + (K_2 p_2) [(K_2\theta)((K_1 - K_2)\theta)]]$$

$$-\frac{2p_1 (K_1 - K_2)}{M_Z^4} (K_1 p_2) (K_1\theta K_2)^2$$

$$T_4 = \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.38)$$

$$\left\{ \theta_{\nu\rho} p_2^\mu \left[\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} \right] \right\}$$

$$T_4 = (p_1 (K_1 - K_2)) [((K_1 - K_2)\theta)\theta p_2] + (p_1 p_2) [(K_1 - K_2)\theta]^2$$

$$+ [p_2 ((K_1 - K_2)\theta)] [((K_1 - K_2)\theta) p_1]$$

$$-\frac{p_1 (K_1 - K_2)}{M_Z^2} (K_1 p_2) [((K_1 - K_2)\theta)\theta K_1]$$

$$-\frac{(K_1 p_1)(K_1 p_2)}{M_Z^2} [[(K_1 - K_2)\theta]^2 + (K_1\theta K_2) (((K_1 - K_2)\theta) p_1)]$$

$$-\frac{(K_1\theta K_2)^2}{M_Z^2} [(p_1 p_2) (K_1\theta K_2) + (K_2 p_1) [p_2 ((K_1 - K_2)\theta)]]$$

$$T_5 = - \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.39)$$

$$\{ \theta_{\nu\rho} (p_1 p_2) [\theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} g^{\mu\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} g^{\mu\dot{\nu}}] \}$$

$$T_5 = - (p_1 p_2) [(K_1 - K_2) \theta ((K_1 - K_2) \theta)] + 5 ((K_1 - K_2) \theta)^2]$$

$$+ \frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} (K_1 \theta K_2) [((K_1 - K_2) \theta K_2) + 5 (K_1 \theta K_2)^2]$$

$$+ \frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} [K_1 \theta ((K_1 - K_2) \theta) (K_1 (K_1 - K_2)) + (K_1 \theta K_2)^2]$$

$$T_6 = T_4 (p_1 \longleftrightarrow p_2)$$

$$T_6 = \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu}K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu}K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.40)$$

$$\{ \theta_{\nu\rho} p_1^\mu [\theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} + \theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}}] \}$$

$$\begin{aligned}
T_6 = & (p_2 (K_1 - K_2)) [((K_1 - K_2) \theta) \theta p_1] + (p_1 p_2) [(K_1 - K_2) \theta]^2 \\
& + [p_1 ((K_1 - K_2) \theta)] [((K_1 - K_2) \theta) p_2] \\
& - \frac{p_2 (K_1 - K_2)}{M_Z^2} (K_1 p_1) [((K_1 - K_2) \theta) \theta K_1] \\
& - \frac{(K_1 p_1)}{M_Z^2} [(K_1 p_2) [(K_1 - K_2) \theta]^2 + (K_1 \theta K_2) (((K_1 - K_2) \theta) p_2)] \\
& - \frac{(K_1 \theta K_2)^2}{M_Z^2} [(p_1 p_2) (K_1 \theta K_2) + (K_2 p_2) [p_1 ((K_1 - K_2) \theta)]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 = & \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu} K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu} K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.41) \\
& \left\{ \theta_{\rho\mu} p_2^\nu \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_1^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_1^{\dot{\mu}} + \theta_{\nu\dot{\mu}} p_1^{\dot{\rho}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 = & (p_1 (K_1 - K_2)) [((K_1 - K_2) \theta) \theta p_2] + (((K_1 - K_2) \theta) p_1) (((K_1 - K_2) \theta) p_2) \\
& + (p_1 p_2) ((K_1 - K_2) \theta)^2 \\
& + \frac{(K_1 \theta K_2)}{M_Z^2} [(p_1 (K_1 - K_2)) (K_1 \theta p_2) + (K_1 p_1) (p_2 ((K_1 - K_2) \theta)) + (p_1 p_2) (K_1 \theta K_2)] \\
& - \frac{(K_2 p_2)}{M_Z^2} (p_1 (K_1 - K_2)) (((K_1 - K_2) \theta) \theta K_2) + (p_1 ((K_1 - K_2) \theta)) (K_1 \theta K_2) \\
& - \frac{(K_2 p_2)}{M_Z^2} (K_2 p_1) ((K_1 - K_2) \theta)^2 - \frac{2 (K_2 p_2) (K_1 p_1)}{M_Z^4} (K_1 \theta K_2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & - \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu} K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu} K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.42) \\
& \left\{ \theta_{\rho\mu} (p_1 p_2) \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} g^{\nu\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\nu}\dot{\rho}} g^{\rho\dot{\mu}} + \theta_{\dot{\mu}\rho} g^{\nu\dot{\rho}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & - (p_1 p_2) [((K_1 - K_2) \theta) \theta (K_1 - K_2) + 5 ((K_1 - K_2) \theta)^2] \\
& + \frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} [(K_1 K_2) (((K_1 - K_2) \theta) \theta K_2) + (K_1 \theta K_2)^2] \\
& - \frac{(p_1 p_2)}{M_Z^2} (K_1 \theta K_2) [(K_1 \theta (K_1 - K_2)) + 5 ((K_1 - K_2) \theta)^2] \\
& + \frac{2 (p_1 p_2)}{M_Z^4} (K_1 K_2) (K_1 \theta K_2)^2
\end{aligned}$$

$$T_9 = T_7 (p_1 \longleftrightarrow p_2)$$

$$\begin{aligned}
T_9 = & \left[-g_{\mu\dot{\mu}} + \frac{K_{1\mu} K_{1\dot{\mu}}}{M_Z^2} \right] \left[-g_{\nu\dot{\nu}} + \frac{K_{2\nu} K_{2\dot{\nu}}}{M_Z^2} \right] (K_1^\rho - K_2^\rho) (K_1^{\dot{\rho}} - K_2^{\dot{\rho}}) \quad (3.43) \\
& \left\{ \theta_{\rho\mu} p_1^\nu \left[\theta_{\dot{\mu}\dot{\rho}} p_2^{\dot{\nu}} + \theta_{\dot{\rho}\dot{\nu}} p_2^{\dot{\mu}} + \theta_{\nu\dot{\mu}} p_2^{\dot{\rho}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_9 = & (p_2 (K_1 - K_2)) [((K_1 - K_2) \theta) \theta p_1] + (((K_1 - K_2) \theta) p_2) (((K_1 - K_2) \theta) p_1) \\
& + (p_1 p_2) ((K_1 - K_2) \theta)^2 \\
& + \frac{(K_1 \theta K_2)}{M_Z^2} [(p_2 (K_1 - K_2)) (K_1 \theta p_1) + (K_1 p_2) (p_1 ((K_1 - K_2) \theta)) + (p_1 p_2) (K_1 \theta K_2)] \\
& - \frac{(K_2 p_1)}{M_Z^2} [(p_2 (K_1 - K_2)) (((K_1 - K_2) \theta) \theta K_2) + (p_2 ((K_1 - K_2) \theta)) (K_1 \theta K_2)] \\
& - \frac{(K_2 p_1) (K_2 p_2)}{M_Z^2} ((K_1 - K_2) \theta)^2 - \frac{2 (K_2 p_1) (K_1 p_2)}{M_Z^4} (K_1 \theta K_2)^2
\end{aligned}$$

Simplifions maintenant les termes qui apparaissent dans les expressions précédentes.

D'après notre choix du $\theta^{\mu\nu}$ dans (3.30) nous avons : $\theta_{\nu\nu} = 0, \nu = (\overline{0, 3})$

Il en découle que :

$$(\theta\theta)^\nu{}_\nu = \theta^{\nu\mu}\theta_{\mu\nu} = \theta^{\nu 0}\theta_{0\nu} + \theta^{\nu 1}\theta_{1\nu} + \theta^{\nu 2}\theta_{2\nu} + \theta^{\nu 3}\theta_{3\nu} = 0 \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_1\theta)_\nu \equiv \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} \{-(K_1 + K_2 + K_3), (K_0 - K_2 - K_3), (K_0 + K_1 + K_3), (K_0 + K_1 + K_2)\} \\ (K_2\theta)_\nu \equiv \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} \{(K_1 + K_2 + K_3), (K_0 + K_2 + K_3), (K_0 - K_1 + K_3), (K_0 - K_1 - K_2)\} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

$$[(K_1 - K_2)\theta]_\nu \equiv \frac{2}{\Lambda_{NC}^2} \{-(K_1 + K_2 + K_3), -(K_2 + K_3), (K_1 - K_3), (K_1 + K_2)\} \quad (3.46)$$

pour simplifier l'écriture on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} K \equiv K_1 \\ K_1 = K_1^1 \\ K_2 = K_1^2 \\ K_3 = K_1^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
K_{1\mu}\theta^{\mu\nu}(K_1\theta)_\nu = K_1\theta(K_1\theta) = \frac{1}{\Lambda_{NC}^4} [(K_0 - K_1 - K_2 - K_3) - 4K_2(K_1 + K_3)] \\
(K_2\theta)_\mu\theta^{\mu\nu}K_{2\nu} = (K_2\theta)\theta K_2 = \frac{1}{\Lambda_{NC}^4} [3(K_0 + K_1 + K_2 + K_3) + 4[K_2(K_1 + K_3) - K_0(K_1 - K_3)]] \\
(K_1\theta)_\nu[(K_1 - K_2)\theta]^\nu = \frac{1}{\Lambda_{NC}^4} [-2(K_1 + K_2 + K_3) + 4K_0(K_1 - K_3) + 8K_1K_3] \\
(K_2\theta)_\nu[(K_1 - K_2)\theta]^\nu = \frac{2}{\Lambda_{NC}^4} [(K_1 + K_2 + K_3) + 2K_0(K_3 - K_1) - 4K_1K_3] \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu\theta^{\mu\nu}p_{1\nu} = [(K_1 - K_2)\theta]\theta p_1 = -\frac{2}{\Lambda_{NC}^4} (2K_1 + 2K_2 - K_3) \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu\theta^{\mu\nu}p_{2\nu} = [(K_1 - K_2)\theta]\theta p_2 = -\frac{2}{\Lambda_{NC}^4} (K_1 + K_2 + K_3) \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu[(K_1 - K_2)\theta]^\mu = [(K_1 - K_2)\theta]^2 = \frac{4}{\Lambda_{NC}^4} [-(K_1 + K_2 + K_3) + 2K_1K_3] \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu\theta^{\mu\nu}K_{1\nu} = -\frac{2}{\Lambda_{NC}^4} [3(K_1 + K_2 + K_3) + 4K_2(K_1 + K_3) + 2K_0(K_1 + K_3)] \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu\theta^{\mu\nu}K_{2\nu} = -\frac{2}{\Lambda_{NC}^4} [3(K_1 + K_2 + K_3) + 4K_2(K_1 + K_3) + 2K_0(K_1 + K_2)] \\
[(K_1 - K_2)\theta]_\mu\theta^{\mu\nu}(K_1 - K_2)_\nu = -\frac{4}{\Lambda_{NC}^4} [3(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) + 4(K_1K_2 + K_2K_3)] \\
(K_1\theta K_2)^2 = \frac{1}{4\Lambda_{NC}^4} [1 + 2[K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3]]
\end{array} \right. \tag{3.47}$$

à la fin, nous obtenons l'expression explicite du carré de l'amplitude de transition du processus en question, elle est donnée par :

$$|\mathcal{M}(\varphi)|^2 = 4\alpha (C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2) T \tag{3.48}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 \\
\alpha = \frac{e^4}{4\sin^4 2\theta_W}
\end{array} \right. \tag{3.49}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{32M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2us-2ts+ut-su] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [t^3-M_Z^2t^3-M_Z^2u^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [ut^2+M_Z^2ut] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [us-ts+u^2t] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [us^2-ts^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [(t^2-s^2+u^2-2ut)\sin\varphi\cos\varphi] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [ut^2+u^3-2tu^2-M_Z^2t^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2u^2+2M_Z^2ut] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [us-ts] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-3ut^2-M_Z^2u-4ut^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2M_Z^2t^2+M_Z^4us-3M_Z^2ut] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^4t+2st^2+2su^2-4uts] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2\Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s^3+2u^3+4u^2t+2M_Z^2t^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2u^2-us^2+M_Z^2s^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [4s+t-u] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{5}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{s^3}{2}+2uts-su^2-st^2\right] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-us+ts+s^2+t^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [M_Z^2u-M_Z^2t-ut-st^2] (\sin\varphi+\cos\varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2us+M_Z^2ts+uts] (\sin\varphi+\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s-t-u] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-9st^2 - 3su^2 + 3ts^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-6M_Z^2 us + 6M_Z^2 ts + 12uts] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-4ut - M_Z^2 t + 4M_Z^2 u + 4t^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [ts - M_Z^2 s - 2us^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s^2 - 5st + 5us] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{5}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-s^3 - st^2 - su^2 + 2ut] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [us^2 - ts^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [5st - t^2 + 2ut - 6us] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [tu^2 + M_Z^4 t - 2M_Z^2 ut - u^3] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2M_Z^2 u - M_Z^4 u] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s-t+u] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2s+t-u] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-st^4 - su^4 + us^2 t^3 - 2uts^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-4st^2 u^2 - su^2 t^2 + 4stu^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2ust^3 + t^2 s^3 + u^2 s^3 - stu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s^2 t^2 - t^4 - t^2 u^2 + 2ut^3 + M_Z^2 us^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2 ut^2 - M_Z^2 u^3 + 2M_Z^2 u^2 t] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-uts^2 ut^3 + tu^3 - 2M_Z^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [M_Z^2 t^4 - M_Z^2 t s^2 + M_Z^2 t u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-2M_Z^2 u t^2 + s^3 - s t^2 - s u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2u t s - s^4 + s^2 t^2 + s^2 u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{M_Z^2} u t s^2 + 11(u-t) \right] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{5}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-s^3 + s t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{5}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s u^2 - 2u t s] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{3}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [u t + M_Z^2 u - M_Z^2 t - u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{3}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [u t + M_Z^2 u - M_Z^2 t - u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [t^3 - u^3 + 3t u^2 - 3u t^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [3u s - 3s t + 2u t - t^2 - u^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [t^3 - u^3 - 3u t^2 + 3t u^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [u^3 + u t^2 - 2t u^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2 t^2 - M_Z^2 u^2 + 2M_Z^2 u t] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s^3 + s t^2 - s u^2 + 2u t s] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-2u s^2 + 2u t^2 + 2u^3 - 4t u^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [M_Z^2 s - M_Z^2 t^2 - M_Z^2 u^2 + 2M_Z^2 u t] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s u^2 - s t^2 + 6t - 6u] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-t^3 - t u^2 + 2u t^2 + M_Z^2 t^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [M_Z^2 u^2 - 2M_Z^2 u t + t^3 - M_Z^2 t^2] \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [tu^2 - M_Z^2 u^2 - 2ut^2 + 2M_Z^2 ut] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4M_Z^2} (st-us) + 2u - 2t \right] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-ut^2 - u^3 - 2tu^2 - M_Z^2 t^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2M_Z^2 ut - M_Z^2 u^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [ut - u^2 - M_Z^2 t - M_Z^2 u] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{32M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [s^2 + 4us - 4st] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-st^2 - su^2 + 3ust - ut^2 - u^3] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [2tu^2 + M_Z^2 t^2 + M_Z^2 u^2 - 2M_Z^2 ut] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-su^2 - M_Z^2 st + M_Z^2 us] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-u^2 + 2M_Z^2 t + ut - 2ut^2] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-2M_Z^2 u^2 - 2ut^2 + 2M_Z^2 ut - st^2] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2M_Z^2} (M_Z^2 t^2 + M_Z^4 u - M_Z^4 t) + t - u \right] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-M_Z^2 us + M_Z^2 ts + uts - 2ut^2 - 2M_Z^4 t] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [M_Z^2 t^2 + tu^2 + M_Z^4 u - M_Z^2 u^2 + tu^2] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-ut^2 - M_Z^4 t + M_Z^4 u + M_Z^2 t^2 - M_Z^2 u^3] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} \left[3(t-u) + \frac{1}{2}(st-us+t-u) \right] \cos \varphi \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-s^4 - 2uts^2 + s^2 t^2 + s^2 u^2] \\
& + \frac{5}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [-s^3 + st^2 + su^2 - 2uts] \\
& + \frac{3}{8\Lambda_{NC}^4} (2s+t-u)^{\frac{1}{2}} (2s-t+u)^{\frac{1}{2}} [ut + M_Z^2 u - M_Z^2 t - u^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [t^2 - s^2 + u^2 - 2ut] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [ts^3 - 3stu^2 + 2uts - us^3 + ust^2 + su^3] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-uts^2 + ut^3 + 3tu^3 - 2u^2t^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [s^3 - su^2 - st^2 + 2uts] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} [-M_Z^2 us^2 + M_Z^2 ut^2 + M_Z^2 u^3 - 4M_Z^2 tu^2 + M_Z^2 ts^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} [-M_Z^2 ts - 3M_Z^2 u^2t + 4M_Z^2 ut^2 - 2u^2t^2 - 4M_Z^2 tu^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{5}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-ts^3 + us^3 + st^3 - su^3 + 3stu^2 - 3ust^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [-t^3 + ut^2 - M_Z^2 t - M_Z^2 s + 2M_Z^2 t^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-s^3 + st^2 + su^2 - 2ust] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{5}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} [-ts^3 + st^3 - stu^2 + us^3 - ust^2 - su^3 - 2stu^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-t^3 + ts^2 - 3tu^2 + 3ut^2 - us^2 + u^3] \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [s^4 - s^2t^2 - s^2u^2 + 2uts^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [s^3 - st^2 - su^2 + uts - M_Z^2 us + M_Z^2 ts + su^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-uts^2 + ut^3 - 2tu^3 - 3u^2t^2 - M_Z^2 us^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [3M_Z^2 ut^2 + M_Z^2 u^3 - 3M_Z^2 tu^2 + M_Z^2 ts^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 t^3 + s^2u^2 - u^4] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [s^2u^2 - t^2u^2 - u^2 + 2tu^3] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [M_Z^4 s^2 - M_Z^4 t^2 - M_Z^4 u^2 + 4M_Z^4 ut - 2M_Z^2 us^2] (\sin \varphi + \cos \varphi) \\
& + \frac{1}{2M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [M_Z^2 ut^2 + M_Z^2 u^3 - 2M_Z^2 tu^2] (\sin \varphi + \cos \varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-st^4 - su^4 + us^2 t^3 - 2uts^3 - 4st^2 u^2 - su^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [4stu^3 + 2ust^3 + t^2 s^3 + u^2 s^3 - stu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [s^2 t^2 - t^4 - t^2 u^2 + 2ut^3 + M_Z^2 us^2 - M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 u^3 + 2M_Z^2 u^2 t - uts^2 + ut^3 + tu^3 - 2M_Z^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [M_Z^2 t^4 - M_Z^2 ts^2 + M_Z^2 tu^2 - 2M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-3s^3 + 2t^3 + 3st^2 - 6uts - 2ts^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [4tu^2 - 5ut^2 + us^2 - u^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-t^4 - u^4 + t^2 s^2 - 6u^2 t^2 + 4ut^3 + s^2 u^2 + 4tu^3 - 2uts^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [ut^2 - M_Z^2 t^2 + u^3 - M_Z^2 u^2 + 2M_Z^2 ut + 2tu^2 + sut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [+su^3 + 2stu^2 - M_Z^2 st^2 - M_Z^2 su^2 + 2M_Z^2 sut] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-3uts^2 - M_Z^4 s^2 - M_Z^2 us^2 + 3ut^3 + M_Z^4 t^2 + M_Z^2 t^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 ut^2 + tu^3 + M_Z^4 u^2 - M_Z^2 tu^2 - M_Z^2 u^3 - 10u^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-2M_Z^4 ut + 2M_Z^2 ut^2 + us^3 - ust^2 - su^3 + 2stu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 s^3 + M_Z^2 st^2 + M_Z^2 su^2 - 2M_Z^2 uts + 6ut^3 + 2M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [M_Z^2 u^3 + M_Z^2 ts^2 + 6M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} [us^2 - u^2 t^2 - u^4 + 2tu^3 - 3M_Z^2 tu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 us^2 - M_Z^2 u^3 - M_Z^2 tu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-s^3 - 52M_Z^2 s^2 - 10ts^3 + 10us^3 + 12s^2 + st^2 + 52M_Z^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [10st^3 - 10ust^2 + 12t^2 + su^2 + 52M_Z^2 u^2 + 10stu^2] \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-5su^3 - 6u^2 - uts - 52M_Z^2 ut - 10ust^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [10tsu^2 + 12ut] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-t^2 s^2 + t^2 u^2 - M_Z^2 us^2 + M_Z^2 u^3 + M_Z^2 ts^2 - M_Z^2 t^3 + M_Z^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-2M_Z^2 tu^2 + 2uts^2 - 2tu^3 + 4u^2 t^2 + ts^2 - M_Z^2 s^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [M_Z^2 u^2 - 2M_Z^2 ut + 3ts^2 - 3t^3 + 3us^2 + 3u^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [2t^2 s^3 - 2st^3 - 2st^2 u^2 - M_Z^2 s^2 + M_Z^2 t^2 + M_Z^2 u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{3}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} [ts^2 - t^3 - us^2 + u^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 ut + t^2 s^2 - st^3] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-t^2 u^2 s + M_Z^2 us^3 - M_Z^2 su^3 - M_Z^2 ts^3 + M_Z^2 st^3 - uts^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [2tsu^3 - 4u^2 t^2 s + t^3 - 4ut^3 + 6M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [9ut^2 - 14tu^2 + 6ust^3 - 6M_Z^2 ust^2 + 2M_Z^2 tsu^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [us^3 - 5sut^2 - su^3 + 2ust - ts^3 + 3st^3 + tsu^2 - 2ust^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-ts^3 + stu^2 + M_Z^2 s^2 - M_Z^2 st^2 - M_Z^2 su^2 + 2M_Z^2 uts] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [s^4 - t^2 s^2 - s^2 u^2 + 2uts^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 ts^2 + M_Z^2 t^3 + 3M_Z^2 tu^2 - 3M_Z^2 ut^2 + M_Z^2 us^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 u^2 + t^2 s^2 - t^4 - s^2 tu - 3ut^3 - tu^3 + u^2 t^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [t^4 + t^2 u^2 - 2ut^3 - M_Z^4 s^2 + M_Z^4 t^2 - t^2 s^2 - M_Z^4 u^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [-2M_Z^4 ut + 2M_Z^2 s^2 t - 2M_Z^2 t^3 - 2M_Z^2 tu^2 + 4M_Z^2 ut^2] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{5}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^6} [-s^4 + s^2 t^2 + 2s^2 u^2 - 2uts] \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [s^3 - 4st^2 - 3su^2 + 6uts] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{2}{\Lambda_{NC}^4} [t^2 - s^2 + u^2 - 2ut] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{2M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-t^3 - M_Z^2 t - 2ut^2 - M_Z^2 t^2 + tu^2 + M_Z^2 ut] \sin \varphi \cos \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-s^3 + st^2 + su^2 - 2uts - ts^2 + t^3] \cos^2 \varphi \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 s \Lambda_{NC}^4} [3tu^2 - 2ut^2 + us^2 - t^2 - u^3] \cos^2 \varphi \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [s^3 - st^2 - su^2 + 2uts^2] \sin \varphi \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [4t^3 - 12u^3 + 3su^2 - 4uts + 28ut^2 - 26tu^2] \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [2M_Z^2 ts - M_Z^2 us + 2M_Z^2 t + 2M_Z^2 u - ut^3] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-4st^2 - 2M_Z^2 st + M_Z^2 t^2 + M_Z^2 u^2 - 2M_Z^2 ut] \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} [uts^2 - M_Z^2 us^2 - s^2 t^2 + M_Z^2 ts^2] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-6s^3 - ts^2 + us^2] - \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} s^4 \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [7t^3 - tu^3 - 2M_Z^2 st + 2M_Z^2 us - 12u^3] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [12M_Z^2 t^2 - 24M_Z^2 ut + t^2 + u^2 - 2ut + 4u^2 + 4M_Z^2 t] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [8st^2 - 16su^2 - 18ust - tu^2 + 9ut^2 + 8M_Z^2 u^2] \\
& + \frac{1}{8M_Z^4 \Lambda_{NC}^4} (-s^2 u^2 + uts^2 - M_Z^2 ts^2 + M_Z^2 us^2) \\
& + \frac{1}{8M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-3su^2 - 3M_Z^2 st + 3M_Z^2 us + 5uts + 2ut^2 - 2M_Z^2 t^2 + 2u^3] \\
& + \frac{1}{4M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 u^2 - 2M_Z^2 ut + 2M_Z^2 u^2 + M_Z^4 s - M_Z^2 st - M_Z^2 us] \\
& + \frac{3}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-uts^2 - M_Z^4 s^2 + M_Z^2 us^2 + ut^3 + M_Z^4 t^2 + M_Z^2 t^3] \\
& + \frac{3}{16M_Z^2 \Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2 ut^2 + tu^3 + M_Z^4 u^2 - M_Z^2 tu^2 - M_Z^2 u^3 - 2u^2 t^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-6M_Z^4ut + 6M_Z^2ut + 6M_Z^2tu^2 + uts^2 + M_Z^4s^2 - 5M_Z^2us^2] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-M_Z^2ts^2 + ts^3 - us^3 - 4uts^2 + 4ut^3 - 8u^2t^2 + 8M_Z^2ut^2] \\
& + \frac{1}{4M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [M_Z^2u^3 - 4M_Z^2tu^2 + M_Z^2t - 2t^2u^2 + ut^3] \\
& + \frac{1}{4M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-uts^2 - 2u^2t^2 + M_Z^2u^3 + M_Z^2t] \\
& + \frac{1}{2M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-t^2u^2 + M_Z^2ut - M_Z^2u^2t + M_Z^2tu^3] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-us^3 - uts^2 - M_Z^2us^2 + M_Z^2ts^2 + u^2s^2 - 7M_Z^2ts^2 - 7M_Z^2ts^2] \\
& + \frac{1}{8M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-s^5 - s^3 - ts^3 - 2uts^3 + t^2s^3 - 5su^3 + 5st^3 + 5stu^2] \\
& + \frac{1}{8M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-5ust^2 + 10stu^2 + 8s^2 - 9ust - 5t^3 - 9tu^2] \\
& + \frac{1}{2\Lambda_{NC}^4} \left[11us^3 + su^2 - st^2 - \frac{7}{2}s^2 \right] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-6st^2 + 4M_Z^4s - 4u^3 - ts^3 + M_Z^2s^3 - 2M_Z^2s^2 - 10M_Z^2us] \\
& + \frac{1}{8M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [+12ut^2 + 3M_Z^2t^2 + 3M_Z^2u^2 - 5M_Z^2ut + 4ts^2 - 3us^2] \\
& + \frac{1}{4\Lambda_{NC}^4} (t^2 + u^2 - 2s^2 - 2ut + st - us) \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [us^3 - ust^2 + 5ust^2 - 3ts^3 + 3st^3 - 2st^2u^2 - s^2t^2] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [2M_Z^2st + 10ust - s^2u^2 + 10s^2u^2 - 20uts^2] \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [-10s^4 - s^3 - 2st^2 - 2su^2 + 4uts + 10s^2t^2] \\
& + \frac{5}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^6} [-ts^3 + us^3] - \frac{1}{16M_Z^4\Lambda_{NC}^4} s^4 - \frac{4}{\Lambda_{NC}^4} s^2 \\
& + \frac{1}{16M_Z^2\Lambda_{NC}^4} [t^3 - st^2 + 2s^3 + 4us^2 - 4M_Z^2s^2 + 4M_Z^4s]
\end{aligned}$$

(3.50)

3.2.4 Section efficace :

Après avoir calculé les termes $T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_8$. en tenant compte de l'ensemble des relations du (3.47) et en remplaçant le tout dans l'équation (3.29), nous aurons à la fin l'*amplitude de transition finale* du processus en question.

Pour avoir la section efficace différentielle nous allons investir la relation (3.7) qui donne :

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} |\mathcal{M}(\varphi)|^2 d\varphi \quad (3.51)$$

la section efficace totale s'obtient par intégration sur les angles θ et φ :

$$\begin{aligned} \sigma_{Tot} &= \int d\sigma(\theta, \varphi) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\sigma(\varphi) d\varphi \\ \sigma_{Tot} &= -\frac{e^4}{4\pi\sqrt{s} \sin^4 2\theta_W} (C_{V,f}^2 + C_{A,f}^2) \int_0^{2\pi} T(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.3 Conclusion :

L'étude de la contribution purement non commutative de la *section efficace différentielle* du processus $f\bar{f} \rightarrow ZZ$ dans le cadre du *MSNC* nous a informée que :

1. A très hautes énergie (*ordre de TEV*) les effets non commutatifs dominant. En effet, on peut voir cette manifestation importante de ces effets à travers l'équation (3.33)

$$K_1\theta K_2 = -\frac{s}{2\Lambda_{NC}^2} [\sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\theta] \quad (3.52)$$

pour des énergies importantes des collisions ($s \nearrow \sim TEV$), le produit $(K_1 \theta K_2) \nearrow$ devient important et par conséquent les effets non commutatifs deviennent appréciables.

Il est possible de voir cette importante contribution des effets non commutatifs à très hautes énergies à travers la définition elle-même du produit star.

en effet, nous avons :

$$f(x) * g(x) = f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x)$$

à très hautes énergies l'apport des termes du développement en puissance croissant par rapport à θ devient important et donc nous n'avons pas le droit de les négliger ou de les considérer comme une petite perturbation au sens usuel de la mécanique quantique autrement dit, pour des énergies relativement faibles l'approche non commutative n'apporte pas de contribution considérable.

2. La section efficace différentielle (*SED*) est fortement liée à l'angle azimutal φ (voir FIG F) [22], c-à-d qu'il y a des directions privilégiées dans l'espace-temps par rapport aux autres, cette dépendance en φ est due au choix des valeurs du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps $\theta^{\mu\nu}$, car faire un choix de $\theta^{\mu\nu}$ est équivalent à reconstruire notre espace-temps d'une façon *anisotrope* ce qui explique la forte dépendance en φ de *SED*. Autrement dit, si on place un détecteur d'événements suivant des directions de l'espace-temps bien déterminées (fixation du φ), nous aurons un nombre d'événements qui diffère d'une direction à une autre, c-à-d qu'au moyen on ne trouve pas une distribution homogène des événements, contrairement au cas classique où l'espace-temps est *isotrope* et la *SED* est indépendante de φ , d'où l'origine du facteur 2π après intégration par rapport à φ dans

toutes les directions de l'espace-temps comme nous l'avons déjà cité au paravent.

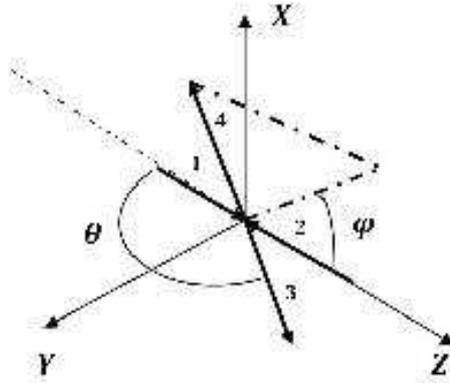


FIG H : Dépendance azimutale (φ) de l'interaction

3. La section efficace différentielle dépend du choix du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps $\theta^{\mu\nu}$, ce qui est claire tout au long de ce travail. Autres choix de $\theta^{\mu\nu}$ mèneront à des résultats complètement différents.

conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons revu le modèle standard comme une théorie de jauge basée sur le groupe de Lie $SU(2) \otimes U(1) \otimes SU(3)$. Nous avons essayé d'étudier le MS dans le cadre de la géométrie non commutative par l'approche du *produit star* de *Weyl-Moyal* et ce à travers une étude phénoménologique d'un processus physique.

Comme application, nous avons considéré le sous processus partonique $f\bar{f} \rightarrow ZZ$ du processus physique $P\bar{P} \rightarrow ZZ$ au LHC . Le but était de voir les contributions propre à la non commutativité de l'espace-temps et d'étudier sa dépendance angulaire, énergétique, etc. Nous avons choisi d'étudier l'apport purement non commutative du diagramme figuré dans *FIG D*, où nous avons constaté que le carré de l'amplitude de transition avec des fermions à l'état initial et des bosons à l'état final non polarisés dépend fortement de l'angle azimutal φ c-à-d que la réaction est *non planaire*. En outre l'amplitude de transition dépend fortement du choix du paramètre de la non commutativité $\theta^{\mu\nu}$, il est à noter que si on paramétrise $\theta^{\mu\nu}$ comme $\theta^{\mu\nu} = \frac{C^{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2}$ [6][10] alors, la non commutativité de l'espace-temps introduit un facteur supplémentaire proportionnel à $\frac{s}{\Lambda_{NC}^2}$ (s variable de Mandelstam). Ceci indique que lorsque l'énergie augmente la contribution non commutative devient importante jusqu'à une certaine limite imposée par l'unitarité et le bon comportement en énergie de la section efficace totale.

Il est à noter aussi qu'au fil du temps, cette approche du modèle standard non commutatif occupera une place plus importante des intérêts des physiciens car la mise en évidence des prédictions de ce modèle nécessite une énergie de l'ordre de TeV ce qui n'était pas possible avant la mise en service du LHC il y a quelques années.

Donc, comme conclusion finale la contribution de la non commutativité de l'espace-temps a des caractéristiques spéciales, *la dépendance par rapport à l'angle azimutal φ* et *le comportement énergétique*. Ces résultats pourraient être un bon signal d'une nouvelle physique au delà du modèle standard.

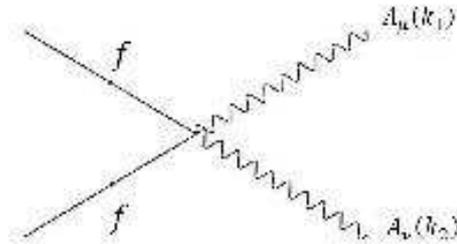
Annexe

A- Quelques Propriétés des matrices γ [2][3][4]

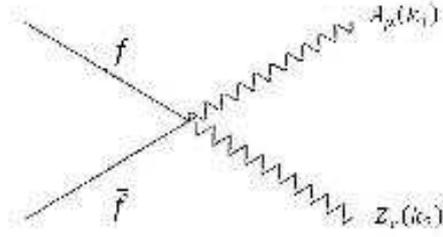
1. $\sum_{Pol} \epsilon_\mu(p) \epsilon_\nu^*(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_V^2}$, ϵ_μ représente le boson vecteur (W^\pm, Z).
2. $\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu = 4ab$
3. $Tr \gamma^5 = 0$
4. $Tr \gamma^5 \not{a} = 0$
5. $Tr \gamma^5 \not{a} \not{b} = 0$
6. $Tr \gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} = 0$
7. $Tr \{ \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu \not{b} \} = 4 \{ a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu - (ab) g^{\mu\nu} \}$
8. $Tr \{ \gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \dots \not{n} \} = 0$, si n est impaire
9. $Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4 [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}]$
10. $Tr \{ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$
11. La trace d'un nombre impaire des matrices γ est nulle.
12. $\theta^{\mu\nu\rho} = \theta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \theta^{\rho\mu} \gamma^\nu + \theta^{\nu\rho} \gamma^\mu$

B - Quelques lois de Feynman dans le cas non commutatif [18]

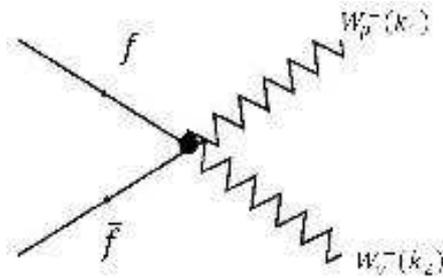
Nous présenterons ici quelques couplages entre deux fermions et deux bosons de jauge, notons que ces vertex n'apparaissent pas dans le MS.



$$\frac{-e^2 Q_f^2}{2} \theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho)$$



$$-\frac{e^2 Q_f}{2 \sin 2\theta} [\theta_{\mu\nu\rho} (K_1^\rho - K_2^\rho) (c_{V,f} - c_{A,f} \gamma_5) - 2\theta_{\mu\nu} m_f c_{A,f} \gamma_5]$$



$$\frac{eM_Z^2}{2 \sin 2\theta_W} \left[\begin{array}{l} \theta^{\mu\nu} (K_1 - K_2)^\rho + \theta^{\nu\rho} (K_2 - K_3)^\mu + \theta^{\rho\mu} (K_3 - K_1)^\nu \\ -2g^{\mu\nu} (\theta k_3)^\rho - 2g^{\nu\rho} (\theta k_1)^\mu - 2g^{\rho\mu} (\theta k_2)^\nu \end{array} \right]$$

C - Variables de Mandelstam : [24][26]

Pour une interaction qui produit deux particules dans l'état final, les variables de Mandelstam sont définis tel que [24] :

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\
&= m_1^2 + 2E_1E_2 - 2p_1 \cdot p_2 + m_2^2 \\
t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\
&= m_1^2 + 2E_1E_3 + 2p_1 \cdot p_3 + m_3^2 \\
u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \\
&= m_1^2 - 2E_1E_4 + 2p_1 \cdot p_4 + m_4^2
\end{aligned}$$

les variables s, t, u satisfont à la relation

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Dans le référentiel "centre de masse" les énergies des particules incidentes sont données par [24][26] :

$$E_{1cm} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}$$

$$E_{2cm} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}$$

dans notre cas nous avons considéré que ($m_1 = m_2 \approx 0$), avec cette approximation on trouve que :

$$E_{1cm} = E_{2cm} = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

D - Section efficace du processus $q_i \bar{q}_j \rightarrow Z^0 Z^0$ dans le cas commutatif :[24]

Dans le cas générale la section efficace de deux particules s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{|p_{1cm}|^2} |\mathcal{M}|^2$$

la section efficace du processus $q_i \bar{q}_j \rightarrow Z^0 Z^0$ est donnée en fonction des couplages "Left handed" l et "Right handed" r tel que [24] :

$$\frac{d\sigma}{dt} (q_i \bar{q}_j \rightarrow Z^0 Z^0) = \frac{\pi\alpha^2}{96} \frac{l_i^4 + r_i^4}{x_W^2 (1 - x_W^2)^2 s^2} \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} + \frac{4M_Z^2 s}{ut} - M_Z^4 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right) \right]$$

avec

$$\begin{cases} l = 2(T_3 - Qx_W) \\ r = -2Qx_W \end{cases}$$

et

$$x_W = \sin^2 \theta_W$$

T_3 représente la troisième composante de l'isospin faible pour le fermion "Left handed" f .

Q est la charge électrique (en unité de la charge du Proton).

E - JaxoDraw 2.1-0, pour introduire les diagrammes de Feynman.

Pour introduire les diagrammes de Feynman, ainsi que d'autres images figuré dans ce mémoire, nous avons utilisé logiciel (*JaxoDraw 2.1 - 0*), qui sert a introduire d'une façon simple les diagrammes de Feynman désirés malgré son "output" graphique limité, cette petite application elle est gratuite et téléchargeable sur internet [23]

Bibliographie

- [1] IJ.Aitchison, AJG. Hey, IJ.Aitchison, AJG. Hey, first published, (1982).
- [2] TP CENG, LF Li, Oxford Unoversity, (1984).
- [3] FMandl, G.Shaw, Manchester Unoversity,(1984).
- [4] V.BargerR ;Phillips,Addison-Wesley,pub,Co (1987).
- [5] A. Das, T. Ferbel, by Jhon Wiley and sons, Inc, (1994).
- [6] S.Godfrey, M.A. Doncheski, DESY , N Report 02-195, [*arXiv :hep-ph/0211247*].
- [7] H. Arfaei, M. H. Yavartanoo (Unpublished), [*arXiv :hep-th/0010244*].
- [8] J.Madore, S.Schraml, P.Schupp, J. Wess, Eur.Phys.J.C16 :161-167(2000) [*arXiv :hep-th/0001203*].
- [9] I.F. Riad, M.M. Sheikh Jabbari, JHEP 0008 :045, (2000), [*arXiv :hep-th/0008132*].
- [10] J.L. Hewett, F.J. Petriello, T.G. Rizzo, eConf C010630 (2001) E3064, [*arXiv :hep-ph/0201275*].
- [11] A. Micu, M.M. Sheikh-Jabbari, JHEP 0101 :025,(2001), [*arXiv :hep-th/0008057*].
- [12] J.L. Hewett, F.J. Petriello, T.G. Rizzo, Phys.Rev D64 (2001) 075012, [*arXiv :hep-ph/0010354*].
- [13] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess, M. Wohlgenannt,Eur.Phys.J.C23 :363-376, (2002), [*arXiv :hep-ph/0111115*].
- [14] Richard J. Szabo, Phys.Rept.378 :207-299,(2003), [*arXiv :hep-th/0109162*].

- [15] X.Calmet, M.Wohlgenannt, Phys.Rev. D68 (2003) 025016,
[*arXiv :hep-ph/0305027*].
- [16] M. Chaichian, P. Presnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu,
Eur.Phys.J.C29 :413-432,(2003), [*arXiv :hep-th/0107055*].
- [17] J. Trampetić, J. Wess (Eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005).
- [18] B. Melic, K. Passek-Kumericki, J. Trampetic, P. Schupp, M. Wohlgenannt,
Eur.Phys.J.C42 :483-497,(2005), [*arXiv :hep-ph/0502249*].
- [19] D M.Gingrich, Taylor and Francis group, (2006).
- [20] S. Saxell, Report number :HU-P-D161, (2009), [*arXiv :0909.1669 [hep-th]*].
- [21] S. Théry, thèse de doctorat, (2010).
[*http ://www-d0.fnal.gov/results/publications_talks/thesis/thery/thesis.pdf*].
- [22] MR.Bakli, N.Mebarki, I.Chadou, Journal du LPMS, $N^0 = 1$, (Dec 2010).
- [23] *JaxoDraw 2.1 – 0*, diagramme de Feynman avec JAVA, (2011),
[*http ://jaxodraw.sourceforge.net/*].
- [24] Particles Physics Booklet (PDG), *http :pdg.lbl.gov*, (Juin 2012).
- [25] [*http ://press.web.cern.ch/press-releases/2012/07/cern-experiments-observe-particle-consistent-long-sought-higgs-boson*],
(Juillet 2012).
- [26] L.Marleau, Departement de physique, Université Laval, Canada, (1998 – 2013)
[*http ://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/marleau_ppnotes.pdf*].
- [27] O. Houhou, thèse de Magister, Univ.Mentouri, Constantine, (2008).

الملخص:

في هذا العمل قمنا بعرض النموذج المعياري للجسيمات الأولية مع الآلية الرياضية المناسبة على غرار الكسر التلقائي للتناظر وآلية هيغز لإكساب الجسيمات الأولية كتلتها، كما قمنا بعد ذلك بإنشاء النموذج المعياري في إطار الهندسة غير التبديلية حيث قمنا بعرض تحويلات سير- ويتن الموافقة وكذا جداء وايل- مويال الخاص بهذه المقاربة وكذا مناقشة بعض التفاعلات الجديدة التي ظهرت في إطار هذا النموذج، وكتطبيق للموضوع قمنا بإعتبار التفاعل الحادث بين فرميون وضد فرميون الذي ينتج عنه البوزون الضعيف Z حيث قمنا بحساب سعة الانتقال ومن ثم إستنتاج المقطع الفعال لهذا التفاعل ومناقشة سلوكه الطاقوي في مجال الطاقات العالية.

الكلمات المفتاحية: النموذج المعياري، الهندسة غير التبديلية، تحويلات سير- ويتن، المقطع الفعال التفاضلي، سعة الانتقال، النظريات المعيارية، الزاوية السميتية، جداء وايل - مويال، الزمكان غير التبديلي.

Abstract

In this work, we presented the standard model of elementary particle physics with the corresponding mathematical formalism, namely the spontaneous symmetry breaking and the Higgs mechanism. Then we built the minimal standard model based on the Noncommutative geometry approach using the Seiberg-Witten transformations and the *Weyl-Moyal* product. We discuss some new couplings that are in this model, as application we study the transition amplitude of the partonic process $f\bar{f} \rightarrow ZZ$ where we calculate the transition amplitude deduced the differential cross section and discussed its dependency and behavior at very high energy.

Key words: standard model, non commutative geometry, gauge theories, Seiberg-Witten maps, star product, differential cross section, azimuthal angle, non commutative space-time.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté le modèle standard de la physique des particules élémentaires avec le formalisme mathématique correspondant, tel que la brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs. Puis, nous avons construit le modèle standard minimal sur la base de la géométrie non commutative en utilisant l'approche des transformations de Seiberg-Witten et le produit "Star" de Weyl-Moyal, ainsi qu'on a discuté quelques couplages nouveaux dans ce modèle, après nous avons étudié l'amplitude de transition du processus partonique $f\bar{f} \rightarrow ZZ$ où on a calculé l'amplitude de transition, et on a déduit la section différentielle et étudié sa dépendance et comportement à très haute énergie.

Mots clefs : modèle standard, géométries non commutative, théories de jauge, transformations de Seiberg-Witten, produit "Star", amplitude de transition, section efficace différentielle, angle azimutal, espace-temps non commutative.