

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE ENERGETIQUE

OPTION : PHOTOTHERMIQUE

THEME

**Investigation Des Effets Du Nombre De Prandtl Sur La
Convection Mixte En Développement Thermique Dans Un
Conduit Cylindrique**

Par

BOUHALLASSA Amar

Soutenu le : 09/10 /2012

Devant le jury:

Président : Mr. L. BAHY Prof. Univ. Mentouri Constantine

Rapporteur : Mr. T. BOUFENDI Prof. Univ. Mentouri Constantine

Examineurs: Mr. N. ATTAF Prof. Univ. Mentouri Constantine

Mr. A. MOKHNACHE M.C Univ. Mentouri Constantine

REMERCIEMENTS

• *Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.*

• *Je tiens à remercier vivement mon encadreur **T. BOUFENDI** professeur au département de physique à l'Université Mentouri Constantine pour son suivi, ses orientations pratiques, conseils précieux et son encouragement durant la réalisation de ce travail et la présentation de ce mémoire dans sa forme finale.*

• *Je tiens à remercier tous les membres de jury Monsieur **L. BAH**, professeur au département de physique à l'université Mentouri Constantine. Monsieur **N.ATTAF**, professeur au département de physique à l'université Mentouri Constantine. Monsieur **A.MOKHNACHE**, Maître de conférences au département de physique à l'université Mentouri Constantine*

• *Qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger mon travail. Que toute personne ayant contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants, qu'ils trouvent ici, dans ces lignes, l'expression de ma profonde gratitude.*

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire :

- *Aux deux êtres les plus chers : mon père et ma mère, qui ont tout fait pour que je réussisse dans ma vie.*
- *A mes frères et mes sœurs et toute ma famille*

(BOUHALLASSA)

- *Pour ma fiancée RANIA et la famille GUENEZ*
- *A mes amis de la promotion. et a tous mes amis.*

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction	1
I.2. Rappel du mécanisme de la convection mixte	2
1.3. Revue bibliographique.....	3

CHAPITRE 2

LE MODELE MATHEMATIQUE

II.1. Introduction.....	23
II.2. La géométrie du modèle	23
II.3. Equations modélisantes.....	25
II.5. Le nombre de Nusselt	28

CHAPITRE 3

METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

III.1. Introduction	30
III.2.1. Choix de la méthode numérique.....	30
III.2.2. Le maillage	31
III.3. Discrétisation des équations du modèle.....	33
III.4. Définitions	33
III.4.1. La discrétisation temporelle au second ordre	33

SOMMAIRE

III.4.2. La discrétisation spatiale au second ordre	34
III.5. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale :.....	42
III.6. Discrétisation de l'équation de conservation de quantité de mouvement azimutale.....	49
III.7. Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale.....	55
III.8. Discrétisation de l'équation de l'énergie	60
III.9. Discrétisation de l'équation de continuité	66
III.10. Discrétisation des conditions aux limites	66
III.10.1. A l'entrée du tube : $z^* = 0$	67
III.10.2. A la sortie du tube : $z^* = 104.17$	67
III.10.3. A la paroi	69
III.10.4. Sur l'axe du conduit :	69
III.11. Equations de la pression et de correction de la pression	72
III.12. Algorithme de calcul SIMPLER.....	75
III.13. Technique numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation.....	78
III.14. La validation du code de calcul	78

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 Introduction	80
IV.2 Caractéristiques et utilisation des fluides utilisés.....	80
IV.3 Résultats en mode de convection forcée $Gr = 0$	82
IV.3.1 Aspect hydrodynamique.....	82

SOMMAIRE

IV.3.2 Aspect thermique.....	86
IV.3.3 Nombre de Nusselt	90
IV.4 Résultats en mode de convection mixte	91
IV.4.1. L'écoulement secondaire.....	91
IV.4.2. Champ dynamique axial.....	97
IV.4.3 Champ thermique	102
IV.4.4 Nombre de Nusselt	112
IV.4.5 La corrélation empirique $Nu_{moy}(Pr, Ri)$	114

CONCLUSION GENERALE

V.1 Conclusion Générale.....	Erreur ! Signet non défini.
------------------------------	------------------------------------

Références bibliographiques

Annexe

Abstract

Résumé en arabe

Résumé en français

NOMENCLATURE

A	Coefficient de l'équation de discrétisation	
b^*	Terme de source adimensionnelle	
D	Diamètre du conduit	[m]
g	Accélération de la pesanteur	[m/s ²]
G	Source de chaleur volumique	[W / m ³]
Gr	Nombre de Grashof défini par	($g\beta GD^5 / k_s V^2$)
h_c	Coefficient de transfert convectif (Air ambiant-conduit)	[W / m ² .k]
h_r	Coefficient de transfert radiatif (Air ambiant-conduit)	[W / m ² .k]
k	Conductivité thermique de fluide	[W / m.k]
k^*	Conductivité thermique de fluide adimensionnelle	(k / k_0)
k_s^*	Conductivité thermique du solide adimensionnelle	(k_s / k_0)
k_0	Conductivité thermique du fluide à l'entrée	[W / m.k]
L	Longueur du conduit	[m]
ξ	Volume du conduit	[m ³]
Nu (θ, z)	Nombre de Nusselt local	($h(\theta, z) / k_0$)
Nu (z^*)	Nombre de Nusselt local axial	($h(z) / k_0$)

NOMENCLATURE

P	Pression	[Pa]
P*	Pression adimensionnelle	$((P - P_0)/(\rho_0 V_0^2))$
Pr	Nombre de Prandtl	(ν/α)
Q	Densité de flux de chaleur	[W / m ²]
r	Coordonnée radial	[m]
r*	Coordonnée radial adimensionnelle	(r/D_i)
R	Rayon de conduit	[m]
Ra	Nombre de Rayleigh	
Re	Nombre de Reynolds	
S	Terme de source	
t	Temps	[s]
t*	Temps adimensionnelle	$(V_0 t/D_i)$
T	Température	[K]
T*	Température adimensionnelle	$(T - T_0)/(GD_0^2/k_s)$
T _m	Température moyenne de mélange	[K]
T _m *	Température moyenne adimensionnelle	$(T_m - T_0)/(GD_0^2/k_s)$
V ₀	Vitesse axiale moyenne à l'entrée de	[m/s]

NOMENCLATURE

	conduit	
U	Composante radiale de la vitesse	[m / s]
U*	Composante radiale de la vitesse adimensionnelle	(U / V ₀)
W	Composante axiale de la vitesse	[m / s]
W*	Composante axiale de la vitesse adimensionnelle	(W / V ₀)
V	Composante azimutale de la vitesse	[m / s]
V*	Composante azimutale de la vitesse dimensionnelle	(V / V ₀)
Z	Coordonnée axiale	[m]
Z*	Coordonnée axiale adimensionnelle	(Z / D _i)

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique	[m ² / s]
β	Coefficient volumique d'expansion thermique du fluide	[K ⁻¹]
Γ	Coefficient de diffusion	
ν	Viscosité cinématique	[m ² / s]
ρ	Masse volumique du fluide	[kg / m ³]

NOMENCLATURE

τ	Tenseur des contraintes visqueuses	[N / m]
τ^*	Tenseur des contraintes visqueuses adimensionnel	
μ	Viscosité dynamique	[kg.m / s]
μ^*	Viscosité dynamique adimensionnelle	(μ / μ_0)
θ	Coordonnée angulaire	[rad]
ϕ	Variable dépendante généralisée	

Indices

C	Relatif à la position de la face d'un volume fini typique
D	Désigne la paroi du conduit
i, o	Fait référence aux surfaces interne et externe du conduit respectivement
M	Moyen
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini typique
n,s,e,w,t,b	Font références aux surfaces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E, W, T,B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest,

NOMENCLATURE

	frontale et dorsale
Nb	Désigne les nœuds voisins à P
r, θ, z	Directions radiales tangentielles et axiales respectivement
∞	Fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	Entrée du conduit

Exposants

*	Variable adimensionnelle
t	Désigne l'instant t
t- Δt	Désigne l'instant t- Δt
t+ Δt	Désigne l'instant t+ Δt

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE

BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction

Faisant partie des perspectives de recherche proposées à l'issue du travail de thèse de Doctorat menée par **Boufendi [1]**, **Boufendi et al. [2]**, au laboratoire de physique énergétique de l'université Mentouri Constantine, cette étude concerne une simulation numérique des effets du nombre de Prandtl principale caractéristique d'un fluide sur la convection mixte en 3D, transitoire, laminaire, dans un conduit cylindrique uniformément chauffé par voie électrique (effet Joule) au niveau de l'épaisseur de la paroi solide. La présence d'une convection mixte dans le fluide et d'une conduction dans le solide font qu'il s'agit d'un problème de transfert thermique conjuguée nécessitant un traitement simultané. Dans ce problème, on considère des fluides à propriétés physiques variables et une prise en compte des pertes thermiques de nature radiatives et convectives vers le milieu ambiant. Ainsi, dans un souci d'une ample compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et leur interaction simultanée, ce travail consiste en une simulation numérique du modèle conjugué, mais cette fois pour différents fluides. Nous avons choisi pour diverses raisons de nature physiques les fluides suivants : l'Eau et Butanol, Syltherm800 et Ethylène Glycol. Notre mémoire est scindé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la compréhension du mécanisme de transfert thermique conjugué- la convection mixte dans le fluide combinée à la conduction dans le solide- dans une conduite cylindrique et à la présentation d'une synthèse d'étude bibliographique récente apportée sur ce sujet. Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du modèle physique considéré. Ensuite, écrites sous leurs formes adimensionnelles, les équations modélisantes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et leurs conditions aux limites spatiotemporelles appropriées sont présentées sous une forme conservative. Dans ces équations, la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide sont thermodépendantes.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode numérique utilisée qui est celle des volumes finis, le maillage dans sa globalité

ainsi que dans des espaces de projection sera présenté. Puis, tous les termes obtenus dans les équations modélisantes seront discrétisés un par un jusqu'à l'obtention finale des équations algébriques linéarisées pour toutes les variables dépendantes de ce problème. Enfin, les algorithmes de calcul utilisés, tels l'algorithme SIMPLER et l'algorithme de Thomas, seront présentés.

Nous rassemblons dans le quatrième chapitre les principaux résultats numériques de cette étude. Ces résultats porteront sur les variations polaires et les variations axiales des champs dynamiques et thermiques des composantes de vitesse et de température dans les milieux fluide et solide. La quantification du transfert thermique sera obtenue à l'aide de la détermination des nombres de Nusselt local et moyen le long du conduit. Les comparaisons et les interprétations des divers résultats seront présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

I.2. Rappel du mécanisme de la convection mixte

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par **convection libre** et **convection forcée**. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la **convection** est **naturelle** ou **libre**. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé **convection forcée**. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une ne soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est

dite la **convection mixte**. Elle est généralement classée par rapport au nombre de Richardson, $Ri=Gr/Re^2$. Elle apparaît lorsque ce dernier avoisine l'unité.

1.3. Revue bibliographique

Boufendi et Afrid [2] ont étudié numériquement la convection mixte pour un écoulement d'un fluide à propriétés physiques variables dans un conduit soumis à un chauffage volumique. Ils ont montré d'abord la non uniformité du flux thermique transmis au fluide ainsi l'effet non négligeable des propriétés physiques tout particulièrement celui de la viscosité. Dans ce cas le nombre de Nusselt moyen subit une augmentation de l'ordre de 58%.

Redjem-Saad et al. [3] ont effectué des simulations numériques directes (DNS) de transfert de chaleur d'un écoulement turbulent entièrement développé dans un conduit avec la condition d'un flux thermique constant imposé à la paroi. Ces simulations sont effectuées pour un nombre de Reynolds constante ($Re = 5500$) et différents nombres de Prandtl : $Pr = 0.026$, 0.1 , 0.2 , 0.4 , 0.71 et 1 . L'accent principal de cette étude est autour sur les effets du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur turbulent dans les conduits. Les résultats obtenus sont l'étude des profils de la température moyenne afin de tirer loi logarithmique correct pour les divers Prandtl. La valeur efficace des variations de température et les flux de chaleur turbulents augmentent avec l'élévation du nombre de Prandtl.

Dans ce travail **Amberg et Winkler [4]** ont étudié l'instabilité de convection thermo capillaire dans une demi-zone à nombres de Prandtl intermédiaires. Cette étude a été faite dans un cylindre circulaire qui conduit un fluide en utilisant l'analyse de stabilité linéaire de l'état de révolution de base et la simulation numérique direct du problème en 3D, et ce pour la gamme du nombre de Prandtl $0.07 < Pr < 0.84$. Les résultats obtenus dans cette étude sont les suivants

1. Ils ont obtenus quatre nouvelles branches, avec un nombre d'onde azimutale 2, 3 et 4, toutes oscillatoires dans la gamme $0.070 < Pr < 0.18$. Le mécanisme de l'oscillation est une concurrence entre l'instabilité hydrodynamique fondamentale de l'anneau de vortex en bas d'état et les forces thermo capillaire de reconstitution. C'est ainsi un mécanisme d'instabilité qui est distinct pour tous les deux, du type instabilité thermo capillaire et l'instabilité purement hydrodynamique à de bas nombres de Prandtl.

2. Quand le nombre de Prandtl augmente au-dessus de 0,180, l'oscillation change de caractère, et les augmentations de fréquence par un facteur de 5. Pendant qu'on s'attend à ce que les effets du thermo capillarité augmentent avec l'augmentation du nombre de Prandtl.
3. Excepté la gamme $0,183 < Pr < 0,840$ l'accord entre les valeurs critiques des simulations non linéaires et l'analyse de stabilité linéaire prouve que ces branches sont toutes les bifurcations supercritiques de Hopf.
4. Pour le $Pr < 0,840$ tous les écoulements oscillants qui ont été simulés peuvent être décrits en tant qu'ondes stationnaires.

Abbassi et al. [5] ont proposé une étude sur l'influence du nombre Prandtl sur la nature du fluide, et ce dans les deux modes de la convection mixte et forcée, et ayant pour caractéristique le gradient de température d'un écoulement de fluide par le nombre de Richardson. Mais nous sommes intéressés aux effets du nombre de Prandtl sur la viscosité des fluides dans un jet rond. Dans cet article il est utilisé une gamme de nombre de Prandtl ($Pr = 0.71, 2.00, 10.00$) et une valeur du nombre de Reynolds constante pour tous les expériences ($Re = 1250$) pour changer les régimes de la convection on a deux valeurs de Richardson ($Ri = 0.1$) pour convection forcée et ($Ri = 5, 10$) pour la convection mixte. Les résultats obtenus:

1. Pour la région proche de la sortie de jet, caractérisé par de faibles distances longitudinales X , des conditions d'entrée de la vitesse et la température ne sont pas affectés par le nombre de Prandtl, et cela est vrai pour les deux régimes de convection mixte et forcée.
2. Et également que les forces de flottabilité agissent uniquement à de très hautes distances longitudinales de la sortie de la buse, l'intensité de ce phénomène dépend de la valeur du nombre de Prandtl.

Bera et Khalil [6] ont étudié l'influence de nombre de Prandtl sur la stabilité de l'écoulement de convection mixte dans un canal vertical de largeur de $2L$ rempli d'un milieu poreux. La température de paroi (T_w) varie linéairement avec l'axe « x » comme suivant : $T_w = T_0 - C_x$ figure 1.1. Le modèle de Brinkman-Wooding étendu à Darcy a été utilisé pour étudier les mécanismes de l'instabilité de l'écoulement de base et de sa dépendance sur le nombre de Prandtl Pr du fluide. L'objectif principal de cette étude était d'étudier l'effet du nombre de Prandtl qui est varié entre $0.01 \leq Pr \leq 100$ sur la stabilité du débit de base. Ils ont trouvé que le nombre de Prandtl a une influence évidente dans des

écoulements opposés par flottabilité, et c'est une indication pour la viabilité des perturbations cinétiques et thermiques. En outre, selon l'importance de tous les paramètres étudiés.

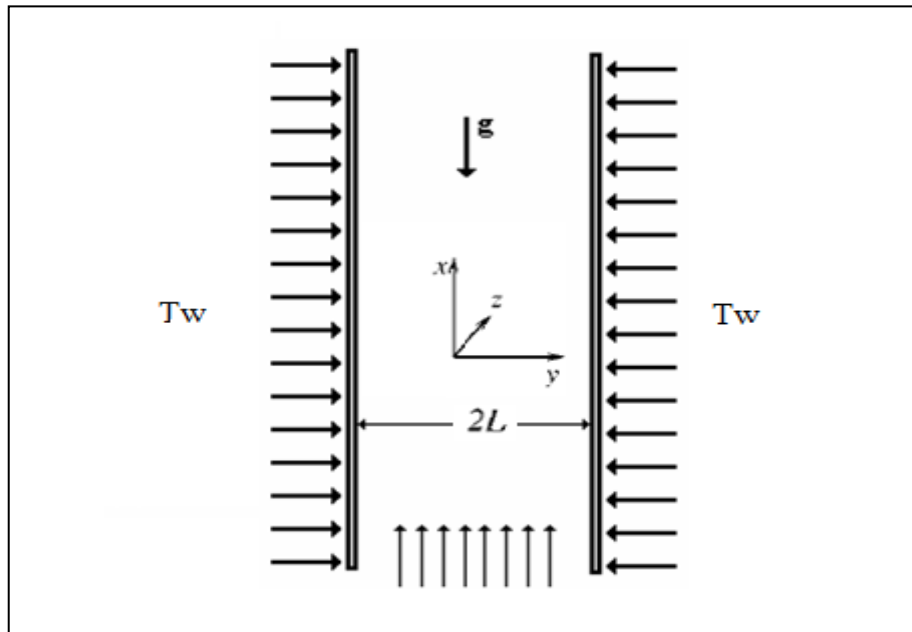


Figure 1.1: Schéma du problème considéré.

Lei Wang, Xi-Yun Lu [7] : ont présenté des résultats numériques sur stratification thermique des écoulements turbulents à partir de la méthode des Simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation "LES") dans un canal ouvert à faible et élevé nombre de Prandtl. Cette étude est réalisée pour les nombres suivants :

- Pr : nombre de Prandtl.
- $Ri\tau$: nombre de Richardson des caractéristiques de l'écoulement turbulent.
- $Re\tau$: nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement sur le mur et la hauteur du canal.

Les résultats obtenus correspondent à une gamme de nombre de Prandtl $0,1 \leq Pr \leq 100$ et pour un nombre de Richardson ($Ri\tau$) qui appartient à l'intervalle 0 à 20 et pour une valeur de nombre de Reynolds $Re\tau = 180$. Les résultats obtenus montrent que l'effet de Pr sur les structures organisées de la séquence des fluctuations de vitesse n'est un peu pas remarquable pour un écoulement turbulent faiblement stratifié. Cependant, l'influence de Pr sur les structures des fluctuations de température est importante.

Shihe Xin et al. [8] ont étudié les effets du nombre de Prandtl sur la structure des flux et de l'instabilité de la convection naturelle dans un cylindre horizontal différentiellement chauffé, figure 1.2. Dans cette étude ils utilisent une gamme du nombre de Prandtl depuis 0.7 à l'infini. Les résultats obtenus sont un résultat particulièrement important est le que bien que la structure de fait l'écoulement devient rapidement indépendant du nombre de Prandtl, tel que confirmé par un modèle simplifié résultant de la troncature ordre le plus bas des équations, la nature des changements à la bifurcation de supercritique que le nombre de Prandtl dépasse une valeur critique à peu près égale à 10.

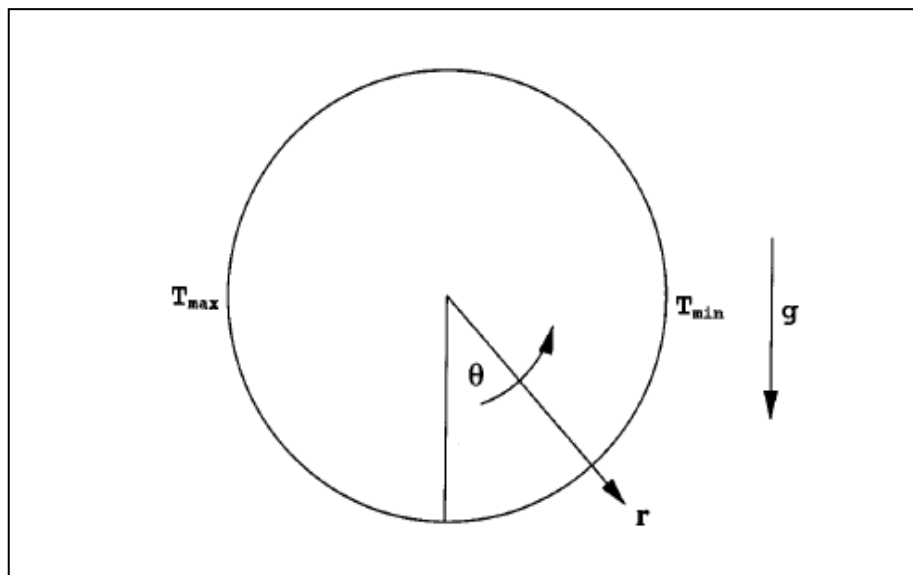


Figure 1.2 : Configuration géométrique

Schneider et Straub [9] ont étudié numériquement en tridimensionnel la convection laminaire naturelle dans un cylindre rempli de fluide, avec des températures différentes aux extrémités. Ils ont utilisé à cette étude un cylindre de géométrie voir la figure 1.3 et pour les caractères de fluide suivant, le nombre de Prandtl $0.023 \leq Pr \leq 135$ et le nombre de Rayleigh $Ra < 8 \cdot 10^4$ et l'angle d'inclinaison $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ et pour le rapport de forme hauteur sur le diamètre $0.5 \leq H/D \leq 2$. Les résultats obtenus pour le nombre de Prandtl montre que le nombre de Prandtl a une influence mineure pour $Pr \geq 0.7$ tandis que le transfert et la circulation des vitesses diminuent avec la baisse du nombre de Prandtl de l'ordre de $Pr < 0.7$ ceci pour un rapport d'aspect qui augmente et les changements d'angles d'inclinaison maximale sont petits.

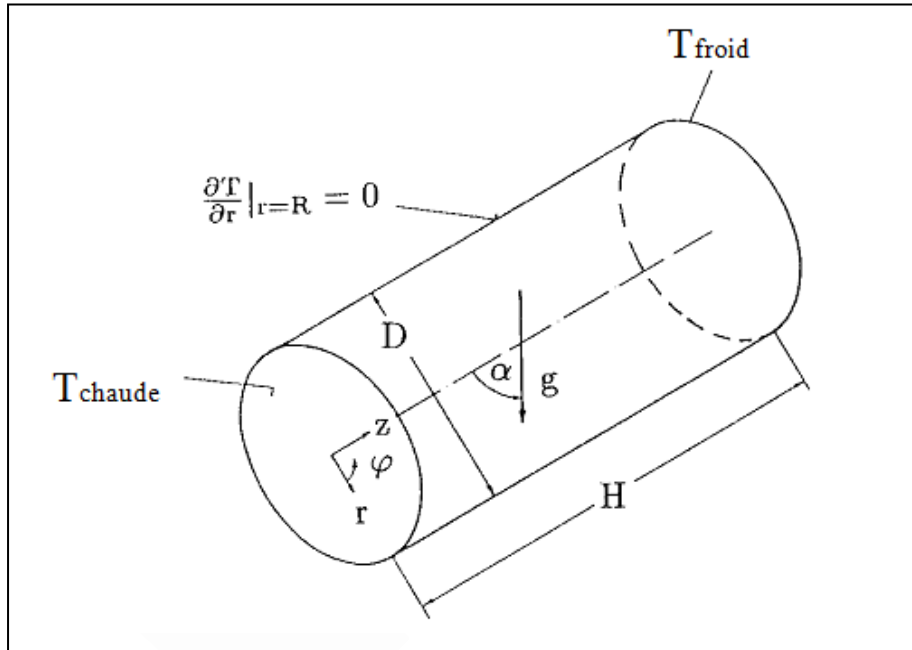


Figure 1.3 : Géométrie du modèle

Dans cet article **Zeng et al. [10]** ont étudié les effets du nombre de Prandtl sur la convection thermo capillaire en deux – dimensions, réévaluées en fonction des deux solutions analytiques et numérique. Ils ont choisies dans cette étude une grande gamme de nombre de Prandtl $0.01 \leq Pr \leq 1000$ et pour un nombre de Marangoni qui est égale le produit de nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl $Ma = Re * Pr$ et pour le rapport de forme hauteur sur le rayon $As = H/R$ voir le figure 1.4. Les résultats obtenir de cette étude Pour $Ma = 10$ et $As = 1$ avec $Pr = 0,01$ à $1,000$, la différence dans le champ de température est minime dans le cadre du plus vaste éventail Pr . Une petite différence dans le champ de vitesse pour $Pr = 0,01$ et $Pr \geq 0.1$ est observée, et la différence devient beaucoup plus faible pour $Pr = 0,1$ à 1000 .

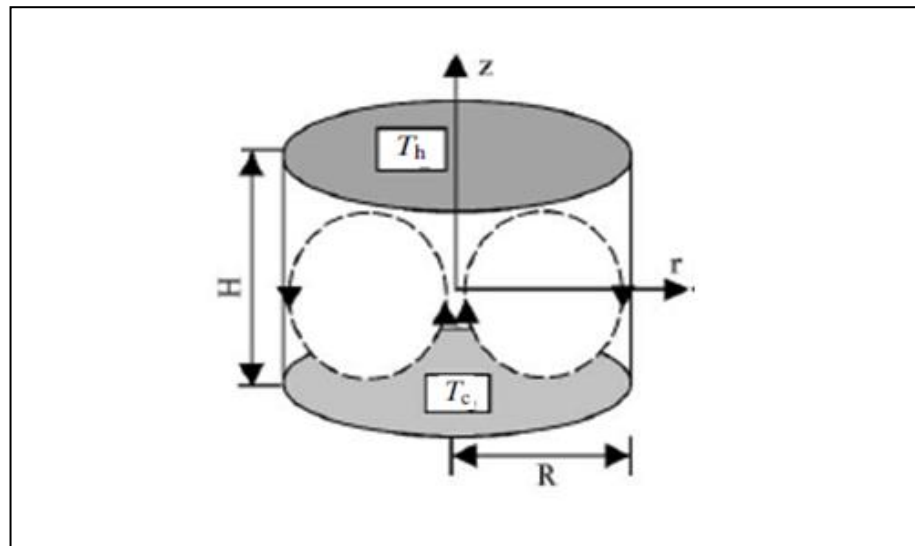


Figure 1.4 : Configuration géométrique

Papavassiliou [11] a fait une simulation numérique directe (DNS) d'un écoulement turbulent. Ce travail est concentré sur la description du comportement d'une source en ligne instantanée avec un accent sur les fluides à moyens et élevés nombre de Prandtl. Le fluide est Newtonien et incompressible.

En utilisant la méthode du Lagrangien scalaire suivi « Lagrangian scalar tracking » (LST) qui permet des observations des mesures qualitatives et quantitatives dans ces cas. Les résultats ont été obtenus pour les nombre de Prandtl suivants $Pr = 0.1, 1, 10, 100, 200, 500, 2400, 7000, 15\ 000, 50\ 000$, (métaux liquides, gaz, liquides, lubrifiants et fluides électrochimique). Ils séparent les résultats obtenus en trois étapes :

1. Dépend de la diffusivité et de la viscosité du fluide et son étendue est fonction du Pr .
2. La zone de transition, dans laquelle les traces coulent à partir du nuage compact original des marqueurs. Cette zone est logarithmique et cela dépend aussi de nombre de Prandtl.
3. La dernière zone, dans laquelle il n'y a aucun effet de nombre de Prandtl et le trace de mouvement, est dominée par la convection turbulente.

Yuling shi et al. [12] ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet de nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur dans un jet d'empîement turbulent semi-confiné de fente. L'effet de la dépendance en température sur le transfert de chaleur a été négligé puisque la température a été fixée à 300 K alors que la surface incidente isotherme est maintenue à 320K voir la figure 1.5. Cette étude en réalisée pour une

ensemble des fluides correspondant à variation de nombre de Prandtl $0.68 \leq Pr \leq 71.1$ (Ar, N₂, NH₃, H₂, He, Air, C₂H₂, H₂O, C₆H₆, C₂H₂OH, C₁₀H₁₆, C₄H₁₀O) et pour une valeur de nombre de Reynolds $Re = 2000$ et pour le rapport de diamètre de la sortie sur le diamètre de l'entre de jet $H/W = 6$ et $W = 5$ mm. Les résultats obtenus montrent que pour la variation du nombre de Prandtl :

1. La variation du nombre de Nusselt pour tous les fluides étudiés est similaire à celle obtenue pour l'air.
2. L'augmentation du nombre de Nusselt est compatible avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

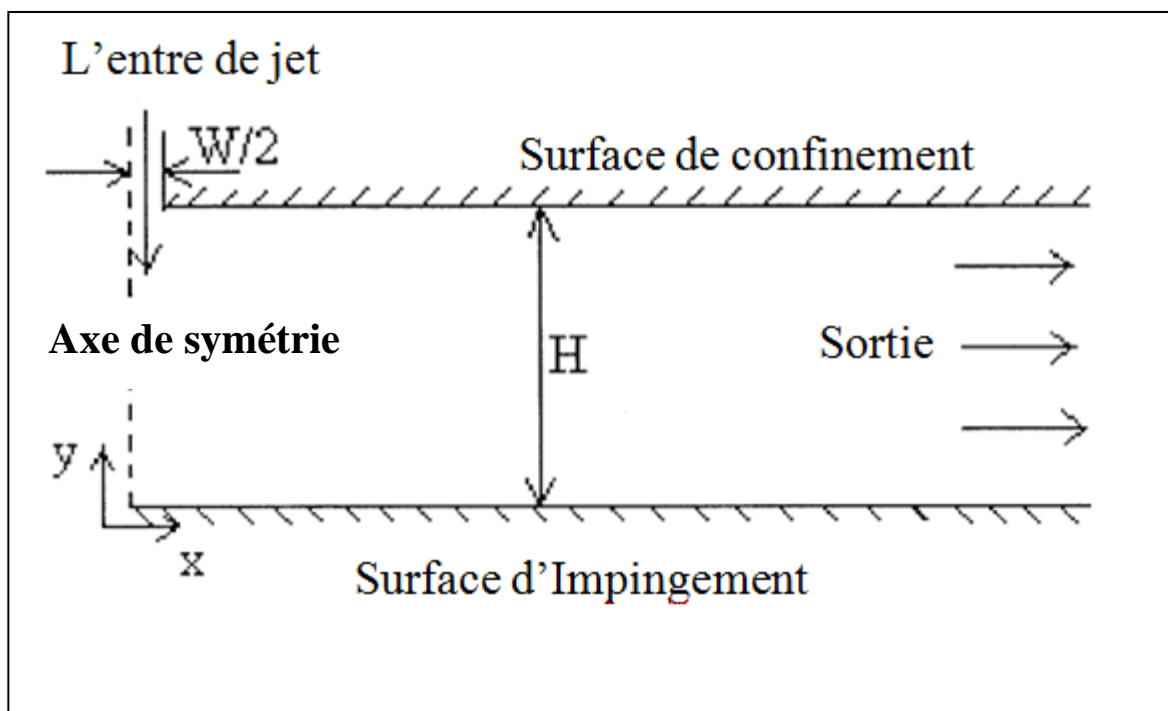


Figure1.5: Configuration du domaine

Gross et al. [13] ont fait une étude expérimentale pour l'investigation des effets du nombre de Prandtl et conjugué aux contraintes de cisaillement sur le transfert de chaleur par convection à l'intérieur d'un tube. L'expérience est réalisée dans un conduit vertical de longueur totale égale à 4,2 m et d'un diamètre intérieur égal à 28,2 mm, et le reste de la description, voir la figure 1.6. Le coefficient de transfert de chaleur de convection a été mesuré pour contre-courant de vapeur et le liquide avec de l'eau, l'éthanol et l'isopropanol dans de larges gammes de nombres de Reynolds et de Prandtl. Pour l'eau ($2,6 \leq Pr_{liq} \leq 4,5$), et pour l'éthanol ($12,4 \leq Pr_{liq} \leq 18,4$) et pour l'isopropanol

($23 \leq Pr_{liq} \leq 55$) aussi le nombre de Reynolds il est séparé en deux gammes pour le film liquide ($0.68 \leq Re_{film} \leq 2000$) et pour la vapeur est ($1000 \leq Re_{vap} \leq 16,500$) avec :

- Pr_{liq} : nombre de Prandtl à l'état liquide.
- Re_{film} : nombre de Reynolds à l'état liquide.
- Re_{vap} : nombre de Reynolds à l'état vapeur.

Les résultats obtenus sont les suivants :

- Avec l'augmentation du nombre de Prandtl liquide l'effet de l'amélioration du transfert de la chaleur devient plus fort qui a été corrélé avec Pr_{liq} .

- le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl liquide.

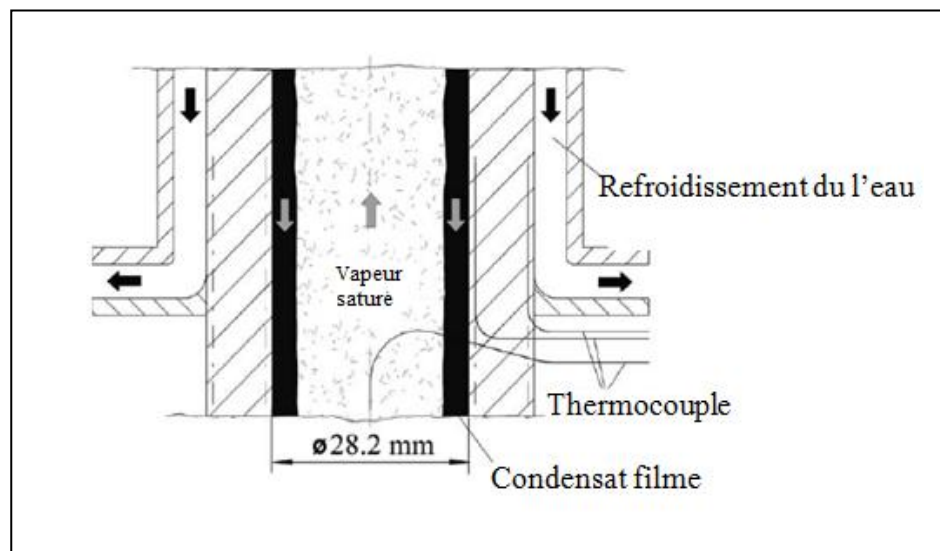


Figure 1.6 : Dispositif de mesure avec l'emplacement du thermocouple.

Schneider et al. [14] ont étudié par une simulation numérique les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle et laminaire en 3D par la corrélation g-jitter dans un cylindre chauffé par la surface d'entrée au point 0 symbolisé (T chaude) et la surface de sortie froide au point H, (T froid) voir la figure 1.7. Les équations de base ont été discrétisées par la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus sont représentés pour les nombres de Prandtl $0.023 \leq Pr \leq 135$ et le nombre de Rayleigh $200 \leq Ra \leq 20000$ et pour une valeur de rapport de longueur sur le diamètre $H/D = 1$, avec $\alpha = 90^\circ$ (horizontal). Ils ont trouvé que les termes de nombre de Fourier d'un fluide est plus sensible à une impulsion de la gravité pour des nombres de Prandtl élevés. En outre, plus le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh augmente il y a plus de tendance à la vitesse de passage à dépasser la vitesse de l'état stationnaire. Ce dernier les propriétés (vitesse, flottabilité) de

fluide est à peu près constant à $Pr \geq 1$, mais diminue avec la diminution de nombre de Prandtl lorsque $Pr < 1$.

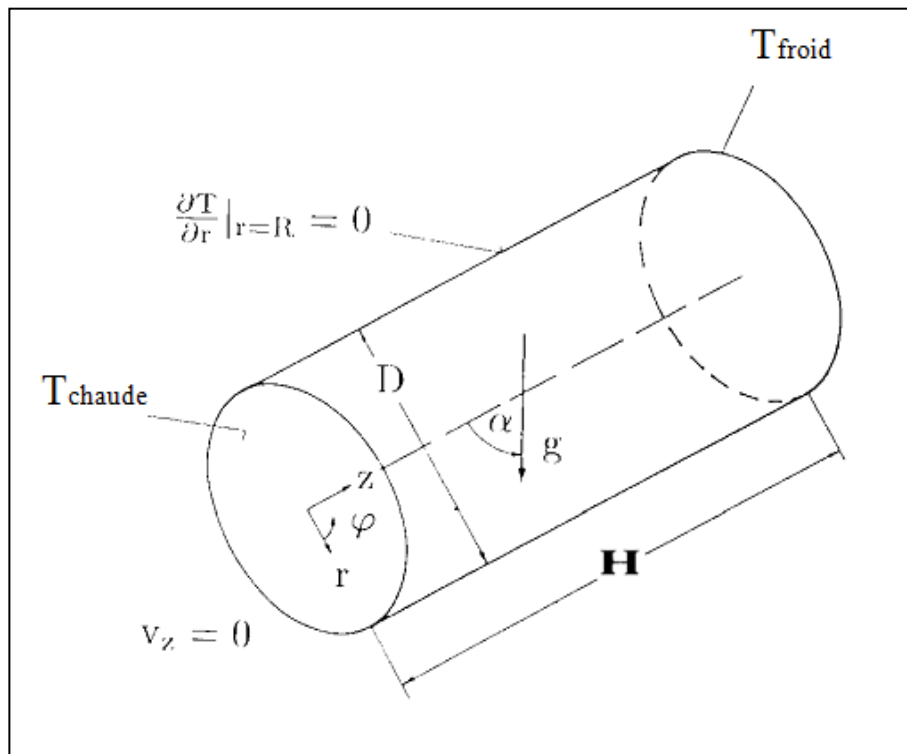


Figure 1.7: Schéma de la géométrie du système et des coordonnées.

Kawamura et al. [15] ont développé l'investigation des effets du nombre Prandtl et du nombre de Reynolds sur le transfert de chaleur turbulent dans un canal. Les résultats sont obtenus par la simulation numérique directe (DNS).

Ils ont choisi un volume de calcul à dimension cubique (6.4δ de Longueur et 3.2δ de largeur et 2δ de hauteur) avec δ demi-hauteur de canal. Aussi il est soumis un flux de chaleur constant sur les parois du cubes (qw) voir la figure 1.8. Les résultats obtenus pour un nombre de Prandtl compris entre 0.25 et 0.71 et les nombres de Reynolds basés sur la vitesse de frottement et la demi-largeur de canal sont 180 et 39, sont les suivants :

1. La valeur de nombre de Prandtl turbulent (Pr_t) proche de la paroi a été trouvé indépendante du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl si $Pr \geq 2$.
2. L'effet du nombre de Reynolds sur le nombre de Prandtl turbulent est plus important pour un faible nombre de Prandtl moléculaire.

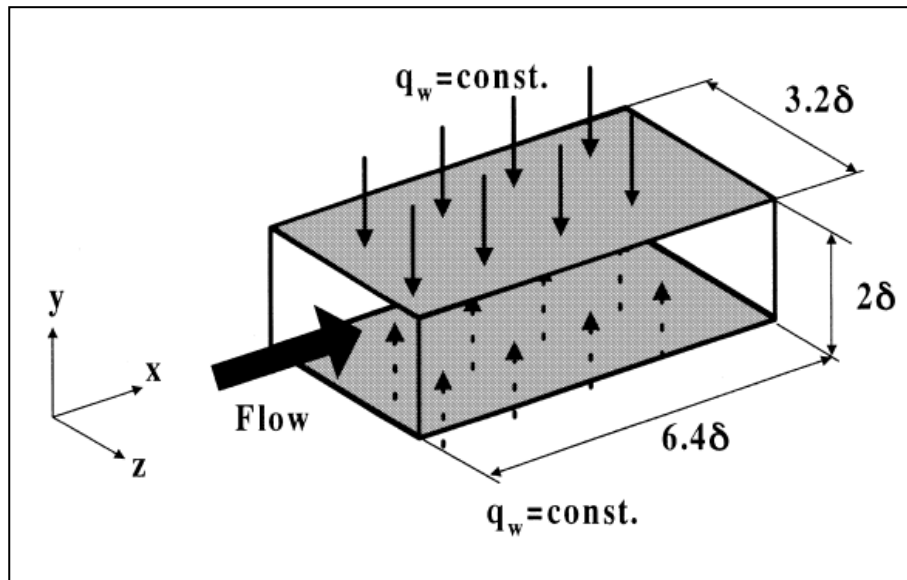


Figure 1.8 : domaine de calcul.

Alberto-Garcia et al. [16] ont présenté une étude expérimentale de la mise en valeur de transfert de chaleur avec des inserts bobine de fil dans les régimes laminaire-turbulent de transition à différents nombres de Prandtl. Le tube utilisé est de diamètre ($d = 18$ mm) constant les rapports de diamètre de fil sur le diamètre de tube « e/d » il et change dans la gamme $0.07 \leq e/d \leq 0.10$ et la longueur de pas des bobines de fil sur le diamètre « p/d », $1.17 \leq p/d \leq 2.68$ voir la figure 1.9. Les résultats sont obtenus pour les nombres de Prandtl compris entre 2.8 et 150 et le nombre de Reynolds pour découvrir les trois régimes (laminaire, transitoire, turbulent), $80 \leq Re \leq 90000$ dans cette étude expérimentale l'eau et mélanges de l'eau- propylène glycol sont utilisés comme fluide de test à températures différentes. Les résultats sont trouvés comme suivant: Pour un écoulement turbulent pur, on peut affirmer que le nombre de Prandtl n'exerce pas une influence sur l'augmentation de transfert de chaleur. Au contraire, quand on travaille avec des fluides à haut nombre de Prandtl dans la région de transition.

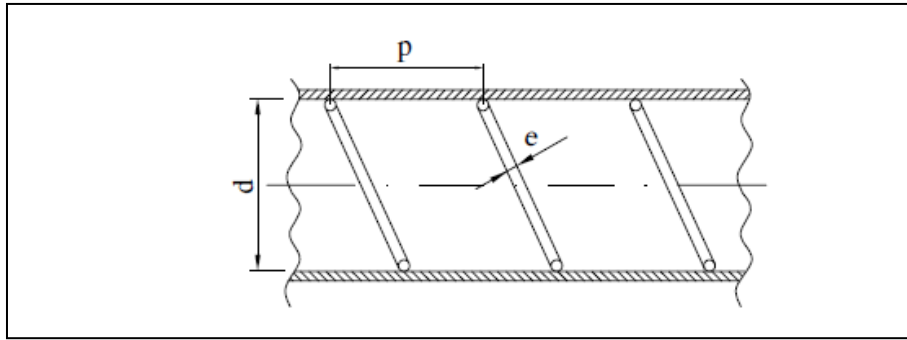


Figure 1.9 : la géométrie du modèle

Vicente et al. [17] ont présenté une étude expérimentale sur le transfert de chaleur et les caractéristiques du frottement des tubes ondulés en spirale dans un écoulement turbulent à différents nombres de Prandtl. Le tube utilisé est de diamètre ($d = 18$ mm) constant et de rugosité de hauteur h qui change dans la gamme $1.03 \leq h \leq 0.48$ (mm) et la longueur de l'ondulation « p » $15.95 \leq p \leq 20.84$ (mm), figure 1.10. Les résultats sont obtenus pour les nombres de Prandtl compris entre 2.5 et 100 et un nombre de Reynolds qui produit un écoulement turbulent $2000 \leq Re \leq 90000$ dans cette étude expérimentale l'eau et éthylène-glycol sont utilisés comme fluide de test.

Les résultats trouvés sont comme suit : les mesures ont été prises à cinq différents nombres de Prandtl afin d'établir avec précision l'influence du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur, c'est à dire l'augmentation du nombre de Nusselt lié à l'augmentation du nombre de Prandtl $Nu \propto Pr^{0.44}$. Par conséquent, l'augmentation du transfert de chaleur est produite par l'augmentation des tubes ondulés avec le nombre de Prandtl.

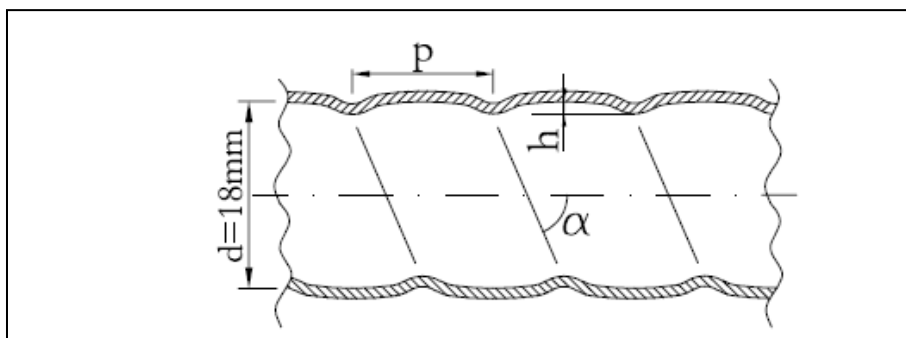


Figure 1.10 : le modèle testé.

Yoo [18] a étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle d'un écoulement dans un anneau avec un cylindre intérieur de petit diamètre pour des valeurs du nombre de Prandtl $0.01 \leq Pr \leq 1$ et pour le rapport de forme du

diamètre intérieur du cylindre sur la largeur de l'anneau $Di/L = 0.5$, où $L = Ri - Ro$, figure 1.11. Les résultats obtenus pour le petit nombre de Prandtl $Pr \leq 0.2$, le débit bicellulaire se produit naturellement à nombre de Rayleigh élevé. Et pour $Pr \geq 0.3$, le nombre de Rayleigh critique (Rac) au-dessus duquel les deux cellules avec les flux bicellulaires existants est diminué, à mesure que diminue Pr .

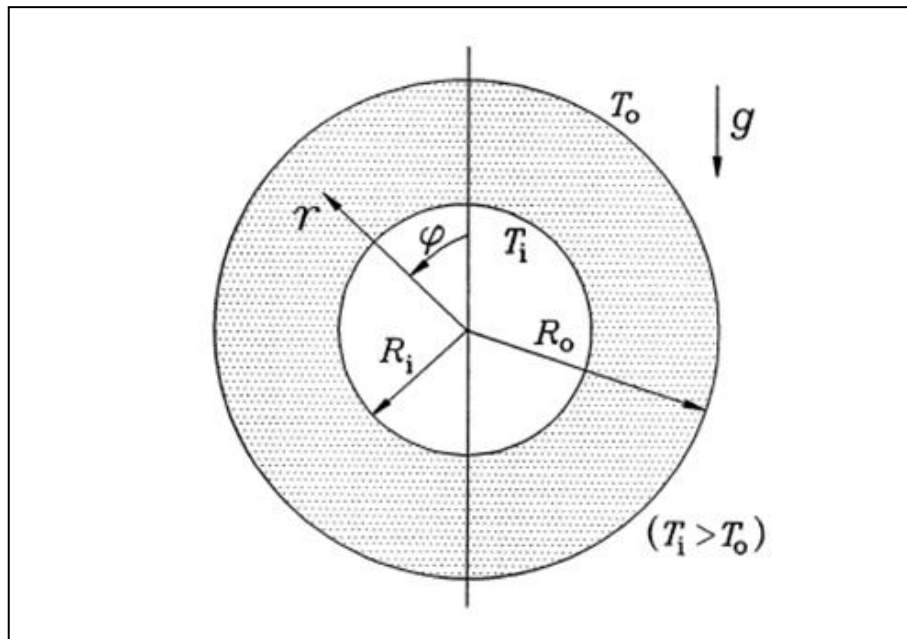


Figure 1.11: la géométrie de problème considéré

Joo-Sik [19] a déterminé numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la bifurcation (embranchement) et des solutions doubles dans la convection normale dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux. La distribution de la température imposée constante et égale à la température de la surface du cylindre intérieur T_i . La température à la surface du cylindre extérieur est maintenue à T_o avec ($T_o < T_i$) (T_o température adimensionnelle de la paroi froide et T_i température adimensionnelle de la paroi chaude) figure 1.11. Et les propriétés thermo-physiques de fluide sont indépendantes de la température, à l'exception de la densité pour laquelle l'approximation Boussinesq est valide. La méthode numérique utilisée est celle des différences finies.

Cette étude est réalisée pour les nombres adimensionnels suivant : le nombre de Prandtl $0.3 \leq Pr \leq 1$ et pour un rapport de forme diamètre intérieur du cylindre sur la largeur de l'anneau $Di/L = 0.5, 2$. Où, $L = Ri - Ro$. Les résultats obtenus sont:

1. Le nombre global de Nusselt d'écoulement de haut en bas est plus grand que celui de l'écoulement ascendant, et les diminutions de différence, à mesure que le nombre de Prandtl augmente.
2. La distribution de la température de l'écoulement de haut en bas diffère de manière significative de celle de l'écoulement ascendant, excepté à la partie plus inférieure de l'anneau.
3. À $0,3 \leq Pr \leq 0,4$ de des transitions d'en bas à vers le haut et haut pour couler en bas sont produites. Quand $0,5 \leq Pr \leq 1$ toutefois seulement la transition vers le bas de l'écoulement ascendant se produit avec la diminution du Ra.

El-Sherbiny et A. R. Moussa [20] ont étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle laminaire dans des couches liquides annulaires entre deux cylindres isothermes horizontaux concentriques de température différentes. L'étude numérique est faite pour un nombre de Prandtl $0.01 \leq Pr \leq 10^3$ et le nombre de Raleigh $10^2 \leq Ra \leq 10^6$ et pour le rapport des rayons $RR = r_o / r_i$, $2 \leq RR \leq 10$ figure 1.12. Les résultats montrent que la valeur maximale de la vitesse est proche des parois. Une diminution continue le long du rayon est représenté avec des changements plus élevés près des parois des cylindres. Aucun autre changement a été remarqué pour $Pr \geq 10$.

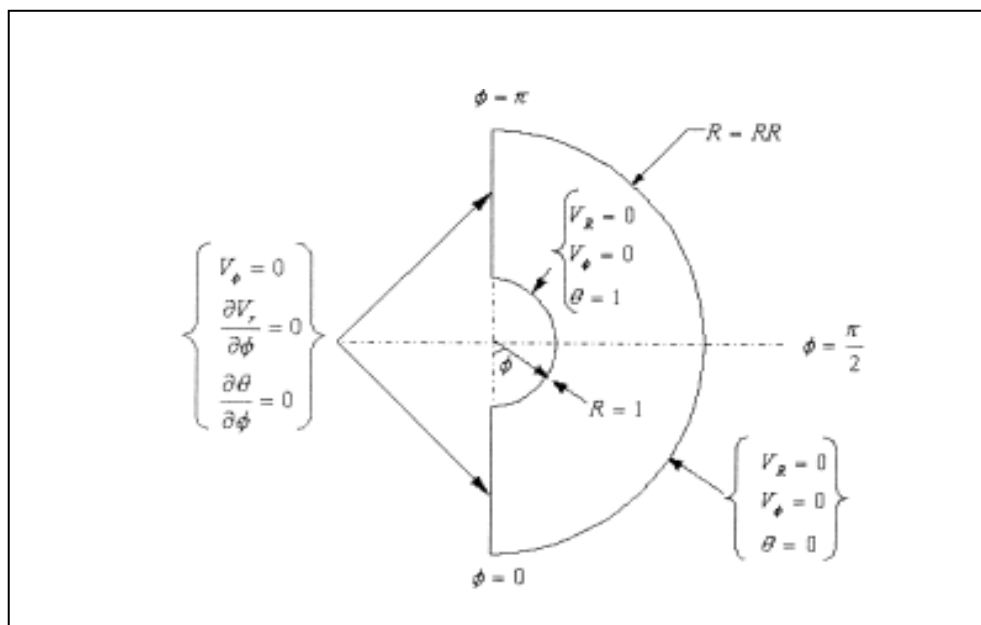


Figure 1.12 : Domaine de résolution et conditions aux limites.

Nazrul Islam et al. [21] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte en régime laminaire stationnaire à l'entrée de l'espace annulaire de deux cylindres coaxiaux. Le tube intérieur est porté à un flux de chaleur constant, tandis que le tube externe est adiabatique. La procédure de base numérique utilisée est l'algorithme SIMPLE et les équations de base sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les investigations numériques ont été réalisées avec les paramètres suivant le nombre de Prandtl $0.7 \leq Pr \leq 5.42$ (eau et air) et le nombre de Reynolds $200 \leq Re \leq 1000$ et le nombre de Rayleigh $10^4 \leq Ra \leq 10^8$ et pour une rapport des rayons rayon extérieur sur le rayon intérieur $R=r_o/r_i$ $1.5 \leq R \leq 10$. Ils ont trouvé que l'augmentation du nombre de Rayleigh engendre une augmentation du transfert de chaleur. Aussi, ils ont montré que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl et le rapport d'aspect.

Zi-Tao Yu et al. [22] ont étudié par une simulation numérique la dépendance de nombre de Prandtl à la convection naturel en régime laminaire dans un cylindre horizontal de température (T_{out}) avec un cylindre triangulaire interne et coaxial de température (T_{in}) avec $T_{out} < T_{in}$. Toutes les simulations ont été réalisées avec les valeurs des nombres de Prandtl $10^{-2} < Pr < 10^3$ et des nombres de Rayleigh, $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et pour le rapport $AR = R_{out}/R_{in}$ où $AR = 1.2$ et 2.0 figure 1.13. Les résultats montrent que pour les nombres de Prandtl faibles $Pr = 0.03$ les modes d'écoulement et les distributions de température sont complètement différentes de celles pour des nombres de Prandtl élevés, et ils sont presque indépendant du nombre de Prandtl $Pr \geq 0.7$ lorsque, surtout à bas nombres de Rayleigh. Aussi les coefficients de transfert de chaleur pour $Pr = 0.03$ sont légèrement inférieurs à ceux de $0.7 \leq Pr \leq 7$, qui sont plus petits que ceux de $Pr > 7$.

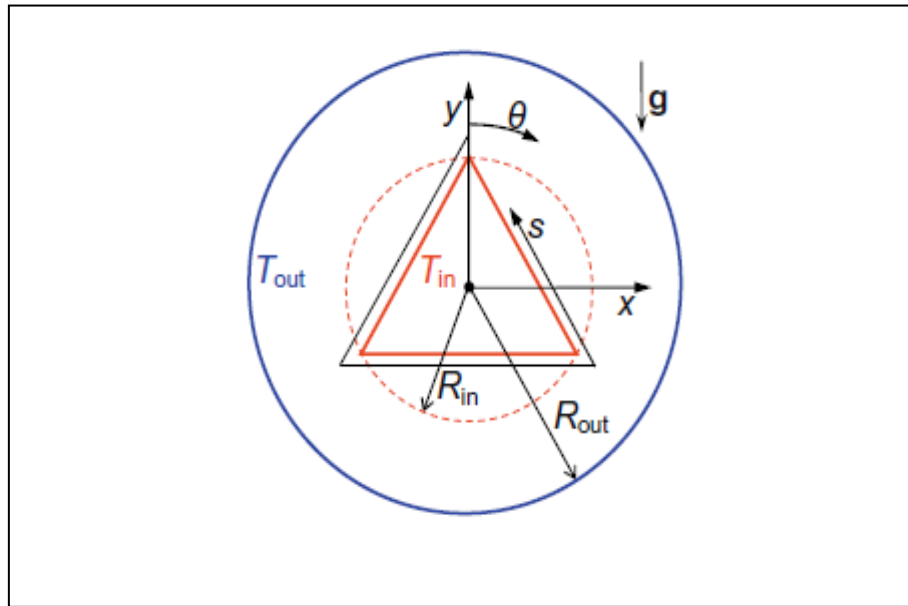


Figure 1.13: Schéma du problème considéré

Pessoet et al. [23] ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle à de bas nombres de Prandtl et les différences de densité importante dans une cavité carrée de largeur « L », est une cavité bidimensionnelle où les deux parois verticales sont maintenues à des températures différentes « T_h » et « T_c », Les parois sont rigides et imperméables, et des conditions aux limites sans glissement sont imposées aux frontières figure 1.14. Le débit est stationnaire et Le fluide est incompressible, Newton et sa densité est censé être linéairement dépendants de la température dans tous les termes des équations régissant. Les résultats effectués pour les gammes des nombres de Prandtl $0.0071 \leq Pr \leq 7.1$ et le nombre Rayleigh $10 \leq Ra \leq 10^8$ et pour le nombre de Gay-Lussac $0 \leq Ga \leq 2$. L'influence du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen pour $Ga = 0,3$ et $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ est représentée. Les augmentations de nombre de Nusselt que les augmentations de nombre de Prandtl. En particulier l'effet du nombre de Prandtl est plus évident que le nombre de Rayleigh augmente.

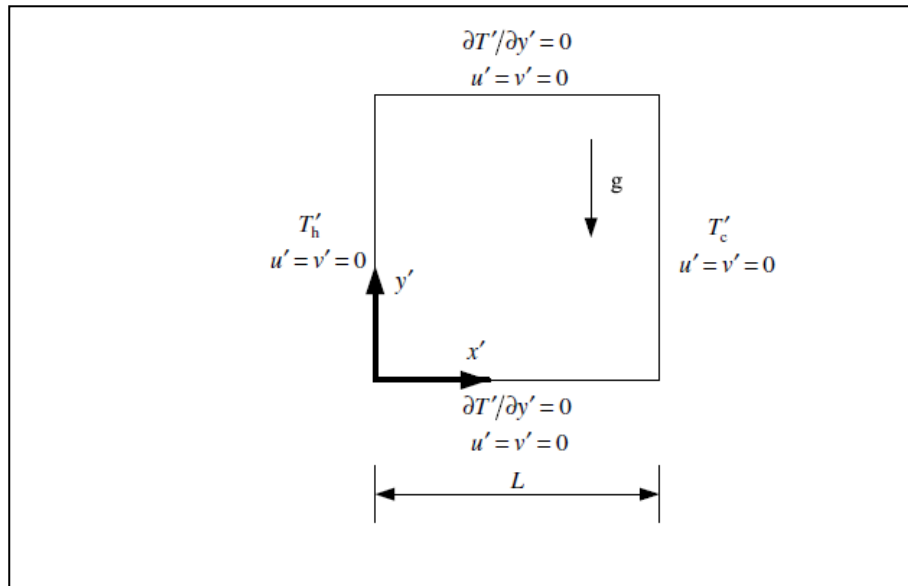


Figure1.14 Système physique et des conditions aux limites.

Koca et al. [24] ont étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle dans des enclos triangulaire avec un échauffement localisé en bas. La configuration schématique de l'enceinte triangulaire à deux dimensions avec les paramètres importants géométrique Il est un triangle la longueur "L" en bas, et la hauteur du mur vertical "H". La paroi en dessous est en partie chauffée avec "TH" et la paroi inclinée est refroidi avec "T_c". Paroi verticale est isolée. Le rapport d'aspect de la cavité est définie comme $AR = H / L = 1$. La longueur de la partie chauffée est représentée par "W" et le centre de localisation est "s". figure 1.15. L'écoulement il et considéré stable, laminaire, incompressible et à deux dimensions La variation des propriétés du fluide avec la température et terme de dissipation visqueuse dans l'équation énergétique à été négligé toute, pour les quels l'approximation de Boussinesq a été valide.

Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie sont discrétisées par la méthode des différences finit et les Equations algébriques sont obtenues par des séries de Taylor et ils ont résolu par la technique de « Successive Under Relaxation » (SUR) cette étude en réalisée pour les nombre suivant : le nombre de Prandtl $0.01 \leq Pr \leq 15$ et le nombre de $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ et $0.1 \leq w \leq 0.9$ et pour $0.15 \leq s \leq 0.95$ les résultats s sont obtenus : Le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl pour tous les cas. Des champs d'écoulement et de température sont affectés avec le changement

du nombre de Prandtl et aussi Les valeurs du nombre moyen de Nusselt augmentent également avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

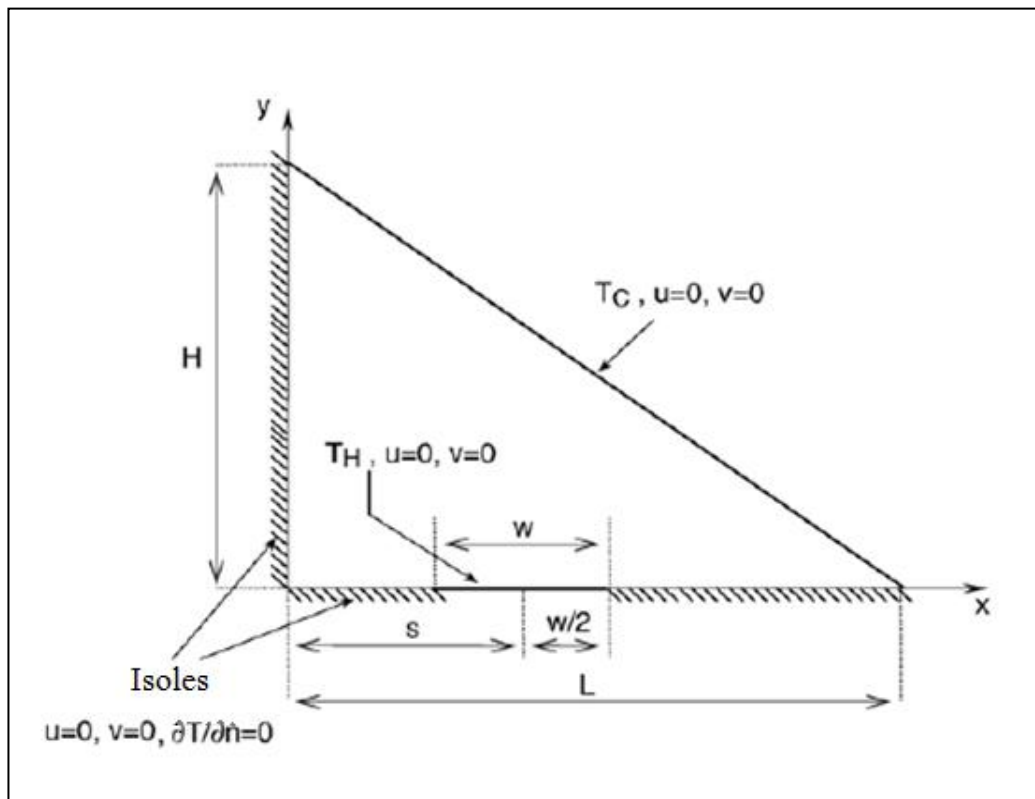


Figure 1.15 : Modèle physique

Barletta et al. [25] ont étudié analytiquement et numériquement la convection mixte laminaire dans un canal vertical, les deux surfaces extérieures du canal sont maintenues à une température T_0 et le produit des nombre de Prandtl, Reynolds, Gebhart est symbolisé par $\Xi = \text{Pr Ge Re}$. Ils ont observés que la solution existe seulement pour une valeur du nombre de Reynolds pour laquelle Ξ ne dépasse pas $\Xi = \text{Ge Pr Re} \leq 228.12869$, c'est-à-dire à des limites supérieures pour un écoulement en régime laminaire.

T. S. Chang et Y. H. Shian [26] ont fait une étude numérique de la convection mixte avec écoulement pulsatoire dans un canal vertical ouvert, pour étudier l'effet d'une cloison horizontale sur les caractéristiques du transfert de chaleur figure 1.16. Ils ont explorés les influences des fréquences de pulsation, de l'augmentation du nombre de Prandtl et de la position de cloison pour différents nombres de Richardson. Cette étude en réalésée pour les nombre a dimensionnelles suivant nombre de Prandtl $\text{Pr} = 0.71$, et nombre de Reynolds $\text{Re} = 250$ et pour une gamme rapporte de nombre de Grashof sur le

nombre de Reynolds $-0.1 \leq Gr/Re \leq -3.9$. Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur est meilleur lorsqu'on utilise la cloison et l'écoulement pulsatoire. Aussi, le nombre de Nusselt moyen augmente pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds, de la variation de pulsation et du nombre de Prandtl.

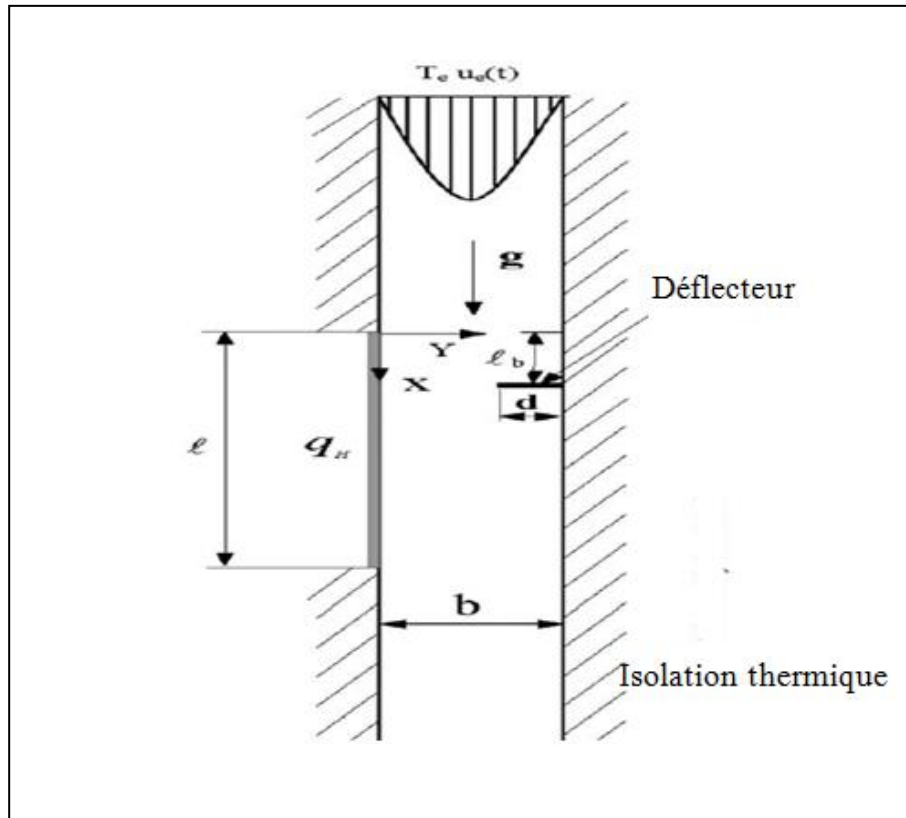


Figure1.16 : Schéma du système physique.

M. M. Rahman et al. [27] ont effectué une étude numérique sur la convection mixte dans une cavité carrée par la méthode des éléments finis. Pour l'étude de ce sujet sont utilisés une enceinte ventilée carrée de dimensions $L \times L$ (m^2) avec une entrée située sur le bord gauche de la paroi verticale isolée à hauteur, où le port de sortie est fixé à la partie supérieure de la surface verticale droite chauffée à partir d'un flux « q » voir la figure 1.17. L'étude couvre une gamme de nombre Reynolds (Re) 50-200, une gamme de nombre de Prandtl (Pr) 0,71 à 50 et une série de nombre de Richardson de 0 à 10 et pour une position Hi dans la gamme $0.05 \leq Hi \leq 0.95$. les résultats obtenus pour l'effet de nombre de Prandtl et pour les bas Ri , le nombre de Nusselt atteint un minimum à proximité de l'apparition de la séparation de l'écoulement le long de la chauffée mur. Ce comportement est non réalisé pour Pr élevé. L'effet de l'augmentation du nombre de

Prandtl sur le transfert de chaleur total est considérablement plus grand que l'effet en augmentant Ri .

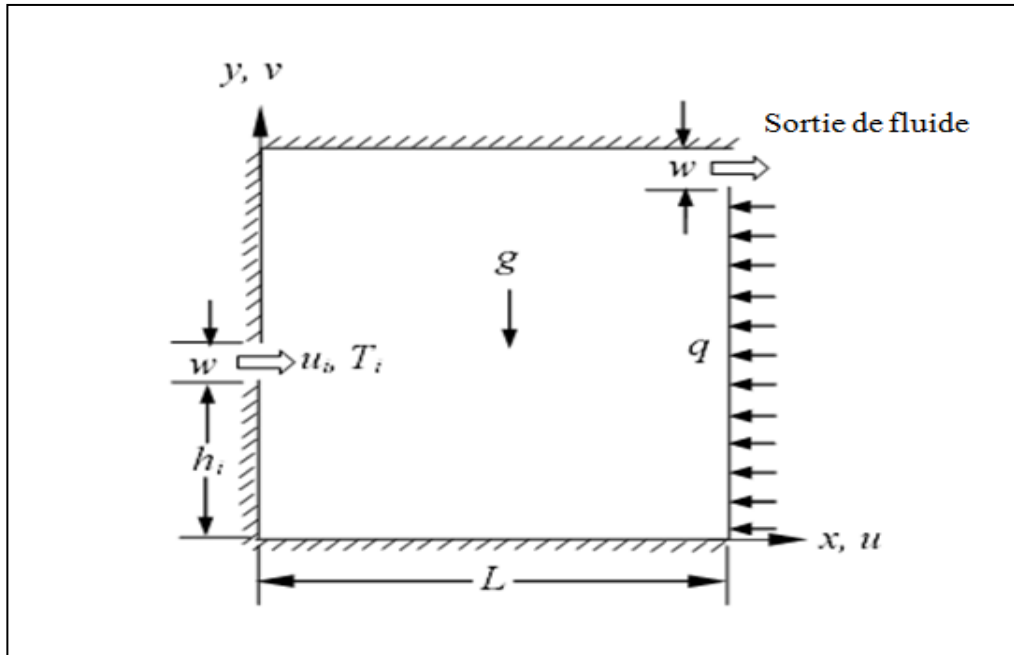


Figure1.17 : Schéma du problème considéré et de ses coordonnées.

Les résultats d'une étude expérimentale sur la convection mixte laminaire à l'intérieur d'un conduit cylindrique, horizontal de diamètre intérieur 30mm et une longueur de 900mm sont présentés par **Hussein et Yassin [28]**. Le rapport d'aspect est $L/D = 30$, le nombre de Reynolds compris entre 400 et 1600, et le flux de chaleur entre la valeur $60W/m^2$ et $400W/m^2$. Ils concluent que la température de surface le long du tube serait plus élevée pour le cas où les Reynolds sont faibles que pour le cas où les Reynolds sont grands, par conséquent, la température de surface augmente à mesure que la longueur de section augmente du fait de la résistance de l'écoulement et le débit massique. Les valeurs du nombre de Nusselt local se déplacent vers la gauche de la Nu_x pour le même flux de chaleur et les valeurs élevées de nombre de Re , en raison de la domination de la convection forcée ; par contre, pour le même flux de chaleur et le faible nombre de Re , les valeurs de Nu_x se déplacent vers la droite de la Nu_x à cause de la domination de la convection naturelle ; Ils ont obtenu une corrélation qui donne le nombre de Nu moyenne en fonction de (Gr, Pr, Re) moyenne et L/D comme suite : $\bar{Nu} = 3.1894(\bar{Gr} * \bar{Re} * \bar{Pr} * L/D)^{0.264}$.

Hussein [29] étudie expérimentalement l'effet de différentes géométries d'entrée sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un écoulement laminaire à l'intérieur d'une conduite circulaire, horizontal avec un flux de chaleur constant sur la paroi. Il a effectué 130 essais pour trois géométries d'entrée : « calming section entrance, Bell month entrance and sharp edged entrance ». La gamme du nombre de Grashof varie de $3.12 \cdot 10^5$ à $1.72 \cdot 10^6$ et le nombre de Reynolds est varié de 400 à 1600. L'auteur a constaté que les valeurs de la température de surface de la conduite suivant la distance axiale ont été plus élevées pour les faibles nombre de Reynolds que pour les nombres de Reynolds élevés, en raison de la domination de la convection libre sur le processus de transfert de chaleur. Il a observé que, pour le même nombre de Grashof, la température de surface pour le cas « calming section entrance » avec $L/D = 80$, a été plus élevé que d'autre géométries d'entrée, en raison de la résistance à l'écoulement, et la baisse du débit massique. L'auteur conclu que les valeurs de Nu_x seraient plus élevés pour « Bell month entrance » que pour d'autres géométries d'entrée en raison de différences dans la température moyenne et de la densité de l'air. Une corrélation empirique été développée qui donne le nombre de Nusselt moyen en fonction de nombre de Grashof, nombre de Prandtl et le nombre de Reynolds, avec une précision globale de l'ordre de 10%
$$\overline{Nu} = 3.2284(\overline{Gr} * \overline{Pr} / \overline{Re})^{0.368}$$

CHAPITRE 2

MODELISATION MATHEMATIQUE

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons exclusivement les équations modélisant le problème étudié. Sous leur forme adimensionnelle, elles expriment les lois de bilan appliqué sur un élément infinitésimal de fluide. Il s'agit des équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les démonstrations nécessaires à l'obtention de ces équations sont bien expliquées, et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de la mécanique des fluides et de transfert thermique. Notre étude contient un cylindre horizontal à section circulaire constante. Il est à signaler que dans ce travail les propriétés physiques du fluide seront fonctions de la température et que les milieux fluide et solide seront considéré comme un même domaine. C'est les transferts conjugués.

II.2. La géométrie du modèle

La configuration étudiée est représentée sur les figures (2.1 et 2.2). Il s'agit d'un long conduit horizontal de longueur $L=1\text{m}$, de diamètres intérieur $D_i=0.96\text{cm}$ et extérieur $D_o=1\text{cm}$ (l'épaisseur est de 0.02 cm). Ce conduit est en Inconel de conductivité thermique ($K_s=15\text{W/m.K}$), qui est un alliage très recommandé dans les chauffages directs entre l'élément fluide et le solide. Une génération de chaleur interne uniforme est produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi. La résistance électrique du conduit est égale à 0.16 Ohms , l'intensité du courant électrique est égale à 40 Ampères . Le conduit est utilisé pour le chauffage d'un écoulement laminaire, incompressible pour les quatre fluides étudiés : Eau, Butanol, Syltherm800, Ethylène Glycol. L'écoulement à l'entrée est de type Poiseuille, avec une vitesse moyenne égale à $1.7 \cdot 10^{-2}\text{ m/s}$ et une température constante égale à 15°C . La surface externe du tube est non isolée, les pertes convective et radiative

avec l'air environnant sont prises en compte. La viscosité et la conductivité thermique du fluide sont fonctions de la température, la masse volumique est une fonction linéaire de la température et l'approximation de Boussinesq est adoptée. Il s'agit donc d'un problème de transfert conjugué modélisé par les équations de conservation adimensionnelles.

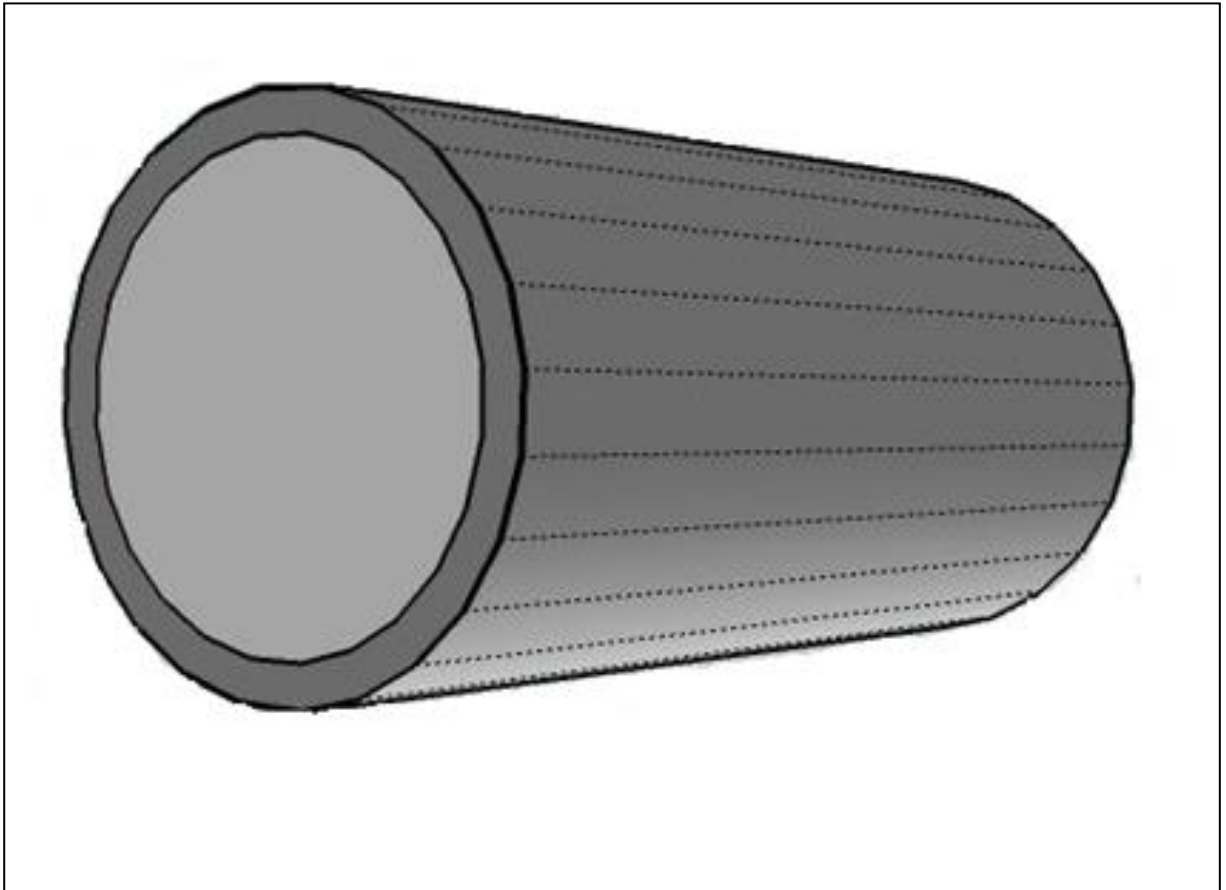


Figure 2.1 : Le modèle physique considéré.

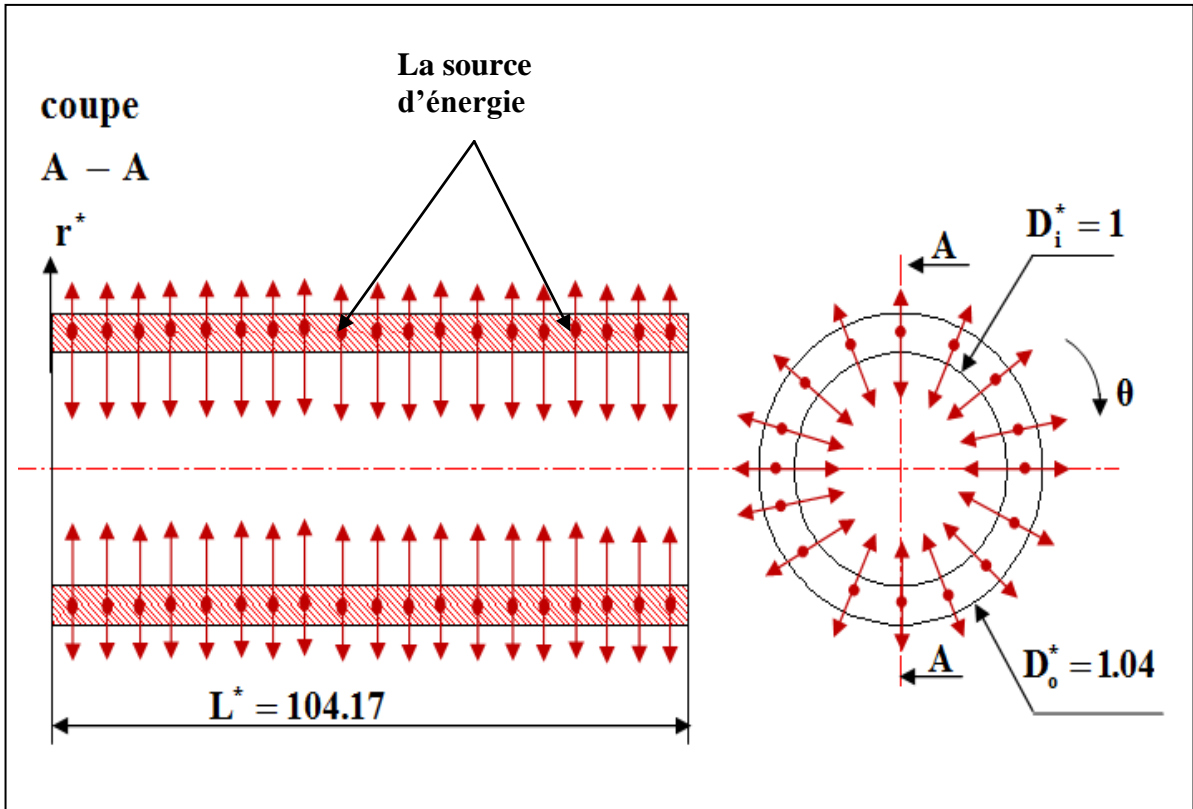


Figure 2.2 : Schémas représentant des coupes, axiale et transversale du modèle physique.

II.3. Modèle mathématique

Dans le cylindre, l'écoulement du fluide soumis à un chauffage pariétal est gouverné par les équations de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie.

$$A : t^* = 0 , \quad U^* = V^* = W^* = T^* = 0 \quad (2.1)$$

Pour : $t^* > 0$

Equation de conservation de quantité de mouvement radiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (v^* U^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* U^*) - \frac{V^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^*} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0^*} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* V^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* V^*) + \frac{U^* V^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \\ - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement axiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* W^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* W^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \\ \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses sont:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr}^* &= 2\mu^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} & \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* &= \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta\theta}^* &= 2\mu^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} + \frac{U^*}{r^*} \right] & \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* &= \mu^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] \\ \tau_{zz}^* &= 2\mu^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} & \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* &= \mu^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Equation de conservation de l'énergie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* T^*) = G^* - \\ \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{Avec } G^* = \begin{cases} K_s^*/(Re_0 Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Et les densités de flux thermiques sont:

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (2.7)$$

Equation de conservation de la masse:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} + \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.8)$$

II.4. Les conditions aux limites

A l'entrée du tube: $z^* = 0$

Domaine fluide:

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad U^* = V^* = T^* = 0, \quad W^* = 2(1 - 4r^{*2}) \quad (2.9)$$

Domaine solide:

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad U^* = V^* = W^* = T^* = 0 \quad (2.10)$$

A la sortie du tube: $z^* = 104.17$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Domaine solide :

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad U^* = V^* = W^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

Les conditions dynamiques sont considérées et les variables dépendantes sont correctement interpolées au voisinage de l'axe. Cette interpolation permet de lever la singularité en ce point:

Pour $0 \leq z^* \leq 104.17$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Sur la face externe du conduit la vitesse doit respecter les conditions de non glissement (composantes de la vitesse nulles) et les pertes thermiques sont prises en compte.

$$r^* = 0.5208 \quad 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \left\{ \begin{array}{l} U^* = V^* = W^* = 0 \\ -K \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{(h_r + h_c)}{K_0} D_i T^* \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\text{Avec :} \quad h_r = \varepsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty) \quad (2.15)$$

L'émissivité de la surface extérieure est égale à $\varepsilon = 0.9$ et $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ la constante de Stephan-Boltzman.

Le coefficient de transfert par convection h_c entre la paroi extérieur de la conduite et l'air environnant donné par la relation (2.16) de **Churchill et Chu [30]** valable pour tous les nombres de Prandtl et de Rayleigh dans l'intervalle $10^{-6} \leq Ra \leq 10^9$

$$Nu = \frac{h_c D_i}{K_{\text{air}}} = \left[0.6 + \left(\frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left(1 + (0.559 / Pr_{\text{air}})^{9/16} \right)^{8/27}} \right) \right]^2 \quad (2.16)$$

Bien que cette corrélation exprime un Nu moyen, elle peut être approximativement utilisée pour déterminer localement le nombre de Nusselt. Et la définition des nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl est :

$$Ra = \frac{g\beta [T(R_0, \theta, z) - T_\infty] D_0^3}{\alpha_{\text{air}} \nu_{\text{air}}}, \quad Pr = \nu_{\text{air}} / \alpha_{\text{air}} \quad (2.17)$$

Les propriétés thermo physiques de l'air sont évaluées à la température locale du film:

$$T_{\text{film}} = [T(R_0, \theta, z) + T_\infty] / 2 \quad (2.18)$$

Suivant la direction angulaire les conditions périodiques sont imposées pour l'ensemble du domaine radial et axial.

$$\text{Pour : } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \text{et} \quad 0 \leq r^* \leq 0.5 \left\{ \begin{array}{l} U^*(r^*, 0, z^*, t^*) = U^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ V^*(r^*, 0, z^*, t^*) = V^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ W^*(r^*, 0, z^*, t^*) = W^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ T^*(r^*, 0, z^*, t^*) = T^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

II.5. Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par:

$$Nu(\theta, z) = \frac{h(\theta, z) D_i}{K_0} = \left[\left(\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right)_{r^*=0.5} \right]^2 \quad (2.20)$$

La température moyenne de mélange adimensionnelle dans une section $T_m^*(z^*)$ étant définie par :

$$T_m^*(z^*) = \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} W^*(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} W^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta} \quad (2.21)$$

Le nombre de Nusselt local axial et moyen circonférentiel est:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)} \right] d\theta \quad (2.22)$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide fluide:

$$Nu = \frac{1}{(2\pi)(104.17)} \int_0^{2\pi} \int_0^{104.17} Nu(\theta, z^*) dz^* d\theta \quad (2.23)$$

Les nombres adimensionnels qui caractérisent ce problème de convection mixte sont évalués à la température du fluide à l'entrée. Cette dernière est la température de référence utilisée dans l'évaluation des propriétés physiques du fluide servant à calculer les groupements adimensionnels du problème :

Le nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\nu_0}{a_0}$

Le nombre de **Grashof** modifié basé sur la production volumique est donné par l'expression suivante :

$$Gr_0^* = \frac{g\beta_0 D_i^3 \Delta T}{\nu_0^2} = \frac{g\beta D_i^3 (GD_i^2 / k_s)}{\nu_0^2}$$

Le nombre de Richardson : $R_{i_0} = \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}$

Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre interne de la conduite : $Re_0 = \frac{V_0 D_i}{\nu_0}$

CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE

III.1. Introduction

Dans la pratique, tous les phénomènes physiques des écoulements de fluide en régime laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P) non linéaires, qu'il convient de résoudre pour obtenir et connaître les caractéristiques de l'écoulement (champs d'écoulements, champs thermiques). La résolution de système d'équations (formé par l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie) analytiquement est pratiquement impossible de fait de la non- linéarité d'une part, et le fort couplage d'autre part comme notre cas (la convection mixte). Donc, il est nécessaire d'utiliser une méthode numérique adéquate pour trouver les meilleures approximations. Pour obtenir cette solution numérique, on doit transformer les équations différentielles en système d'équations algébriques au moyen d'une méthode de discrétisation la plus fréquemment utilisée dans les problèmes d'écoulement et de transfert thermique, telle que la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, et la méthode des éléments finis.

Dans les méthodes numériques l'ordre de discrétisation est très important car il permet de réduire un tant soit peu l'erreur de troncature. C'est pour cela que dans ce travail, la discrétisation des équations est du second ordre. Celle du premier ordre ayant déjà été utilisée ultérieurement.

III.2.1. Choix de la méthode numérique

Pour notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis. Cette méthode intègre les équations de transport sur un volume fini appelé « Volume de Contrôle » couvrant le domaine physique. Le résultat de discrétisation en un point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable aux valeurs des variables des points voisins. La discrétisation des équations de transport par cette méthode présente certains avantages du fait qu'elle permet un traitement plus facile des milieux hétérogènes et garantit la conservation de masse et de quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle, et dans tout le domaine de calcul. Aussi, elle facilite la linéarisation des termes sources s'ils ne le sont pas **Pantankar [31]**.

III.2.2. Le maillage

C'est une opération qui permet de transformer le domaine physique compris entre $0 \leq r^* \leq R_e/D_i$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq L/D_i$ en un domaine discret constitué d'un nombre fini de volumes de contrôle élémentaires cylindriques, contigus et sans discontinuité d'interface, de dimensions Δr^* , $r^* \Delta \theta$ et Δz^* suivant les directions respectives r^* , θ et z^* . A l'intérieur et au centre de chaque volume sera défini un point (ou un nœud) représentatif de l'ensemble du volume. Les figures 3.1 (A-B) schématisent successivement le domaine numérique et un volume de contrôle typique ($\Delta v^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*$) dont le centre géométrique est associé au nœud **P** et limité par ses six faces : les faces Nord et Sud dans la direction radiale dont leurs centres sont (**n**) et (**s**), Est et Ouest dans la direction angulaire dont leurs centres sont (**e**) et (**w**) et Frontale et Dorsale dans la direction axiale dont leurs centres sont (**t**) et (**b**). Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes, dans la direction radiale deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction angulaire deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et en fin dans la direction axiale les deux volumes adjacents aux faces Frontale et Dorsale contenant en leurs centres les nœuds **T** et **B**.

Dans le maillage les différentes dimensions sont importantes à connaître et elles seront bien explicitées dans les figures qui suivent et qui présentent différents plans de vue du volume considéré. Les angles et les distances entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **T** et **B** sont $d\theta_e$, $d\theta_w$, dr_n , dr_s , dz_t et dz_b , respectivement tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement Δr_N , Δr_S , $\Delta \theta_E$, $\Delta \theta_W$, Δz_T et Δz_B .

Les fonctions scalaires, température et pression, sont stockées dans le nœud **P** du volume typique tandis que les fonctions vectorielles telles les composantes de vitesse, sont situées au centre et perpendiculairement à travers les six faces de chaque volume entourant **P**. Ainsi, les équations de Navier-Stokes sont intégrées dans des volumes finis décalés, **Patankar [31]**. Tandis que les équations de continuité et de l'énergie seront discrétisées dans un volume typique. Cette localisation faciale des composantes de vitesses entraînera un décalage de leur volume correspondant par rapport au volume de contrôle principal. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour l'obtention de solutions physiquement acceptables **Pantankar [31]**. Ainsi, c'est à travers la totalité de ce domaine numérique

maillé que seront intégrées sur chaque volume de contrôle les équations modélisantes écrites sous la forme conservative.

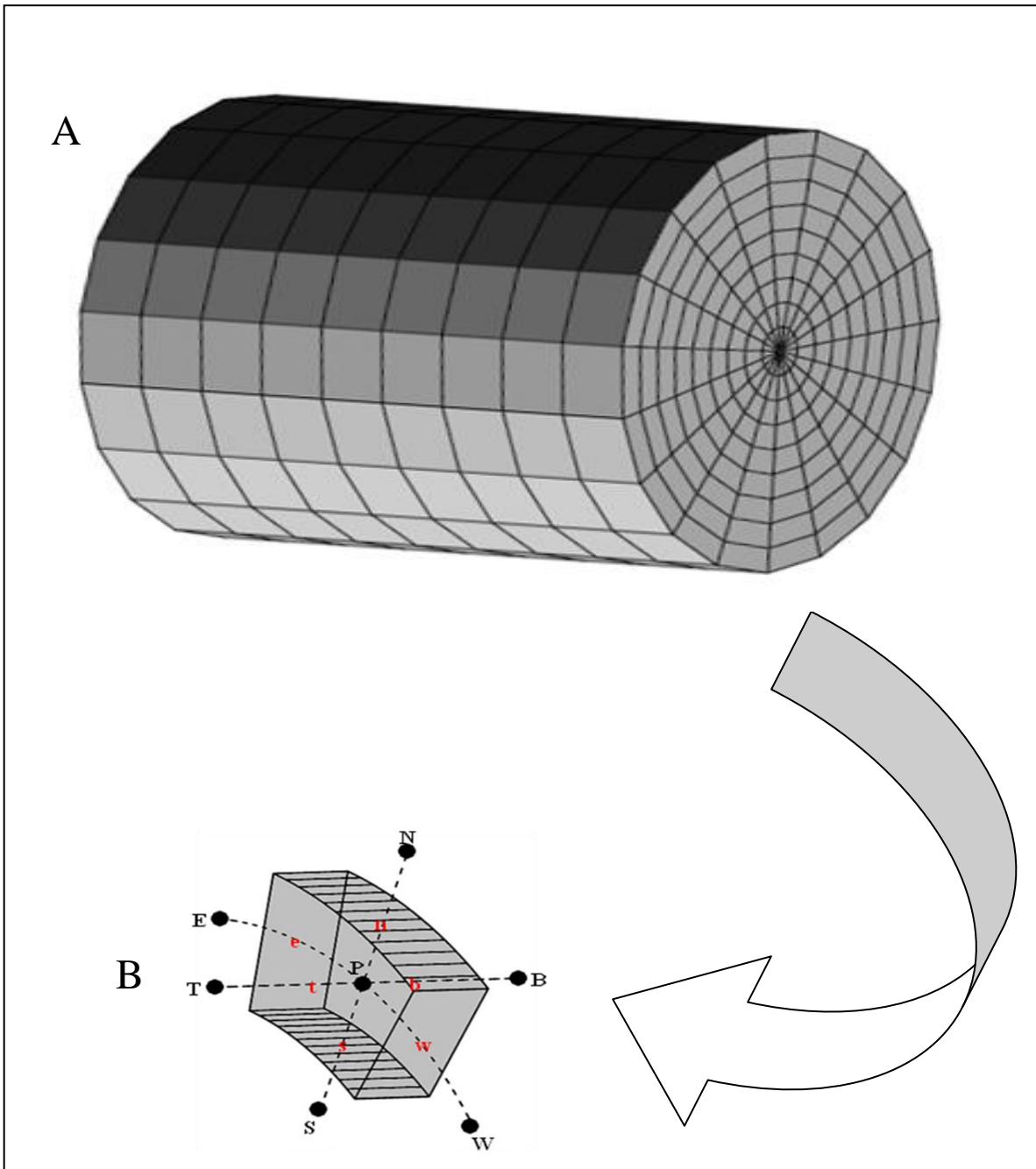


Figure 3.1. (A) Le maillage du domaine physique en 3D, (B) Le volume typique.

III.3. Discrétisation des équations du modèle

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques. C'est dans cette voie nous avons fait le choix d'une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. On rappelle que les équations de conservation peuvent être écrites sous la forme générale conservative suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* \phi) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (v^* \phi) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* \phi) = \\ \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\Gamma_\phi r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma_\phi \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \right] + S_\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où ϕ est la variable généralisée, S_ϕ est le terme de source, Γ_ϕ est le coefficient de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur dans notre cas).

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans son volume fini typique ou décalé selon le cas. Pour simplifier l'écriture, on élimine les étoiles dans les exposants des variables non dimensionnelles.

III.4. Définitions

III.4.1. La discrétisation temporelle au second ordre

Elle est obtenue à partir de manipulations mathématiques dans les développements en séries de Taylor d'une variable ϕ par rapport au temps :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.3)$$

Si l'équation (3.3) est diminuée de l'équation (3.2) multipliée par 4, on peut montrer que :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t^*} \right|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \approx \frac{3\phi^{t^*+\Delta t^*} - 4\phi^{t^*} + \phi^{t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} + O(\Delta t^*)^2 \quad (3.4)$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} = \frac{3\phi^{t^*+\Delta t^*} - 4\phi^{t^*} + \phi^{t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} \quad (3.5)$$

Aussi, si on multiplie l'équation (3.2) par 2 et retranche du produit l'équation (3.3) on peut montrer que :

$$\phi^{t^*+\Delta t^*} \approx 2\phi^{t^*} - \phi^{t^*-\Delta t^*} + (\Delta t^*)^2 \quad (3.6)$$

Et donc, une approximation, avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ d'une variable $\phi^{t^*+\Delta t^*}$ est :

$$\phi^{t^*+\Delta t^*} = 2\phi^{t^*} - \phi^{t^*-\Delta t^*} \quad (3.7)$$

Cette discrétisation est celle d'Adam-Bashforth.

III.4.2. La discrétisation spatiale au second ordre

Les discrétisations spatiales se feront selon le schéma des différences centrées qui est un schéma d'une précision du second ordre.

Considérons, dans la direction axiale, les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_P = \phi_{t^*} - \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{t^*} + \frac{1^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_{t^*} - \frac{1^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_{t^*} + \dots \quad (3.8)$$

$$\phi_T = \phi_{t^*} + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{t^*} + \frac{1^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_{t^*} + \frac{1^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_{t^*} + \dots \quad (3.9)$$

En soustrayant l'équation (3.9) de (3.8), on trouve :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{t^*} \approx \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_{t^*}} - \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right|_{t^*} (dz_{t^*})^2 \quad (3.10)$$

Et donc

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{t^*} = \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_{t^*}} \quad (3.11)$$

Avec une erreur de troncature d'ordre $(dz_t)^2$

Dans tous les cas on utilise des discrétisations du second ordre : une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre $(\Delta t)^2$ et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta r)^2$, $(\Delta \theta)^2$ et $(\Delta z)^2$.

La forme d'Euler retardée du second ordre donnée par l'équation (3.5) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation d'Adam-Bashforth, équation (3.7) sera appliquée d'une part à tous les termes non linéaires tels les termes advectifs et d'autre part à tous les termes hybrides et les termes de force de poussée thermique qui se retrouvent dans les différents sources. Enfin la discrétisation selon un schéma totalement implicite au temps $(t + \Delta t)$ sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression. Quant à la discrétisation dans l'espace, il lui sera appliqué le schéma des différences centrées qui est d'ordre deux (comme on l'a vu précédemment).

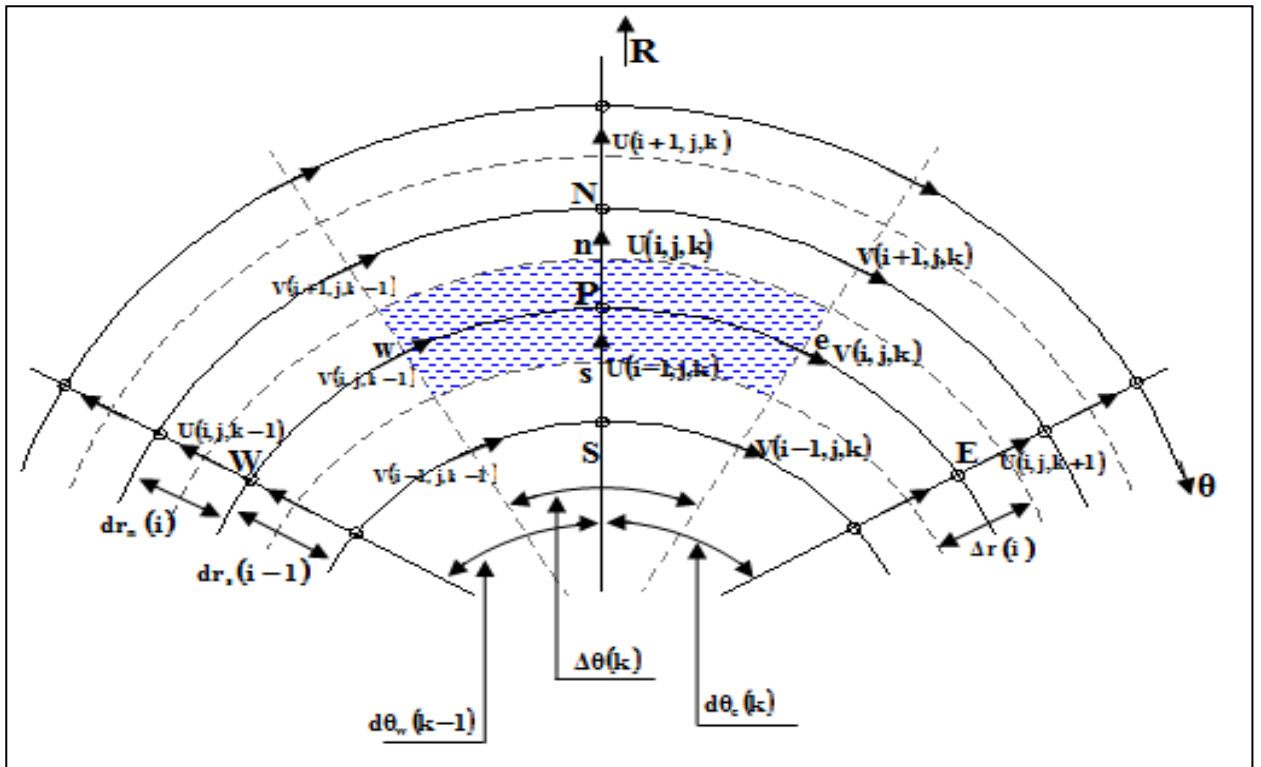


Figure 3.2 : Représentation du volume de contrôle typique dans le plan (r,θ)

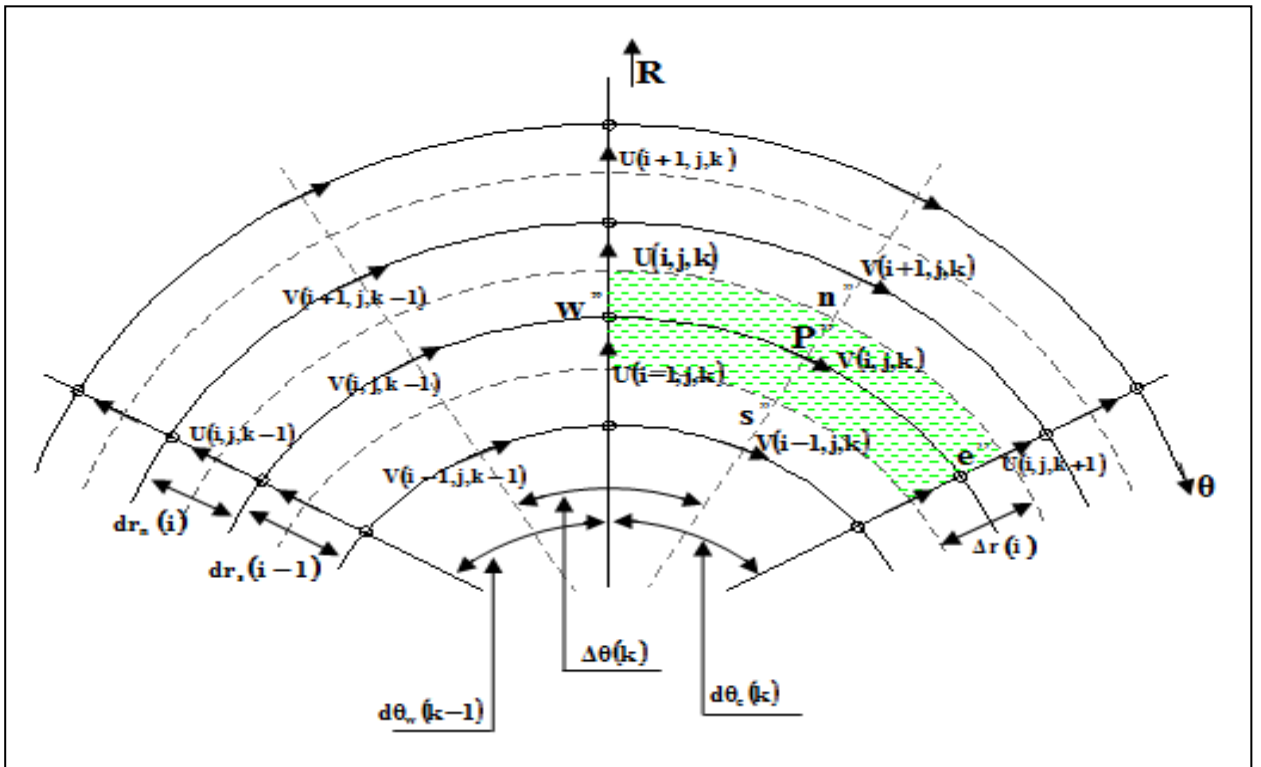


Figure 3.3 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction azimutale sur le plan (r,θ)

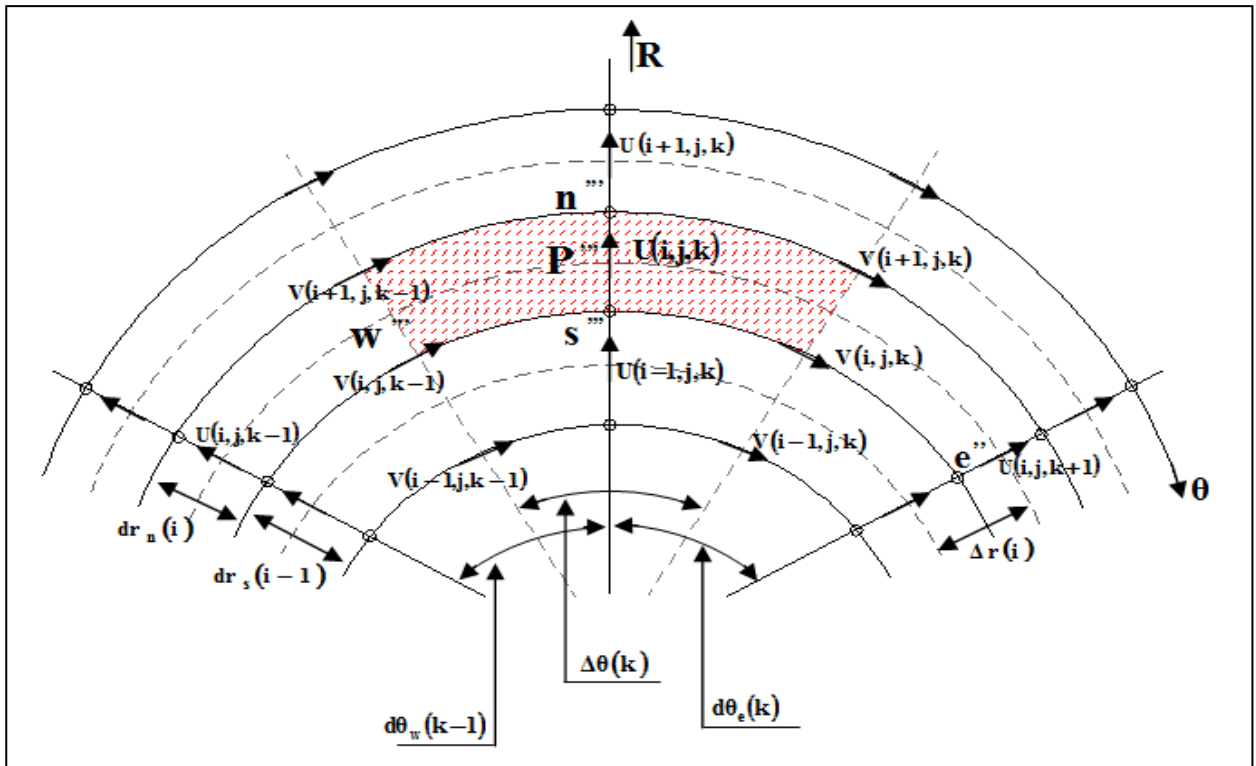


Figure 3.4 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction radiale sur le plan (r,θ)

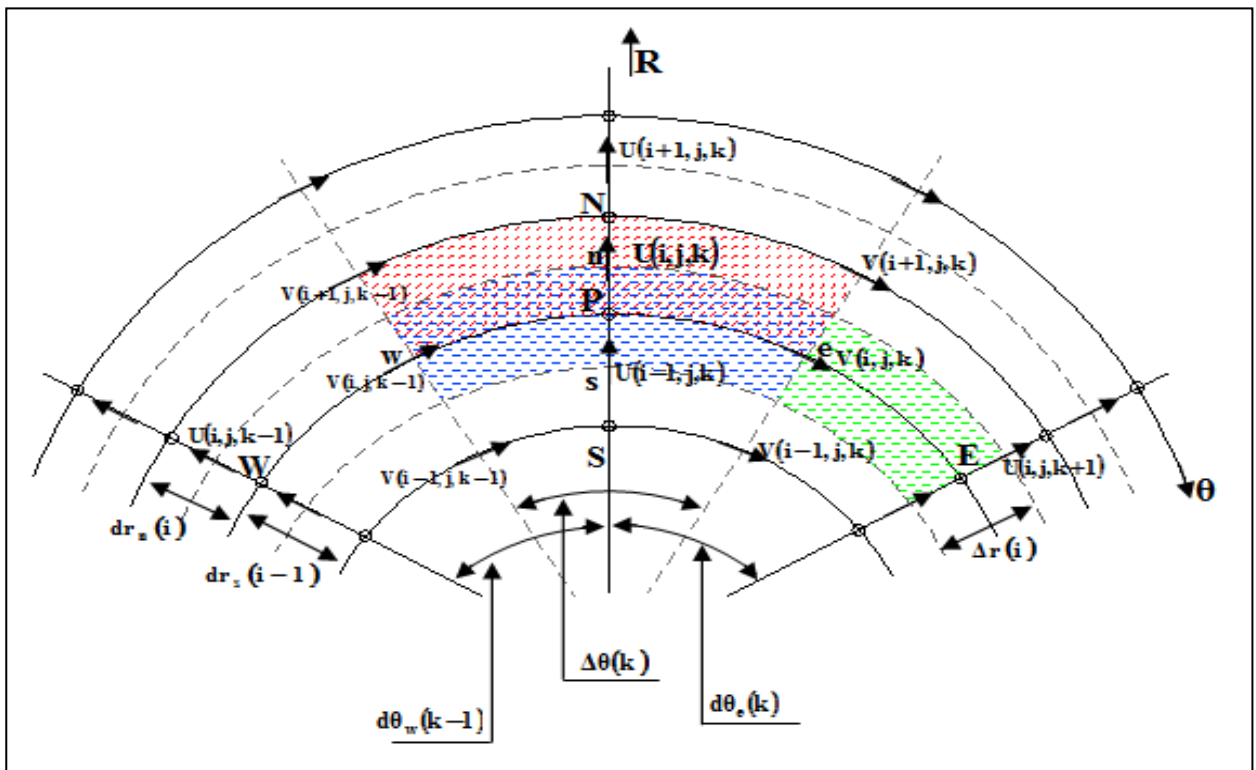


Figure 3.5 : Représentation suivant la section (r,θ) du volume de contrôle typique et décales dans les directions radiale et azimutale

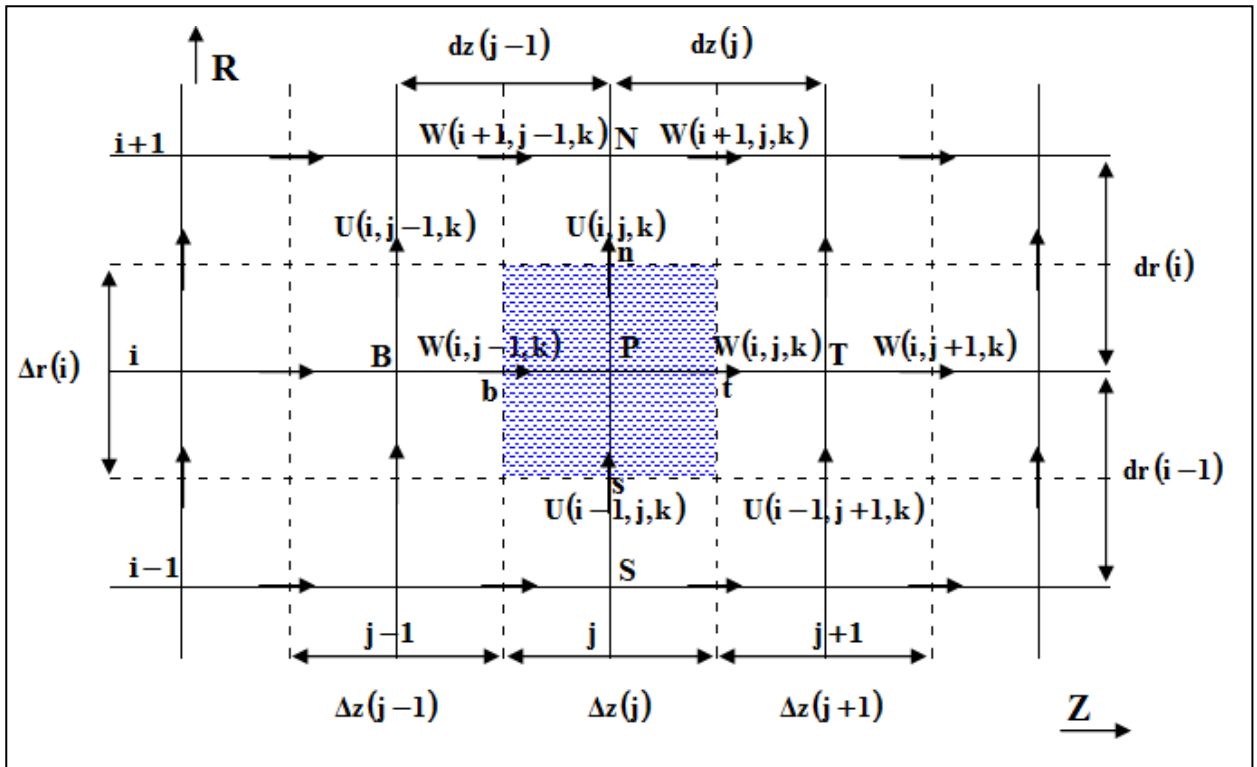


Figure 3.6 : Représentation du volume de contrôle typique dans le plan $(r.z)$

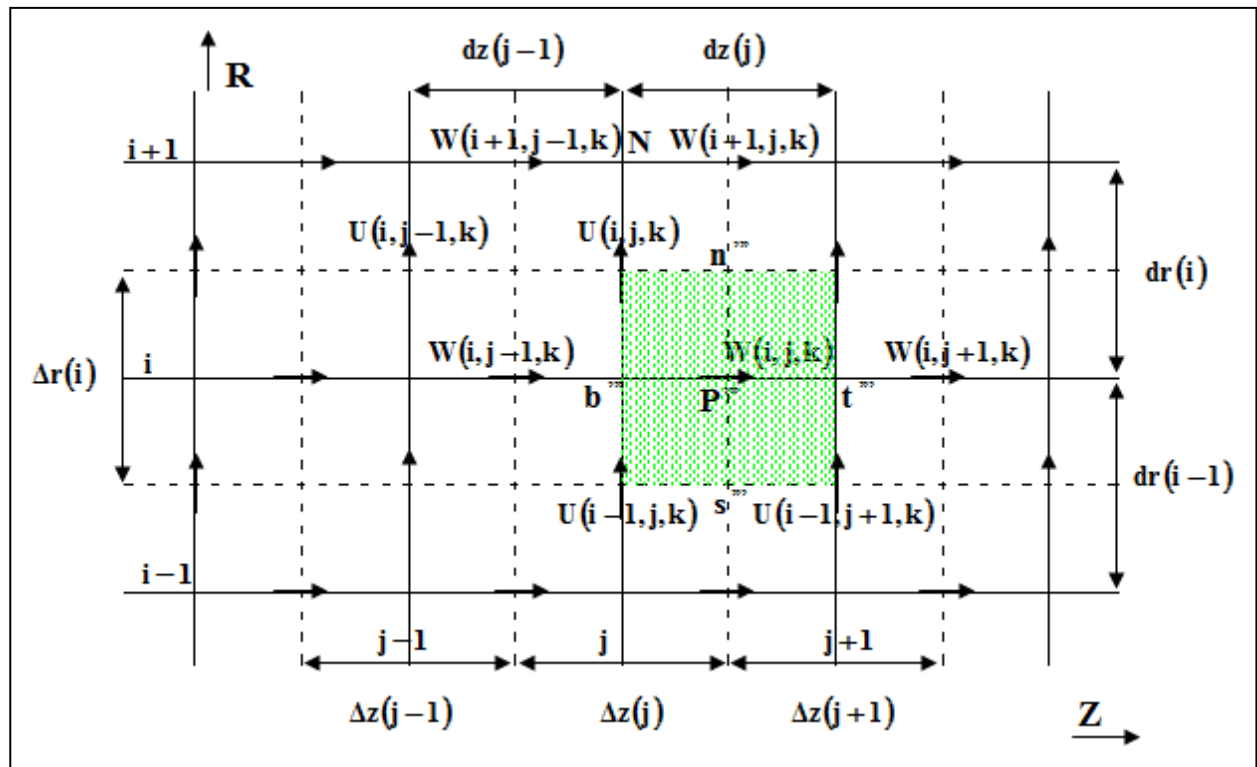


Figure 3.7 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction axiale sur le plan $(r.z)$

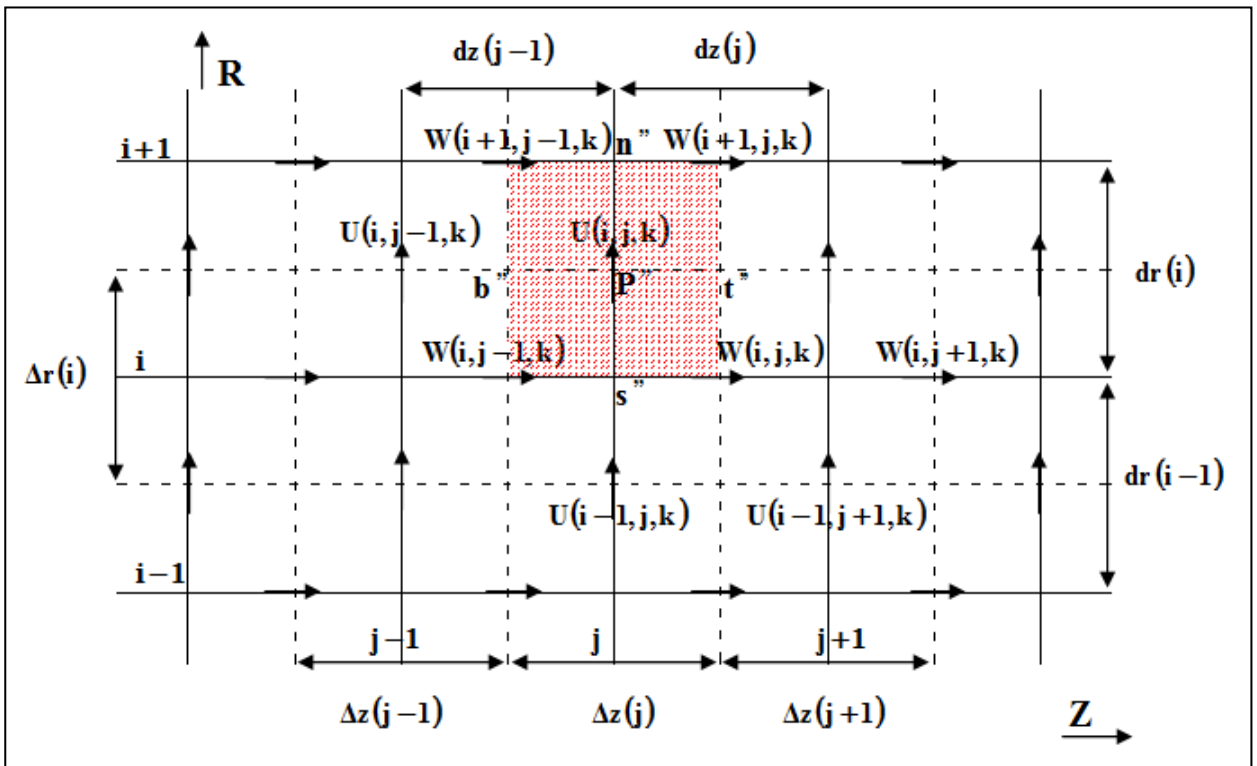


Figure 3.8 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction radiale sur le plan $(r.z)$

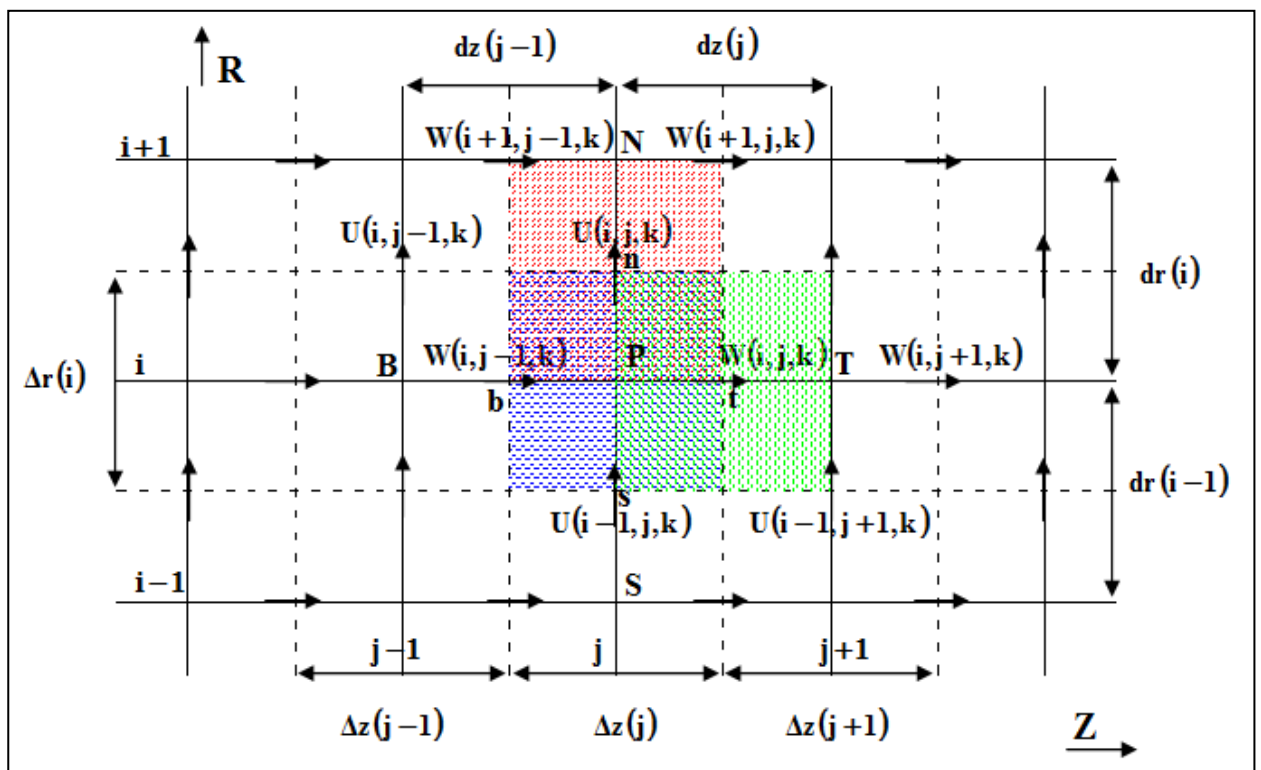


Figure 3.9 : Représentation suivant la section $(r.z)$ du volume de contrôle typique et décales dans les directions radiale et axiale

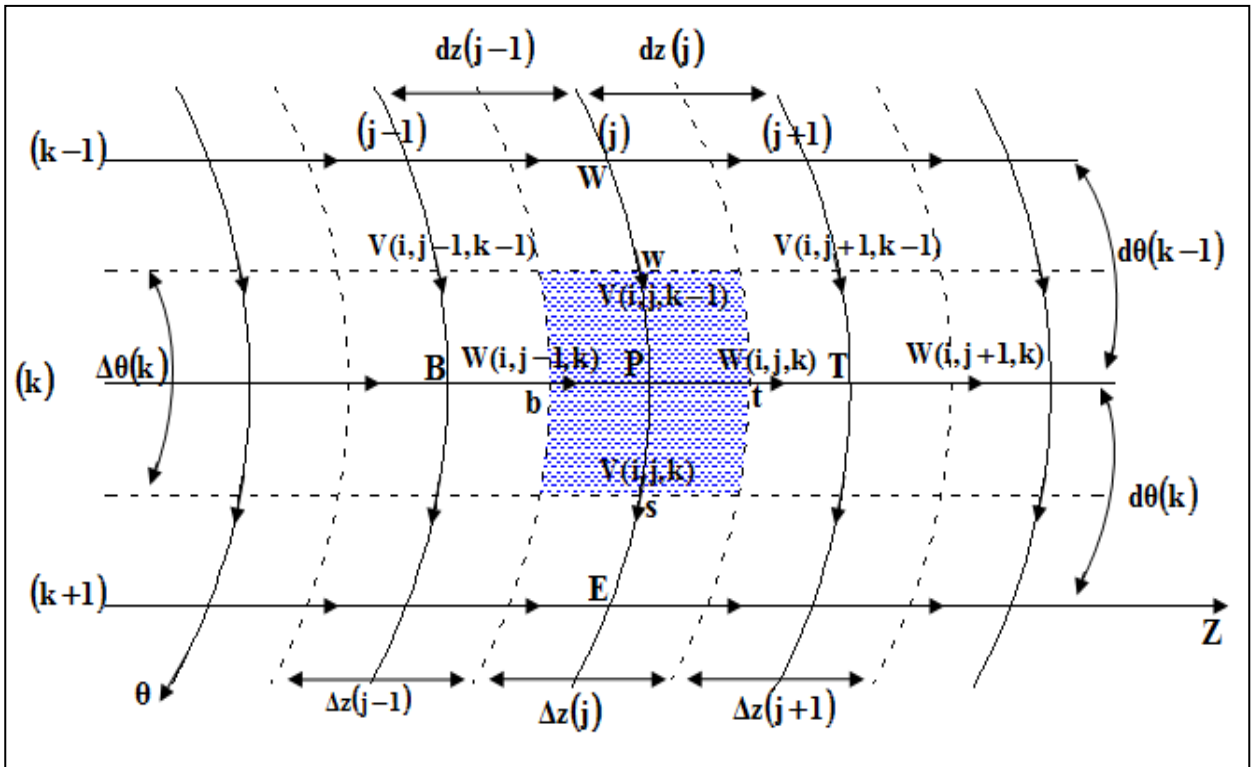


Figure 3.10 : Représentation du volume de contrôle typique dans le plan (θ, z)

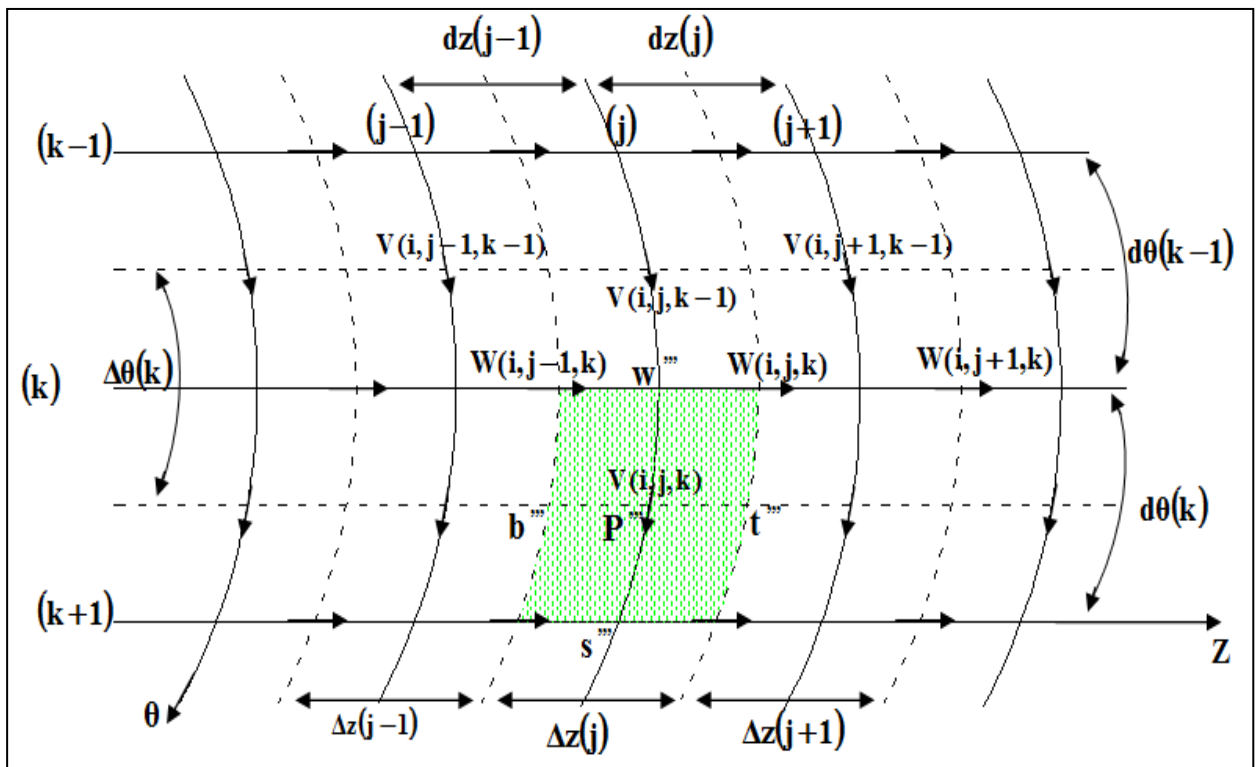


Figure 3.11 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction azimutale sur le plan (θ, z)

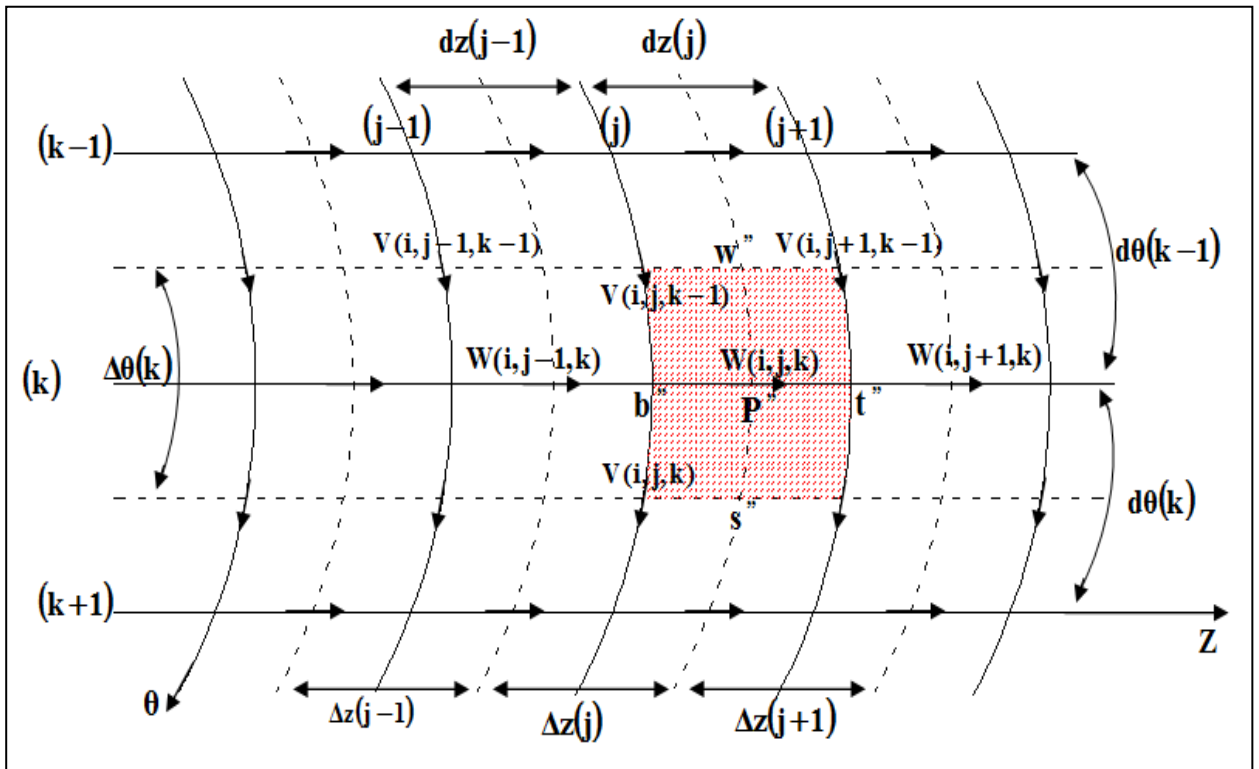


Figure 3.12 : Identification et représentation des vitesses suivant la direction axiale sur le plan (θ, z)

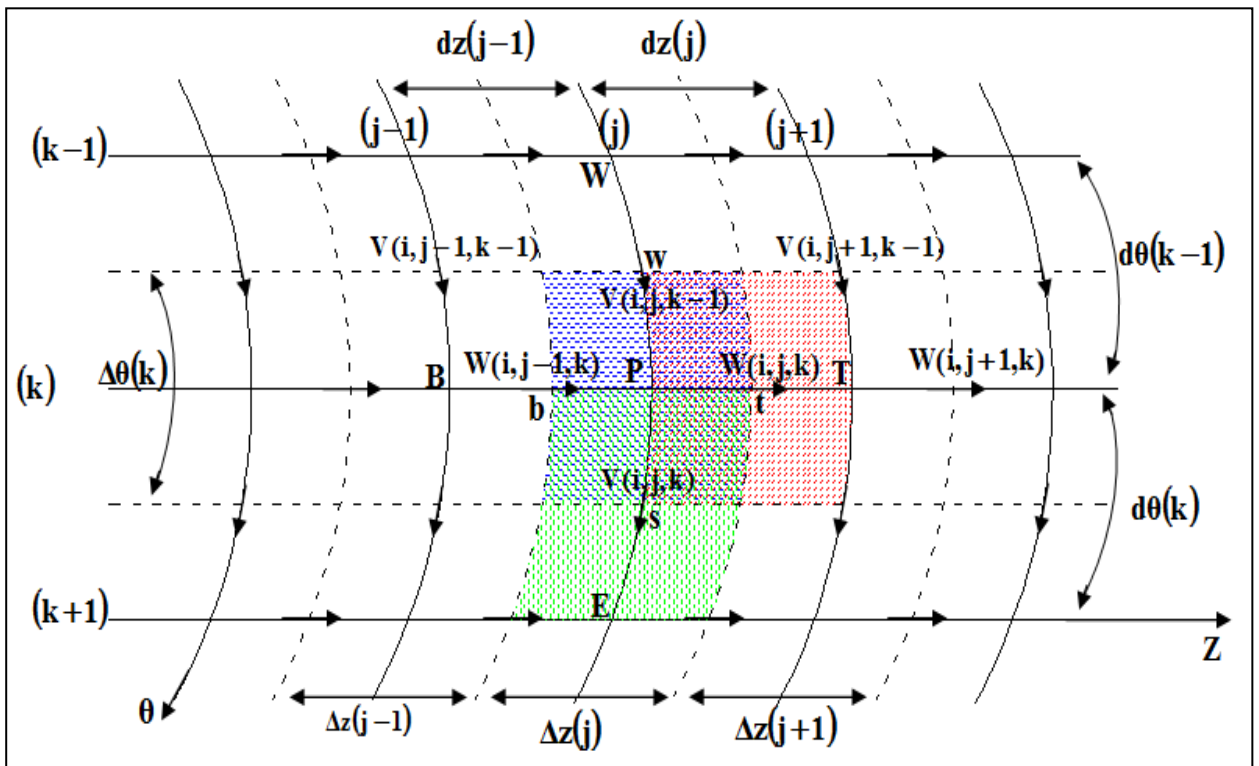


Figure 3.13 : Représentation suivant la section (θ, z) du volume de contrôle typique et décales dans les directions axiale et azimutale

III.5. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale :

L'équation de quantité de mouvement radiale (2.2) est intégrée dans le volume de contrôle décalé suivant la direction radiale (Figures 3.4 et 3.8). Est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* U^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* U^*) - \frac{V^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*}, \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right]$$

$$\text{Et } \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} + \frac{U^*}{r^*} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé $r_n^* dr_n^* \Delta \theta \Delta z_p^*$ suivant la direction radiale (voir les figures (3.2.a) et (3.2.b))

Terme transitoire :

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial U^*}{\partial t} \Big|_{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3U_{P_u}^{*t^* + \Delta t^*} - 4U_{P_u}^{*t^*} + U_{P_u}^{*t^* - \Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* d\theta_p dz_p^*$$

• Termes advectifs :

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) \Big|_{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2 \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) \Big|_{t^*} - \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) \Big|_{t^* - \Delta t^*} \right]_{s_u}^{n_u} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ \left[2 \left(r_{n_u}^* U_{n_u}^{*t^*} U_{n_u}^{*t^*} - r_{s_u}^* U_{s_u}^{*t^*} U_{s_u}^{*t^*} \right) - \left(r_{n_u}^* U_{n_u}^{*t^* - \Delta t^*} U_{n_u}^{*t^* - \Delta t^*} - r_{s_u}^* U_{s_u}^{*t^* - \Delta t^*} U_{s_u}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{v}^* \mathbf{U}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left[2 \left(\mathbf{V}_{e_u}^{*t^*} \mathbf{U}_{e_u}^{*t^*} - \mathbf{V}_{w_u}^{*t^*} \mathbf{U}_{w_u}^{*t^*} \right) - \left(\mathbf{V}_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \mathbf{U}_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - \mathbf{V}_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \mathbf{U}_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z^*} (\mathbf{w}^* \mathbf{U}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left[2 \left(\mathbf{W}_{t_u}^{*t^*} \mathbf{U}_{t_u}^{*t^*} - \mathbf{W}_{b_u}^{*t^*} \mathbf{U}_{b_u}^{*t^*} \right) - \left(\mathbf{W}_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \mathbf{U}_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} - \mathbf{W}_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \mathbf{U}_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* \\
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\mathbf{V}^{*2}}{r} \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(2 \left[\mathbf{V}_{p_u}^{*t^*} \right]^2 - \left[\mathbf{V}_{p_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right]^2 \right) dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* = \\
& 2 \left[\frac{\mathbf{V}_{n_u e_u}^{*t^*} + \mathbf{V}_{n_u w_u}^{*t^*} + \mathbf{V}_{s_u e_u}^{*t^*} + \mathbf{V}_{s_u w_u}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* - \\
& \left[\frac{\mathbf{V}_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{V}_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{V}_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{V}_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

• **Terme de pression :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(p_P^{*t^*+\Delta t^*} - p_N^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*$$

• **Termes diffusifs :**

* **Le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*)$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* \mu_{n_u}^{*t^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* \mu_{n_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\
& \left(4r^* \mu_{n_u}^{*t^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right)_{s_u}^{n_u} \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \left(2r^* \mu_{n_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right)_{s_u}^{n_u} \Delta\theta_p \Delta z_p^* = \\
& 2 \left(2\mu_{n_u}^{*t^*} - \mu_{n_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_{n_u}^* \frac{U_{N_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_{n_u}^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \\
& 2 \left(2\mu_{s_u}^{*t^*} - \mu_{s_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_{s_u}^* \frac{U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{S_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_{s_u}^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{n_u}^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_{s_u}^* = \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$r_{n_u}^* = r_p^*(i+1) \quad , \quad r_{s_u}^* = r_p^*(i)$$

$$dr_{n_u}^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad dr_{s_u}^* = \Delta r_p^* = \Delta r^*(1)$$

$$U_{N_u}^* = U^*(i+1, j, k) \quad , \quad U_{P_u}^* = U^*(i, j, k)$$

$$\text{Et } U_{s_u}^* = U^*(i-1, j, k)$$

*** le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*)$

$$\begin{aligned}
 & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{r\theta}^* \right)^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{r\theta}^* \right)^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
 & 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu_{e_u}^{*t^*} \left[\left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} - \frac{V^*}{r^*} \right)^t + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* - \\
 & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \left[\left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} - \frac{V^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* = \\
 & \left[\left(2 \left(\mu_{e_u}^{*t^*} \frac{V_{n_u e_u}^* - V_{s_u e_u}^*}{dr_{n_u}} - \mu_{w_u}^{*t^*} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{V_{n_u w_u}^* - V_{s_u w_u}^*}{2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{n_u w_u}^* - V_{s_u w_u}^*}{dr_{n_u}} - \mu_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{V_{n_u e_u}^* - V_{s_u e_u}^*}{2} \right) \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
 & \left(2\mu_{e_u}^{*t^*} - \mu_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{U_{E_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_{e_u}} \right) dr_n^* \Delta z_p^* - \left(2\mu_{w_u}^{*t^*} - \mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{W_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_{w_u}} \right) dr_n^* \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{e_u}^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NE}}{\mu_{NE}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}}, \quad \mu_{w_u}^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NW}}{\mu_{NW}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_N = \mu(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_P = \mu(i, j, k) \quad , \quad \mu_E = \mu^*(i, j, k+1) \quad \mu_{w_u}^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$\mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1) \quad , \quad \mu_{NW}^* = \mu^*(i+1, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$r_{n_u}^* = r_P^*(i+1) \quad , \quad dr_{n_u}^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1)$$

$$V_{n_u e_u}^* = V^*(i, j, k+1), \quad V_{n_u w_u}^* = V^*(i+1, j, k-1), \quad V_{s_u e_u}^* = V(i, j, k), \quad V_{s_u w_u}^* = V(i, j, k-1)$$

$$U_{E_u}^* = U^*(i, j, k+1) \quad , \quad U_{P_u}^* = U^*(i, j, k)$$

*** le terme** $\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*}$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left. \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} \right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \tau_{\theta\theta}^* \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2\mu_{P_u}^{*t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right)^{t^*} + \left(\frac{U^*}{r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* -$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2\mu_{P_u}^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{U^*}{r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \left[\frac{\left(\mu_{P_u}^{*t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*} \right) - \frac{\left(\mu_{P_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right)}{2r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$2 \left(2\mu_{P_u}^{*t^*} - \mu_{P_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left[\frac{U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_n^*} \right] dr_n^* \Delta \theta \Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_{P_u}^* = \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_n^*}{\mu_n^*}}$$

$$\Delta \theta_{P_u} = d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad r_n^* = r_e^*(i)$$

$$V_{n_u e_u}^* = V^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{n_u w_u}^* = V^*(i+1, j, k-1) \quad , \quad V_{s_u e_u}^* = V^*(i, j, k)$$

$$V_{s_u w_u}^* = V^*(i, j, k-1)$$

$$U_{P_u}^* = U^*(i, j, k)$$

$$\mu_n^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*)$

$$\begin{aligned}
 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\tau_{rz}^* \right)^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^{*t^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} - \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) \right)^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
 2 \left[\mu^{*t^*} \left(\left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^* &- \left[\mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^* = \\
 \left(\left(2 \left(\mu_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{n_u t_u}^{*t^*} - W_{s_u t_u}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_{b_u}^{*t^*} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \right. & \\
 \left. \left. \left(\mu_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_{t_u}^{*t^*} \frac{W_{n_u t_u}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{s_u t_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^* &+ \\
 \left(2\mu_{t_u}^{*t^*} - \mu_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{U_{T_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{d_{z_t}^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^* &- \left(2\mu_{b_u}^{*t^*} - \mu_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*} - U_{B_u}^{*t^*+\Delta t^*}}{d_{z_b}^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^*
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{t_u}^* = \frac{dz_{t_u}^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NT}^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dz_{t_u}^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}} \quad , \quad \mu_{b_u}^* = \frac{dz_{b_u}^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NB}^*}{\mu_{NB}^*}} + \frac{dz_{b_u}^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_{n_u}^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_{s_u}^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k),$$

$$\mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j+1, k)$$

$$\mu_{NB}^* = \mu^*(i+1, j-1, k) \quad , \quad \mu_{NT}^* = \mu^*(i+1, j+1, k)$$

$$d_{r_n}^* = dr^*(i) \quad , \quad d_{z_t}^* = dz^*(j) \quad , \quad r_n^* = r^*c(i)$$

$$W_{n_u t_u}^* = W^*(i+1, j, k) \quad , \quad W_{s_u t_u}^* = W^*(i, j, k) \quad , \quad W_{n_u b_u}^* = W^*(i+1, j-1, k)$$

$$W_{s_u b_u}^* = W^*(i, j-1, k) \quad , \quad U_{T_u}^* = U^*(i, j+1, k) \quad , \quad U_{P_u}^* = U^*(i, j, k)$$

$$U_{B_u}^* = U^*(i, j-1, k)$$

*** le terme** $\left(\frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \right) T^*$

$$\begin{aligned}
 & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
 & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
 & \frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \left\{ \left[2(T^*)_{P_u} \Big|_{t^*}^{t^*} - (T^*)_{P_u} \Big|_{t^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* = \\
 & \frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$\begin{aligned}
 A_P U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*} &= A_N U_{N_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S U_{S_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E U_{E_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W U_{W_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T U_{T_u}^{*t^*+\Delta t^*} + \\
 & A_B U_{B_u}^{*t^*+\Delta t^*} + S_u^{*t^*+\Delta t^*}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A_N = dn &= \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{n_u}^{*t^*} - \mu_{n_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_{n_u}^*} & A_S = ds &= \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{s_u}^{*t^*} - \mu_{s_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_{s_u}^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_{s_u}^*} \\
 A_E = de &= \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{e_u}^{*t^*} - \mu_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e} & A_W = dw &= \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{w_u}^{*t^*} - \mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w} \\
 A_T = dt &= \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{t_u}^{*t^*} - \mu_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p}{dz_t^*} & A_B = db &= \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{b_u}^{*t^*} - \mu_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p}{dz_b^*} \\
 A_P &= A_E + A_E + A_N + A_S + A_T + A_B = \frac{3}{2} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{\Delta t} + \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{p_u}^{*t^*} - \mu_{p_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{r_n^*}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Voir annexe pour le développement du terme de source qui peut s'écrire aussi

$$S_u^{*t^*+\Delta t^*} = b_u + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned}
 A_P U_{P_u}^{*t^*+\Delta t^*} &= A_N U_{N_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S U_{S_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E U_{E_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W U_{W_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T U_{T_u}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B U_{B_u}^{*t^*+\Delta t^*} + b_u + \\
 & \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Comme $U_{P_u}^{*t+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse U^* à l'interface n du volume typique $\left(U_n^{*t+\Delta t^*} \right)$,

on peut écrire l'équation donnant la vitesse $U_n^{*t+\Delta t^*}$:

$$A_p U_n^{*t+\Delta t^*} = A_N U_{N_u}^{*t+\Delta t^*} + A_S U_{S_u}^{*t+\Delta t^*} + A_E U_{E_u}^{*t+\Delta t^*} + A_W U_{W_u}^{*t+\Delta t^*} + A_T U_{T_u}^{*t+\Delta t^*} + A_B U_{B_u}^{*t+\Delta t^*} + b_u + \left(P_P^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad (3.16)$$

III.6. Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit :

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* V^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* V^*) + \frac{U^* V^*}{r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{\theta \theta}^* = 2\mu^* \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} + \frac{U^*}{r^*} \right) \right] \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[\left(r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\left(\frac{\partial V^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (voir les **Figures 3.3** et **3.11**)

-Terme transitoire :

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial V}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{P_w}^{*t+\Delta t^*} - 4V_{P_w}^{*t} + V_{P_w}^{*t-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

• **Termes advectifs :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*} - \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2 \left(r_{n_v}^* U_{n_v}^* V_{n_v}^* - r_{s_v}^* U_{s_v}^* V_{s_v}^* \right) - \left(r_{n_v}^* U_{n_v}^{*t-\Delta t^*} V_{n_v}^{*t-\Delta t^*} - r_{s_v}^* U_{s_v}^{*t-\Delta t^*} V_{s_v}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^*$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2 \left(V_{e_v}^{*t} V_{e_v}^{*t} - V_{w_v}^{*t} V_{w_v}^{*t} \right) - \left(V_{e_v}^{*t-\Delta t^*} V_{e_v}^{*t-\Delta t^*} - V_{w_v}^{*t-\Delta t^*} V_{w_v}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* V^*) \Big|_{r^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2 \left(W_{t_v}^{*t} V_{t_v}^{*t} - W_{b_v}^{*t} V_{b_v}^{*t} \right) - \left(W_{t_v}^{*t-\Delta t^*} V_{t_v}^{*t-\Delta t^*} - W_{b_v}^{*t-\Delta t^*} V_{b_v}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] r_p^* \Delta \theta_e$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{U^* V^*}{r^*} \Big|_{r^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[2 \frac{U^* V^*}{r^*} \Big|_{r^*}^{t^*} - \frac{U^* V^*}{r^*} \Big|_{r^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left(2 U_{p_w}^{*t} V_{p_w}^{*t} - U_{p_w}^{*t-\Delta t^*} V_{p_w}^{*t-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\left(\frac{U_{n_v}^{*t} + U_{n_v}^{*t} + U_{s_v}^{*t} + U_{s_v}^{*t}}{2} V_{p_w}^{*t} - \frac{U_{n_v}^{*t-\Delta t^*} + U_{n_v}^{*t-\Delta t^*} + U_{s_v}^{*t-\Delta t^*} + U_{s_v}^{*t-\Delta t^*}}{2} V_{p_w}^{*t-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \Big|_{r^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(p_P^{*t+\Delta t^*} - p_E^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Termes diffusifs :

* **Le terme** $\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \tau_{\theta r}^* \right)$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& 2\mu_{n_v}^* \frac{r_{n_v}^*}{r_p^*} \frac{U_{n_v e_v}^* - U_{n_v w_v}^*}{d\theta_e} - 2\mu_{s_v}^* \frac{r_{s_v}^*}{r_p^*} \frac{U_{s_v e_v}^* - U_{s_v w_v}^*}{d\theta_e} - \\
& \mu_{n_v}^* \frac{r_{n_v}^*}{r_p^*} \left(V_{N_v}^* + V_{P_v}^* \right) + \mu_{s_v}^* \frac{r_{s_v}^*}{r_p^*} \left(V_{S_v}^* + V_{P_v}^* \right) + \\
& \mu_{s_v}^* \frac{r_{s_v}^*}{r_p^*} \frac{U_{s_v e_v}^* - U_{s_v w_v}^*}{d\theta_e} - \mu_{n_v}^* \frac{r_{n_v}^*}{r_p^*} \frac{U_{n_v e_v}^* - U_{n_v w_v}^*}{d\theta_e} + \\
& \mu_{n_v}^* \frac{r_{n_v}^*}{r_p^*} \frac{V_{N_v}^* + V_{P_v}^*}{2} - \mu_{s_v}^* \frac{r_{s_v}^*}{r_p^*} \frac{V_{S_v}^* + V_{P_v}^*}{2}
\end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p^* + \\
& \left(2\mu_{n_v}^* - \mu_{n_v}^{*t-\Delta t^*} \right) \left[\frac{r_{n_v}^{*2}}{r_p^*} \left(\frac{V_{N_v}^{*t+\Delta t^*} - V_{P_v}^{*t+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^* - \\
& \left(2\mu_{s_v}^* - \mu_{s_v}^{*t-\Delta t^*} \right) \left[\frac{r_{s_v}^{*2}}{r_p^*} \left(\frac{V_{P_v}^{*t+\Delta t^*} - V_{S_v}^{*t+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^* \\
& \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \tau_{\theta r}^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \tau_{\theta r}^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
& \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \mu^* \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} - \frac{V^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\
& \frac{2}{r_p^*} \left[r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} - \frac{V^*}{r^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{S_v}^{n_v} d\theta_e \Delta z_p^* - \\
& \frac{1}{r_p^*} \left[r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} - \frac{V^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{S_v}^{n_v} d\theta_e \Delta z_p^* = \\
& \frac{1}{r_p^*} \left[2r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} - \frac{V^*}{r^*} \right)^{t^*} + r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} - \frac{V^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right) \right]_{S_v}^{n_v} d\theta_e \Delta z_p^* - \\
& \frac{1}{r_p^*} \left[2r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} - r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_{S_v}^{n_v} d\theta_e \Delta z_p^* =
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_{n_v}^* &= \frac{1}{\frac{1}{\mu_{e_v}^*} + \frac{1}{\mu_{NE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_p^*} + \frac{1}{\mu_N^*}} \quad , & \mu_{s_v} &= \frac{1}{\frac{1}{\mu_{e_v}^*} + \frac{1}{\mu_{SE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_p^*} + \frac{1}{\mu_S^*}} \\ \mu_{n_v}^* &= \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , & \mu_{s_v}^* &= \mu_p^* = \mu^*(i, j, k) \\ \mathbf{r}_{n_v}^* &= \mathbf{r}_p^*(i+1) \quad , & \mathbf{r}_{s_v}^* &= \mathbf{r}_p^*(i) \\ d\mathbf{r}_{n_v}^* &= \Delta \mathbf{r}_N^* = \Delta \mathbf{r}^*(i+1) \quad , & d\mathbf{r}_{s_v}^* &= \Delta \mathbf{r}_p^* = \Delta \mathbf{r}^*(i) \\ U_{N_v}^* &= U^*(i+1, j, k) \quad , & U_{P_v}^* &= U^*(i, j, k) \\ U_{S_v}^* &= U^*(i-1, j, k) \end{aligned}$$

*** le terme** $\frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*)$

$$\begin{aligned} \int_{w_v} \int_{s_v} \int_{b_v} \frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \mathbf{r}^* d\mathbf{r}^* d\theta dz^* &= \int_{w_v} \int_{s_v} \int_{b_v} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \mathbf{r}^* d\mathbf{r}^* d\theta dz^* = \\ \int_{w_v} \int_{s_v} \int_{b_v} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\mu^* \left(\frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{U}^*}{\mathbf{r}^*} \right) \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} d\mathbf{r}^* d\theta dz^* &= \left[2\mu^* \left(\frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{U}^*}{\mathbf{r}^*} \right) \Big|_{w_v}^{t^*+\Delta t^*} \right]_{w_v}^{e_v} \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* = \\ 2 \left[2\mu^* \left(\left(\frac{\mathbf{U}^*}{\mathbf{r}^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{w_v}^{e_v} \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* &- \left[2\mu^* \left(\left(\frac{\mathbf{U}^*}{\mathbf{r}^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{\mathbf{r}^*} \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{w_v}^{e_v} \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* = \\ 2\mu_{e_w}^* \left(\frac{\mathbf{U}_{n_v e_v}^* - \mathbf{U}_{s_v e_v}^*}{\mathbf{r}_p^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* &- 2\mu_{w_w}^* \left(\frac{\mathbf{U}_{n_v w_v}^* - \mathbf{U}_{s_v w_v}^*}{\mathbf{r}_p^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* - \\ \mu_{e_v}^* \left(\frac{\mathbf{U}_{n_v e_v}^* - \mathbf{U}_{s_v e_v}^*}{\mathbf{r}_p^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* &+ 2\mu_{w_v}^* \left(\frac{\mathbf{U}_{n_v w_v}^* - \mathbf{U}_{s_v w_v}^*}{\mathbf{r}_p^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* + \\ 2 \left[\left(2\mu_{e_v}^* - \mu_{e_v}^* \right) \left(\frac{1}{\mathbf{r}_p^*} \frac{V_{E_v}^* - V_{P_v}^*}{d\theta_{e_v}} \right) \right] \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* &- \left[\left(2\mu_{w_v}^* - \mu_{w_v}^* \right) \left(\frac{1}{\mathbf{r}_p^*} \frac{V_{P_v}^* - V_{W_v}^*}{d\theta_{w_v}} \right) \right] \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mu_{w_v}^* &= \mu_p^* = \mu^*(i, j, k) \quad , & \mu_{e_v}^* &= \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) \\ d\theta_{e_v} &= \Delta\theta(k+1) \quad , & d\theta_{w_v} &= \Delta\theta(k) \quad , & \mathbf{r}_p^* &= \mathbf{r}_p^*(i) \end{aligned}$$

$$U_{n_v e_v}^* = U^*(i, j, k+1), U_{n_v w_v}^* = U^*(i, j, k), U_{s_v e_v}^* = U^*(i-1, j, k+1), U_{s_v w_v}^* = U^*(i-1, j, k)$$

$$V_{E_v}^* = V^*(i, j, k+1), \quad V_{P_v}^* = V^*(i, j, k), \quad V_{W_v}^* = V^*(i, j, k-1)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*)$

$$\begin{aligned} \int_{w_v, s_v, b_v} \int_{e_v, n_v, t_v} \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_v, s_v, b_v} \int_{e_v, n_v, t_v} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu \left(\frac{\partial V^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right) \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ &\left\{ 2 \left[\mu_{t_v}^* \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{b_v} - \left[\mu_{t_v}^* \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{b_v} \right\} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e = \\ &\left[2\mu_{t_v}^* \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{W_{e_v, t_v}^* - W_{w_v, t_v}^*}{d\theta_e} \right) - 2\mu_{b_v}^* \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{W_{e_v, b_v}^* - W_{w_v, b_v}^*}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e - \\ &\left[\mu_{t_v}^* \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{W_{e_v, t_v}^* - W_{w_v, t_v}^*}{d\theta_e} \right) - \mu_{b_v}^* \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{W_{e_v, b_v}^* - W_{w_v, b_v}^*}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e + \\ &\left[\left(2\mu_{t_v}^* - \mu_{t_v}^* \right) \left(\frac{V_{T_v}^* - V_{P_v}^*}{dz_t^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e - \left[\left(2\mu_{b_v}^* - \mu_{b_v}^* \right) \left(\frac{V_{P_v}^* - V_{B_v}^*}{dz_b^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{t_v}^* = \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_{e_v}^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_{TE}^*}} + \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}}, \quad \mu_{b_v}^* = \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_{e_v}^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_{BE}^*}} + \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_{e_v}^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1), \quad \mu_{P_v}^* = \mu^*(i, j, k),$$

$$\mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k), \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k)$$

$$\mu_{BE}^* = \mu^*(i, j-1, k+1), \quad \mu_{TE}^* = \mu^*(i, j+1, k+1)$$

$$dz_b^* = dz^*(j-1), \quad dz_t^* = dz^*(j), \quad d\theta_e = d\theta(k)$$

$$W_{e_v, t_v}^* = W^*(i, j, k+1), \quad W_{e_v, b_v}^* = W^*(i, j-1, k+1), \quad W_{w_v, t_v}^* = W^*(i, j, k)$$

$$W_{w_v, b_v}^* = W^*(i, j-1, k)$$

$$V_{T_v}^* = V^*(i, j+1, k), \quad V_{P_v}^* = V^*(i, j, k), \quad V_{B_v}^* = V^*(i, j-1, k)$$

*** le terme** $\left(\frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \right) T^*$

$$\begin{aligned} & \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_{w_v s_v b_v}^{e_v n_v t_v} \left(\frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^* - \Delta t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \left\{ \left[2(T^*)_{P_u} \Big|_{t^*}^{t^*} - (T^*)_{P_u} \Big|_{t^* - \Delta t^*}^{t^* - \Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \right\} = \\ & \frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{Gr^*}{Re^2} \sin \theta \left(\frac{T_E^{*t^* - \Delta t^*} + T_P^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \end{aligned}$$

L'ensemble des termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{P_v}^{*t^* + \Delta t^*} = A_N V_{N_v}^{*t^* + \Delta t^*} + A_S V_{S_v}^{*t^* + \Delta t^*} + A_E V_{P_v}^{*t^* + \Delta t^*} + A_W V_{W_v}^{*t^* + \Delta t^*} + A_T V_{T_v}^{*t^* + \Delta t^*} + A_B V_{B_v}^{*t^* + \Delta t^*} + S_v^{*t^* + \Delta t^*} \quad (3.16)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{n_v}^{*t^*} - \mu_{n_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_{n_v}^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{s_v}^{*t^*} - \mu_{s_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_{s_v}^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{e_v}^{*t^*} - \mu_{e_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_{e_v}^*}$$

$$A_W = dw = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{w_v}^{*t^*} - \mu_{w_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_{w_v}^*}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{t_v}^{*t^*} - \mu_{t_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{b_v}^{*t^*} - \mu_{b_v}^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_e}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \quad (3.17)$$

Voir annexe pour le développement du terme de source qui peut s'écrire aussi

$$S_v^{t+\Delta t^*} = b_v + \left(P_p^{t+\Delta t^*} - P_E^{t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P U_{P_v}^{t+\Delta t^*} = A_N U_{N_v}^{t+\Delta t^*} + A_S U_{S_v}^{t+\Delta t^*} + A_E U_{E_v}^{t+\Delta t^*} + A_W U_{W_v}^{t+\Delta t^*} + A_T U_{T_v}^{t+\Delta t^*} + A_B U_{B_v}^{t+\Delta t^*} + b_v + \left(P_p^{t+\Delta t^*} - P_E^{t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.18)$$

Comme $V_{P_w}^{t+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V à l'interface e du volume typique $V_e^{t+\Delta t^*}$

on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_e^{t+\Delta t^*}$:

$$A_P V_e^{t+\Delta t^*} = A_N V_{N_v}^{t+\Delta t^*} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t^*} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t^*} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t^*} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t^*} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t^*} + b_v + \left(P_p^{t+\Delta t^*} - P_E^{t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.19)$$

III.7. Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit :

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* W^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^* W^*) = - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{zz}^* = 2\mu^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*}, \quad \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (voir les **Figures 3.7** et **3.12**).

• Terme transitoire :

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial W^*}{\partial t^*} \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3W_{P_w}^{t+\Delta t^*} - 4W_{P_w}^{t^*} + W_{P_w}^{t-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* dz_p^*$$

• **Termes advectifs :**

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* U^* W^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* U^* W^* \right) \Big|_{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* U^* W^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$\left[2 \left(r_{n_w}^* U_{n_w}^{*t} W_{n_w}^{*t} - r_{s_w}^* U_{s_w}^{*t} W_{s_w}^{*t} \right) - \left(r_{n_w}^* U_{n_w}^{*t-\Delta t^*} W_{n_w}^{*t-\Delta t^*} - r_{s_w}^* U_{s_w}^{*t-\Delta t^*} W_{s_w}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t^*$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V^* W^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V^* W^* \right) \Big|_{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V^* W^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$\left[2 \left(V_{e_w}^{*t} W_{e_w}^{*t} - V_{w_w}^{*t} W_{w_w}^{*t} \right) - \left(V_{e_w}^{*t-\Delta t^*} W_{e_w}^{*t-\Delta t^*} - V_{w_w}^{*t-\Delta t^*} W_{w_w}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] \Delta r_p dz_t^*$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(W^* W^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(W^* W^* \right) \Big|_{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(W^* W^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$\left[2 \left(W_{t_w}^{*t} W_{t_w}^{*t} - W_{b_w}^{*t} W_{b_w}^{*t} \right) - \left(W_{t_w}^{*t-\Delta t^*} W_{t_w}^{*t-\Delta t^*} - W_{b_w}^{*t-\Delta t^*} W_{b_w}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

• **Terme de pression :**

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

• **Termes diffusifs :**

* **Le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \tau_{rz}^* \right)$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*}^{t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
& 2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \mu^* \left(\left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* - \\
& \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \mu^* \left(\left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[r^* \mu^* \left(\left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{s_w}^{n_w} - \left[r^* \mu^* \left(\left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_{s_w}^{n_w} \right\} \Delta \theta_p dz_t^* = \\
& \left[2 \mu_{n_w}^* r_{s_w}^* \left(\frac{U_{n_w t_w}^* - U_{n_w b_w}^*}{dz_t^*} \right) - 2 \mu_{s_w}^* r_{s_w}^* \left(\frac{U_{s_w t_w}^* - U_{s_w b_w}^*}{dz_t^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t^* - \\
& \left[\mu_{n_w}^* r_{s_w}^* \left(\frac{U_{n_w t_w}^* - U_{n_w b_w}^*}{dz_t^*} \right) - \mu_{s_w}^* r_{s_w}^* \left(\frac{U_{s_w t_w}^* - U_{s_w b_w}^*}{dz_t^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t^* + \\
& \left(2 \mu_{n_w}^* - \mu_{n_w}^{*-\Delta t^*} \right) \left(r_{s_w}^* \frac{W_{N_w}^{*t^*+\Delta t^*} - W_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \Delta \theta_p dz_t^* - \left(2 \mu_{s_w}^* - \mu_{s_w}^{*-\Delta t^*} \right) \left(r_{s_w}^* \frac{W_{P_w}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{S_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p dz_t^*
\end{aligned}$$

Avec

$$\mu_{n_w}^* = \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_P^*}{\mu_{t_w}^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}}, \quad \mu_{s_w}^* = \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_P^*}{\mu_{t_w}^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_{ST}^*}} + \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_S^*}}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{t_w}^* &= \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) & , & & \mu_P^* &= \mu^*(i, j, k) \\
\mu_{NT}^* &= \mu^*(i+1, j+1, k) & , & & \mu_N^* &= \mu^*(i+1, j, k) \\
\mu_{ST}^* &= \mu^*(i-1, j+1, k) & , & & \mu_S^* &= \mu^*(i-1, j, k) \\
dr_{n_u}^* &= \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) & , & & dr_{s_u}^* &= \Delta r_P^* = \Delta r^*(1) \\
U_{n_w t_w}^* &= U^*(i, j+1, k) & , & & U_{s_w t_w}^* &= U^*(i-1, j+1, k) & , & & U_{n_w b_w}^* &= U^*(i, j, k) \\
U_{s_w b_w}^* &= U^*(i-1, j, k) & , & & V_{N_w}^* &= V^*(i+1, j, k) & , & & V_{P_w}^* &= V^*(i, j, k) \\
V_{S_w}^* &= V^*(i-1, j, k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n_w}^* &= \mathbf{r}_c^*(\mathbf{i}) & , & & \mathbf{r}_{s_w}^* &= \mathbf{r}_c^*(\mathbf{i}-1) & , & & \mathbf{dr}_s &= \mathbf{dr}(\mathbf{i}-1) & , & & \mathbf{dr}_n^* &= \mathbf{dr}^*(\mathbf{i}) \\ \Delta \mathbf{r}_N^* &= \Delta \mathbf{r}^*(\mathbf{i}+1) & , & & \Delta \mathbf{r}_P^* &= \Delta \mathbf{r}^*(\mathbf{i}) & , & & \Delta \mathbf{r}_S^* &= \Delta \mathbf{r}^*(\mathbf{i}-1) \end{aligned}$$

*** le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*)$

$$\begin{aligned} \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \mathbf{r}^* \mathbf{dr}^* d\theta dz^* &= \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \mathbf{r}^* \mathbf{dr}^* d\theta dz^* = \\ 2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{t^*} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right)^{t^*} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} \mathbf{dr}^* d\theta dz^* &- \\ \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{t^*-\Delta t^*} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} \mathbf{dr}^* d\theta dz^* &= \\ \left\{ 2\mu^{t^*} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \mathbf{W}^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right] \Big|_{w_w}^{e_w} - \left[\mu^{t^*-\Delta t^*} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \mathbf{W}^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right] \Big|_{w_w}^{e_w} \right\} \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* &= \\ \left[2\mu^{t^*} \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \mu^{t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right] \Big|_{w_w}^{e_w} \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* + \left[\left(2\mu^{t^*} - \mu^{t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \mathbf{W}^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right] \Big|_{w_w}^{e_w} \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* &= \\ 2\mu^{e_w} \left(\frac{\mathbf{V}_{e_w t_w}^{*t^*} - \mathbf{V}_{P_v}^{*t^*}}{dz_t^*} \right) - 2\mu_{w_w}^{t^*} \left(\frac{\mathbf{V}_{w_w t_w}^{*t^*} - \mathbf{V}_{w_w b_w}^{*t^*}}{dz_t^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* &- \\ \left[\mu_{e_w}^{t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\mathbf{V}_{e_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - \mathbf{V}_{P_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) - \mu_{w_w}^{t^*} \left(\frac{\mathbf{V}_{w_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - \mathbf{V}_{w_w b_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) \right] \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* &+ \\ \left(2\mu_{e_w}^{t^*} - \mu_{e_w}^{t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{\mathbf{W}_{E_w}^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{W}_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* - \left(2\mu_{w_w}^{t^*} - \mu_{w_w}^{t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{\mathbf{W}_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{W}_{w_w}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_w} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* dz_t^* \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{e_w}^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_w}^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_{ET}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}} \quad , \quad \mu_{w_w}^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_w}^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_{WT}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_{t_w}^* = \mu_T^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}+1, \mathbf{k}) \quad , \quad \mu_w^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}-1),$$

$$\mu_E^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}+1) \quad , \quad \mu_P^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

$$\mu_{ET}^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}+1, \mathbf{k}+1) \quad , \quad \mu_{WT}^* = \mu^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}+1, \mathbf{k}-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(\mathbf{k}) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(\mathbf{k}-1) \quad , \quad \mathbf{r}_P^* = \mathbf{r}_P^*(\mathbf{i})$$

$$\Delta\theta_p = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad \text{et} \quad \Delta\theta_w = \Delta\theta(k-1)$$

$$V_{e_v t_v}^* = V^*(i, j+1, k), V_{w_v t_v}^* = V^*(i, j+1, k-1), V_{w_v b_v}^* = V^*(i, j, k-1), V_{p_v}^* = V^*(i, j, k) \quad ,$$

$$W_{E_v}^* = W^*(i, j, k+1) \quad , \quad W_{P_v}^* = W^*(i, j, k) \quad , \quad W_{W_v}^* = W^*(i, j, k-1)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*)$

$$\begin{aligned} \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2\mu^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[2\mu_{t_w}^{*t^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_{b_w}^{t_w} - \left[2\mu_{t_w}^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_{b_w}^{t_w} \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = \\ & \left[2 \left(2\mu_{t_w}^{*t^*} - \mu_{t_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{W_{T_w}^{*t^*+\Delta t^*} - W_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_T^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p - \left[2 \left(2\mu_{b_w}^{*t^*} - \mu_{b_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*} - W_{B_w}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_p^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{t_w}^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_{b_w}^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1) \quad , \quad \Delta z_p^* = \Delta z^*(j)$$

$$W_{T_w}^* = W^*(i, j+1, k) \quad , \quad W_{P_w}^* = W^*(i, j, k) \quad , \quad W_{B_w}^* = W^*(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$\begin{aligned} A_P W_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*} &= A_N W_{N_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S W_{S_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E W_{E_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W W_{W_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T W_{T_w}^{*t^*+\Delta t^*} + \\ & A_B W_{B_w}^{*t^*+\Delta t^*} + S_w^{*t^*+\Delta t^*} \end{aligned}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{n_w}^{*t^*} - \mu_{n_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_{n_w}^* \Delta\theta_p dz_t^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{s_w}^{*t^*} - \mu_{s_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_{s_w}^* \Delta\theta_p dz_t^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{e_w}^{*t^*} - \mu_{e_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p dz_t^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{w_w}^{*t^*} - \mu_{w_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p dz_t^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$\begin{aligned}
A_T = dt &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{t_w}^{*t^*} - \mu_{t_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{\Delta z_T} \\
A_B = db &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{b_w}^{*t^*} - \mu_{b_w}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{\Delta z_p} \\
A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_t^*}{\Delta t^*} & \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Voir annexe pour le développement du terme de source qui peut s'écrire aussi

$$S_w^{*t^*+\Delta t^*} = b_w + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned}
A_P U_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*} &= A_N U_{N_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S U_{S_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E U_{E_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W U_{W_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T U_{T_w}^{*t^*+\Delta t^*} + \\
A_B U_{B_w}^{*t^*+\Delta t^*} + b_w + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p & \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Comme $U_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse W à l'interface t du volume typique $\left(W_t^{*t^*+\Delta t^*} \right)$, on

peut écrire l'équation donnant la vitesse $W_t^{*t^*+\Delta t^*}$:

$$\begin{aligned}
A_P W_{P_w}^{*t^*+\Delta t^*} &= A_N W_{N_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S W_{S_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E W_{E_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W W_{W_w}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T W_{T_w}^{*t^*+\Delta t^*} + \\
A_B W_{B_w}^{*t^*+\Delta t^*} + b_w + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p & \quad (3.22)
\end{aligned}$$

III.8. Discrétisation de l'équation de l'énergie

Cette équation exprimée en termes de flux thermiques s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* U^* T^* \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(W^* T^* \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(V^* T^* \right) = G^* - \\
\frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* q_r^* \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_\theta^* \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(q_z^* \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } G^* = \begin{cases} K_s^* / (\text{Re}_0 \text{Pr}_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Et les densités de flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta}, \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation de l'énergie est discrétisée dans un volume de contrôle typique, donc :

• **Terme transitoire :**

$$\int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3T_{p_w}^{*t^*+\Delta t^*} - 4T_{p_w}^{*t^*} + T_{p_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* dr_p^* d\theta_p dz_p^*$$

• **Termes advectifs :**

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[(r^* U^* T^*) \Big|_n^{t^*} - (r^* U^* T^*) \Big|_s^{t^*} \right] - \left[(r^* U^* T^*) \Big|_n^{t^*-\Delta t^*} - (r^* U^* T^*) \Big|_s^{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* = \\ & \left\{ 2 \left[\left(r_n^* U_n^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left(r_s^* U_s^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{t^*} - \left[\left(r_n^* U_n^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left(r_s^* U_s^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{t^*-\Delta t^*} \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* = \\ & \left\{ r_n^* U_n^* \left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right\} - \left\{ r_s^* U_s^* \left(T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*} \right) \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \\ & \left[\left(r_n^* U_n^* \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(r_s^* U_s^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$T_N^* = T^*(i+1, j, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_S^* = T^*(i-1, j, K)$$

$$U_n^* = U^*(i, j, K) \quad , \quad U_s^* = U^*(i-1, j, K)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad \text{et} \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* T^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* T^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* T^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[\left(V_e^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_w^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{t^*} - \left[\left(V_e^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_w^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{t^*-\Delta t^*} \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\ & \left\{ V_e^* \left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right\} - \left\{ V_w^* \left(T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*} \right) \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \\ & \left[\left(V_e^* \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(V_w^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$T_E^* = T^*(i, j, K+1) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_W^* = T^*(i, j, K-1)$$

$$V_e^* = V^*(i, j, K) \quad \text{et} \quad V_w^* = V^*(i, j, K-1)$$

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial Z^*} (W^* T^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial Z^*} (W^* T^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial Z^*} (W^* T^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[(W^* T^*) \Big|_t^{t^*} - (W^* T^*) \Big|_b^{t^*} \right] - \left[(W^* T^*) \Big|_t^{t^*-\Delta t^*} - (W^* T^*) \Big|_b^{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\ & \left\{ 2 \left[\left(W_t^* \frac{T_T^* + T_P^*}{2} \right) - \left(W_b^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right]^{t^*} - \left[\left(W_t^* \frac{T_T^* + T_P^*}{2} \right) - \left(W_b^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right]^{t^*-\Delta t^*} \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\ & \left\{ \left[W_t^{*t^*} \left(T_T^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] - \left[W_b^{*t^*} \left(T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*} \right) \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p - \\ & \left[\left(W_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_T^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(W_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$T_T^* = T^*(i, j+1, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_B^* = T^*(i, j-1, K)$$

$$W_t^* = W^*(i, j, K) \quad \text{et} \quad W_b^* = W^*(i, j-1, K)$$

• **Termes diffusifs :**

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) dr^* d\theta dz^* = \\ & \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\ & \left(2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s^{t^*+\Delta t^*} \right) \Delta \theta \Delta z - \left(r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s^{t^*+\Delta t^*} \right) \Delta \theta \Delta z = \left[\left(2K^{*t^*} - K^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] \Delta \theta \Delta z = \\ & \left\{ \left(2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_n^* \frac{T_N^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) - \left(2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_s^* \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_S^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right\} \Delta \theta \Delta z \end{aligned}$$

Avec :

$$K_n^* = \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_n^*}{K_n^*}} \quad , \quad K_s^* = \frac{2dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_s^*}{K_s^*}}$$

$$K_N^* = K^*(i+1, j, K) \quad , \quad K_P^* = K^*(i, j, K) \quad , \quad K_S^* = K^*(i-1, j, K)$$

$$dr_n^* = dr^*(i) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1)$$

$$\Delta \mathbf{r}_N^* = \Delta \mathbf{r}^*(i+1) \quad , \quad \Delta \mathbf{r}_P^* = \Delta \mathbf{r}^*(i) \quad , \quad \Delta \mathbf{r}_S^* = \Delta \mathbf{r}^*(i-1)$$

$$\mathbf{r}_n^* = \mathbf{r}_c^*(i) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_s^* = \mathbf{r}_c^*(i-1)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) dr^* d\theta dz^* = \\ & \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2K_{r^*}^{*t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\ & \left(2K_{r^*}^{*t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right)_w^e \Delta r_P^* \Delta Z_P^* - \left(K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right)_w^e \Delta r_P^* \Delta Z_P^* = \left[\left(2K_{r^*}^{*t^*} - K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_P^* \Delta Z_P^* = \\ & \left\{ \left(2K_e^{*t^*} - K_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{T_E^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) - \left(2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_W^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) \right\} \Delta r_P^* \Delta Z_P^* \end{aligned}$$

Avec :

$$K_e^* = \frac{2d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P^*}{K_P^*} + \frac{\Delta\theta_E^*}{K_E^*}} \quad , \quad K_w^* = \frac{2d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P^*}{K_P^*} + \frac{\Delta\theta_W^*}{K_W^*}}$$

$$K_E^* = K^*(i, j, k+1) \quad , \quad K_W^* = K^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad \text{et} \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial Z^*} (q_z^*) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial Z^*} \left(2K_{r^*}^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial Z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial Z^*} \left(2K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial Z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left(2K_{r^*}^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial Z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right)_b^t \mathbf{r}_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P - \left(2K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial Z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right)_b^t \mathbf{r}_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P = \\ & \left[\left(2K_{r^*}^{*t^*} - K_{r^*}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{\partial T^*}{\partial Z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_b^t \mathbf{r}_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P = \\ & \left\{ \left(2K_t^{*t^*} - K_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{T_T^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dZ_t^*} \right) - \left(2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_B^{*t^*+\Delta t^*}}{dZ_b^*} \right) \right\} \mathbf{r}_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P \end{aligned}$$

Avec :

$$K_t^* = \frac{2dz_t^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_T^*}{K_T^*}}, \quad K_b^* = \frac{2dz_b^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_B^*}{K_B^*}}$$

$$K_T^* = K^*(i, j+1, k), \quad K_p^* = K^*(i, j, k), \quad K_B^* = K^*(i, j-1, k)$$

$$dz_t^* = dz^*(j), \quad dz_b^* = dz^*(j-1)$$

$$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1), \quad \Delta z_p^* = \Delta z^*(j) \quad \text{et} \quad \Delta z_B^* = \Delta z^*(j-1)$$

Termes de production d'énergie :

$$\int_{w_s b}^{e n t} \int \int G^* r^* dr^* d\theta dz^* = G^* \int_{w_s b}^{e n t} \int \int r^* dr^* d\theta dz^* = G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\text{La production } G^* \text{ est constante} \left(G^* = \frac{K_s^*}{Re_0 Pr_0} \right).$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P T_P^{t^*+\Delta t^*} = A_N T_N^{t^*+\Delta t^*} + A_S T_S^{t^*+\Delta t^*} + A_E T_E^{t^*+\Delta t^*} + A_W T_W^{t^*+\Delta t^*} + A_T T_T^{t^*+\Delta t^*} + A_B T_B^{t^*+\Delta t^*} + S^{t^*+\Delta t^*} \quad (3.23)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_e^{*t^*} - K_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_t^{*t^*} - K_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_b^*}$$

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_E + \mathbf{A}_W + \mathbf{A}_N + \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_B + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p \mathbf{d}z_t^*}{\Delta t^*} \quad (3.24)$$

Voir annexe pour le développement du terme de source qui peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4\mathbf{T}_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^* - \frac{4\mathbf{T}_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^* + \mathbf{G}^* \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^* \\ &= [\mathbf{f}_n^{t^*-\Delta t^*} - \mathbf{f}_n^{t^*}] + [\mathbf{f}_s^{t^*} - \mathbf{f}_s^{t^*-\Delta t^*}] + [\mathbf{f}_e^{t^*-\Delta t^*} - \mathbf{f}_e^{t^*}] + [\mathbf{f}_w^{t^*} - \mathbf{f}_w^{t^*-\Delta t^*}] + [\mathbf{f}_t^{t^*-\Delta t^*} - \mathbf{f}_t^{t^*}] + [\mathbf{f}_b^{t^*} - \mathbf{f}_b^{t^*-\Delta t^*}] \end{aligned}$$

Ou

$$\mathbf{f}_n^{t^*} = \left(\mathbf{U}_n^{*t^*} \left(\mathbf{T}_N^{*t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*} \right) \right) \mathbf{r}_n^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_n^{t^*-\Delta t^*} = \left(\mathbf{U}_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\mathbf{T}_N^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \mathbf{r}_n^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_s^{t^*} = \mathbf{U}_s^{*t^*} \left(\mathbf{T}_P^{*t^*} + \mathbf{T}_S^{*t^*} \right) \mathbf{r}_s^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_s^{t^*-\Delta t^*} = \left(\mathbf{U}_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\mathbf{T}_P^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{T}_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \mathbf{r}_s^* \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_e^{t^*} = \mathbf{V}_e^{*t^*} \left(\mathbf{T}_E^{*t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_e^{t^*-\Delta t^*} = \left(\mathbf{V}_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\mathbf{T}_E^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\mathbf{f}_w^{t^*} = \mathbf{W}_t^{*t^*} \left(\mathbf{T}_T^{*t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*} \right) \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p$$

$$\mathbf{f}_w^{t^*-\Delta t^*} = \left(\mathbf{W}_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\mathbf{T}_T^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p$$

$$\mathbf{f}_t^{t^*} = \mathbf{W}_t^{*t^*} \left(\mathbf{T}_T^{*t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*} \right) \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p$$

$$\mathbf{f}_t^{t^*-\Delta t^*} = \left(\mathbf{W}_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\mathbf{T}_T^{*t^*-\Delta t^*} + \mathbf{T}_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p$$

$$f_b^{t^*} = W_b^{*t^*} \left(T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$f_b^{t^* - \Delta t^*} = \left(W_b^{*t^* - \Delta t^*} \frac{T_P^{*t^* - \Delta t^*} + T_B^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

III.9. Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est discrétisée dans un volume fini typique, donc :

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} + \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^*) \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(r_n^* U_n^{*t^* + \Delta t^*} - r_s^* U_s^{*t^* + \Delta t^*} \right) \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(V_e^{*t^* + \Delta t^*} - V_w^{*t^* + \Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(W_t^{*t^* + \Delta t^*} - W_b^{*t^* + \Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

Et on obtient l'équation de continuité discrétisée :

$$\begin{aligned} & \left(r_n^* U_n^{*t^* + \Delta t^*} - r_s^* U_s^{*t^* + \Delta t^*} \right) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \left(V_e^{*t^* + \Delta t^*} - V_w^{*t^* + \Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\ & \left(W_t^{*t^* + \Delta t^*} - W_b^{*t^* + \Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

III.10. Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites sous la même forme générale de l'équation de discrétisation et les coefficients (A_I tel que $I=P, N, S, E, T, B$) des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants seront identifiés. Il y a lieu de signaler que puisque la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques, tandis que les autres conditions seront directement données.

III.10.1. A l'entrée du tube : $z^* = 0$

Le domaine numérique correspondant est : $j = 1$, $1 \leq i \leq IL$, $1 \leq k \leq KL$

Domaine fluide :

a) pour la composante axiale, par exemple, $W^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 2(1 - 4r^{*2})$ elle doit vérifier

l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_p^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k) = \\
 & A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_N^{*t^*+\Delta t^*}(i+1, j, k) + A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_S^{*t^*+\Delta t^*}(i-1, j, k) + \\
 & A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_E^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k+1) + A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_W^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k-1) + \\
 & A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_T^{*t^*+\Delta t^*}(i, j+1, k) + A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)W_B^{*t^*+\Delta t^*}(i, j-1, k) + S_v^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Qui devra donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
 1.W_p^{*t^*+\Delta t^*} &= 0.W_N^{*t^*+\Delta t^*} + 0.W_S^{*t^*+\Delta t^*} + 0.W_E^{*t^*+\Delta t^*} + 0.W_W^{*t^*+\Delta t^*} + 0.W_T^{*t^*+\Delta t^*} + 0.W_B^{*t^*+\Delta t^*} + \\
 & 2[1 - 4r_p^{*2}(i)]
 \end{aligned}$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont :

$$\begin{aligned}
 A_p^{t^*+\Delta t^*} &= 1 \\
 A_N^{t^*+\Delta t^*} &= A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\
 S_w^{t^*+\Delta t^*} &= 2[1 - 4r_p^{*2}(i)]
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

b) de même pour les autres variables U, W et la température T, qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned}
 A_p^{t^*+\Delta t^*} &= 1 \\
 A_N^{t^*+\Delta t^*} &= A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\
 S_u^{t^*+\Delta t^*} &= 0 \text{ (pour U)}, \quad S_v^{t^*+\Delta t^*} = 0 \text{ (pour V)}, \quad S^t^{t^*+\Delta t^*} = 0 \text{ (pour T)}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

III.10.2. A la sortie du tube : $z = 104.17$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mathbf{K}^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0$$

Ces conditions sont équations discrétisées à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

$$A_{p_u}^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) =$$

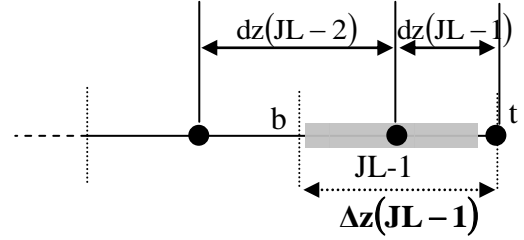
$$A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S_u^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

La condition sur la température : $\left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right|_{z^*=L/Di} = 0$ se discrétise autour de

JL-1 selon les différences centrées à l'ordre 2 :

$$K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_t - K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_b = 0 \Rightarrow$$



$$K_t^* \frac{T^*(i, JL, k) - T^*(i, JL-1, k)}{dz^*(JL-1)} - K_b^* \frac{T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)}{dz^*(JL-2)} = 0$$

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{K_b^* dz^*(JL-1)}{K_t^* dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

Sachant que dans la partie solide la conductivité est constante $K_n = K_s = K_t = K_b$ donc

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approché par l'approximation d'Adam-Bashforth et on déduit les différents coefficients :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) =$$

$$A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 2 \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k) \right] \quad (3.30)$$

$$- \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k) \right]$$

Dans la partie fluide la conductivité en **t** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

$$\begin{aligned}
A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) &= 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \\
A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) &= A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0 \quad (3.29) \\
S^t(i, JL, k) &= 2 \frac{K_b^{t^*}}{K_t^{t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k) \right] \\
&- \frac{K_b^{t^*-\Delta t^*}}{K_t^{t^*-\Delta t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k) \right]
\end{aligned}$$

III.10.3. A la paroi

La condition thermique à la paroi est :

$$-\left. K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_0/D_i} = \frac{(h_r + h_c)D_i}{K_o} T^* \Big|_{r^*=R_0/D_i}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$\begin{aligned}
A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL, J, K) &= 1 + \frac{(h_r + h_c)D_i}{K_o} \frac{dr^*(IL-1)}{\text{cof}} \\
\text{cof} &= 2K^*(IL-1, j, k) \Big|^{t^*} - K^*(IL-1, j, k) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \\
A_s^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= 1 \quad (3.31) \\
A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0 \\
A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= 0 \\
S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= 0
\end{aligned}$$

III.10.4. Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

$$\left(i=1 \quad , \quad 1 \leq j \leq JL \quad , \quad 1 \leq k \leq KL \right)$$

Le problème traité n'est pas axisymétrique, les gradients des variables ne sont pas nuls, ils sont supposés constants à l'axe :

Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 104.17$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = 0$$

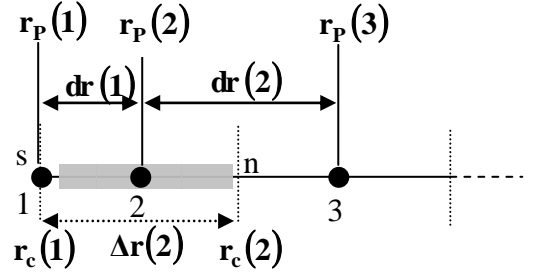
La discrétisation spatiale est celle des différences progressives.

a) La condition sur la température est : $\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \Big|_{r^*=0} = 0$

Une intégration autour du nœud 2 donne :

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_n - \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s = 0$$

$$\frac{T^*(3, j, k) - T^*(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{T^*(2, j, k) - T^*(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$



Ou $dr(2) = r_p^*(3) - r_p^*(2)$ et $dr(1) = r_p^*(2) - r_p^*(1)$

On peut donc en déduire la température au nœud 1 (sur l'axe) sous la forme :

$$T^*(1, j, k) = (1 + F)T^*(2, j, k) - FT^*(3, j, k)$$

$$F = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)} \tag{3.32}$$

Cette approximation est utilisée pour l'interpolation des températures à l'axe. Les températures interpolées seront imposées comme conditions aux limites à l'axe, mais avec la discrétisation d'Adam-Bashforth pour les termes à droite de l'équation (3.32). Les coefficients de l'équation de discrétisation de la condition à l'axe sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = \tag{3.33}$$

$$A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0$$

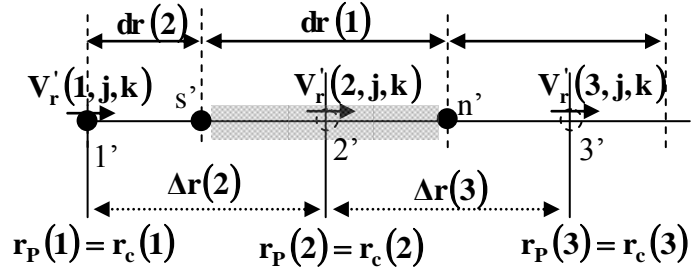
$$S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[(1 + F)T^{*t^*}(2, j, k) - FT^{*t^*}(3, j, k) \right] - \tag{3.34}$$

$$\left[(1 + F)T^{*t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - FT^{*t^*-\Delta t^*}(3, j, k) \right]$$

b) La condition à l'axe de la composante U^* est : $\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) \Big|_{r^*=0} = 0$

Le maillage étant décalé suivant la direction radiale, l'intégration se fait entre les faces $s \equiv s_u$ et $n \equiv n_u$ du le volume de contrôle décalé :

$$\left. \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right|_{n_u} - \left. \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right|_{s_u} = 0$$



$$\frac{U^*(3, j, k) - U^*(2, j, k)}{\Delta r^*(3)} - \frac{U^*(2, j, k) - U^*(1, j, k)}{\Delta r^*(2)} = 0$$

$$\text{ou } \Delta r^*(3) = r_c^*(3) - r_c^*(2) \quad \text{et} \quad \Delta r^*(2) = r_c^*(2) - r_c^*(1)$$

On obtient :

$$U^*(1, j, k) = (1 + F)U^*(2, j, k) - FU^*(3, j, k) \quad (3.35)$$

$$\text{Avec } F = \frac{r_c^*(2) - r_c^*(1)}{r_c^*(3) - r_c^*(2)}$$

Les coefficients de discrétisation sont :

$$A_p^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = \quad (3.36)$$

$$A_W^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = 0$$

$$S^{t^* + \Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[(1 + F)U^{t^*}(2, j, k) - FU^{t^*}(3, j, k) \right] - \left[(1 + F)U^{t^* - \Delta t^*}(2, j, k) - FU^{t^* - \Delta t^*}(3, j, k) \right]$$

$$\text{c) La condition à l'axe de la composante } V^* \text{ est : } \left. \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) \right|_{r^*=0} = 0$$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$\left. \frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right|_n - \left. \frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right|_s = 0 \Rightarrow \frac{V^*(3, j, k) - V^*(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{V^*(2, j, k) - V^*(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$

On déduit, donc :

$$V^*(1, j, k) = (1 + F)V^*(2, j, k) - FV^*(3, j, k) \quad (3.37)$$

$$F = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = \quad (3.38)$$

$$A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0$$

$$S_w^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)V^{t^*}(2, j, k) - FV^{t^*}(3, j, k) \right] - \left[(1+F)V^{t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - FV^{t^*-\Delta t^*}(3, j, k) \right]$$

d) la condition à l'axe de la composante W^* est : $\left. \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) \right|_{r^*=0} = 0$

L'équation de discrétisation est similaire à celle de la composante W , et ses coefficients sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = \quad (3.39)$$

$$A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0$$

$$S_v^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)W^{t^*}(2, j, k) - FW^{t^*}(3, j, k) \right] - \left[(1+F)W^{t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - FW^{t^*-\Delta t^*}(3, j, k) \right]$$

III.11. Equations de la pression et de correction de la pression

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.14), (3.16) et (3.18) nécessite la connaissance du champ de pression qui apparaît dans les termes sources. Malheureusement, ce champ est généralement inconnu. Une équation de discrétisation de la pression, à chaque point du calcul, est nécessaire pour une estimation de la pression. Cette estimation doit être corrigée. L'utilisation des équations de discrétisation des vitesses (3.14), (3.16) et (3.18) dans l'équation de discrétisation de continuité permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la pression. On réécrit les équations de discrétisation des quantités de mouvement sous la forme suivant :

$$U_n^{t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{t^*+\Delta t^*} + b_u(i, j, k)}{A_p} + d_n \left[P_p^{t^*+\Delta t^*} - P_N^{t^*+\Delta t^*} \right] \quad \text{Avec } d_n = \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta Z_p^*}{A_p} \quad (3.40)$$

$$V_e^{t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{t^*+\Delta t^*} + b_v(i, j, k)}{A_p} + d_e \left[P_p^{t^*+\Delta t^*} - P_E^{t^*+\Delta t^*} \right] \quad \text{Avec } d_e = \frac{\Delta r_p^* \Delta Z_p^*}{A_p} \quad (3.41)$$

$$W_t^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{*t+\Delta t^*} + b_w(i, j, k)}{A_p} + d_t \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right] \quad \text{Avec} \quad d_t = \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{A_p} \quad (3.42)$$

On définit à ce niveau des **pseudos vitesses** $\hat{U}^*, \hat{V}^*, \hat{W}^*$, sans les termes de pression, telles que :

$$\hat{U}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{*t+\Delta t^*} + b_u(i, j, k)}{A_p} \quad (3.43)$$

$$\hat{V}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{*t+\Delta t^*} + b_v(i, j, k)}{A_p} \quad (3.44)$$

$$\hat{W}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{*t+\Delta t^*} + b_w(i, j, k)}{A_p} \quad (3.45)$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudos vitesses sous la forme suivante :

$$U^{*t+\Delta t^*} = \hat{U}^{*t+\Delta t^*} + d_n \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.46)$$

$$V^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}^{*t+\Delta t^*} + d_e \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.47)$$

$$W^{*t+\Delta t^*} = \hat{W}^{*t+\Delta t^*} + d_t \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.48)$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que :

$$U_n^{*t+\Delta t^*} = \hat{U}_n^{*t+\Delta t^*} + d_n \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right] \quad U_s^{*t+\Delta t^*} = \hat{U}_s^{*t+\Delta t^*} + d_s \left[P_s^{*t+\Delta t^*} - P_p^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_e^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_e^{*t+\Delta t^*} + d_e \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right] \quad V_w^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_w^{*t+\Delta t^*} + d_w \left[P_w^{*t+\Delta t^*} - P_p^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$W_t^{*t+\Delta t^*} = \hat{W}_t^{*t+\Delta t^*} + d_t \left[P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right] \quad W_b^{*t+\Delta t^*} = \hat{W}_b^{*t+\Delta t^*} + d_b \left[P_b^{*t+\Delta t^*} - P_p^{*t+\Delta t^*} \right]$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{U}_n^{*t+\Delta t} \mathbf{r}_n^* - \mathbf{U}_s^{*t+\Delta t} \mathbf{r}_s^* \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left(\mathbf{V}_e^{*t+\Delta t} - \mathbf{V}_w^{*t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta z_p^* + \\ & \left(\mathbf{W}_t^{*t+\Delta t} - \mathbf{W}_b^{*t+\Delta t} \right) \mathbf{r}_p^* \Delta r_p \Delta\theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Et en remplaçant les vitesses par leurs expressions précédentes qui introduisent le champ de pression entre les faces du volume de contrôle, on obtient l'équation de pression discrétisée au nœud typique P, qui s'écrit dans sa forme final :

$$\begin{aligned} A_p P_p^{*t+\Delta t} &= A_N P_N^{*t+\Delta t} + A_S P_S^{*t+\Delta t} + A_E P_E^{*t+\Delta t} + A_W P_W^{*t+\Delta t} + A_T P_T^{*t+\Delta t} + \\ & A_B P_B^{*t+\Delta t} + S_p \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{r}_n^* d\mathbf{r}_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad \mathbf{A}_S = \mathbf{r}_s^* d\mathbf{r}_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.51)$$

$$\mathbf{A}_E = d\theta_e \Delta r_p \Delta z_p^* \quad \mathbf{A}_W = d\theta_w \Delta r_p \Delta z_p^* \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{r}_p^* \Delta r_p \Delta\theta_p d\mathbf{z}_t \quad \mathbf{A}_B = \mathbf{r}_p^* \Delta r_p \Delta\theta_p d\mathbf{z}_b \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} S_p^{*t+\Delta t} &= \left[\mathbf{r}_s^* \hat{\mathbf{U}}_s^{*t+\Delta t} - \mathbf{r}_n^* \hat{\mathbf{U}}_n^{*t+\Delta t} \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[\hat{\mathbf{V}}_w^{*t+\Delta t} - \hat{\mathbf{V}}_e^{*t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta z_p^* + \\ & \left[\hat{\mathbf{W}}_b^{*t+\Delta t} - \hat{\mathbf{W}}_t^{*t+\Delta t} \right] \mathbf{r}_p^* \Delta r_p \Delta\theta_p \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. On peut comprendre qu'il faudrait des séquences successives d'estimation et de correction de la vitesse et de la pression pour aboutir à un champ de vitesses corrects.

Supposons que :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^* + \mathbf{P}' \quad \text{Et} \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \mathbf{U}' \quad , \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^* + \mathbf{V}' \quad , \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^* + \mathbf{W}'$$

$\mathbf{U}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{W}^*$ Sont les vitesses estimées associées à la pression estimée \mathbf{P}^*

$\mathbf{U}', \mathbf{V}', \mathbf{W}'$ sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression \mathbf{P}' .

Les estimations des vitesses sont corrigées suit :

$$\begin{aligned}
U_n^{t+\Delta t^*} &= U_n^{*t+\Delta t^*} + d_n \left[P_P^{t+\Delta t^*} - P_N^{t+\Delta t^*} \right] & U_s^{t+\Delta t^*} &= U_s^{*t+\Delta t^*} + d_s \left[P_S^{t+\Delta t^*} - P_P^{t+\Delta t^*} \right] \\
V_e^{t+\Delta t^*} &= V_e^{*t+\Delta t^*} + d_e \left[P_P^{t+\Delta t^*} - P_E^{t+\Delta t^*} \right] & V_w^{t+\Delta t^*} &= V_w^{*t+\Delta t^*} + d_w \left[P_W^{t+\Delta t^*} - P_P^{t+\Delta t^*} \right] \\
V_t^{t+\Delta t^*} &= V_t^{*t+\Delta t^*} + d_t \left[P_P^{t+\Delta t^*} - P_T^{t+\Delta t^*} \right] & V_b^{t+\Delta t^*} &= V_b^{*t+\Delta t^*} + d_b \left[P_B^{t+\Delta t^*} - P_P^{t+\Delta t^*} \right]
\end{aligned}$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront d'une équation de discrétisation de la correction de pression P' avec des vitesses estimées : U^* , V^* , W^* .

$$\begin{aligned}
A_P P_p^{t+\Delta t^*} &= A_N P_N^{t+\Delta t^*} + A_S P_S^{t+\Delta t^*} + A_E P_E^{t+\Delta t^*} + A_W P_W^{t+\Delta t^*} + A_T P_T^{t+\Delta t^*} + \\
&A_B P_B^{t+\Delta t^*} + S'_p
\end{aligned}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = d_n r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = d_s r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad (3.55)$$

$$A_E = d_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.56)$$

$$A_T = d_t r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad , \quad A_B = d_b r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
S'_p{}^{t+\Delta t^*} &= \left[r_s^* U_s^{*t+\Delta t^*} - r_n^* U_n^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \left[V_w^{*t+\Delta t^*} - V_e^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
&\left[W_b^{*t+\Delta t^*} - W_t^{*t+\Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
\end{aligned} \quad (3.58)$$

III.12. Algorithme de calcul SIMPLER

La résolution des systèmes d'équations de discrétisation des champs de vitesse, de pression et de la température suit l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) [31] qui est la forme révisée de la version SIMPLE, [31]. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

1/ - Initialisation (estimation) d'un champ de vitesse.

2/ - Calcul des coefficients des équations de discrétisation des équations des quantités de mouvement et des pseudo-vitesses \hat{U}^* , \hat{V}^* , \hat{W}^* .

3/ - Utilisation des pseudo-vitesses calculées pour calculer la source de l'équation de la pression.

- Calcul des coefficients de discrétisation de cette équation de pression.

- Résolution de l'équation de pression pour tirer la pression P .
- 4/** - Considérer cette solution P comme étant une pression estimée P^* et calculer les vitesses estimées U^*, V^*, W^* .
- 5/** - Utilisation de ces vitesses estimées U^*, V^* et W^* pour calculer la source de l'équation de correction de la pression.
- Résolution de l'équation de correction de la pression pour tirer la correction de pression P' .
- 6/** - A l'aide de la pression corrigée P' corriger par les vitesses par le biais des équations de correction des vitesses.
- 7/** - Résolution de l'équation de discrétisation de l'énergie pour déterminer le champ des températures.
- 8/** - Vérification de la convergence des calculs (l'atteinte du régime permanent). On arrête les calculs si ce régime est atteint et on stocke les résultats. Sinon, on revient à l'étape 2/ pour effectuer un autre cycle en démarrant avec les vitesses calculées (corrigées) comme une nouvelle estimation (ou initialisation). On continue cette procédure jusqu'à la convergence des calculs.

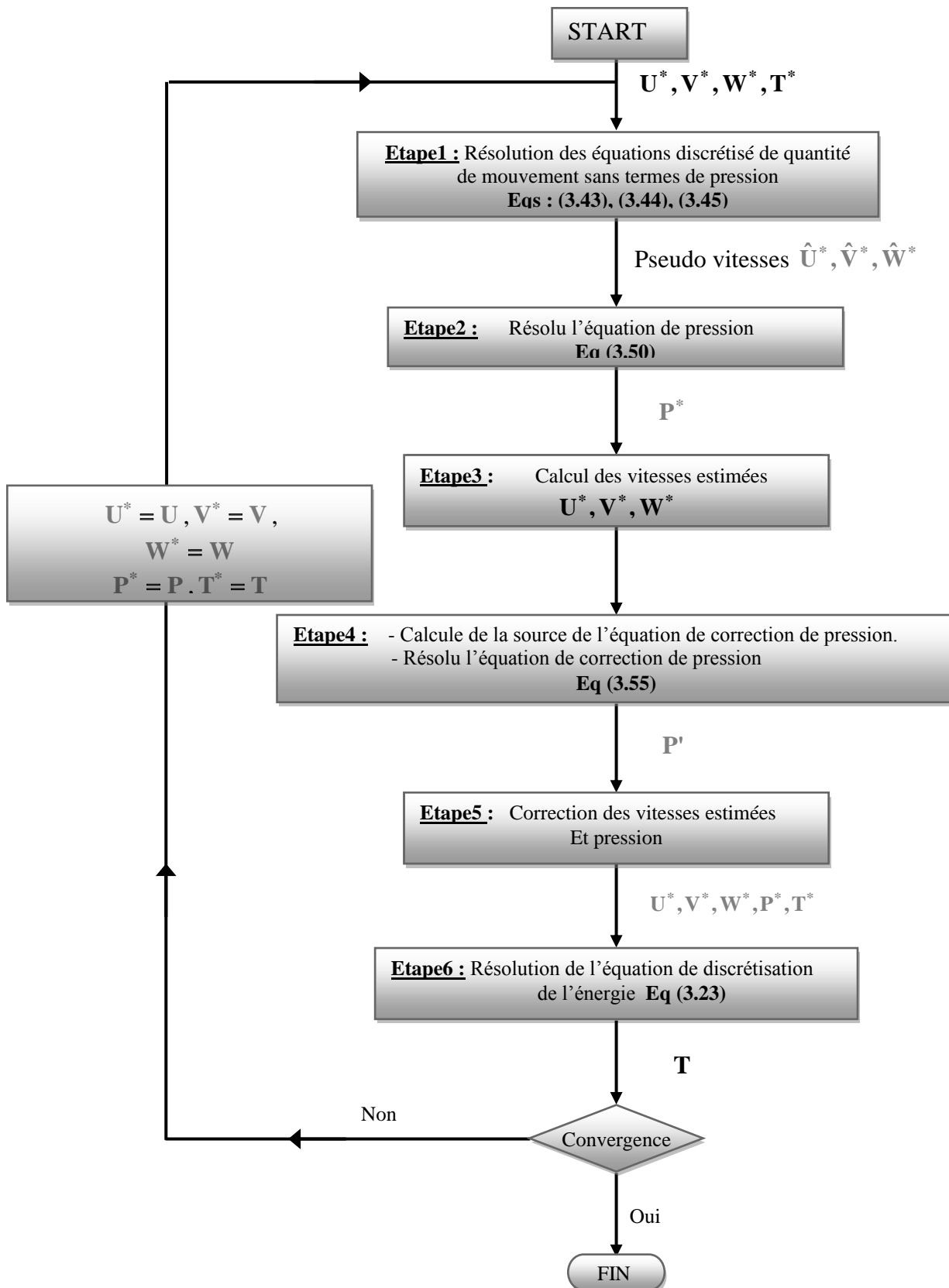


Figure 3.14 : Algorithme SIMPLER

III.13. Technique numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative.

Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$\begin{aligned} A_p(i, j, k)\phi_{i,j,k} = & A_N(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + A_S(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\ & A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ & A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions z et θ sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.59) est réécrite :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad (3.60)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= A_p(i, j, k) \\ b_i &= A_N(i, j, k) \\ c_i &= A_S(i, j, k) \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

$$d_i = A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k)$$

Le système d'équation (3.60) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA.

Le balayage suivant la direction z est similaire à celui de balayage suivant la direction radiale ; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique.

III.14. La validation du code de calcul

Ce code de simulation des écoulements tridimensionnels dans un conduit cylindrique a été validé lors de l'accomplissement de la thèse de Doctorat d'Etat de M. **Boufendi** [1]. Nous présentons une des validations effectuées. Elle concerne une comparaison avec la corrélation analytique publiée par **Polyakov** [32] qui exprime le nombre de Nusselt axial pour un écoulement hydrodynamiquement développé en convection forcée pure dans une conduite cylindrique : $Nu = 4.36 + 1.31(z^+)^{1/3} \exp(-13(z^+)^{1/2})$ où $z^+ = z^*/Re Pr$. Sur la figure 3.15, on remarque un bon accord entre les résultats.

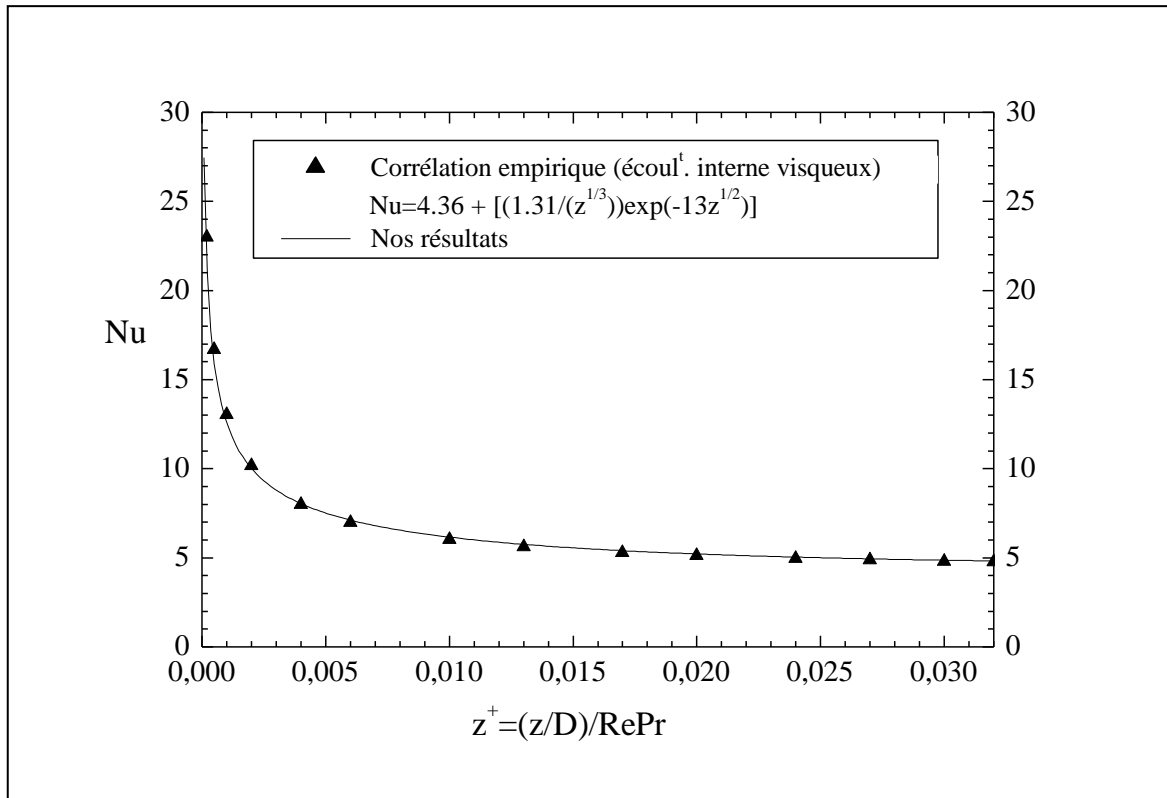


Figure 3.15 Validation du code de calcul pour la convection forcée ; comparaison avec les valeurs du Nu moyen calculées par la relation de **Polyakov [32]**

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons et discutons les résultats de la simulation numérique de la convection forcée et mixte dans un conduit cylindrique horizontale d'épaisseur et de longueur finies. En respectant un arrangement logique nous commencerons par présenter les résultats relatifs à la convection laminaire et forcée ($Gr = 0$) qui est considérée comme un cas de référence. Ensuite nous présenterons les différents cas de convection mixte obtenue pour les quatre fluides utilisés. Le maillage utilisé était de $26 \times 44 \times 162$ nœuds (185328 nœuds) dans les directions radiales, angulaire et axiale successivement et le pas de temps 5×10^{-4} et 1×10^{-3} était suffisant pour atteindre la convergence. Aussi dans ce chapitre, les logiciels de graphisme utilisés sont Tecplot version 9.0 (pour la représentation en 3D surtout) et Origin version 6.0 pour la représentation en 2D. Nos simulations numériques ont été accomplies grâce aux exécutions faites par un code de calcul sur un micro ordinateur personnel Dual Core de fréquence 2,9 GHz, et de capacité de mémoire égale à 1 Go.

IV.2 Caractéristiques et utilisation des fluides utilisés

Les résultats de cette étude se concentrent plus précisément sur quatre fluides qui sont l'Eau, le Butanol, Syltherm800 et l'Ethylène Glycol (fluides caloporteur). De part sa définition, un fluide caloporteur est un fluide qui transporte de la chaleur et permet donc de refroidir un milieu ou à l'inverse le réchauffer. Il existe de très nombreuses applications pour les fluides choisis. On peut citer pour l'Ethylène Glycol, par exemple, le chauffage des sols, des radiateurs des véhicules et des pompes à chaleur ainsi que le refroidissement de produits, tandis que pour le Butanol qui trouve peu d'utilisation mais on peut citer par exemple comme un fluide utile dans l'hydraulique comme le liquide des freins des véhicules. Aussi pour le Syltherm800, on a certaines utilisations dans les processus de chauffage et refroidissement de mono fluide, en particulier le traitement par lots dans l'industrie pharmaceutique, et la récupération d'énergie, et surtout dans les machines thermiques en général. .

Les fluides utilisés ont des propriétés physiques variables en fonction de la température : la viscosité $\mu^*(T^*)$ et la conductivité thermique $k^*(T^*)$. Les lois de variation de ces propriétés en fonction de la température ont été obtenues par un ajustement (fitting) précis des valeurs tabulées citées dans **Baehr [33]** pour l'Eau, **Saccadura [34]** pour l'Ethylène glycol et **Perry et Green [35]** pour le Butanol et Syltherm800.

FLUIDE	VISCOSITE DYNAMIQUE $\mu^*(T^*)$	CONDUCTIVITE THERMIQUE $k^*(T^*)$
EAU	$0.23087 + 0.78727 \exp(-T^*/0.11386)$	$1.00111 + 0.80477 T^* - 1.06002 T^{*2}$
BUTANOL	$0.09861 + 0.90742 \exp(-T^*/0.13181)$	$1.00173 - 0.18698 T^* + 0.1000 T^{*2}$
SYLTHERM 800	$0.0822 + 0.8662 \exp(-T^*/0.1928)$	$1.00703 - 0.3572 T^* + 0.0027 T^{*2}$
ETHYLENE GLYCOL	$0.05517 + 0.76219 \exp(-T^*/0.08713)$	$1.00388 + 0.39958 T^* - 0.69909 T^{*2}$

Tableau 4.1: Lois de variation de la viscosité dynamique et de la conductivité thermique des fluides utilisés en fonction de la température

Ces ajustements représentent de bonnes approximations dans le domaine des températures relatives à cette étude.

La conductivité thermique k_0 (W/m.K) et la viscosité dynamique μ_0 (Pa.S) des fluides et les nombres de Prandtl et de Grashof sont calculés à 15 °C est prise à partir d'études précédente [33] et [34] et [35]. Comme nous allons le montrer dans le tableau suivant.

Grandeurs Physiques	EAU	BUTANOL	SYLTHERM 800	ETHYLENE GLYCOL
Conductivité thermique k_0	0.5893	0.1675	0.1359	0.2472
Viscosité dynamique μ_0	1.153 E-3	3.409 E-3	0.01199	0.03217
Nombre de Prandtl Pr	8.0820	80.5	140	305
Nombre de Grashof : Gr	257534	102336	47802	9300

Tableau 4.2: les propriétés des fluides étudiés à la température de référence égale à 15 c°

IV.3 Résultats en mode de convection forcée $Gr = 0$

IV.3.1 Aspect hydrodynamique

Dans cette partie, nous représentons les résultats hydrodynamiques en mode de convection forcée pure. En mode de convection forcée, l'effet de la convection naturelle n'existe pas ce qui entraîne automatiquement l'existence d'une symétrie autour de l'axe du conduit des champs dynamiques. Il ne faut pas oublier l'existence de la condition aux limites sur les composantes de vitesse à la paroi et la nullité du nombre de Grashof. On peut voir cela sur les figures (4.1.a - 4.1.b - 4.1.c - 4.1.d) qui représentent le champ de vitesse axiale à la sortie de conduit pour les fluides utilisés. Ces représentations de la distribution axiale confirment pour tous les cas étudiés, l'axisymétrie du champ dynamique et le profil de Poiseuille dont le maximum de la vitesse axiale sera en tout point z^* situé au centre du conduit et un minimum situé évidemment à la paroi. Donc, d'un point de vue qualitatif le côté physique du problème est respecté mais d'un point de vue quantitatif les valeurs obtenus pour les cas étudiés diffèrent d'un fluide à un autre. Ceci peut se voir avec les valeurs de vitesse axiale maximal au sortie du conduit, $W_{\max}^* = 1.8404$

pour l'Eau et pour le Butanol $W_{\max}^* = 1.5717$ et pour le Syltherm800 $W_{\max}^* = 1.6172$ tandis que pour Ethylène $W_{\max}^* = 1.4572$.

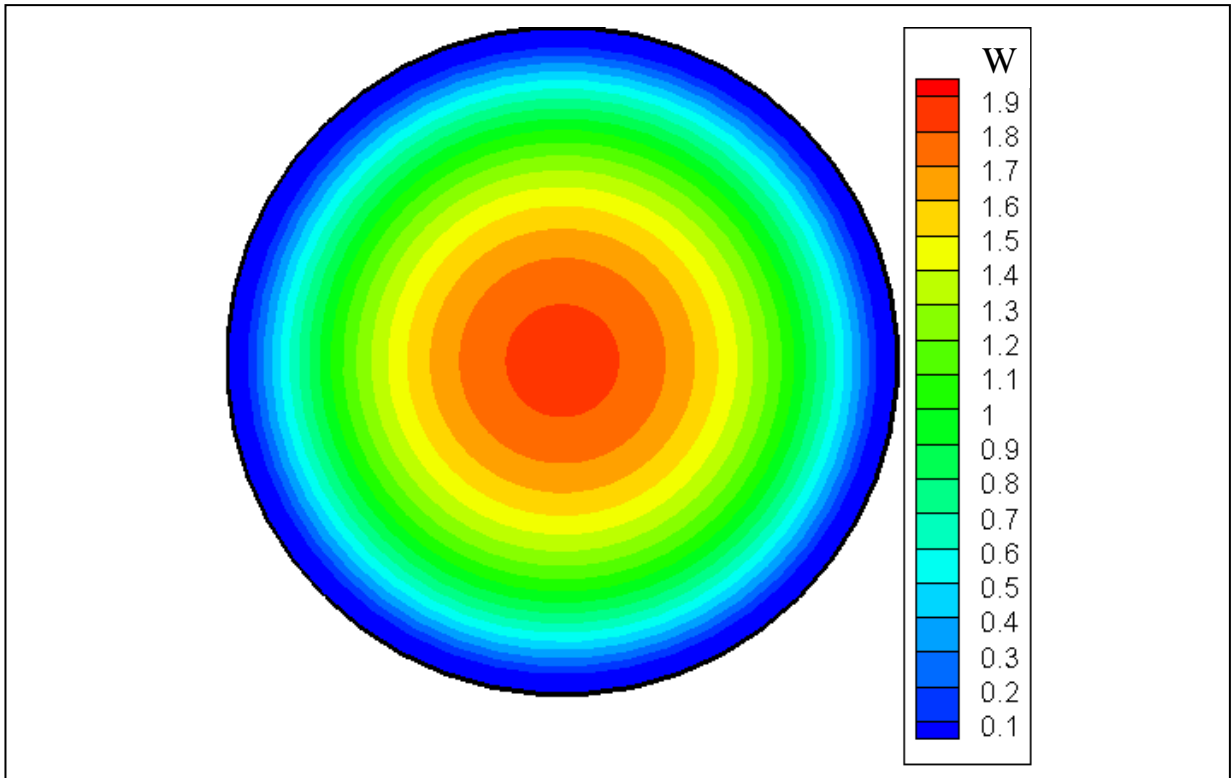


Figure 4.1.a vitesses axiales pour l'Eau à la sortie $z^* = 104.17$

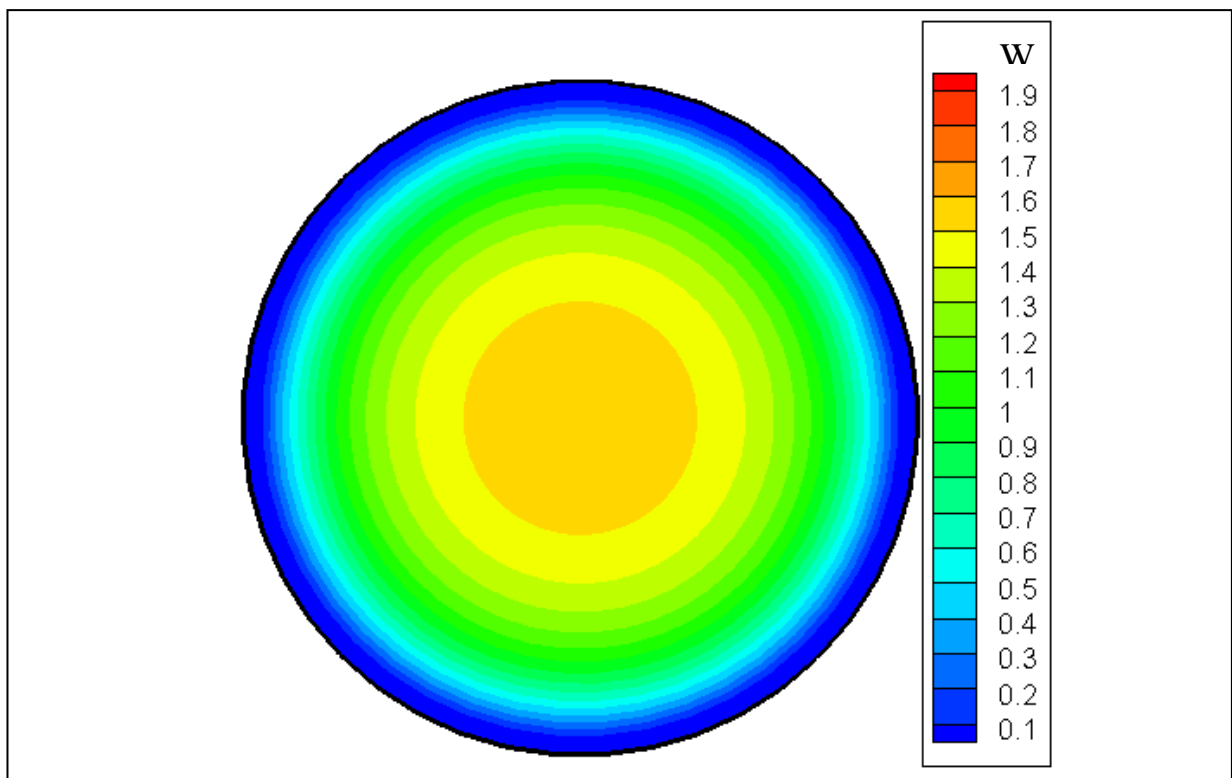


Figure 4.1.b : vitesses axiales pour le Butanol à la sortie $z^* = 104.17$

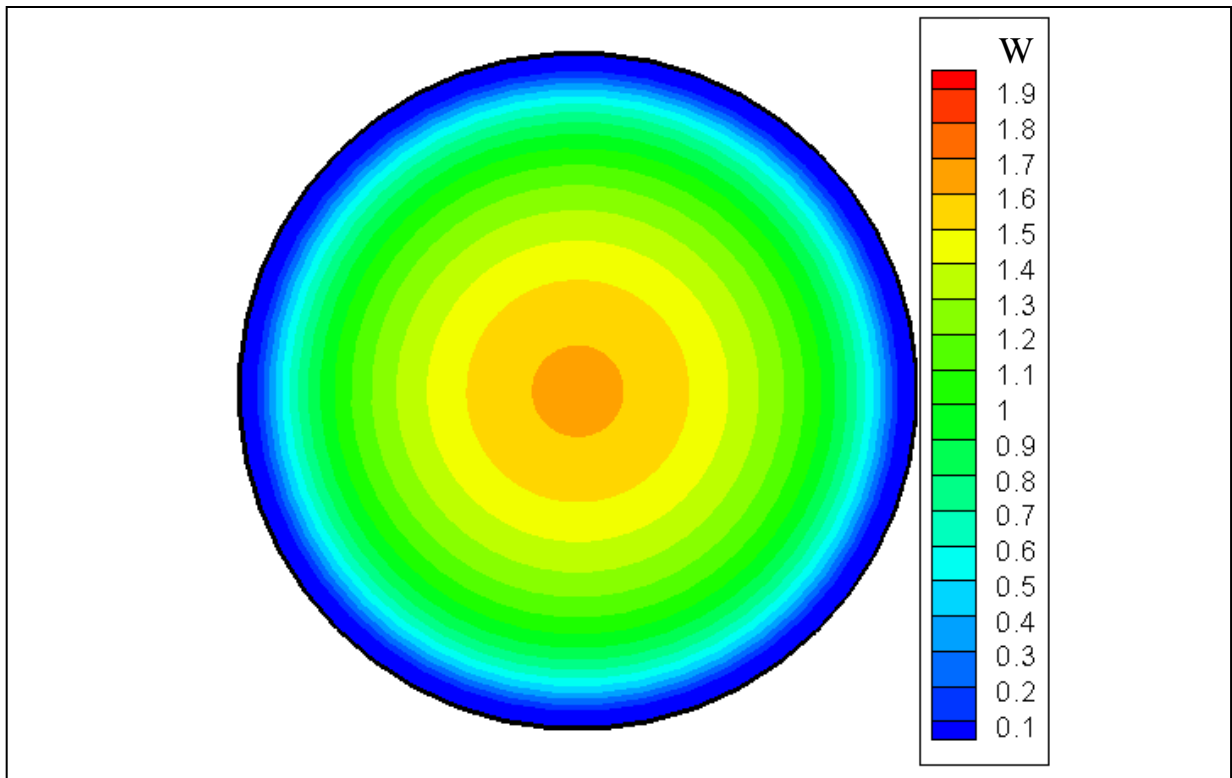


Figure 4.1.c vitesses axiales pour le Syltherm800 à la sortie $z^* = 104.17$

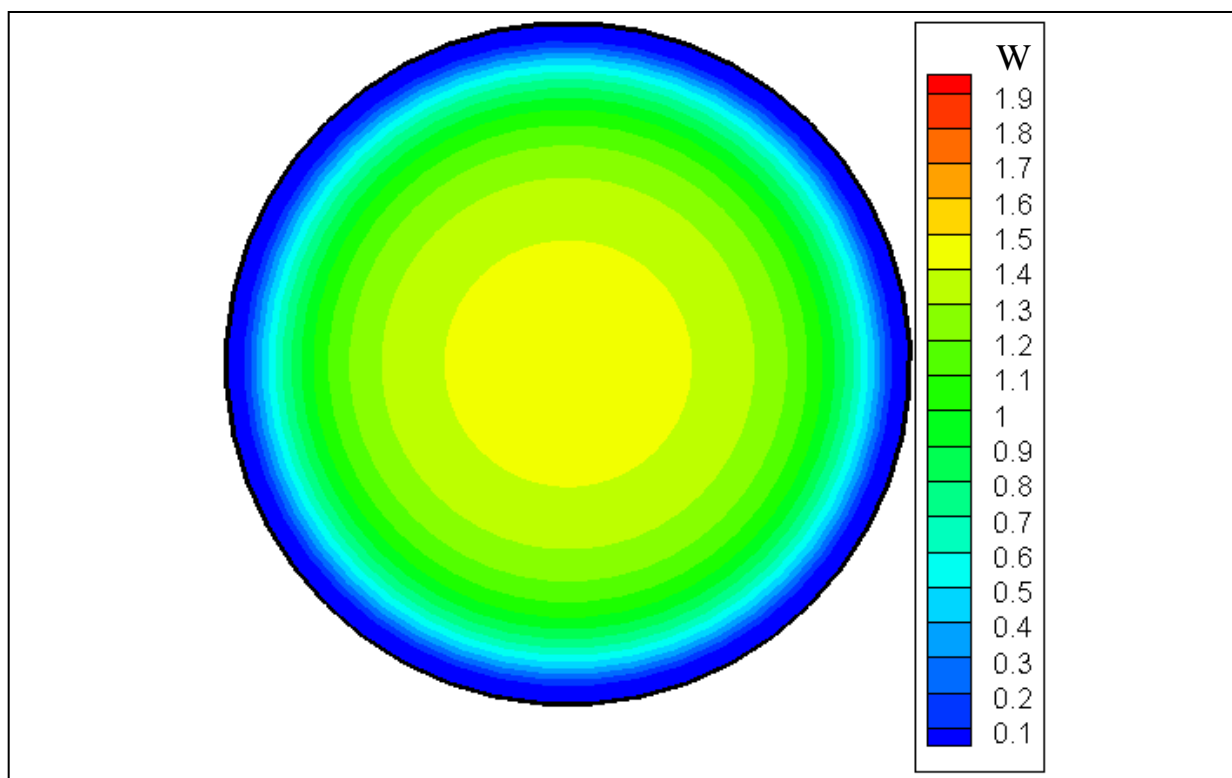


Figure 4.1.d vitesses axiales pour le Ethylène Glycol à la sortie $z^* = 104.17$

IV.3.2 Aspect thermique

Dans cette partie on a présenté la distribution du champ thermique en mode de convection forcée pour les quatre fluides étudiés. Sachant qu'à l'entrée la température d'entrée est la même pour tous les fluides étudiés et que la génération volumique de chaleur est uniformément répartie dans l'épaisseur solide du conduit, on peut associer ce régime à celui d'un écoulement en développement thermique. Les figures (4.2.a – 4.2.b – 4.2.c -4.2.d) illustrent cette distribution thermique à travers une section droite à la sortie. On remarque que les isothermes sont des cercles concentriques caractérisés par une répartition ou une stratification radiale des différentes températures de telle sorte que le maximum des températures se situe à la paroi et le minimum sur l'axe du cylindre pour les quelque soit le fluide étudié. Ces figures montrent bien que les valeurs de ces maximums diffèrent parmi les fluides.

Aussi dans la figure 4.3 sont représentées pour les différents fluides étudiés, l'eau le butanol, le glycol d'éthylène et le syltherm 800, les profils axiaux de la température de la paroi extérieure du conduit depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Qualitativement ces profils sont similaires mais quantitativement les différences sont nettement signalées. Déjà, sur une zone proche de l'entrée, l'augmentation de la température de paroi est grande pour les quatre fluides, mais ensuite cette croissance est caractérisé par une augmentation monotone jusqu'à la sortie. Ce comportement est tout à fait compréhensible à cause de la condition d'un chauffage uniforme imposé par la génération volumique d'énergie.

La figure 4.4 représente le profil de la température moyenne du fluide entre l'entrée et la sortie. Qualitativement cette courbe subit une croissance monotone depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Cette croissance obéit à un chauffage constant.

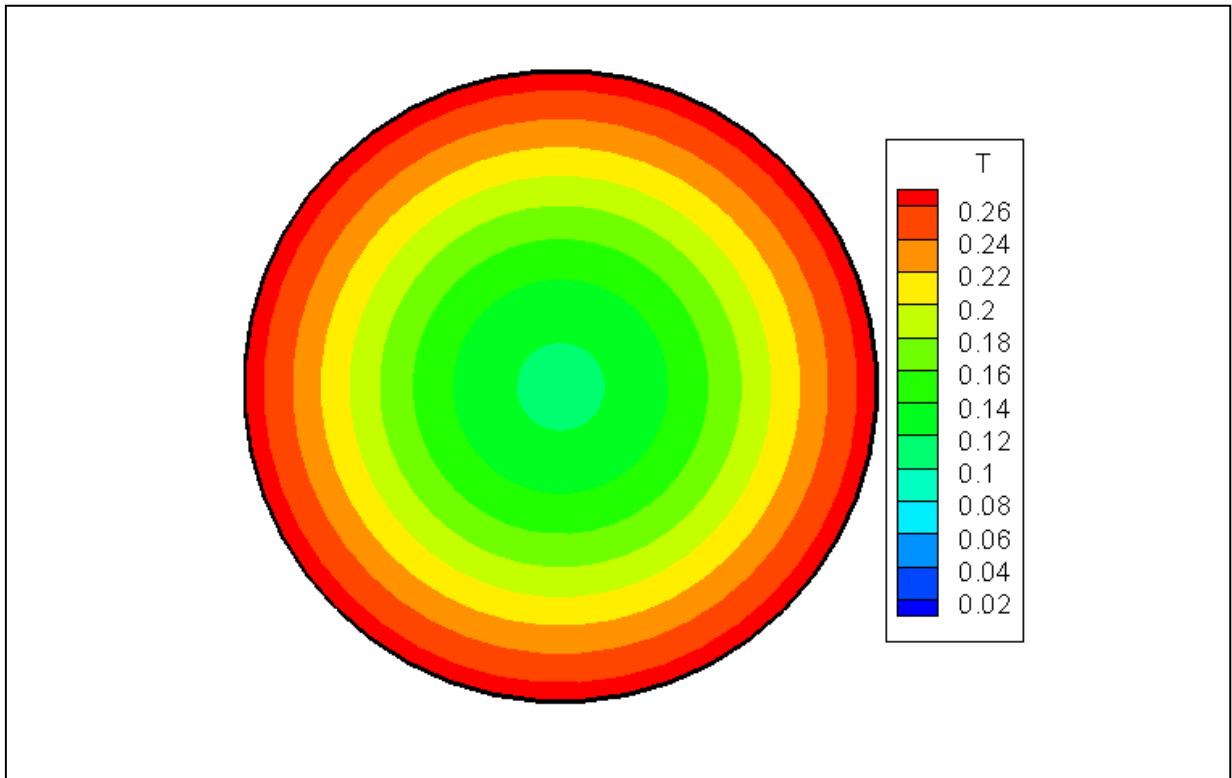


Figure 4.2.a : Les isothermes des sections droites pour l'Eau à la sortie $z^* = 104.17$

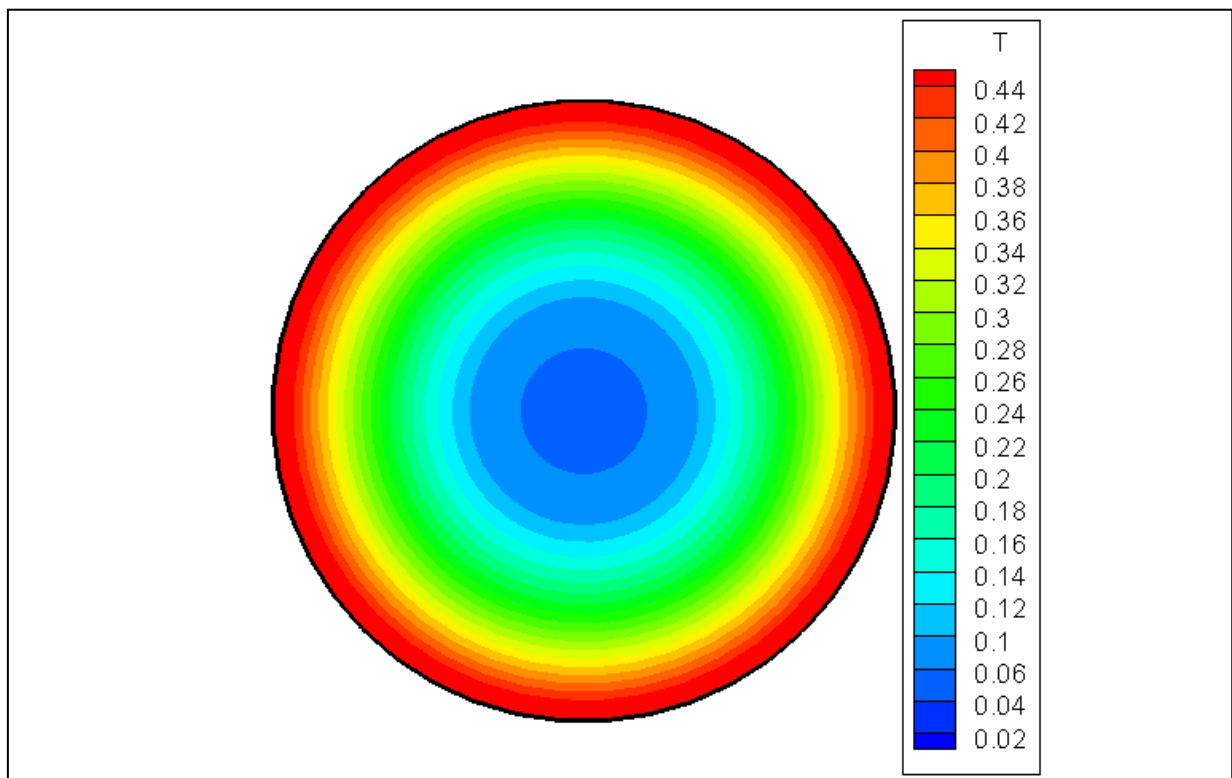


Figure 4. 2.b : Les isothermes des sections droites pour le Butanol à la sortie $z^* = 104.17$

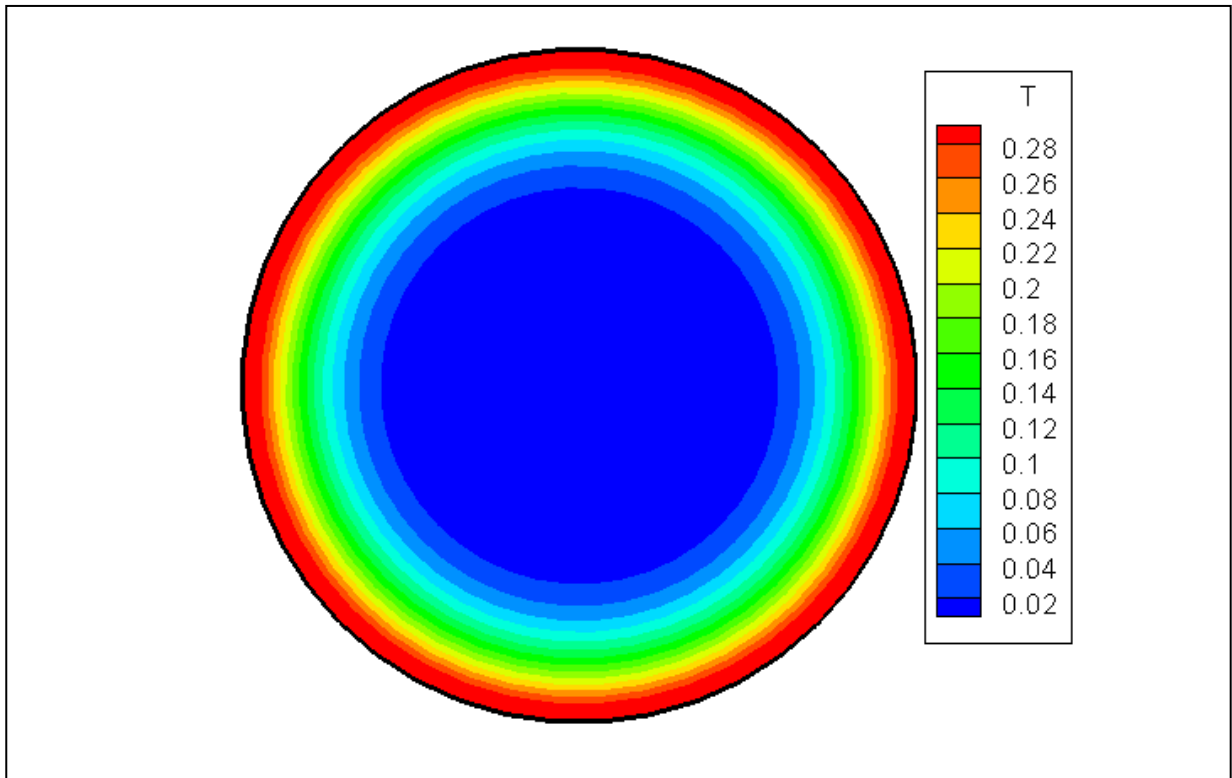


Figure 4. 2.c : Les isothermes des sections droites pour le Syltherm800 à la sortie $z^* = 104.17$

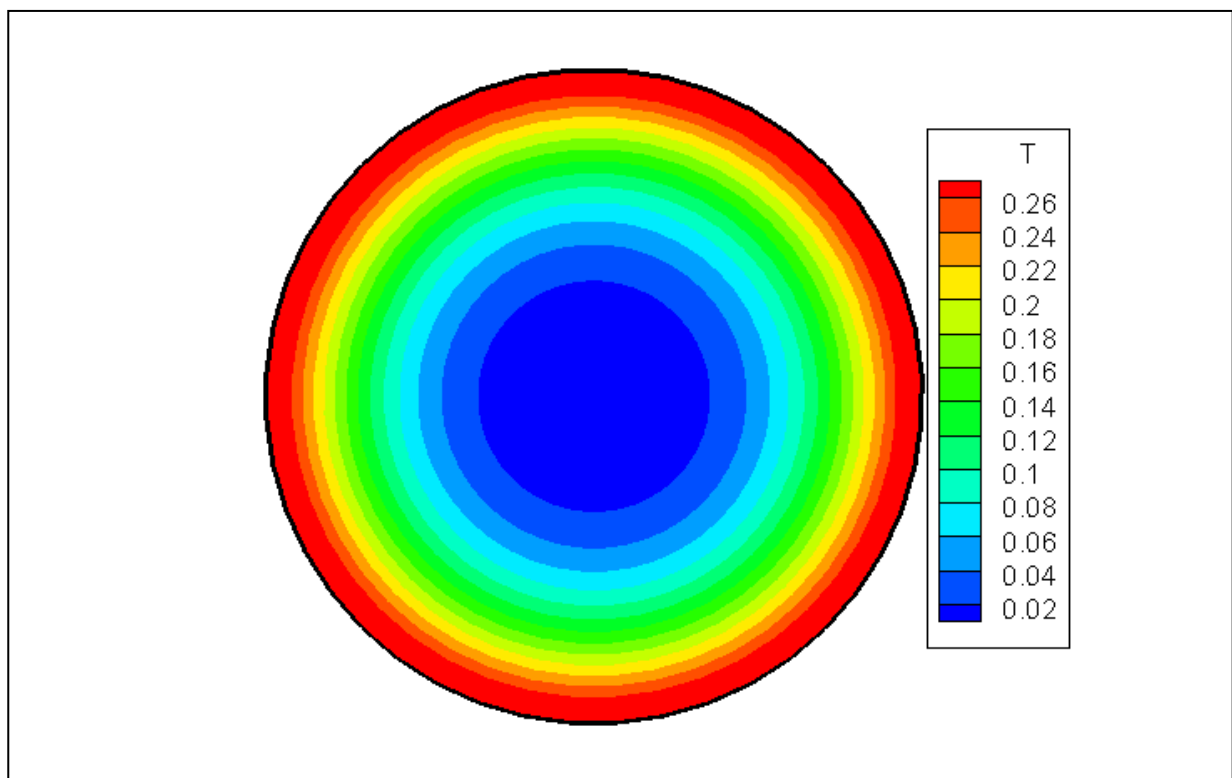


Figure 4. 2. d : Les isothermes des sections droites pour l'Ethylène Glycol à la sortie $z^* = 104.17$

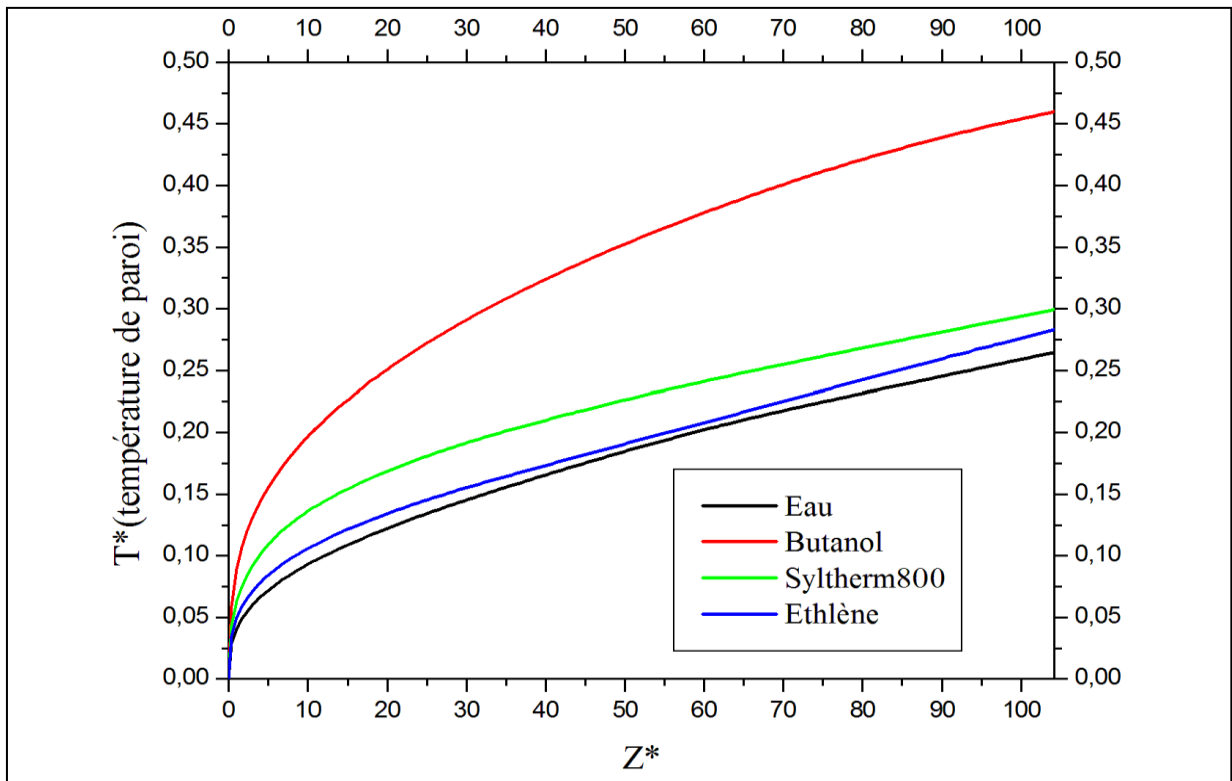


Figure 4.3 : Comparaison évolution axiale de la température de paroi pour les quatre fluides

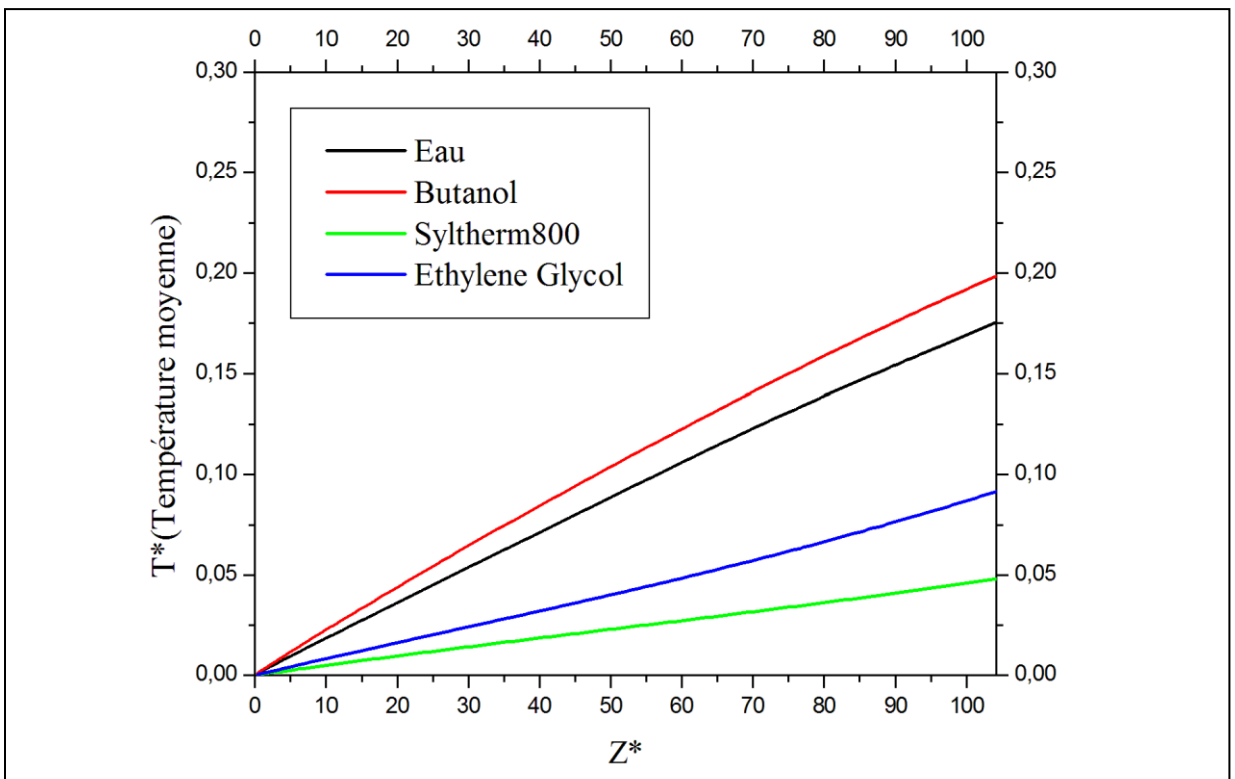


Figure 4.4 : Evolution axiale de la température moyenne

IV.3.3 Nombre de Nusselt

Dans la figure (4.5) on représente la variation du nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial $Nu(z)$ en mode de convection forcée ($Gr=0$). Son évolution pour tous les fluides étudiés confirment le respect de la physique du problème car il doit diminuer rapidement sur une zone proche de l'entrée jusqu'à une certaine distance axiale dite (z^*_{chut}) pour laquelle le nombre de Nusselt atteint la valeur Nu_{chut} comme indiqué dans le tableau 4.3. Au-delà de cette distance la diminution est moins prononcée pour atteindre des valeurs asymptotiques à la sortie et cela pour quasiment tous les fluides étudiés. Il faut signaler cependant que l'eau et le butanol amorcent ce comportement asymptotique avant le glycol d'éthylène et le sylther800.

Butanol			
z^*	$z^* = 0.3255$	$z^*_{chut} = 6.8361$	$z^* = 104.17$
$Nu(z^*)$	$Nu = 25.3522$	$Nu_{chut} = 11.0966$	$Nu = 5.0436$
Nu_{moy}	6.9668		
Eau			
z^*	$z^* = 0.3255$	$z^*_{chut} = 5.5340$	$z^* = 104.17$
$Nu(z^*)$	$Nu = 17.6709$	$Nu_{chut} = 8.1797$	$Nu = 5.1560$
Nu_{moy}	22.6281		
Syltherm800			
z^*	$z^* = 0.3255$	$z^*_{chut} = 10.7425$	$z^* = 104.17$
$Nu(z^*)$	$Nu = 45.1198$	$Nu_{chut} = 16.2691$	$Nu = 7.8200$
Nu_{moy}	11.5899		
Ethylène Glycol			
z^*	$z^* = 0.3255$	$z^*_{chut} = 8.7893$	$z^* = 104.17$
$Nu(z^*)$	$Nu = 32.2269$	$Nu_{chut} = 13.1220$	$Nu = 5.99$
Nu_{moy}	8.8785		

Tableau 4.3: Profils axiaux du nombre de Nusselt pour quatre fluides au convection forcée

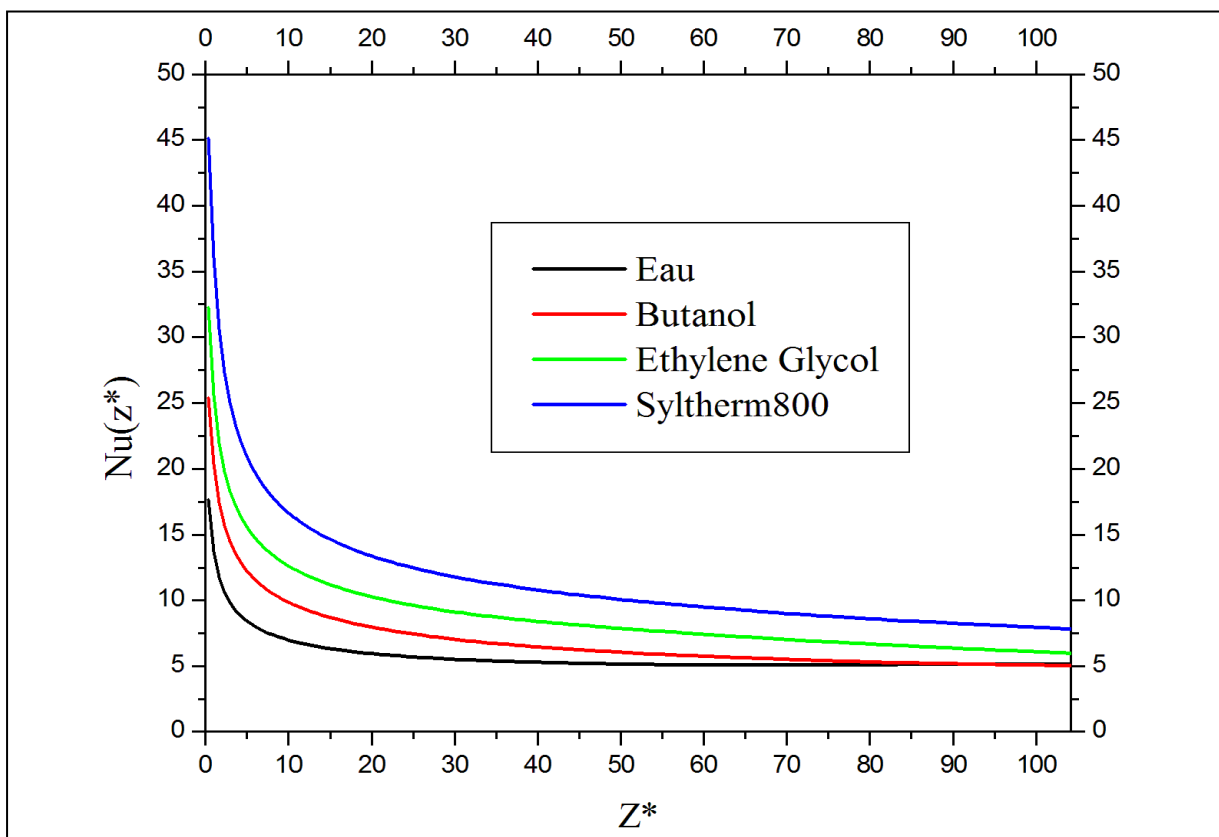


Figure 4.5 Profils axiaux du nombre de Nusselt

IV.4 Résultats en mode de convection mixte

IV.4.1. L'écoulement secondaire

L'écoulement secondaire pour les fluides étudiés, le Butanol, l'Eau, syltherm800 et l'Ethylène Glycol est rapporté dans les figures (4.6.a, 4.7.a, 4.8.a, 4.9.a) et les figures (4.6.b, 4.7.b, 4.8.b, 4.9.b). L'écoulement transversal dans un plan (r^*, θ) vertical normal à l'axe du conduit traduit l'écoulement secondaire dont la représentation est illustré par des vecteurs des composantes radiales et orthoradiales de la vitesse de l'écoulement sur une section considérée du tube. Les stations axiales choisies correspondent respectivement à celle où l'écoulement secondaire est le plus intense et celle où l'écoulement se présente à la sortie du tube. Dans tous les cas la structure de l'écoulement secondaire montre une symétrie par rapport au diamètre vertical du conduit ainsi que l'existence de deux cellules contrarotatives et symétriques par rapport à ce diamètre vertical. Pour tous les cas les

cellules qui Nous avons parlé précédemment il devint plus intense dans un zone proche à l'entrée du conduit. Mais après cette zone les valeurs des vitesses angulaire V^* ils commencent à diminuer jusqu'à la valeur minimal de vitesse angulaire et donc réduit la intensification de l'écoulement pour devenir pleinement développé à la sortie avec un déplacement des cellules de haut ver le bas dans le plan (r^*, θ) .on à quelque points de la vitesse angulaire maximal choisie pour l'écoulement est plus intense :

Pour le Butanol la composante maximale de vitesse angulaire est $V^* = 0.1843$, $r^* = 0.4006$, $\theta = 4.9979$ et $z^* = 4.5011$ alors que pour l'eau la composante de vitesse angulaire maximal est $V^* = 0.1262$, $r^* = 0.3605$, $\theta = 4.7123$, $z^* = 6.4302$ aussi pour le Syltherm800, $V^* = 0.032$, $r^* = 0.3805$, $\theta = 4.8551$, $z^* = 13.5035$ tandis que pour le Ethylène Glycol $V^* = 0.0594$, $r^* = 0.3805$, $\theta = 4.8551$, $z^* = 9.6453$.

A la sortie Pour $z^* = 104.17$: le Butanol la composante maximale de vitesse angulaire est $V^* = 0.1214$, $r^* = 0.4006$, $\theta = 4.7123$, pour l'eau la composante de vitesse angulaire maximal est $V^* = 0.0850$, $r^* = 0.0.3805$, $\theta = 4.5695$, pour le Syltherm800, $V^* = 0.0240$, $r^* = 0.0.3805$, $\theta = 4.7123$, tandis que pour le Ethylène Glycol $V^* = 0.0442$, $r^* = 0.4206$, $\theta = 4.5695$

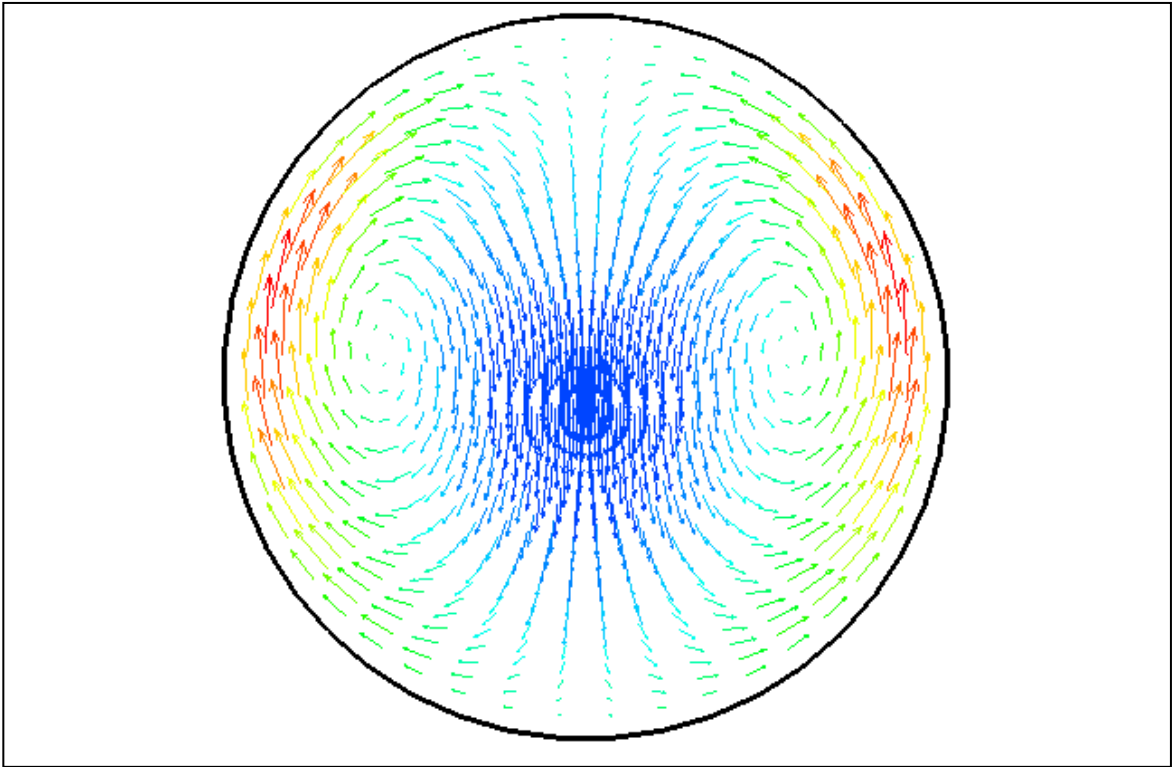


Figure 4.6.a: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Butanol l'orsque l'écoulement secondaire est plus intense. $z^* = 4.5011$

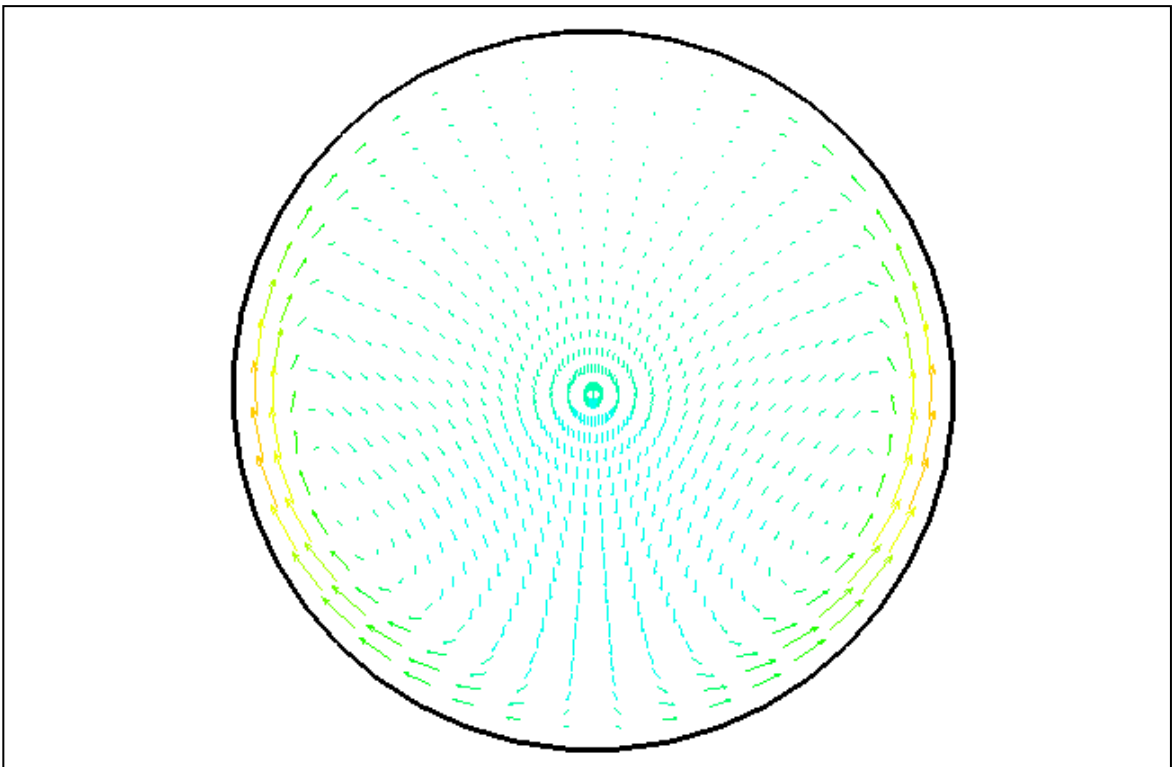


Figure 4.6.b: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Butanol à la sortie du tube $z^* = 104.17$

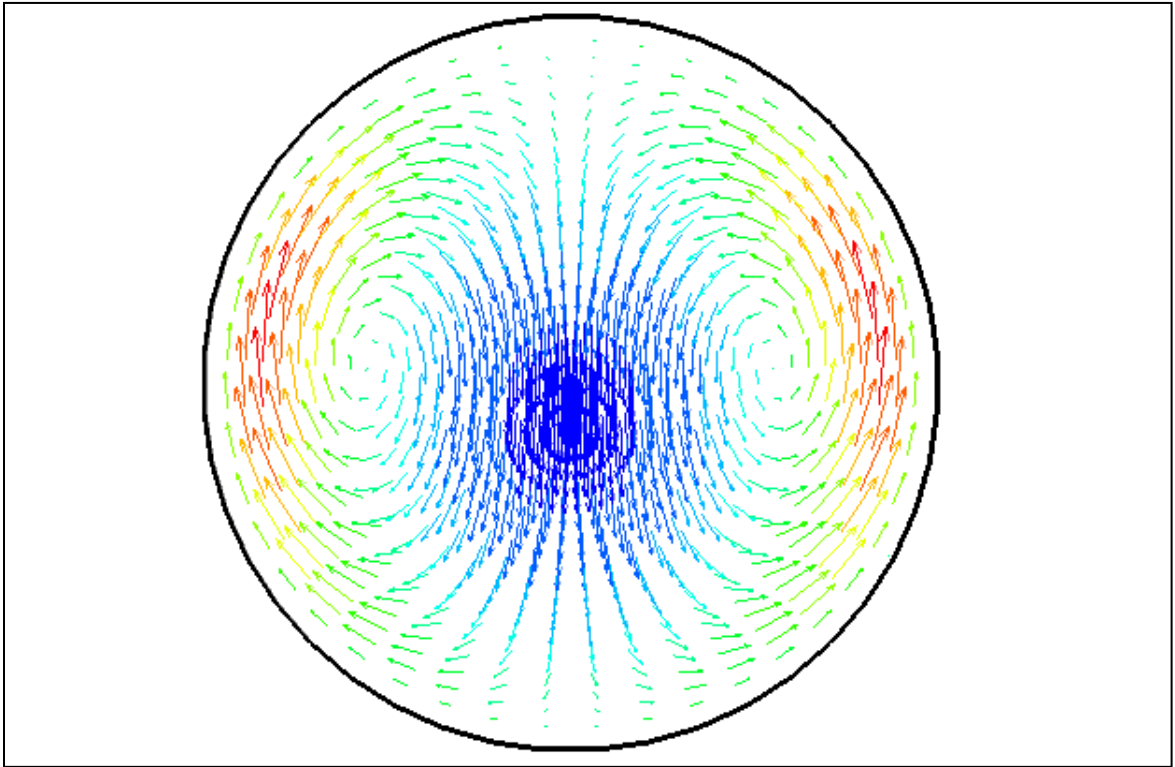


Figure 4.7.a: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour l'Eau lorsque l'écoulement secondaire est plus intense. $z^* = 6.4302$

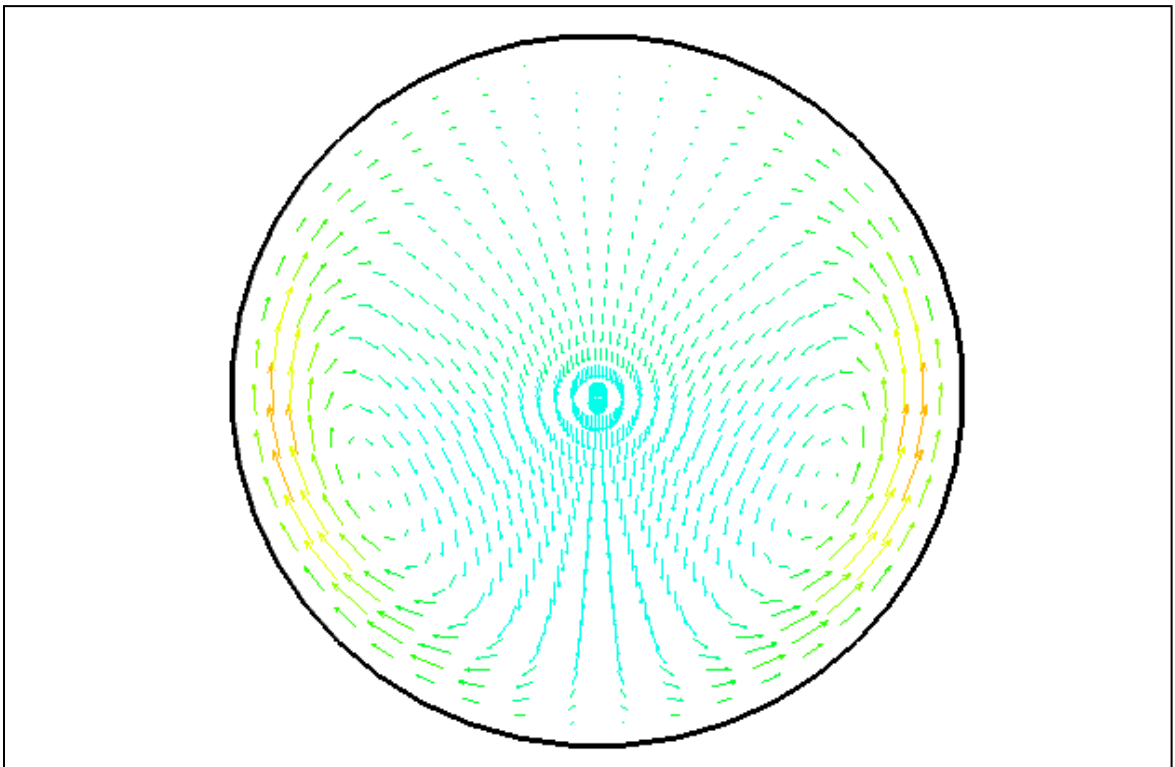


Figure 4.7.b: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour l'Eau à la sortie du tube $z^* = 104.17$

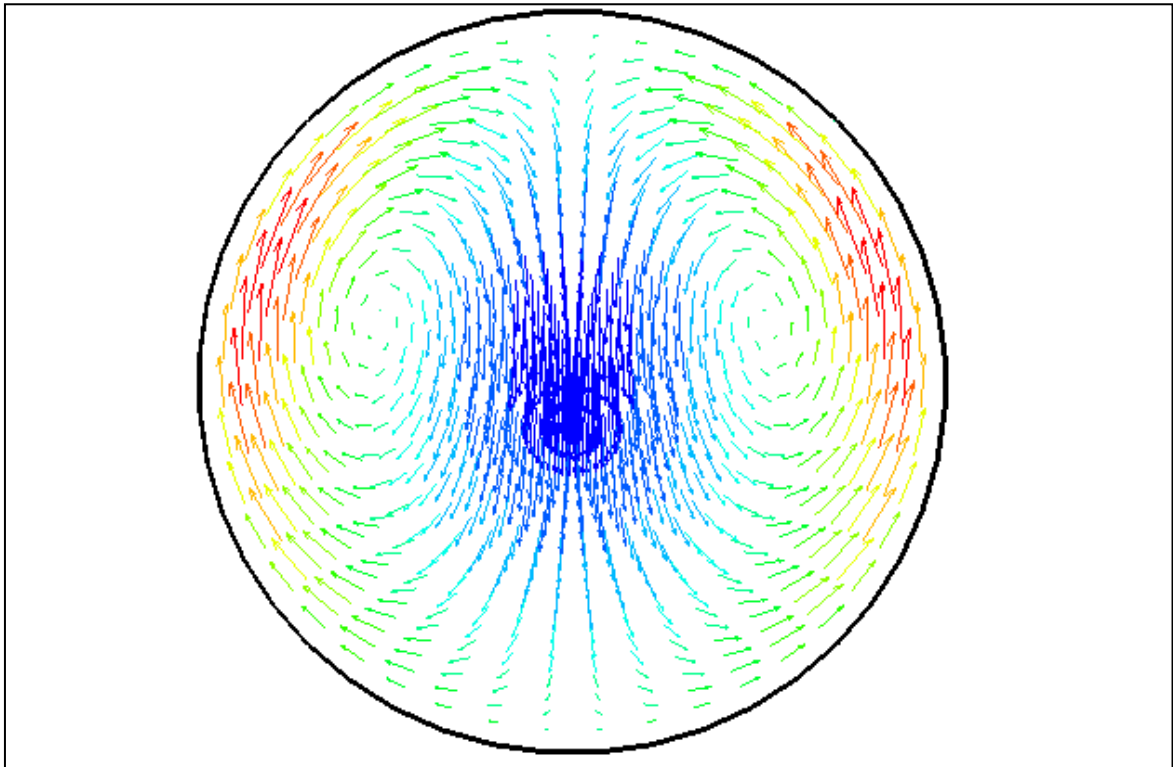


Figure 4.8.a: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Syltherm800 lorsque l'écoulement secondaire est plus intense. $z^* = 13.5035$

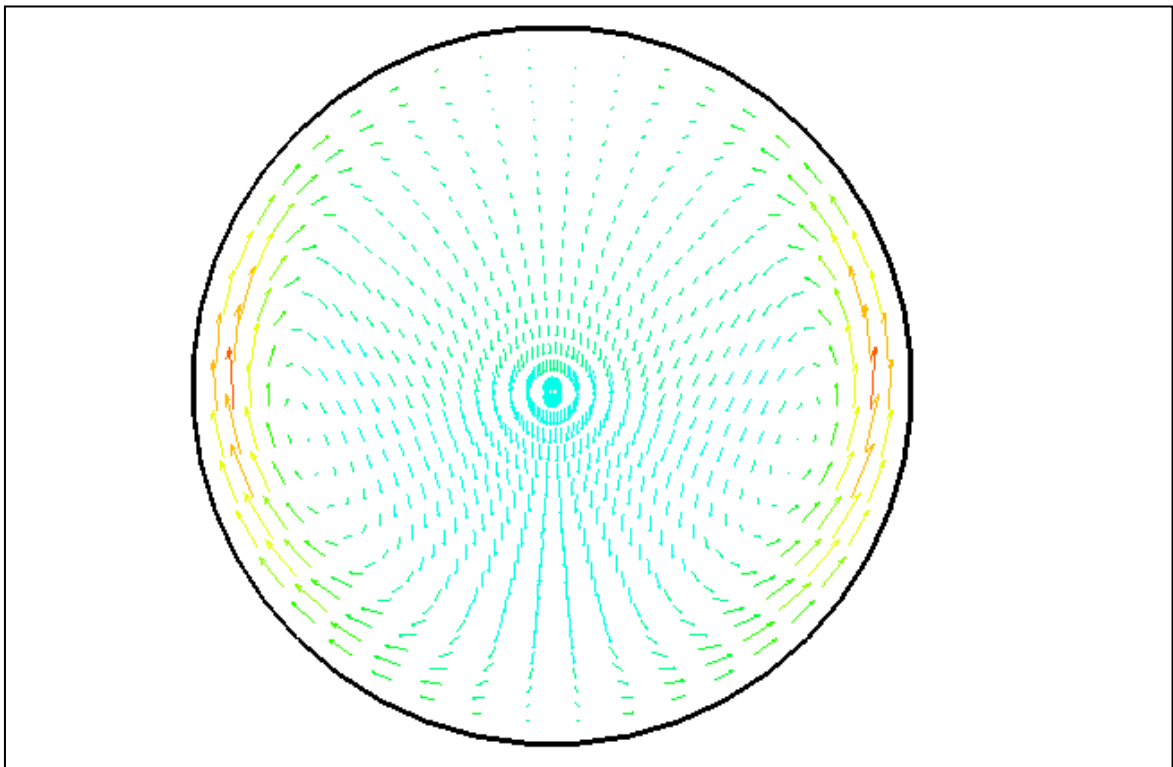


Figure 4.8.b: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Syltherm800 à la sortie du tube. $z^* = 104.17$

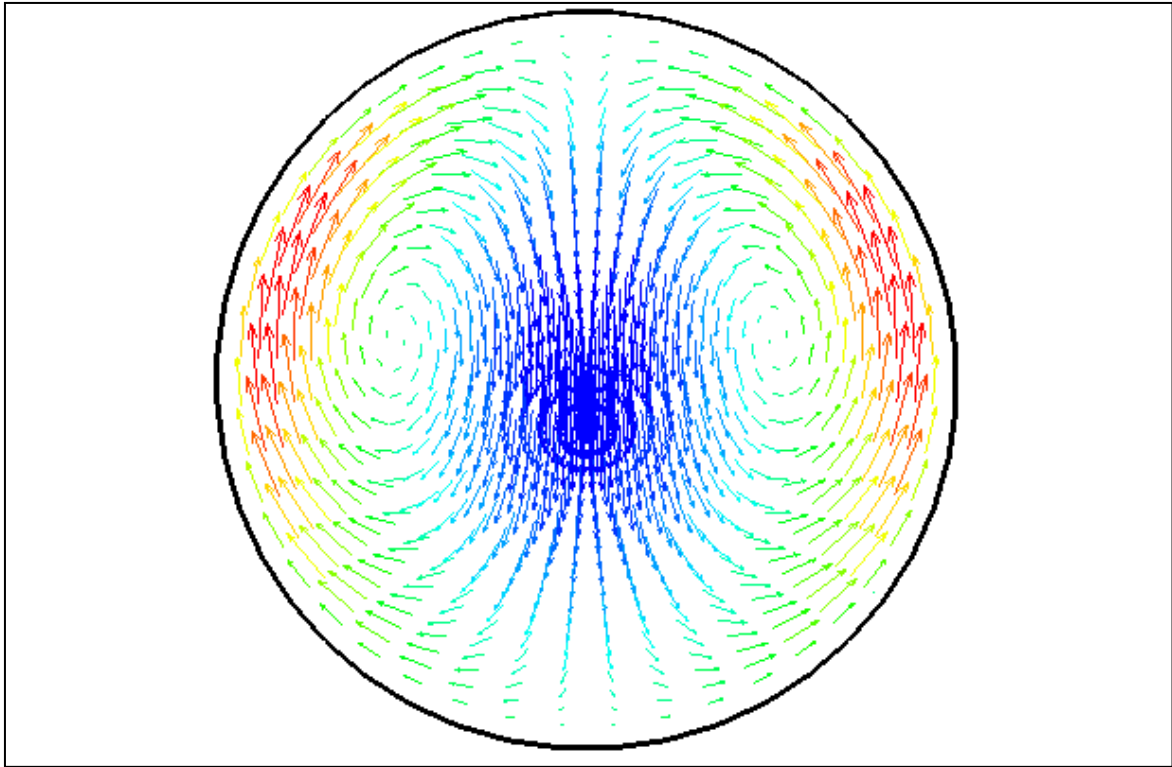


Figure 4.9.a: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Ethylène Glycol lorsque l'écoulement secondaire est plus intense. $z^* = 9.6453$

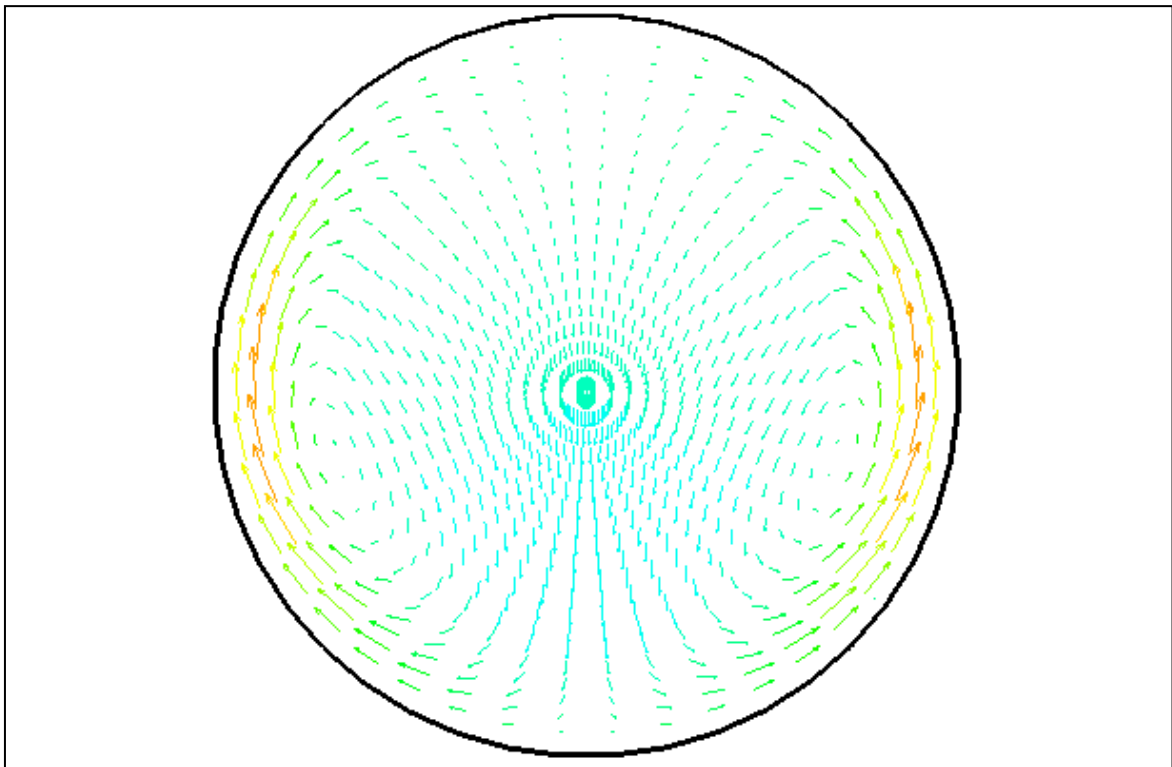


Figure 4.9.b: Evolution axiale de l'écoulement secondaire pour Ethylène Glycol à la sortie du tube. $z^* = 104.17$

IV.4.2. Champ dynamique axial

En convection mixte, l'influence de la convection naturelle sur l'écoulement principal sera importante. Bien que l'on garde toujours les mêmes conditions aux limites c'est-à-dire un profil de Poiseuille à l'entrée, de telle sorte que la vitesse axiale maximale au centre du conduit et une vitesse nulle à la paroi, l'écoulement axial principal est influencé par l'existence de l'écoulement secondaire du fluide dans le plan vertical et aussi par la thermodépendance de la viscosité. Les figures (4.10.a – d) illustrent la comparaison des distributions de la vitesse axiale obtenues avec les simulations numériques des fluides étudiées à des positions axiales judicieusement choisies entre l'entrée et la station où l'écoulement secondaire est le plus intense. Pour l'eau, la position radiale de la vitesse axiale maximale se déplace rapidement vers le bas, car l'écoulement secondaire est très important dans cette zone. $W_{\max}^* = 1.900$, $r^* = 0.1201$, $\theta = 3.1415$, $z^* = 6.4302$. Pour le Butanol et le Syltherm800 la position radiale de la vitesse axiale maximale demeure presque constantes dans le moitié de tube. $W_{\max}^* = 1.804$, $r^* = 0.040$, $\theta = 0$, $z^* = 4.5011$ Pour le Butanol. $W_{\max}^* = 1.8043$, $r^* = 0.060$, $\theta = 0$, $z^* = 13.5035$ pour le Syltherm800, Pour l'Éthylène Glycol l'écoulement secondaire est relativement moins intense par rapport à l'autres fluides et aussi l'effet de la viscosité plus élevé par comparaison aux autres fluides ce qui explique le déplacement graduel axial du maximum de la vitesse axiale vers le haut. $W_{\max}^* = 1.7006$, $r^* = 0.1201$, $\theta = 0$, $z^* = 9.6453$. Les figures (4.11.a – 4.11.b – 4.11.c -4.11.d) illustre la comparaison des distributions de la vitesse axiale obtenues pour les fluides étudiés entre le point de l'écoulement secondaire le plus intense jusqu'à la sortie, $z^* = 104.17$. Pour l'Eau il augmente le niveau de la vitesse maximale pour toute section transversale du conduit et déplace la position de cette vitesse maximale vers le bas : $W_{\max}^* = 1.9022$, $r^* = 0.0801$, $\theta = \pi$. Pour le Butanol il augmente le niveau de la vitesse maximale pour toute section transversale du conduit et avec l'existence de la position de la vitesse maximale dans la moitié du conduit. $W_{\max}^* = 1.8040$, $r^* = 0.040$, $\theta = 0$. Pour l'Éthylène Glycol et Syltherm800 il y a une forme de continuité de l'augmentation de la vitesse maximale avec un déplacement de la position de vitesse vers le haut. $W_{\max}^* = 1.8055$, $r^* = 0.1602$, $\theta = 0$, Pour le Syltherm800, et pour l'Éthylène glycol, $W_{\max}^* = 1.9002$, $r^* = 0.1802$, $\theta = 0$. On note que sur la position axiale du conduit, la position de vitesse axiale maximale a tendance à se déplacer vers le haut avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

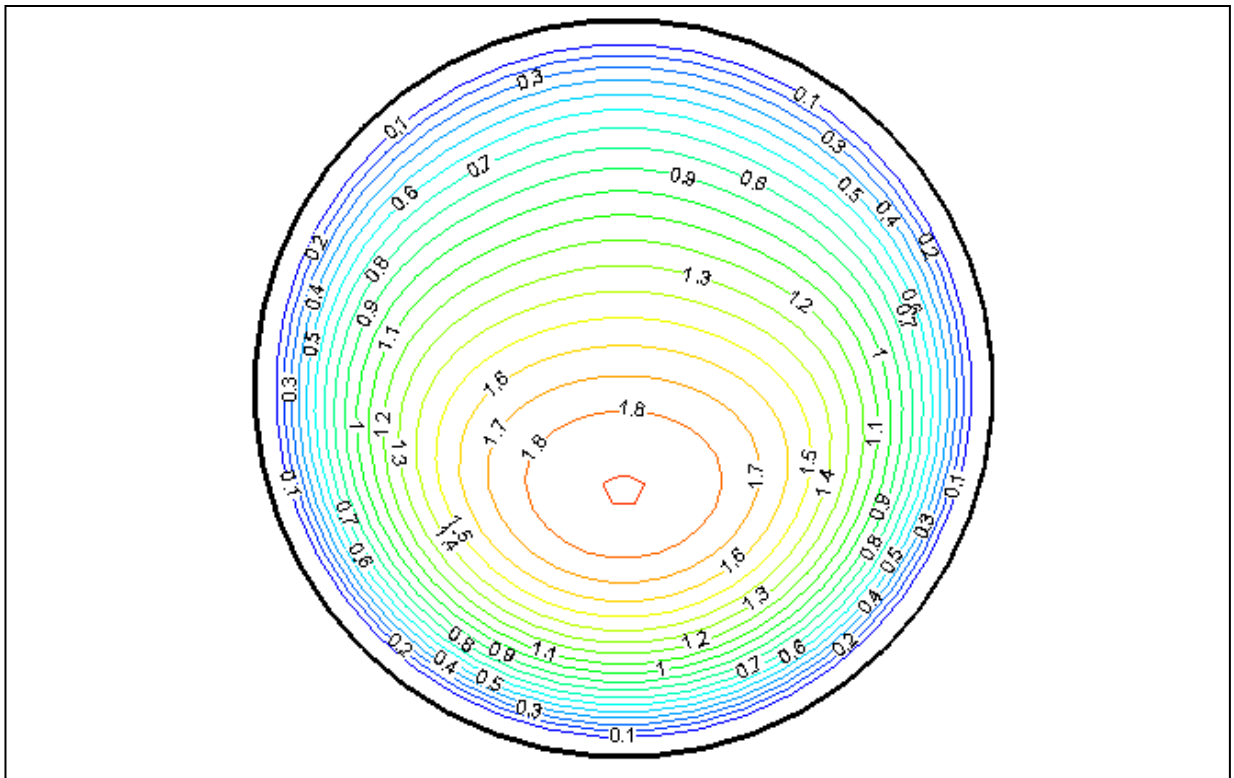


Figure 4.10.a : vitesses axiales lorsque l'écoulement secondaire est plus intense (Eau)

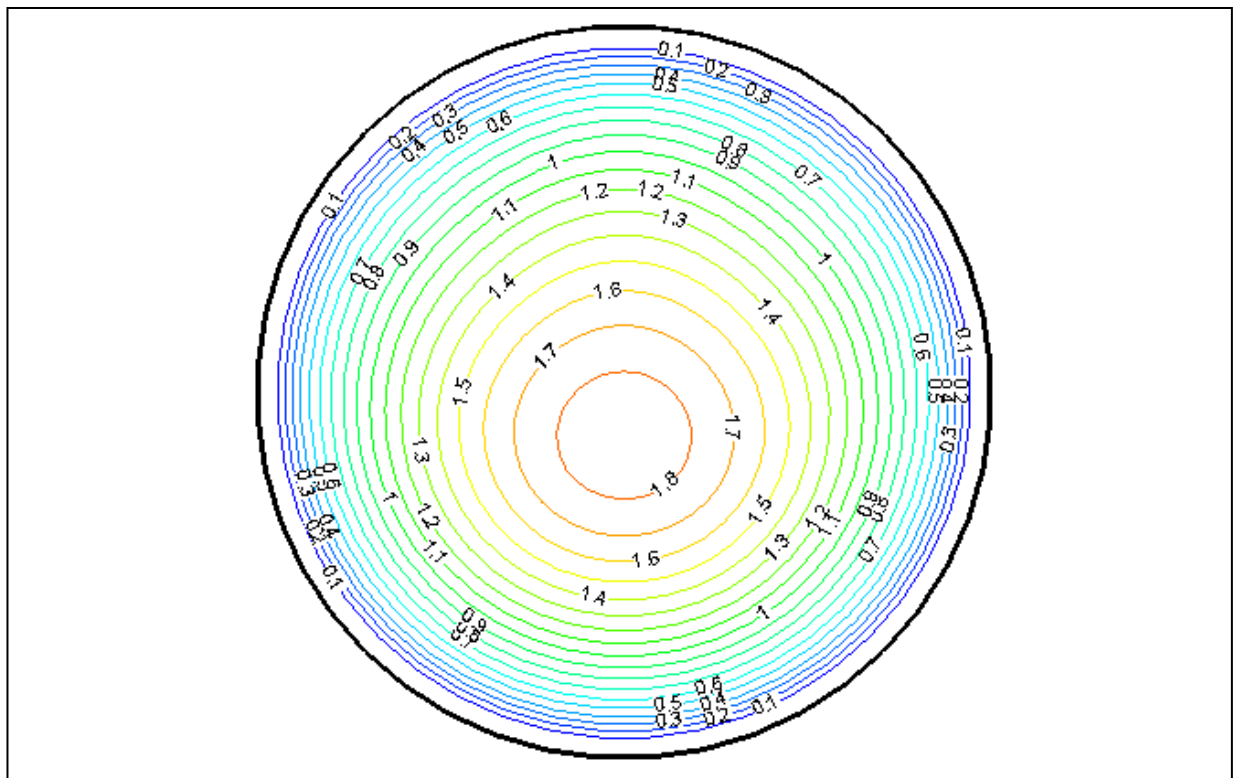


Figure 4.10.b : vitesses axiales lorsque l'écoulement secondaire est plus intense (Butanol)

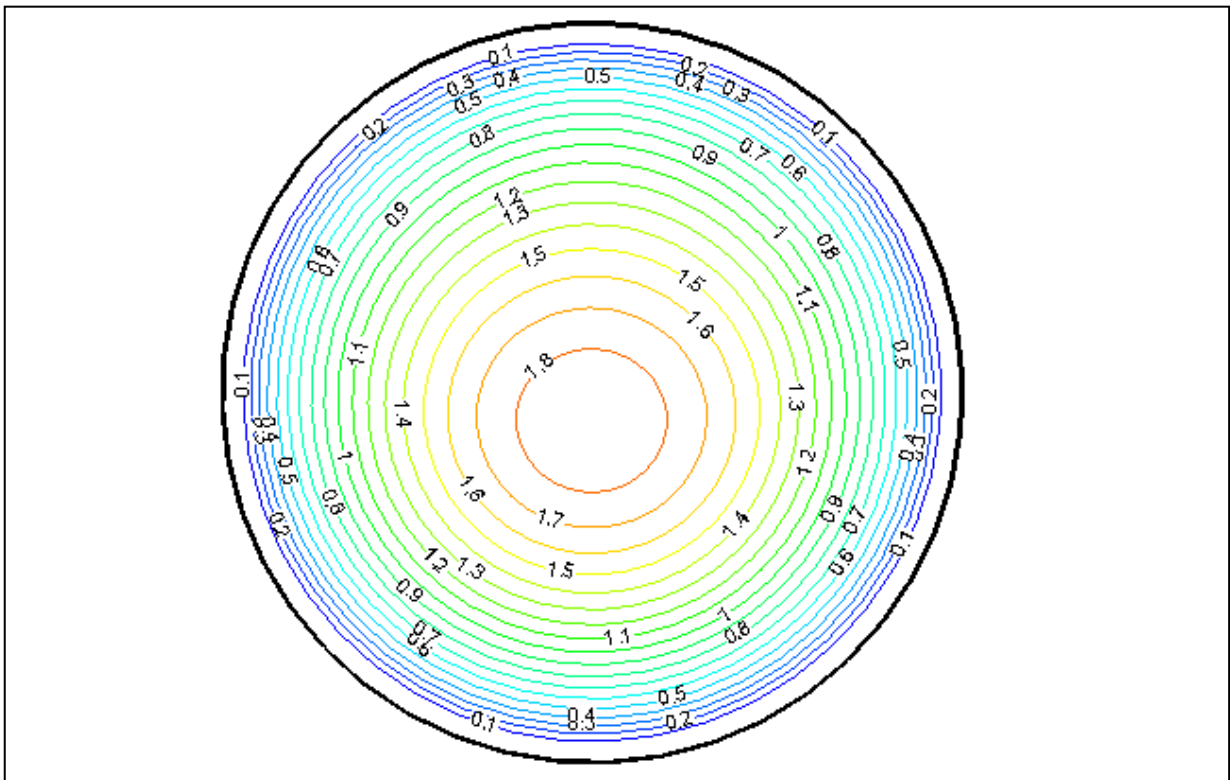


Figure 4.10.c : vitesses axiales lorsque l'écoulement secondaire est plus intense (Syltherm800)

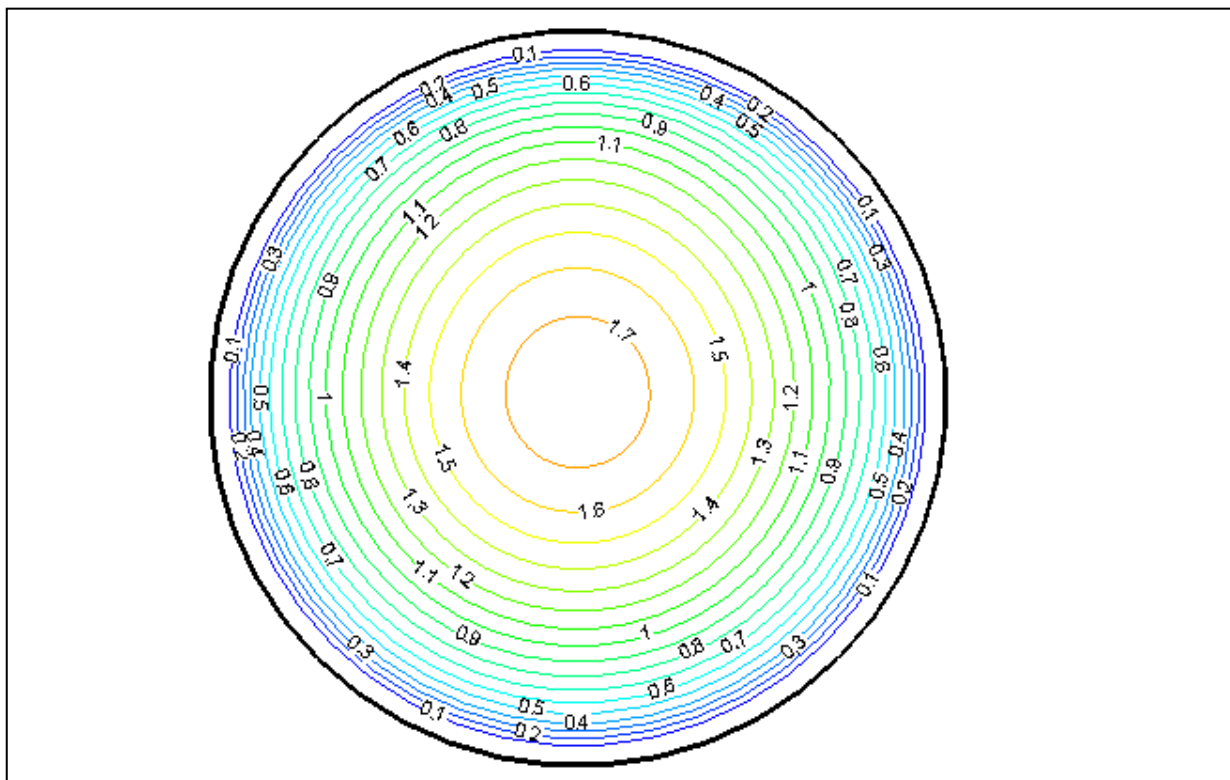


Figure 4.10.d : vitesses axiales lorsque l'écoulement secondaire est plus intense (Éthylène)

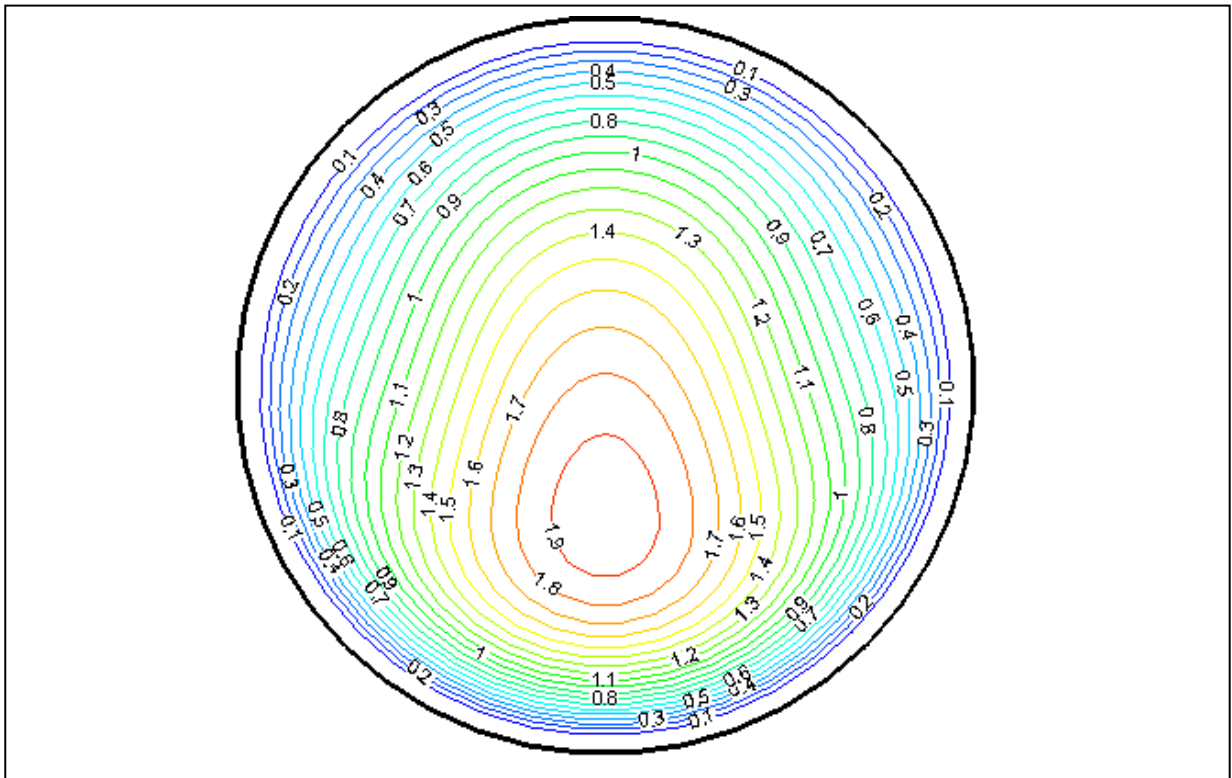


Figure 4.11.a : vitesses axiales à la sortie $z^* = 104.17$ (Eau)

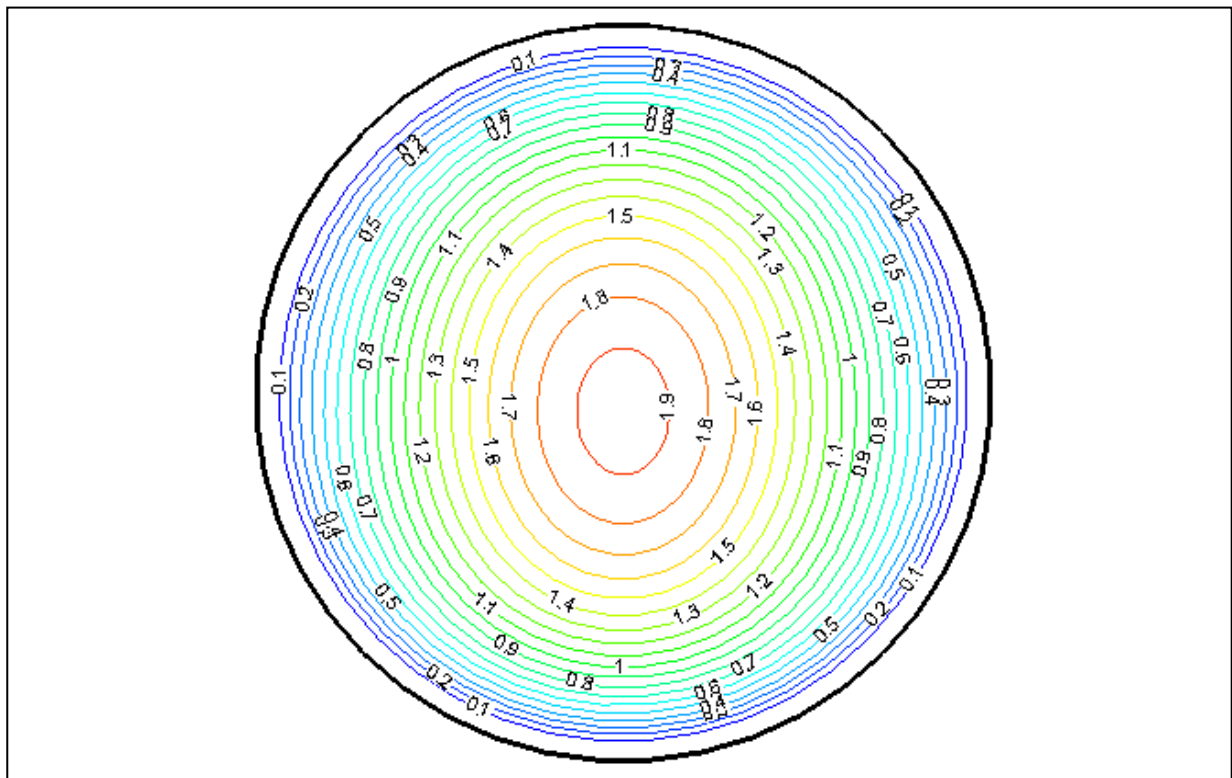


Figure 4.11.b : vitesses axiales à la sortie $z^* = 104.17$ (Butanol)

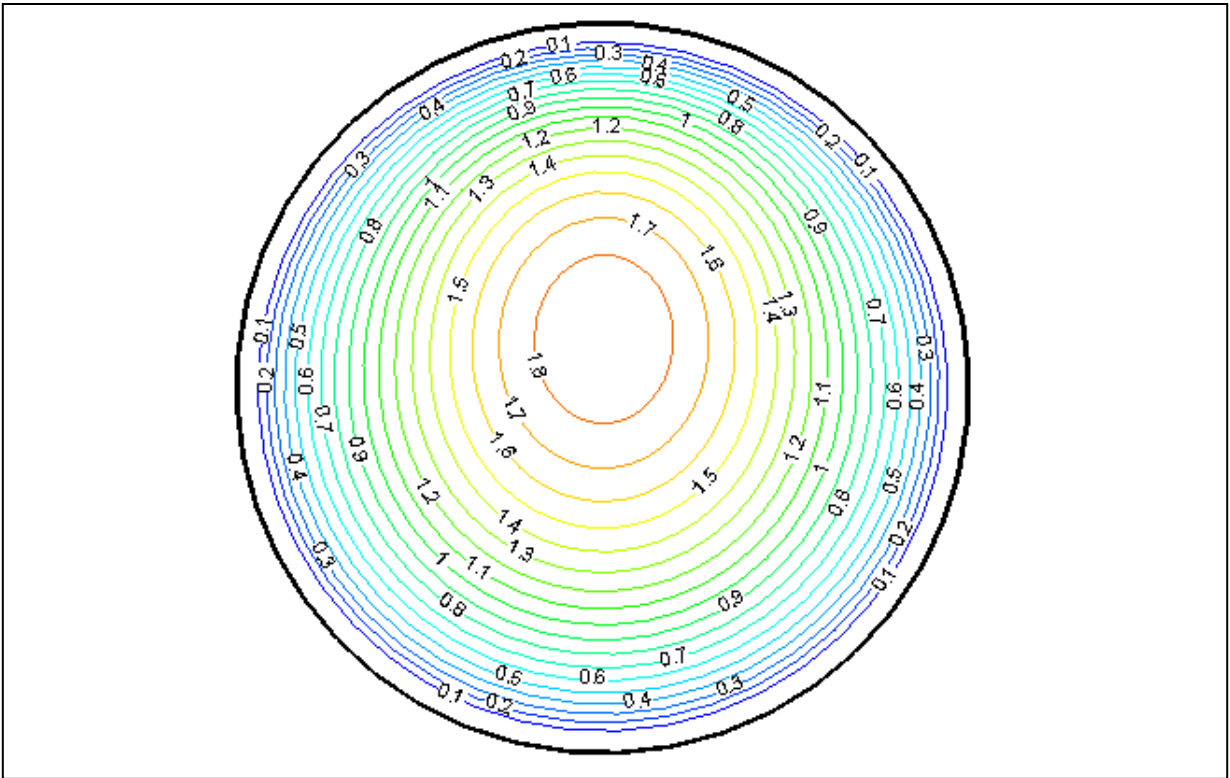


Figure 4.11.c : vitesses axiales à la sortie $z^* = 104.17$ (Syltherm800)

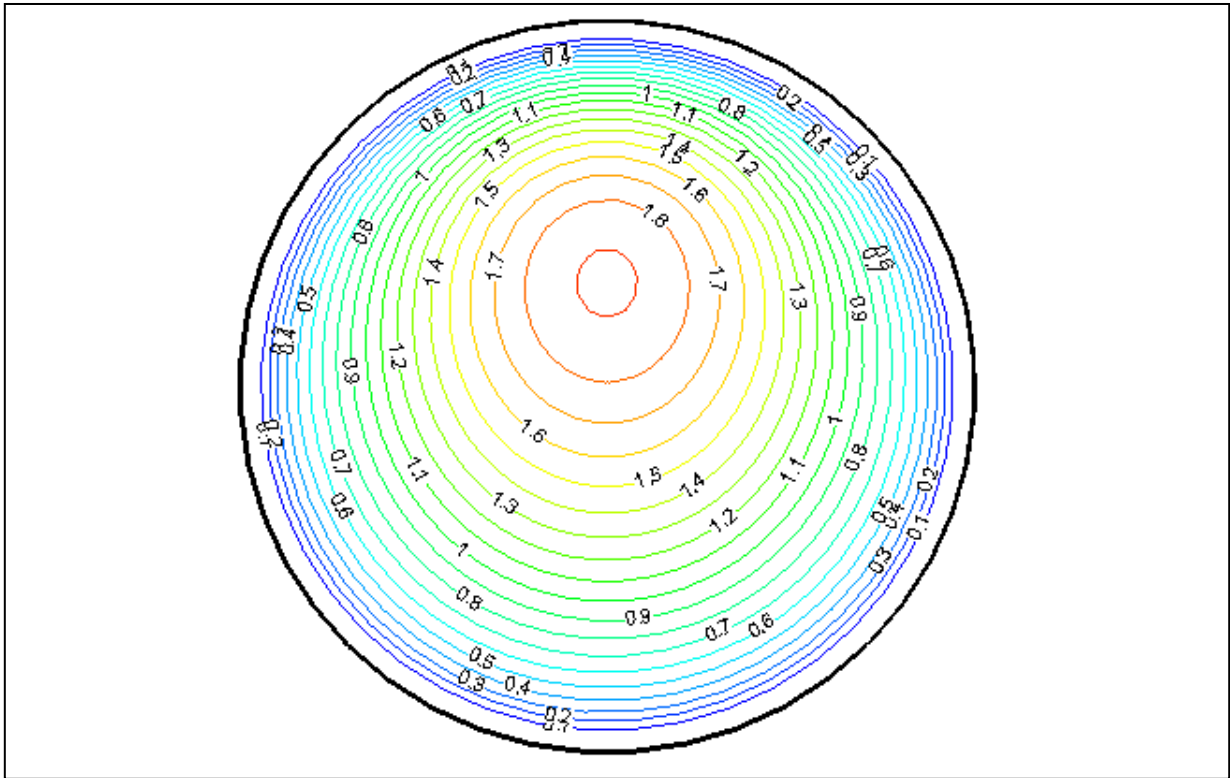


Figure 4.11.d : vitesses axiales à la sortie $z^* = 104.17$ (Ethylène)

IV.4.3 Champ thermique

Pour illustrer le champ thermique obtenu en mode de convection mixte, les figures (4.12.a,b,c,d), (4.13.a,b,c,d,) et (4.14.a,b,c,d,) montrent la distribution des isothermes dans des plans polaires en certaines positions choisies suivant la direction axiale z^* . Les profils circulaires occupant une section droite obtenus en convection forcée sont complètement déformés en convection mixte. L'axisymétrie est perdue comme le montre ces figures et la variation se fait dans les directions radiales et angulaires. La température augmente à une section du conduit fixe à (Z^*), mais le maximum des températures est toujours au sommet du conduit. On remarque que, pour la convection mixte la température diminue de la partie supérieure vers le centre du conduit et toujours le fluide froid occupe la zone centrale tandis que le fluide chaud occupe la zone au voisinage de la paroi à cause des effets de l'écoulement secondaire. Les températures élevées sont dans la partie supérieure du conduit tandis que les basses températures se situent dans le bas du conduit. On cite par exemple à $z^* = 40.5$, $\theta = 0$ la température maximale est $T^* = 0.2612$, $r^* = 0.4607$ pour le Butanol et $T^* = 0.172$, $r^* = 0.4607$ pour l'Eau et pour Syltherm800 $T^* = 0.2058$, $r^* = 0.4607$ tandis que pour Ethylène Glycol est $T^* = 0.1669$, $r^* = 0.4807$

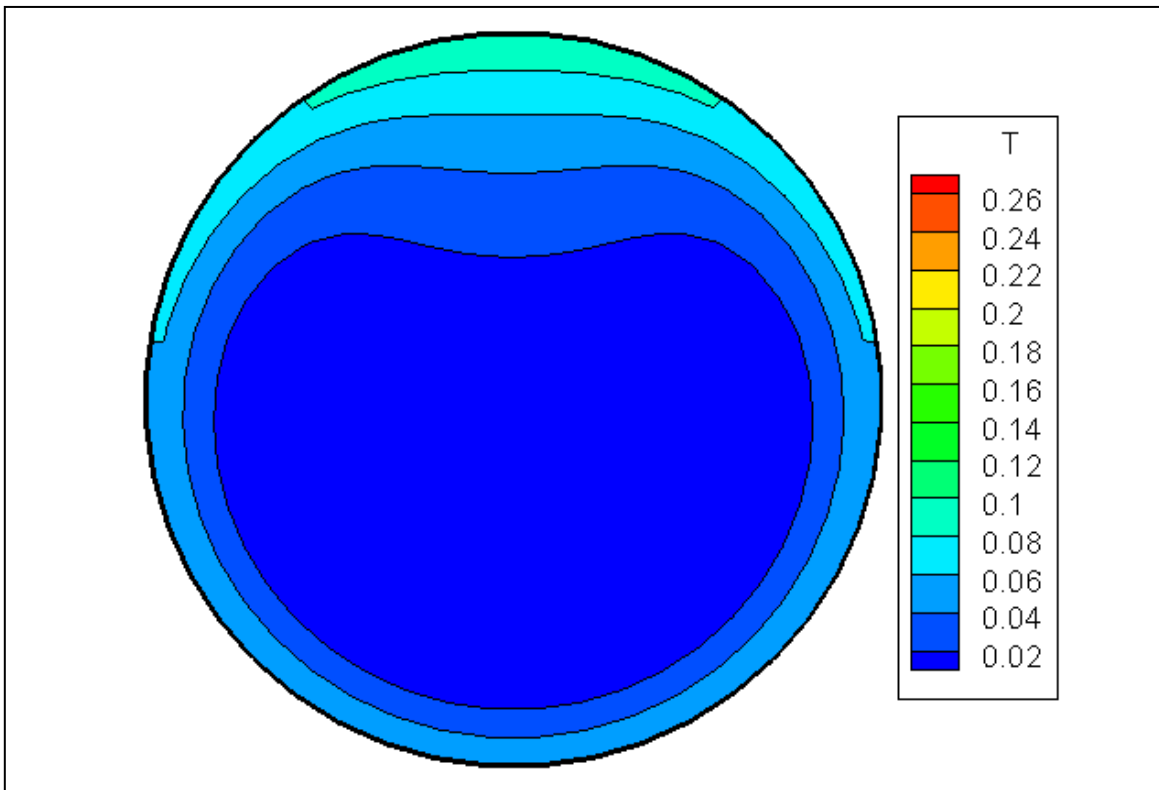


Figure 4.12.a: Comparaison des isothermes des sections droites à des positions axiales choisies lorsque l'écoulement secondaire est plus intense(Eau).

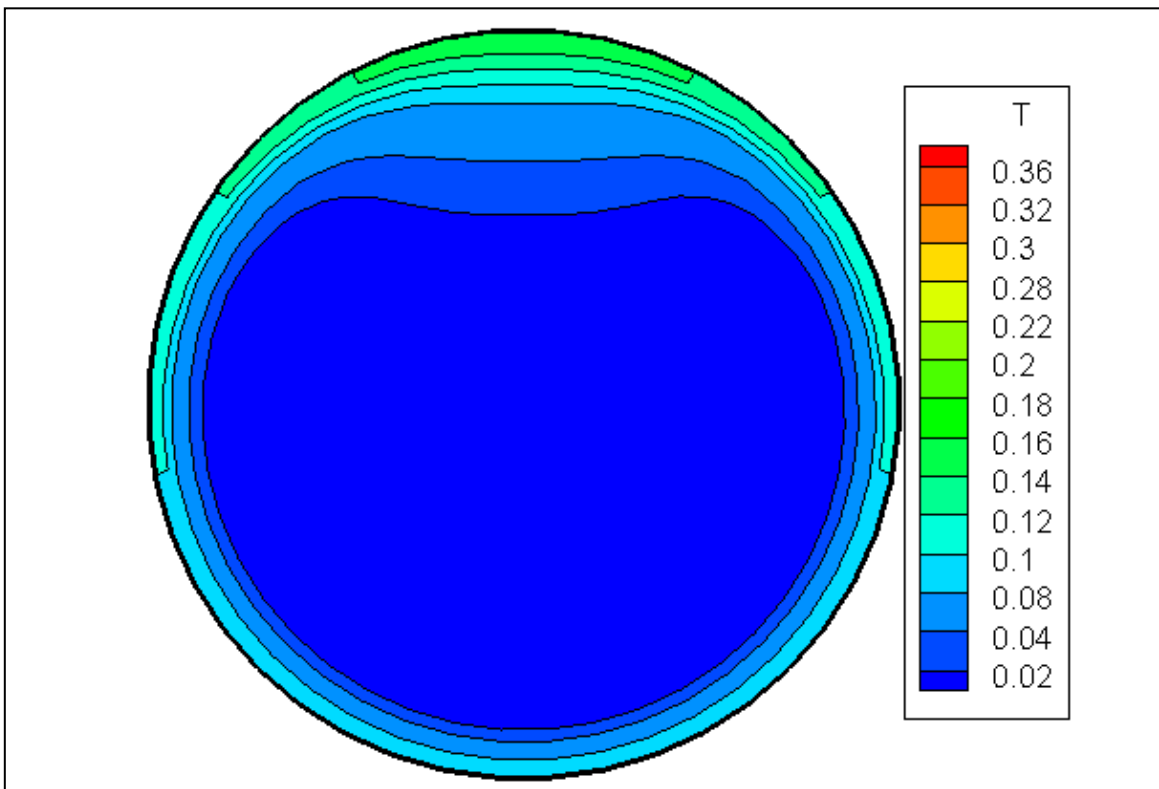


Figure 4.12.b: Comparaison des isothermes des sections droites à des positions axiales choisies lorsque l'écoulement secondaire est plus intense(Butanol).

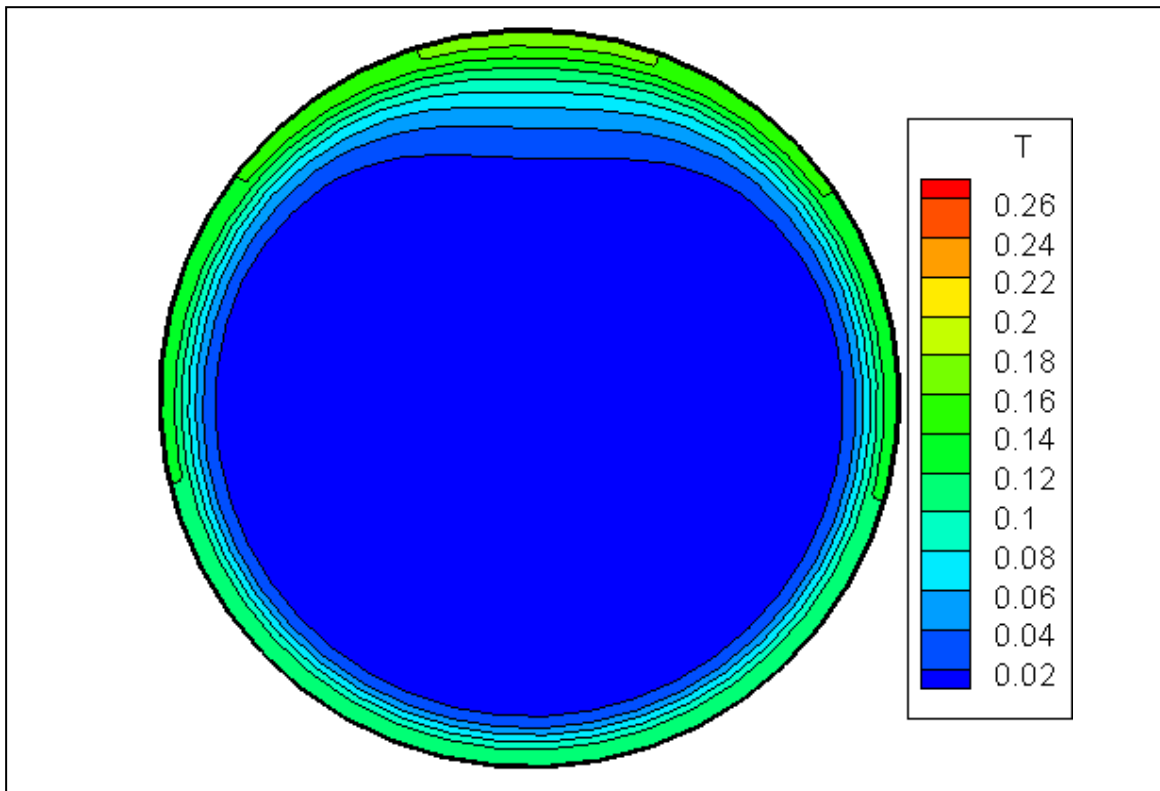


Figure 4.12.c: Comparaison des isothermes des sections droites à des positions axiales choisies lorsque l'écoulement secondaire est plus intense(Syltherm800).

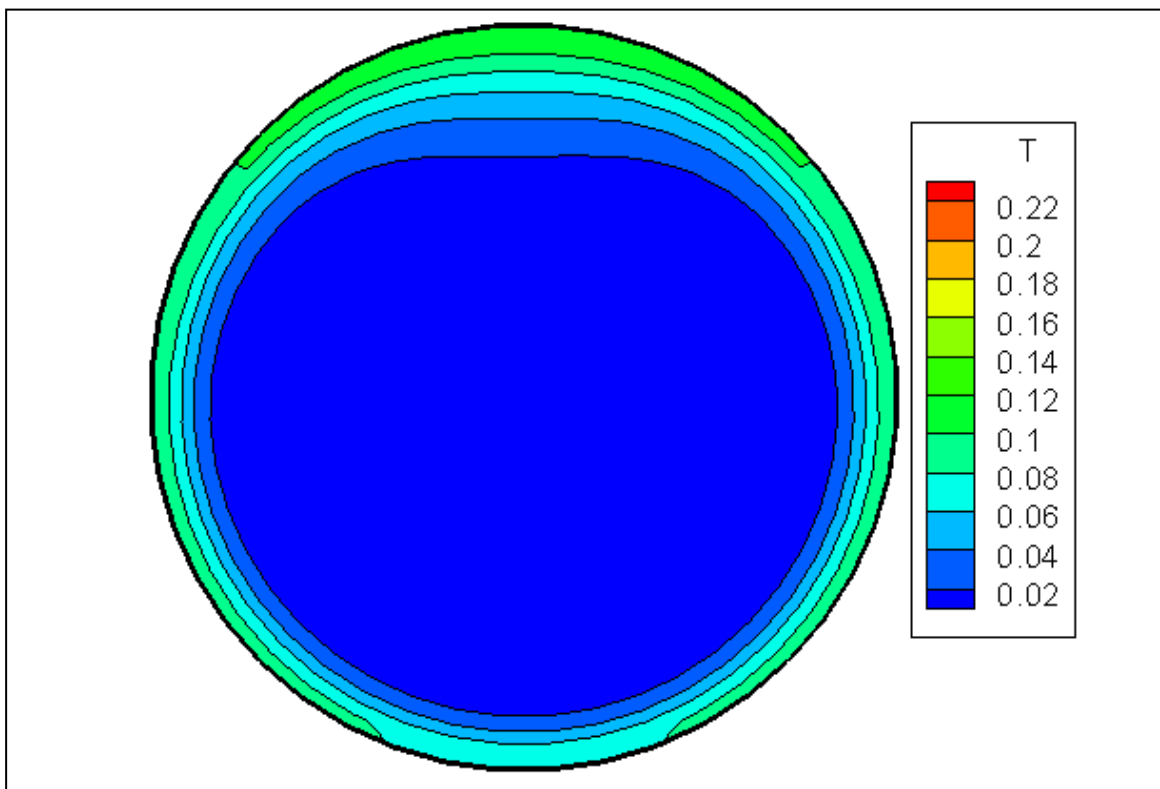


Figure 4.12.d: Comparaison des isothermes des sections droites à des positions axiales choisies lorsque l'écoulement secondaire est plus intense(Ethylene).

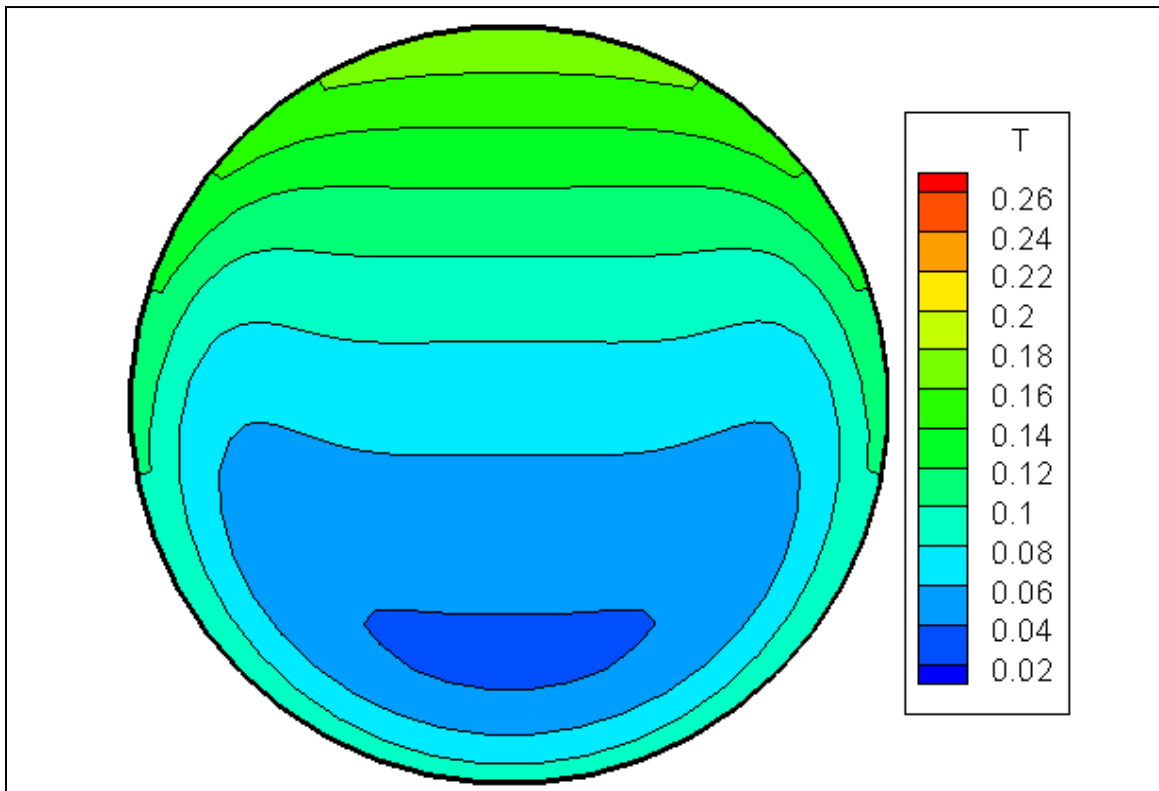


Figure 4.13.a Comparaison des isothermes des sections droites à la station axiale $z^* = 40.5$ (Eau).

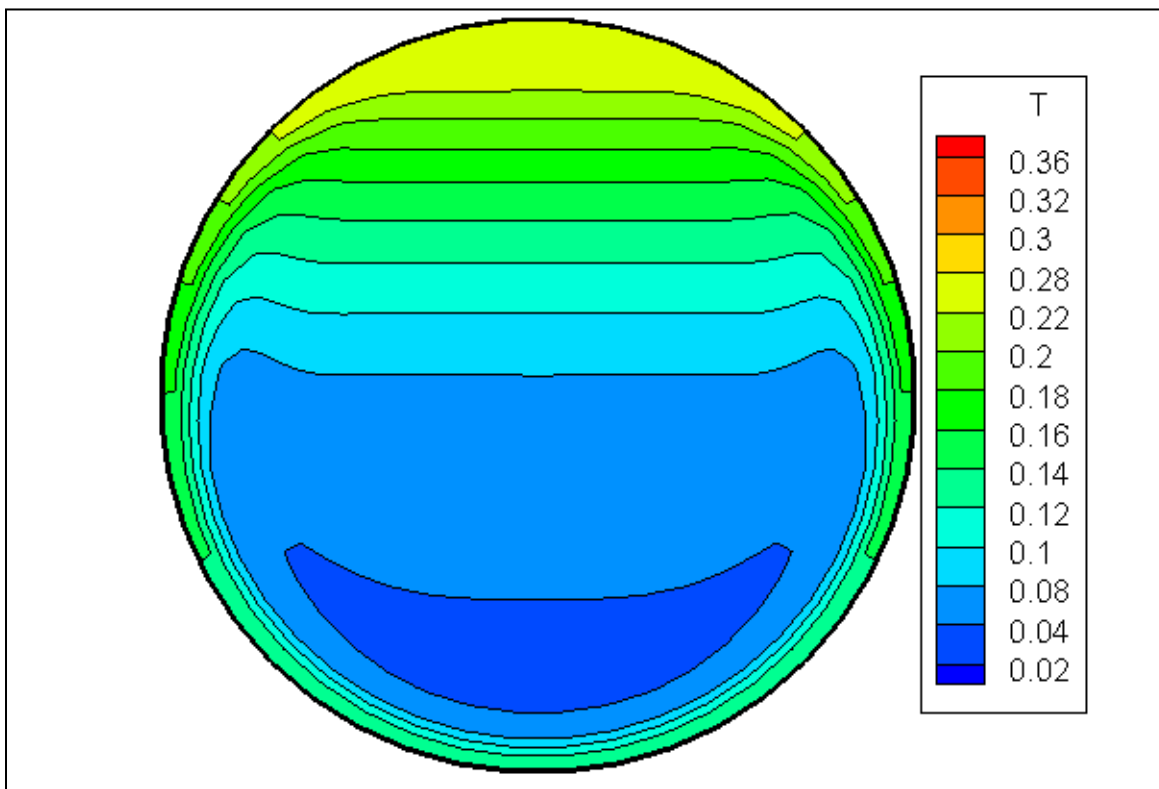


Figure 4.13.b: Comparaison des isothermes des sections droites à la station axiale $z^* = 40.5$ (Butanol).

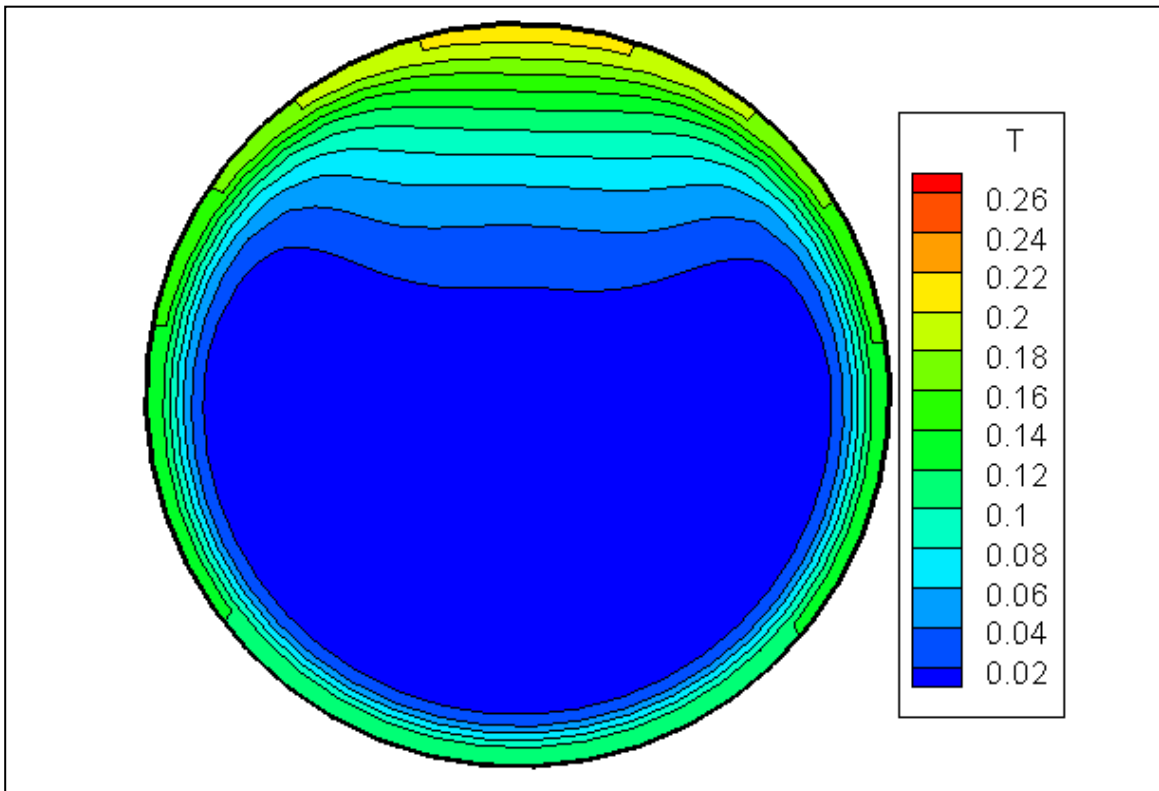


Figure 4.13.c: Comparaison des isothermes des sections droites à la station axiale $z^* = 40.5$ (Syltherm800).

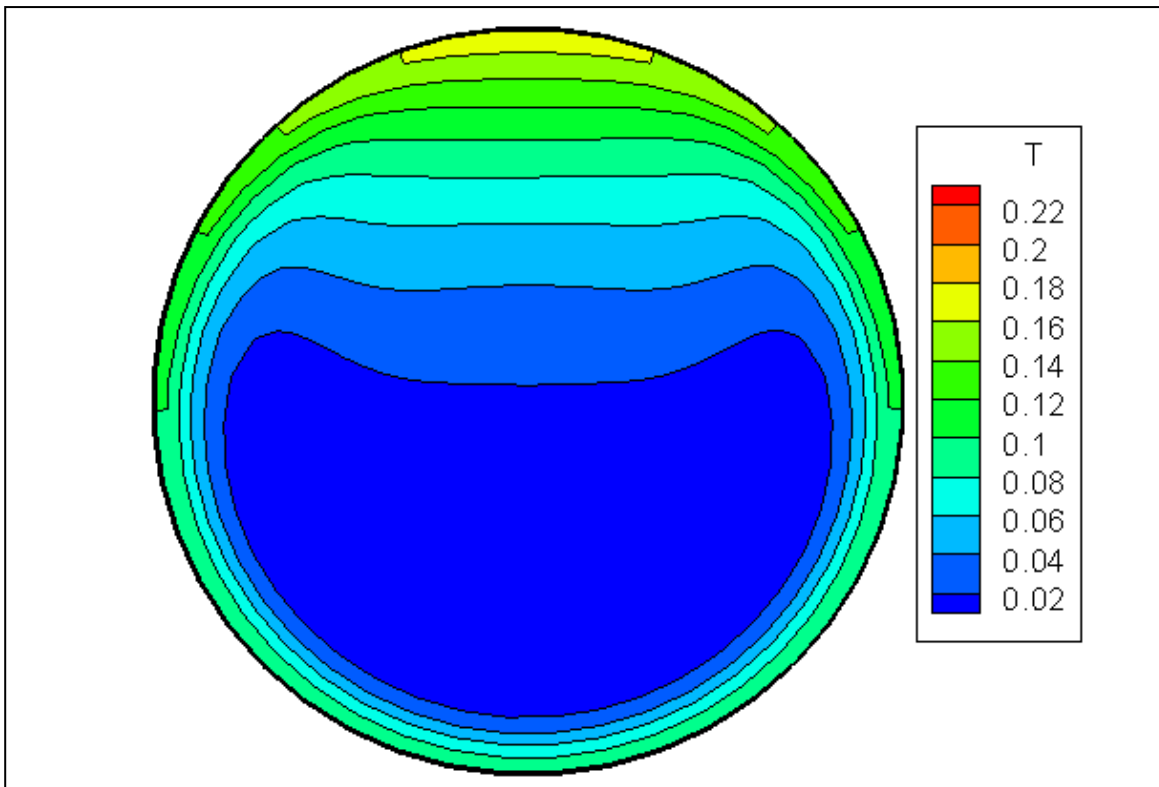


Figure 4.13.d: Comparaison des isothermes des sections droites à la station axiale $z^* = 40.5$ (Ethylène).

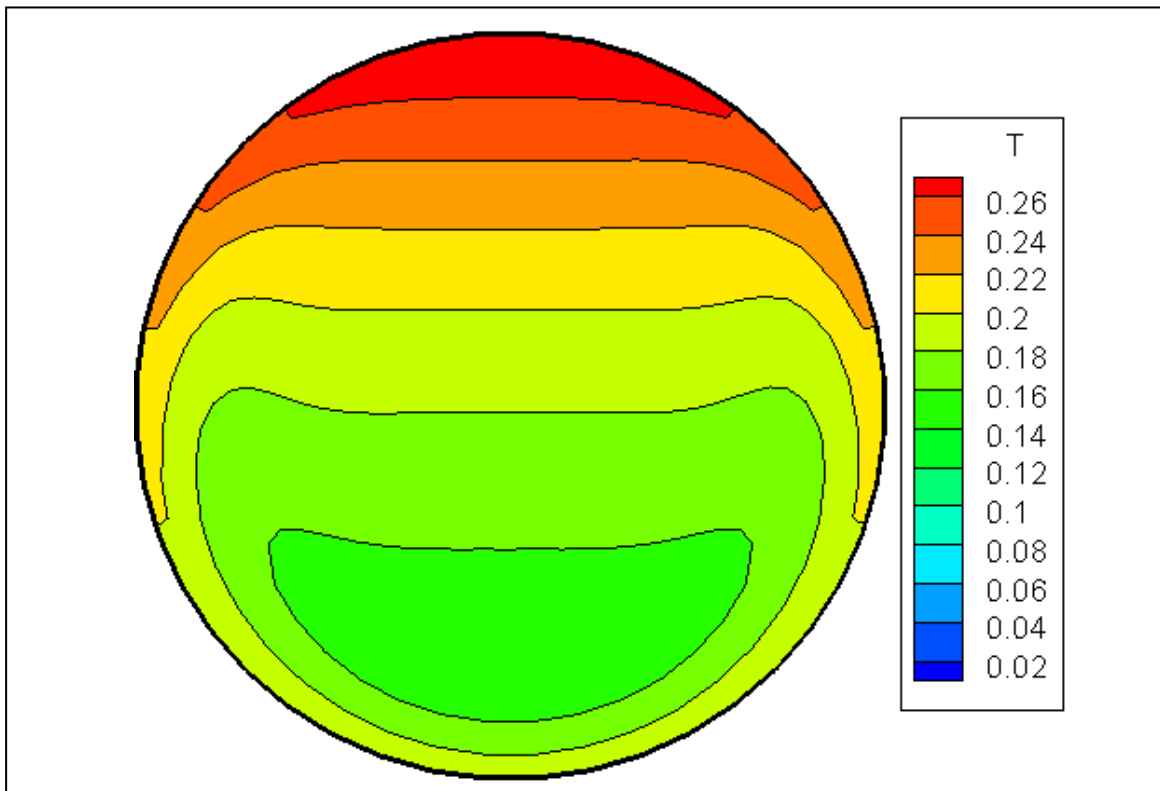


Figure 4.14.a: Comparaison des isothermes des sections droites à la sortie (Eau).

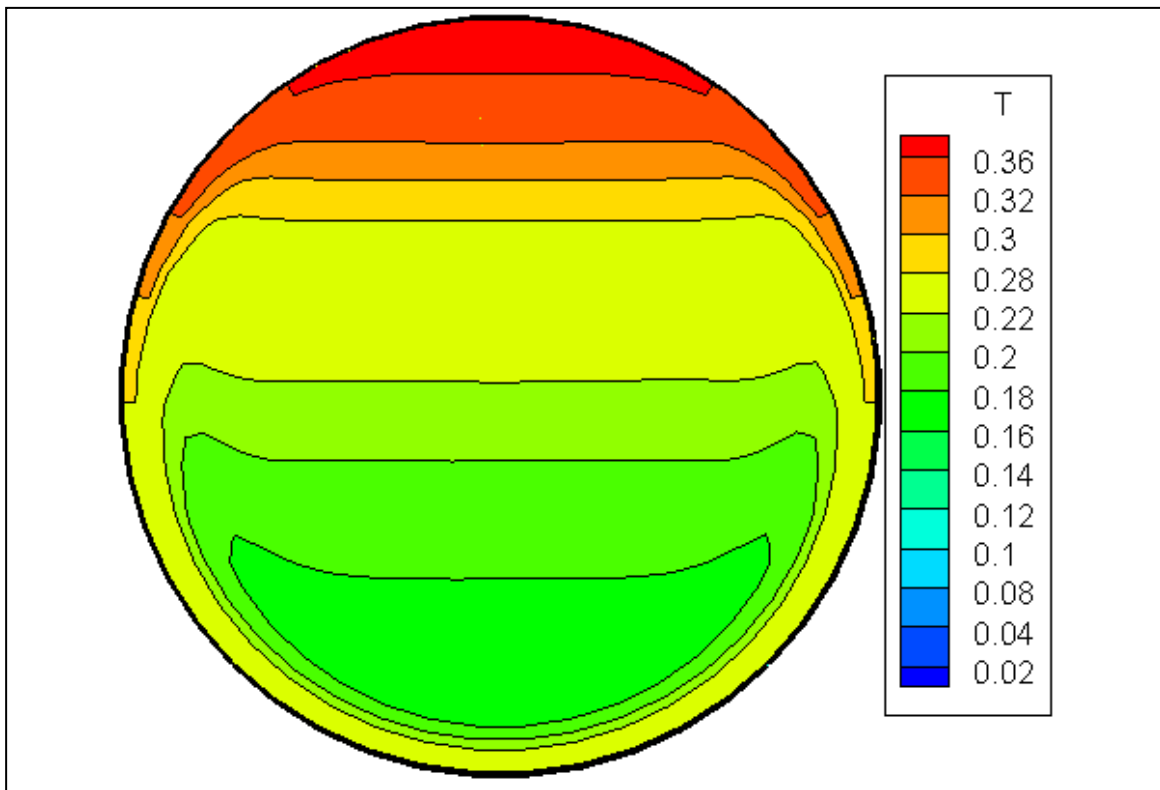


Figure 4.14.b: Comparaison des isothermes des sections droites à la sortie (Butanol).

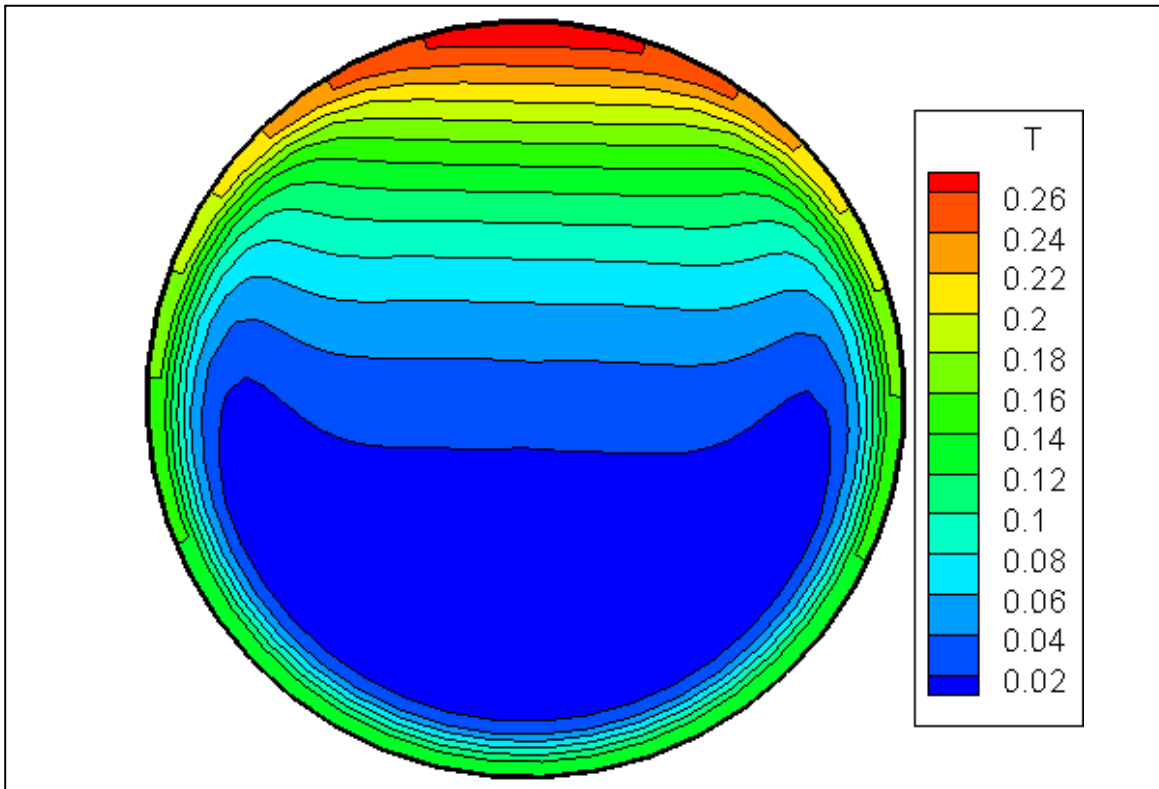


Figure 4.14.c: Comparaison des isothermes des sections droites à la sortie (Syltherm800).

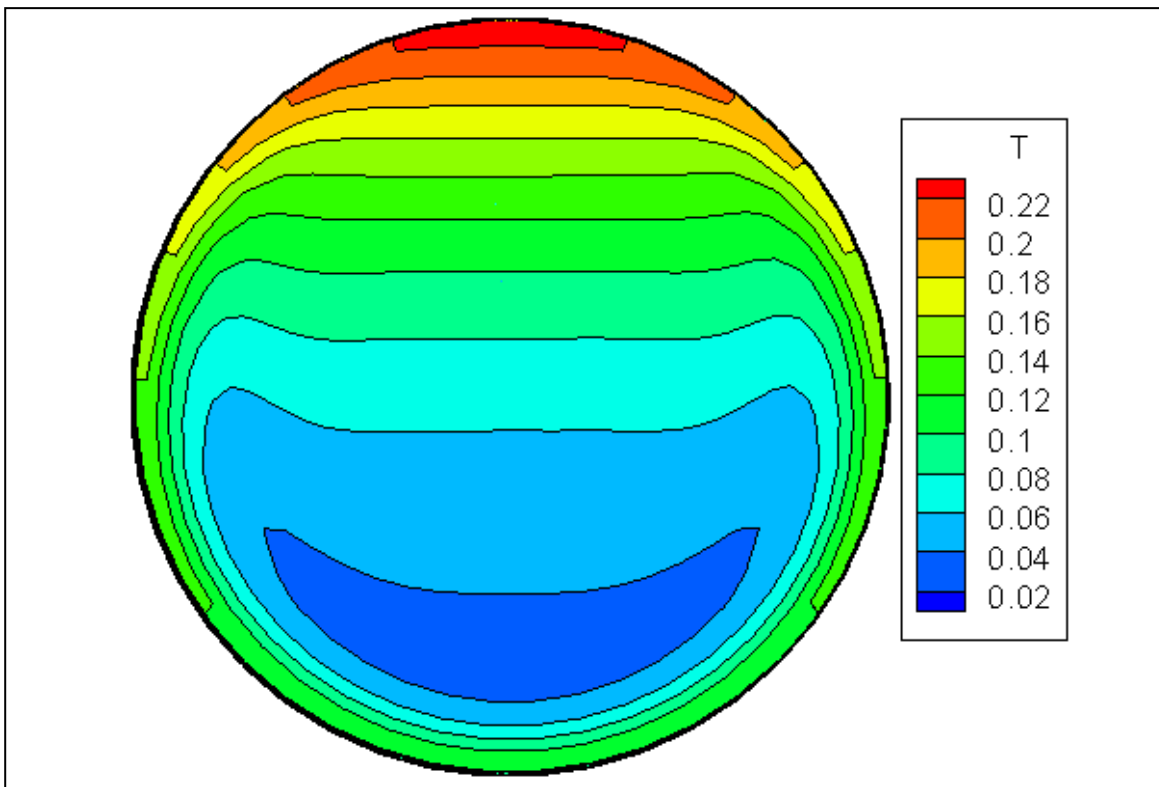


Figure 4.14.d: Comparaison des isothermes des sections droites à la sortie (Ethylene).

Dans la figure (4.15.a - 4.15.b - 4.15.c - 4.15.d), nous présentons les variations axiales de la température de la paroi, en haut et en bas du conduit à ($r^* = 0.5208$, $\theta = 0$) et ($r^* = 0.5208$, $\theta = \pi$) obtenues pour les fluides étudiés. La température et la position axiale sont présentées sous formes adimensionnelles. On note que les variations angulaires et axiales au voisinage de l'entrée des températures augmentent rapidement d'une manière identique permettant de dire dans cette très courte zone la convection est de type forcée. Mais cela ne dure presque pas du tout puisque juste après ces températures se séparent l'une de l'autre. À cette zone on note que la variation des températures à $\theta = 0$ pour les fluides Ethylène Glycol et Eau, est presque la même à la sortie du conduit mais pour le Butanol la température est plus élevée par comparaison avec les deux fluides : Ethylène Glycol et Eau. Aussi pour $\theta = \pi$ nous notons une même distribution de la température de la paroi pour $\theta = 0$ pour les quatre fluides.

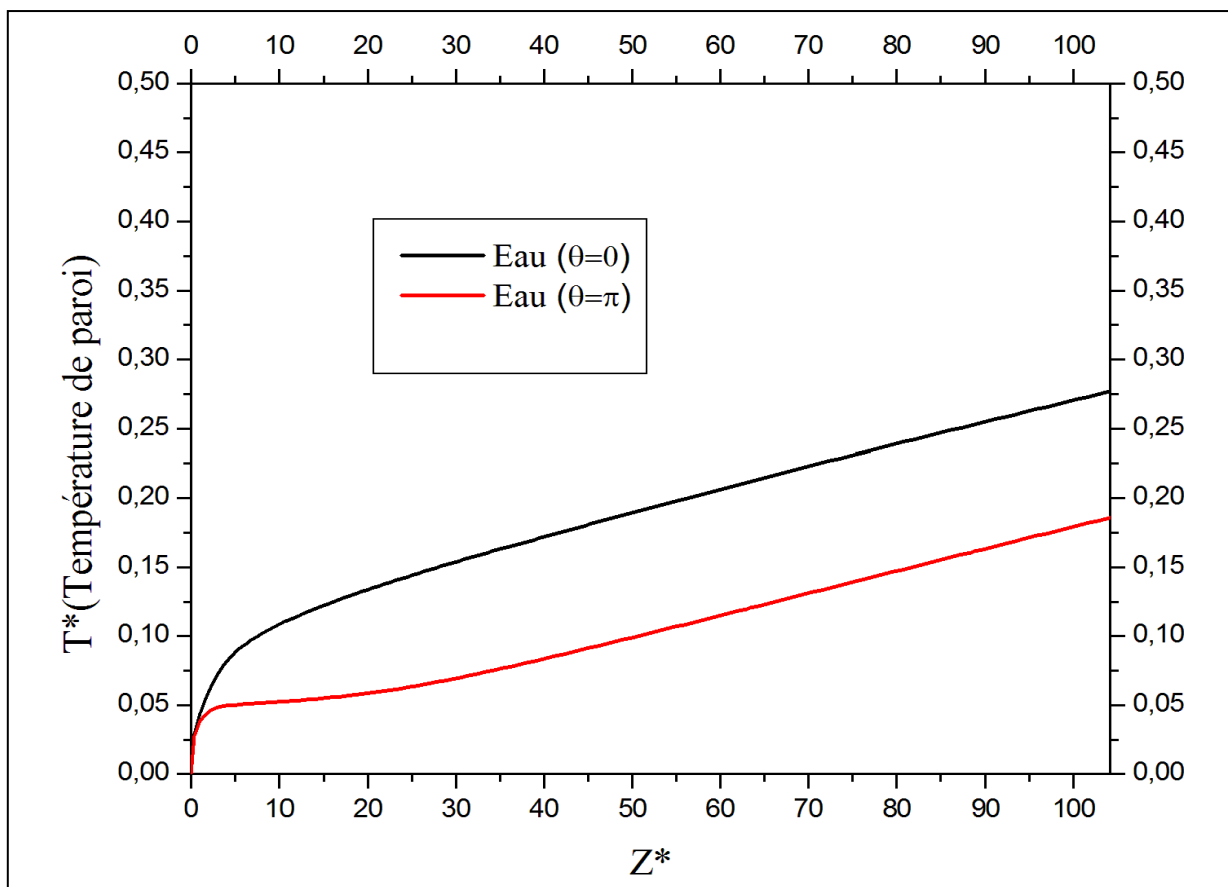


Figure 4.15.a : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit pour les différents fluides étudiés.

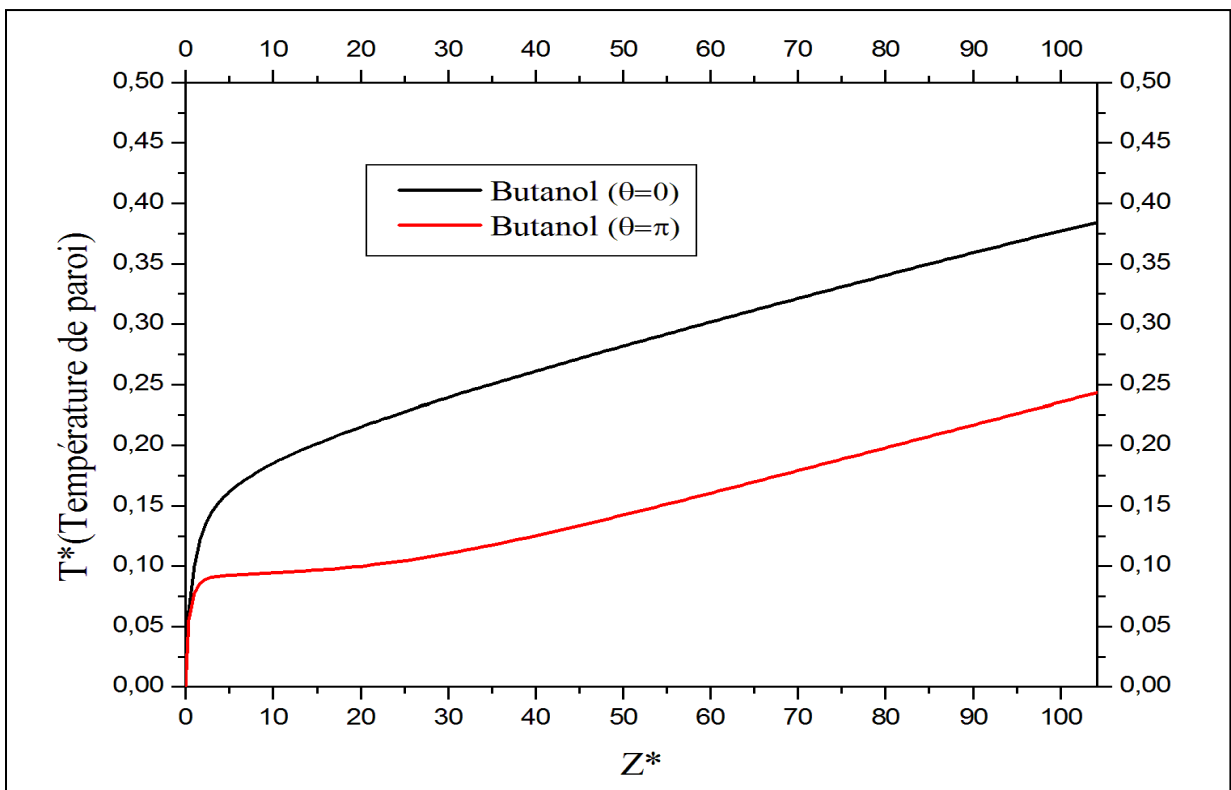


Figure 4.15.b : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit

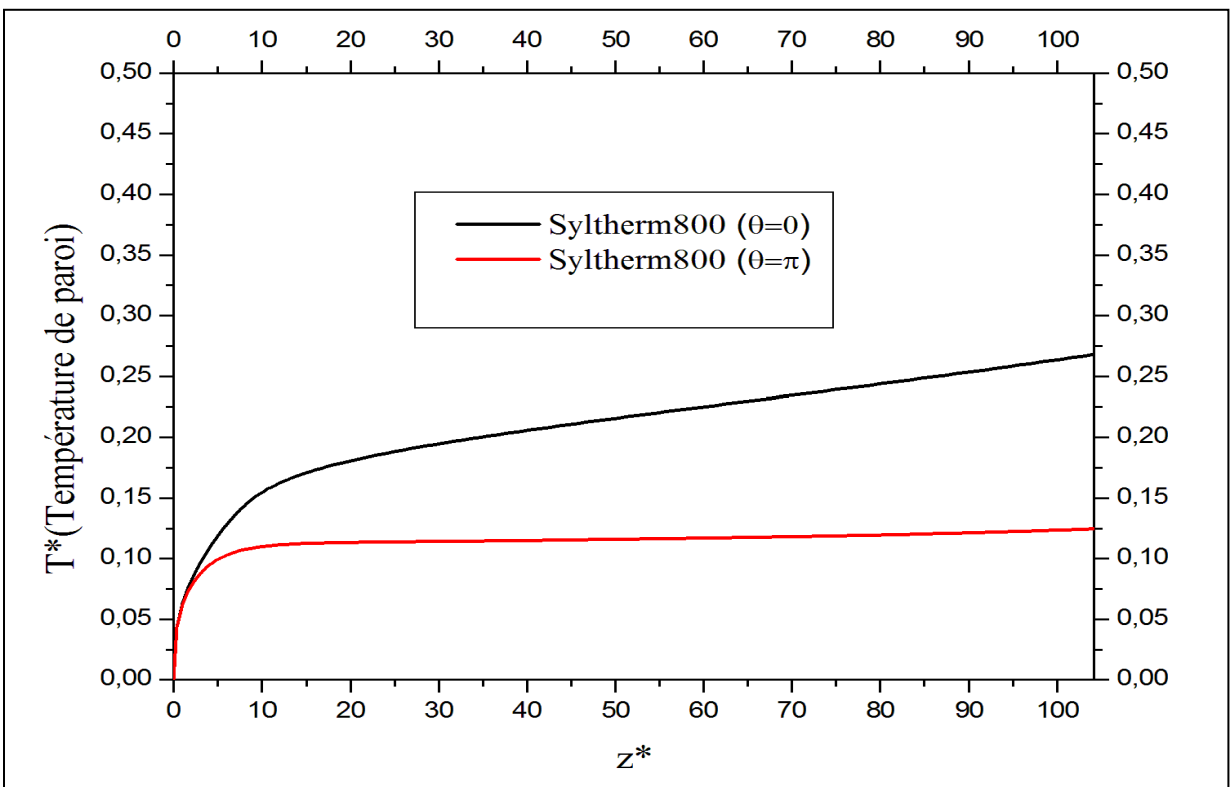


Figure 4.15.c : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit pour les différents fluides étudiés.

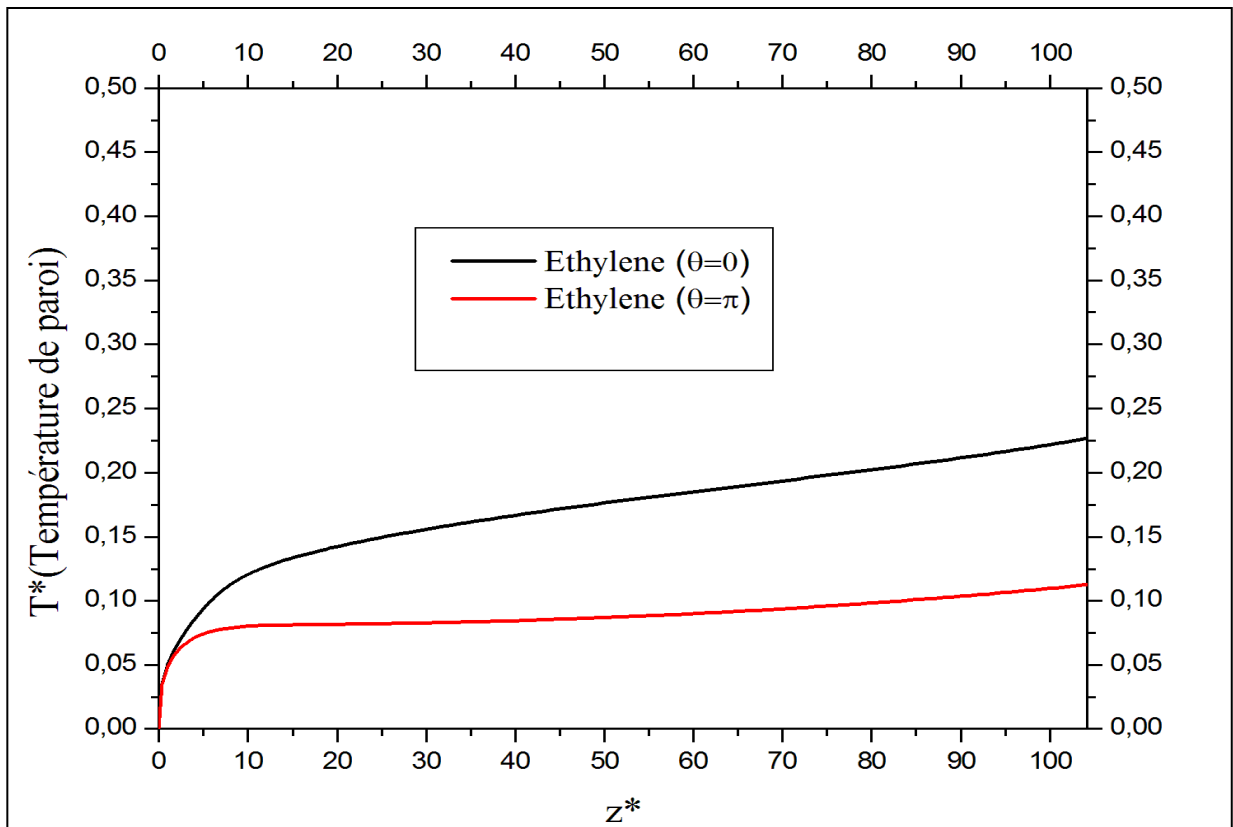


Figure 4.15.d : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit

Dans la figure 4.16, on compare les températures moyennes, des sections droites du conduit, obtenues avec les quatre fluides étudiée. On note que les résultats des deux discrétisations sont confondus. L'augmentation de la température axiale moyenne du fluide est toujours linéaire de puis l'entrée jusqu'à la sortie à cause du chauffage continu du fluide le long du conduit.

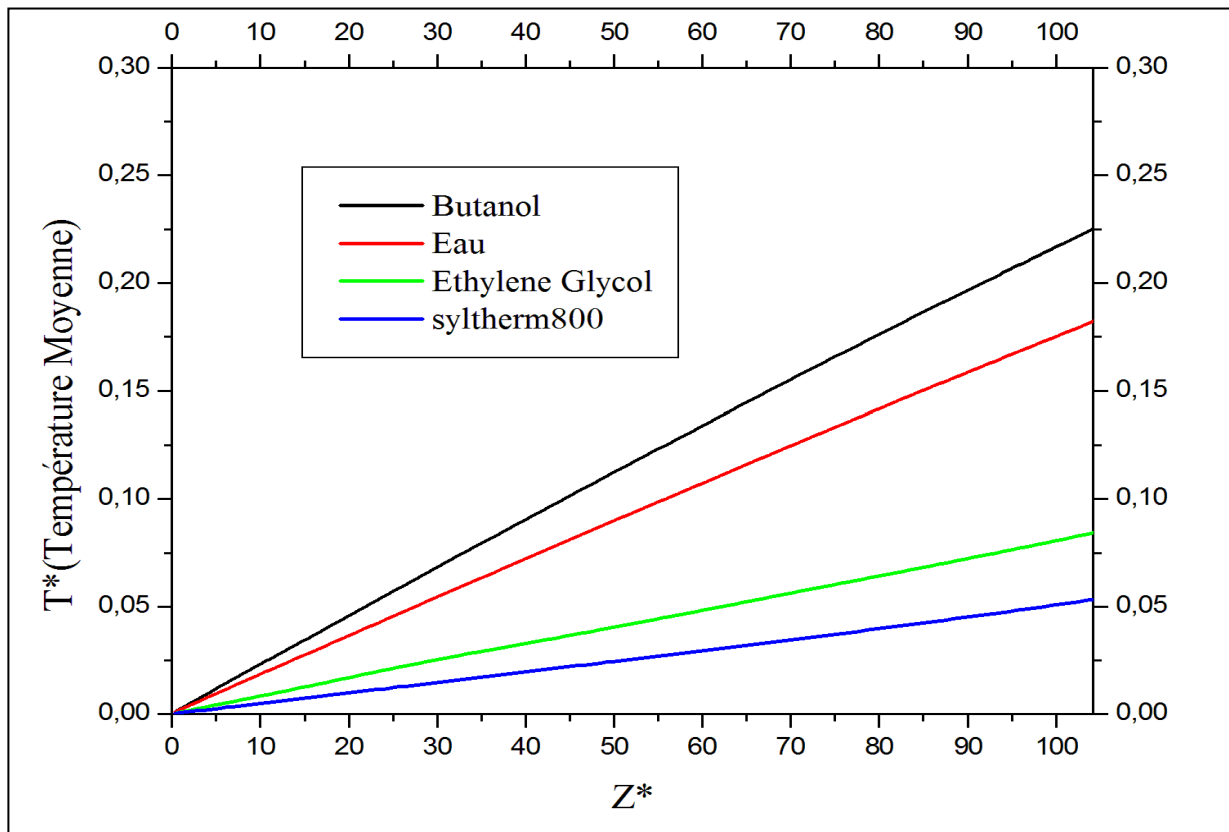


Figure 4.16 : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit pour les différents fluides étudiés.

IV.4.4 Nombre de Nusselt

L'évolution axiale du nombre de Nusselt moyen, donné par l'équation (2.23) dans le modèle mathématique, pour les différents fluides étudiés est illustrée dans la figure 4.17. A travers ces courbes, l'évolution d'un point de vue qualitatif est similaire pour les différents fluides étudiés c'est-à-dire que sur une zone proche de l'entrée du tube, il y a une brutale diminution caractéristique de la convection forcée. Mais, au-delà de cette zone repérée par un certain z^* , le Nu amorce une augmentation importante et continue jusqu'à la sortie. Dans cette zone le comportement des fluides est différent. Pour le Butanol et l'Eau le nombre de Nusselt augment d'une manière monotone jusqu'à la sortie tandis que pour le Syltherm800 et à un degré moindre l'éthylène le nombre de Nusselt présente un léger comportement asymptotique à la sortie du conduit. Le tableau 4.4, donne les différentes valeurs des nombres de Nusselt à l'entrée, à la sortie et les minimums atteints ainsi que les distances axiales correspondantes.

Butanol			
z^*	0.3255	3.5808	104.17
$Nu(z^*)$	25.5893	18.5427	43.6071
Nu_{moy}	32.6363		
Eau			
z^*	0.3255	4.8829	104.17
$Nu(z^*)$	17.6922	10.6188	39.6915
Nu_{moy}	24.8087		
Syltherm800			
z^*	0.3255	17.2531	104.17
$Nu(z^*)$	45.1070	18.1957	22.6245
Nu_{moy}	20.4195		
Ethylène Glycol			
z^*	0.3255	10.0914	104.17
$Nu(z^*)$	32.2321	15.1494	26.6190
Nu_{moy}	20.3748		

Tableau 4.4: Profils axiaux du nombre de Nusselt pour les quatre fluides

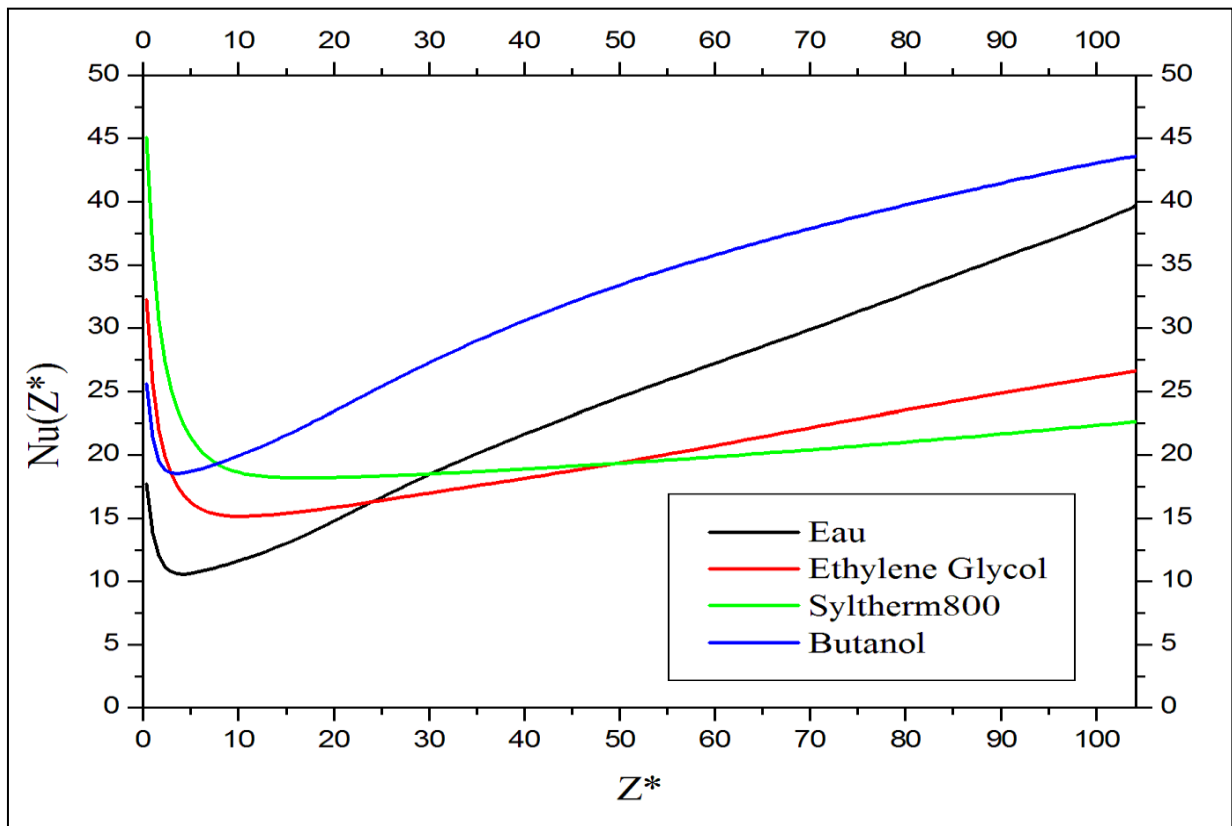


Figure 4.17 : Evolution axiale de la température de paroi en haut et en bas du conduit pour les différents fluides étudiés.

IV.4.5 La corrélation empirique $Nu_{moy}(Pr, Ri)$

Afin de mieux représenter tous les résultats qui ont été obtenu précédemment et quantifier le transfert de chaleur par rapport aux groupes adimensionnels qui contrôlent ce problème, nous avons établi des corrélations qui regroupent ces résultats en donnant le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Prandtl et du nombre de Richardson (Reynolds et Grashof), comme l'ont fait, certains chercheurs **Hussein et Yassin[28]** et **Hussein[29]**. Ces corrélations ont été établies dans les gammes de variation du nombre de Prandtl $305 \leq Pr \leq 8.08$ et celle du nombre de Richardson soit $67.2 \leq Ri \leq 2.8$, comme le montre tableau 4.5

Tableau4.5 Valeurs des nombres adimensionnels Pr, Gr, Re, Ri et Nu_{moy} pour les fluides de travail utilisés.

	Eau	Butanol	Syltherm800	Ethylène
Pr	8.082	80.5	140	305
Re	143.28	39	128.6	20
Gr	257534	102336	47802	9300
Ri	12.545	67.282	2.890	23.25
Nu_{moy}	24.8087	32.6363	20.4195	20.3748

Pour utiliser tout ces paramètres de contrôle qui interviennent dans ce problème et qui permettent le calcul du nombre de Nusselt moyen, la forme de la corrélation doit être une fonctionnelle $Nu_{moy} = f(Pr, Gr, Re)$, ou $Nu_{moy} = f(Pr, Ri)$ où $Ri = Gr/Re^2$ de la forme : $Nu_{moy} = a \cdot Ri^b \cdot Pr^c$

En introduisant les résultats de nos calculs, les nombres a, b, c sont :

$$a = 19.543, \quad b = 0.1598, \quad c = -0.053$$

et la corrélation devient :

$$Nu_{moy} = 19.543 * Ri^{0.1598} * Pr^{-0.0539} \quad (4.1)$$

avec une erreur relative qui varie entre 5.55% et 16.85%.

Dans La figure 4.18 nous représentons la variation de la corrélation (4.1) avec des nombres de Prandtl constant.

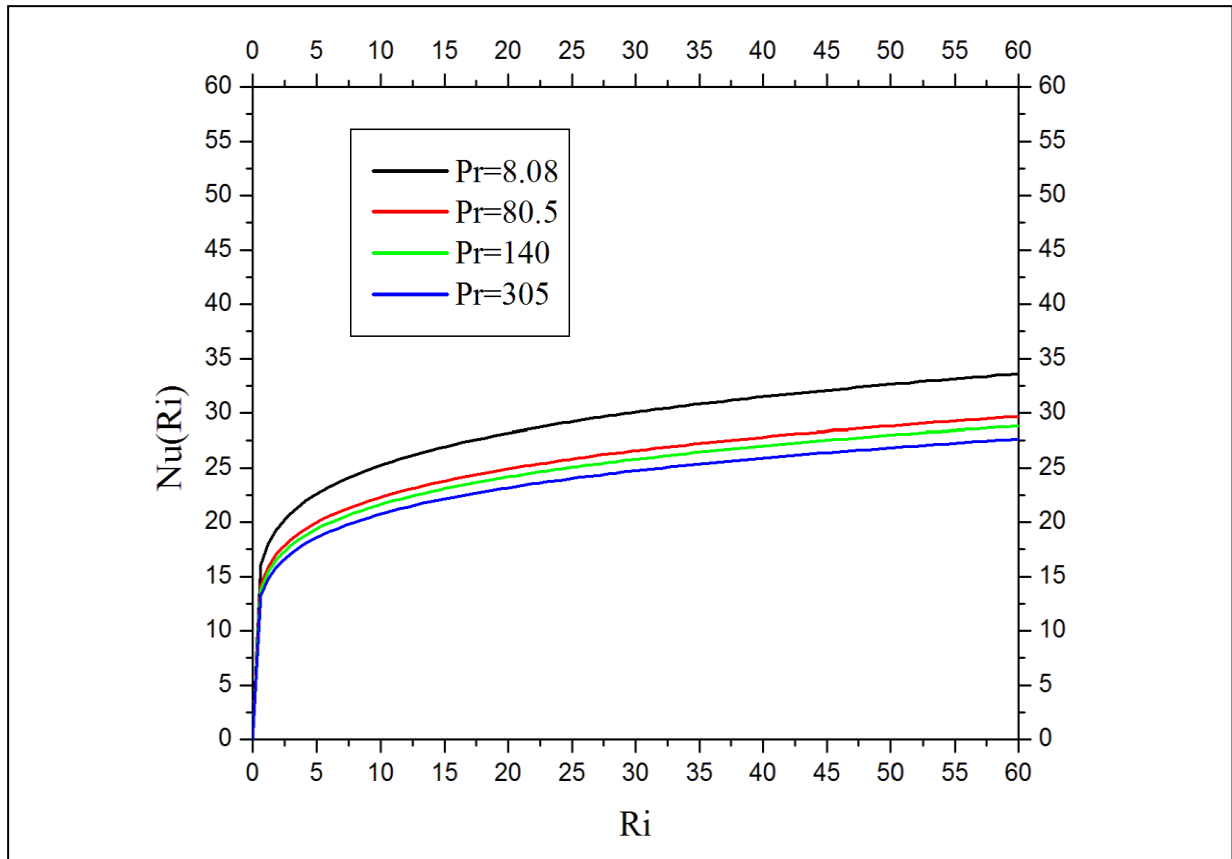


Figure 4.18 : Corrélation du nombre de Nusselt en fonction des nombres de Richardson pour une convection mixte à propriétés variables dans un conduit soumis à un chauffage volumique.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à étudier numériquement un écoulement laminaire d'un fluide incompressible et Newtonien (Eau, Butanol, Sytherm800, Ethylène Glycol), tridimensionnel dans un conduit cylindrique horizontal, soumis à un chauffage uniforme par effet Joule dans toute l'épaisseur de sa la paroi. Les propriétés thermo physiques du fluide sont thermo dépendantes et les pertes thermiques radiatives et convectives avec le milieu ambiant sont prises en compte. Ce problème physique est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse, des quantités de mouvement radial, angulaire et axial, et de l'équation de conservation de l'énergie. Ils sont accompagnés de leurs conditions aux limites spatiotemporelles. La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations de Navier-stokes et de l'énergie dans un maillage uniforme de $(26 \times 44 \times 162)$ nœuds dans les directions radiale, azimutale et axiale, respectivement. La solution de ce système d'équation de discrétisation suit l'algorithme SIMPLER et fait appel aux algorithmes de Thomas TDMA et l'algorithme de Thomas cyclique.

Dans ce problème le seul paramètre de contrôle fixé est le rapport d'aspect géométrique du conduit qui égal à $L^* = 104.17$. Tandis que les paramètres de contrôle variables, qui sont calculés à la température d'entrée du fluide égale à 15°C et une vitesse moyenne égale à $1.7 \cdot 10^{-2}$ m/s, sont les nombres de Prandtl, de Reynolds, et le nombre de Grashof : $Pr = 8.082$ $Re = 143.2836$ et $Gr = 2.57534 \cdot 10^5$ pour l'Eau, $Pr = 80.5$, $Re = 39$, $Gr = 10.2336 \cdot 10^4$ pour le Butanol, pour le Syltherm800 $Pr = 140$, $Re = 128.6$, $Gr = 4.7802 \cdot 10^4$ et pour Ethylène Glycol les valeurs de ces nombres sont $Pr = 305$, $Re = 20$, $Gr = 9.3 \cdot 10^3$, alors que le nombre de Grashof $Gr = 0$ correspond à un cas de convection forcée qui sera un cas de référence.

➤ En convection mixte, la convection naturelle générée par les différences de densité se manifeste par la création d'un écoulement secondaire qui se développe verticalement dans les sections droites tout au long du conduit. Il apparaît clairement en chaque section deux cellules contrarotatives symétriques par rapport au diamètre vertical. Ces vortex ont des centres qui ont tendance à se déplacer vers le bas le long de la direction axiale. L'effet

de cet écoulement secondaire se manifeste sur la température avec un maximum toujours en haut du conduit et un minimum en bas du conduit.

- Le déplacement de maximum de la vitesse axiale de bas vers le haut de conduit avec l'augmentation de nombre de Prandtl
- L'écoulement fluide a besoin d'une certaine distance axiale pour devenir pleinement développé.
- Le profil de température moyenne du fluide et de la température de paroi ne sont pas parallèles surtout dans la zone d'entrée et se rapproche un peu l'un de l'autre même en zone de l'écoulement pleinement développé, ce la est dû à un chauffage constant depuis l'entrée jusqu'à la sortie.
- La température locale de chaque section transversale de fluide augmenté avec la diminution du nombre de Prandtl.
- On peut conclure aussi que parmi les fluides étudiés, le Butanol est le fluide qui a pris la plus grande quantité de chaleur le long du tube, puis l'eau et puis Ethylène Glycol et Syltherm800.
- Les résultats ont été corrélés par l'équation $Nu_{moy} = 19.543 * Ri^{0.1598} * Pr^{-0.0539}$ qui reproduit ces derniers avec une erreur relative qui varie entre 5.55% et 16.85%.

REFERENCES

- [1]- T. Boufendi, Contribution à l'étude théorique du transfert de chaleur dans les conduits cylindriques horizontaux soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat en Physique Energétique, Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri Constantine, Septembre (2005).
- [2]- T. Boufendi, M. Afrid, Three-dimensional Conjugate Conduction-Mixed Convection With Variable Fluid Properties in a Heated Horizontal Pipe, *Revue Energies Renouvelables*, Vol. 8, pp. 1-18, (2005).
- [3]- L. Redjem-Saad, M. Ould-Rouiss, G. Lauriat, Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows, effect of Prandtl number, *Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 847–861, (2007).
- [4]- G. Amberg, C. Winkler, Instabilities of thermocapillary convection in a half-zone at intermediate Prandtl numbers, *Journal of Physics of Fluids* Vol. 13, pp. 807- 816, (2001).
- [5]- A. Abbassi, N. Kechiche, H. Ben Aissia, Prandtl-number effects on vertical buoyant jets in forced and mixed convection regimes, *Journal of Energy Conversion and Management*, Vol. 48, pp. 1435-1449, (2007).
- [6]- P. Bera, A. Khalili, Influence of Prandtl number on stability of mixed convective flow in a vertical channel filled with a porous medium, *Journal of American Institute of Physics*, Vol. 18, pp. 103-124, (2006).
- [7]- L. Wang, X. Lu, Large eddy simulation of stably stratified turbulent open channel flows with low- to high-Prandtl number, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 1883–1897, (2005).
- [8]- S. Xin, P. Le Quéré, O. Daube, Natural convection in a differentially heated horizontal cylinder: Effects of Prandtl number on flow structure and instability, *Journal of American Institute of Physics*, Vol 09, pp. 1014–1033, (1997).
- [9]- S. Schneider, J. Straub, Laminar natural convection in cylindrical enclosure with different end temperatures, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 545-557, (1992).
- [10]- Z. Zeng, H. Mizuseki, K. Shimamura, T. Fukuda, Y. Kawazoe, K. Higashino, Usefulness of experiments with model fluid for thermocapillary convection - effect of Prandtl number on two-dimensional thermocapillary convection, *Journal of Crystal Growth*, Vol. 234, pp. 272-278, (2002).

REFERENCES

- [11]- D. V. Papavassiliou, Scalar dispersion from an instantaneous line source at the wall of a turbulent channel for medium and high Prandtl number fluids, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 161–172, (2002).
- [12]- Y. Shi , M. B. Ray, A. S. Mujumdar, Effect of Prandtl number on impinging jet heat transfer under a semi-confined turbulent slot jet, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 929-938, (2002).
- [13]- U. Gross, Ch. Philipp, Conjugated shear stress and Prandtl number effects on reflux condensation heat transfer inside a vertical tube, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 49, pp. 144-153, (2006).
- [14]- S. Schneider, J. Straub, Influence of the prandtl number on laminar natural convection in a cylinder caused by g-jitter, *Journal of Crystal Growth*, Vol. 97, pp. 235-242, (1989).
- [15]- H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects, *Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 196-207, (1999).
- [16]- A. Garcia, P. G. Vicente, A. Viedma, Experimental study of heat transfer enhancement with wire coil inserts in laminar-transition-turbulent regimes at different Prandtl numbers, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 4640–4651, (2005).
- [17]- P. G. Vicente, A. Garcia , A. Viedma, Experimental investigation on heat transfer and frictional characteristics of spirally corrugated tubes in turbulent flow at different Prandtl numbers, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 671–681, (2004).
- [18]- j. s. yoo, Prandtl number effect on transition of free-convective flows in a wide-gap horizontal annulus, *Journals Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, 811-817, (1992).
- [19]- J. S. Yoo, Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3279 – 3290, (1999).
- [20]- S. M. El-Sherbiny, A. R. Moussa, Effects of Prandtl number on natural convection in horizontal annular cavities, *Journal of Alexandria Engineering*, Vol. 43, pp. 561-576, (2004).
- [21]- I. Nazrul, U. K. Gaitonte, G. K. Sharma, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 2107 – 2120, (2001).

REFERENCES

- [22]- Z. T. Yu, L. W. Fan, Y. C. Hu, K. F. Cen, Prandtl number dependence of laminar natural convection heat transfer in a horizontal cylindrical enclosure with an inner coaxial triangular cylinder, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, pp. 1333–1340, (2010).
- [23]- T. Pessa, S. Piva, Laminar natural convection in a square cavity: Low Prandtl number and large density differences, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 1036–1043, (2009).
- [24]- A. Koca, H. F. Oztop, Y. Varol, The effects of Prandtl number on natural convection in triangular enclosures with localized heating from below, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 511–519, (2007).
- [25]- A. Barletta, E. Magyari, B. Keller, Dual mixed convection flows in a vertical channel, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 4835–4845, (2005).
- [26]- T. S. Chang, Y. H. Shiau, Flow pulsation and baffle's effects on the opposing mixed convection in a vertical channel, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 4190 – 4204, (2005).
- [27]- M. M. Rahman, M. A. Alim, M. A. H. Mamun, M. K. Chowdhury, A. K. M. S. Islam, Numerical study of opposing mixed convection in vented enclosure, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 2, pp. 25-36, (2007).
- [28]- Hussein. A. M et Salman. Y. K, The effects of different entrance sections lengths and heating on free and forced convective heat transfer inside a horizontal circular , *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 769–784,(2007).
- [29]- Hussein. A. M, The effect of different inlet geometries on laminar flow combined convection heat transfer inside a horizontal circular pipe, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 29, pp. 581–590, (2009).
- [30]- S. D. Churchill, H. S. Chu, Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 1049-1053, (1975).
- [31]- S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New-York, (1980).
- [32]- A. F. Polyakov, Mixed convection in single phase flows, in O. G. Marynenko and A. A. Zukanskas (eds), *Heat Transfer : Soviet Revue, Convective Heat Transfer*, Vol. 1, pp. 1-95, (1989)
- [33]- H. D. Baehr, K. Stephan, *Heat and masse transfert*, Dringer – Verlag, (1998).

REFERENCES

- [34]- J. F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, Technique et Documentation, (1993).
- [35]- R. H. Perry, D. W. Green, Perry's Chemical Engineers' Handbook 7th Edition, McGraw-Hill, (1997).

ANNEXE : TERMES DE SOURCES

Suivant r^*

$$\begin{aligned}
 S_u^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4U_{p_u}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{U_{p_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\
 &\left[\left(U_{n_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 - 2 \left(U_{n_u}^{*t^*} \right)^2 \right] r_{n_u}^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[\left(U_{s_u}^{*t^*} \right)^2 - 2 \left(U_{s_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 \right] r_{s_u}^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\
 &\left[\left(V_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} U_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left(V_{e_u}^{*t^*} U_{e_u}^{*t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \left[\left(V_{w_u}^{*t^*} U_{w_u}^{*t^*} \right) - 2 \left(V_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} U_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
 &\left[\left(W_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} U_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left(W_{t_u}^{*t^*} U_{t_u}^{*t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p + \left[\left(W_{b_u}^{*t^*} U_{w_u}^{*t^*} \right) - 2 \left(W_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} U_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{e_u}^{*t^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*}}{dr_{n_u}^*} - \mu_{w_u}^{*t^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*}}{dr_{n_u}^*} \right) + \right. \\
 &\left. \left(\mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_{n_u}^*} - \mu_{e_u}^{*t^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_{n_u}^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{w_u}^{*t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*}}{2} - \mu_{e_u}^{*t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*}}{2} \right) + \right. \\
 &\left. \left(\mu_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[2 \frac{\left(\mu_{p_u}^{*t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*} \right) - \right. \\
 &\left. \frac{\left(\mu_{p_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{t_u}^{*t^*} \frac{W_{n_u t_u}^{*t^*} - W_{s_u t_u}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_{b_u}^{*t^*} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \\
 &\left. \left(\mu_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_{t_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{n_u t_u}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{s_u t_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p +
 \end{aligned}$$

ANNEXE

$$\begin{aligned}
 S_u^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4U_{P_u}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{U_{P_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \left[fn_u^{t^*-\Delta t^*} - fn_u^{t^*} \right] + \left[fs_u^t - fs_u^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_u^{t^*-\Delta t^*} - fe_u^{t^*} \right] + \left[fw_u^t - fw_u^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_u^{t^*-\Delta t^*} - ft_u^{t^*} \right] + \\
 & \left[fb_u^{t^*} - fb_u^{t^*-\Delta t^*} \right] + \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2 \left(\mu_{e_u}^{*t^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*}}{dr_{n_u}^*} - \mu_{w_u}^{*t} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*}}{dr_{n_u}^*} \right) + \\ & \left(\mu_{w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_{n_u}^*} - \mu_{e_u}^t \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_{n_u}^*} \right) \end{aligned} \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
 & \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2 \left(\mu_{w_u}^{*t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*}}{2} - \mu_{e_u}^{*t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*}}{2} \right) + \\ & \left(\mu_{e_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_{w_u}^{*t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}^*} \frac{V_{n_u w_u}^{*t-\Delta t} - V_{s_u w_u}^{*t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
 & \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2 \frac{\left(\mu_{P_u}^{*t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*} \right) - \\ & \frac{\left(\mu_{P_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \end{aligned} \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
 & \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2 \left(\mu_{t_u}^{*t^*} \frac{W_{n_u t_u}^{*t^*} - W_{s_u t_u}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_{b_u}^{*t} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \\ & \left(\mu_{b_u}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{n_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{s_u b_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_{t_u}^{*t-\Delta t} \frac{W_{n_u t_u}^{*t-\Delta t} - W_{s_u t_u}^{*t-\Delta t}}{dr_n^*} \right) \end{aligned} \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p + \\
 & 2 \left[\frac{V_{n_u e_u}^{*t^*} + V_{n_u w_u}^{*t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*} + V_{s_u w_u}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \\
 & \left[\frac{V_{n_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{n_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{s_u e_u}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{s_u w_u}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr^*}{Re^2} \cos\theta \left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

ANNEXE

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[\frac{V_{n_u e_u}^{*t} + V_{n_u w_u}^{*t} + V_{s_u e_u}^{*t} + V_{s_u w_u}^{*t}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \\
 & \left[\frac{V_{n_u e_u}^{*t-\Delta t} + V_{n_u w_u}^{*t-\Delta t} + V_{s_u e_u}^{*t-\Delta t} + V_{s_u w_u}^{*t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \frac{Gr^*}{Re^2} \cos \theta \left(T_N^{*t} + T_P^{*t} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr^*}{Re^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{*t-\Delta t} + T_P^{*t-\Delta t}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \left(P_P^{*t+\Delta t} - P_N^{*t+\Delta t} \right) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Suivant θ

$$\begin{aligned}
 S_v^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4V_{p_v}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{V_{p_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \\
 &\left[fn_v^{t^*-\Delta t^*} - fn_v^{t^*} \right] + \left[fs_v^{t^*} - fs_v^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[fe_v^{t^*-\Delta t^*} - fe_v^{t^*} \right] + \left[fw_v^{t^*} - fw_v^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ft_v^{t^*-\Delta t^*} - ft_v^{t^*} \right] + \left[fb_v^{t^*} - fb_v^{t^*-\Delta t^*} \right] + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} &2\mu_{n_w}^{*t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{U_{n_v e_v}^{*t^*} - U_{n_v w_v}^{*t^*}}{d\theta_e} - 2\mu_{s_v}^{*t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{U_{s_v e_v}^{*t^*} - U_{s_v w_v}^{*t^*}}{d\theta_e} - \\ &\mu_{s_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{U_{s_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*} - U_{s_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_{n_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{U_{n_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*} - U_{n_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \end{aligned} \right] \Delta\theta_e \Delta z_p^* + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} &\mu_{n_v}^{*t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \left(V_{N_v}^{*t^*} + V_{P_v}^{*t^*} \right) + \mu_{s_v}^{*t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \left(V_{S_v}^{*t^*} + V_{P_v}^{*t^*} \right) + \\ &\mu_{n_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{V_{N_v}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{P_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_{s_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_p^*}{r_p^*} \frac{V_{S_v}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{P_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p^* + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} &2\mu_{e_v}^{*t^*} \left(\frac{U_{n_v e_v}^{*t^*} + U_{s_v e_v}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - 2\mu_{w_v}^{*t^*} \left(\frac{U_{n_v w_v}^{*t^*} + U_{s_v w_v}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - \\ &\mu_{e_v}^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{U_{n_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*} + U_{s_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) - 2\mu_{w_v}^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{U_{n_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*} + U_{s_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \end{aligned} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
 &\frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} &2 \left(\mu_{t_v}^{*t^*} \frac{W_{e_v t_v}^{*t^*} - W_{w_v t_v}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_{b_v}^{*t^*} \frac{W_{e_v b_v}^{*t^*} - W_{w_v b_v}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) + \\ &\left(\mu_{t_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{e_v t_v}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{w_v t_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_{b_v}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{W_{e_v b_v}^{*t^*-\Delta t^*} - W_{w_v b_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \end{aligned} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e + \\
 &\left(\frac{U_{n_v e_v}^{*t^*} + U_{n_v w_v}^{*t^*} + U_{s_v e_v}^{*t^*} + U_{s_v w_v}^{*t^*}}{2} V_{p_v}^{*t^*} - \frac{U_{n_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*} + U_{n_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*} + U_{s_v e_v}^{*t^*-\Delta t^*} + U_{s_v w_v}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{p_v}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \\
 &-\frac{Gr^*}{Re^2} \sin\theta \left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \frac{Gr^*}{Re^2} \sin\theta \left(\frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Suivant z^*

$$\begin{aligned}
 S_w^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4W_{P_w}^{*t^*}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \Delta z_t^* - \frac{W_{P_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_t^* + \\
 & \left[f n_w^{t^*-\Delta t^*} - f n_w^{t^*} \right] + \left[f s_w^{t^*} - f s_w^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[f e_w^{t^*-\Delta t^*} - f e_w^{t^*} \right] + \left[f w_w^{t^*} - f w_w^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[f t_w^{t^*-\Delta t^*} - f t_w^{t^*} \right] + \\
 & \left[f b_w^{t^*} - f b_w^{t^*-\Delta t^*} \right] + \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{n_w}^{*t^*} r_{n_w}^* \frac{U_{n_w t_w}^{*t^*} - U_{n_w b_w}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_{s_w}^{*t^*} r_{s_w}^* \frac{U_{s_w t_w}^{*t^*} - U_{s_w b_w}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ & \mu_{n_w}^{*t^*-\Delta t^*} r_{n_w}^* \frac{U_{n_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - U_{n_w b_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_{s_w}^{*t^*-\Delta t^*} r_{s_w}^* \frac{U_{s_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - U_{s_w b_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{aligned} \right] \Delta \theta_p \Delta z_t^* + \\
 & \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{e_w}^{*t^*} \frac{V_{e_w t_w}^{*t^*} - V_{P_w}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_{w_w}^{*t^*} \frac{V_{w_w t_w}^{*t^*} - V_{w_w b_w}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ & \mu_{w_w}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{w_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{w_w b_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_{e_w}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{e_w t_w}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{P_w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{aligned} \right] \Delta r_p \Delta z_t^* + \left(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
 \end{aligned}$$

Equation de l'énergie

$$\begin{aligned}
 S^t + \Delta t^* &= \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* = \\
 & \left[\left(U_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - U_n^{*t^*} \left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \left[U_s^{*t^*} \left(T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*} \right) - \left(U_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 & \left[\left(V_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_e^{*t^*} \left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
 & \left[V_w^{*t^*} \left(T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*} \right) - \left(V_w^{t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
 & \left[\left(W_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_T^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - W_t^{*t^*} \left(T_T^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p + \\
 & \left[W_b^{*t^*} \left(T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*} \right) - \left(W_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
 \end{aligned}$$

The investigation of the Prandtl Number Effect on Mixed Convection in Thermal Development in a Cylindrical Duct

Abstract:

This study concerns a numerical simulation of three-dimensional conjugate heat transfer in a horizontal pipe, this pipe is heated by Joule effect through its entire thickness. The mixed convection in the fluid domain is combined with heat conduction in the thickness of the solid duct. The physical properties of the fluid are heat dependent and thermal losses, the outer surface of the conduit to the environment, are taken into consideration. At the entrance of the duct, the fluid under study is presented with a constant temperature is equal 15C ° and a parabolic velocity profile. The numerical method of finite volume discretization with a second-order spatiotemporal is used for solving the equations of conservation of mass, momentum, energy. The results of this study are performed for four different fluids (water, Butanol, Syltherm800, Ethylene Glycol) which correspond to the Prandtl number and Reynolds and Grashof which is calculated from the temperature entered (Pr= 8.0820, 80.5, 140, 305) respectively, (Re=143.2836, 39, 128.6, 20) respectively, (Gr=257534, 102336, 47802, 9300) respectively. The electric intensity is considered I = 40 Ampere, also control parameters such as the geometric aspect ratio is set at 104.17. The results produced were conducted so as to show the influence of the Prandtl number on the dynamic fields and the Nusselt number in forced convection modes (Gr = 0) and mixed convection. An empirical correlation expressing the Nusselt number depending on the number of the Prandtl and the number of the Richardson $Nu_{moy} = f(Pr, Ri)$,
$$Nu_{moy} = 19.543 * Ri^{0.1598} * Pr^{-0.0539}$$

التحقق من تأثير عدد براندل على الحمل المختلط في التطور الحراري داخل أنبوب اسطواني

ملخص :

هذه الدراسة تتعلق بالمحاكاة العددية ثلاثية الأبعاد لانتقال الحرارة داخل أنبوب أفقي، يتم تسخين هذا الأنبوب بواسطة مفعول جول من خلال السمك بأكمله. الحمل المختلط في المائع مرافق للتوصيل الحراري في سمك جدار القناة. الخصائص الفيزيائية الموائع المدروسة متعلقة بدرجة الحرارة والضياع الحراري للجدار الخارجي للقناة باتجاه الوسط الخارجي غير مهملة. عند مدخل القناة، السائل المدروس يأخذ درجة حرارة ثابتة تساوي 15°C و السرعة تكون على شكل قطع مكافئ. استعمال طريقة الحجوم المنتهية بالإضافة إلى استعمال التقسيمات في الزمان والمكان من الدرجة الثانية في حل معادلات انخفاض الكتلة وكمية الحركة و الطاقة. نتائج هذه الدراسة محققة من اجل أربعة موائع مختلفة (الماء , بيوتانول, سيلثيرم 800 , إثيلين غليكول) والتي تتوافق مع عدد براندل ورينولدز وغراشوف و المحسوبين عند درجة حرارة مدخل الانبوب ($Pr= 8.0820, 80.5, 140, 305$) على التوالي, $(Re=143.2836, 39, 128.6, 20)$ على التوالي $(Gr=257534, 102336, 47802, 9300)$, على التوالي. شدة التيار المستعملة $I=40$ أمبير كما تم تعيين عناصر المراقبة مثل نسبة الهندسية (L/D) المثبتة في القيمة 104.17. النتائج المحصل عليها انجزت وذلك من اجل اضهار تأثير عدد براندل على الحمل القسري ($Gr=0$) و الحمل المختلط. هناك علاقة مقترحة تبرز ارتباط عدد نوسلت ب عدد براندل وعدد ريشاردسون $(Nu_{moy} = f (Pr, Ri))$

$$Nu_{moy} = 19.543 * Ri^{0.15} * Pr^{-0.05},$$

Investigation Des Effets Du Nombre De Prandtl Sur La Convection Mixte En Développement Thermique Dans Un Conduit Cylindrique.

Résumé :

Cette étude concerne une simulation numérique du transfert thermique tridimensionnel et conjugué dans un conduit horizontal, ce conduit est chauffé par effet Joule à travers toute son épaisseur. La convection mixte dans le domaine fluide est conjuguée à la conduction thermique dans l'épaisseur solide du conduit. Les propriétés physiques des fluides sont thermo dépendantes et les pertes thermiques, de la surface extérieure du conduit vers le milieu ambiant, sont prises en considération. A l'entrée du conduit, le fluide étudié est présente avec une température constante est égal 15C° et un profil de vitesse parabolique. La méthode numérique des volumes finis avec une discrétisation spatiotemporelle du second ordre, est utilisée pour la résolution des équations de conservation de la masse, des quantités de mouvement, de l'énergie. les résultats de cette étude sont réalisé pour quatre fluides différents (Eau, Butanol, Syltherm800, Ethylène Glycol) qui correspondent aux nombre de Prandtl et Reynolds et Grashof qui est calculés à température de l'entrée ($Pr=8.0820, 80.5, 140, 305$) respectivement, ($Re=143.2836, 39, 128.6, 20$) respectivement, ($Gr=257534, 102336, 47802, 9300$) respectivement. L'intensité électrique considérée est $I = 40$ Ampères aussi les paramètres de contrôle tel le rapport d'aspect géométrique sont fixés à 104.17. Les résultats produits ont été conduits de telle sorte à faire apparaître l'influence du nombre de Prandtl sur les champs dynamiques et ainsi que sur le nombre de Nusselt en modes de convection forcée ($Gr=0$) et en convection mixte. Une corrélation empirique exprimant le nombre de Nusselt en fonction de nombre du Prandtl et le nombre de Richardson $Nu_{\text{moy}} = f(Pr, Ri)$, $Nu_{\text{moy}} = 19.543 * Ri^{0.1598} * Pr^{-0.0539}$