

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:
Série :

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTRE EN PHYSIQUE
SPECIALITE: ASTROPHYSIQUE

THEME :

**Le milieu interstellaire : l'effet du terme
quadropolaire magnétique dans le problème
de Störmer**

Par

Amina Leghmouche

SOUTENU LE : 27 / 06 /2012

Devant le jury:

Président :	N. Mebarki	Prof	Uni. Mentouri Constantine
Rapporteur:	A.Bouldjedri	Prof	Uni .Batna
Examineurs :	R. Attallah	Prof	Uni .Annaba
	H. Aissaoui	M.C	Uni. Mentouri Constantine

- Remerciements -

Tout d'abord, je tiens à adresser mes plus vifs remerciements À mon directeur de thèse Professeur Bouldjedri Abdelhamid qui m'a encouragé et soutenue tout au long de ce travail, ses conseils m'ont été d'un précieux secours. Je tiens à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui.

Je souhaite également présenter mes remerciements à Mr Mimouni Jamel, Professeur au département de physique à l'université Mentouri de Constantine d'avoir encouragé la recherche en astrophysique ;et aussi à tous les enseignants de l'eda 1 .

Que soient aussi remerciés ici, Mr noureddine Mebarki, Professeur au département de physique à l'université Mentouri de Constantine Mr Réda Attallah professeur à l'université d'Annaba, Dr habib Aissaoui maître de conférences à l'université mentouri constantine, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer à mon jury de mémoire. Je tiens à leur témoigner ici, mes remerciements les plus vifs ainsi que ma profonde gratitude, et mon grand respect pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je fais bien sur un grand merci, à Mr Khalil Daiffallah (chercheur au crnag) d'avoir partagé la science et l'expérience, et à Mr Toufik Mostfaoui maître de conférence à l'université de Bejaia pour ses conseils précieux.

Pour revenir à l'essentiel je terminerai en adressant les plus profonds remerciements à mes parents, mon frère Khaled mes sœurs (Asma, Douniazed, Yasmina) et à mes amies et collègues (Merci Assia, Amina, Fatiha, Louiza (physique théorique), Nadjjet(physique de rayonnement) et hamid hamidani)

Au final, je pense fortement à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la l'élaboration de ce travail.

Et surtout à Dieu Le Tout-Puissant qui m'a toujours soutenu.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités sur le milieu interstellaire	8
1.1 Introduction	8
1.2 L'espace entre les étoiles	9
1.3 Les sources d'énergie dans le Milieu Interstellaire	11
1.3.1 Le champ de rayonnement :	11
1.3.2 Le champ magnétique	11
1.3.3 Les rayons cosmiques	11
1.4 La composition du milieu interstellaire.....	12
1.4.1 Les phases du milieu interstellaire	12
1.4.2 Les abondances des éléments dans le Milieu interstellaire	13
1.5 Le cycle vie du milieu interstellaire	13
1.6 Le gaz interstellaire	15
1.6.1 Le gaz moléculaire	15
1.6.2 Le gaz ionisé	15
1.7 La poussière interstellaire :	16
1.7.1 L'observation des poussières interstellaires :	17
1.7.2 L'extinction interstellaire :	17
1.7.3 La polarisation interstellaire :	19

2	Les interactions dans le milieu interstellaire	21
2.1	Les interactions électromagnétiques	22
2.1.1	Les propriétés optiques des grains de poussières :	22
2.2	Les propriétés Physiques de la poussière interstellaire :	23
2.2.1	Température du matériau solide :	23
2.2.2	La charge électrique des grains :	24
2.3	Quelques importants processus de grains :	25
2.3.1	L'absorption et la diffusion par des petits grains	25
2.3.2	La diffusion des rayons X par les grains	26
2.3.3	Le chauffage photoélectrique des grains	26
2.4	Les interactions Gravitationnelles	27
2.4.1	La théorie de la gravitation de Newton	28
2.4.2	La théorie d'Einstein de la gravitation	29
2.4.3	La métrique statique de Schwarzschild	30
3	La dynamique d'un grain de poussière :	31
3.1	Le problème de Störmer	32
3.2	La dynamique d'un grain de poussière dans une géométrie axisymétrique.....	33
3.2.1	Position du problème	33
3.2.2	L'hamiltonien du mouvement	34
3.3	Etude des orbites équatoriales et halos dans un dipôle magnétique	35
3.3.1	Les points critiques :	36
3.3.2	Les orbites équatoriales :	36
3.3.3	Les orbites halos :	40
3.4	Différentes études dans le cadre du problème de Störmer	43
3.4.1	Cas d'un objet compact dans un dipôle magnétique:	43
3.4.2	Cas d'une planète non sphérique (oblat ou prolata) :	43
3.5	La généralisation du problème de Störmer :	44
3.5.1	L'expression générale du champ électrique corotationnel:	45
3.5.2	L'effet du terme quadrupolaire magnétique:.....	45
3.5.3	Recherche des orbites :	47

3.5.3.1 Les points critiques :.....	47
3.5.3.2 Les orbites équatoriales :	48
3.5.3.3 Les orbites halos :	48
3.5.3.4 Les familles d'orbites à r constant et celles à θ constant:	49
i) Les familles d'orbites à r constant :	49
ii) Les familles d'orbites à θ constant:	50
3.5.4 Les courbes:	52
3.5.5 Discussion :	53
3.5.6 Résultats et Discussion :	58
Conclusion Générale	63
Appendices	65
Bibliographie	92

INTRODUCTION

Au sens large, l'astrophysique comprend tous les domaines scientifiques où l'on étudie les processus aboutissant à la formation et l'évolution des structures, à l'aide de l'utilisation des télescopes de plus en plus puissants qui donnent des informations sur les premières étapes de la formation des grandes structures et des différents objets célestes.

La Galaxie à laquelle nous appartenons contient des étoiles qui sont séparées par un vide, il est en général moins connu du grand public que l'espace entre ces étoiles n'est pas un vide, mais contient une quantité significative de matière sous forme de gaz et de poussières dans des densités et de températures très variables, donc les étoiles sont baignées dans un milieu appelé " le Milieu Interstellaire" (MIS) qui représente l'essentiel du volume des galaxies. D'une manière générale il est important de comprendre les échanges de matières entre les étoiles et ce milieu, puisque tous les processus physiques responsables à l'évolution des galaxies, la vie et la mort des étoiles seront expliqués.

Si le gaz présente la composante principale en masse du milieu interstellaire, ce sont les grains de poussières les responsables les plus efficaces de l'absorption et l'émission , En effet l'espace entre les étoiles est soumis à des effets d'extinction, rougissement et polarisation du rayonnement en majorité dus à la composante poussière, également les effets de cette dernière se manifestent d'une manière indiscutable dans les nébuleuses par réflexion qui diffusent le rayonnement stellaire.

L'étude du milieu interstellaire est fondamentale, comme il joue un rôle crucial dans l'histoire de notre univers, grâce à l'ensemble des processus physiques en son sein, que se forment les étoiles et les planètes, il constitue donc un état intermédiaire, reliant deux grandes structures, depuis les galaxies et amas de galaxies, aux petits objets comme les étoiles et les systèmes planétaires. En raison de son interaction avec les étoiles dont la formation et la destruction modifient profondément sa physico-chimie, il est un excellent laboratoire pour les conditions extrêmes de pression et de densités nécessaires pour la formation des molécules.

Comme l'espace entre les étoiles prend des structures très variées, et se présente en multiples formes, il est nécessaire de choisir un domaine bien précis lors de son étude.

Le mémoire se présente en 3 chapitres, Le premier est consacré à une vue d'ensembles et des généralités sur le milieu interstellaire, en ce qui concerne la composition, les abondances des

éléments, le cycle de vie, sans négliger les grains de poussière, et quelques processus physiques et chimiques.

Dans le second chapitre nous traitons les interactions dans le milieu interstellaire, qui introduisent l'influence des champs électromagnétiques qui sont liées aux propriétés physiques et optiques des grains de poussières et celles du champ gravitationnel qui est responsable aux mouvement des gaz et des accrétions de la matière.

Dans le troisième chapitre on présente une étude de la dynamique d'un important constituant du MIS, qui est le grain de poussière chargé, qui se trouve près d'une planète magnétisée tenant compte du faible rapport charge -masse, D'une manière générale décrire les trajectoires subissent par une charge dans certaines conditions qui est en relation avec le problème de Störmer qui représente une importante analyse du mouvement des particules chargées dans un pur dipôle magnétique près d'une planète.

Le but de notre investigation est de faire une généralisation du problème de Störmer, essayant de donner une relation générale pour décrire le champ corotationnel électrique qui nous donnent les possibilités de discuter plusieurs cas, comme celui de la littérature (dipôle magnétique) et pourquoi pas d'autres.

Aussi bien ajoutant un terme quadrupolaire magnétique au terme du champ magnétique de la littérature, pour voir le comportement de ces charges par rapport à la planète en rotation c'est à dire discuter l'existence des orbites équatoriales et halos à travers l'analyse de la dynamique d'une charge dans une géométrie axisymétrique. et les résultats obtenus seront comparés à ceux de la littérature.

Chapitre 1

Généralités sur le milieu interstellaire

1.1 Introduction :

Il est important de connaître et expliquer beaucoup d'aspects à propos de l'univers. Parmi ces derniers citons la formation et l'évolution des étoiles dans les galaxies et les systèmes planétaires. On y arrive par l'étude de l'échange continu entre les étoiles et le milieu où elles sont baignées : le milieu interstellaire (MIS).

L'étude du milieu interstellaire occupe une place importante en astrophysique. Connue aussi comme la matière entre les étoiles de notre Galaxie ou les autres galaxies, caractérisée par une faible densité ou bien extrêmement ténue, elle est le siège de la formation des molécules complexes ou non [1]. Les étoiles naissent par effondrement gravitationnel dans ce milieu, et pendant le cycle de leurs vies, elles y retournent un peu de leur matière. Ainsi, la nucléosynthèse stellaire est le processus responsable de l'injection d'éléments lourds dans le MIS surtout pendant la phase SN. Par conséquent, il y a un lien important entre les étoiles et ce milieu qui subit des modifications dans sa physico-chimie, lors de la formation et la destruction des étoiles.

Il est évident que chaque composante de la matière interstellaire présente un intérêt. Ces composantes peuvent être classées ainsi: le gaz (atomique, moléculaire, ionisé) à différentes températures d'une part, des particules microscopiques solides ou bien des grains de poussières, d'autres part [1]. Ces grains entrent dans une grande partie des éléments plus lourds que l'hydrogène et l'hélium. Formés autour des étoiles au cours de leurs vies, de plus ils ont la propriété d'absorber des photons d'origine stellaire.

Après avoir été chauffées, elles réémettent l'énergie absorbée par un rayonnement thermique dans l'infrarouge moyen et lointain [2]. De même, la poussière peut être exposée à des irradiations ionisantes notamment dans les ondes de choc, ils en résultent des modifications de la structure de ces grains [3].

Le milieu interstellaire demeure encore aujourd'hui un sujet de recherche complexe, tant au niveau de la physique que de la chimie qui s'y déroulent. De plus en plus, les études réalisées prennent en compte ces deux aspects pour tenter d'expliquer les abondances des éléments observés dans ce milieu.

Il est bien clair qu'il y a une différence extrême entre les conditions dominantes dans le milieu interstellaires et celles des laboratoires terrestres. Cette différence doit être prise en compte pour comprendre certains processus d'une part et répondre aux questions ouvertes sur l'univers d'autre part.

On peut dire que le milieu interstellaire est très compliqué, il est toujours en évolution et soumis à différents types d'interactions (bombardements par les rayons cosmiques, les interactions électromagnétiques...). Par conséquent, il est très utile de comprendre tout les mécanismes qui soutiennent ce milieu. De même que la nature et la composition des grains de poussières dans la Galaxie en se basant sur plusieurs catégories d'observation comme la polarisation, l'extinction, la diffusion de la lumière des étoiles, effectuées sur différents type d'objets comme les nuages diffus et dense, les nébuleuses par réflexion, les régions HII, et les météorites [4]. Donc les grains de poussières jouent un rôle intéressant dans la compréhension de différents phénomènes astrophysiques que ce soit dans les comètes ou les anneaux des planètes (comme saturne par exemple).

L'étude du milieu interstellaire est très vaste, c'est pour cela qu'on va se limiter à une présentation générale qui introduit les interactions au sein de ce milieu.

1.2 L'espace entre les étoiles :

Dans notre Galaxie, l'évidence observationnelle que le milieu entre les étoiles n'est pas un vide, a été connu au début du 20^{ème} siècle. On le doit à l'astronome allemand J. Hartmann, vers 1904, grâce à l'étude des raies spectrales de l'étoile binaire spectroscopique δ Orionis, dont le mouvement orbital se traduit par une variation périodique de la vitesse radiale. Hartmann découvrit que la raie d'absorption du calcium ionisé ne participait pas à ce phénomène et restait "stationnaire" . Cette raie n'appartienne pas à l'atmosphère de l'étoile, elle a été attribuée à un nuage de gaz situé entre la terre et l'étoile : il venait de découvrir la première raie de l'absorption interstellaire [5].

En 1922, Edwin Hubble a montré que les nébuleuses à réflexion sont des nuages de poussières qui réfléchissent la lumière d'une ou plusieurs étoiles voisines. Ces étoiles ne sont pas assez chaudes pour causer l'ionisation des gaz comme dans le cas des nébuleuses en émission, mais sont assez

lumineuses pour permettre une dispersion suffisante pour rendre la poussière visible. Le plus important dans tout cela est la découverte que le milieu interstellaire est le plus souvent composé d'hydrogène similaire à ce qui est observé dans les atmosphères stellaires. Aussi bien il est considéré comme un reste du Big Bang une fois l'univers refroidi à basses températures pour permettre la formation d'atomes. Ceci qui fait que la composition de ce milieu, nos jours, n'est pas trop différentes de ce qu'elle a été pendant les quelques billions d'année passées depuis sa formation [5].

En plus de ça, il est montré que le milieu interstellaire local représente un exemple de la manière dont la structure du milieu interstellaire peut être présentée en distribution spatiale dans la Galaxie. La figure (1.1) décrit globalement le milieu interstellaire local en différentes régions :

- Les régions noires sont reliées à des régions de faibles densités avec des températures élevées,
- Les régions grises représentent des zones caractérisées par du gaz diffus dense et chaud.
- Les nuages moléculaires sont représentés par des cercles foncés et les associations stellaires par des cercles hachés.

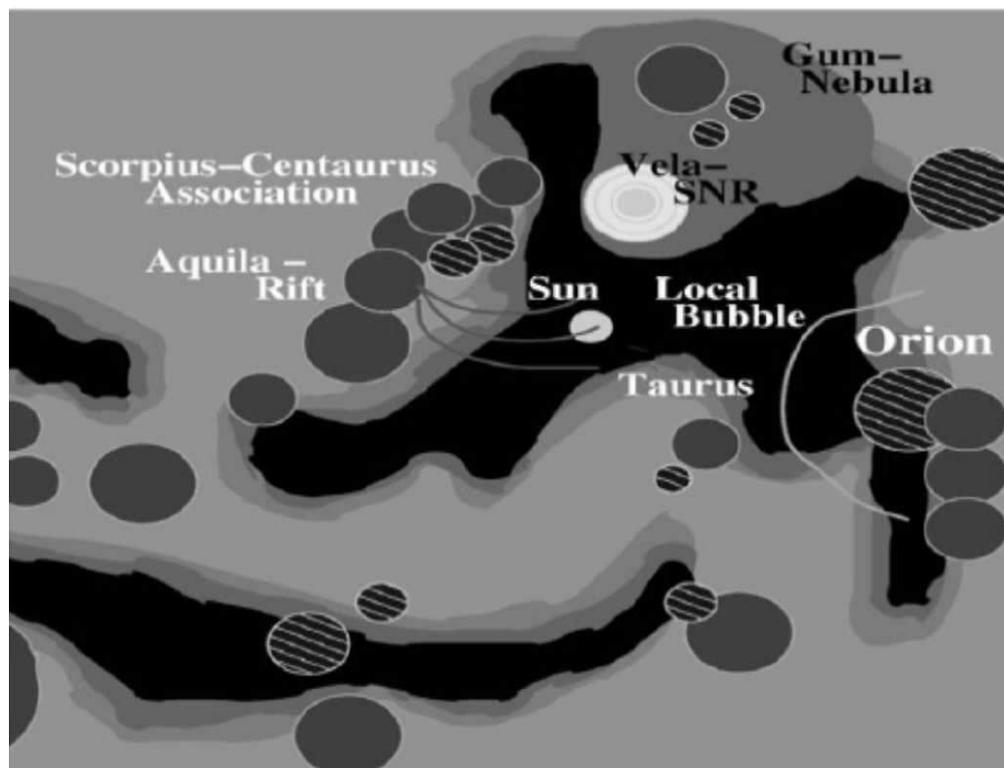


Figure 1.1 : Le milieu interstellaire local [5]

1.3 Les sources d'énergie dans le milieu interstellaire :

1.3.1 Le champ de rayonnement :

Le milieu interstellaire baigne dans différents champs de rayonnement :

-le rayonnement galactique: qui introduit le rayonnement stellaire ainsi que le rayonnement de poussières.

-le rayonnement extragalactique : qui provient des autres galaxies et de l'univers (rayonnement fossile).

D'autre part, le milieu interstellaire est perméable pour plusieurs photons, qui influent beaucoup les états physiques et chimiques du gaz et des poussières, et caractérisé aussi par un champ de rayonnement qui a des effets sur les grains, en particulier sur les manteaux de glaces formés sur le grain dans les régions froides qui sont susceptibles d'être vaporisés [1]. Par conséquent, le champ de rayonnement régit en partie les abondances des éléments en phase gazeuse, avec des résultats spectroscopiques importantes.

1.3.2 Le champ magnétique :

Le champ magnétique est une importante source d'énergie et de pression dans le milieu interstellaire, son rôle apparaît bien à travers la polarisation linéaire de la lumière des étoiles par l'alignement des grains de poussières. Il est estimé, au voisinage du soleil, à 5 μ G. Il est facile de tracer la distribution du champ magnétique par l'émission synchrotron.

1.3.3 Les rayons cosmiques :

Les rayons cosmiques sont les particules de haute énergie (> 100 MeV/nucléon), composés de protons relativistes d'énergies entre 1 et 10Gev, 10% d'Hélium et d'éléments lourds et de 1% d'électrons. Donc ils contribuent considérablement à la densité d'énergie dans le milieu interstellaire à 2ev.cm^{-3} , mais le chauffage et l'ionisation du gaz interstellaire sont dus aux rayons cosmiques de basses énergies (100MeV) [6].

1.4 La composition du milieu interstellaire :

Les composantes qui remplissent l'espace entre les étoiles dans la Galaxie constituent le milieu interstellaire. Il contient des atomes et des molécules gazeuses, ainsi que des poussières solides, qui sont considérés bien mélangés, sous l'impact de différents facteurs physiques externes comme (la radiation électromagnétique, le champ magnétique, et les rayons cosmiques). [2]

1.4.1 Les phases du milieu interstellaire :

Dans le milieu interstellaire les températures, peuvent varier entre 10 et 10000 K, ce qui induit l'existence de régions interstellaires de différentes natures, réparties selon l'état chimique du gaz (l'hydrogène) qu'elles contiennent et les différentes propriétés physiques associées (sans négliger les mouvements macroscopiques comme: les perturbations par les étoiles massives, et les explosions de supernovae). Le tableau (1-1) présente les caractéristiques des différentes phases du milieu interstellaire en termes de densité, température, et en masse .

Phase	Densité cm^{-3}	Température K	La masse totale M_{\odot}
Atomique (HI) froid	25	100	1.5×10^9
Tiède	0.25	8000	1.5×10^9
Moléculaire (H_2)	≥ 1000	≤ 100	10^9
HII régions ionisées	$\approx 1 - 10^4$	≈ 10000	$\approx 6 \times 10^7$
Diffuse	≈ 0.03	≈ 8000	$\approx 10^9$
chaude	$\approx 6 \times 10^{-3}$	$\approx 5 \times 10^5$	$\approx 10^8$

Tab 1-1: Les différentes phases du milieu interstellaire dans la Galaxie [2]

Il existe différents types de régions dans le milieu interstellaire, qui dépendent de l'état sous lequel existe le composant majoritaire, l'hydrogène qui contribue à 70% de la masse du gaz, on distingue :

- La phase Atomique dans (" le milieu neutre froid ", CNM) et ("le milieu neutre tiède", WNM).
- Le cas où l'hydrogène est ionisé dans ("le milieu ionisé diffus") et ("le milieu ionisé chaud"), avec les régions HII.
- L'hydrogène peut être présenté en phase moléculaire ou en nuages moléculaires qui sont des larges denses condensations du gaz froid, qui représentent les sites de la formation des étoiles.

Les phases du milieu interstellaire sont caractérisées par différentes températures et densités d'une phase à l'autre, de même la pression est de l'ordre de $5-20 \times 10^3 \text{ K.cm}^{-3}$ dans les phases atomiques chaudes et froides, et elle est considérablement grande dans les régions HII, et les nuages moléculaires.

1.4.2 Les abondances des éléments dans le Milieu interstellaire :

La masse totale du milieu interstellaire est de l'ordre de 5% de la masse stellaire totale et de 0.5% de la masse totale de la Galaxie qui est dominée par la matière noire. La composition de ce milieu en masse est de 70% d'hydrogène, 28% d'hélium, et à peu près de 2% d'éléments lourds comme C, N, O, Mg, Si, S et Fe qui sont les éléments les plus abondants distribués entre le gaz et la poussière qui dépendent des conditions physiques [2]. Ces éléments ont la propriété de se condenser pour former des solides d'une forme à l'autre, et contribuent dans la masse des grains de poussières interstellaire. L'évidence observationnelle de la présence de ces éléments dans les grains est à partir de l'abondance en phase gazeuse, et encore par la faible contribution dans les nuages interstellaires par rapport à l'atmosphère stellaire où tous les matériaux sont dans le gaz.

1.5 Le cycle vie du milieu interstellaire :

Le cycle de vie du milieu interstellaire est relié à celui des étoiles ce qui le rend si fascinant. L'effondrement de nuages interstellaire dense va produire de nouvelles étoiles. Ces étoiles en fin de leurs vies vont produire de la poussière dans leurs atmosphères et éjecter ces éléments dans le milieu interstellaire. Ces grains nouvellement formés vont subir un certain nombre de destructions et de reformations.

Le plus important aspect de la formation stellaire est relié à celui du milieu interstellaire comme il est en interaction permanente avec les étoiles qui y naissent, y vivent et y meurent. Au cours de l'effondrement, le nuage (de densité typique qui situe entre $10 - 20 \text{ g.cm}^{-3}$) se contracte et se fragmente en petits blocs, qui eux même subissent le même processus, et ainsi de suite jusqu'à l'arrêt de la fragmentation. A ce moment là, chaque petit nuage de gaz est devenu une protoétoile, qui continue de se contracter et de s'échauffer en convertissant son énergie gravitationnelle en énergie thermique.

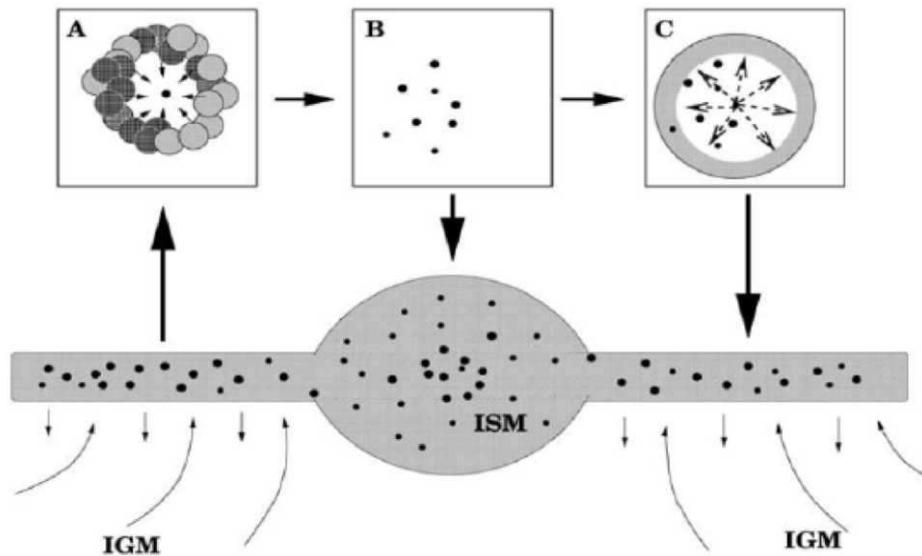


Figure 1.2 : Le cycle de vie du milieu interstellaire [5]

Le rayonnement peut encore partiellement s'échapper et la température reste donc modérée et la lumière de l'étoile se situe dans l'infrarouge. Mais la contraction continue et le gaz devient finalement opaque. La température de la protoétoile atteint alors plusieurs milliers de kelvins et l'astre se met à briller dans le domaine visible. Comme ses dimensions sont encore énormes, la protoétoile est alors extrêmement brillante. Au centre de l'astre, la densité et la température augmentent de plus en plus; lorsque la température centrale atteint 10 millions de degrés les réactions nucléaires de fusion de l'hydrogène se déclenchent. A ce moment une énorme quantité de l'énergie est produite qui donne naissance à une forte pression interne s'opposant à la force de gravité et stabilisant l'astre, la contraction s'arrête et c'est le début de la vie de l'étoile. A sa mort, l'étoile réinjectera une partie de la matière qui la constitue au milieu interstellaire, soit sous forme de vent stellaire, soit lors l'explosion de supernovae. A bonne distance de l'étoile, la température est suffisamment basse pour que la matière éjectée se trouve sous formes d'atomes [7].

La figure (1. 2) représente le processus de recyclage du milieu interstellaire, qui est considéré aussi comme un milieu actif et extrêmement dynamique, la matière interstellaire y est sans cesse recyclée et participe ainsi à l'évolution de la Galaxie. Le cycle de la matière est étroitement lié à celui des étoiles.

De nouvelles étoiles se forment par condensations et fragmentations des nuages tandis que des étoiles en fin de vies rejettent une partie de leur matière dans l'espace interstellaire enrichissent ainsi

le milieu en éléments lourds, formés lors de la nucléosynthèse. Cette matière, condensée dans les nuages moléculaires est le point de départ de la formation de nouvelles générations d'étoiles. Dans le cycle de la matière interstellaire, les étoiles constituent ainsi un point clé.

En effet, le processus de la perte de masse est important, pour certaines étoiles ($m > 20m_{\odot}$), pour enrichir le milieu interstellaire, par exemple pour des étoiles comme Wolf-Rayet et quelques super géantes le taux de perte de masse est de l'ordre de $10^{-7}M_{\odot}.yr^{-1}$, mais pour les étoiles M supergiantes on trouve qu'elles retournent la matière au milieu interstellaire plus que le type Wolf-Rayet. Ces étoiles massives sont très importantes dans le cycle de vie du milieu interstellaire.

En général, il est estimé que 20% de la matière est éjectée dans l'espace entre les étoiles après la naissance des étoiles, et également la Galaxie a la propriété d'accrétion de quelques quantités de matière intergalactique(MIG),mais en même temps elle perd un peu de cette matière dans ce milieu intergalactique par les processus de diffusion d'une part et les collisions catastrophiques des galaxies d'autres part [5].

1.6 Le gaz interstellaire :

Le milieu interstellaire est en grande partie gazeux. Il peut être présenté dans différents états :, moléculaires ionisés ou atomiques .

1.6.1 Le gaz moléculaire :

Les molécules ont la propriété de donner plus d'informations dans l'étude des conditions physiques dans les nuages moléculaire. Il faut dire que avant 1965, seulement trois molécules ont été connues dans le milieu interstellaire (CH, CH + et CN), et qui sont découvertes à travers leurs raies d'absorption dans le milieu interstellaire diffus.

1.6.2 Le gaz ionisé :

Le gaz interstellaire peut être ionisé par différents processus comme le rayonnement ultraviolet lointain des étoiles chaudes, les chocs, les rayons X, ou bien par des particules chargées de haute énergie. D'une manière générale le milieu interstellaire ionisé se présente en différentes catégories :

- Les régions HII(ou les nébuleuses gazeuses)
- Le milieu interstellaire ionisé diffus.
- Le milieu interstellaire chaud (due aux dispersions des restes de supernovae) présentées avec différentes propriétés.

Dans les régions HII, l'ionisation du gaz se produit par l'absorption des photons ultraviolets des étoiles chaudes. Ce phénomène peut être modélisé d'une simple manière autour d'une étoile chaude pour former une région HII, considérant que l'ionisation sera totale autour d'une étoile jusqu'au rayon r_s où il n'y a aucun photon ionisant (absorbé par les atomes neutres), alors à l'intérieur du rayon le milieu est ionisé mais en dehors de ce rayon se trouve un milieu neutre (atomique ou moléculaire), ce qui définit "la sphère de Strömgen", de taille proportionnelle au flux ionisant émis par l'étoile et inversement proportionnelle au carré de la densité du gaz. Également le milieu ionisé est toujours soumis au rayonnement de plusieurs étoiles ce qui complique la configuration du gaz.

1.9 La poussière interstellaire :

La poussière interstellaire est une composante importante du milieu interstellaire. Malgré sa faible contribution, qui est de 1% seulement de la masse de ce milieu, elle joue un rôle majeur dans l'évolution des galaxies, la formation des étoiles et des systèmes planétaires [8]. D'une manière générale les grains de poussière

- Absorbent et diffusent la lumière des étoiles; cette absorption d'énergie chauffe les poussières qui réémettent cette énergie en IR moyen et lointain. Elles représentent 30% de l'énergie émise par la Galaxie.

- Peuvent capturer des atomes et des molécules, pour former à leur surface un manteau de glace, où se produisent des réactions chimiques. (L'exemple de la molécule H_2 qui peut se former seulement sur la poussière).

- Des éléments lourds sont libérés lors de la destruction de la poussière.

- Contrôlent en partie le refroidissement de certaines régions obscures du MIS, et les régions de formation stellaire.

- Contrôlent l'équilibre énergétique du gaz: elles chauffent le gaz par effet photoélectrique après absorption de photons UV [9].

Dans le milieu interstellaire de notre Galaxie, on estime que à peu près la moitié des éléments lourds que l'hélium sont en forme de poussière, également la présence de différents processus comme la perte de masse des étoiles en évolution, la stabilité des nuages moléculaires et leur fragmentation dans de plus petits blocs (étapes de la formation des étoiles) sont liés à la présence de la poussière et principalement la formation de l'hydrogène moléculaire a lieu sur la surface des grains [4].

D'autre part, les grains interstellaires sont composés d'un cœur solide formé principalement de silicium, fer, carbone oxygène et magnésium, suivant les tailles les grains sont classés dans diverse population : les très petits grains ($a < 10\text{Å}^0$) (dont la confirmation de leurs existence à été un des apports essentiel du satellite ISO), grains de taille moyenne ($a < 10\mu\text{m}$), et les gros grains $a > 10\mu\text{m}$ [1][10].

Ainsi la densité de la poussière entre les étoiles est extrêmement basse, à titre d'exemple dans un milliard de centimètres cubes de l'espace nous trouvons seulement quelques particules de poussière qui ont habituellement des tailles typiques de 0.01 à 1 μm [5].

1.9.1 L'observation des poussières interstellaires :

L'évidence observationnelle directe pour l'existence de la poussière interstellaire vient particulièrement des photographies de notre Galaxie. Ces poussières ont la propriété d'absorber et de diffuser la lumière des étoiles; donc l'énergie absorbée chauffe les grains et elle est réémise en infrarouge moyen et lointain. La moitié de toute l'énergie émise par les étoiles dans la Galaxie dans l'ultraviolet, le visible et l'infrarouge proche est absorbée par la poussière [2].

1.9.2 L'extinction interstellaire :

La cause principale de l'extinction de la lumière des étoiles sont les grains de poussières, qui absorbent et diffusent les photons qu'ils reçoivent par l'atténuation de la lumière stellaire, et une partie du rayonnement qui nous provient des amas et de tous les astres éloignés en général est déviée de sa trajectoire et perdue pour nos télescopes, ce qui explique que la luminosité apparente des objets les plus lointains est plus faible que prévu. Ces deux interactions ensemble définient le phénomène d'extinction, qui diffère d'une région à l'autre, avec une absorption très importante dans les courtes longueurs d'ondes [5] [4].

Un deuxième phénomène associé à la présence de la matière entre les étoiles est le rougissement interstellaire. Celui-ci est dû au fait que la diffusion et l'extinction dépendent fortement de la longueur d'onde et sont plus marquées dans le bleu que dans le rouge. La forme générale du spectre d'une étoile est donc affectée par la poussière interstellaire. L'intensité dans le bleu diminue beaucoup, alors que l'intensité dans le rouge n'est que peu affectée. Pour un observateur terrestre, les étoiles apparaissent plus rouges qu'elles ne sont réellement. En raison de la petite taille des particules de poussière, la lumière bleue sera diffusée plus que la lumière rouge [5].

Afin d'avoir une idée sur la nature du matériau du grain de poussière responsable de la production de l'extinction interstellaire, il est nécessaire de connaître la variation de l'extinction en fonction la longueur (ou l'inverse de la longueur d'onde) du rayonnement incident, en basant sur une courbe connue comme " la courbe d'extinction" [4].

Il est difficile de mesurer l'extinction d'une manière directe, mais la méthode la plus simple pour estimer ce phénomène est d'utiliser des méthodes spectroscopiques. Supposant deux étoiles identiques l'une est affectée par la présence de la matière interstellaire le long de la ligne de visée et l'autre est non affectée. Pour avoir l'extinction il faut mesurer l'excès de couleur $E(B - V)$ pour les deux étoiles.

Habituellement la courbe d'extinction est normalisée au rapport des extinctions dans les bandes spectrales larges de Johnson: B (bleu centré proche de 4400\AA) et V (visible centré de 5500\AA). Donc la courbe peut être normalisée en $\frac{A_\lambda}{E(B-V)}$ en fonction de $1/\lambda$, aussi bien une normalisation possible par A_λ/A_V

Donc différentes courbes d'extinctions ont été tracées comme la courbe d'extinction galactique standard (Fig.1.3) (normalisé à l'extinction visuelle) qui vérifie la présence de différents types de grains, spécialement la bosse à 2175\AA qui provient des particules carbonées contenant des cycles aromatiques.

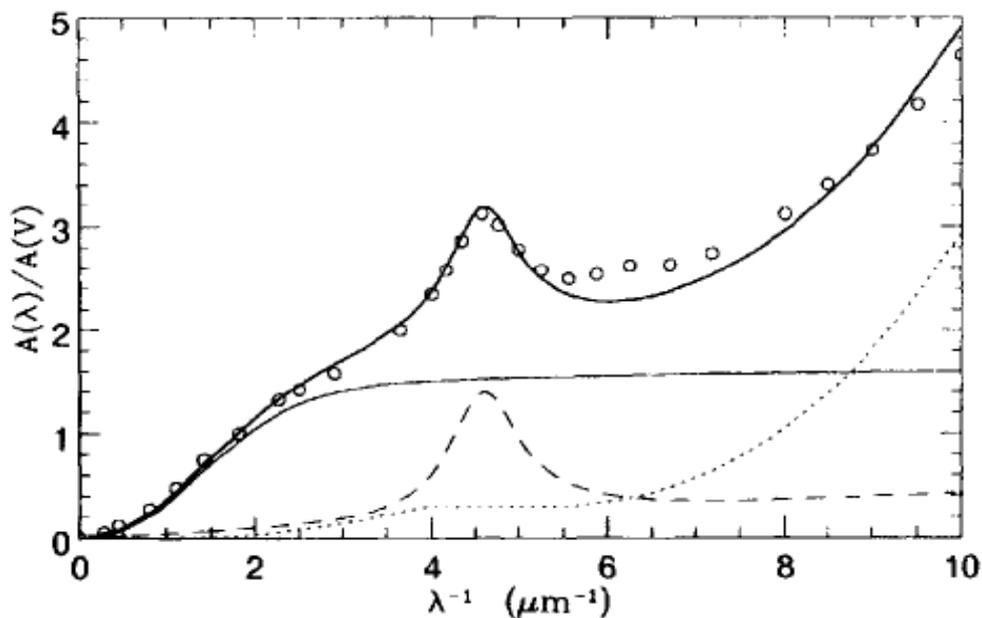


Figure 1.3 : La courbe d'extinction galactique standard [2]

Également la courbe d'extinction dans l'infrarouge moyen (Fig.1.4) donne des informations sur des grains de silicate de larges bandes de 9.7 et à 18 μm résultant de l'absorption par le silicate ; correspondant respectivement aux vibrations d'élongations du Si-O et au mode de flexion des bandes O-Si-O d'une manière générale [2] [11][12].

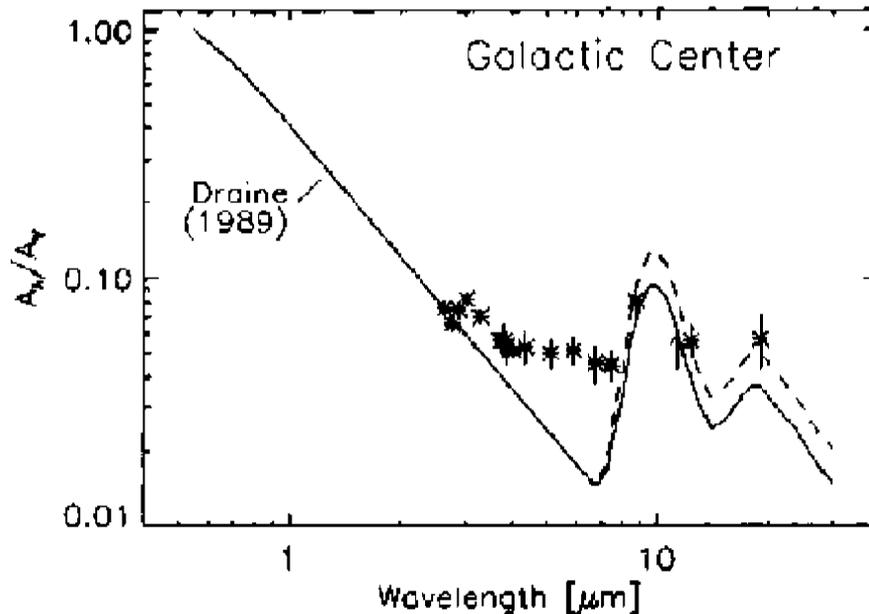


Figure 1.4 : La loi d'extinction dans l'infrarouge moyen [2]

1.9.3 La polarisation interstellaire :

Le milieu interstellaire est responsable de la polarisation de la lumière des étoiles. Découvert en 1948 par Hiltner et Hall, la lumière d'étoiles dont le spectre indique un rougissement est polarisée. Pourtant, les étoiles non magnétisées émettent un rayonnement caractérisé par un champ électrique dont l'orientation est distribuée aléatoirement. Des grains sphériques diffuseraient et absorberaient la lumière incidente sans privilégier une orientation particulière du champ autour de la direction de propagation. La lumière qui provient de telles étoiles ne devrait donc pas être polarisée. Pour provoquer une telle polarisation, une partie des grains interstellaire doit donc être non sphérique et posséder une orientation commune.

L'étude de la polarisation linéaire et circulaire, est très importante puisque elle donne des informations sur les grains de poussières d'une part et sur le champ magnétique galactique d'autre part [4] [13][7].

Chapitre 2

Les interactions dans le milieu interstellaire

Le milieu interstellaire a une structure et une composition, qui a subi des modifications et des variations durant l'évolution galactique et stellaire à travers le temps de vie de l'univers [14]. Il est considéré comme un milieu dilué qui contient de petits grains de nature absorbante et diffusante [6]. Ainsi, il est intéressant d'étudier les interactions dans ce milieu de compositions complexes. Spécialement les interactions sous l'influence des champs électromagnétiques et gravitationnels.

L'étude des interactions des ondes électromagnétiques avec les atomes, les molécules, les poussières est indispensable pour avoir beaucoup d'information sur la nature des composants en interaction et les propriétés physiques et chimiques résultantes [15]. De même, les explications des états (thermiques, ionisations, dynamiques, chimiques) de la matière du milieu interstellaire et intergalactique est due aux interactions des poussières interstellaires [4].

Le champ gravitationnel a son propre effet non négligeable dans l'espace entre les étoiles, dans les systèmes caractérisés par de forts champs gravitationnels, associés généralement à la physique des corps gravitationnellement condensés. Cette dénomination désigne les états finals de l'évolution des étoiles. Après épuisement de leurs sources d'énergie nucléaire, les étoiles finissent par condenser une masse énorme dans un rayon très petit, conduisant, selon la masse initiale, à une naine blanche, une étoile à neutrons ou à un trou noir [17].

2.1 Les interactions électromagnétiques :

Comme il est difficile de créer les grains de poussières dans les laboratoires, pour résoudre ce problème il est nécessaire de trouver un model de calcul pour expliquer les propriétés observables de ces grains dans l'espace interstellaire. L'étude des propriétés optiques des grains est indispensable dans la modélisation de la poussière présente dans le milieu interstellaire, les propriétés optiques des matériaux qui composent les particules solides qui peuvent être diélectriques ou métalliques (ça dépend de l'indice de réfraction qui soit complexe ou réel), par exemple le processus d'absorption de la lumière par les petits grains, peut déterminer la température de ces composantes. Beaucoup de travaux ont traité certains problèmes d'interactions électromagnétique, citons le traitement de la diffusion des grains de poussières par Van Hulst dans son livre "the light Scattering by Small particles" qui donne les propriétés optiques des grains, par des interprétations physiques et analyses mathématiques, dont le but de connaitre la nature et la distribution spatiale des composantes solides [18].

2.1.1 Les propriétés optiques des grains de poussières :

Les petits grains de poussières peuvent subir des phénomènes d'extinctions et d'absorptions de la lumières de l'étoile devant laquelle ils sont exposés. Afin bien comprendre les propriétés physiques des interactions électromagnétiques il faut bien connaitre les propriétés optiques des grains.

La profondeur optique est un paramètre important du grain interstellaire, il est défini comme [6]:

$$\tau = n_d C_{ext} L \quad (2.1)$$

Où :

C_{ext} : Représente la section efficace d'extinction.

n_d : La densité du grain de poussière

L : Le chemin parcouru.

La section efficace d'extinction est souvent représentée en terme d'efficacité d'extinction $Q_{ext}(\lambda)$ et de la section efficace géométrique du grain σ_d donnée par :

$$Q_{ext}(\lambda) = \frac{C_{ext}(\lambda)}{\sigma_d} \quad (2.2)$$

Comme l'extinction est la somme des 2 processus d'absorption et diffusion ; donc la section efficace est donnée par :

$$\sigma_{\text{ext}}(\lambda) = \sigma_{\text{abs}}(\lambda) + \sigma_{\text{diff}}(\lambda) \quad (2.3)$$

L'albédo qui est donné par le rapport de l'efficacité de diffusion et celle d'extinction:

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \frac{Q_{\text{diff}}}{Q_{\text{ext}}} \quad (2.4)$$

Ce paramètre peut être compris entre 0 et 1, et plus que ce terme est grand et plus que l'objet diffuse trop de la lumière d'étoiles [19].

2.2 Les propriétés Physiques des poussières interstellaires :

Il est utile de connaître la structure interne des grains de poussières, d'une manière détaillée pour comprendre certaines propriétés de cette composante, qui va apporter des réponses pour diverses questions dans le milieu interstellaire, donc il faut traiter certains points comme la température du solide (grain), la charge et le mouvement des grains sous l'influence de la pression radiative et les collisions avec le gaz [18].

2.2.1 Température du matériau solide :

Connaître le matériau qui compose le grain est un bon outil pour comprendre comment se passent certains phénomènes d'échange d'énergie dans le milieu interstellaire, à travers la température du grain qui dépend de certains critères physiques, par exemple si on prend un cas d'un nuage interstellaire de faible densité, le moyen le plus adéquat pour transformer de l'énergie à la poussière est l'absorption des photons, mais les collisions n'ont pas une grande importance dans ce cas. Il est estimé par exemple que : un flux de radiation UV de 10^{10} photons $\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$ dans un milieu interstellaire de faible densité, va fournir une énergie de $10^{-20} \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ par rapport à ce qui est déposé par collisions qui est $< 10^{-26} n_{\text{H}}$ (à condition que l'efficacité d'absorption $Q_{\text{abs}} = 1$)

Généralement le grain est considéré comme un parfait radiateur, sa température reflète l'énergie contenue dans l'espace, donc elle est égale à la température du corps noirs $T_{BB}=3K$, pour certains raisonnements la température du grain est plus importante que T_{BB} (à cette température le pic de la fonction de Planck est au domaine millimétrique, et le grain est au $10^{-7}m$ de rayon, et il est impossible de radier dans ces longueurs d'ondes) et T_g et plus importante que T_{BB} .

2.2.2 La charge électrique des grains :

Ceci est un autre paramètre qui est important en relation avec le taux dans lequel les ions peuvent entrer en collision et collage avec les grains de poussières. D'autre part, le taux de collisions des ions dans le gaz, comme C^+ ou H^+ est relié à la nature de la charge du grain (soit positive ou négative), donc les propriétés physiques de la charge du matériau solide sont très utiles ici, c'est à dire les collisions qui influencent sur la charge du grain.

Si on a un ion de masse m_i et de charge positive e , en interaction avec un grain sphérique de rayon a , de charge Z électrons, cette interaction résulte une capture par ce grain de poussière, qui est due généralement à l'attraction électrostatique, avec un paramètre d'impact P_0 , ce qui donne une formule pour un nuage neutre avec ($n_e = n_i$) pour la charge :

$$Z = \frac{3kt/2}{e^2 4\pi\epsilon_0 a} \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_i}{\bar{u}_e - \bar{u}_i} \approx \frac{3kt/2}{e^2 4\pi\epsilon_0 a} \quad (2.5)$$

Où \bar{u}_e et \bar{u}_i sont des vitesses probables pour les électrons et les ions. par conséquent, la charge de grains est importante pour certains processus physiques. par exemple : à $T = 100 K$, Z est de l'ordre de 1 pour $a = 10^{-7} m$, et encore pour $T = 1000 K$, Z est de l'ordre de 100. On pourra dire que encore et aussi sa modification nécessite de comprendre certains phénomènes comme les collisions avec les électrons et les ions positifs [15][18].

2.3 Quelques processus importants des grains :

2.3.1 L'absorption et la diffusion par des petits grains :

L'absorption et la diffusion des ondes électromagnétiques par les petites particules, ce qui montre que la poussière interagit avec la lumière incidente essentiellement par différentes façons, Des modèles physiques de ces interactions ont été bien développés. Van de Hulst et Bohren & Huffman dans leurs traitements classiques, par exemple le phénomène d'interférence peut être défini par :

Le champ électrique du rayonnement incident induit un mouvement des électrons peu liés du grain (le mouvement des noyaux atomiques est beaucoup plus faible en raison de leur masse plus grande). Ces électrons à leur tour émettent un rayonnement de même fréquence et en phase avec le rayonnement incident.

-Le rapport entre l'intensité absorbée par un électron et l'intensité qu'il émet est $(8\pi/3) (e^2/m_e c^2)^2$ où e et m_e sont respectivement la charge et la masse de l'électron.

-L'amplitude émise par un rayonnement incident donné dépend de la polarisabilité α du grain pour la fréquence du rayonnement (la polarisabilité est telle qu'un champ électrique E produit un dipôle $P = \alpha E$ par unité de volume, généralement le cas où la particule est considérée dans un champ électrique homogène) [19].

-Dépendant de la forme les dimensions et l'indice de réfraction du grain, le rayonnement induit sort du grain avec une phase relative au rayonnement incident.

- A cause de l'interférence des rayonnements induits provenant de différentes parties du grain entre eux et avec ce qui reste du rayonnement incident produit la diffusion. Lorsque, les particules sont petite devant la longueur d'onde du rayonnement incident, les rayonnements induit seront remplacés par un dipôle unique légèrement déphasé par rapport au rayonnement incident, et le déphasage est pratiquement nul pour les grains extrêmement petits, ce qui résulte que la diffusion est négligeable et l'extinction est essentiellement due à l'absorption. [2].

2.3.2 La diffusion des rayons X par les grains :

Les grains de poussière interstellaire ont une propriété de diffuser les rayons X dans des directions près de celles du rayonnement incident, alors que la diffusion des rayons X se fait à de petits angles puisque la plupart des grains ont de dimensions supérieures à la longueur d'onde.

Pour avoir une bonne distribution de tailles des grains, on pourra utiliser les figures de diffusion des grains de différentes tailles qui se traduit globalement par un halo autour des sources X (le halo dépend bien de certaines propriétés des grains comme la distribution de taille de grains (surtout les plus gros), qui sont les plus efficaces pour la diffusion sans négliger leurs composition et densités, tous les renseignements apportés sur les grains et leurs paramètres sont basées sur les observations.

D'autre part, l'indice de réfraction X a une partie réelle m qui est légèrement inférieure à 1 ce qui est différent de l'indice de réfraction optique; Donc les photons X pénètrent entièrement dans le grain, et la réflexion sur la surface étant négligeable. Le fait que l'énergie des photons X est importantes par rapport à l'énergie des bandes électroniques qui forment le solide (matériau) du grain, donne la possibilité de considérer que les électrons du solide comme libres pour ce processus, et la réfraction et la diffusion dépendent de la densité électronique totale n_e dans le grain. Comme m est un peu différent de 1, les déphasages entre le rayonnement incident et le rayonnement induit sont faibles et ils peuvent être négligés. Aux énergies X plus petites que 1keV, il faut tenir compte des déphasages pour les gros grains, on trouve que l'absorption des photons X par les grains est faible aux énergies X supérieures à 1keV, et devient importante aux énergies plus petites [2].

2.3.3 Le chauffage photoélectrique des grains :

Dans le milieu interstellaire l'importance de ce processus est le fait qui est le plus efficace pour chauffer les régions diffuses froides [2]. En raison du rôle intéressant de la composante grains qui est une source d'énergie importante pour le gaz interstellaire, le chauffage photoélectrique vient de l'absorption d'un photon en UV lointain par le grain interstellaire, suivi par l'éjection des électrons qui ont un excès d'énergie qui est une importante fraction d'énergie des photon UV, l'énergie étant de l'ordre de quelques eV. En raison de ce taux d'énergie faible, elle est utilisée pour le chauffage (donc l'énergie n'est pas suffisante pour ioniser ou exciter les atomes ou les molécules), une partie d'énergie chauffe le

grain mais l'autre est transmise au photoélectron. Ici la nature, la dimension, la forme et la charge du grain sont importantes dans ce processus.

Dans le milieu interstellaire neutre, l'effet photoélectrique est le processus de chauffage le plus important, la physique associée pour le grain interstellaire (petits grains de poussière) est présentée dans la figure (2-1).

Quand les photons UV sont absorbés par un grain, ils vont créer des électrons énergétiques (de plusieurs eV), tandis que ces électrons diffusent dans le grain, ils perdent de l'énergie par des collisions. Cependant, si, pendant ce processus de diffusion, ces électrons atteignent la surface avec une énergie suffisante pour surmonter la fonction de travail W du grain et le potentiel de Coulombien Φ (si le grain est chargé positivement), ils peuvent être injectés dans la phase gazeuse avec un excès d'énergie cinétique [6].

2.4 Les interactions Gravitationnelles :

Le champ gravitationnel a sa propre influence sur le milieu interstellaire. Elle peut être très importante sur le mouvement du gaz interstellaire. C'est le cas pour le mouvement dans le voisinage d'une concentration de masse, une étoile ou encore un objet massif et également la formation des étoiles. Ainsi la gravité peut avoir une influence dans le cas d'un objet massif entouré d'un nuage de gaz, ce qui donne une accréation de la matière [17]. De même, un amas de galaxies, se composant d'un regroupement de quelques centaines à quelques milliers de galaxies de tous types morphologiques (irrégulières, spirales, lenticulaires et elliptiques), renferme un milieu (dit intra-amas, (MIA)) rempli d'un gaz très chaud à une température de plusieurs millions de degrés qui sont observé grâce à son rayonnement émis en X. Lorsqu'une galaxie traverse un amas, sa morphologie, sa cinématique et ses propriétés spectrales vont être fortement altérées par divers processus appelés effets d'environnement. Deux mécanismes importants entrent en jeu dans l'évolution de la galaxie: les interactions gravitationnelles et le balayage par la pression dynamique du milieu intra-amas. En effet, une galaxie subit des interactions gravitationnelles au cours de sa traversée de l'amas car elle est perturbée par les champs de gravité des autres galaxies de l'amas et de l'amas lui-même. Ce type d'interaction qui agit sur des échelles de temps longues (plusieurs milliards d'années) a pour conséquences de perturber sa

morphologie, créant éventuellement des traînées d'étoiles en dehors du plan de la galaxie, ou de déclencher des flambées de formation de nouvelles étoiles à partir des nuages de gaz d'hydrogène du milieu interstellaire (MIS) de la galaxie.

2.4.1 La théorie de la gravitation de Newton :

La théorie de la gravitation de Newton est une théorie de champs à trois dimensions, où le champ gravitationnel $\Phi(x, y, z)$ est une fonction des coordonnées spatiales (x, y, z) . Ce champ vérifie l'équation de poisson :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(x, y, z) \quad (2.6)$$

Où G est la constante gravitationnelle de Newton et $\rho(x, y, z)$ est la densité de masse de la matière dans un espace qui produit le champ gravitationnel. Donc la solution de l'équation de poisson donne le potentiel $\Phi(x, y, z)$ en termes de la distribution de masse $\rho(x, y, z)$.

Le potentiel newtonien crée un champ de force qui agit sur les particules. Ce champ gravitationnel des forces est proportionnel au gradient du potentiel newtonien Φ :

$$\vec{F} = -m \vec{\nabla} \Phi \quad (2.7)$$

Si le potentiel est produit par une masse M , la solution de l'équation de Poisson est donnée par :

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (2.8)$$

De même la force agissant sur une autre particule de masse m , est donné par :

$$\vec{F} = GmM \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r} \quad (2.9)$$

Cette équation est la loi universelle de la gravitation de Newton, elle donne la magnitude de la force gravitationnel, qui peut exister entre deux corps de masses gravitationnelles m et M séparées par une distance r . Généralement la masse gravitationnelle et la masse inertielle du corps sont les mêmes [20][21][22].

Le mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel est déterminé par le lagrangien. En mécanique non relativiste il est donnée par :

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi \quad (2.10)$$

Où Φ est le potentiel gravitationnel.

L'équation de mouvement de cette particule est :

$$\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi \quad (2.11)$$

Elle a la propriété de ne pas contenir la masse ou d'autre constante caractérisant les propriétés de la particule. Ainsi, c'est l'expression mathématique de la propriété de base des champs gravitationnels [23].

2.4.2 La théorie d'Einstein de la gravitation :

L'idée fondamentale de la théorie de la gravitation d'Einstein consiste à la géométrisation de la force gravitationnelle, et décrire son influence sur les propriétés d'un espace Riemannien. Donc il est important de prendre en considération les structures mathématiques de cet espace et voir son influence sur les lois de la physique (sachant que la matière est responsable de la création du champ gravitationnelle, comme elle signifie tout ce qui peut produire ce champ (ce qui contribue au tenseur énergie-impulsion) [20].

Les équations d'Einstein de la gravitation peuvent décrire l'espace-temps de Riemann. Les équations de la gravitation doivent être tensorielles, ainsi qu'elles peuvent être écrites dans n'importe quel système de coordonnées (principe de covariance), et peuvent avoir $g_{\alpha\beta}$ comme composantes de la métrique, également les équations du champ gravitationnel doivent être en dérivées partielles du deuxième ordre de façon à généraliser les équations de Poisson de la théorie de Newton de la gravitation. Les équations du champ gravitationnel sont données par :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci et R la courbure scalaire et $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion-énergie.

Une autre version de l'équation du champ gravitationnel d'Einstein est donnée par :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Où Λ est la constante cosmologique, et $\Lambda g_{\mu\nu}$ est un terme cosmologique introduit par Einstein pour rendre les équations du champ gravitationnel applicable aux problèmes de la cosmologie statique [20].

Nous pouvons décrire la trajectoire des particules dans un champ gravitationnel externe par le système différentiel (géodésique dans l'espace temps) par :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\chi\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0 \quad (2.14)$$

Où $\Gamma_{\chi\beta}^\alpha$ représentent les symboles de Christoffel

On montre que la théorie de Newton représente la limite des champs gravitationnels faibles.

2.4.3 La métrique statique de Schwarzschild :

La première solution de l'équation d'Einstein a été obtenue par Schwarzschild. Sa métrique a permis la description du champ gravitationnel statique autour d'une masse de symétrie sphérique.

La forme de la métrique est donnée par:

$$ds^2 = \left(\frac{1-2Gm}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 dt^2 \frac{(1-2Gm)}{c^2 r} \quad (2.15)$$

Chapitre 3

La dynamique d'un grain de poussière

Les grains de poussières entrent dans la composition de divers environnements (le milieu interstellaire, les anneaux des planètes, et les comètes). Comme conséquence, ils jouent un rôle central dans la compréhension de divers phénomènes en astrophysique, en raison de la complexité de la forme, la taille et les étapes de la formation et la destruction des grains interstellaires, ainsi que les différents processus de chargement (positivement ou négativement) [16][24]. D'autre part, les environnements stellaires et planétaires magnétisés, ou magnétosphères, sont générés par le mouvement de particules chargées à l'intérieur du noyau des étoiles et des planètes. Par exemple, dans la magnétosphère de la terre les particules chargées entrantes ont des trajectoires complexes et sont à l'origine de phénomènes de rayonnement observables tels que: le rayonnement aurorale, les ceintures de radiation de Van Allen [25]. Tout cela pose le problème de la dynamique des particules chargées (grains de poussières), c'est à dire la description physique du comportement de ces charges généralement dans différents milieux astrophysiques.

En outre, le traitement de la dynamique d'une particule chargée dans un plasma, particulièrement dans les magnétosphères planétaires, a été considéré dans différents travaux. L'un des plus importants est celui de Dullin et al(2002), qui a pu donner un intéressant traitement pour ce problème par une généralisation du problème de Störmer. Ce traitement a bien décrit la dynamique des grains chargés en présence de champs électromagnétiques et gravitationnels.

Dans notre travail on va s'intéresser à l'étude de la dynamique d'un grain de poussière chargé dans le voisinage d'une planète magnétisée, en se basant sur le travail de (Dullin et al 2002). En premier lieu

on va faire une généralisation du problème de Störmer en ajoutant à l'expression du champ magnétique (jusqu'ici limité au terme dipolaire) dans l'étude du mouvement d'un grain de poussière, un terme quadrupolaire magnétique. Le but étant de d'analyser toutes les propriétés physiques qui résultent pour les trajectoires des grains chargés.

Si l'on va s'intéresser à l'équation du mouvement d'une particule de charge e et de masse m se déplaçant dans un champ électromagnétique, utilisant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , l'énergie cinétique et le potentiel sont donnés par :

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \quad (3.1)$$

$$V = e\Phi - (e/c)A.v \quad (3.2)$$

Le Lagrangien non relativiste est donné par :

$$L = T - V \quad (3.3)$$

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - e\Phi + (e/c)A.v \quad (3.4)$$

3.1 Le problème de Störmer :

L'une des étapes précoces de la physique spatiale a été l'analyse théorique de Störmer du mouvement des particules chargées dans un dipôle magnétique. Il a été l'un des premiers scientifiques qui ont relié ce problème de mouvement des charges à la physique des rayons cosmiques et aux phénomènes auroraux. Ces travaux, publiés dans un livre en 1955 ont fourni la physique de base qui a conduit à la compréhension des ceintures de radiation qui entourent la terre et les autres planètes magnétisées. Généralement ces ceintures de radiation se composent d'ions et d'électrons individuels; leur mouvement est principalement régi par des forces magnétiques seulement. Ces résultats classiques sont également pertinents pour la dynamique des grains de poussières chargées dans les magnétosphères planétaires. Cependant, dans le cas d'un grain de poussière avec un faible rapport charge sur masse est très important, puisque la dynamique est plus compliquée dans ce cas, la gravité planétaire et le champ électrique corotationnel doivent également être prises en compte. [26] [27] [28]

3.2 La dynamique d'un grain de poussière dans une géométrie axisymétrique

3.2.1 Position du problème :

Dullin et al (2002) ont développé une approche générale qui intègre à la fois les forces gravitationnelles et électromagnétiques à proximité d'une planète. Faire une discussion générale du mouvement des particules chargées peut débuter par l'hypothèse de la géométrie axisymétrique, qui décrit le mouvement des grains chargés dans la magnétosphère alignés pour une planète en rotation [28] [29].

Le mouvement d'une particule de masse m et charge q dans un espace à 3 dimensions est donnée par l'équation de mouvement :

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} - \vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (3.5)$$

Où le potentiel scalaire $U(\vec{r})$ inclut le potentiel gravitationnel et le potentiel du champ électrique induit par la rotation du dipôle. De même, le champ magnétique \vec{B} et le potentiel U sont symétriques par rapport à la rotation autour de l'axe z .

Le champ magnétique est obtenu à partir du potentiel vecteur d'après la relation :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.6)$$

Où \vec{A} est le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique \vec{M} donne par:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.7)$$

D'autre part, les composantes du champ magnétique produites par un dipôle magnétique en coordonnées sphériques sont données par [30] :

$$B_r = \frac{-2\mu_0 M}{4\pi r^3} \cos \theta \quad (3.8)$$

$$B_\theta = \frac{-\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin \theta \quad (3.9)$$

$$B_\phi = 0 \quad (3.10)$$

La partie interne de la magnétosphère planétaire (par exemple celle de saturne) est similaire à un plasma conducteur rigide; donc elle peut être supposée dans un état de corotation rigide avec la

planète à la même vitesse angulaire Ω . Il en résulte que la charge q est soumise à un champ électrique corotationnel.

$$\vec{E} = \left(\frac{qM\mu_0}{4\pi c} \right) \vec{\nabla} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r} \right) \quad (3.11)$$

Le champ électrique corotationnel est donné par :

$$\vec{E} = \frac{q}{c} \vec{B} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{q}{c} M \Omega \vec{\nabla} \Psi \quad (3.12)$$

Où la fonction Ψ est sous la forme :

$$\Psi = \frac{x^2 + y^2}{r^3} \quad (\text{Avec } \gamma = \frac{qM}{c})$$

Le potentiel s'écrit alors:

$$U(r) = -\sigma_g \frac{\mu m}{r} + \sigma_r \frac{q}{c} M \Omega \Psi \quad (3.13)$$

Afin de traiter l'impact du rapport charge masse de la particule et l'importance ou la négligence des forces gravitationnelles ou co-rotationnelles électriques, on introduit deux paramètres σ_r et σ_g (pouvant prendre les valeurs 0 ou 1). Puisque il y a quatre valeurs possibles des paires σ_r et σ_g , on a les quatre cas possibles du problème de Störmer :

- ($\sigma_r = \sigma_g = 1$) est le cas le plus utilisé (*Rotationnal Gravitationnal Störmer problem RGS*).

- ($\sigma_r = 1, \sigma_g = 0$) qui introduit le champ électrique corotationnel planétaire. (*Rotationnal Störmer Problem RSP*).

- ($\sigma_r = 0, \sigma_g = 1$) avec la présence de la gravité et l'absence du champ électrique corotationnel. (*Gravitationnal Störmer Problem GSP*).

- ($\sigma_r = 0, \sigma_g = 0$) qui représente le cas classique.

3.3.2 L'Hamiltonien du mouvement :

Le mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique est décrit par l'Hamiltonien dont la forme générale est :

$$H = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(r) \right)^2 + U \quad (3.14)$$

-Pour arriver à une équation facile à résoudre, il est utile de donner l'expression de l'Hamiltonien en coordonnées cylindriques ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Phi = \arctan(y/x)$, z):

$$H = 1/2m (p_\rho^2 + p_z^2 + 1/\rho^2(p_\Phi - \gamma\Psi)^2) - \sigma_g \mu m/r + \sigma_r \gamma \Omega \Psi \quad (3.15)$$

Il faut identifier trois types de constantes pour ce problème :

-Les paramètres liés à la planète : la masse $\mu=GM$, et la vitesse de rotation Ω .

-Les paramètres liés à la poussière : la masse m et le charge électrique mesuré par qM/c

-Les constantes de mouvement : le moment angulaire p_Φ et l'énergie totale de la particule $h = H$.

L'expression ci-dessous représente l'Hamiltonien après avoir réduit certains nombre de paramètres pour faciliter les calculs selon le travail de Dullin et al (2002), donné par :

$$\hat{H} = 1/2m (\hat{p}_\rho^2 + \hat{p}_z^2 + (\hat{p}/\hat{\rho} - \delta(\hat{\rho}/\hat{r}^3)^2) - \frac{\sigma_g}{\hat{r}} + \sigma_r \delta \left(\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{r}^3} \right) \quad (3.16)$$

Où les paramètres essentiels sont donnés par :

$$p = p_\Phi \frac{R\delta}{\gamma} \quad \text{Et} \quad \delta = \frac{\Omega\gamma}{m\mu} = \frac{q}{m} \frac{M}{c} \frac{\Omega}{GM} = \frac{\omega_c}{\omega_k^2}$$

Le paramètre $\omega_c = qB_0/mc$ représente la fréquence cyclotron, avec B_0 le champ magnétique de la planète, $\omega_k = \sqrt{GM/R_s^3}$ est la fréquence Keplérienne, avec le rayon de la planète R_s , et p le moment angulaire au lieu de p_Φ (après la transformation) et δ est le rapport charge à la masse (dans tout ce qui s'ensuit on va dire charge positive /négative, si l'on parle de δ positive /négative) [29][31] .

3.3 Etude des orbites équatoriales et halos dans un dipôle magnétique :

Le but essentiel de faire l'étude de la dynamique d'un grain de poussière dans un dipôle magnétique, est de déduire une relation entre les rayons des orbites circulaires et la charge δ . Comme il est connu que l'existence des orbites circulaires équatoriales et halos est liés au mouvement du grain de poussière autour d'une planète magnétisée. Aussi bien ces orbites représentent des points d'équilibres du système étudié.

D'après le travail de (Dullin et al) il est plus efficace de traiter le problème de la dynamique d'un grain de poussière en coordonnées sphériques $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\Theta = \arccos(z/r)$, Φ). L'expression de l'Hamiltonien dans ces coordonnées est donnée comme suit [32][33][34] :

$$H = \frac{1}{2} (p_r^2 + p_\Theta^2/r^2) + U_{\text{eff}} \quad (3.17)$$

Dans l'expression de l'Hamiltonien le potentiel effectif U_{eff} est indépendant des moments p_r et p_Θ .

3.3.1 Les points critiques :

L'expression de ce potentiel effectif en coordonnées sphériques est donnée par :

$$U_{\text{eff}} = (pr - \delta \sin^2 \Theta)^2 / (2r^4 \sin^2 \Theta) - (\sigma_g - \sigma_r \delta \sin^2 \Theta) / r \quad (3.18)$$

Le potentiel effectif U_{eff} ci-dessus est en fonction de plusieurs paramètres qui sont utiles pour décrire le mouvement de la particule chargée. Les équations de mouvement sont données par :

$$\dot{r} = p_r, \quad \dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{r^2}, \quad \dot{\Phi} = \partial_p U_{\text{eff}} \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\Theta^2}{r^3} - \partial_r U_{\text{eff}}, \quad \dot{p}_\Theta = -\partial_\Theta U_{\text{eff}}, \quad \dot{p}_\Phi = 0 \quad (3.20)$$

Afin de simplifier les calculs des dérivées partielles de U_{eff} on définit la fréquence :

$$\omega(r, \Theta) = \dot{\Phi} = \partial_p U_{\text{eff}} = p / (r^2 \sin^2 \Theta) - (\delta / r^3) \quad (3.21)$$

Dans le but de trouver les points critiques du potentiel effectif, on calcul les dérivées partielles suivantes :

$$\partial_r U_{\text{eff}} = -\omega^2 r \sin^2 \Theta + (1/r^2) (\delta - \sigma_r) \sin^2 \Theta + \sigma_g \quad (3.22)$$

$$\partial_\Theta U_{\text{eff}} = \left(-\frac{1}{r}\right) \cos \Theta \sin \Theta (\omega^2 r^3 + 2\omega\delta - 2\sigma_r \delta) \sin^2 \Theta \quad (3.23)$$

La recherche des orbites est basée sur la recherche des solutions du système: $\partial_r U_{\text{eff}} = 0$, $\partial_\Theta U_{\text{eff}} = 0$.

3.3.2 Les orbites équatoriales :

Ce genre d'orbite décrit le mouvement de la particule chargée dans le plan équatorial. La résolution du système d'équations ci dessus donne $\Theta = \pi/2$. Pour les des orbites circulaires dans le plan équatorial l'Hamiltonien (dans le plan équatorial) est donné par :

$$H_{xy} = 1/2(P_r^2 + (1/r^2)((p - (\delta/r))^2) - (\sigma_g - \sigma_r \delta) \frac{1}{r} \quad (3.24)$$

Le potentiel effectif dans la plan équatorial est alors donné par :

$$U_{xy}(r) = 1/2(p/r - \delta/r^2)^2 - (\sigma_g - \sigma_r \delta)/r = 1/2\omega^2 r^2 - (\sigma_g - \sigma_r \delta)/r \quad (3.25)$$

Les orbites circulaires dans le plan équatorial correspondent au minimum de $U_{xy}(r)$. Donc la détermination des points critiques de ce potentiel se ramène à la recherche des racines du polynôme $P(r, \omega)$ en fonction de la fréquence orbitale ω et la charge δ .

$$P(r, \omega) = \omega^2 r^3 - \omega \delta + \sigma_r \delta - \sigma_g \quad (3.26)$$

La résolution de l'équation polynômiale $P(r, \omega) = 0$ donne une généralisation de la 3ème loi de Kepler pour les orbites équatoriales donnée par :

$$r^3 = \sigma_g + \delta(\omega - \sigma_r)/\omega^2 \quad (3.27)$$

Cette équation sera comparable à la loi de Kepler connue pour $\delta \rightarrow 0$. D'autre part, la résolution de $P(r, \omega)$ par rapport à δ donne

$$\delta = (\omega^2 r^3 - \sigma_g)/(\omega - \sigma_r) \quad (3.28)$$

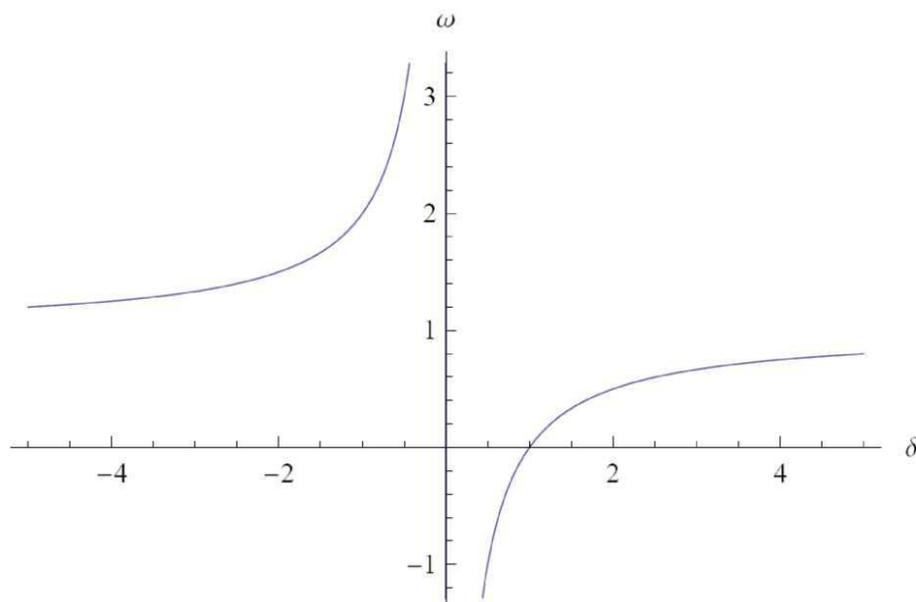


Figure 3.1 : Existence des orbites équatoriales dans un dipôle magnétique [28]

Le rayon r_e étant positif l'équation (3.27) permet de déterminer le domaine (dans le plan δ, σ_r) d'existence des orbites équatoriales. Ce domaine correspond dans la figure (3.1), à la région entre les deux courbes.

Maintenant nous avons deux paramètres décrivant le mouvement de la particule, et à travers cette l'équation $\omega=f(\delta)$ pour r constant, il est facile de tracer toutes les courbes correspondant aux orbites équatoriales dans tous les cas possibles de Störmer (donnés par les figures (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5)).

Il est montré sur la Figure(3.2) les courbes d'orbite équatoriales de constantes r , avec la présence des champs gravitationnel et électrique corotationnel. Au résultat il ya des orbites progrades ($\omega>0$) et rétrogrades ($\omega<0$).

La figure (3.3) qui est le cas classique de Störmer, qui correspond à un mouvement dans un pur dipôle magnétique. Les courbes montre une proportionnalité entre ω et δ .

La figure (3.4) montre que la relation entre les deux paramètres ω et δ est similaire; mais il est remarquable l'existence des régions avec 2 types d'orbites équatoriales : charge positive prograde et négative rétrograde. Dans le cas du problème rotationnel de Störmer (Fig.(3.4)) les orbites rétrogrades positives ont disparu, de même la principale nouveauté est l'apparition d'orbites de charge négative petite avec des valeurs petites de ω et des rayons faibles[31][29].

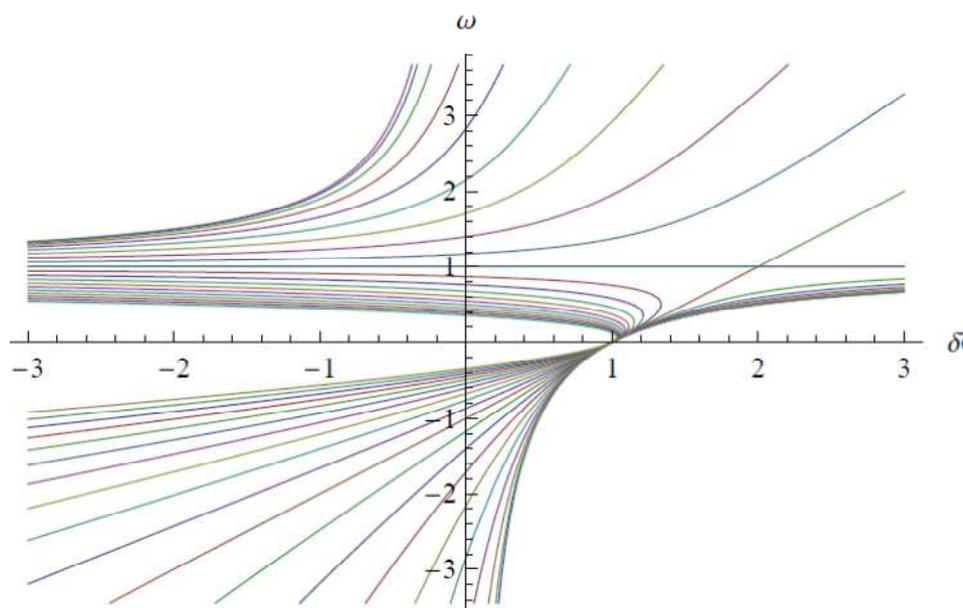


Figure 3.2 : Courbes d'orbites équatoriales à r constant dans un dipôle magnétique, cas RGSP [28]

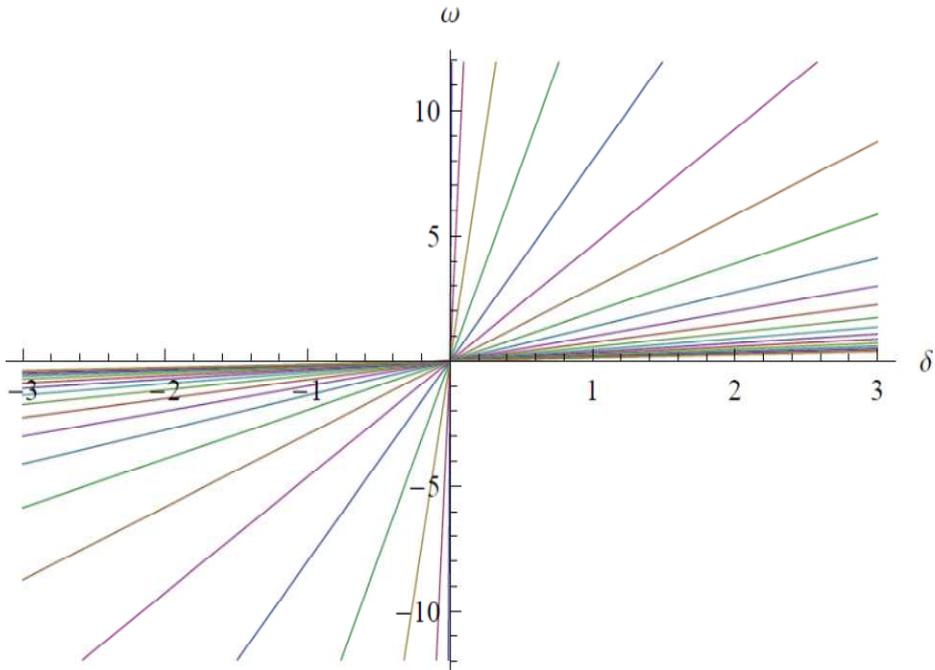


Figure 3.3 : Courbes d'orbites équatoriales à r constant dans un dipôle magnétique, cas CSP[28]

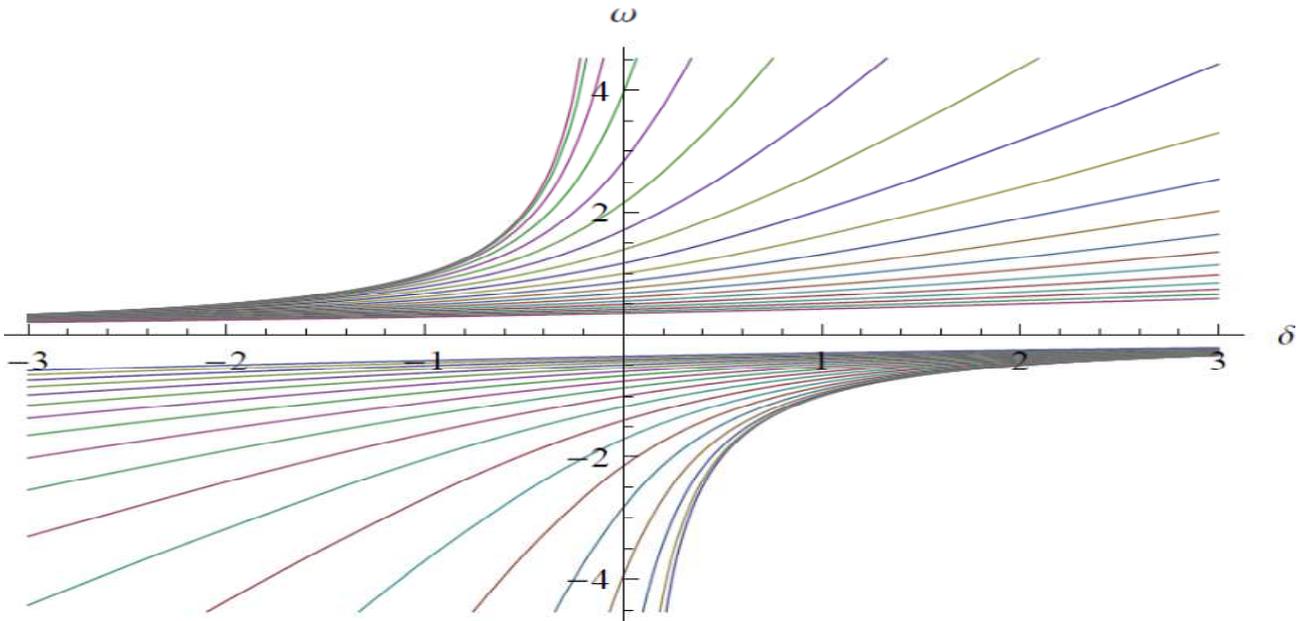


Figure 3.4: Courbes d'orbites équatoriales à r constant dans un dipôle magnétique, cas GSP [28]

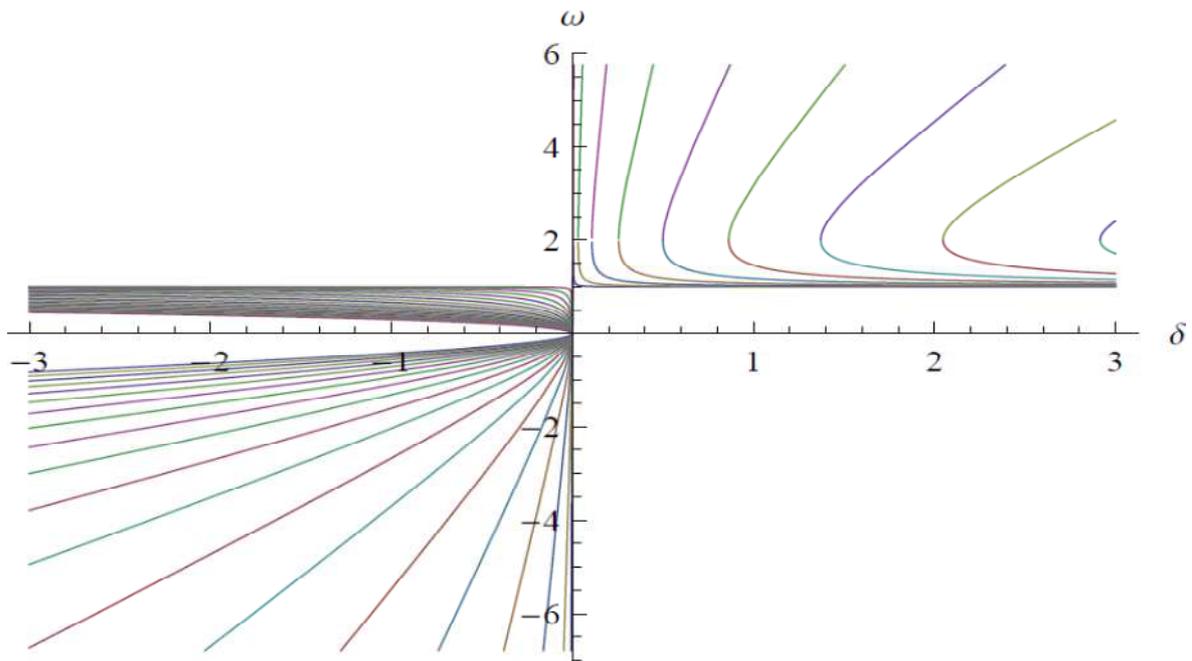


Figure 3.5: Courbes d'orbites équatoriales à r constant dans un dipôle magnétique, cas RSP [28]

3.3.3 Les orbites halos :

Les orbites halos sont définies comme des orbites qui se présentent dans un plan parallèle au plan équatorial, c'est à dire les points critiques (r_0, θ_0) du potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r, \theta, \Phi)$. Elles sont décrites à l'aide des équations $Q(r, \omega) = 0$ et $A(\theta, \omega) = 0$ données comme suit :

$$Q(r, \omega) = \omega^2 r^3 - 2\omega\delta + 2\sigma_r\delta = 0 \quad (3.29)$$

$$A(\theta, \omega) = \sigma_g + 3\delta(\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta = 0 \quad (3.30)$$

Les fonctions Q et A décrivent les orbites halos. Elles peuvent être résolues par rapport à r et θ , donnant toutes les orbites circulaires sous forme paramétrique, le paramètre étant ω :

$$r_h(\omega)^3 = \frac{2\delta(\sigma_r - \omega)}{\omega^2} \quad (3.31)$$

Et

$$\sin^2 \theta = \sigma_g / 3\delta(\sigma_r - \omega) \quad (3.32)$$

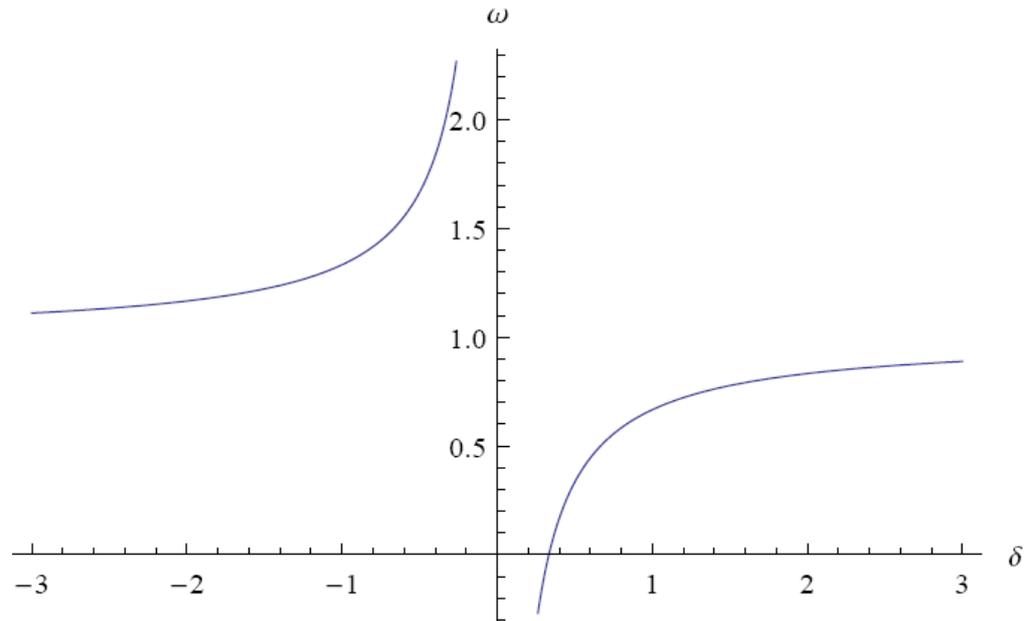


Figure 3.6 : L'existence des orbites halos dans un dipôle magnétique [28]

A partir de l'équation (3.32) et sachant que à $\sin^2 \theta < 1$ on obtient la condition d'existence des orbites halos. La figure (3.6) donne les différentes régions d'existences de ces trajectoires (les deux régions externes).

Pour avoir une idée sur les orbites halos possibles, il est évident de tracer les courbes à r constants et celles à θ constant, à l'aide des deux équations (3.31) et (3.32).

-Famille de courbes de r constant :

L'équation ci-dessous décrit les orbites halos qui sont données par la solution de l'équation

$\partial_r U_{\text{eff}} = 0$ alors on a :

$$\delta = \frac{r^3 \omega^2}{3(\sigma_r - \omega)} \quad (3.33)$$

Qui décrit les orbites halos pour r (la distance par rapport au centre de la planète) constant .

-Famille de courbes de θ constant :

De même pour avoir une description des trajectoires halos de θ constant on prend $\partial_\theta U_{\text{eff}} = 0$.

$$\delta = \sigma_g / (3(\sigma_r - \omega) \sin^2 \theta) \quad (3.34)$$

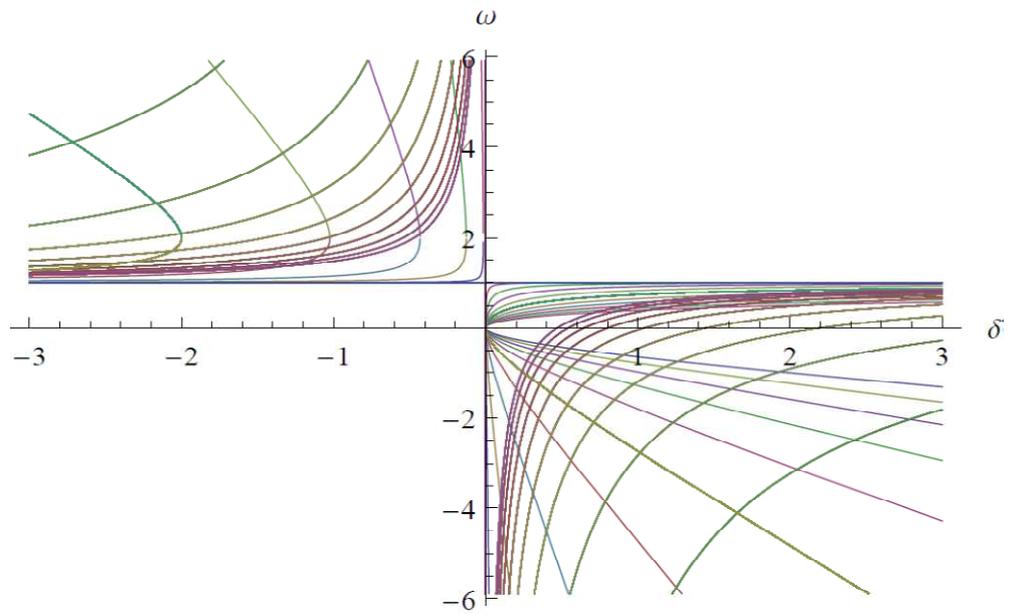


Figure 3.7 : Courbes d'orbites halos pour \mathbf{r} et Θ constant dans un dipôle magnétique, cas RGSP [28]

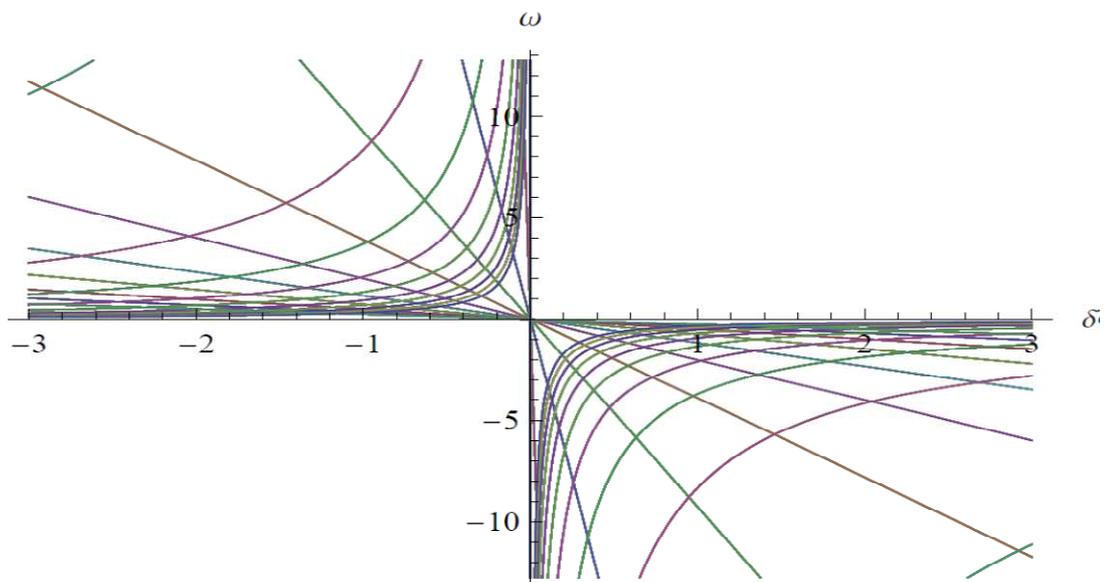


Figure 3.8: Courbes d'orbites Halos pour \mathbf{r} et Θ **constant** dans un dipôle magnétique, cas GSP[28]

A l'aide de ces deux équations qui décrivent les orbites halos, il est clair d'après l'équation (3.34) que sans la présence des forces gravitationnelles $\sigma_g = 0$ il n'y a pas d'orbites halos (spécialement le cas classique de Störmer) même avec la présence du champ électrique. On peut dire que la présence du champ électrique n'est pas essentielle pour l'existence des orbites non équatoriales.

3.4 Différentes études dans le cadre du problème de Störmer

L'approche de Dullin et al. (2002) a introduit l'effet des forces électromagnétiques et gravitationnelles près d'une planète magnétisée [31]. D'autres travaux ont discuté ce problème de différentes manières, soit en tenant compte d'un champ gravitationnel fort, ou bien de la forme de la planète considérée. [32] [27]

3.4.1 Cas d'un objet compacte ayant un dipôle magnétique

Généralement discuter le mouvement d'une particule chargée dans un champ gravitationnel fort et un champ électromagnétique a un grand intérêt en physique théorique et en astrophysique qui est bien relié aux trous noirs et aux étoiles compactes [27].

Le mouvement de la particule est décrit par l'Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m(p_\rho^2 + p_z^2)} + U_{\text{eff}} \quad (3.35)$$

Le potentiel effectif prendra la forme:

$$U_{\text{eff}} = (1/2) (p/\rho - \delta (\rho / (r^3)))^2 - (\sigma_g) (1/(r - r_s)) + \sigma_r \delta (\rho^2)/(r^3) \quad (3.36)$$

Dans ce cas les résultats de l'étude des trajectoires des particules chargées dans un champ fort ont donné des orbites halos près des objets compacts et l'absence des orbites équatoriales d'une manière générale, ce qui n'est pas le cas de (Dullin et al) qui a décrit le mouvement de la charge par des orbites équatoriales et d'autres halos.

3.4.2 Cas d'une planète non sphérique (oblat ou prolata) :

Le but de cette étude est de décrire les trajectoires d'une particule chargée en mouvement autour d'une planète non sphérique (oblate ou prolata) pour calculer et vérifier l'existence des orbites équatoriales et halos. L'Hamiltonien est donné par:

$$H = 1/2m(p_\rho^2 + p_z^2 + (p_\phi/\rho^2) - (1/r) - (\delta p_\phi/r^3) + (\delta^2/2)(\rho^2/r^6) + \delta\beta(\rho^2/r^3) + 3J_2(z^2/2r^5) - (J_2/2r^3) \quad (3.37)$$

Avec J_2 un paramètre qui décrit une planète oblate dans le cas positif et prolata pour le cas négatif ($J_2 = 0$ pour Dullin et al)

Le potentiel effectif est donné par :

$$U_{\text{eff}} = \frac{p_\phi}{2\rho^2} - \frac{1}{r} - \frac{\delta p_\phi}{r^3} + \frac{\delta^2 \rho^2}{2r^6} + \delta\beta \frac{\rho^2}{r^3} + 3J_2 \frac{z^2}{2r^5} - \frac{J_2^2}{2r^3} \quad (3.38)$$

Dans ce cas d'étude le paramètre J_2 joue un rôle important dans l'existence des deux types d'orbites. Dans le cas oblate il y a deux orbites équatoriales. Pour les corps prolates une seule orbite halo apparaît à l'intérieur d'une région donnée. Ce genre de traitement est intéressant pour la dynamique des grains chargés autour des astéroïdes; également pour l'analyse de la structure et la composition des anneaux planétaires (Par exemple, il pourrait être intéressant dans l'étude des grands anneaux de Saturne).

3.5 La généralisation du problème de Störmer :

Notre objectif principal est de donner l'expression du champ magnétique la plus générale, qui donne une généralisation au problème de Störmer qui introduit les forces électromagnétique et gravitationnelle sur un grain de poussière chargées à proximité d'une planète axisymétrique, Donc, on a besoin de donner une formule générale pour décrire le champ magnétique qui résulte le champ électrique corotationnel, dans le but de calculer les orbites équatoriales et halos autour de la planète magnétisée, ce qui décrit bien le dynamique d'un grains de poussière. Il est connu comme équatoriale circulaire et les orbites halos existent pour un grain de poussière en orbite une planète sphérique.

Mais, le problème qui se pose dans ce cas est qu'il est difficile de donner pour chaque planète magnétisée une expression différente de l'autre. Nous allons alors prendre le cas de la terre comme un modèle de base, comme on a beaucoup d'informations sur le champ magnétique terrestre. Ce dernier ne peut être décrit par une fonction analytique.

3.5.1 L'expression générale du champ électrique corotationnel :

Nous pouvons écrire le champ magnétique sous la forme [35] :

$$\vec{B}(r, \theta, \Phi, t) = -\vec{\nabla} V(r, \theta, \Phi, t) \quad (3.39)$$

L'expression du potentiel est donnée par :

$$V(r, \theta, \Phi, t) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^l (a/r)^{l+1} (g_l^m(t) \cos(m\Phi) + h_l^m(t) \sin(m\Phi)) P_l^m(\cos\theta) \quad (3.40)$$

Ici $P_l^m(\cos\theta)$ représente les polynômes de Legendre,

$h_l^m(t)$ et $g_l^m(t)$ sont les coefficients de Gauss qui dépendent en générale du temps. Dans cette étude ces paramètres ne dépendent pas du temps.

De plus on limitera le développement aux termes ayant $l \leq 2$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \\ & \left(\frac{q}{c}\right) \Omega \vec{\nabla} \left[\left(\frac{a^2}{r}\right) (-g_1^0 \sin^2 \theta + (g_1^1 \cos \Phi + h_1^1 \sin \Phi)(-\sin \theta \cos \theta) + \right. \\ & \left. \left(\frac{a^3}{2r^2}\right) (-3g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta + 3 \sin \theta (-3 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + (g_2^1 \cos \Phi + h_2^1 \sin \Phi) + \right. \\ & \left. 6 \sin^2 \theta \cos \theta (g_2^2 \cos 2\Phi + g_2^2 \sin 2\Phi) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'équation générale du champ corotationnel électrique est une équation paramétrique qui dépend des fonctions de Legendre et les paramètres de Gauss.

Remarquons qu'on a pu retrouver le cas de Störmer pour un dipôle magnétique, donc le travail de Dullin et al (2002), dans le cas $a^2 g_1^0 = 1$, qui représente un cas spécial de notre étude où en plus de d'un dipôle magnétique nous ajoutons l'effet d'un quadrupole magnétique (donné par g_2^0).

3.5.2 L'effet du terme quadrupolaire magnétique :

Dans un premier temps seul le terme proportionnel à g_2^0 a été pris en compte. Le champ corotationnel électrique est alors donné par :

$$\vec{E} = -\frac{q}{c} \Omega \vec{\nabla} \times \left[\frac{a^2}{r} (g_1^0 \sin^2 \theta) + \frac{a^3}{2r^2} (3g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta) \right] \quad (3.42)$$

L'Hamiltonien du système en coordonnées sphériques est donné comme :

$$H = \frac{1}{2} \frac{(p_r^2 + p_\theta^2)}{r^2} + U_{\text{eff}} \quad (3.43)$$

Où le potentiel effectif est présenté par l'équation :

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta + \sigma_r \delta \frac{a^2 g_1^0 \sin^2 \theta}{r} - \frac{\sigma_g}{r} + \sigma_r \delta \frac{3a^3 g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta}{2r^2} \quad (3.44)$$

En coordonnées sphériques :

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r) \right)$$

Il est utile de réduire l'écriture de la formule de l'Hamiltonien en coordonnée sphérique :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi})^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r)$$

(\hat{H} , \hat{p}_r^2 , \hat{p}_θ^2 sont équivalents à H , p_r^2 , p_θ^2 après la réduction de quelques paramètres)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{m^2 \dot{\Phi}^2 r^2 \sin^2 \theta}{2m} + U(r)$$

$$m^2 \dot{\Phi}^2 = (p_\phi - qA_\phi)^2 = \left(p_\phi - q \frac{M}{c} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \right)^2 = (p_\phi - \gamma \Psi)^2$$

(La fonction Ψ est donnée pour le cas dipolaire magnétique, mais dans le cas d'étude avec le terme quadripolaire magnétique on ajoute le terme convenable Ψ)

On a alors :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\theta^2}{r^2} \right) + \underbrace{\frac{(p_\phi - \gamma \Psi)^2 r^2 \sin^2 \theta}{2m}}_{U_{\text{eff}}} + U(r)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{(p_\phi - \gamma \Psi)^2}{\frac{2m}{r^2 \sin^2 \theta}} + U(r) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{p_\phi^2 - 2\gamma \Psi p_\phi + \gamma^2 \Psi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r)$$

Dans notre cas avec l'effet du terme quadripolaire magnétique :

$$\Psi = \frac{a^2 g_1^0 \sin^2 \theta}{r} + \frac{3a^3 g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta}{2r^2}$$

D'autre part on a les paramètres :

$$p = p_\Phi \frac{R\delta}{\gamma} \quad \text{Et} \quad \delta = \frac{\Omega\gamma}{m\mu}$$

Après avoir fait toutes les simplifications possibles on trouve alors :

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \left(\frac{p^2}{2r^2 \sin^2 \theta} - \frac{p\delta a^2 g_1^0}{r^3} - \frac{3p\delta a^3 g_2^0}{2r^4} \cos \theta + \frac{\delta^2 a^4 g_1^{02}}{2r^4} \sin^2 \theta + \frac{9\delta^2 a^6 (g_2^0)^2}{2r^4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{3a^5 \delta^2}{2r^5} g_1^0 g_2^0 - \frac{\sigma_g}{r} + \sigma_r \delta \frac{a^2 g_1^0}{r} \sin^2 \theta + \sigma_r \delta \frac{3g_2^0}{2r^2} \sin^2 \theta \cos \theta \right) \quad (3.45)$$

La fréquence orbitale est donnée par une formule qui dépend de la dérivée partielle de U_{eff} par rapport à p :

$$\omega(r, \theta) = \partial_p U_{\text{eff}} = \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\delta a^2 g_1^0}{r^3} - \frac{3\delta a^3 g_2^0}{2r^4} \cos \theta \quad (3.46)$$

La résolution de cette équation par rapport à p donne :

$$p = \omega r^2 \sin^2 \theta + \frac{\delta a^2 g_1^0 \sin^2 \theta}{r} + \frac{3\delta a^3 g_2^0}{2r^4} \cos \theta \sin^2 \theta \quad (3.47)$$

En substituant l'expression de p dans l'Hamiltonien on obtient :

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{\sigma_g}{r} + \sigma_r \delta \frac{a^2 g_1^0 \sin^2 \theta}{r} + \sigma_r \delta \frac{3a^3 g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta}{2r^2} \right) \quad (3.48)$$

Pour $g_2^0 = 0$ et $a^2 g_1^0 = 1$, on retrouve le problème habituel.

3.5.3 Recherche des orbites :

3.5.3.1- Les points critiques :

Définir les trajectoires circulaires pour le mouvement de la particule chargée correspond à définir les points d'équilibre du système :

$$\dot{r} = p_r \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2} \quad , \quad \dot{\Phi} = \partial_p U_{\text{eff}} \quad (3.49)$$

$$p_r = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \partial_r U_{\text{eff}} \quad , \quad p_\theta = -\partial_\theta U_{\text{eff}} \quad , \quad p_\Phi = 0 \quad (3.50)$$

Ceci est équivalent à identifier les points critiques (r_0, θ_0) du potentiel effectif U_{eff} donné par l'expression :

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta + \sigma_r \delta \frac{a^2 g_1^0 \sin^2 \theta}{r} + \sigma_r \delta \frac{3a^3 g_2^0 \sin^2 \theta \cos \theta}{2r^2} - \frac{\sigma_g}{r} \quad (3.51)$$

Les points critiques de U_{eff} sont les solutions du système d'équations :

$$\partial_r U_{\text{eff}} = -\omega^2 r \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} [a^2 g_1^0 \delta (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta + \sigma_g] + \frac{1}{r^3} [3\delta a^3 g_2^0 (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta \cos \theta] = 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta U_{\text{eff}} = & -\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{2a^2 g_1^0 \delta \omega \sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{2a^2 g_1^0 \delta \sigma_r \omega \sin \theta \cos \theta}{r} \\ & + \frac{3\delta a^3 g_2^0 (\sigma_r - \omega)}{r^2} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{3\delta a^3 g_2^0 (\omega - \sigma_r) \sin^3 \theta}{2r^2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donc, on a le système non linéaire de deux équations paramétriques suivant :

$$-\omega^2 r \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} [a^2 g_1^0 \delta (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta + \sigma_g] + \frac{1}{r^3} [3\delta a^3 g_2^0 (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta \cos \theta] = 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\sin \theta \cos \theta}{r^2} \left(\omega^2 r^4 + 2a^2 g_1^0 \delta \omega r - 2a^2 g_1^0 \delta \omega r \sigma_r - 3\delta a^3 g_2^0 (\sigma_r - \omega) \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{3\delta a^3 g_2^0 (\omega - \sigma_r) \sin \theta \tan \theta}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.5.3.2- Les orbites équatoriales :

Il est clair que l'équation (3.55) admet aussi la solution $\theta = \pi/2$ (en plus des deux solutions triviales 0 et π), comme dans le cas dipolaire, définissant les orbites équatoriales. En remplaçant dans l'équation (3.54), on remarque que le terme proportionnel à g_2^0 s'annule et l'équation se ramène à celle du cas dipolaire. Il en résulte que la prise en compte du terme quadrupolaire ne change pas les orbites équatoriales.

3.5.3.3- Les orbites halos :

Les orbites halos sont décrites par les solutions des équations :

$$Q(\theta, \omega, r) = 0 \quad \text{et} \quad A(\theta, \omega, r) = 0$$

Ce système détermine l'orbite halo $(\theta_0(\omega, \delta)$ et $r_0(\omega, \delta))$; on le résoud par substitution. La

fonction $Q(\theta, \omega, r)$ est donnée par:

$$Q(\theta, \omega, r) = \omega^2 r^4 + 2a^2 g_1^0 \delta \omega r - 2a^2 g_1^0 \delta r \sigma_r - 3\delta a^3 g_2^0 \sigma_r \cos\theta + 3\delta a^3 g_2^0 \omega \cos\theta - \frac{3\delta a^3 g_2^0 \omega \sin\theta \tan\theta}{2} + \frac{3\delta a^3 g_2^0 \sigma_r \sin\theta \tan\theta}{2} = 0 \quad (3.56)$$

La résolution de l'équation $Q(\theta, \omega, r) = 0$ par rapport à r donne quatre solutions $r = f(\theta, \omega, \delta)$, obtenues analytiquement moyennant Mathematica[35]. Ces solutions sont données en appendice 1 (pour $g_2^0 = 0$ ces solutions sont égaux à celles obtenues dans le cas dipolaire magnétique).

La fonction $A(\theta, \omega, r)$ est donnée par :

$$A(\theta, \omega, r) = -\omega^2 r \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} (a^2 g_1^0 \delta (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta + \sigma_g) + \frac{1}{r^3} (3\delta a^3 g_2^0 (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta \cos\theta) = 0 \quad (3.57)$$

En remplaçant les valeurs de r dans cette équation on obtient une nouvelle équation paramétrique dépendante de θ seulement. Sa résolution permet de déterminer la première caractéristique de l'orbite halo. Par la suite le rayon de l'orbite est obtenu grâce à la relation $r = f(\theta, \omega, \delta)$.

3.5.3.4 Les familles d'orbites à r constant et celle à θ constant :

i) Les familles d'orbites à r constant :

L'équation $Q = 0$, contient une dépendance angulaire. On élimine cette dépendance à partir de l'équation $A = 0$.

En utilisant Mathematica 7 on remarque que la solution analytique existe, mais elle est trop compliquée. On peut se contenter alors d'une solution approchée correspondante à $g_2^0 = 0$. Cette dernière est donnée par :

$$\theta = \pm \text{Arcsin} \left[\sqrt{\frac{\sigma_g}{\omega^3 r^3 + a^2 g_1^0 \delta (\sigma_r - \omega)}} \right] \quad (3.58)$$

On remplace alors cette expression dans l'équation $Q = 0$, on obtient alors la famille des courbes à r constant.

$$\begin{aligned}
Q(r, \omega) = & r^4 \omega^2 + 2r\delta(\omega - \sigma_r) \\
& + 3\delta q(\omega - \sigma_r) \left(\frac{\sigma_g}{2(-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta\sigma_r) \sqrt{1 - \frac{\sigma_g}{-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta\sigma_r}}} \right. \\
& \left. + \sqrt{1 - \frac{\sigma_g}{-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta\sigma_r}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

ii) Les familles d'orbites à θ constant :

De même l'équation $A = 0$ contient une dépendance en r , qui peut être éliminée à partir de $Q = 0$ (résolue par rapport à r , $r = f(\theta)$). En remplaçant on obtient les courbes à θ constant (On adoptera $a^2 g_1^0 = 1$, et on posera $q = a^3 g_2^0$)

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 r(\theta) \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2(\theta)} (\delta (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta + \sigma_g) + \\
& \frac{1}{r^3(\theta)} (3q\delta (\omega - \sigma_r) \sin^2 \theta \cos \theta) = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Pour aborder tout les cas possibles de Störmer, on va considérer les deux équations ci-dessus (3.59) et (3.60) comme des fonctions qui décrivent complètement les orbites halos après avoir fait-le développement en q).

-Cas rotationnel gravitationnel de Störmer($\sigma_g = \sigma_r = 1$)(r constant) :

$$\begin{aligned}
Q(r, \omega) = & r^4 \omega^2 + 2r\delta(\omega - 1) \\
& + 3\delta q(\omega - 1) \left(\frac{1}{2(-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta) \sqrt{1 - \frac{1}{-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta}}} \right. \\
& \left. + \sqrt{1 - \frac{1}{-\delta\omega + \omega^3 r^3 + \delta}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

-Cas rotationnel gravitationnel de Störmer($\sigma_g = \sigma_r = 1$)(θ constant) :

La résolution de $Q = 0$ par rapport à r conduit à quatre solutions $r = f(\theta)$ dont les expressions sont données dans l'appendice 2.

Donc la fonction $A(\theta, \omega)$ a quatre expressions possibles qui dépendent de r_1, r_2, r_3, r_4 solutions de l'équation suivante :

$$-\omega^2 r_{1,2,3,4} \sin^2 \theta + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^2} (\delta (\omega - 1) \sin^2 \theta + 1) + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^3} (3q\delta (\omega - 1) \sin^2 \theta \cos \theta) = 0 \quad (3.62)$$

-Cas gravitationnel de Störmer($\sigma_g = 1, \sigma_r = 0$) (r constant):

$$Q(r, \omega) = r^4 \omega^2 + 2r\delta\omega + 3\delta q\omega \left(\frac{1}{2(-\delta\omega + \omega^3 r^3) \sqrt{1 - \frac{1}{-\delta\omega + \omega^3 r^3}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{-\delta\omega + \omega^3 r^3}} \right) = 0 \quad (3.63)$$

-Cas gravitationnel de Störmer($\sigma_g = 1, \sigma_r = 0$)(θ constant) :

Les quatre expressions $r = f(\theta)$, obtenues dans ce cas, sont données dans l'appendice 3.

Donc la fonction $A(\theta, \omega)$ prend quatre expressions possibles qui dépendent de r_1, r_2, r_3, r_4 données comme suit :

$$A(\theta, \omega) = -\omega^2 r_{1,2,3,4} \sin^2 \theta + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^2} (\delta (\omega - 0) \sin^2 \theta + 1) + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^3} (3q\delta (\omega - 0) \sin^2 \theta \cos \theta) \quad (3.64)$$

-Cas classique de Störmer($\sigma_g = 0, \sigma_r = 0$) (r constant):

$$Q(r, \omega) = r^4 \omega^2 + 2r\delta\omega + 3\delta q\omega \quad (3.65)$$

-Cas classique de Störmer($\sigma_g = 0, \sigma_r = 0$) (θ constant):

$$A(\theta, \omega) = -\omega^2 r_{1,2,3,4} \sin^2 \theta + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^2} (\delta (\omega - 0) \sin^2 \theta + 0) + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^3} (3q\delta (\omega - 0) \sin^2 \theta \cos \theta) \quad (3.66)$$

-Cas rotationnel de Störmer ($\sigma_g = 0, \sigma_r = 1$) (r constant):

$$Q(r, \omega) = r^4 \omega^2 + 2r\delta(\omega - 1) + 3\delta q(\omega - 1) = 0 \quad (3.67)$$

-Cas rotationnel de Störmer ($\sigma_g = 0, \sigma_r = 1$) (θ constant)

$$A(\theta, \omega) = -\omega^2 r_{1,2,3,4} \sin^2 \theta + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^2} (\delta (\omega - 1) \sin^2 \theta + 0) + \frac{1}{r_{1,2,3,4}^3} (3q\delta (\omega - 1) \sin^2 \theta \cos \theta) = 0 \quad (3.68)$$

3-5-4 Les courbes :

1- Le cas rotationnel gravitationnel de Störmer :

i) La famille de courbes à r constant :

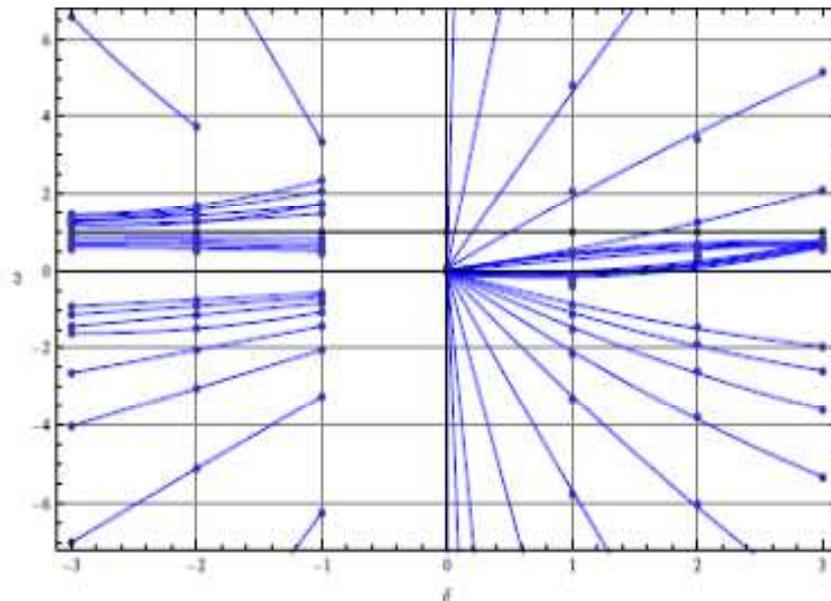


Figure 3.9 : Courbes d'orbites Halos pour r constant avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique(RGSP) (Résolution numérique) pour $q=1$

ii) La famille des courbes à θ constant :

Pour chaque solution $r = f(\theta)$ on obtient une expression pour A. Ces dernières, en nombre de quatre, sont données dans l'appendice 4.

2-Le cas rotationnel gravitationnel de Störmer :

i) La famille de courbes à r constant

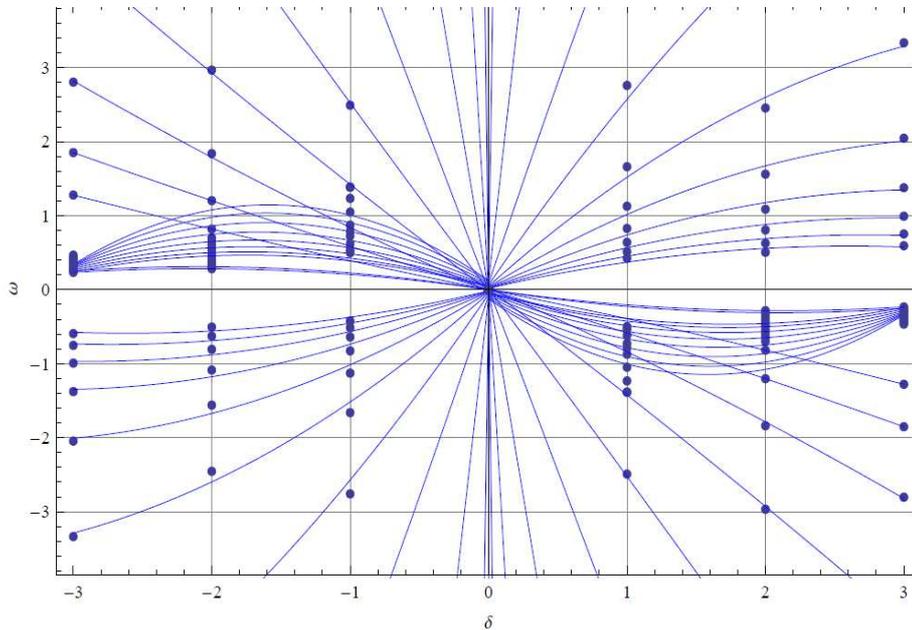


Figure 3.10 : Courbes d'orbites halos pour r constant avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique(GSP) pour $q=1$

ii) La famille de courbe à θ constant

On élimine la dépendance radiale pour avoir l'expression de la fonction $A(\theta, \omega)$ qui décrit les orbites halos à constant θ . Le rayon des orbites étant donné par quatre formes paramétriques il en résulte les formes de $A(\theta, \omega)$ données par l'appendice 4.

3-5-5- Discussion :

La vérification de l'existence des orbites halos avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique, dans le cadre du problème de Störmer, se fait à travers la résolution des fonctions paramétriques $Q = 0$ (représente la famille de courbe à r constant) et $A = 0$.

Dans notre investigation, pour le cas rotationnel gravitationnel de Störmer, la famille de courbes à r constant est obtenu par la résolution numérique de l'équation $Q = 0$ ce qui est similaire pour le cas gravitationnel de Störmer qui est caractérisé par l'absence du champ électrique.

Pour la famille de courbes à θ constant, comme il est un peu difficile de résoudre les équations A qui décrivent les orbites non équatoriales (halos), il est nécessaire de trouver une méthode pour arriver à certains résultats approximatifs pour voir l'intérêt physique lors de l'ajout du nouveau terme.

a) Développement en série à l'ordre zéro :

A l'aide de Mathematica(7), le développement en série à l'ordre zéro en q des équations (Voir appendice 5)) ce qui donne alors :

$A_1(\Theta, \omega) =$

$$\left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}} + \frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right) \text{Sin}[\Theta]^2}{\frac{5}{2\delta}} \right) + \frac{22^{\frac{2}{3}}(1+\delta(-1+\omega)\text{Sin}[\Theta]^2)}{2} \quad (3.69)$$

$A_2(\Theta, \omega) =$

$$\left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}} + \frac{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right) \text{Sin}[\Theta]^2}{\frac{5}{2\delta}} \right) + \frac{22^{\frac{2}{3}}(1+\delta(-1+\omega)\text{Sin}[\Theta]^2)}{2} \quad (3.70)$$

$A_3(\Theta, \omega)$

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) \text{Sin}[\Theta]^2 \\
 = & \left(\frac{2^{5/6}}{22^{2/3}(1 + \delta(-1 + \omega)\text{Sin}[\Theta]^2)} \right) + \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right)}{2} \dots (3.71)
 \end{aligned}$$

$A_4(\Theta, \omega)$

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} - \sqrt{\frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) \text{Sin}[\Theta]^2 \\
 = & \left(\frac{2^{5/6}}{22^{2/3}(1 + \delta(-1 + \omega)\text{Sin}[\Theta]^2)} \right) + \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} - \sqrt{\frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right)}{2} \dots (3.72)
 \end{aligned}$$

Après avoir fait toutes les simplifications possibles pour les quatre fonctions ci-dessus, on aboutit alors à:

$$A_1(\Theta, \omega) \text{ a comme solution } r = -\frac{(-2)^{1/3}(-\omega\delta+\delta)^{1/3}}{\omega^{2/3}} \text{ (Complexe)}$$

$$A_2(\Theta, \omega) \text{ a comme solution } r = \frac{2^{1/3}(-\omega\delta+\delta)^{1/3}}{\omega^{2/3}} \text{ (Le cas utilisé dans la littérature)}$$

$$A_3(\Theta, \omega) \text{ a comme solution } r = \frac{(-1)^{2/3}2^{1/3}(-\omega\delta+\delta)^{1/3}}{\omega^{2/3}} \text{ (Complexe)}$$

$$A_4(\Theta, \omega) \text{ a comme solution } r = 0$$

Tous ces cas représentent les orbites halos à Θ constant (ce qui est équivalent à l'étude habituel dans un dipôle magnétique). De même pour le cas gravitationnel de Störmer (eqts en appendice 5)

qui est caractérisé par la présence des forces gravitationnelles ($\sigma_g = 1, \sigma_r = 0$)

b) Développement d'ordre 1(RGSP et GSP):

Le développement à l'ordre 1 en q dans les deux cas RGSP et GSP sont donnés respectivement dans les appendices 6 et 7.

-Le cas classique de Störmer($\sigma_g = 0, \sigma_r = 0$) (r et θ constant):

-Comme les deux équations qui décrivent les orbites halos ont ($\omega = 0$) il en résulte que la charge peut être au repos dans n'importe quelle place au plan $\delta - \omega$.

-D'autre part, des points d'équilibres peuvent être représentés schématiquement (Fig. (3.11)), du fait que pour ($Q(r, \omega) = 0$) on a ($\omega = 0, \omega = \frac{-3\delta - 2r\delta}{r^4}$) .

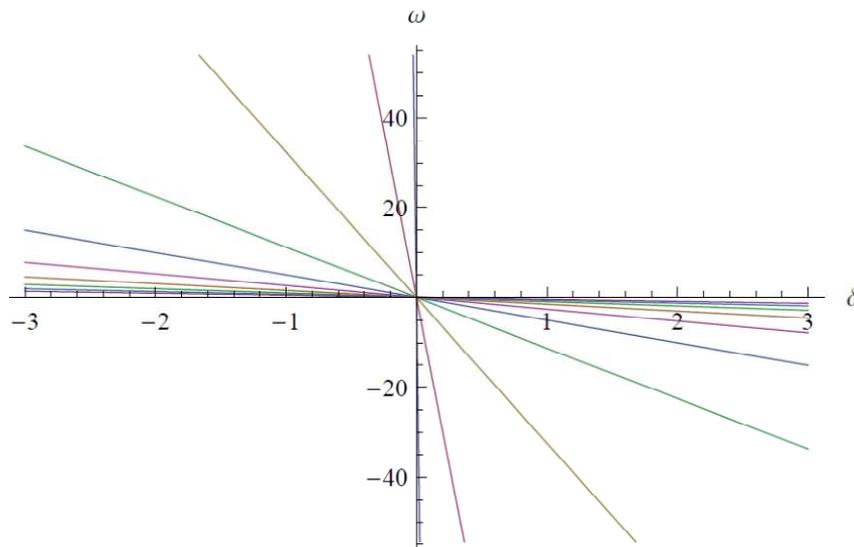


Figure 3.11 : Courbes pour r constant (points trivial) (CSP)

-Cas rotationnel de Störmer($\sigma_g = 0, \sigma_r = 1$) (r et θ constant):

La présence du champ électrique seul ne donne pas d'orbites halos, dans ces deux équations, il est évident que le champ électrique ne fait que déplacer la fréquence ω des orbites circulaires (fig 3.12).

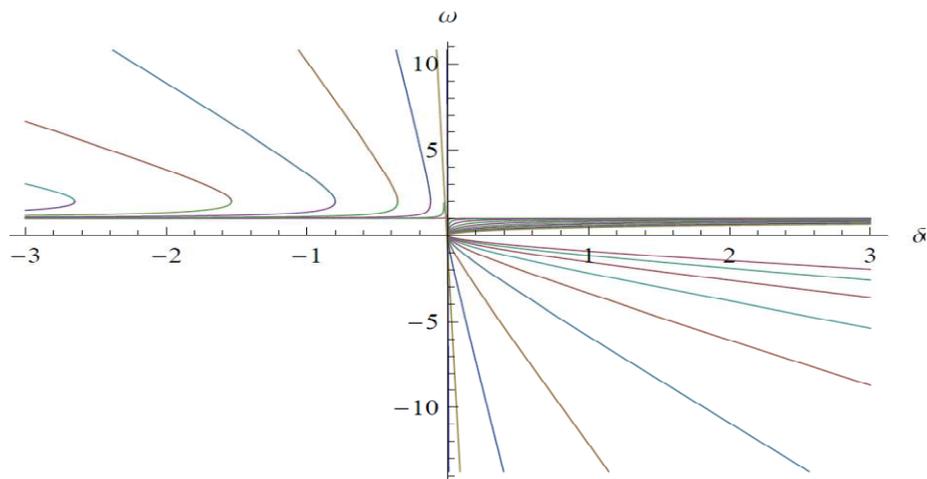


Figure 3.12: Courbes d'orbites à r constant pour avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique (RSP)

De même l'équation $A(\theta, \omega)$ admet $\theta = 0$ comme solution, ce qui ne permet pas l'existence des orbites halos ; aussi bien l'absence de la force gravitationnelle $\sigma_g = 0$.

3.5.6 Résultats et discussion

Dans ce travail, nous avons étudié l'effet du terme quadrupolaire magnétique dans le cadre du problème de Störmer, dans le but d'identifier les conditions d'équilibre pour des orbites sous l'influence des champs gravitationnel, magnétique et électrique corotationnel, paramétrisées par la charge δ et la fréquence orbitale ω .

Les calculs sont réalisés au moyen de Mathematica 7, prenant en compte les paramètres relatifs au nouveau terme ajouté ($q = a^3 g_2^0$) et le développement en q . Afin de reproduire le modèle traité par (Dullin et al, 2002), nous avons imposé $a^2 g_1^0 = 1$, et on a posé $q = a^3 g_2^0$ (g_1^0 et g_2^0 représentant les coefficients de Gauss).

Après avoir effectué le calcul indiqué pour décrire les orbites non équatoriales à travers la détermination des points critiques du potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r, \theta, \Phi)$, nous avons tracé la famille de courbes à r constant (dépendantes de la charge δ , la fréquence orbitale ω et du paramètre q dont la valeur a d'abord été choisi est égale à 1. Deux cas se sont présentés à nous (utilisant la résolution numérique) et nous avons obtenu les résultats suivants

1- Pour le cas (**RGSP**) la comparaison entre la famille des courbes à r constant pour les orbites halos avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique et celles de la littérature, montre que les résultats obtenus à l'aide de la résolution numérique donne de nouvelles trajectoires progrades (l'orbite est en rotation avec la même direction que la planète magnétisée) $\omega > 0$ et $\delta > 0$ et d'autres rétrogrades (pour $\omega < 0$ et $\delta < 0$), Il est clair que les orbites à r constant provenant du mouvement d'une charge dans dipôle magnétique apparaissent (même avec quelques petites modifications par rapport à celui de la littérature) (figure (3.9))

En revanche, il est impossible de comparer la famille de courbes à θ constant comme la résolution de l'équation qui décrit ces trajectoires a été difficile à résoudre (les orbites halos à r constant à θ constant existent évidemment).

2-Afin de voir l'intérêt physique du nouveau terme ajouté, même en résolution numérique des équations qui décrivent les orbites non équatoriales, nous avons comparé les deux cas où la valeur de q est respectivement faible et importante. Cette comparaison se résume ainsi:

- i) Pour q faible (Fig (3.13)), des trajectoires de nature progrades et rétrogrades s'exhibent pour charge positive, et rétrogrades pour celle négative ; avec quelques trajectoires à $\omega < 0$ et $\delta < 0$ (provenant de l'effet du quadrupole magnétique).
- ii) Pour une valeur importante de q , le grand changement sera sur les trajectoires rétrogrades pour

des charges positives.

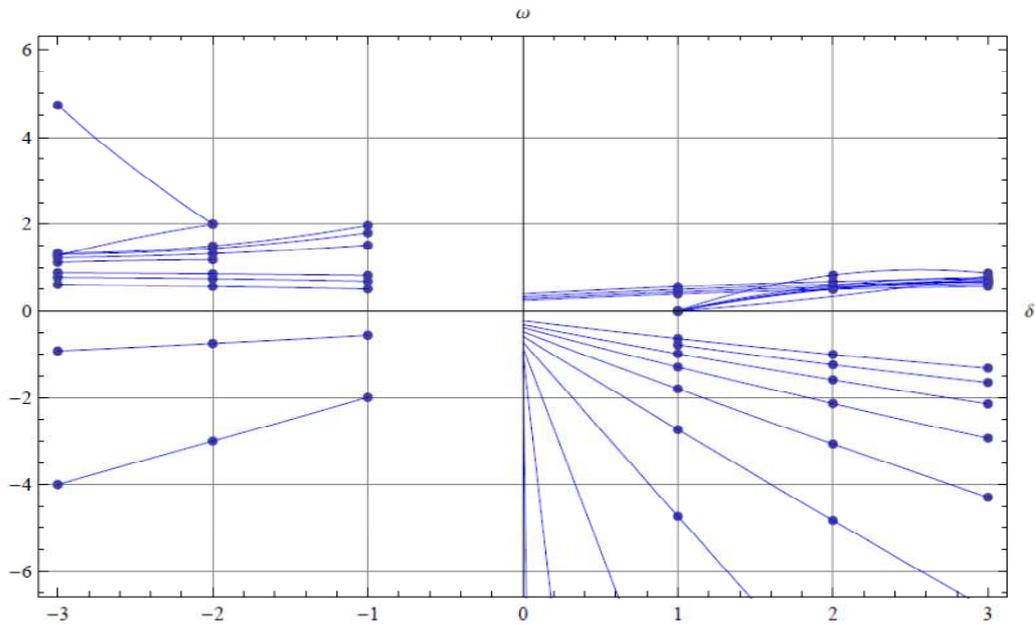


Figure 3.13: Famille de courbes à r constant pour $q=0.00001$ (faible contribution) dans le cas (RGSP)

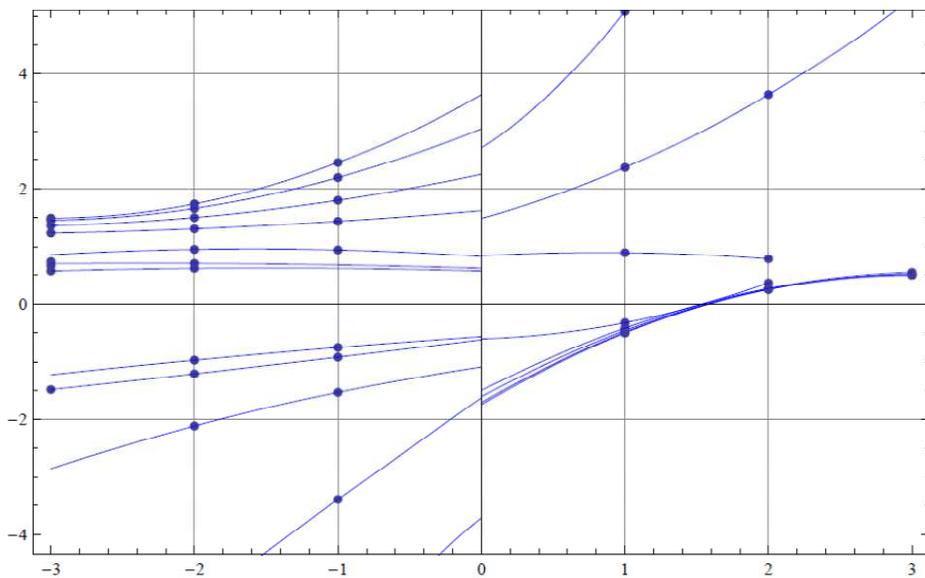


Figure 3.14 : Famille de courbes à r constant pour $q=10^5$ (forte contribution) dans le cas (RGSP)

3- Pour le cas (**GSP**), caractérisé par la présence des forces gravitationnelles ($\sigma_g = 1$) et l'absence du champ corotationnel électrique ($\sigma_r = 0$) ; d'après la comparaison entre le cas connu et le nouveau

cas, nous remarquons que de nouvelles orbites progrades pour $\omega > 0$ et $\delta > 0$ apparaissent, tandis que d'autres nouvelles orbites pour $\omega < 0$ et $\delta < 0$, effectivement des orbites pour charge positive avec d'autres rétrogrades de négative δ , et la description du mouvement de la charge dans un dipôle magnétique est importante, elles coexistent avec celles apportées à travers le nouveau paramètre quadrupolaire magnétique. Ce tracé a été fait grâce aux solutions numériques de ω prenant en compte toutes les simplifications possibles. Il est un peu difficile de faire le tracé des familles de courbe de r constant et θ constant pour les orbites halos mais la description analytique est donnée même sans la présence du champ corotationnel électrique ce qui implique que l'influence de la force gravitationnelle est importante pour l'existence des orbites halos.

4- Pour les deux autres cas on pourra dire que pour le cas *classique de Störmer* $\sigma_r = \sigma_g = 0$ dans lequel la particule est en mouvement dans un dipôle magnétique, introduire l'effet de q , n'apporte pas de modification dans l'interprétation de la non existence des orbites non équatoriales.

5- Pour le cas *rotationnel de Störmer* $\sigma_r = 1, \sigma_g = 0$ caractérisé par le champ corotationnel électrique dû à la rotation de la planète, un déplacement des fréquences orbitales des orbites halos θ constant, et comme la force gravitationnelle est nulle il n'existe pas d'orbites halos de r constant à θ .

6- Les figures (3.15) et (3.16) montrent respectivement l'influence d'une valeur faible et celle d'une valeur importante du paramètre proportionnel à l'effet du terme quadrupolaire magnétique. Avec la présence des forces gravitationnelles seules, en plus des orbites dans un dipôle magnétique on remarque de nouvelles trajectoires mais à faible contribution. En outre, plus le paramètre augmente plus le nombre des trajectoires sera faible par rapport au cas $q=1$, et tous les types de trajectoires pour les charges positives et négatives sont présentes.

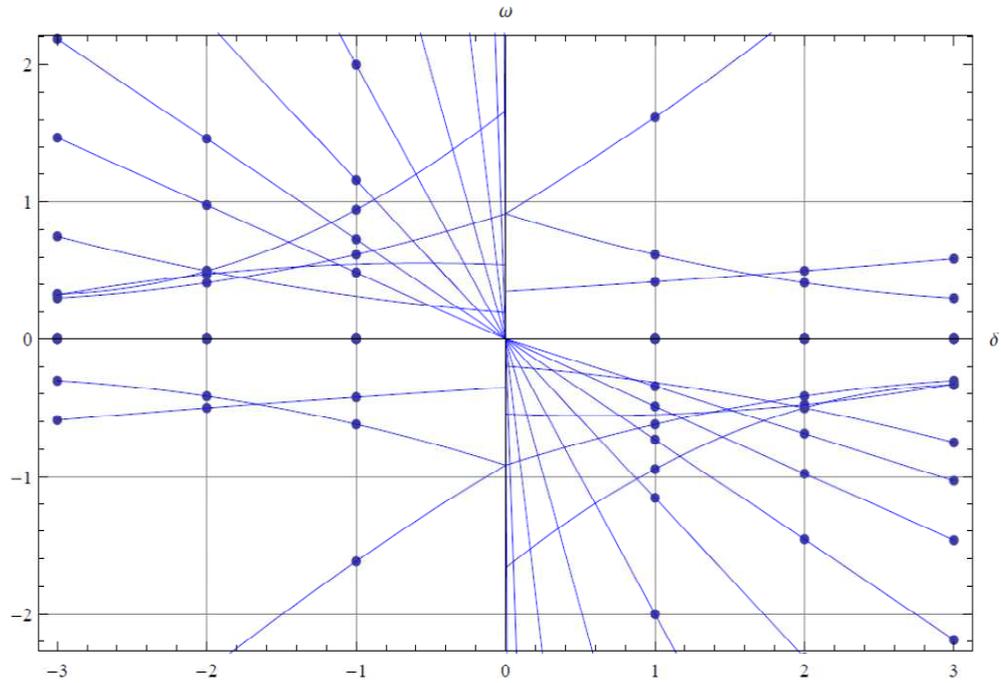


Figure 3.15 : Famille de courbes à r constant pour $q=0.00001$ (faible contribution) dans le cas (GSP)

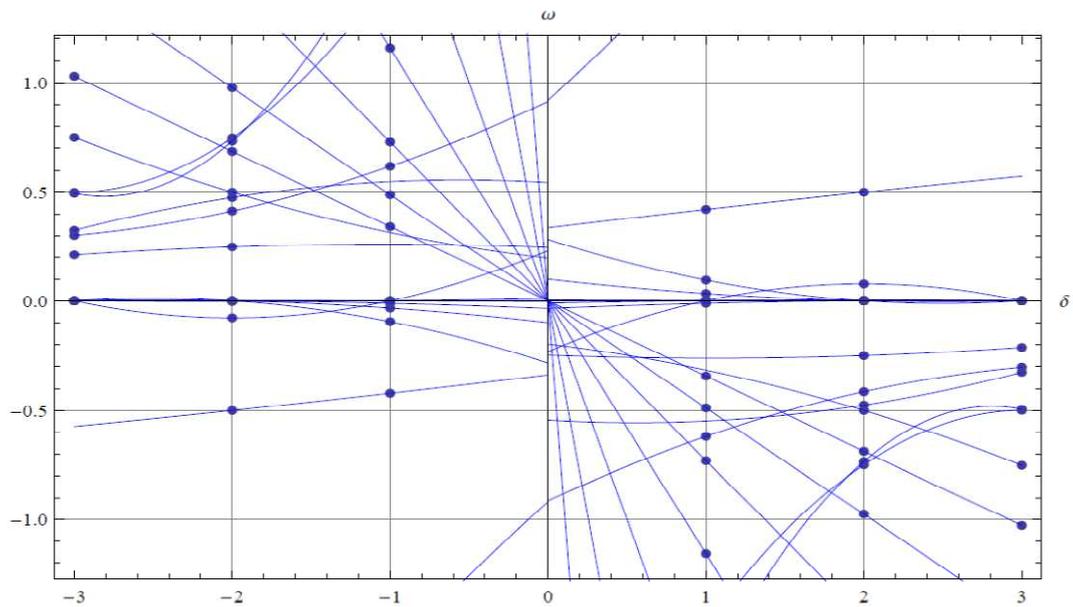


Figure 3.16 : Famille de courbes à r constant pour $q=10^5$ (forte contribution) dans le cas (GSP)

7-Dans ce genre de problème le traitement analytique a pu modéliser les trajectoires pour le grain chargé en mouvement dans un dipôle magnétique, les orbites équatoriales d'une part et celles

non équatoriales prenant en considération l'effet individuels des champs gravitationnels planétaires magnétique et corotationnels électriques. Mais Le traitement analytique avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique, restait difficile à obtenir (comme les fonctions qui décrivent les orbites équatoriales et halos dépendent toutes les deux de r et θ en même temps, sauf pour q faible qui ne représente pas un cas important).

8- D'autre part, l'ajout du nouveau terme n'a pas permis la vérification d'un résultat essentiel discuté dans le traitement de (Dullin et al 2002), donné par la possibilité de trouver des orbites halos dans la même région d'existence des orbites équatoriales dans les deux cas essentiels de Störmer (RGSP et GSP).

Finalement, nos principaux résultats sont:

1- Les forces gravitationnelles sont essentielles pour l'existence des orbites halos, et la présence du champ électrique corotationnel seul ne donne pas ce genre d'orbites.

2-De nouvelles orbites apparaissent avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique, contrairement au cas dipolaire magnétique qui exige la présence des orbites progrades positives qui sont absentes dans le cas(GSP), ce genre d'orbite existe même en absence du champ corotationnel électrique.

Conclusion Générale

Nous avons consacré ce travail à l'étude de la dynamique d'un grain de poussière, comme une importante composante du milieu interstellaire, près d'une planète magnétisée en rotation avec l'influence des champs gravitationnel et corotationnel électrique. Plusieurs aspects ont été abordés concernant ce vaste domaine de recherche en astrophysique.

Il a été principalement question de faire une généralisation du problème de Störmer. Le résultat obtenu pour le champ électrique corotationnel représente une expression plus générale, où le terme d'origine dipolaire coïncide avec le cas traité dans la littérature (avec $a^2 g_2^0 = 1$).

Nous avons réalisé les calculs qui décrivent la dynamique du système considéré, avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique. Les résultats obtenus montrent que les orbites équatoriales, avec l'effet du nouveau terme quadrupolaire, sont similaires au cas de la littérature (avec tout les cas possibles de Störmer).

Ensuite nous avons considéré l'étude des orbites halos, avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique. Les équations, ainsi obtenues, donnent la description des trajectoires de la charge en fonction de ω , qui sont différentes de celles de la littérature. Par conséquent, il est important de voir l'effet simultané et individuel sur le grain de poussière chargée. La présence de la force gravitationnelle ($\sigma_g = 1$) est essentielle pour l'existence des orbites halos, et le champ électrique corotationnel seul ne donne pas une trajectoire de ce genre. C'est ainsi que le cas classique ($\sigma_g = \sigma_r = 0$) et le cas rotationnel ($\sigma_g = 0, \sigma_r = 1$) sont exclus et l'étude à concerné les cas RGSP ($\sigma_g = \sigma_r = 1$) et GSP ($\sigma_g = 0, \sigma_r = 1$).

Le but de notre mémoire consiste à élargir nos connaissances dans l'étude de la dynamique d'un grain de poussière qui appartient à une magnétosphère d'une planète magnétisée en rotation avec l'effet du terme quadrupolaire magnétique. Nous constatons, malgré certaines difficultés de résolution analytique et numérique de certaines équations, que l'ajout du terme quadrupolaire magnétique avec la présence des champs gravitationnels et électriques corotationnel (simultanée

ou individuelle) décrit le mouvement du grain de poussière chargé par des orbites dans différentes régions.

Finalement, l'étude de la dynamique d'un grain de poussière chargé donne une vue globale pour les orbites, en ce qui concerne la nature des particules et les fréquences attendus à une distance donnée par rapport à la planète. Ce genre d'étude est important en astrophysique comme dans l'analyse de la structure et la composition des anneaux planétaires (saturne par exemple).

Comme perspectives, il est possible de faire une étude sur les conditions de la stabilité des orbites, d'ajouter en plus du terme quadrupolaire magnétique d'autres termes et pourquoi pas l'étude de la dynamique d'un grain de poussière dans un champ gravitationnel fort.

APPENDICES

Appendice 1 :

Solutions analytiques de l'équation $Q(\theta, \omega, r)=0$ (3.56)

La première solution :

$$\begin{aligned}
 r_1 = & \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/2}) \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[(864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r))^2 + (746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - (1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2]^{1/2}} \right) +} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} - \\
 & \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/2}) \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + (746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2]^{1/2}} \right) -} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} - \\
 & \frac{4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)}{12 \cdot 2^{1/2} \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)} + \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} \\
 & \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\left(\frac{4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)}{[(864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r))^2 \omega^2 + (746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2]^{1/2}} \right) +} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864 \omega^2 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2 \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2 \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

La deuxième solution :

$$\begin{aligned}
 r_2 = & \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/3} a^3 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta))}{\left[(864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right) +} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \omega^2} [864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \\
 & \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/3} a^3 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta))}{\left[(864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right) -} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \omega^2} [864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \\
 & \omega^2 \sqrt{\left(\frac{4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)}{12 \cdot 2^{1/3} a^3 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r) (2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)} + \frac{1}{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \omega^2} \right.} \\
 & \left. \sqrt{\left[(864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right.} \\
 & \left. \sqrt{(864 \omega^2 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496 \omega^4 (a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992 \omega^6 (2a^3 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \right)} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

La troisième solution :

$$\begin{aligned}
 r_3 = & -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/3} a^2 g_2^0 \delta(\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[(864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r))^2 + (746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2]^{1/2}}\right) +} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} - \\
 & \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/3} a^2 g_2^0 \delta(\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2]^{1/2}}\right) +} \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} - \\
 & \frac{4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)}{12 \cdot 2^{1/3} a^2 g_2^0 \delta(\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)} + \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} \\
 & \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\left(\frac{(746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}{(864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r))^2 \omega^2 + \sqrt{(746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}}\right) +} \\
 & [864\omega^2(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{(746496\omega^4(a^2 g_1^0 \omega \delta - a^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2a^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2a^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta) - a^3 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + a^3 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}]^{1/2} \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

La quatrième solution :

$$\begin{aligned}
 r_4 = & -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/2} \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[(864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 + (746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}\right)} + \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} + \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \\
 & \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(12 \cdot 2^{1/2} \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)}{[864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + (746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2}\right)} - \\
 & \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} [864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} + \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2} \\
 & \omega^2 \sqrt{\left(\frac{4(\alpha^2 g_0^1 \omega \delta - \alpha^2 g_0^1 \delta \sigma_r)}{12 \cdot 2^{1/2} \alpha^2 g_2^0 \delta (\omega - \sigma_r)(2 \cos \theta - \sin \theta \tan \theta)} + \frac{1}{6 \cdot 2^{1/2} \omega^2} \right)} \\
 & \left. \left([864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} - \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + [864\omega^2(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^2 \omega^2 + \sqrt{746496\omega^4(\alpha^2 g_1^0 \omega \delta - \alpha^2 g_1^0 \delta \sigma_r)^4 - 1492992\omega^6(2\alpha^2 g_2^0 \omega \delta \cos \theta - 2\alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \cos \theta)]^{1/2} + \alpha^2 g_2^0 \omega \delta \sin \theta \tan \theta + \alpha^2 g_2^0 \delta \sigma_r \sin \theta \tan \theta)^2 \right] \right. \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Appendice 2

Les solutions analytiques de l'équation $Q(\theta, \omega, r)=0$ (3.61)

Première solution :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{((122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &- \frac{1}{2} \sqrt{-(122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &- \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &- (4(-\delta + \delta \omega)) / (\omega^2 \sqrt{((122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Deuxième solution

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{((122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}}) \\
 &+ \frac{1}{2} \sqrt{(- (122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &- \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}}) \\
 &- (4(-\delta + \delta \omega)) / (\omega^2 \sqrt{((122^{\frac{1}{3}} q \delta (-1 + \omega) (2 \cos[\theta] - \sin[\theta] \tan[\theta])) \\
 &/ (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \frac{1}{62^{\frac{1}{3}} \omega^2} (864 \omega^2 (-\delta + \delta \omega)^2 \\
 &+ \sqrt{746496 \omega^4 (-\delta + \delta \omega)^4 - 1492992 \omega^6 (-2 q \delta \cos[\theta] + 2 q \delta \omega \cos[\theta] + q \delta \sin[\theta] \tan[\theta] - q \delta \omega \sin[\theta] \tan[\theta])^3})^{\frac{1}{3}})))
 \end{aligned}$$

Troisième solution

$$\begin{aligned} r_3 = & -\frac{1}{2}\sqrt{((122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} - \\ & \frac{1}{2}\sqrt{(-(122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} - \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} - \\ & (4(-\delta + \delta\omega))/(\omega^2\sqrt{((122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}})) \end{aligned}$$

Quatrième solution

$$\begin{aligned} r_4 = & -\frac{1}{2}\sqrt{((122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{2}\sqrt{(-(122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} - \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & (4(-\delta + \delta\omega))/(\omega^2\sqrt{((122^{\frac{1}{3}}q\delta(-1 + \omega)(2\text{Cos}[\theta] - \\ & \text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta]))/ \\ & (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}} + \\ & \frac{1}{62^{\frac{1}{3}}\omega^2} (864\omega^2(-\delta + \delta\omega)^2 + \\ & \sqrt{746496\omega^4(-\delta + \delta\omega)^4 - 1492992\omega^6(-2q\delta\text{Cos}[\theta] + 2q\delta\omega\text{Cos}[\theta] + q\delta\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] - q\delta\omega\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta])^3})^{\frac{1}{3}}))) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{122^{1/3}(2q\delta\omega\cos[\theta] - q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])}{\omega(864\delta^2\omega + \sqrt{746496\delta^4\omega^2 - 4(144q\delta\omega\cos[\theta] - 72q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])^3})^{1/3}} - \frac{(864\delta^2\omega + \sqrt{746496\delta^4\omega^2 - 4(144q\delta\omega\cos[\theta] - 72q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])^3})^{1/3}}{62^{1/3}\omega} + \frac{4\delta}{\omega} \right)} \sqrt{\frac{122^{1/3}(2q\delta\omega\cos[\theta] - q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])}{\omega(864\delta^2\omega + \sqrt{746496\delta^4\omega^2 - 4(144q\delta\omega\cos[\theta] - 72q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])^3})^{1/3}} + \frac{(864\delta^2\omega + \sqrt{746496\delta^4\omega^2 - 4(144q\delta\omega\cos[\theta] - 72q\delta\omega\sin[\theta]\tan[\theta])^3})^{1/3}}{62^{1/3}\omega}}$$

Appendice4

La famille de courbe à θ constant pour le cas RGSP

Appendice 6

Développement d'ordre 1 (RGSP) :

$$\begin{aligned}
 A_1(\theta, \omega) = & \left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right) \text{Sin}[\theta]^2}{2^{5/6} \left(\frac{22^{2/3} (1 + \delta(-1+\omega) \text{Sin}[\theta]^2)}{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^2} \right)} \right) + \frac{1}{8} \delta(-1 + \\
 & \omega) \left(\frac{96\sqrt{2} \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^2}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^3} \right) - \\
 & 16 \left(1 + \frac{2^{1/4} (\sqrt{2}\delta - \sqrt{2}\delta\omega + \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2})}{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}} \right) (1 + 3 \text{Cos}[2\theta]) \text{Sec}[\theta] (1 + \delta(-1+\omega) \text{Sin}[\theta]^2) \\
 & \left(\frac{-4\delta + 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^{3/2}} \right) \\
 & \left(\frac{\omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^{3/2}}{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^{3/2}} \right) \\
 & \left(\frac{\sqrt{2}(-1 + \frac{2^{1/4} (-\sqrt{2}\delta + \sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2})}{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}})} \right) (1 + 3 \text{Cos}[2\theta]) \text{Sin}[\theta] \text{Tan}[\theta] \\
 & \left(\frac{-4\delta + 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}} \right)^{3/2}} \right) \\
 & \left. \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2 \omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4 \omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2} \right) \Bigg) q + \\
 & O[q]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_2(\theta, \omega) \\
& \omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) \text{Sin}[\theta]^2 \\
& = \left(\frac{22^{2/3}(1 + \delta(-1 + \omega)\text{Sin}[\theta]^2)}{2^{5/6}} \right. \\
& \left. + \frac{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right)^2}{96\sqrt{2}\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta]^2} \right) \\
& + \frac{1}{8}\delta(-1 \\
& + \omega) \left(\frac{16(1 + \frac{2^{\frac{1}{4}}(-\sqrt{2}\delta + \sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}})}{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}} - \frac{-4\delta + 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) (1 + 3\text{Cos}[2\theta]) \\
& \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}{\omega^2} - \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) \\
& \sqrt{2}(-1 + \frac{2^{\frac{1}{4}}(\sqrt{2}\delta - \sqrt{2}\delta\omega + \omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}})}{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}} - \frac{-4\delta + 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right) (1 + 3\text{Cos}[2\theta]) \\
& + \frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}} \\
& + O[q]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_3(\theta, \omega) = \left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}} + \sqrt{\frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}\right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}}} \right)}{2^{\frac{5}{6}}} \right) \text{Sin}[\theta]^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{22^{\frac{2}{3}}(1+\delta(-1+\omega)\text{Sin}[\theta]^2)} + \frac{1}{8}\delta(-1 + \\
& \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}}{\omega^2} + \frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
& \omega) \left(\frac{-96\sqrt{2}\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta]^2}{3} + \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}}{\omega^2} + \frac{-2\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \left. \frac{1}{24} \left(\sqrt{2}\delta - \sqrt{2}\delta\omega + \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right) (1+3\text{Cos}[2\theta])\text{Sec}[\theta](1+\delta(-1+\omega)\text{Sin}[\theta]^2) \\
& 16 \left. \frac{-1+}{\left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} + \frac{4\delta - 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}}{\omega^2} + \frac{2\sqrt{2}\delta - 2\sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{\frac{1}{3}}}{\omega^2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
& \sqrt{2} \left(1 - \frac{2^{1/4}(-\sqrt{2}\delta + \sqrt{2}\delta\omega - \omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2})}{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}} \right) (1+3\text{Cos}[2\theta])\text{Sin}[\theta]\text{Tan}[\theta] \\
& \frac{4\delta - 4\delta\omega + \sqrt{2}\omega^2 \left(\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \right)^{3/2}}{\omega^2 \sqrt{\frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2}}} \\
& + \frac{(\delta^2(-1+\omega)^2\omega^2 + \sqrt{\delta^4(-1+\omega)^4\omega^4})^{1/3}}{\omega^2} \left. \right) q + \\
& O[q]^2
\end{aligned}$$

Appendice 7

Developpement a l'ordre 1 (GSP)

$$A_1(\Theta, \omega) =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} - \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right) \text{Sin}[\theta]^2}{2^{5/6}} + \right. \\ & \left. \frac{22^{2/3}(1 + \delta\omega \text{Sin}[\theta]^2)}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} + \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right)^2} \right) + \\ & \frac{\delta\omega \left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} (-\sqrt{2}\delta + (\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}) \left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} + \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right) \right) (1 + 3\text{Cos}[2\theta]) (-2 - \delta\omega + \delta\omega \text{Cos}[2\theta]) \text{Sec}[\theta]}{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}) \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} - \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right)^3} \\ & \frac{6\sqrt{2}\delta\omega \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[2\theta]}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} + \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right)^3} + \\ & \frac{\omega^2 \text{Sin}[\theta]^2 \left(\frac{4\delta\omega \sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} \text{Cos}[\theta]}{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}} - \frac{\delta(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2} - \sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3})^{3/2} (1 + 3\text{Cos}[2\theta]) \text{Sec}[\theta]}{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{4/3}} + \frac{2\delta\omega \sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} \text{Sin}[\theta] \text{Tan}[\theta]}{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}} \right)}{4\sqrt{2}} \right) q + \\ & 0[q]^2 \end{aligned}$$

$$A_2(\Theta, \omega) =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2 \left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} + \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right) \text{Sin}[\theta]^2}{2^{5/6}} + \right. \\ & \left. \frac{22^{2/3}(1 + \delta\omega \text{Sin}[\theta]^2)}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{1/3}}{\omega}} + \sqrt{\frac{-\delta^2 \omega - \sqrt{\delta^4 \omega^2} - 2\sqrt{2}\delta\omega^2 \left(\frac{\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2 \omega + \sqrt{\delta^4 \omega^2})^{2/3}}} \right)^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{22^{2/3}(1+\delta\omega\sin[\theta]^2)}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}} \sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}+2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}} \right)^2} \right) + \\
& \frac{\delta\omega\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}}(\sqrt{2}\delta+(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3})\left(\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}}+\sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}-2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}}\right)(1+3\cos[2\theta])(-\delta\omega+\delta\omega\cos[2\theta])\sec[\theta]}{\left(\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})\sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}-2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}}\left(\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}}-\sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}-2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}}\right)^3} \right) + \\
& \frac{6\sqrt{2}\delta\omega\sin[\theta]\sin[2\theta]}{\left(\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}} \sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}+2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}} \right)^3} + \\
& \frac{\omega^2\sin[\theta]^2\left(-\frac{4\delta\omega\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}}\cos[\theta]}{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}+\frac{\delta\left(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}+\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}\right)^{3/2}}{\omega}\right)(1+3\cos[2\theta])\sec[\theta]}{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{4/3}}+\frac{2\delta\omega\sqrt{\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{1/3}}{\omega}}\sin[\theta]\tan[\theta]}{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}}{\left(\frac{(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{4/3}\sqrt{\frac{-\delta^2\omega-\sqrt{\delta^4\omega^2}-2\sqrt{2}\delta\omega^2\left(\frac{\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2}\right)^{1/3}}{\omega}\right)^{3/2}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}}}}{\omega(\delta^2\omega+\sqrt{\delta^4\omega^2})^{2/3}} \right)} \right)q + \\
& 0[q]^2
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] G. Callejo, Thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise ,Paris (2004).
- [2] J. Lequeux, Le milieu interstellaire, EDP Science (2002).
- [3] C. Davoisine, Thèse de Doctorat, Université de Lille (2006).
- [4] K.S. Krishna Swamy, Dust in the Universe similarities and differences, World Scientific Publishing (2005).
- [5] N.S. Schulz, From Dust to Stars, Praxis Publishing (2005).
- [6] A.G.G.M. Tielens, The physics and chemistry of the interstellar medium, Cambridge University Press (2005).
- [7] D. Whittet, Dust in the Galactic Environment, Institute of physics publishing (2003).
- [8] A. Li, arXiv: astro-ph/0204392v1.
- [9] D. Paradis, Thèse de doctorat, Université de Toulouse (2007).
- [10] B .Savage et al. Annu. Rev. Astron. Astrophys.17, 73 (1979).
- [11] A. Li, arXiv: astro-ph/0311066v1.
- [12] C. Bot, Thèse de Doctorat, Université de Louis Pasteur (2005).
- [13] R. Monier, Les étoiles et le milieu interstellaire, Ellipses Marketing (2006)
- [14] D. Flower, Molecular Collisions in the Interstellar Medium, Cambridge University Press (2007).
- [15] J.E. Dyson, D.A. Williams, The physics of the interstellar medium, Institute of physics Publishing (1997).
- [16] P.K. Shukla, A.A. Mamun, Introduction to dusty plasma physics, Institute of physics publishing (2002).
- [17] [http : //www.luth.obspm.fr/](http://www.luth.obspm.fr/).
- [18] L. Spitzer, Physical processes in the Interstellar Medium, Die Deutsche Bibliothek (2004).
- [19] H.C. Van de Hulst, Light scattering by small particles, Dover Publication (1981).
- [20] M. Carmeli, General relativity and gauge theory, A wiley-Interscience Publication (1982).

- [21] I.B. Khriplovich, General Relativity, Springer Science and Business Media, Inc (2005).
- [22] W. D. McGlinn, Introduction to the relativity, The Johns Hopkins University Press (2003).
- [23] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The classical theory of fields, Oxford (1971).
- [24] K. Annou, Mémoire de magistère, Université d'Alger (2007).
- [25] R. Dilao, R. Alves-Pires, arXiv : 0704.3250v1.
- [26] P .Lonzano, Astrophysics and Space Science. 319, 333 (1968).
- [27] M. Inarrea et al. Chaos, Solitons and Fractals (2008), doi : 10.1016/j.chaos.2008.11.016.
- [28] H.R. Dullin et al., PhysicaD. 171, 195 (2002).
- [29] H.R. Dullin et al., arXiv : nlin/0104051v1.
- [30] M. Fisli, Mémoire de Magister, Université de Batna (2007).
- [31] S. Hledik,J. Stuchlik,Workshop on black holes and neutron stars, Silesian University in Opava,September 16-18/18-20 (2004-2005).
- [32] J. Kovar et al., *Class. Quantum Grav.* **25** 1(2008).
- [33] J.E. Howard et al., Phys. Rev. Lett. 84, 3244 (2000).
- [34] J.E. Howard et al., Phys. Rev. Lett. 83, 3993 (1999)
- [35] H. Alfven, Cosmical Electrodynamics, Oxford University Press (1953).
- [36] S .Hassani, Using mathematica: for students of physics and related fields, Springer (2001).

Abstract

The interstellar medium (ISM) is the material which fills the space between stars, it plays an important role in astrophysics, because it represents the intermediate between stars and galaxies, composed mostly of gas and dust, which gives a lot of physical and chemical properties of this medium.

By the fact of the generalization of the Störmer problem which is related to the dynamics of charged dust grains near a magnetized planet, we have success to extend the expression of magnetic field by adding to the dipolar term treated in the literature, the effect of the magnetic quadrupolar term, and discuss the existence of orbits, and make the comparison with the Störmer case, which give more physical interpretations for the motion of dust grains, as an important component of the interstellar medium.

Key-words: ISM, dust grains, Störmer, orbits, magnetic quadrupole.

ملخص:

الوسط البين نجمي يمثل المادة التي تملأ الفضاء بين النجوم, إذ يلعب دورا هاما في الفيزياء الفلكية لأنه يعتبر الوسيط بين النجوم والمجرات, متكون على العموم من الغاز و الغبار اللذان يعطيان الكثير من الخصائص الفيزيائية و الكيميائية لهذا الوسط.

عن طريق التحصل على تعميم لإشكالية ستورمر التي لها علاقة بديناميكية ذرات الغبار المشحونة والمتواجدة بمحاذاة كوكب ذو طبيعة مغناطيسية, استطعنا عن طريق هذا التعميم على نشر عبارة الحقل المغناطيسي بإضافة إلى الحد ثنائي القطب المغناطيسي المعروف و المدروس سابقا, اثر الحد رباعي القطب المغناطيسي, بهدف مناقشة وجود مدارات بالمقارنة مع حالة ستورمر, مما يؤدي إلى إعطاء الكثير من التفسيرات الفيزيائية لحركة ذرات الغبار على أساس أنها من أهم مكونات الوسط البين نجمي.

الكلمات المفتاحية: الوسط البين نجمي, ذرات الغبار, ستورمر, مدارات, رباعي القطب المغناطيسي

Résumé :

Le milieu interstellaire (MIS) est la matière qui remplit l'espace entre les étoiles. Il joue un rôle important en astrophysique, puisque il représente l'intermédiaire entre les étoiles et les galaxies .Il est composé la plupart du temps du gaz et de la poussière, qui donnent beaucoup de propriétés physiques et chimiques de ce milieu.

Nous avons généralisé le problème de Störmer, relatif à la dynamique d'un grain de poussière chargés au voisinage d'une planète magnétisée, en étendant l'expression du champ magnétique en ajoutant a l'effet du terme dipolaire, traité dans la littérature, celui du terme quadrupolaire magnétique. Par la suite nous avons discuté l'existence des orbites, et faire la comparaison avec le cas de Störmer, ce qui donnent des interprétations physiques pour le mouvement des grains de poussières, comme étant un important composant du milieu interstellaire.

Mots-clefs : Milieu interstellaire, les grains de poussières, problème de Störmer, terme quadrupolaire magnétique, orbites.