

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE  
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE  
MAGISTER  
EN PHYSIQUE  
SPECIALITE : PHYSIQUE QUANTIQUE  
THEME

Etude de certains systèmes quantiques par l'approche de la  
supersymétrie

Par

Hafida MOULLA

Soutenu le 20/12/2012

**devant le Jury :**

Président :	F. Benamira	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Rapporteur :	L. Guechi	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Examineurs :	O. Benabbes	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
	S. R. Zouzou	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Supersymétrie en mécanique quantique</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Formulation de la supersymétrie . . . . .	6
1.3 Hamiltoniens partenaires . . . . .	7
1.4 Hiérarchie d' Hamiltoniens partenaires supersymétriques . . . . .	9
1.5 Invariance de forme . . . . .	10
1.5.1 Définition . . . . .	10
1.5.2 Spectre et fonctions d'onde des états liés associés à l'Hamiltonien $H_1$	11
<b>2 Etats liés d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vecteur du type Eckart</b>	<b>14</b>
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Application de la supersymétrie . . . . .	15
2.3 Résolution de l'équation aux valeurs propres . . . . .	17
<b>3 L'atome d'hydrogène dans un espace courbe de constante de courbure positive</b>	<b>21</b>
3.1 Introduction . . . . .	21
3.2 Equation de Schrödinger . . . . .	22

3.3	Supersymétrie et invariance de forme . . . . .	24
3.4	Fonctions d'onde . . . . .	27
<b>4</b>	<b>L'atome d'hydrogène dans un espace hyperbolique</b>	<b>30</b>
4.1	Introduction . . . . .	30
4.2	Equation de Schrödinger . . . . .	31
4.3	Supersymétrie et invariance de forme . . . . .	33
4.4	Fonctions d'onde des états liés . . . . .	37
4.5	L'atome d'hydrogène dans l'espace plat . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Equation de Dirac avec des potentiels vecteur et scalaire plus un po-</b>	
	<b>tentiel tenseur</b>	<b>42</b>
5.1	Introduction . . . . .	42
5.2	Equation de Dirac . . . . .	43
5.3	Limite de la symétrie de spin . . . . .	46
5.4	Limite de la symétrie de pseudospin . . . . .	51
	<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# Introduction

Depuis la fondation de la mécanique quantique au début du siècle dernier, un développement considérable est réalisé dans la construction de modèles de potentiels pour décrire des interactions nucléaires en physique nucléaire ou des interactions interatomiques en physique atomique ou moléculaire et en chimie quantique grâce à de nombreuses méthodes de résolution des équations d'onde employées dans le cadre non relativiste ou dans un contexte relativiste. Parmi ces méthodes, la supersymétrie a vu le jour récemment et en peu de temps, elle est devenue un outil mathématique utilisé dans plusieurs branches de la physique. En mécanique quantique, la supersymétrie s'appuie sur la méthode de factorisation introduite d'abord par Schrödinger [1] pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène et développée plus tard par Infeld et Hull [2]. La généralisation de cette méthode leur a permis d'obtenir une vaste classe de potentiels solubles exactement. Le formalisme de la supersymétrie en mécanique quantique comprenant le concept d'invariance de forme introduit par Gendenshtein [3] en 1983 permet de déterminer les spectres d'énergie et les fonctions d'onde des potentiels solubles analytiquement. Notons qu'un des avantages de ce formalisme réside dans la possibilité de construire de nouveaux potentiels solubles algébriquement.

L'objet de ce travail concerne une présentation simplifiée de la supersymétrie en mécanique quantique et son application à un ensemble de quatre systèmes dynamiques intéressant la physique théorique.

Ce mémoire comporte cinq chapitres. Le chapitre 1 est consacré à un rappel succinct de la formulation de la supersymétrie en mécanique quantique en insistant particulière-

ment sur la méthode de factorisation et la condition d'invariance de forme avec translation des paramètres qui nous permettent de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde du système quantique en question. Le chapitre 2 concerne un commentaire sur le traitement du problème des états liés d'une particule chargée en présence d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur égaux et dont la forme est celle de Eckart. En justifiant l'impraticabilité de l'approche de la supersymétrie à ce type de problème (avec les conditions aux limites de Dirichlet), nous présentons sa solution dans le cadre de la méthode standard. Nous donnons le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'onde corrects. Dans les chapitres 3 et 4, nous étudions à l'aide de la méthode de la supersymétrie le problème de l'atome d'hydrogène dans deux espaces courbes. Le premier est un espace sphérique qui est caractérisé par une constante de courbure positive et le second est un espace hyperbolique dont la constante de courbure est négative. Nous donnerons les différents spectres d'énergie ainsi que les fonctions d'onde correspondantes. Enfin, le chapitre 5 traite le problème d'une particule chargée de spin  $\frac{1}{2}$  en présence d'un potentiel vecteur et un potentiel scalaire de type harmonique à trois dimensions plus un potentiel tenseur constitué d'un potentiel coulombien et d'un terme linéaire. Il s'agit là de présenter une discussion détaillée dans le cadre de la supersymétrie des états liés de la particule de Dirac dans le cas de la symétrie de spin puis sous la condition de la symétrie de pseudospin.

# Chapitre 1

## Supersymétrie en mécanique quantique

### 1.1 Introduction

La supersymétrie (SUSY) est une symétrie introduite au début des années 1970 d'abord en physique des hautes énergies comme une tentative pour obtenir une description unifiée des interactions de base. En physique des particules, Miyazawa [4] était le premier à suggérer un procédé d'unification possible pour des mésons et des baryons basé sur une superalgèbre caractérisée par une combinaison de relations de commutation et d'anticommutation d'opérateurs. C'est une symétrie entre bosons et fermions [5, 6, 7]. Chaque boson a un superpartenaire qui est un fermion et inversement. Depuis cette date, elle était devenue un concept algébrique utilisé dans de nombreuses théories telles que la théorie des champs [8, 9], la théorie des cordes [10, 11] et la théorie de la relativité générale. En mécanique quantique, la supersymétrie peut être considérée comme un procédé mathématique qui permet de construire de nouvelles formes de potentiels solubles analytiquement. La base du développement de la mécanique quantique supersymétrique (MQSUSY) est la méthode de factorisation de Schrödinger [1].

## 1.2 Formulation de la supersymétrie

Du point de vue de Schrödinger, la supersymétrie en mécanique quantique peut être décrite par une paire d'Hamiltoniens bosoniques. Elle consiste à exprimer l'Hamiltonien à une dimension

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (1.1)$$

d'une particule de masse  $M$  sous la forme d'un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre. De l'équation de Schrödinger relative à l'état fondamental

$$H_1 \Psi_0(x) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \right] \Psi_0(x) = 0, \quad (1.2)$$

où  $V_1(x) = V(x) - E_0$ , il est très facile de factoriser l'Hamiltonien  $H_1$  comme suit :

$$H_1 = A^+ A, \quad (1.3)$$

avec

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.4)$$

et

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (1.5)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $A^+$  et  $A$  sont une généralisation des opérateurs de création et d'annihilation utilisés lors de l'étude de l'oscillateur harmonique ordinaire.  $A^+$  et  $A$  dépendent du potentiel  $V(x)$  et de l'énergie  $E_0$  du niveau fondamental. Ils sont adjoints l'un de l'autre. En tenant compte de (1.2) et (1.3), la fonction  $W(x)$  doit satisfaire l'équation

$$W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} W'(x) = V(x) - E_0. \quad (1.6)$$

Cette équation non linéaire est l'équation de Riccati bien connue où  $W'(x) = \frac{d}{dx} W(x)$ . La quantité  $W(x)$  est une fonction réelle appelée potentiel supersymétrique [14, 15] ou

“superpotentiel” en MQSUSY.

En utilisant les définitions (1.3) et (1.4) et l'équation (1.2), on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$A\Psi_0(x) = \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \Psi_0(x) = 0. \quad (1.7)$$

Cette équation permet de déterminer le superpotentiel  $W(x)$  à partir de la donnée de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\Psi_0(x)$ , c'est à dire :

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)}. \quad (1.8)$$

Réciproquement, la donnée du superpotentiel permet d'obtenir la fonction d'onde de l'état fondamental ainsi :

$$\Psi_0(x) = \Psi_0^{(1)}(x) = N_0 \exp \left[ -\frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int^x W(x') dx' \right], \quad (1.9)$$

où  $\Psi_0^{(1)}(x)$  est la fonction propre de  $H_1$  supposée de carré sommable et  $N_0$  est un facteur de normalisation.

D'après l'équation (1.2), on a

$$H_1 \Psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)} \Psi_0^{(1)}(x) = 0. \quad (1.10)$$

Il résulte que l'énergie de l'état fondamental a pour valeur :

$$E_0^{(1)} = 0. \quad (1.11)$$

### 1.3 Hamiltoniens partenaires

Par rapport à l'Hamiltonien  $H_1 = A^+A$ , on peut changer l'ordre d'écriture des opérateurs  $A^+$  et  $A$  pour définir l'Hamiltonien  $H_2 = AA^+$  qui correspond en fait à un nouveau

potentiel  $V_2(x)$ . Autrement dit,  $H_2$  peut s'écrire

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad (1.12)$$

où

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} W'(x). \quad (1.13)$$

Les potentiels  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont des potentiels partenaires supersymétriques et par conséquent  $H_1$  et  $H_2$  sont des Hamiltoniens partenaires supersymétriques. Pour établir le lien entre les valeurs propres et les fonctions propres de  $H_1$  et  $H_2$ , notons d'abord que leurs valeurs propres sont

$$E_n^{(1,2)} \geq 0. \quad (1.14)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} H_2 (A\Psi_n^{(1)}(x)) &= AA^+ A\Psi_n^{(1)}(x) \\ &= AH_1 \Psi_n^{(1)}(x) \\ &= E_n^{(1)} A\Psi_n^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

et aussi

$$\begin{aligned} H_1 (A^+\Psi_n^{(2)}(x)) &= A^+ AA^+ \Psi_n^{(2)}(x) \\ &= AH_2 \Psi_n^{(2)}(x) \\ &= E_n^{(2)} A^+ \Psi_n^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Les équations (1.15) et (1.16) signifient que  $A\Psi_n^{(1)}(x)$  est une fonction propre de  $H_2$  pour la valeur propre  $E_n^{(1)}$  et  $A^+\Psi_n^{(2)}(x)$  est une fonction propre de  $H_1$  pour la valeur propre  $E_n^{(2)}$ . A partir de ces relations, on en déduit que les valeurs propres et les fonctions propres

des Hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  sont reliées de la manière suivante :

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}; \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (1.17)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \sqrt{E_{n+1}^{(1)}} A \Psi_{n+1}^{(1)}(x), \quad (1.18)$$

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{E_n^{(2)}} A^+ \Psi_n^{(2)}(x). \quad (1.19)$$

On voit donc qu'il est possible de déterminer les fonctions propres de  $H_2$  par application de l'opérateur  $A$  sur celles de  $H_1$  et vice-versa par application de l'opérateur  $A^+$  à l'exception de la fonction d'onde de l'état fondamental qui ne possède pas de partenaire supersymétrique. On remarque que l'opérateur  $A$  (respectivement  $A^+$ ) transforme non seulement une fonction propre de  $H_1$  (respectivement de  $H_2$ ) en une fonction propre de  $H_2$  (respectivement de  $H_1$ ) avec la même énergie, mais il annihile (créé) aussi un noeud dans la fonction propre. La fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_1$  est annihilée par l'opérateur  $A$ .

## 1.4 Hiérarchie d' Hamiltoniens partenaires supersymétriques

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il est possible de déterminer  $H_2$  à partir de  $H_1$  (voir Eq. (1.13)). Nous pouvons ensuite refactoriser  $H_2$  pour obtenir son partenaire  $H_3$ , puis refactoriser  $H_3$  pour définir  $H_4$ , et ainsi de suite. Dans le classement des Hamiltoniens  $H_2, H_3, H_4, \dots$ , chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent. Si l'Hamiltonien de départ  $H_1$  a un nombre  $p$  d'états liés, aux valeurs propres  $E_n^{(1)}$  et aux fonctions propres  $\Psi_n^{(1)}$  avec  $0 \leq n \leq p-1$ , alors nous pouvons toujours générer une hiérarchie de  $(p-1)$  Hamiltoniens  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_p$  telle que  $H_m$  (où  $m = 2, 3, \dots, p$ )

a le même spectre de valeurs propres que  $H_1$ , à l'exception que  $H_m$  n'a pas les  $(m - 1)$  premières valeurs propres de  $H_1$  [16, 17]. Pour  $2 \leq m \leq p$ , l'Hamiltonien  $H_m$  s'écrit

$$\begin{aligned} H_m &= A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_m(x), \end{aligned} \quad (1.20)$$

où

$$A_m = \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad (1.21)$$

et

$$W_m(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} \ln \left( \Psi_0^{(m)} \right). \quad (1.22)$$

On a aussi

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \quad (1.23)$$

$$\Psi_n^{(m)} = \left( E_{n+m-1}^{(1)} - E_{n-1}^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left( E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \Psi_{n+m-1}^{(1)}, \quad (1.24)$$

et

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \right)^{m-1} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(1)} \dots \Psi_0^{(m-1)} \right). \quad (1.25)$$

Connaissant toutes les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien  $H_1$ , ces équations nous permettent de déterminer immédiatement toutes les valeurs propres et les fonctions propres de la hiérarchie des  $(p - 1)$  Hamiltoniens.

## 1.5 Invariance de forme

### 1.5.1 Définition

Si deux potentiels partenaires supersymétriques  $V_1$  et  $V_2$  définis par :

$$V_1(x; a_1) = W^2(x; a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} W'(x; a_1), \quad (1.26)$$

et

$$V_2(x; a_1) = W^2(x; a_1) + \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} W'(x; a_1), \quad (1.27)$$

ont la même forme et s'ils ne diffèrent que par certains paramètres, on dit qu'ils sont invariants de forme.  $a_1$  est un ensemble de paramètres. Autrement dit, si les potentiels  $V_1(x; a_2)$  et  $V_2(x; a_1)$  satisfont la condition

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (1.28)$$

où  $a_2$  est un nouvel ensemble de paramètres reliés aux paramètres  $a_1$  par une certaine fonction  $f(a_1)$  et  $R(a_1)$  est une fonction indépendante de  $x$ , appelée reste, alors ils sont invariants de forme.

### 1.5.2 Spectre et fonctions d'onde des états liés associés à l'Hamiltonien $H_1$

Pour montrer que le spectre d'énergie de l'Hamiltonien  $H_1$  peut être obtenu algébriquement à partir de (1.28), on commence par construire une suite d'Hamiltoniens  $H_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ). Sachant que  $H_1$  a  $p$  états liés, on peut construire  $p$  Hamiltoniens  $H_1, H_2, \dots, H_p$  et que le  $n^{\text{ième}}$  Hamiltonien  $H_n$  a le même spectre d'énergie que  $H_1$  (les  $n - 1$  premiers niveaux d'énergie de  $H_1$  ne font cependant pas partie de ceux de  $H_n$ ). Par application répétée de la condition d'invariance de forme (1.28), on voit qu'on peut écrire  $H_s$  sous la forme :

$$H_s = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (1.29)$$

où  $a_s = f^{s-1}(a_1)$  est la fonction  $f$  appliquée  $(s - 1)$  fois. De la même façon, on voit que  $H_{s+1}$  s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned}
H_{s+1} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \\
&= H_s + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \tag{1.30}
\end{aligned}$$

Comme on le voit  $H_{s+1}$  et  $H_s$  diffèrent par une constante composée d'une somme de restes. Donc  $H_s$  et  $H_{s+1}$  sont des Hamiltoniens partenaires supersymétriques. Ils ont un spectre identique d'états liés, à l'exception de l'état fondamental de  $H_s$ , dont l'énergie vaut

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \tag{1.31}$$

en vertu de (1.29) qui s'écrit aussi

$$H_s = A_s^+ A_s + E_0^{(s)} \tag{1.32}$$

et du fait que  $E_0^{(1)} = 0$ . On peut passer de  $H_s$  à  $H_{s-1}$ , puis de  $H_{s-1}$  à  $H_{s-2}$  et ainsi de suite jusqu'à  $H_2$  à  $H_1$ , dont l'énergie du niveau fondamental est  $E_0^{(1)} = 0$  et dont le  $n^{\text{ième}}$  niveau coïncide avec celui de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $H_n$ . Par conséquent, le spectre complet des valeurs propres de  $H_1$  est donné par :

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k); \quad E_0^{(1)}(a_1) = 0. \tag{1.33}$$

Pour un potentiel invariant de forme, les fonctions d'onde des états liés  $\Psi_n^{(1)}(x; a_1)$  peuvent ainsi être obtenues facilement à partir de la fonction d'onde de l'état fonda-

mental  $\Psi_0^{(1)}(x; a_n)$ . Pour cela, on part à nouveau de  $H_s$  dont la fonction d'onde de l'état fondamental est  $\Psi_0^{(1)}(x; a_s)$  et en passant comme précédemment de  $H_s$  à  $H_{s-1}, \dots$ , de  $H_2$  à  $H_1$ . En utilisant (1.18), on peut montrer que la fonction propre du  $n^{i\grave{e}me}$  état d'énergie  $\Psi_n^{(1)}(x; a_n)$  de l'Hamiltonien  $H_1$  est donnée par :

$$\Psi_n^{(1)}(x; a_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{A_k^+}{\left(E_n^{(1)} - E_k^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \Psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \quad (1.34)$$

# Chapitre 2

## Etats liés d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vecteur du type Eckart

### 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de réexaminer la solution du problème d'une particule relativiste sans spin, de masse  $M$  et de charge  $(-e)$  qui se déplace sous l'action d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire  $S(r)$  et d'un potentiel vecteur  $V(r)$  égaux et de la forme dite de Eckart [18] :

$$S(r) = V(r) = \frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)} - V_2 \tanh(\alpha r), \quad (2.1)$$

où  $V_1$ ,  $V_2$  et  $\alpha$  sont trois paramètres positifs caractérisant respectivement la profondeur et la portée du puits de potentiel .

Récemment, Ölgar et ses Collaborateurs [19] ont étudié, avec un excès de confiance, ce problème à l'aide de la technique de la supersymétrie pour déterminer les solutions des états liés de l'équation de Klein-Gordon relative aux ondes s. Cependant, il faut signaler

que leurs résultats ne sont pas satisfaisants. Donc, une analyse plus rigoureuse mérite d'être entreprise.

Le plan de notre étude est le suivant : dans un premier paragraphe, avant tout autre calcul, nous allons montrer que les solutions fournies par Olgar et ses Collaborateurs ne sont pas correctes et par conséquent la technique de la supersymétrie ne permet pas dans l'état actuel de son développement de traiter ce type de potentiel. Dans un deuxième paragraphe, nous nous proposons de donner la solution correcte par une approche de rechange dans le cadre de la mécanique quantique standard.

## 2.2 Application de la supersymétrie

En général, l'équation de Klein-Gordon pour les ondes  $s$  avec un potentiel scalaire  $S(r)$  et un potentiel vecteur  $V(r)$  à symétrie sphérique s'écrit dans le système d'unités naturelles  $\hbar = c = 1$  :

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2 \right\} f(r) = 0, \quad (2.2)$$

où  $E$  est l'énergie,  $M$  est la masse de la particule et  $f(r)$  est la fonction d'onde réduite définie par  $f(r) = rR(r)$ , avec  $R(r)$  la fonction d'onde originale. Dans le cas où le potentiel scalaire et le potentiel vecteur sont égaux et  $V(r)$  est le potentiel de Eckart standard (2.1), l'équation (2.2) devient une équation du type Schrödinger

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r) \right) f(r) = \epsilon f(r), \quad (2.3)$$

où

$$\epsilon = E^2 - M^2 \quad (2.4)$$

et

$$V_{eff}(r) = \frac{\tilde{V}_1}{\cosh^2(\alpha r)} - \tilde{V}_2 \tanh(\alpha r), \quad (2.5)$$

avec  $\tilde{V}_1 = 2(E + M) V_1$  et  $\tilde{V}_2 = 2(E + M) V_2$ .

Dans le cadre de la supersymétrie en mécanique quantique, la fonction d'onde réduite de l'état fondamental est définie par

$$f_0(r) = N \exp \left[ \int^r W(r') dr' \right], \quad (2.6)$$

où  $N$  est une constante de normalisation et  $W(r)$  désigne le superpotentiel naturellement choisi de la forme :

$$W(r) = A - B \tanh(\alpha r), \quad (2.7)$$

où  $A$  et  $B$  sont des coefficients constants qu'on peut déterminer aisément en écrivant l'équation de Riccati. D'autre part, en intégrant l'équation (2.6), on obtient l'expression suivante pour la fonction d'onde réduite de l'état fondamental :

$$\begin{aligned} f_0(r) &= N \exp(-Ar) \cosh^{B/\alpha}(\alpha r) \\ &= \mathcal{N} [\cosh(\alpha r)]^{p+w} \exp[\alpha(w-p)r], \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec

$$p = \frac{1}{2} \left[ n_r + \delta + \frac{\tilde{V}_2}{\alpha^2 (n_r + \delta)} \right], \quad w = \frac{1}{2} \left[ n_r + \delta - \frac{\tilde{V}_2}{\alpha^2 (n_r + \delta)} \right], \quad (2.9)$$

et

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \right]. \quad (2.10)$$

Notons que les paramètres  $p$ ,  $w$  et  $\delta$  ont été obtenus en utilisant la condition d'invariance de forme. Les fonctions d'onde non normalisées associées à l'Hamiltonien contenu dans l'équation (2.3) ont été exprimées par Ölgar et ses Collaborateurs en termes des polynômes de Jacobi (voir Ref. [20], p. 1035 , Eq.(8.960) ),

$$R(r) = \frac{1}{r} \cosh^{p+w}(\alpha r) \exp[\alpha(w-p)r] P_n^{(-2p, -2w)}(\coth(\alpha r)), \quad (2.11)$$

en suivant une procédure mathématique identique à celle utilisée dans la Ref.[21].

Il faut signaler que les solutions (2.8) et (2.11) ne sont pas correctes du fait qu'elles ne remplissent pas les conditions aux limites

$$\lim_{r \rightarrow 0} rR(r) = \lim_{r \rightarrow 0} f_0(r) = 0, \quad (2.12)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rR(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_0(r) = 0. \quad (2.13)$$

Pour clarifier le problème, nous allons adopter une autre démarche

## 2.3 Résolution de l'équation aux valeurs propres

Pour résoudre l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien  $H = -\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)$ , donnée par (2.3), remplaçons la variable  $r$  par une nouvelle variable  $z$ , en posant :

$$z = \frac{1}{e^{2\alpha r} + 1}. \quad (2.14)$$

$f$  est alors, par l'intermédiaire de  $r$ , une fonction de  $z$ , et l'équation (2.3) devient

$$\left[ z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} + \frac{\epsilon}{4\alpha^2 z(1-z)} + \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2} \frac{1-2z}{z(1-z)} - \frac{\tilde{V}_1}{\alpha^2} \right] f(z) = 0. \quad (2.15)$$

Introduisons une nouvelle fonction  $\varphi(z)$  à travers la relation

$$f(z) = z^w (1-z)^p \varphi(z). \quad (2.16)$$

Si nous imposons sur  $w$  et  $p$  les conditions

$$w^2 + \frac{\epsilon}{4\alpha^2} + \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2} = 0, \quad (2.17)$$

et

$$p^2 + \frac{\epsilon}{4\alpha^2} - \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2} = 0, \quad (2.18)$$

l'équation différentielle suivante pour  $\varphi(z)$  est obtenue

$$\left\{ z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{d}{dz} - ab \right\} \varphi(z) = 0. \quad (2.19)$$

La solution générale de cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(z) = A {}_2F_1(a, b, c; z) + Bz^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; z), \quad (2.20)$$

où

$$\begin{cases} a = w + p - \delta + 1, \\ b = p + w + \delta, \quad c = 2w + 1, \\ \delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4\tilde{V}_1}{\alpha^2}} \right). \end{cases} \quad (2.21)$$

Pour déterminer la solution acceptable physiquement, il faut vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0, \quad (2.22)$$

et

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} f(z) = 0. \quad (2.23)$$

Les paramètres  $w$  et  $p$ , définis par les conditions (2.17) et (2.18) et qui interviennent dans l'expression de la solution générale (2.20), ont dans le cas actuel les valeurs sui-

vantes :

$$\begin{cases} w = \pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{(M+E)(M-E-2V_2)}, \\ p = \pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{(M+E)(M-E+2V_2)}. \end{cases} \quad (2.24)$$

La condition (2.23) doit être satisfaite ; lorsque  $w > 0$ , on doit imposer  $B = 0$ . Dans ce cas les deux valeurs du paramètre  $p$  sont permises. Nous avons alors deux solutions

$$f_1(z) = Az^w (1-z)^{|p|} F_1(w+|p|-\delta+1, w+|p|+\delta, 2w+1, z), \quad (2.25)$$

et

$$f_2(z) = Az^w (1-z)^{-|p|} F_1(w-|p|-\delta+1, w-|p|+\delta, 2w+1, z). \quad (2.26)$$

Comme (voir Ref.[20], p. 1043, Eq. (9.131.1))

$${}_2F_1(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c; z), \quad (2.27)$$

et que la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  est symétrique par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$ , l'expression finale de la fonction d'onde est

$$\begin{aligned} f(r) &= A \left( \frac{1}{e^{2\alpha r} + 1} \right)^w \left( \frac{1}{1 + e^{-2\alpha r}} \right)^p \\ &\quad \times {}_2F_1 \left( w+p-\delta+1, w+p+\delta, \frac{1}{e^{2\alpha r} + 1} \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

avec  $w$  et  $p$  positifs.

Pour calculer les niveaux d'énergie, nous tiendrons compte de la condition à la limite (2.23) qui peut s'écrire sous la forme

$${}_2F_1 \left( w+p-\delta+1, w+p+\delta, 2w+1, \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (2.29)$$

C'est une équation transcendante impliquant la fonction hypergéométrique. Pour connaître les niveaux d'énergie discrets, on doit résoudre numériquement cette équation.

Une discussion de l'équation (2.20) dans le cas où  $w < 0$ , semblable à celle faite dans le cas où le paramètre  $w$  est positif, nous amène à imposer  $A = 0$ . Il s'ensuit que les fonctions d'onde sont de la forme :

$$f(r) = B \left( \frac{1}{e^{2\alpha r} + 1} \right)^{-w} \left( \frac{1}{1 + e^{-2\alpha r}} \right)^p \times {}_2F_1 \left( -w + p - \delta + 1, -w + p + \delta, -2w + 1, \frac{1}{e^{2\alpha r} + 1} \right), \quad (2.30)$$

avec  $w$  et  $p$  positifs. En tenant compte de (2.23), on trouve la condition de quantification de l'énergie

$${}_2F_1 \left( -w + p - \delta + 1, -w + p + \delta, -2w + 1, \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (2.31)$$

Il est donc clair à la lumière des résultats précédents concernant les fonctions d'onde et les équations donnant le spectre d'énergie que l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique ne permet pas de résoudre un problème avec des conditions aux limites de Dirichlet. La solution obtenue par Ölgar et ses Collaborateurs [19] dans le cadre de l'approche de la supersymétrie n'est pas exacte.

# Chapitre 3

## L'atome d'hydrogène dans un espace courbe de constante de courbure positive

### 3.1 Introduction

Le problème de l'atome d'hydrogène dans un espace courbe de constante de courbure positive a été l'objet de nombreux travaux réalisés suivant des méthodes différentes. En 1940, Schrödinger a été le premier à étudier ce problème comme une application de la méthode de factorisation [1]. Aussitôt après, Stevenson [22] a pu obtenir les solutions de ce problème par la méthode conventionnelle. Récemment, le même problème a été étudié dans une approche algébrique [23] qui repose sur le groupe de symétrie dynamique  $SU(1,1)$  et à l'aide de la méthode des intégrales de chemin [24] développée sur la variété du groupe non compact  $SU(1,1)$ . Enfin, il faut mentionner qu'un ensemble d'états cohérents pour ce problème a été construit dernièrement [25].

Dans ce chapitre, nous allons analyser ce problème en utilisant la méthode de la supersymétrie en mécanique quantique, l'approche de l'invariance de forme et les équations différentielles.

Le plan de notre étude est le suivant : dans le second paragraphe, nous allons voir que, dans le cas d'un espace sphérique et uniformément courbe, l'équation de Schrödinger indépendante du temps peut être considérablement simplifiée et ramenée à l'équation différentielle associée au potentiel de Pöschl-Teller modifié [26] moyennant un changement de variable. Dans le troisième paragraphe, nous appliquerons la supersymétrie en mécanique quantique et nous utiliserons l'approche de l'invariance de forme du potentiel effectif pour déterminer le spectre d'énergie du système. Nous donnerons les fonctions d'onde dans le dernier paragraphe.

## 3.2 Equation de Schrödinger

L'espace sphérique considéré est un espace uniformément courbe de constante de courbure positive  $K = R^{-2}$ . L'élément linéaire de cet espace est défini en coordonnées polaires par :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

avec  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

En effectuant le changement de variable  $\sin \chi = \frac{r}{R}$  ( $\chi \in [0, \pi]$ ), l'élément linéaire peut aussi être mis sous la forme :

$$ds^2 = R^2 d\chi^2 + R^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.2)$$

Le potentiel de Coulomb dans cet espace [24] est

$$V(\chi) = -\frac{Ze^2}{R} \cot \chi. \quad (3.3)$$

L'Hamiltonien du système est donné par

$$H = \frac{-\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V(\chi), \quad (3.4)$$

où  $M$  est la masse de la particule en mouvement dans le potentiel central (3.3) et  $\Delta_{LB}$  est l'opérateur de Laplace Beltrami, qui est donné par :

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q^b}, \quad (3.5)$$

avec

$$g = \det (g_{ab}), \quad (3.6)$$

et

$$g_{ab} = \text{diag} (R^2, R^2 \sin^2 \chi, R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta). \quad (3.7)$$

L'équation de Schrödinger qui régit le mouvement de la particule s'écrit

$$\left[ \frac{-1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{2MR^2}{\hbar^2} V_{eff}(\chi, \theta, \varphi) - \frac{2MR^2}{\hbar^2} E \right] \Psi(\chi, \theta, \varphi) = 0, \quad (3.8)$$

où  $V_{eff}(\chi, \theta, \varphi)$  est le potentiel effectif qui est la somme du terme centrifuge et du potentiel de Coulomb dans cet espace,

$$V_{eff}(\chi, \theta, \varphi) = \frac{\hat{L}^2}{2MR^2 \sin^2 \chi} - \frac{Ze^2}{R} \cot \chi, \quad (3.9)$$

avec

$$\hat{L}^2 = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (3.10)$$

En faisant la substitution

$$\Psi(\chi, \theta, \varphi) = R_\ell(\chi) y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (3.11)$$

nous obtenons pour  $R_\ell(\chi)$  l'équation différentielle

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2MR^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + 2 \cot \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} \right) - \frac{ze^2}{R} \cot \chi - E \right\} R_\ell(\chi) = 0. \quad (3.12)$$

En introduisant comme suit une nouvelle variable  $\beta$

$$e^{-\beta} = \tanh\left(\frac{i\chi}{2}\right), \quad (3.13)$$

et en posant

$$\kappa = \frac{Ze^2}{R}, \quad R_\ell(\beta) = \sinh^{\frac{1}{2}}\beta U_\ell(\beta), \quad (3.14)$$

nous trouvons que  $U_\ell(\beta)$  doit satisfaire à l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E - \kappa + \frac{3}{8}\frac{\hbar^2}{MR^2}}{\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} - \frac{E + \kappa + \frac{3}{8}\frac{\hbar^2}{MR^2}}{\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right) \right\} U_\ell(\beta) = -\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 U_\ell(\beta). \quad (3.15)$$

### 3.3 Supersymétrie et invariance de forme

Considérons l'Hamiltonien modifié

$$\tilde{H}_- = -\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} - \frac{\nu\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} - E_0, \quad (3.16)$$

où

$$\lambda = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2MR^2}{\hbar^2} (E - \kappa)}, \quad \nu = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2MR^2}{\hbar^2} (E + \kappa)}, \quad (3.17)$$

et  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental. La fonction d'onde et l'énergie de l'état fondamental de  $\tilde{H}_-$  sont données par

$$U_0(\beta) = N \left( \cosh \frac{\beta}{2} \right)^{-2\nu} \left( \sinh \frac{\beta}{2} \right)^{2\lambda}, \quad (3.18)$$

$$E_0^{(1)} = 0, \quad (3.19)$$

avec

$$E_0 = -(\nu - \lambda)^2. \quad (3.20)$$

Le superpotentiel correspondant associé à la fonction d'onde de l'état fondamental est

$$W(\beta) = -\frac{U_0'(\beta)}{U_0(\beta)} = \nu \tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) - \lambda \coth\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (3.21)$$

Compte tenu des conditions aux limites

$$U_0(0) = 0, \quad (3.22)$$

et

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} U_0(\beta) = 0, \quad (3.23)$$

les constantes  $\nu$  et  $\lambda$  doivent être choisies de telle sorte que  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ,  $\text{Re}(\nu) - \text{Re}(\lambda) > 0$  et  $\text{Re}(\nu) > 0$ . Autrement dit :

$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2MR^2}{\hbar^2} (E - \kappa)}, \quad (3.24)$$

et

$$\nu = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2MR^2}{\hbar^2} (E + \kappa)}. \quad (3.25)$$

En fonction du superpotentiel  $W(\beta)$  donné par (3.21), nous pouvons construire deux potentiels partenaires supersymétriques  $V_+(\beta)$  et  $V_-(\beta)$  ainsi :

$$\begin{aligned} V_+(\beta) &= W^2(\beta) + W'(\beta) \\ &= (\nu - \lambda)^2 + \frac{\lambda(\lambda + \frac{1}{2})}{\sinh^2(\frac{\beta}{2})} - \frac{\nu(\nu - \frac{1}{2})}{\cosh^2(\frac{\beta}{2})}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

et

$$\begin{aligned} V_-(\beta) &= W^2(\beta) - W'(\beta) \\ &= (\nu - \lambda)^2 + \frac{\lambda(\lambda - \frac{1}{2})}{\sinh^2(\frac{\beta}{2})} - \frac{\nu(\nu + \frac{1}{2})}{\cosh^2(\frac{\beta}{2})}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ces deux potentiels partenaires vérifient la condition d'invariance de forme

$$V_+(\beta, a_0, b_0) = V_-(\beta, a_1, b_1) + R(a_1, b_1) \quad (3.28)$$

où  $a_1 = a_0 - \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = b_0 - \frac{1}{2}$  avec  $(a_0, b_0) = (\lambda, \nu)$  et le reste  $R(a_1, b_1)$  est donné par :

$$R(a_1, b_1) = (\nu - \lambda)^2 - (\nu - \lambda - 1)^2. \quad (3.29)$$

Par application répétée de la condition d'invariance de forme (3.28), nous montrons que le spectre d'énergie complet du potentiel  $V_-(\beta)$  est

$$\left\{ \begin{aligned} E_0^{(-)} &= 0, \\ E_{n_r}^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n_r} R(a_k, b_k) \\ &= (a_0 + b_0)^2 - (a_{n_r} + b_{n_r})^2 \\ &= (\nu - \lambda)^2 - (\nu - \lambda - n_r)^2, \end{aligned} \right. \quad (3.30)$$

où  $n_r = 0, 1, 2, \dots$

D'après les équations (3.16) et (3.27), on a

$$\frac{-MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E - \kappa + \frac{3}{8} \frac{\hbar^2}{MR^2}}{\sinh^2(\frac{\beta}{2})} - \frac{E + \kappa + \frac{3}{8} \frac{\hbar^2}{MR^2}}{\cosh^2(\frac{\beta}{2})} \right) = V_-(\beta) + E_0. \quad (3.31)$$

À l'aide des équations (3.20) et (3.30), nous obtenons

$$-\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 = E_0 + E_{n_r}^{(-)} = (\nu - \lambda - n_r)^2. \quad (3.32)$$

En substituant  $\nu$  et  $\lambda$  par leurs expressions (3.17) dans (3.32) nous trouvons les valeurs propres associées à l'Hamiltonien du système physique,

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2MR^2} (n^2 - 1) - \frac{MZ^2e^4}{2\hbar^2n^2} \quad (3.33)$$

où  $n = n_r + \ell + 1 = 1, 2, 3, \dots$ . Ce résultat coincide avec ceux obtenus à l'aide de la méthode de factorisation de Schrödinger [23] et par la méthode des intégrales de chemin de Feynman [24].

### 3.4 Fonctions d'onde

Dans l'équation différentielle (3.15), faisons le changement de variable

$$y = -\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \quad (3.34)$$

et cherchons une solution de la forme

$$U_\ell(y) = y^\eta (1 - \eta)^\mu \varphi_\ell(y). \quad (3.35)$$

Si nous imposons sur  $\eta$  et  $\mu$  les conditions

$$\eta^2 = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (3.36)$$

et

$$\mu\left(\mu - \frac{1}{2}\right) = \nu\left(\nu + \frac{1}{2}\right), \quad (3.37)$$

l'équation différentielle suivante pour  $\varphi_\ell(y)$  est obtenue

$$\left\{ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + [c - (a+b+1)y] \frac{d}{dy} - ab \right\} \varphi_\ell(y) = 0, \quad (3.38)$$

où

$$a = \eta + \mu + \lambda, \quad b = \eta + \mu - \lambda + \frac{1}{2}, \quad c = 2\eta + 1. \quad (3.39)$$

En tenant compte des conditions aux limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} U_\ell(y) = 0 \quad (3.40)$$

et

$$\lim_{y \rightarrow \infty} U_\ell(y) = 0 \quad (3.41)$$

nous devons choisir

$$\eta = \ell + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = -\nu.$$

La solution non singulière à l'origine de l'équation (3.38) est à un facteur constant près, la fonction hypergéométrique

$$\varphi_\ell(y) = {}_2F_1 \left( \ell - \nu + \lambda + \frac{1}{2}, \ell - \nu - \lambda + 1, 2\ell + 2, y \right). \quad (3.42)$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\nu$  qui interviennent dans l'expression de cette fonction hypergéométrique ont dans le cas actuel les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} - i\frac{\varepsilon_n}{2}, \\ \nu = \frac{-1}{4} + \frac{n}{2} + i\frac{\varepsilon_n}{2}, \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $\varepsilon_n = -\frac{Mze^2R}{n\hbar}$  et  $n = n_r + \ell + 1$ .

La solution (3.35) peut s'écrire

$$U_\ell(y) = y^{\ell+\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{4}-\frac{n}{2}-i\frac{\varepsilon_n}{2}} {}_2F_1(1+\ell-i\varepsilon_n, 1+\ell-n, 2\ell+2, y). \quad (3.44)$$

En revenant à la variable  $\chi$  (voir l'équation (3.13) ), il s'ensuit que

$$\sin \chi = -\frac{i}{\sinh \beta}, \quad \sinh^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) = -\frac{e^{-i\chi}}{2 \sin \chi}, \quad \cosh^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) = \frac{-ie^{i\chi}}{2 \sin \chi}. \quad (3.45)$$

Par conséquent, nous pouvons exprimer la fonction d'onde radiale  $R_\ell(\chi)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} R_\ell(\chi) &= N_{n,\ell} \sin^\ell \chi \exp [i\chi (1 + \ell - n - i\varepsilon_n)] \\ &\quad \times {}_2F_1 (1 + \ell - i\varepsilon_n, 1 + \ell - n, 2\ell + 2; 1 - e^{2i\chi}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Cette solution est identique à celles obtenues dans la littérature [1, 22, 25].

# Chapitre 4

## L'atome d'hydrogène dans un espace hyperbolique

### 4.1 Introduction

Nous nous proposons ici d'étendre le traitement par le formalisme de la supersymétrie utilisé dans le chapitre précédent au problème de l'atome d'hydrogène dans un espace hyperbolique, c'est à dire dans un espace de constante de courbure négative. Récemment et dans une formulation basée sur l'intégrale de chemin de Feynman, Barut et ses collaborateurs [27] ont montré que l'intégrale de chemin radiale relative à ce problème se développe en celle d'une particule libre en mouvement sur la variété du groupe dynamique  $SU(1,1)$  pour simplifier le calcul de la fonction de Green à partir de laquelle ils ont obtenu le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés.

Dans le second paragraphe, nous convertissons l'équation de Schrödinger indépendante du temps en une équation différentielle relative à un potentiel de Pöschl-Teller modifié à l'aide d'un changement de variables approprié. Dans un troisième paragraphe, nous appliquons la supersymétrie et l'invariance de forme pour obtenir la fonction d'onde radiale de l'état fondamental et les niveaux d'énergie du système. Dans le quatrième paragraphe, nous déterminons les fonctions d'onde normalisées des états liés par résolution

directe de l'équation différentielle. Les états de l'atome d'hydrogène dans un espace plat sont considérés comme un cas particulier dans le cinquième paragraphe.

## 4.2 Equation de Schrödinger

L'espace hyperbolique à trois dimensions est un espace de constante de courbure négative  $K = -R^{-2}$ . L'élément linéaire de cet espace est donné en coordonnées polaires par :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

avec  $0 \leq r < \infty$  ,  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

En faisant le changement de variable  $\sinh \chi = \frac{r}{R}$ , ( $\chi \in [0, \infty[$ ), Il peut être mis sous la forme :

$$ds^2 = R^2 d\chi^2 + R^2 \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.2)$$

Le potentiel de Coulomb dans cet espace [27] est égal à

$$V(\chi) = -\frac{Ze^2}{R} (\coth \chi - 1). \quad (4.3)$$

L'Hamiltonien du système est donné par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V(\chi), \quad (4.4)$$

où  $\Delta_{LB}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami, qui est défini par

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q^b}, \quad (4.5)$$

avec

$$g = \det(g_{ab}), \quad (4.6)$$

et

$$g_{ab} = \text{diag} (R^2, R^2 \sinh^2 \chi, R^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \theta). \quad (4.7)$$

L'équation de Schrödinger correspondante peut être exprimée comme suit :

$$\left[ -\frac{1}{\sinh^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sinh^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{2MR^2}{\hbar^2} V_{eff}(\chi, \theta, \varphi) - \frac{2MR^2}{\hbar^2} E \right] \Psi(\chi, \theta, \varphi) = 0, \quad (4.8)$$

où  $V_{eff}(\chi, \theta, \varphi)$  est le potentiel effectif qui se compose du terme centrifuge et du potentiel original,

$$V_{eff}(\chi, \theta, \varphi) = \frac{\widehat{L}^2}{2MR^2 \sinh^2 \chi} - \frac{Ze^2}{R} (\coth \chi - 1), \quad (4.9)$$

avec

$$\widehat{L}^2 = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (4.10)$$

Il est évident que la partie angulaire peut être séparée en posant la fonction d'onde comme le produit de la fonction radiale et de l'harmonique sphérique,  $\Psi(\chi, \theta, \varphi) = R_\ell(\chi) y_\ell^m(\theta, \varphi)$ . La fonction radiale  $R_\ell(\chi)$  est la solution de l'équation différentielle :

$$\left[ -\frac{1}{\sinh^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sinh^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2 \chi} - \frac{2MR^2}{\hbar^2} K (\coth \chi - 1) - \frac{2MR^2 E}{\hbar^2} \right] R_\ell(\chi) = 0, \quad (4.11)$$

avec  $K = Ze^2/R$ .

En introduisant la variable indépendante

$$e^{-\beta} = \tanh(\chi/2), \quad (4.12)$$

et en posant

$$R_\ell(\chi) = \sinh^{\frac{1}{2}}(\beta) U_\ell(\beta), \quad (4.13)$$

l'équation en  $U_\ell(\beta)$  prend la forme :

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E'}{\sinh^2(\beta/2)} + \frac{2K - E'}{\cosh^2(\beta/2)} \right) \right] U_\ell(\beta) = -(\ell + 1/2) U_\ell(\beta), \quad (4.14)$$

où

$$E' = E - \frac{3\hbar^2}{8MR^2}. \quad (4.15)$$

### 4.3 Supersymétrie et invariance de forme

Considérons l'Hamiltonien modifié

$$\tilde{H}_- = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E'}{\sinh^2(\beta/2)} + \frac{2K - E'}{\cosh^2(\beta/2)} \right) - E_0, \quad (4.16)$$

où  $E_0$  représente l'énergie de l'état fondamental du système gouverné par l'Hamiltonien  $H$  et définissons les opérateurs de création et d'annihilation

$$A^+ = -\frac{d}{d\beta} + w(\beta), \quad (4.17)$$

et

$$A = \frac{d}{d\beta} + w(\beta). \quad (4.18)$$

L'Hamiltonien  $\tilde{H}_-$  peut être obtenu par factorisation. Il peut en effet s'écrire sous la forme :

$$\tilde{H}_- = A^+ A. \quad (4.19)$$

L'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $\tilde{H}_-$  étant  $E_0^{(1)} = 0$ , il résulte alors de l'équation de Schrödinger que

$$AU_0(\beta) = 0. \quad (4.20)$$

Dans ces conditions,  $U_0(\beta)$  est la fonction d'onde radiale de l'état fondamental qui peut s'écrire

$$U_0(\beta) = N \exp\left(-\int^\beta w(\beta') d\beta'\right), \quad (4.21)$$

où  $N$  est une constante de normalisation et  $w(\beta)$  est appelé superpotentiel en mécanique quantique supersymétrique que nous choisissons de la forme :

$$w(\beta) = \nu \tanh(\beta/2) + \lambda \coth(\beta/2), \quad (4.22)$$

avec  $\nu$  et  $\lambda$  des constantes que l'on déterminera par la suite. En calculant l'intégrale (4.21), nous obtenons

$$U_0(\beta) = N \left(\cosh \frac{\beta}{2}\right)^{-2\nu} \left(\sinh \frac{\beta}{2}\right)^{-2\lambda}. \quad (4.23)$$

Cette solution est acceptable physiquement compte tenu des conditions aux limites

$$U_0(\beta) = 0 \quad \text{pour} \quad \beta = 0, \quad (4.24)$$

et

$$U_0(\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \beta \longrightarrow \infty, \quad (4.25)$$

qui sont satisfaites lorsque  $\lambda < 0$ ,  $\nu > -\lambda$  et  $\nu > 0$ .

La comparaison des équations (4.19) et (4.16) montre que

$$w^2(\beta) - w'(\beta) = -\frac{MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E'}{\sinh^2(\beta/2)} + \frac{2K - E'}{\cosh^2(\beta/2)} \right) - E_0. \quad (4.26)$$

Cette égalité est l'équation non linéaire bien connue de Riccati. En remplaçant  $w(\beta)$  par son expression (4.22) dans (4.26) et en procédant par identification, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} (\nu + \lambda)^2 = E_0, \\ \lambda(\lambda + \frac{1}{2}) = \frac{3}{16} - \frac{MR^2}{2\hbar^2} E, \\ \nu(\nu + \frac{1}{2}) = \frac{3}{16} + \frac{MR^2}{2\hbar^2} (2K - E). \end{cases} \quad (4.27)$$

Compte tenu des conditions (4.24) et (4.25), les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\nu$  possibles sont les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2MR^2}{\hbar^2} E}, \\ \nu = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2MR^2}{\hbar^2} (2K - E)}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Pour déterminer les niveaux d'énergie du système, nous introduisons les potentiels partenaires supersymétriques  $V_+(\beta)$  et  $V_-(\beta)$  définis respectivement par :

$$\begin{aligned} V_+(\beta) &= w^2(\beta) + w'(\beta) \\ &= (\lambda + \nu)^2 + \frac{\lambda(\lambda - 1/2)}{\sinh^2(\beta/2)} - \frac{\nu(\nu - 1/2)}{\cosh^2(\beta/2)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} V_-(\beta) &= w^2(\beta) - w'(\beta) \\ &= (\lambda + \nu)^2 + \frac{\lambda(\lambda + 1/2)}{\sinh^2(\beta/2)} - \frac{\nu(\nu + 1/2)}{\cosh^2(\beta/2)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

et appliquons la condition d'invariance de forme

$$V_+(\beta, a_0, b_0) = V_-(\beta, a_1, b_1) + R(a_1, b_1), \quad (4.31)$$

où  $a_1$  et  $b_1$  sont des fonctions de  $a_0$  et  $b_0$ , respectivement, c'est à dire  $a_1 = f(a_0) = a_0 - \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = f(b_0) = b_0 - \frac{1}{2}$  avec  $(a_0, b_0) = (\lambda, \nu)$  et le reste  $R(a_1, b_1)$  est indépendant de la variable  $\beta$ . Il résulte de (4.31), après un calcul simple, que

$$\begin{aligned} R(a_1, b_1) &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)^2 \\ &= (\lambda + \nu)^2 - (\lambda + \nu - 1)^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

En procédant de la même manière que dans le chapitre précédent, il est facile de montrer que le spectre d'énergie complet du potentiel  $V_-(\beta)$  est donné par :

$$\left\{ \begin{aligned} &E_0^{(-)} = 0 \\ &E_{nr}^{(-)} = \sum_{k=1}^{n_r} R(a_k, b_k) = R(a_1, b_1) + R(a_2, b_2) + \dots + R(a_{nr}, b_{nr}) \\ &= (a_0 + b_0)^2 - (a_1 + b_1)^2 + (a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_{nr-1} + b_{nr-1})^2 - (a_{nr} + b_{nr})^2 \\ &= (a_0 + b_0)^2 - (a_{nr} + b_{nr})^2 \\ &= (\lambda + \nu)^2 - (\lambda + \nu - n_r)^2, \end{aligned} \right. \quad (4.33)$$

où  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ .

D'après les équations (4.26) et (4.30), on a

$$\frac{-MR^2}{2\hbar^2} \left( \frac{E'}{\sinh^2(\beta/2)} + \frac{2K - E}{\cosh^2(\beta/2)} \right) = V_-(\beta) + E_0. \quad (4.34)$$

En passant aux valeurs propres des deux membres de l'équation (4.34), il résulte de (4.14) et (4.33) que

$$-\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 = E_{nr}^{(-)} + E_0 = -(\lambda + \nu - n_r)^2, \quad (4.35)$$

où nous avons utilisé la relation  $E_0 = -(\lambda + \nu)^2$ . En remplaçant  $\lambda$  et  $\nu$  par leurs valeurs (4.28), nous obtenons après quelques calculs élémentaires, les niveaux d'énergie du système,

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} (n-1) - \frac{MZ^2e^4}{2\hbar^2n^2} + \frac{Ze^2}{R}, \quad (4.36)$$

où  $n = n_r + \ell + 1 = 1, 2, 3, \dots$ . Ce résultat est identique à ceux obtenus à l'aide de la méthode de factorisation de Schrödinger [2] et par l'approche des intégrales de chemin de Feynman [23].

## 4.4 Fonctions d'onde des états liés

Pour résoudre l'équation différentielle (4.14), il convient de l'exprimer sous la forme :

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\lambda(\lambda + 1/2)}{\sinh^2(\beta/2)} - \frac{\nu(\nu + 1/2)}{\cosh^2(\beta/2)} \right) U_\ell(\beta) = -\left( \ell + \frac{1}{2} \right)^2 U_\ell(\beta). \quad (4.37)$$

Effectuons ensuite le changement de variable

$$y = 1 - \tanh^2(\beta/2), \quad (4.38)$$

et cherchons une solution de la forme :

$$U_\ell(\beta) = y^n (1-y)^\mu \varphi_\ell(y) \quad (4.39)$$

qui doit être finie en tout point et nulle à l'infini et à l'origine. Elle doit donc vérifier les conditions aux limites

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} U_\ell(\beta) = 0, \quad (4.40)$$

et

$$\lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{2}} U_\ell(\beta) = 0, \quad (4.41)$$

pour qu'elle soit acceptable physiquement. Ceci nous amène à choisir les paramètres  $\eta$  et  $\mu$  des quantités positives. Alors, en substituant (4.38) et (4.39) dans (4.14) et en imposant

$$\eta = \ell + \frac{1}{2}, \quad (4.42)$$

et

$$\mu = -\lambda, \quad (4.43)$$

nous obtenons l'équation différentielle hypergéométrique suivante :

$$\left\{ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + [c - (a+b+1)y] \frac{d}{dy} - ab \right\} \varphi_\ell(y) = 0. \quad (4.44)$$

où

$$a = \ell - \nu - \lambda + \frac{1}{2}, \quad b = \ell + \nu - \lambda + 1, \quad c = 2\ell + 2. \quad (4.45)$$

La solution de cette équation qui remplit la condition à la limite (4.41), peut s'écrire :

$$\varphi(y) = N {}_2F_1 \left( \ell - \lambda - \nu + \frac{1}{2}, \ell - \lambda + \nu + 1, 2\ell + 2; y \right), \quad (4.46)$$

où  $N$  est un facteur constant. Donc, suivant (4.38) et (4.39), la solution de l'équation (4.37) est donnée par :

$$U_\ell(\beta) = N \left[ \sinh \left( \frac{\beta}{2} \right) \right]^{-2\lambda} \left[ \cosh \left( \frac{\beta}{2} \right) \right]^{2\lambda - 2\ell - 1} \times {}_2F_1 \left( \ell - \lambda - \nu + \frac{1}{2}, \ell - \lambda + \nu + 1, 2\ell + 2; \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\beta}{2} \right)} \right), \quad (4.47)$$

dans laquelle les paramètres  $\lambda$  et  $\nu$  ont les valeurs suivantes :

$$\lambda = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n - \varepsilon_n), \quad (4.48)$$

$$\nu = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n + \varepsilon_n), \quad (4.49)$$

avec  $\varepsilon_n = MRZe^2/\hbar^2 n$ .

Enfin, à partir des équations (4.12), (4.13), (4.48), (4.49) et compte tenu des relations :

$$\sinh \beta = \frac{1}{\sinh \chi}, \quad \sinh^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) = \frac{e^{-\chi}}{2 \sinh \chi}, \quad \cosh^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) = \frac{e^{\chi}}{2 \sinh \chi}, \quad (4.50)$$

nous obtenons les fonctions d'onde sous la forme :

$$\begin{aligned} R_\ell(\chi) &= N_{n_r} (\sinh \chi)^\ell e^{-\chi(1+\ell+\varepsilon_n-n)} \\ &\times {}_2F_1(1 + \ell - n, 1 + \ell + \varepsilon_n, 2\ell + 2; 1 - e^{-2\chi}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Le facteur constant  $N_{n_r}$  résulte de la condition de normalisation

$$\int_0^\infty |R_\ell(\chi)|^2 \sqrt{g} R \cosh \chi d\chi = 1. \quad (4.52)$$

En utilisant le lien entre les polynômes de Jacobi et les fonctions hypergéométriques (voir formule (8.962.1), p.1036 dans la Réf. [20])

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1 \left( -n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1; \frac{1-x}{2} \right), \quad (4.53)$$

le calcul de l'intégrale (4.52) peut être effectué en écrivant un des  $2\beta$  facteurs  $\frac{1+x}{2}$  sous la forme :

$$\frac{1+x}{2} = 1 - \frac{1-x}{2}, \quad (4.54)$$

et en employant les deux intégrales suivantes (voir formule (7.391.5), p. 842, dans la Réf. [20])

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-1} (1+x)^{\mu} [P_n^{(\nu,\mu)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\nu+\mu} \Gamma(n+\nu+1) \Gamma(n+\mu+1)}{n! \nu \Gamma(n+\nu+\mu+1)}, \quad (4.55)$$

où  $\text{Re}(\nu) > 0$  et  $\text{Re}(\mu) > -1$  et (voir formule (7.391.1), p. 841, dans la Réf. [20]) :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu} (1+x)^{\mu} [P_n^{(\nu,\mu)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\nu+\mu+1} \Gamma(n+\nu+1) \Gamma(n+\mu+1)}{n! (2n+\nu+\mu+1) \Gamma(n+\nu+\mu+1)}, \quad (4.56)$$

qui est valable pour  $\text{Re}(\nu) > -1$  et  $\text{Re}(\mu) > -1$ . On trouve finalement que

$$N_{nr} = \frac{2^{\ell+1}}{\Gamma(2\ell+2)} \left[ \frac{\varepsilon_n^2 - n}{nR^3} \frac{\Gamma(n+\ell+1) \Gamma(\varepsilon_n+\ell+1)}{\Gamma(n-\ell) \Gamma(\varepsilon_n-\ell)} \right]^{1/2}. \quad (4.57)$$

Il est clair que la fonction d'onde (4.51) remplit la condition à la limite

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} R_{\ell}(\chi) = 0, \quad (4.58)$$

lorsque

$$n - \varepsilon_n < 1. \quad (4.59)$$

Donc, le nombre de niveaux discrets est égal au plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$n_r < \sqrt{\frac{1}{2\Lambda} + \frac{1}{4}} - \ell - \frac{1}{2}; \quad \Lambda = \frac{\hbar^2}{2MRZe^2}. \quad (4.60)$$

## 4.5 L'atome d'hydrogène dans l'espace plat

L'espace plat est caractérisé par une constante de courbure nulle, c'est à dire  $R \rightarrow \infty$ . Pour  $R \rightarrow \infty$ , il est évident que le spectre d'énergie se réduit d'après l'équation (4.36) à

$$E_n = -\frac{1}{2a^2n^2}, \quad (4.61)$$

où  $a = \frac{\hbar^2}{Mze^2}$  est le rayon de Bohr.

Dans ce cas,  $\varepsilon_n = \frac{R}{an} \rightarrow \infty$ . En se servant de la formule [28]

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{z}{\beta}\right) = {}_1F_1(\alpha, \gamma; z), \quad (4.62)$$

et en tenant compte des limites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \exp[-\chi(1 + \ell + \varepsilon_n - n)] = \exp\left(-\frac{r}{an}\right), \quad (4.63)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sinh^\ell \chi \left[ \frac{\varepsilon_n^2 - n^2}{R^3 n} \frac{\Gamma(\varepsilon_n + \ell + 1)}{\Gamma(\varepsilon_n - \ell)} \right]^{1/2} = \left(\frac{r}{an}\right)^\ell \left[ \frac{1}{n^4 a^3} \right]^{1/2}, \quad (4.64)$$

il est facile de montrer que les fonctions d'onde (4.51) deviennent celles de l'atome d'hydrogène dans l'espace plat :

$$R_\ell(r) = \left[ \left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n + \ell)!}{2n(n - \ell - 1)!} \frac{(2r/na)^\ell}{(2\ell + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-r/an} {}_1F_1\left(1 + \ell - n, 2\ell + 2; \frac{2r}{na}\right). \quad (4.65)$$

# Chapitre 5

## Equation de Dirac avec des potentiels vecteur et scalaire plus un potentiel tenseur

### 5.1 Introduction

Pour expliquer les caractéristiques des noyaux déformés [29] et la superdéformation [30], les concepts des symétries de spin et de pseudospin sont introduits dans la théorie nucléaire [31, 32]. Dans le cadre de la théorie du champ moyen relativiste, Ginocchio [33, 34] a montré que l'Hamiltonien de Dirac avec un potentiel scalaire  $S(r)$  et un potentiel vecteur  $V(r)$  du type oscillateur harmonique dans le cas où ils sont égaux, possède non seulement la symétrie de spin mais aussi la symétrie  $U(3)$  et l'Hamiltonien de Dirac dans le cas où  $V(r) = -S(r)$  possède une symétrie de pseudospin et une symétrie pseudo- $U(3)$ . Meng et ses collaborateurs [35] ont montré que la symétrie de pseudospin exacte se produit dans l'équation de Dirac lorsque  $\frac{d\Sigma(r)}{dr} = 0$ . Par la suite, la symétrie de spin et la symétrie de pseudospin ont été étudiées en résolvant l'équation de Dirac par des méthodes différentes pour des potentiels solubles exactement tels que le potentiel de Woods-Saxon [42], le potentiel de Eckart [43], le potentiel de Hulthén [44], le potentiel

en forme d'anneau du type Kratzer [45], l'oscillateur en forme d'anneau double [46], le potentiel de Hartmann [47, 48], le potentiel de Rosen-Morse [21], le potentiel du puits double symétrique généralisé [49], le potentiel de Scarf [50] et l'oscillateur non sphérique en forme d'anneau [51], etc.

Récemment, l'équation de Dirac avec des potentiels scalaire et vecteur harmoniques et un potentiel tenseur du type Coulomb plus un terme linéaire a été analysée partiellement dans le cadre de l'approche supersymétrique [52]. C'est pourquoi nous allons reprendre plus en détail l'étude de ce problème en utilisant toujours une formulation basée sur la méthode de la supersymétrie en mécanique quantique.

## 5.2 Equation de Dirac

L'équation de Dirac indépendante du temps pour une particule de spin  $\frac{1}{2}$  peut s'écrire

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}). \quad (5.1)$$

L'Hamiltonien de Dirac  $H$  avec un potentiel vecteur  $V$ , un potentiel scalaire  $S$  et un potentiel tenseur  $U$  est défini par [36, 37, 38] :

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(M + S) + V - i\beta\vec{\alpha}\hat{r}U, \quad (5.2)$$

où  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ .  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  sont des matrices de Dirac habituelles. Dans la représentation de Pauli qui est l'une des représentations les plus utiles,  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  s'expriment en termes des matrices de Pauli comme suit :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

où  $I$  est une matrice unité  $2 \times 2$  et  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est un vecteur ayant pour composantes les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

En supposant que  $V$ ,  $S$  et  $U$  sont des fonctions potentielles radiales, l'opérateur Hamiltonien (5.2) commute avec l'opérateur associé au moment cinétique total donné par  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  et avec l'opérateur spin-orbite défini par  $K = \vec{\sigma} \vec{L} + 1$ . Donc, les fonctions propres définies par l'équation (5.1) peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\Psi_{n_j m \kappa}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} f_{n_r \kappa}(r) Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ i g_{n_r \kappa}(r) Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

où les fonctions radiales  $f_{n_r \kappa}(r)$  et  $g_{n_r \kappa}(r)$  sont respectivement la composante supérieure et la composante inférieure. Ici  $j$  est le nombre quantique qui caractérise le moment cinétique total. Le nombre quantique  $\kappa$  est relié à  $l$  et  $j$  comme suit :

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -(j + \frac{1}{2}); & j = l + \frac{1}{2}, \text{ le spin est aligné } (\kappa < 0), \\ l = j + \frac{1}{2}; & j = l - \frac{1}{2}, \text{ le spin est non aligné } (\kappa > 0). \end{cases} \quad (5.6)$$

Les quantités  $Y_{jm}^l(\theta, \phi)$  et  $Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi)$ , appelées spineurs sphériques, sont liées aux harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \phi)$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} Y_{jm}^l(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \end{pmatrix} & \text{pour } l = j - \frac{1}{2}, \\ Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta, \phi) \end{pmatrix} & \text{pour } l = j + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.7)$$

avec  $\tilde{l} = l + 1$ . Ils satisfont les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \vec{\sigma} \vec{L} \right) Y_{jm}^l(\theta, \phi) = -(\kappa - 1) Y_{jm}^l(\theta, \phi), \\ \left( \vec{\sigma} \vec{L} \right) Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi) = (\kappa - 1) Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi), \\ \left( \vec{\sigma} \hat{r} \right) Y_{jm}^l(\theta, \phi) = -Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi), \\ \left( \vec{\sigma} \hat{r} \right) Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi) = -Y_{jm}^l(\theta, \phi). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

En substituant l'équation (5.5) dans l'équation (5.1) et en employant les relations suivantes :

$$\left( \vec{\sigma} \vec{A} \right) \left( \vec{\sigma} \vec{B} \right) = \vec{A} \vec{B} + i \vec{\sigma} \left( \vec{A} \times \vec{B} \right), \quad (5.9)$$

et

$$\vec{\sigma} \vec{p} = \frac{\vec{\sigma} \hat{r}}{r^2} \left( -ir \frac{\partial}{\partial r} + i \vec{\sigma} \vec{L} \right), \quad (5.10)$$

associées avec les propriétés (5.8), nous obtenons deux équations différentielles radiales couplées

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) f_{n_r \kappa}(r) = (M + E_{n_r \kappa} - \Delta(r)) g_{n_r \kappa}(r), \quad (5.11)$$

et

$$\left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) g_{n_r \kappa}(r) = (M - E_{n_r \kappa} + \Sigma(r)) f_{n_r \kappa}(r), \quad (5.12)$$

où

$$\Delta(r) = V(r) - S(r), \quad (5.13)$$

et

$$\Sigma(r) = V(r) - S(r). \quad (5.14)$$

En éliminant  $g_{n_r \kappa}(r)$  dans l'équation (5.11) et  $f_{n_r \kappa}(r)$  dans l'équation (5.12), nous obtenons deux équations différentielles du second ordre, l'une pour la composante supérieure

et l'autre pour la composante inférieure de cette manière :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{2\kappa}{r}U(r) - \frac{d}{dr}U(r) - U^2(r) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{d}{dr}\Delta(r)}{M + E_{n_r\kappa} - \Delta(r)} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) \right] f_{n_r\kappa}(r) \\
& = (M + E_{n_r\kappa} - \Delta(r))(M - E_{n_r\kappa} + \Sigma(r)) f_{n_r\kappa}(r),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} + \frac{2\kappa}{r}U(r) + \frac{d}{dr}U(r) - U^2(r) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{d}{dr}\Sigma(r)}{M - E_{n_r\kappa} + \Sigma(r)} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) \right] g_{n_r\kappa}(r) \\
& = (M + E_{n_r\kappa} - \Delta(r))(M - E_{n_r\kappa} + \Sigma(r)) g_{n_r\kappa}(r).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

### 5.3 Limite de la symétrie de spin

Dans ce cas,  $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$  ou  $\Delta(r) = C_s = \text{Constante}$  [39, 40] . En considérant  $\Sigma(r)$  comme un potentiel pseudo-harmonique, c'est à dire,

$$\Sigma(r) = Ar^2; \quad A > 0, \tag{5.17}$$

en plus d'un potentiel tenseur de la forme :

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta r, \tag{5.18}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes positives, l'équation (5.15) pour la composante supérieure devient

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + V_{n_r\kappa}(r) - \epsilon_{n_r\kappa} \right) f_{n_r\kappa}(r) = 0, \tag{5.19}$$

avec

$$\epsilon_{n_r\kappa} = \beta(2\kappa + 2\alpha - 1) - (M - E_{n_r\kappa})(M + E_{n_r\kappa} - C_s), \quad (5.20)$$

et

$$V_{n_r\kappa}(r) = \frac{(\kappa + \alpha)(\kappa + \alpha + 1)}{r^2} + [A(M + E_{n_r\kappa} - C_s) + \beta^2] r^2. \quad (5.21)$$

L'équation (5.19) est une équation du type Schrödinger d'un oscillateur harmonique radial que nous pouvons résoudre en utilisant le formalisme de l'invariance de forme de la supersymétrie. La composante supérieure  $f_{n_r\kappa}(r)$  de la fonction d'onde de l'état fondamental peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_{0\kappa}(r) = \exp\left(-\int W(r)dr\right), \quad (5.22)$$

où  $W(r)$  est un superpotentiel en mécanique quantique supersymétrique [16, 17]. En substituant (5.22) dans (5.19), nous obtenons l'équation suivante pour  $W(r)$ ,

$$W^2(r) - \frac{d}{dr}W(r) = \frac{(\kappa + \alpha)(\kappa + \alpha + 1)}{r^2} + [A(M + E_{n_r\kappa} - C_s) + \beta^2] r^2 - \epsilon_{0\kappa}, \quad (5.23)$$

où  $\epsilon_{0\kappa}$  est l'énergie de l'état fondamental. En choisissant le superpotentiel de la forme :

$$W(r) = \frac{\Lambda}{r} + \omega r, \quad (5.24)$$

la composante supérieure de la fonction d'onde de l'état fondamental s'écrit

$$f_{0\kappa}(r) = r^{-\Lambda} \exp\left(-\frac{\omega}{2}r^2\right). \quad (5.25)$$

Pour les solutions des états, la composante supérieure  $f_{0\kappa}(r)$  doit satisfaire les conditions aux limites

$$f_{0\kappa}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad (5.26)$$

et

$$f_{0\kappa}(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0. \quad (5.27)$$

Sous ces conditions, nous devons prendre  $\Lambda < 0$  et  $\omega > 0$ . En substituant l'équation (5.24) dans l'équation (5.23), et en égalant les coefficients des puissances identiques en  $r$  des deux membres de l'équation (5.23), nous obtenons les relations suivantes :

$$\omega(2\Lambda - 1) = -\epsilon_{0\kappa}, \quad (5.28)$$

$$\Lambda^2 + \Lambda = (\kappa + \alpha)(\kappa + \alpha + 1), \quad (5.29)$$

$$\omega^2 = A(M + E_{n_r, \kappa} - C_s) + \beta^2. \quad (5.30)$$

En tenant compte des conditions aux limites (5.26) et (5.27), les coefficients  $\omega$  et  $\Lambda$  prennent les valeurs suivantes :

$$\omega = \sqrt{A(M + E_{n_r, \kappa} - C_s) + \beta^2}, \quad (5.31)$$

$$\Lambda = \begin{cases} \kappa + \alpha, & \text{lorsque le spin est aligné et } l > \alpha - 1, \\ -(\kappa + \alpha + 1), & \text{lorsque le spin est aligné et } l < \alpha, \\ -(\kappa + \alpha + 1), & \text{lorsque le spin est non aligné et } l \geq 1. \end{cases} \quad (5.32)$$

Compte tenu de l'expression (5.24) du superpotentiel, nous pouvons construire deux potentiels partenaires supersymétriques définis par :

$$V_+(r) = W^2(r) + \frac{d}{dr}W(r) = \frac{\Lambda(\Lambda - 1)}{r^2} + \omega^2 r^2 + \omega(2\Lambda + 1), \quad (5.33)$$

$$V_-(r) = W^2(r) - \frac{d}{dr}W(r) = \frac{\Lambda(\Lambda + 1)}{r^2} + \omega^2 r^2 + \omega(2\Lambda - 1). \quad (5.34)$$

Posons  $a_0 = \Lambda$  et appliquons la condition d'invariance de forme :

$$V_+(r, a_0) = V_-(r, a_1) + R(a_1), \quad (5.35)$$

où  $a_1$  est une fonction de  $a_0$  donnée par  $a_1 = f(a_0) = \Lambda - 1$ , et le reste  $R(a_1)$  est indépendant de  $r$ . Il vaut  $R(a_1) = 4\omega$ . Les valeurs propres de l'énergie associées au potentiel  $V_-(r)$  peuvent être déterminées en utilisant l'approche de l'invariance de forme [16, 17]. Le spectre d'énergie du potentiel  $V_-(r)$  est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{0\kappa}^{(-)} = 0, \\ \epsilon_{n_r\kappa}^{(-)} = \sum_{k=1}^{n_r} R(a_k) = R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_{n_r}) \\ \qquad \qquad \qquad = 4n_r\omega, \end{array} \right. \quad (5.36)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$ . À partir des équations (5.23) et (5.34), nous avons la relation suivante :

$$\frac{\Lambda(\Lambda + 1)}{r^2} + \omega^2 r^2 = V_-(r) + \epsilon_{0\kappa}, \quad (5.37)$$

et en se servant des équations (5.19) et (5.37), nous obtenons pour  $\epsilon_{n_r\kappa}$  l'expression

$$\epsilon_{n_r\kappa} = \epsilon_{n_r\kappa}^{(-)} + \epsilon_{0\kappa} = \omega(4n_r - 2\Lambda + 1), \quad (5.38)$$

où nous avons employé la relation  $\epsilon_{0\kappa} = -\omega(2\Lambda - 1)$ . En utilisant (5.20) et en prenant en considération les valeurs de  $\Lambda$  définies par l'équation (5.29) et la racine positive de l'équation (5.30), nous aurons pour l'énergie les équations suivantes :

$$(E_{n_r\kappa} - M)(E_{n_r\kappa} + M - C_s) = 2 \left[ \left( 2n_r - \kappa - \alpha + \frac{1}{2} \right) \omega - \beta \left( \kappa + \alpha - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.39)$$

pour  $\Lambda = \kappa + \alpha$  et

$$(E_{n_r\kappa} - M)(E_{n_r\kappa} + M - C_s) = 2 \left[ \left( 2n_r + \kappa + \alpha + \frac{3}{2} \right) \omega - \beta \left( \kappa + \alpha - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.40)$$

pour  $\Lambda = -(\kappa + \alpha + 1)$ .

Nous allons maintenant résoudre l'équation (5.19). En introduisant comme suit une nouvelle variable

$$x = \omega r^2, \quad (5.41)$$

et en faisant la substitution

$$f_{n_r\kappa}(r) = x^{-\Lambda} e^{-\frac{x}{2}} f_{n_r\kappa}(x), \quad (5.42)$$

nous obtenons pour  $f_{n_r\kappa}(x)$  l'équation hypergéométrique

$$\left[ x \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} - \Lambda - x \right) \frac{d}{dx} + n_r \right] f_{n_r\kappa}(x) = 0, \quad (5.43)$$

où

$$n_r = \frac{\epsilon_{n_r\kappa}}{4\omega} + \frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{4}. \quad (5.44)$$

La seule solution polynomiale de (5.43) est le polynôme de Laguerre

$$f_{n_r\kappa}(x) = C_{n_r\kappa} L_{n_r}^{-\Lambda-\frac{1}{2}}(x). \quad (5.45)$$

Par conséquent

$$f_{n_r\kappa}(r) = N_{n_r\kappa} r^{-\Lambda} \exp\left(-\frac{\omega}{2} r^2\right) L_{n_r}^{-\Lambda-\frac{1}{2}}(\omega r^2), \quad (5.46)$$

où  $N_{n_r\kappa}$  est une constante de normalisation. En substituant  $f_{n_r\kappa}(r)$  donnée par (5.46)

dans l'équation (5.11), nous obtenons la composante inférieure

$$\begin{aligned}
g_{n_r\kappa}(r) &= \frac{1}{M + E_{n_r\kappa} - C_s} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) f_{n_r\kappa}(r) \\
&= \frac{N_{n_r\kappa}}{M + E_{n_r\kappa} - C_s} r^{-\Lambda} \exp\left(-\frac{\omega}{2}r^2\right) \left\{ \left[ -\frac{\Lambda - \kappa - \alpha}{r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\omega + \beta) r L_{n_r}^{-\Lambda - \frac{1}{2}}(\omega r^2) \right] - 2\omega r L_{n_r-1}^{-\Lambda + \frac{1}{2}}(\omega r^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

## 5.4 Limite de la symétrie de pseudospin

Ce cas se produit dans l'équation lorsque  $\frac{d\Sigma(r)}{dr} = 0$ , ou  $\Sigma(r) = C_{ps} = \text{Constante}$  [35, 41, 53]. Si nous prenons  $\Delta(r)$  comme un potentiel pseudo-harmonique, c'est à dire,

$$\Delta(r) = Ar^2; \quad A > 0, \tag{5.48}$$

l'équation (5.16) se réduit à

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \tilde{V}_{n_r\kappa}(r) - \tilde{\epsilon}_{n_r\kappa} \right) g_{n_r\kappa}(r) = 0, \tag{5.49}$$

où

$$\tilde{\epsilon}_{n_r\kappa} = \beta(2\kappa + 2\alpha + 1) + (M + E_{n_r\kappa})(M - E_{n_r\kappa} - C_{ps}), \tag{5.50}$$

et

$$V_{n_r\kappa}(r) = \frac{(\kappa + \alpha)(\kappa + \alpha - 1)}{r^2} + \tilde{\omega}^2 r^2, \tag{5.51}$$

avec

$$\tilde{\omega} = \sqrt{A(E_{n_r\kappa} - M - C_{ps}) + \beta^2}.$$

L'équation (5.49) a la même forme que (5.19) obtenue dans le cas de la symétrie de spin. Donc le spectre d'énergie et les fonctions d'onde radiales correspondantes peuvent être obtenus en suivant la même démarche utilisée dans le paragraphe précédent. Sans

entrer dans le détail des calculs, le spectre d'énergie est déterminé par les équations suivantes :

$$(M + E_{n_r\kappa})(E_{n_r\kappa} - M - C_{ps}) = 2 \left[ \left( 2n_r + \Lambda + \frac{1}{2} \right) \tilde{\omega} - \beta \left( \kappa + \alpha + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.52)$$

et la composante inférieure des fonctions d'onde radiales par :

$$g_{n_r\kappa}(r) = \tilde{N}_{n_r\kappa} r^{-\Lambda} \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{2} r^2\right) L_{n_r}^{-\Lambda-\frac{1}{2}}(\tilde{\omega} r^2), \quad (5.53)$$

où  $\tilde{N}_{n_r\kappa}$  est une constante de normalisation et

$$\Lambda = \begin{cases} -(\kappa + \alpha), \\ \kappa + \alpha - 1. \end{cases} \quad (5.54)$$

En portant (5.53) dans (5.12), nous obtenons pour la composante supérieure l'expression suivante :

$$\begin{aligned} f_{n_r\kappa}(r) &= \frac{1}{M - E_{n_r\kappa} + C_{ps}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) g_{n_r\kappa}(r) \\ &= \frac{\tilde{N}_{n_r\kappa}}{M - E_{n_r\kappa} + C_{ps}} r^{-\Lambda} \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{2} r^2\right) \left\{ \left[ -\frac{\Lambda + \kappa + \alpha}{r} + (\beta - \tilde{\omega}) r \right] L_{n_r}^{-\Lambda-\frac{1}{2}}(\tilde{\omega} r^2) \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{\omega} r L_{n_r}^{-\Lambda+\frac{1}{2}}(\tilde{\omega} r^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

En posant  $A = 0$ , les potentiels scalaire et vecteur sont nuls et en éliminant le terme coulombien ( $\alpha = 0$ ), le potentiel tenseur se réduit à un potentiel linéaire radial pseudo-scalaire. Le spectre d'énergie coincide avec celui obtenu tout récemment au moyen d'une nouvelle approche semi-classique [54].

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté un traitement précis d'un ensemble de quatre systèmes quantiques à symétrie sphérique particulièrement importants dans plusieurs branches de la physique théorique ainsi qu'en chimie quantique.

Dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, nous avons montré que l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique et l'invariance de forme appliquées par Ölgar et ses collaborateurs [19] ne conviennent pas dans le traitement du problème d'une particule sans spin en mouvement dans un potentiel scalaire et un potentiel vecteur à symétrie sphérique, égaux et dont la forme est celle de Eckart. La solution présentée par ces auteurs doit être écartée. Il s'agit ici d'un problème avec des conditions aux limites de Dirichlet qui représentent un obstacle infranchissable dans l'état actuel du développement de la supersymétrie en mécanique quantique. Pour le contourner, nous avons étudié ce système dans une formulation basée sur l'équation de Klein-Gordon pour déterminer la condition de quantification transcendante pour les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde des états liés.

Dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, nous avons traité par l'approche de la supersymétrie et l'invariance de forme le problème de l'atome d'hydrogène dans un espace sphérique. Les niveaux d'énergie du système ont été obtenus ainsi que les fonctions d'onde. Nous avons ensuite étendu le traitement de ce problème dans le cas d'un espace hyperbolique. Nous avons déterminé les états liés. Dans le cas limite d'un espace plat, le spectre de l'atome d'hydrogène standard et les fonctions normalisées correspondantes sont retrouvés.

Enfin, nous avons appliqué le traitement précédent du potentiel de Coulomb dans un espace courbe au problème d'une particule de Dirac sous l'effet d'un ensemble de potentiels scalaire, vecteur et tenseur à symétrie sphérique en présentant une discussion approfondie sur les symétries de spin et de pseudospin. Dans chaque situation, nous avons obtenu les états liés de la particule. À cet égard, il faut souligner que l'étude détaillée de l'équation de Dirac ainsi présentée, peut être considérée comme un complément important aux résultats obtenus récemment par la même approche [52].

# Bibliographie

- [1] E. Schrödinger, Proc. R. Irish Acad. **A 46** (1940) 9; **46** (1940) 183; **47** (1941) 53.
- [2] L. Infeld et T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21.
- [3] L. Gendenshtein, JETP Lett. **38** (1983) 356.
- [4] H. Miyazawa, Phys. Rev. **170** (1968)1596.
- [5] Y. A. Gel'fand et E. P. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971)323.
- [6] P. Ramond, Phys. Rev. **D 3** (1971) 2415.
- [7] A. Neuveu et J. Schwarz, Nucl. Phys. **B 31** (1971) 86.
- [8] D. V. Volkov et V. P. Akulov, Phys. Lett. **B 44** (1973) 109.
- [9] R. Haag, J. T. Lopuszański et M. Sohnius, Nucl. Phys. **B 88** (1975) 257.
- [10] J. Wess et B. Zumino, Nucl. Phys. **B 70** (1974) 39.
- [11] J. Wess et B. Zumino, Nucl. Phys. **B 78** (1974) 1.
- [12] S. Ferrara, D. Freedman et P. Van Nieuwenhuisen, Phys. Rev. **D 13** (1976) 3214.
- [13] S. Deser et B. Zumino, Phys. Lett. **B 62** (1976) 325.
- [14] E. Witten, Nucl. Phys. **B 188** (1981) 513.
- [15] E. Witten, Nucl. Phys. **B 202** (1982) 253.
- [16] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, Phys. Rep. **251** (1995) 267.
- [17] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001).

- [18] C. Eckart, Phys. Rev. **35** (1930) 1303.
- [19] E. Ölgar, R. Koç et H. Tütüncüler, Chin. Phys. Lett. **22** (2006) 539.
- [20] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).
- [21] L. Z. Yi, Y. F. Diao, J. Y. lin et C. S. Jia, Phys. Lett. **A 333** (2004) 212.
- [22] A. F. Stevenson, Phys. Rev. **59** (1941) 842.
- [23] A. O. Barut et R. Wilson, Phys. Lett. **A 110** (1985) 351.
- [24] A. O. Barut, A. Inomata et G. Junker, J. Phys. **A : Math. Gen. 20** (1987) 6271.
- [25] M. Thaik et A. Inomata , J. Phys. **A : Math. Gen. 38** (2005) 1767.
- [26] G. Pöschl et E. Teller, Z. Phys. **83** (1933) 143.
- [27] A. O. Barut, A. Inomata et G. Junker, J. Phys. **A : Math. Gen. 23** (1990) 1179.
- [28] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1958).
- [29] A. Bohr, I. Hamamoto et B. R. Mottelson, Phys. Scr. **26** (1982) 267.
- [30] J. Dudek, W. Nazarewicz, Z. Szymanski et G. A. Leander, Phys Rev. Lett. **59** (1987) 1405.
- [31] A. Arima, M. Harvey et K. Shimizu, Phys. Lett. **B 30** (1969) 517.
- [32] K. T. Hecht et A. Adeler, Nucl. Phys. **A 137** (1969) 129.
- [33] J. N. Ginocchio, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 252501.
- [34] J. N. Ginocchio, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 436.
- [35] J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji, P Ring et A. Arima, Phys. Rev. **C 58** (1998) R 628.
- [36] R. Lisboa, M. Malheiro, A. S. de Castro, P. Alberto et M. Fiolhais, Phys. Rev. **C 69** (2004) 0243319.
- [37] M. Moshinsky et A. Szczepaniak, J. Phys. A : Math. Gen. **22** (1989) L 817.
- [38] V. I. kukulin, G. Loyola et M. Moshinsky, Phys. Lett. **A 158** (1991) 19.

- [39] J. N. Ginocchio, Nucl. Phys. **A 654** (1999) 663c.
- [40] J. N. Ginocchio, Phys. Rep. **315** (1999) 231.
- [41] J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji et A. Arima, Phys. Rev. **C 59** (1999) 154.
- [42] J. Y. Guo et Z. Q. Sheng, Phys. Lett. **A 338** (2005) 90.
- [43] C. S. Jia, P. Gao et X. L. Peng, J. Phys. A : Math. Gen. **39** (2006) 7737.
- [44] S. Z. Hu et R. K. Su, Acta Phys. Sin. **40** (1991) 1201.
- [45] W. C. Qiang, Chin. Phys. **13** (2004) 575.
- [46] F. L. Lu, C. Y. Chen et D. S. Sun, Chin. Phys. **14** (2005) 463.
- [47] C. Y. Chen, Phys. Lett. **A 339** (2005) 283.
- [48] A. de Souza Dutra et M. Hott, Phys. Lett. **A 356** (2006) 215.
- [49] X. Q. Zhao, C. S. Jia et Q. B. Yang, Phys. Lett. **A 337** (2005) 189.
- [50] X. C. Zhang, K. Chen et Z. I. Wang, Phys. Lett. **A 340** (2005) 59.
- [51] X. C. Zhang, K. Chen et Z. I. Duan, Chin. Phys. Lett. **14** (2005) 42.
- [52] S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi et H. Hassanabadi, Ann. Phys. **325** (2010) 2522.
- [53] P. Alberto, M. Fiolhais, M. Malheiro, A. Delfino et M. Chiapparini, Phys. Rev. **C 65** (2002) 034307.
- [54] K. E. Thylwe et S. Linnaeus, Phys. Scr. **84** (2011) 025006.

## ملخص

في هذا العمل ، قمنا بمناقشة مفصلة لإمكانيات تطبيق نهج التناظر الفائق في ميكانيك الكم الأكثر ثباتا على شكل مجموعة من أربعة أنظمة ديناميكية. نظام الكمونين العددي والشعاعي لـ **Eckart** ذات تناظر كروي هي مستعصية الحل في إطار هذه المعالجة بسبب شروط النهايات لـ **Dirichlet** المفروضة كحلول لهذه المشكلة. ومع ذلك هذه الحلول نوقشت من خلال الطريقة النموذجية . لذرة الهيدروجين في الأماكن المنحنية بشكل موحد وحالات جسيم **Dirac** في وجود كمون عددي وشعاعي و **tenseur** ذات تناظر كروي مدروسة باستخدام التسلسل الهاميلتوني وشرط ثبات الشكل.

## كلمات المفاتيح :

كمون **Eckart** ، كمون **Coulomb** ، الهزاز التوافقي ، معادلة **Schrodinger** ، معادلة **klein-Gordon** ، معادلة **Dirac** ، التناظر الفائق ، حالات الربط.

## **Abstract**

In this work, we undertook a detailed discussion of the applicability of the supersymmetry quantum mechanics and the shape invariance methods to a set of four dynamic systems. The system of scalar and vector potentials taken as spherically symmetric Eckart-type potential is intractable in this approach because of the Dirichlet boundary conditions imposed on the solutions of the problem. However, these solutions are discussed by the standard method. The hydrogen atom in uniformly curved spaces and states of a particle Dirac in the presence of scalar, vector and tensor spherically symmetric potentials are studied using the hierarchy of Hamiltonians and the shape invariance condition.

**Keywords:** Eckart potential, Coulomb potential, harmonic oscillator, Schrödinger equation, Klein-Gordon equation, Dirac equation, supersymmetry, spin and pseudospin symmetries, bound states.

## **Résumé**

Dans ce travail, nous avons entrepris une discussion détaillée sur les possibilités d'application de l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique plus l'invariance de forme à un ensemble de quatre systèmes dynamiques. Le système de potentiels scalaire et vecteur de Eckart à symétrie sphérique est intraitable dans le cadre de cette approche à cause des conditions aux limites de Dirichlet imposées aux solutions du problème. Cependant ces solutions sont discutées par la méthode standard. L'atome d'hydrogène dans des espaces uniformément courbes et une particule de Dirac en présence de potentiels scalaire, vecteur et tenseur à symétrie sphérique sont étudiés en utilisant la hiérarchie d'Hamiltoniens et la condition d'invariance de forme.

Mots clés : potentiel de Eckart, potentiel de Coulomb, oscillateur harmonique, équation de Schrödinger, équation de Klein-Gordon, équation de Dirac, supersymétrie, symétries de spin et de pseudospin, états liés.