

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ MENTOURI – CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :
Série :

MÉMOIRE :
PRÉSENTÉ EN VUE D'OBTENIR LE DIPLÔME MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITÉ :
PHYSIQUE ÉNERGÉTIQUE

OPTION :
PHOTOTHERMIQUE

THÈME:

**ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION MIXTE
DANS DES CAVITÉS
PHÉNOMÈNE DE BIFURCATION**

Par :

MENACER DALILA

SOUTENU LE :..... /..... / 2012

Devant le jury:

Président :	L. BAH	Prof.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	S. BOUDEBOUS	Prof.	Université Mentouri Constantine
Examineurs :	T. BOUFENDI	Prof.	Université Mentouri Constantine
	O. KOLAI	M.C.	Université Mentouri Constantine

REMERCIEMENT

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée le courage, la volonté et la patience de mener à terme le présent travail.

Ce travail a été mené à l'Université Mentouri de Constantine, sous la direction de Monsieur Saâdoun BOUDJBOUS, Professeur au département de Génie des procédés. Je lui exprime particulièrement toute ma reconnaissance de m'avoir faite bénéficier de ses compétences scientifiques, ses suggestions pertinentes et sa constante disponibilité tout le long du travail.

Je remercie vivement Monsieur Lakhdar BACH, Professeur au département de physique, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury qui évolue le présent travail.

J'adresse tous mes remerciements à messieurs :

Toufik BOUFFENDI, Professeur au département de physique

Omar KHOLAI, Maître de conférences au département de génie mécanique,

D'avoir accepter de me faire l'honneur de juger ce travail et de participer à ce jury.

Tous mes remerciements et mon estime à tous les enseignants du département de mécanique et de physique.

T ABLE DES MATIÈRES

Nomenclature.....	6
Liste des figures et des tableaux.....	10

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Généralité.....	14
I.2 Revue bibliographique.....	15
I.3 Contenu du mémoire.....	20

CHAPITRE II

MODÈLE MATHÉMATIQUE

II.1 Présentation du problème.....	22
II.2 Équations générales.....	23
II.3 Hypothèses simplificatrices.....	23
II.4 Formulation du problème.....	23
II.5 Formulation adimensionnelle.....	24
II.6 Formulation «vorticité ω -fonction de courant ψ ».....	25
II.7 Conditions aux limites.....	26
II.8 Calcul du coefficient de transfert de chaleur.....	26

CHAPITRE III

MODÉLISATION NUMÉRIQUE

III.1 Choix de la méthode de discrétisation.....	28
III.2 Maillage.....	29
III.3 Discrétisation des différentes dérivées.....	29
III.3.1 Discrétisation temporelle.....	30
III.3.2 Discrétisation des conditions aux limites	31
III.4 Résolution des systèmes d'équations.....	32
III.5 Composantes des vitesses.....	33
III.6 Algorithme et organigramme.....	35

CHAPITRE IV

DISCUTIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS

IV.1 Introduction.....	37
IV.2 Choix du maillage.....	37
IV.3 Validation du code numérique.....	38
IV.4 Résultats.....	41
IV.4.1 Premier type d'écoulement $0.1 \leq Ri \leq 3.85$	41
IV.4.2 Deuxième type d'écoulement $4.0 \leq Ri \leq 12.5$	44
IV.4.3 Troisième type d'écoulement $12.6 \leq Ri \leq 18.1$	48
IV.4.4 Quatrième type d'écoulement $18.15 \leq Ri \leq 20$	51
IV.4.5 Cinquième type d'écoulement $Ri \geq 21$	55

CONCLUSION GÉNÉRALE

<i>Références bibliographiques</i>	67
<i>Annexe</i>	71
<i>ملخص</i>	76
<i>Abstract</i>	77
<i>Résumé</i>	78

NOMENCLATURE

A	Surface de la partie chauffée [m ²]
C_p	Chaleur spécifique à pression constante [J/kg.K]
g	Accélération de la pesanteur [m/s ²]
i, j	Coordonnées logiques des nœuds
k	Conductivité thermique [W/m. K]
l	Longueur de la partie chauffée [m]
L	Hauteur dimensionnelle de la cavité [m]
\vec{n}	Normale à la surface chauffée
Nu	Nombre de Nusselt local
P	Pression [Pa]
P	Pression adimensionnelle
P_0	Pression de référence

P_S	Source volumique de chaleur
T	Température [K]
T_0	Température de référence [K]
T_f	Température des parois latérale [K]
T_c	Température de la partie chauffée [K]
u, v	Composantes des vitesses [m/s]
V_0	Vitesse des parois latérale [m/s]
U, V	Composantes adimensionnelles des vitesses
x, y	Coordonnées d'espace dimensionnelles [m]
X, Y	Coordonnées d'espace adimensionnelles

Symboles Grecs

α	Diffusivité thermique [m ² /s]
β	Coefficient d'expansion thermique à pression constante [1/ K]
ε	Longueur adimensionnelle de la partie chauffée
θ	Température adimensionnelle
\varnothing	Variable dépendante générale
ν	Viscosité cinématique [m ² /s]
ρ	Masse volumique [kg/m ³]
φ	«Fonction de dissipation» puissance locale des forces de viscosité
ρ_0	Masse volumique à T ₀ [kg/m ³]
τ	Temps adimensionnel
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
ω	Vorticité adimensionnelle
$\Delta\tau$	Incrément du temps adimensionnel

ΔT Différence de température [°K]

Nombres sans dimensions

\overline{Nu} Nombre du Nusselt moyen $\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial \theta}{\partial n} dA$

Pr Nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

Gr Nombre de Grashof $Gr = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3}{\nu^2}$

Re Nombre de Reynolds $Re = V_0 \frac{L}{\nu}$

Ri Nombre de Richardson $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

LISTE DES FIGURES

<i>Figure (II-1) :</i>	Schéma de la cavité du problème.....	22
<i>Figure (III-1) :</i>	Schéma du maillage uniforme de la cavité.....	29
<i>Figure (III-2) :</i>	Organigramme général de calcul.....	35
<i>Figure (IV-1) :</i>	Comparaison des contours de la fonction de courant pour $Ri = 10$ et $l = \frac{4}{5}L$	39
<i>Figure (IV-2) :</i>	Comparaison des isothermes pour $Ri = 10$ et $l = \frac{4}{5}L$	39
<i>Figure (IV-3) :</i>	Champ thermique dans le cas du premier type d'écoulement.....	42
<i>Figure (IV-4) :</i>	Champ dynamique dans le cas du premier type d'écoulement	43
<i>Figure (IV-5) :</i>	Champ thermique dans le cas du deuxième type d'écoulement	46
<i>Figure (IV-6) :</i>	Champ dynamique dans le cas du deuxième type d'écoulement	47
<i>Figure (IV-7) :</i>	Champ dynamique dans le cas du troisième type d'écoulement	49
<i>Figure (IV-8) :</i>	Champ thermique dans le cas du troisième type d'écoulement	50
<i>Figure (IV-9) :</i>	Champ thermique dans le cas du quatrième type d'écoulement	53
<i>Figure (IV-10) :</i>	Champ dynamique dans le cas du quatrième type d'écoulement	54

<i>Figure(IV-11) :</i>	Le passage des différentes formes de structures selon l'évolution du nombre de nusselt moyen pour la valeur de Richardson correspond à 23.....	57
<i>Figure(IV-12) :</i>	Champ dynamique dans le cas du cinquième type d'écoulement	58
<i>Figure(IV-13) :</i>	Champ thermique dans le cas du cinquième type d'écoulement	59
<i>Figure(IV-14) :</i>	Contours de température, iso-courants et du nombre de nusselt moyen pour différents nombres de Richardson.....	62

LISTE DES GRAPHES

<i>Graphe(IV-1) :</i>	Convergence du profil de température le long du Y=0.5.....	38
<i>Graphe(IV-2) :</i>	Comparaison du profil de vitesse verticale à Y=0.5.....	40
<i>Graphe(IV-3) :</i>	Comparaison de la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.....	40
<i>Graphe(IV-4) :</i>	Evolution du nombre de nusselt moyen dans le cas du premier type d'écoulement.....	44
<i>Graphe(IV-5) :</i>	Evolution du nombre de nusselt moyen dans le cas du deuxième type d'écoulement.....	48
<i>Graphe(IV-6) :</i>	Evolution du nombre de nusselt moyen dans le cas du troisième type d'écoulement	51
<i>Graphe(IV-7) :</i>	Evolution du nombre de nusselt moyen dans le cas du quatrième type d'écoulement	55

Graphe(IV-9) : Evolution du nombre de nusselt moyen dans le cas du cinquième type d'écoulement 60

Graphe(IV-10) : Evolution du nombre de nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson pour les différents cinq types de l'écoulement..... 61

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (II-a) : Coefficient de diffusion et du terme source des équations de transport adimensionnelles..... 25

Tableau (IV-a) : L'écart entre les maximums de fonction de courant pour les différentes grilles du maillage..... 38

Tableau (IV-b) : Les cinq différents types d'écoulement selon les différentes intervalles du nombre de Richardson..... 63

Chapitre I

I NTRODUCTION

ET REVUES BIBLIOGRAPHIQUES

I.1 GÉNÉRALITÉ :

Le transfert thermique est un processus complexe qui est réalisé par la superposition des trois modes fondamentaux : *conduction, convection et rayonnement*. Dans le cas où l'un de ces trois modes est déterminant, les effets des autres sont peu importants ; aussi ils peuvent être négligés, simplifiant considérablement l'analyse du cas concerné.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte.

➤ *Convection forcée :*

Le mouvement de fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide.

➤ *Convection naturelle :*

Elle a comme origine le mouvement produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles qui sont froides existant dans un fluide situé dans un champ de forces massiques, l'intensité de la convection naturelle est en relation avec la nature du fluide. Le traitement de la convection libre sera fait en présence du champ de la gravité et en l'absence des autres forces massiques.

➤ *Convection mixte :*

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents quant les vitesses d'écoulement, fictives dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur. [1]

L'étude des écoulements convectifs dans des cavités fermés possède de nombreuses applications dans le domaine industriel considérant les diverses combinaisons des différences de la température imposé et des configurations géométriques de la cavité.

L'interaction de l'écoulement cisailé dû au mouvement des parois et de l'écoulement de la convection naturelle dû à l'effet de flottabilité constitue jusqu'à présent un domaine de recherche fondamental et nécessite une analyse complète pour comprendre la physique de l'écoulement résultant et du transfert de chaleur.

I.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE :

La revue de la littérature concernant la convection mixte dans des cavités ventilées montre que le sujet reste encore à explorer.

Actuellement la convection mixte dans des cavités fermées a fait l'objet de plusieurs études théoriques, expérimentales et surtout numériques, parmi lesquelles nous présentons quelques unes que nous avons jugées proches de notre cas.

Parmi celles qui ont considéré des enceintes cubiques, nous pouvons citer celles de:

R. Frederick et F. Quiroz [2] qui ont analysé numériquement la convection naturelle laminaire à l'état stationnaire dans une enceinte cubique avec une paroi verticale froide opposée à l'autre contenant une zone carrée chaude. Les résultats indiquent que la transition du régime conductif au régime convectif prend fin à un nombre de Rayleigh $Ra = 105$, caractérisée par la suppression de la conduction et un développement lent de la convection. Aussi, dans la gamme du nombre de Rayleigh variant de 105 à 107, les vitesses latérales deviennent très grandes, produisant un écoulement tridimensionnel thermiquement stratifié, L'effet du nombre de Reynolds est très minime sur le nombre de Nusselt.

N. Quertatani et al [3] ont étudié numériquement la convection mixte tridimensionnelle de l'air dans une enceinte cubique. Les parois inférieure et supérieure sont en mouvement et maintenues à des

températures différentes (refroidis par le bas et chauffé par le haut), tandis que les autres parois sont adiabatiques. Les paramètres de contrôle sont le nombre de Richardson $0.001 \leq Ri \leq 10$, de Reynolds $100 \leq Re \leq 1000$ et de Prandtl $Pr=0.71$. Les résultats indiquent qu'une amélioration remarquable du transfert de chaleur jusqu'à 76% peut être atteinte pour la combinaison particulière de $Re=400$ et $Ri=1$.

A. Baïri [4] a présenté une étude numérique et expérimentale de la convection naturelle transitoire dans une cavité cubique fermée remplie d'air. La paroi gauche contient trois sources de chaleur parallèles discrètes soumises à un flux de chaleur constant et séparées entre elles par des bandes adiabatiques ; en face de la paroi gauche une plaque froide est maintenue à une température constante T_c . Les quatre autres murs de la cavité sont considérés comme adiabatiques. Les échanges de chaleur sont étudiés pour plusieurs configurations bidimensionnelles avec différents angles d'inclinaison de la paroi active en respectant la gravité. Les résultats numériques sont en bon accord avec les mesures thermiques réalisées sur un banc d'essai expérimental.

Tandis que parmi quelques autres qui ont rapporté leur étude sur les enceintes rectangulaires ou carrées, il y-en a :

Torrance et al [5] Ont présenté une étude numérique concernant l'écoulement d'un fluide dans une cavité rectangulaire, dont la paroi supérieure est supposée mobile et chauffée, tandis que les autres sont froides. Les trois cas traités montrent que la convection naturelle prédomine aux grands nombres de Grashof ($\pm 10^4$).

M.K. Moallemi et K.S Jang [6] ont considéré l'écoulement et le transfert de chaleur dans une enceinte carrée pour laquelle le mouvement du fluide est induit par le frottement résultant du mouvement de translation du couvercle et par la force de flottabilité due au chauffage du plancher. Les simulations numériques sont faites pour un écoulement laminaire bidimensionnel ($100 \leq Re \leq 2200$) et pour différentes valeurs du nombre du Richardson. Ils ont étudié les effets du nombre de Prandtl pour les valeurs faibles ($0.01 < Pr < 50$) sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans l'enceinte. La température et le champ d'écoulement sont calculés et présentés pour illustrer l'influence du nombre de Prandtl. Les nombres de Nusselt locaux et globaux sont rapportés pour différentes valeurs de Re , Ri et Pr .

T. Basak et S. Roy [7] se sont intéressés au sujet de la convection mixte dans une cavité carrée où la paroi inférieure est soumise à haute température non-uniforme par contre les deux autres latérales sont froides et celle qui est supérieure est supposée en mouvement avec une vitesse constante. Leur étude a porté sur l'effet de divers paramètres de contrôle tels que Pr , Re et Gr avec $Ri = Gr / Re^2$. Ils ont observé que la convection naturelle est dominante pour $Re=10$ et $Gr=10^5$, mais si Ri est supérieure à cette valeur ; celle qui est forcée sera devenue la dominante.

K. Khamafer, K. Vafain et M. Lightston [8] ont étudié le transfert de chaleur par convection mixte dans les clôtures flexibles pour trois différents angles d'attaques de l'écoulement avec une augmentation du nombre de Grashof et du nombre de Reynolds pour voir l'effet de l'inclinaison sur le transfert thermique. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente linéairement avec l'augmentation du nombre de Reynolds et le nombre de Grashof. Aussi, pour un écoulement avec un angle d'attaque égale à 90° , l'augmentation du nombre de Reynolds minimise l'échange de chaleur.

M. Nejam et M. Hasnaoui [9] ont rapporté une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte en forme de «T» chauffée à l'aide d'un flux de chaleur constant et soumise à un jet d'air frais par le bas. Les blocs chauffants sont identiques et le système présente une symétrie par rapport à un axe vertical passant par les milieux des ouvertures. Les équations régissant sont résolues à l'aide d'une méthode aux différences finies. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Rayleigh ($0 \leq Ri \leq 106$), de Reynolds ($1 \leq Re \leq 1000$) et de Prandtl ($Pr=0,72$), la hauteur relative des blocs chauffants ($B=h/H=0,5$), la dimension C des ouvertures d'admission et d'évacuation de l'air ($C=l/L=0,15$) et la distance relative D entre les blocs ($D=d/L=0,50$). Les résultats obtenus, pour $H/L=1$, montrent l'existence de solutions multiples et le transfert de chaleur en dépend de manière sensible.

T.H. Hsu et S.G. Wang [10] ont présenté une étude numérique de la convection mixte des fluides micro-polaires dans une enceinte carrée avec une source de chaleur discrète. Les études ont été effectuées pour une large gamme des nombres de Reynolds et Grashof, ainsi que les paramètres liés au fluide. Les résultats montrent que les champs thermiques dépendent de la viscosité.

I. Dagtekin et Hakan.F. Oztop [11] ont considéré leur étude numérique sur la convection mixte stationnaire dans une cavité rectangulaire. Le gradient de température selon les deux faces : supérieure et inférieure est négligé, tandis que les autres ont une vitesse de déplacement avec des

températures différentes. L'étude tient compte l'influence des trois cas d'aspect selon le sens de mobilité des parois en faisant illustrer une large gamme de Richardson ($0.01 \leq Ri \leq 100$). Un résultat remarquable qui découle ce modèle est que le transfert thermique est maximum au mouvement ascendant des parois.

S.K. Mahapatra et al [12] ont étudié la convection mixte dans une enceinte où les parois supérieures et inférieure ont maintenues adiabatiquement et dotées de clôture sur leurs faces intérieures, tandis que la paroi gauche et la paroi droite froide sont soumises à des vitesses opposées. Ils ont examiné l'effet du nombre de Richardson ($Ri = 1$) pour la convection mixte et la taille des clôtures sur le transfert de chaleur pour la convection forcée ($Ri = 0.1$). Les résultats montrent qu'au-delà d'une certaine de $0.3 H$ (H est l'hauteur de la clôture), le transfert de chaleur par la convection mixte est plus grand que celui dans le cas de la convection naturelle.

Aydin et Yang [13] ont traité la convection mixte laminaire dans une cavité 2D soit caractérisée par une source chaude placée au centre de la paroi inférieure et la partie restante est considérée adiabatique comme la face supérieure, alors que les autres sont supposées froides se déplaçant à une vitesse déterminée vers le bas. L'investigation porte sur l'influence du nombre de Richardson ainsi que la longueur de la partie chauffante. Les effets de chacune des convections : naturelle et forcée sont compatibles, plus qu'on a eu rien à visualiser concernant le phénomène de l'anti-symétrie.

K.M. Khanafar et al [14] ont rapporté une étude numérique sur le transfert de chaleur par convection mixte laminaire instable dans une cavité carrée. La paroi supérieure est maintenue à une température froide T_c soumise à une vitesse horizontale sinusoïdale, tandis que la paroi inférieure est maintenue à une température chaude T_h ; les autres parois sont adiabatiques. La discrétisation des équations gouvernant le problème est obtenue à l'aide des éléments finis basée sur la méthode de Galerkin. Les caractéristiques de l'écoulement du fluide et de transfert de chaleur sont examinés pour une gamme de Reynolds ($10^2 \leq Re \leq 10^3$), de Grashof ($10^2 \leq Gr \leq 10^5$), d'une fréquence sans dimensions d'oscillation du couvercle $0.1 \leq \omega \leq 5$ et un nombre de Prandtl de 0.71. Ils ont montré que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof, tandis qu'il diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds et de la fréquence de vitesse du couvercle.

M.A.R. Sharif [15] a étudié numériquement la convection mixte dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle à l'aide de l'algorithme SIMPLER. La surface supérieure de la cavité rectangulaire est maintenue à plus haute température et la surface inférieure à base température, tandis que les deux surfaces gauche et droite sont considérées adiabatiques. L'étude numérique est faite pour un nombre

de Rayleigh varié de 105 à 107, le nombre de Reynolds $Re = 408.21$. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation de l'angle de l'inclinaison pour la convection forcée dominante. Aussi, le nombre de Nusselt local et moyen augmentent avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison dans le cas ($Ri = 0.1$), tandis qu'il augmente plus rapidement pour ($Ri = 10$).

T.S. Cheng et W.H. Liu [16] ont repris numériquement la convection mixte dans une cavité carrée, dont la paroi supérieure est mobile. Quatre cas sont distingués selon la direction du gradient de la température imposée. L'échauffement différentiel des parois supérieures et inférieures se traduit par l'attraction gravitationnelle stable et les gradients de température instable, alors que l'échauffement différentiel des parois latérales gauche et droite favorise et contrecarre les effets de flottabilité. En utilisant les paramètres de contrôle $Pr=6.2$ et $Ri=0.1, 1$ et 10 , ils ont constaté que le nombre de Richardson et la direction du gradient de température affectent les types d'écoulement et l'évolution du transport de chaleur dans la cavité. De plus, ils ont montré que le taux de transfert de chaleur augmente avec la diminution du nombre de Richardson indépendamment de l'orientation du gradient de température imposée.

G. Guo et Muhammad.A. Sharif [17] ont rapporté une étude numérique sur le mécanisme de transport par convection mixte dans une enceinte carrée remplie avec un nano-fluide, ses deux parois latérales sont isolées tandis que les autres sont maintenues à des températures constantes. La paroi supérieure se déplace avec une vitesse constante. Ils ont montré que l'introduction des nano-particules dans le fluide mène à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur, ils sont capables de changer la structure de l'écoulement. Le rapport d'aspect (longueur par rapport à la hauteur) et la fraction volumique du solide affectent l'écoulement du fluide et le transfert thermique dans la cavité.

P. Kandaswamy, J.Lee et M. Muthamilselvan [18] ont rapporté des conditions aux limites que celles sont de la configuration géométrique étudiée par Aydin et Yang qui ont considéré une température fixe alors que Guo et Sharif ont imposé un flux de chaleur constant. La partie restante de cette paroi est supposée adiabatique. Les effets de la longueur de la source de chaleur ainsi que du nombre de Richardson ont été examinés. Ici, les effets de la convection forcée et de la convection naturelle étant coopérant, aucune bifurcation vers une solution non symétrique n'a été observée.

B. Dahdi [19] a repris numériquement la convection mixte dans une cavité carrée en considérant la même configuration que celle d'Aydin avec une direction de déplacement des parois latérales inversée. Les résultats obtenus montrent l'existence de trois écoulements complètement différents en fonction de la valeur du nombre de Richardson. Dans une première phase, l'écoulement est constitué

de deux cellules contrarotatives et parfaitement symétriques lorsque la convection forcée est dominante. Quand on fait augmenter le nombre de Richardson; une nouvelle phase de l'écoulement prend naissance et les deux cellules précédentes deviennent antisymétriques. La dernière phase est caractérisée par la naissance de quatre cellules contrarotatives. Le passage de la 2^{ème} phase vers la 3^{ème} phase, provoque une diminution brusque et importante du nombre de Nusselt.

Cette investigation consiste à analyser la convection mixte dans une cavité carrée à parois latérales froides et se déplacent vers le haut, une source de chaleur est disposée au milieu de la paroi inférieure. Elle a pour objet de déterminer l'influence relative des deux modes de force (force de flottabilité et de cisaillement) sur le transfert thermique induit lorsque le fluide est en mouvement.

I.3 CONTENUE DU MEMOIRE :

Cette investigation est structurée en 4 chapitres.

- Dans le but de situer notre étude, on présente dans le premier chapitre le phénomène de la convection ainsi que quelques rappels bibliographiques en rapport avec le problème posé.
- Un second chapitre consacrera à la configuration géométrique étudiée, à la formulation mathématique du modèle, aux hypothèses simplificatrices et à l'établissement des équations et des conditions aux limites qui leur seront associées. Enfin on va définir les principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le problème.
- Dans le troisième chapitre nous présentons la formulation numérique du problème. Nous avons opté pour la méthode des différences finies pour discrétiser les différentes équations du problème aux dérivées partielles.
- Le quatrième chapitre est consacré aux résultats des différentes simulations et à leurs interprétations.
- Enfin on terminera par une conclusion générale obtenue au cours de cette étude en signalant les extensions possibles.
- Le mémoire se termine par une conclusion générale résumant les différents résultats obtenus ainsi que les perspectives de ce travail.

Chapitre II

MODÈLE MATHÉMATIQUE

II.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME :

Le modèle physique considéré est schématisé sur la figure (II-1). Il s'agit d'une cavité carrée disposant au milieu de sa paroi inférieure un composant électrique chauffé de longueur l égale au quatre cinquième de celle de la cavité L , que nous proposons de refroidir en créant des courants fluides qui s'écoulent le long des parois latérales avec une vitesse fixée V_0 . Toutes les autres parties de la cavité sont isolées thermiquement. La force de flottabilité induite par le gradient de température au sein de la cavité crée un mouvement de convection naturelle qui perturbe l'écoulement forcé causé par la force de cisaillement due à la mobilité des parois. Le résultat de cette compétition donne naissance à une convection mixte.

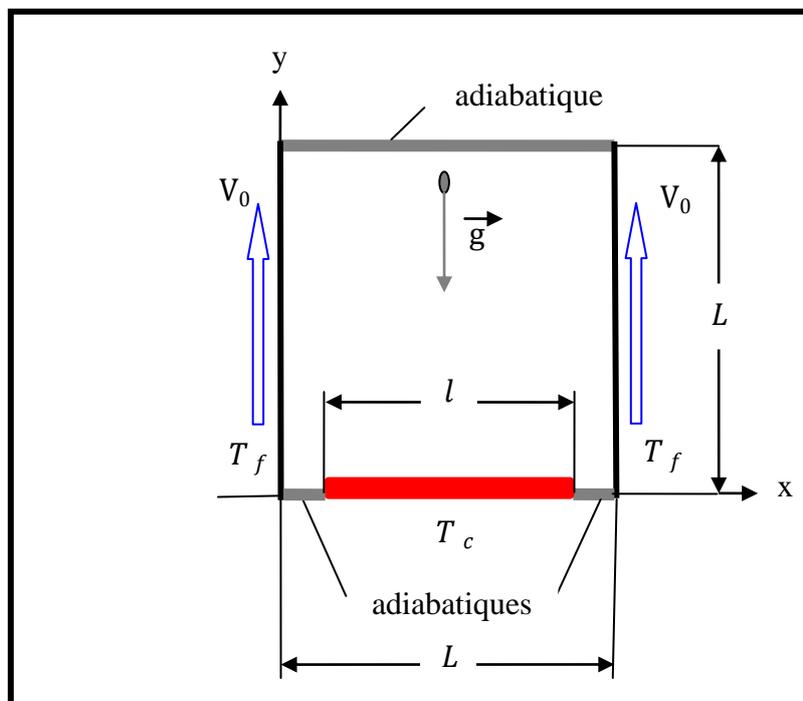


Figure (II-1) : Schéma de la cavité du problème étudié.

I.2 ÉQUATIONS GÉNÉRALES :

L'analyse de la convection thermique se fonde sur l'application des trois lois fondamentales de la physique générale :

Équation de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II-1})$$

❖ Équation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \nu \Delta \vec{V} - \vec{g} \beta (T - T_f) \quad (\text{II-2})$$

❖ Équation de la conservation de l'énergie

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = \beta T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} P \right) + P_s + \phi + \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad (\text{II-3})$$

II.3 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES :

La modélisation du système étudié prend en considération les hypothèses suivantes :

- ✓ L'écoulement est bidimensionnel.
- ✓ Le fluide est newtonien et incompressible.
- ✓ L'écoulement engendré est laminaire.
- ✓ le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- ✓ le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- ✓ Les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.

II.4 FORMULATION DU PROBLÈME :

Le système d'équations qui gouverne l'écoulement laminaire en convection mixte et le transfert de chaleur en coordonnées cartésiennes après simplification s'écrit comme suit :

❖ Équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-4})$$

❖ Équation de la quantité de mouvement

$$\text{Selon (o x): } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-5})$$

$$\text{Selon (o y): } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g \beta (T - T_f) \quad (\text{II-6})$$

Avec : $P^* = P - P_0$

❖ Équation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-7})$$

II.5 FORMULATION ADIMENSIONNELLE :

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesure, pour rendre la solution plus générale d'un coté et d'un autre pour réduire le nombre de paramètres d'un problème.

Il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence comme ceci :

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad Y = \frac{y}{L} \quad , \quad U = \frac{u}{V_0} \quad , \quad V = \frac{v}{V_0} \quad , \quad \tau = t \frac{V_0}{L} \quad , \quad P = \frac{P^*}{\rho V_0^2} \quad , \quad \theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}$$

Les équations précédentes deviennent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II-8})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] \quad (\text{II-9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \right] + \frac{Gr}{Re^2} \theta \quad (\text{II-10})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] \quad (\text{II-11})$$

Les principales paramètres de contrôle du problème étudié tels que Pr , Re et Gr dénotent, respectivement, les nombres de Prandtl, de Reynolds, et de Grashof qui sont définis par les relations suivantes :

$$Pr = \nu / \alpha \quad Re = (V_0 L) / \nu \quad Gr = g\beta(T_c - T_f)L^3 / \nu^2$$

II.6 FORMULATION «FONCTION DE COURANT ψ -VORTICITÉ ω » :

Pour éliminer le gradient de pression figurant dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, la formulation «vorticité ω -fonction de courant ψ » sera utilisée. Les équations adimensionnelles permettant la détermination de la vorticité, de la température et de la fonction du courant s'écrivent pour un écoulement bidimensionnel et incompressible :

II.6.1 ÉQUATION DE LA VORTICITÉ ω :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) \right] + Ri \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (\text{II-12})$$

II.6.2 ÉQUATION DE L'ÉNERGIE :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] \quad (\text{II-13})$$

II.6.3 FONCTION DU COURANT :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (\text{II-14})$$

Les champs des vitesses ainsi que la vorticité sont définies comme suit :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$$

L'équation générale de transport d'une variable ϕ pour un écoulement incompressible s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \Gamma_{\phi} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) \right] + S_{\phi} \quad (\text{II-15})$$

La définition de $\phi, \Gamma_{\phi}, S_{\phi}$ pour les équations qui gouvernent notre modèle est donnée selon le tableau suivant :

Equation	ϕ	Γ_{ϕ}	S_{ϕ}
Equation de la vorticité	ω	$\frac{1}{Re}$	$Ri \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)$
Equation de l'énergie	θ	$\frac{1}{Re Pr}$	0

Tableau (II-a) : Coefficients de diffusion et du terme source des équations de transport adimensionnelles.

II.7 CONDITIONS AUX LIMITES :

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante. Les conditions de températures sont connues sur les parois. Initialement, le fluide est au repos, la température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité.

Les parois latérales sont froides, d'où leur température adimensionnelle est nulle. La partie chaude de la paroi inférieure est soumise à une température adimensionnelle égale à 1.

Ces conditions seront traduites par les expressions suivantes :

$$\theta = 0 \quad U = 0 \quad V = 1 \quad \text{à } X = 0 \text{ et } 1 \quad \text{et} \quad 0 < Y < 1$$

$$\theta = 1 \quad U = V = 0 \quad \text{à } Y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad V = 0 \quad \text{à } Y = 0 \quad \text{et} \quad 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = V = 0 \quad \text{à } Y = 1 \quad \text{et} \quad 0 < X < 1$$

La valeur de la vorticité sur les parois fixes ou mobiles est évaluée par un développement de Taylor du premier ordre de la fonction de courant ψ . Celle-ci est égale à 0 sur toutes les parois. L'expression mathématique de cette condition sera détaillée dans le chapitre suivant.

II.8 CALCUL DU COEFFICIENT DE TRANSFERT DE CHALEUR :

On s'intéresse au transfert de chaleur au niveau de la partie chauffée ainsi le nombre de Nusselt moyen est défini par :

PARTIE CHAUFFANTE :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu(X) dX \quad (\text{II} - 16)$$

O  $Nu(X)$ est le nombre de Nusselt local défini par :

$$Nu(X) = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (\text{II} - 17)$$

Chapitre III

III.1 CHOIX DE LA MÉTHODE DE DISCRÉTISATION :

Dans ce chapitre on va décrire la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées traduisant le problème dans le précédent chapitre.

Leur discrétisation est l'opération de les transformer en un système d'équations algébriques dont la résolution numérique est abordée par des méthodes numériques différentes.

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18^{ème} siècle par Euler [20]. Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre les problèmes de convection en régime transitoire pour différentes configurations géométriques. La modélisation par différences finies procède avant tout de la décomposition du domaine physique en éléments de lignes reliées entre elles et mis en continuité en un nombre fini de points. Ces points de continuité, appelés nœuds, sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du domaine physique [21]. Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par le couple d'indices (i,j) désignant les lignes d'intersection du maillage.

III.2 MAILLAGE :

Le domaine de calcul est divisé en une série de cellules de taille uniforme comme le montre la figure (III-1).

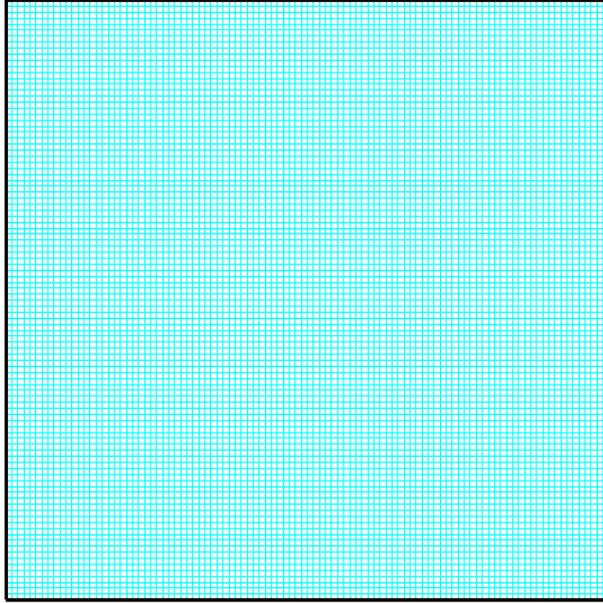


Figure (III-1) : Schémas du maillage uniforme de la cavité.

III.3 DISCRÉTISATION DES DIFFÉRENTES DÉRIVÉES :

La discrétisation des différents termes des équations gouvernantes est développée à l'aide des schémas d'ordre élevé tel que le schéma «Upwind du 3^{ème} ordre» pour les termes convectifs et, le schéma du 4^{ème} ordre pour les termes diffusifs ainsi que pour les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie, vitesses). La discrétisation du terme temporel utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Les relations qui suivent, donnent la forme générale discrétisée des dérivées partielles de l'équation de transport d'une variable ϕ , pour un nœud quelconque (i,j) , selon la direction x. On a choisit une seule direction dans le but d'alléger la rédaction de ce chapitre.

III.3.1 Discrétisation temporelle $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)$:

Méthode de Runge Kutta 4

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes numériques d'approximation de solution des équations différentielles. Elles ont été ainsi nommées en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhem Kutta qui élaborèrent cette méthode en 1901.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est très couramment utilisée pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations différentielles à dérivées partielles (EDP), elle est aussi très stable pour les fonctions courantes de la physique.

L'équation générale de transport peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \underbrace{-U\frac{\partial\phi}{\partial X} - V\frac{\partial\phi}{\partial Y} + \Gamma_{\phi} \left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right) \right]}_{\text{Rhs}(\phi)} + S_{\phi} \quad (\text{III-A})$$

La méthode de RK4 est dérivée de la méthode d'Euler, elle utilise trois points intermédiaires pour progresser du point $(\phi|_{i,j}^n)$ au point $(\phi|_{i,j}^{n+1})$ selon les calculs suivants [22] :

$$\phi|_{i,j}^1 = \phi|_{i,j}^0 + \Delta\tau \text{Rhs}(\phi|_{i,j}^0)$$

$$\phi|_{i,j}^2 = \phi|_{i,j}^0 + \frac{\Delta\tau}{2} \text{Rhs}(\phi|_{i,j}^1)$$

$$\phi|_{i,j}^3 = \phi|_{i,j}^0 + \frac{\Delta\tau}{2} \text{Rhs}(\phi|_{i,j}^2)$$

$$\phi|_{i,j}^{n+1} = \phi|_{i,j}^n + \frac{1}{6} (\text{Rhs}(\phi|_{i,j}^0) + 2\text{Rhs}(\phi|_{i,j}^1) + 2\text{Rhs}(\phi|_{i,j}^2) + \text{Rhs}(\phi|_{i,j}^3)) \quad (\text{III-5})$$

III.3.2 Discrétisation des conditions aux limites :

Les dérivées des conditions aux limites sont discrétisées avec un schéma décentré avant ou arrière, selon la position de la paroi considérée.

❖ Température :

Dans l'exemple que nous traitons, les températures aux parois latérales sont imposées.

En admettant que les autres sont adiabatiques. Alors la condition d'adiabacité est exprimée comme suit :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{j=1, \text{nyt}} = 0$$

Il vient alors $\theta_{i,1} = \frac{4}{3}\theta_{i,2} - \frac{1}{3}\theta_{i,3}$

$$\theta_{i,\text{nyt}} = -\frac{1}{3}\theta_{i,\text{nyt}-2} + \frac{4}{3}\theta_{i,\text{nyt}-1}$$

❖ Vorticité .

L'une des principales difficultés dans l'utilisation de la formulation fonction de courant-vorticité ($\psi - \omega$) apparaît lors du traitement des conditions aux limites de la vorticité, qui ne sont pas données explicitement sur les parois (solides ou mobiles). Plusieurs conditions ont été proposées dans la littérature, la discrétisation se fait de la façon suivante :

La vorticité est donnée par cette relation : $\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$

Au niveau de la paroi inférieure

$$\omega|_{j=1}^i = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial X}}_{=0} \Big|_{j=1}^i - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{j=1}^i = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{j=1}^i$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à deux pour la fonction de courant, on obtient :

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \Delta Y \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial Y}}_{=0} \Big|_{j=1}^i + \frac{\Delta Y^2}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}}_{=-\omega|_{j=1}^i} \Big|_{j=1}^i$$

D'où :

$$\omega|_{j=1}^i = \frac{2}{\Delta Y^2} (\psi_1^i - \psi_2^i)$$

Au niveau de la paroi supérieure

De façon analogue on peut écrire pour la paroi supérieure :

$$\omega|_{j=\text{nyt}}^i = \frac{2}{\Delta Y^2} (\psi_{\text{nyt}}^i - \psi_{\text{nyt}-1}^i)$$

Au niveau des parois mobiles (gauche et droite)

Dans ce cas la valeur $\left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)$ est égale à $-V_0$, de sorte que pour la paroi gauche on a :

$$\psi_{2,j} = \psi_{1,j} + \Delta X \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial X}}_{i=1}^j + \frac{\Delta X^2}{2!} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}}_{i=1}^j$$

$$\omega|_{i=1}^j = \frac{2}{\Delta X^2} (\psi_1^j - \psi_2^j - \Delta X V_0)$$

D'une manière similaire on obtient pour la paroi droite :

$$\omega|_{i=\text{nxt}}^j = \frac{2}{\Delta Y^2} (\psi_{\text{nxt}}^j - \psi_{\text{nxt}-1}^j + \Delta X V_0)$$

III.4 RESOLUTION DES SYSTEMES D'ÉQUATIONS :

Les différentes dérivées partielles figurants dans les équations régissant notre modèle mathématique ont été discrétisées. Une fois leurs expressions substituées dans ces équations nous obtenons un système d'équations algébriques qui peut être résolu facilement par des méthodes itératives. Les équations définissant la température θ et la vorticité ω peuvent être résolues par la méthode de Runge- Kutta (RK4), alors que l'équation de la fonction de courant ψ est résolue par la méthode Non-Linear-Over-Relaxation (N.L.O.R).

Dans cette méthode la valeur de l'entité physique quelconque ϕ à l'itération $k + 1$ est exprimée comme ceci :

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^k - K \frac{F_{\phi_{i,j}}}{\frac{\partial F_{\phi_{i,j}}}{\partial \phi_{i,j}}}$$

Dans laquelle :

K est le facteur de relaxation, sa valeur optimale est comprise entre 0 et 2

et

$$F_{\phi_{i,j}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + \omega_{i,j}$$

- ❖ Cette méthode est une variante de la méthode de Newton-Raphson utilisée pour la résolution des systèmes d'équations linéaires ou non-linéaire.

III.5 COMPOSANTES DES VITESSES:

À partir des relations suivantes :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$$

Nous obtenons les valeurs des composantes du champ de vitesse par:

$$U_{i,j} = \frac{1}{12\Delta Y} (-\psi_i^{j+2} + 8\psi_i^{j+1} - 8\psi_i^{j-1} + \psi_i^{j-2}) \quad (\text{III-10})$$

$$V_{i,j} = \frac{1}{12\Delta X} (-\psi_{i+2}^j + 8\psi_{i+1}^j - 8\psi_{i-1}^j + \psi_{i-2}^j) \quad (\text{III-11})$$

III.6 ALGORITHME ET ORGANIGRAMME :

La formulation $(\psi - \omega)$ exige un traitement simultané des équations : fonction de courant, vorticité, et l'énergie. Les principales étapes sont résumées selon l'algorithme suivant :

1. Définition du domaine et lecture des données.
2. Génération du maillage.
3. Introduction des conditions initiales et aux limites.
4. Début de la boucle sur le temps.
 - ❖ Résolution de l'équation de l'énergie et de la vorticité à l'aide de la méthode de RK4.
 - ❖ Calcul du champ de la fonction de courant à partir de l'équation de Laplace (II-14) par la méthode de N.L.O.R.
 - ❖ Détermination du champ de vitesse (U,V) à partir de ses relations:(III -10) et (III-11)
 - ❖ Détermination de la vorticité aux parois.
 - ❖ Incrémentation du temps $(\tau + \Delta\tau)$.
 - ❖ Répétition des calculs jusqu'à l'obtention du régime établi.

Fin de la boucle sur le temps.

5. Impression des résultats.

III.7 CRITÈRE DE CONVERGENCE :

A chaque pas du temps, la mise à jour des nouvelles variables physiques $\phi_{i,j}^{k+1}$ est faite jusqu'à ce que le critère de convergence $\left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{i,j}^{k+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{i,j}^k \right) / \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{i,j}^{k+1} \right| \leq 10^{-5}$ soit satisfait.

On a élaboré un programme de calcul en langage FORTRAN dont l'organigramme figure à la page suivante :

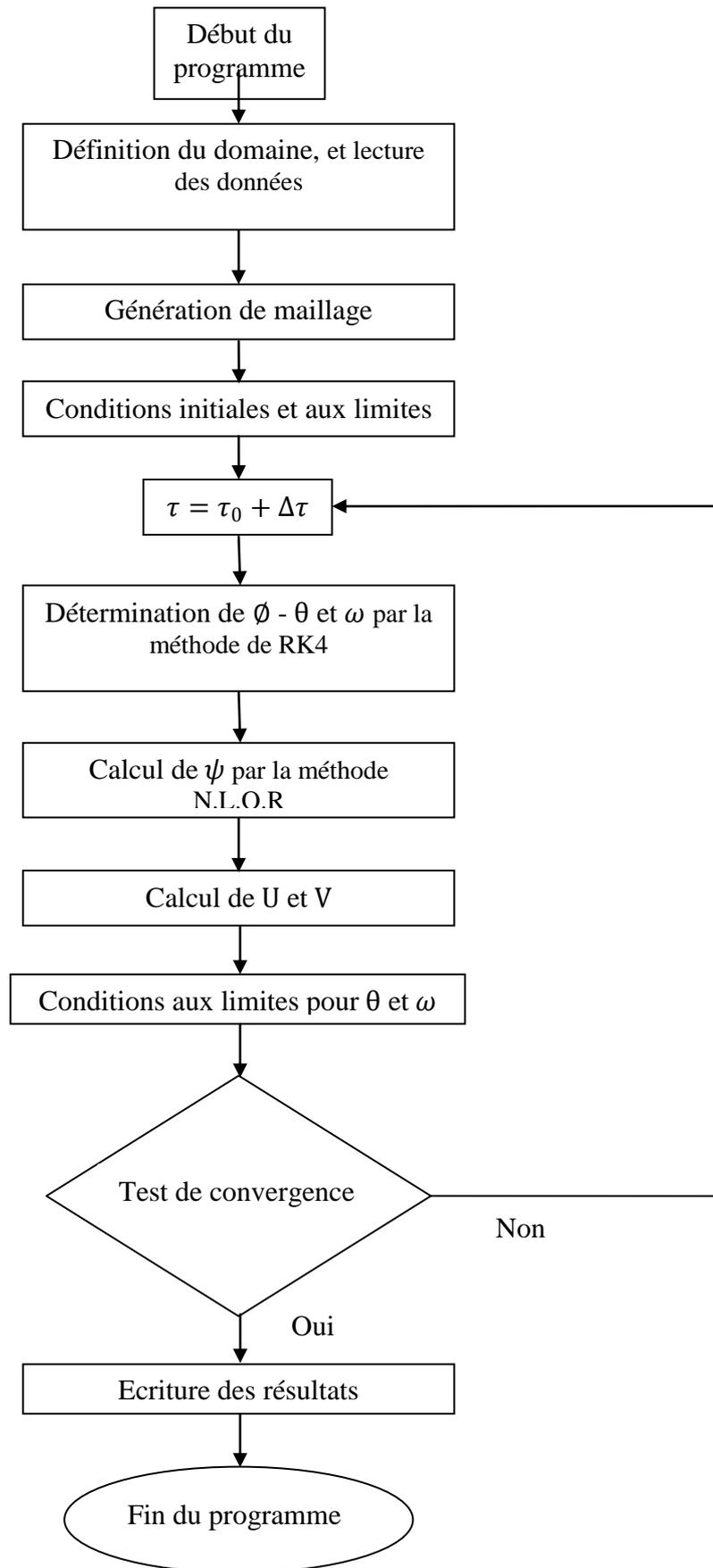


Figure (III-2) : Organigramme général de calcul.

Chapitre IV

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 INTRODUCTION :

Dans ce chapitre on va intéresser à l'étude numérique de la convection mixte dans la géométrie considérée. On verra en premier lieu, l'influence du maillage sur les résultats. Puis on procède à la validation du code de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

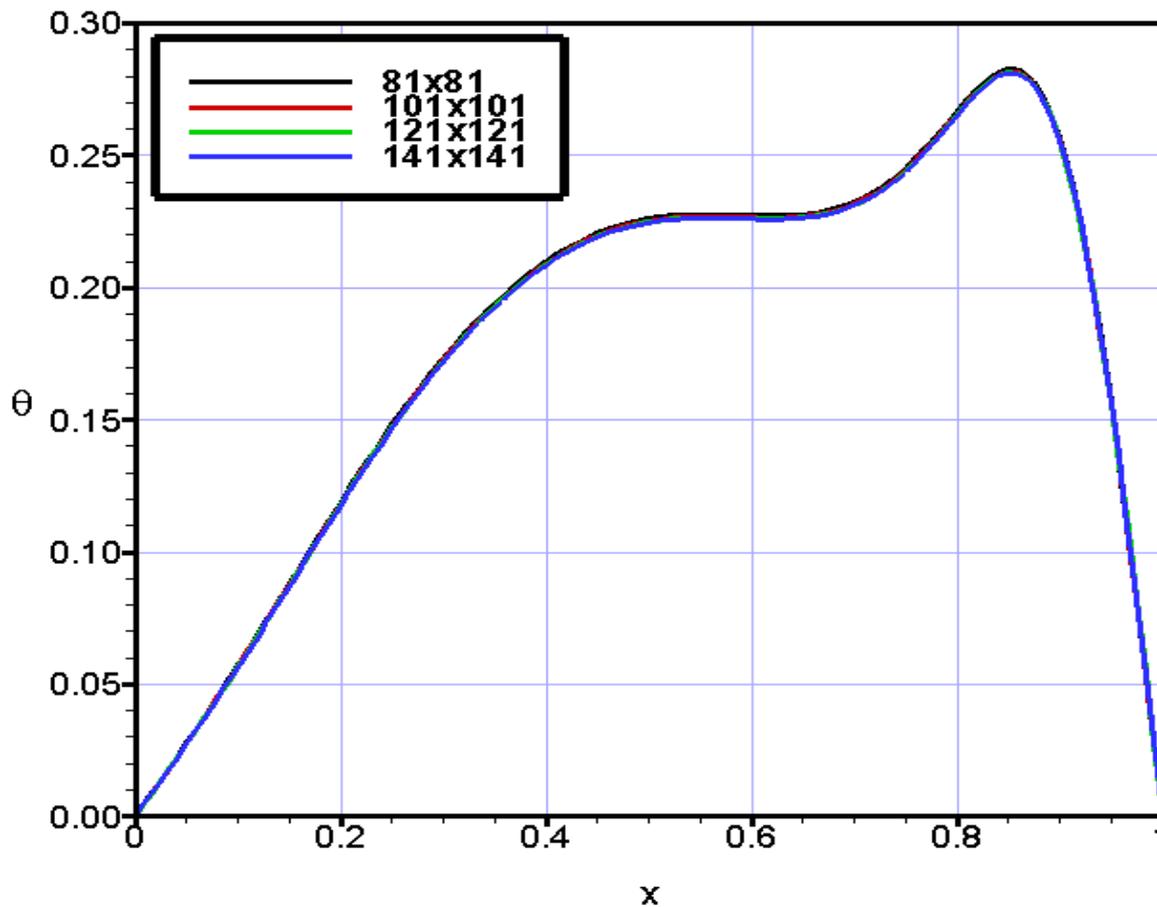
Pour toutes les simulations, nous avons considéré un fluide ayant un nombre de Prandtl égale à 0.71 et une valeur de 100 pour le nombre de Reynolds, La longueur de la partie chauffée est fixée à $\frac{4}{5}L$ et le nombre de Richardson varie de 1 jusqu'à 50.

IV.2 CHOIX DU MAILLAGE :

Le maillage utilisé est un maillage uniforme, quatre grilles sont créées pour s'assurer une solution indépendante de ce maillage.

L'influence de la taille et du nombre des nœuds sur la solution est illustrée par le graphe (IV-1) qui montre le profil de température au plan médium pour une valeur de Richardson correspond à 10.

Plusieurs essais numériques exprimés par la fonction de courant maximale illustrés par le tableau (IV-a) ont été réalisé afin d'assurer l'indépendance du maillage. Selon ce tableau, à partir de la grille 101x101, la fonction de courant maximale devient constante, raison pour laquelle on a choisit la grille 101x101 pour obtenir des résultats précis avec un minimum du temps de calcul.



Graphe (IV-1) : Convergence du profil de température le long de Y=0.5.

<i>Grille</i>	Ψ_{max}
81x81	0.1674
101x101	0.1672
121x121	0.1672
141x141	0.1672

Tableau (IV-a) : L'écart entre les maximums de la fonction de courant pour les différentes grilles du maillage.

IV.3 VALIDATION DU CODE DE CALCUL :

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code a été faite en prenant en compte certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats d'**Aydin [2000]**, obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire contenant de l'air, ont été utilisés pour tester notre code numérique.

Les contours de la fonction de courant (figure (IV-1)), de la température (figure (IV-2)) ainsi que les profils de vitesse V le long du plan médium (graphe (IV-2)) pour la valeur du nombre de Richardson correspond à 10 et la longueur de la partie chauffée est fixée à $\frac{4}{5}L$ ont été réalisés et comparé avec ceux d'Aydin [13]. La comparaison de ces résultats montre une bonne concordance.

L'écart relatif maximum calculé à partir du graphe (IV-3) du nombre de Nusselt moyen de la partie chauffée est inférieure à 4%. Nous pouvons conclure que le code de calcul établi donne satisfaction.

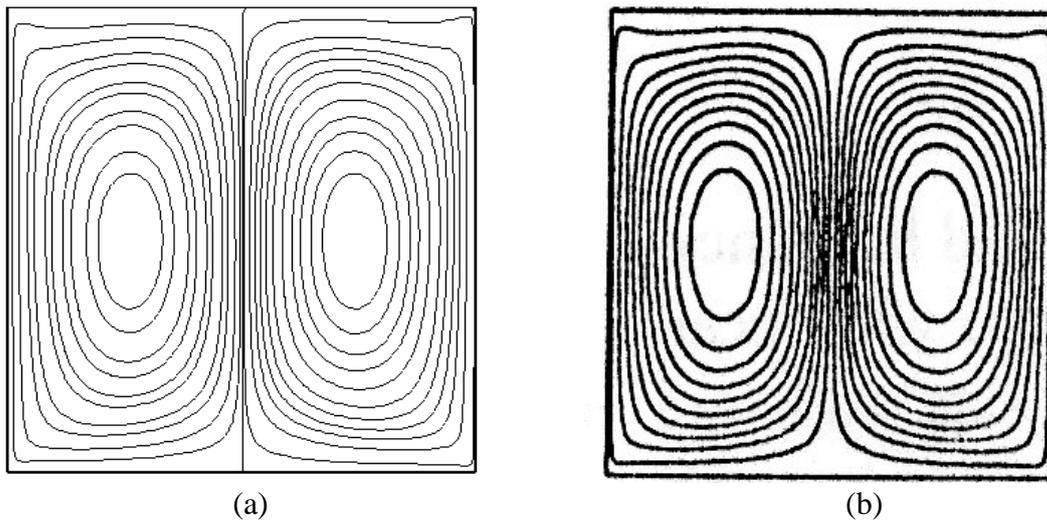


Figure (IV-1) : Comparaison des contours de la fonction de courant pour $Ri = 10$ et $l = \frac{4}{5}L$

a) Présent travail b) Résultat d'Aydin [2000]

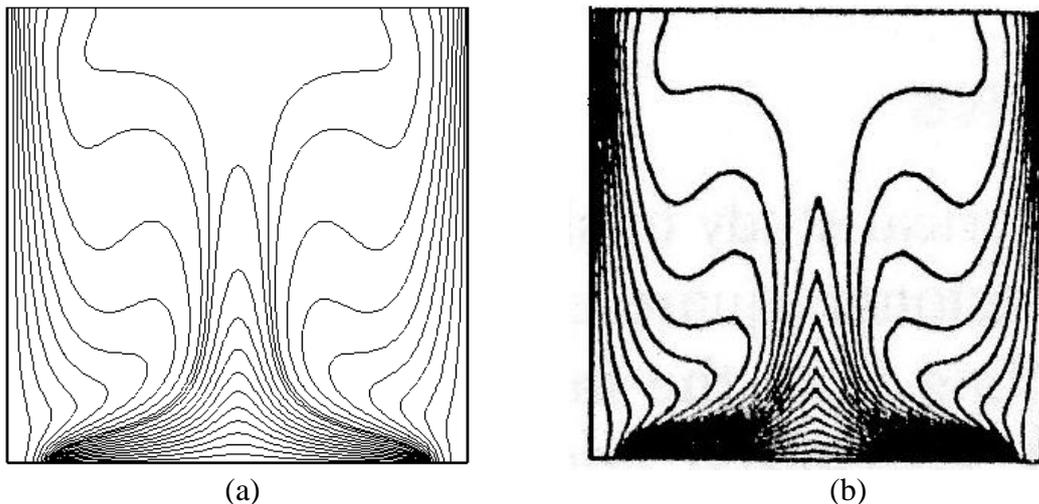
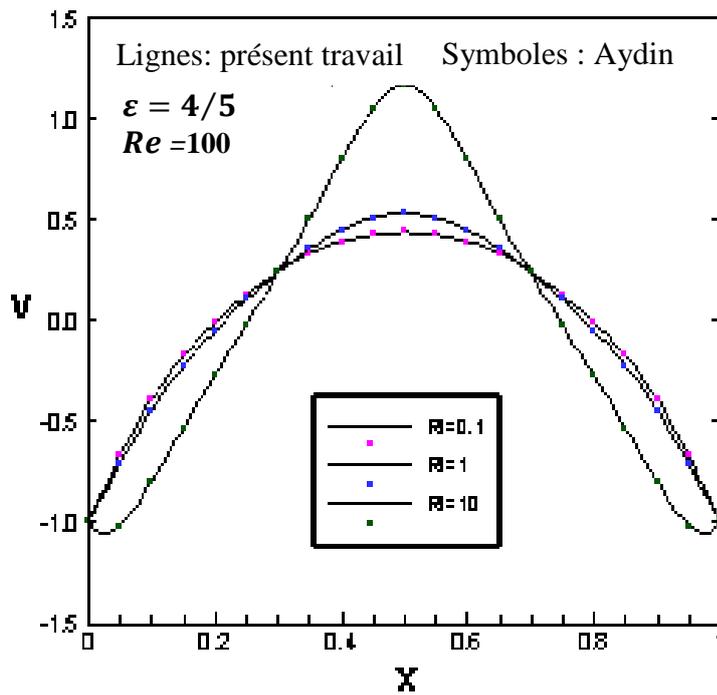
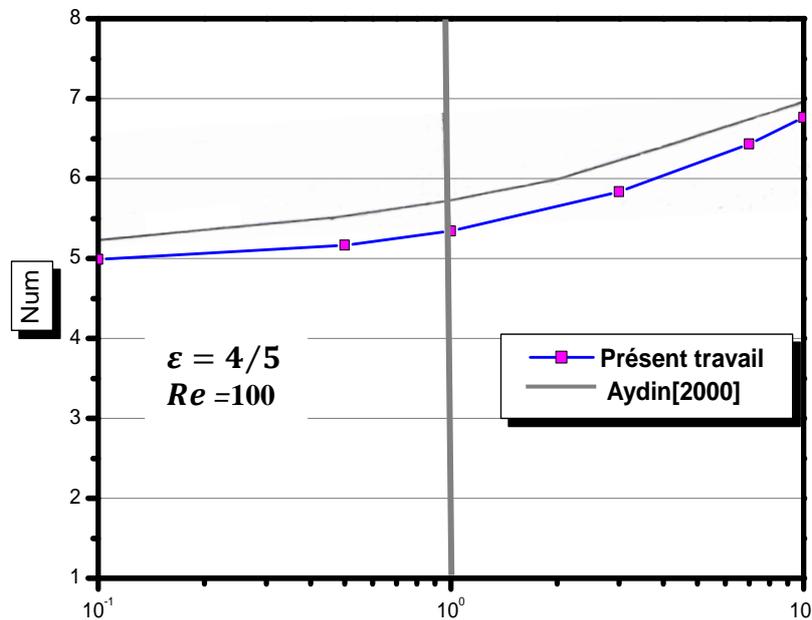


Figure (IV-2) : Comparaison des isothermes pour $Ri = 10$ et $l = \frac{4}{5}L$

a) Présent travail b) Résultat d'Aydin [2000]



Graph (IV-2) : Comparaison du profil de vitesse verticale à $Y=0.5$



Graph (IV-3) : Comparaison de la variation du Nusselt moyen en fonction de Ri .

IV.4 RESULTATS :

Les résultats des différentes simulations sont présentés sous forme de contours de température, de la fonction de courant et de l'évolution du nombre de Nusselt moyen. Ces simulations nous ont permis d'identifier cinq types d'écoulements en fonction du nombre de Richardson.

IV.4.1 Premier type d'écoulement $0.1 \leq Ri \leq 3.85$:

❖ Champs thermiques

Ces champs sont représentés dans la figure (IV-3). Nous constatons qu'une stratification thermique existe près de la partie chauffée. Le mouvement ascendant des parois latérales entraîne vers le haut les couches de fluide adjacentes aux parois par les forces visqueuses, nous remarquons aussi que la température froide règne dans toute la partie supérieure de la cavité. En fait les faibles flux de chaleur récupérés, par le fluide, de la source chaude sont directement évacués à travers la partie inférieure des parois verticales. Par conséquent, le champ de température n'est pas affecté par l'augmentation du nombre de Richardson, cela justifie la dominance des forces de cisaillement par rapport aux forces de flottabilité.

❖ Champs dynamiques

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (IV-4). La solution présente un écoulement symétrique caractérisé par une paire de zone de recirculation contrarotative identique car les conditions aux limites sont symétriques. La convection de la chaleur causée par recirculation du fluide justifie la configuration générale des isothermes.

❖ Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur le graphe (IV-4). D'une manière générale, ce nombre décroît puis augmente brusquement pendant les tous premiers instants, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

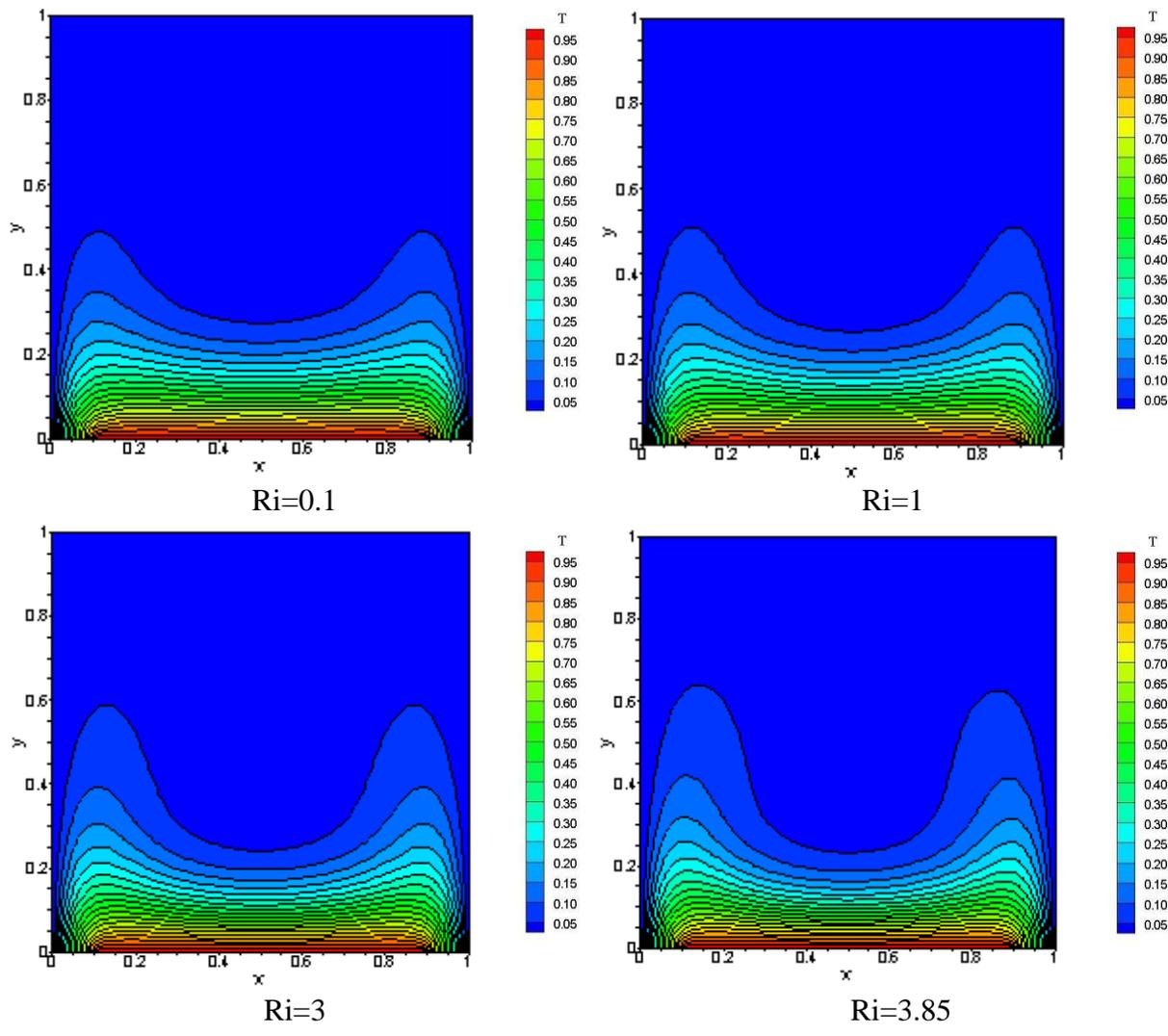
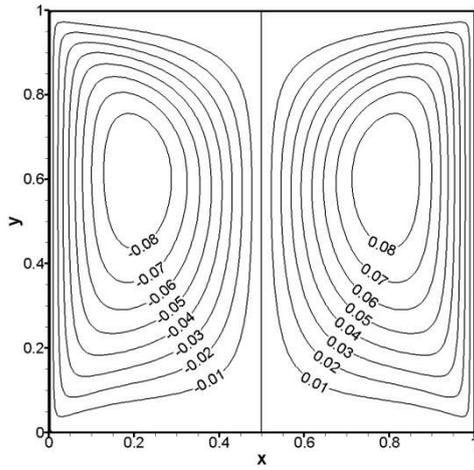
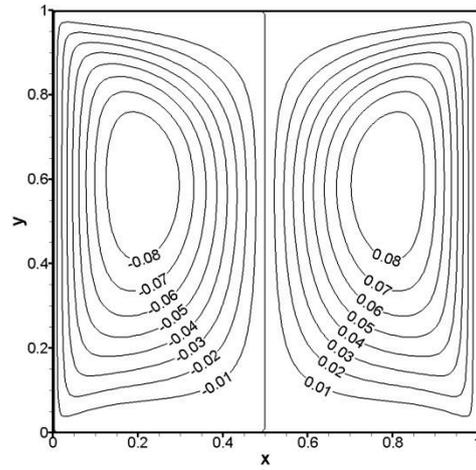


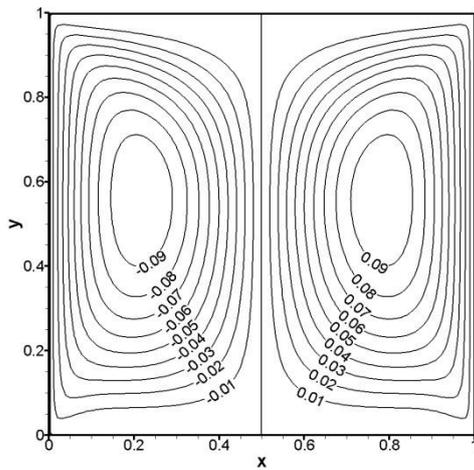
Figure (IV-3) : Champ thermique dans le cas du premier type d'écoulement.



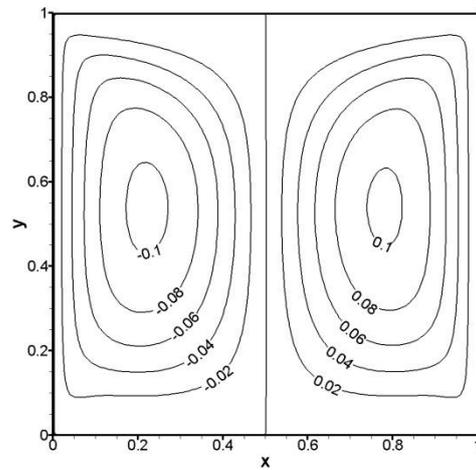
Ri=0.1



Ri=1

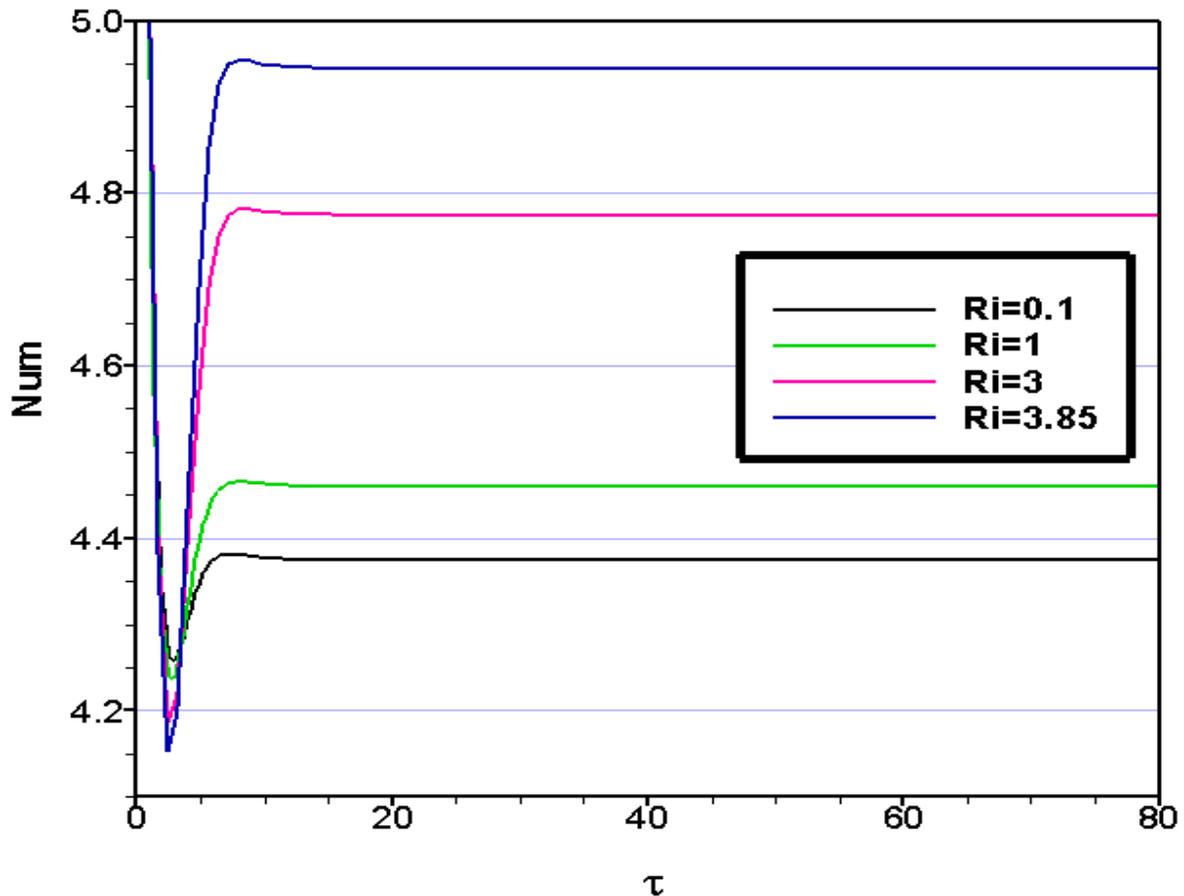


Ri=3



Ri=3.85

Figure (IV-4) : Champ dynamique dans le cas du premier type d'écoulement.



Grphe (IV-4) : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du premier type d'écoulement.

IV.4.2 Deuxième type d'écoulement $4.0 \leq Ri \leq 12.5$:

❖ Champs thermiques

Ces champs sont représentés dans la figure (IV-5), nous constatons que la répartition de la température dans la cavité est caractérisée principalement par la perte de la symétrie. Celle-ci a été rapportée précédemment par **B.DAHDI [19]**. Les températures élevées occupent environ les deux tiers de la cavité. Il est à noter que pratiquement toute la chaleur récupérée de la source chaude est évacuée soit à travers la paroi gauche, soit à travers la paroi droite, démontrant ici la perte de symétrie de l'écoulement.

❖ Champs dynamiques

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (IV-6), l'augmentation des forces de flottabilités caractérisées par l'augmentation du nombre de Richardson montre un nouveau type d'écoulement. Après une certaine durée du temps de l'apparition de deux cellules symétriques, un développement vers une stabilisation des deux autres cellules contrarotatives de différentes formes et intensités est observé :

- la première, horaire, occupant les deux tiers de la cavité et la deuxième antihoraire à droite pour les valeurs de $Ri=4$ et $Ri=12.5$.
- la première, horaire, occupant un tiers de la cavité et la deuxième antihoraire à gauche pour les nombres de Richardson compris entre 5 et 9.

❖ Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur le graphe (IV-5), cette évolution est strictement monotone, ensuite elle présente une diminution du nombre de Nusselt moyen de plus en plus importante lorsque le nombre de Richardson augmente, caractérisant ainsi le passage d'un écoulement symétrique à autre non-symétrique.

L'augmentation du nombre de Richardson a pour conséquence l'augmentation du nombre de Nusselt moyen.

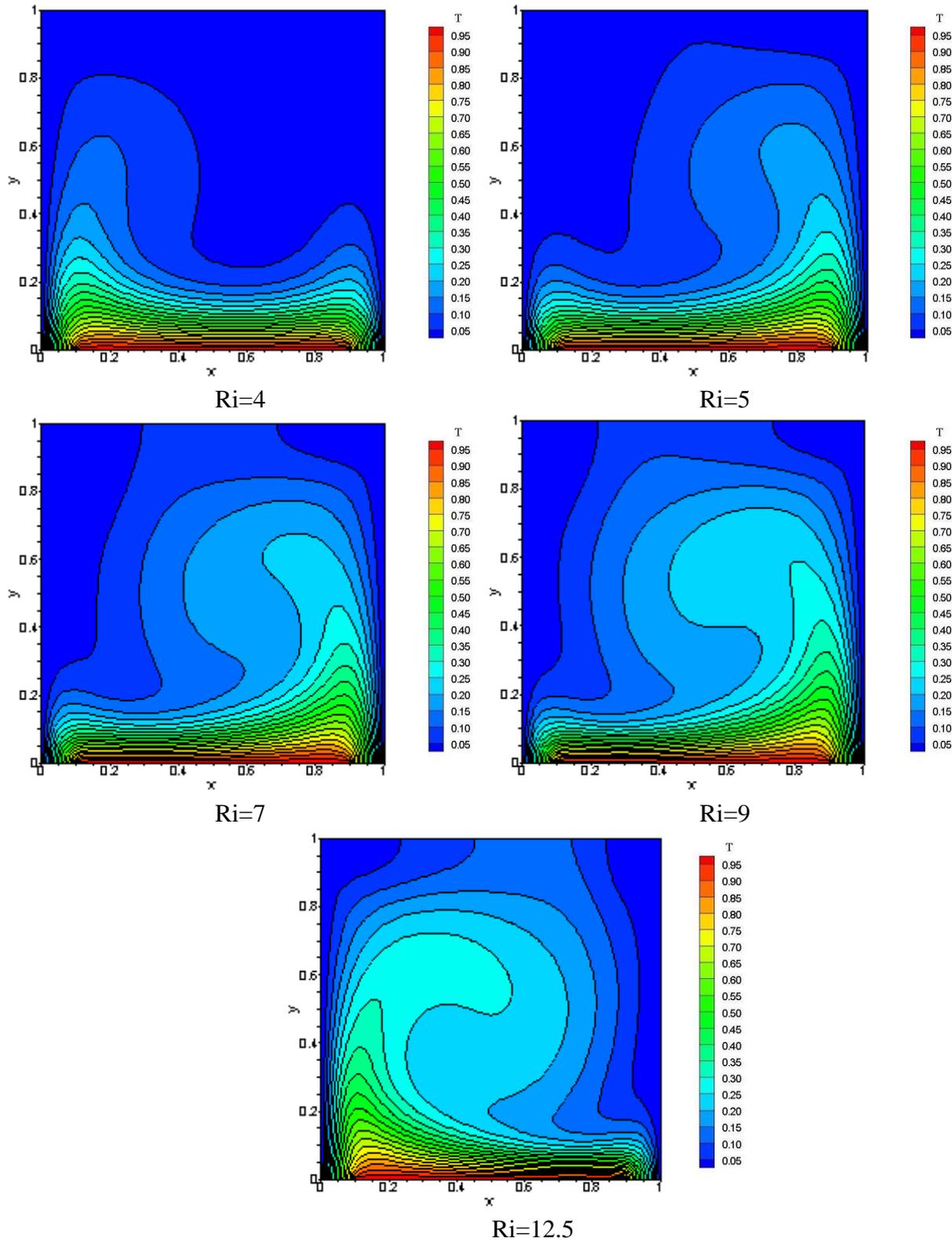
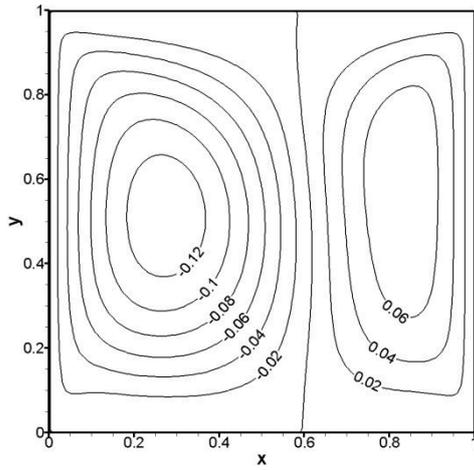
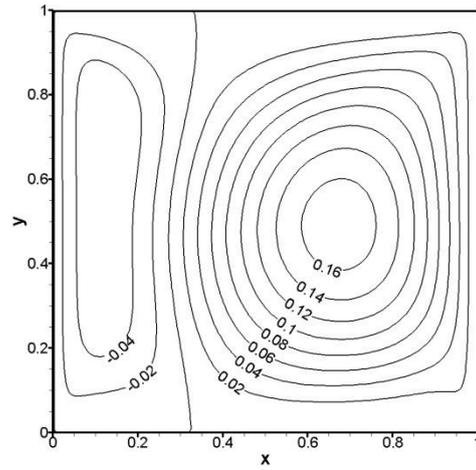


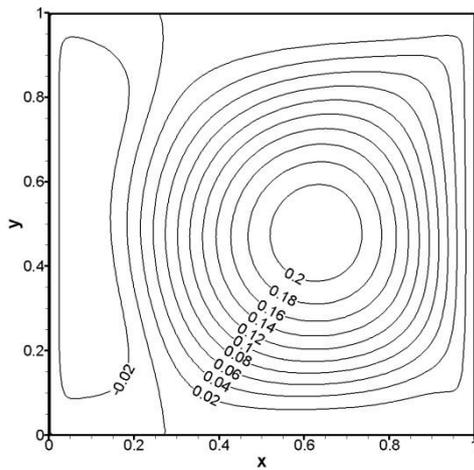
Figure (IV-5) : Champ thermique dans le cas du deuxième type d'écoulement.



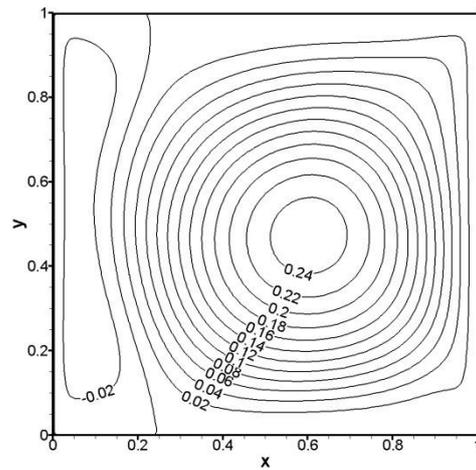
Ri=4



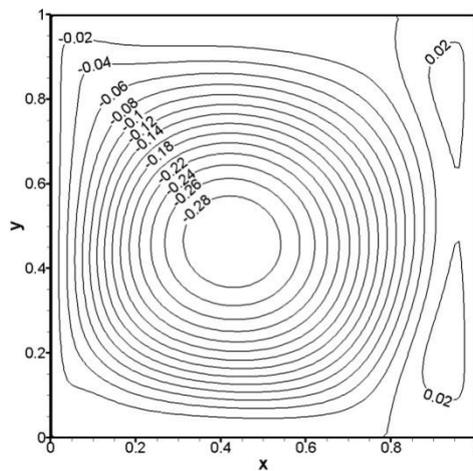
Ri=5



Ri=7

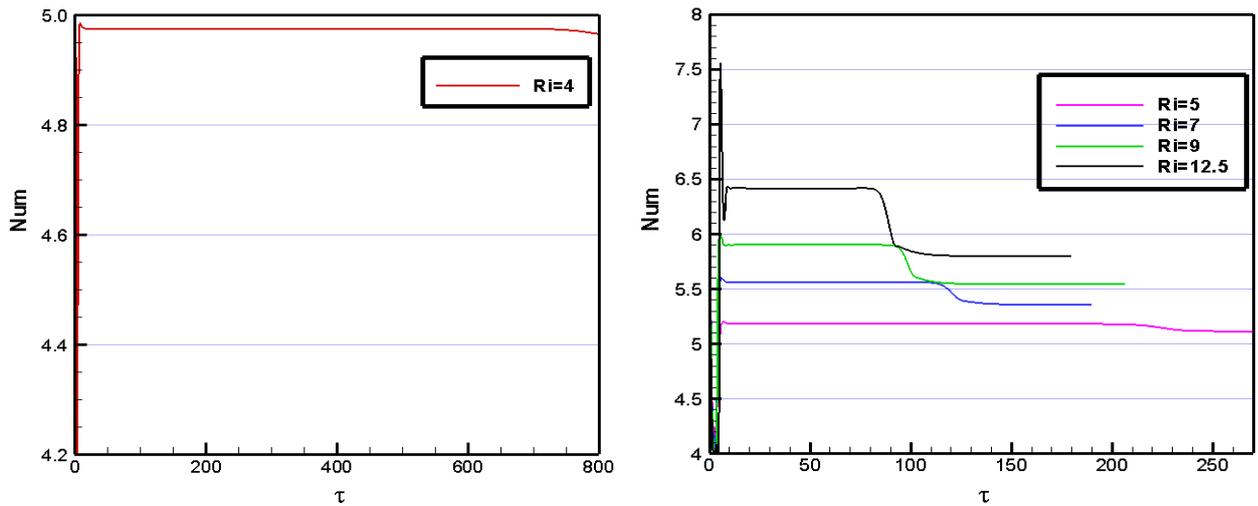


Ri=9



Ri=12.5

Figure (IV-6) : Champ dynamique dans le cas du deuxième type d'écoulement.



Graphe (IV-5) : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du deuxième type d'écoulement.

IV.4.3 Troisième type d'écoulement $12.6 \leq Ri \leq 18.1$:

❖ Champs dynamiques

Ces champs sont représentés dans la figure (IV-7), un changement vers un régime d'écoulement symétrique caractérisé par l'apparition brusque de quatre cellules est mis en évidence. Les deux cellules contrarotatives au centre de la cavité sont principalement entretenues par les forces de flottabilité et les deux cellules pincées près des parois verticales en mouvement entretenues par les forces de viscosité. Si on augmente le nombre de Richardson, les deux cellules près des parois se rétrécissent.

❖ Champs thermiques

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (IV-8), la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de l'enceinte par la paire de cellules au centre. C'est ce qui explique les températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité, la chaleur est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales.

❖ Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur le graphe (IV-6) pour différents nombres de Richardson. D'une manière générale, ce nombre passe par des oscillations dont leurs intensités sont différentes pendant les tous premiers instants, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe

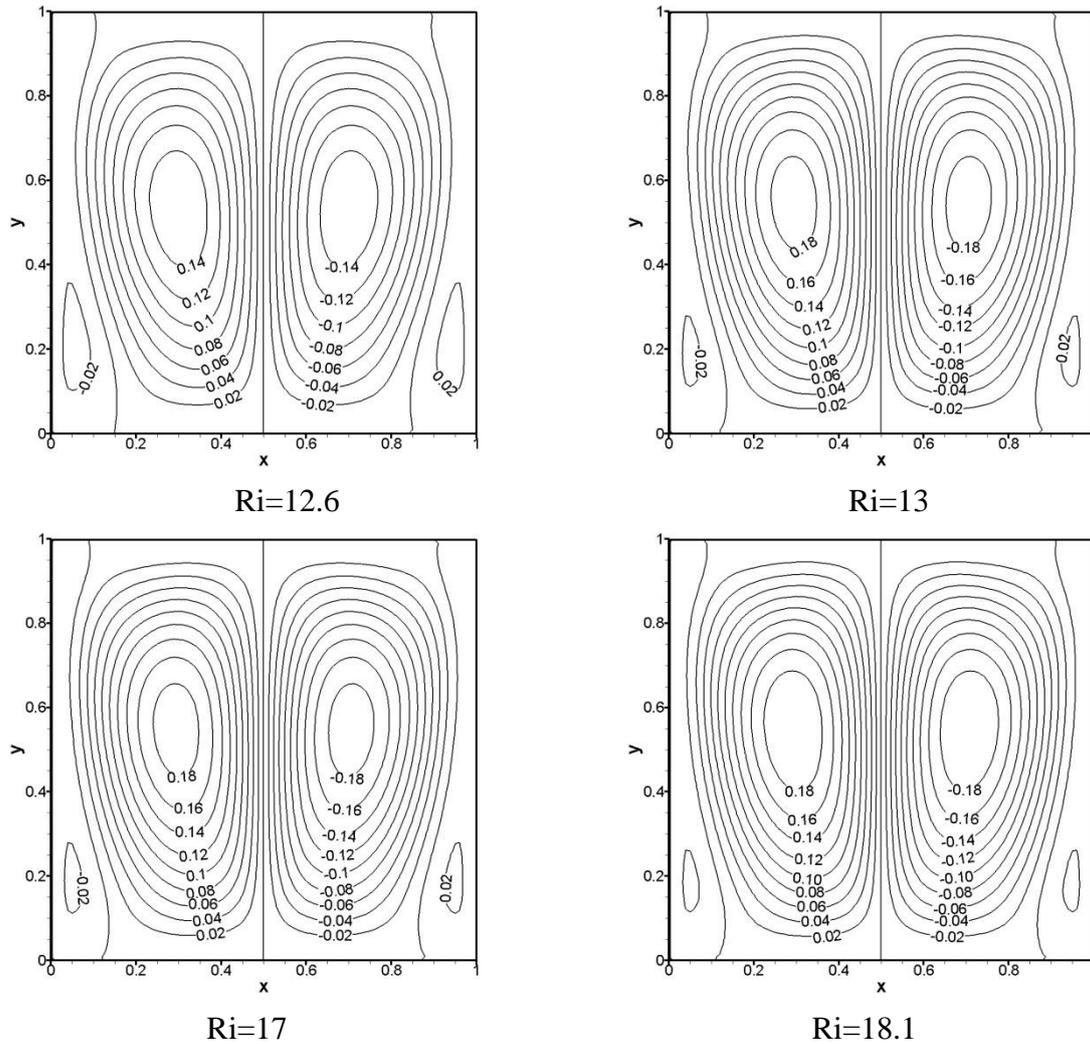


Figure (IV-7) : Champ dynamique dans le cas du troisième type d'écoulement.

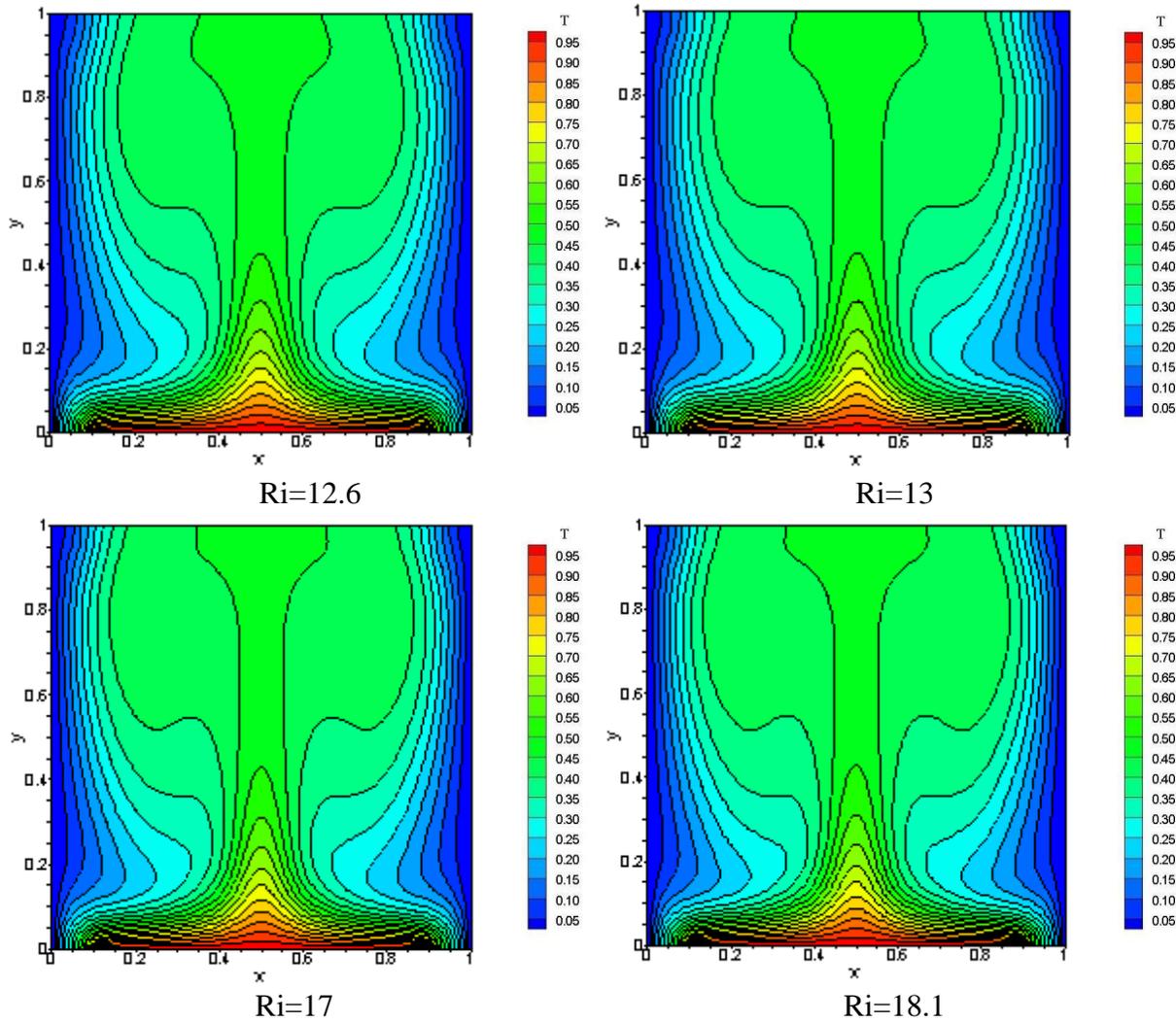
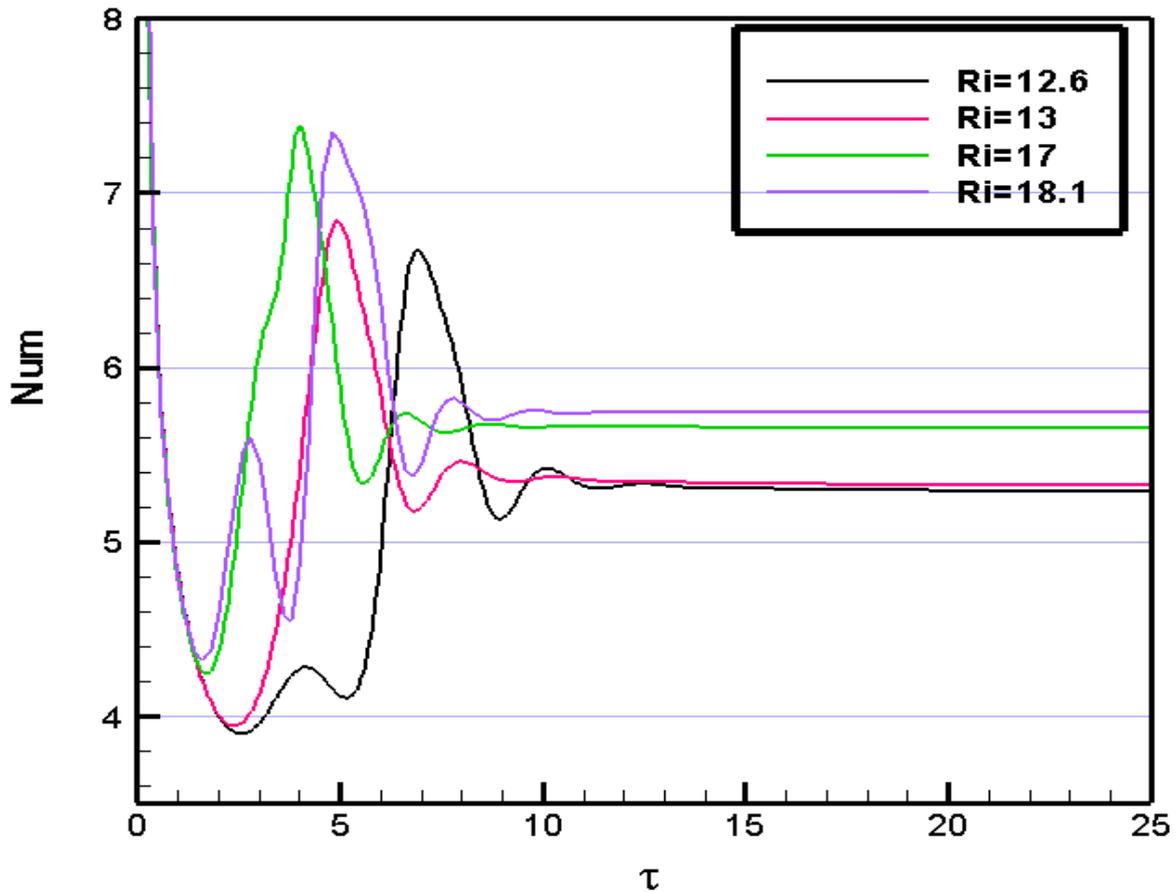


Figure (IV-8) : Champ thermique dans le cas du troisième type d'écoulement.



Grphe (IV-6) : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du troisieme type d'écoulement.

IV.4.4 Quatrième type d'écoulement $18.15 \leq Ri \leq 20.0$:

❖ Champs thermiques

Ces champs sont représentés dans la figure (IV-9). Nous constatons qu'une faible stratification thermique existe près de la partie chauffée. Le mouvement ascendant des parois latérales entraine vers le haut les couches de fluide adjacent aux parois par les forces visqueuses, mais ces couches là tendent vers un assemblage au centre de l'enceinte à cause des forces de flottabilité provoquées par la source chaude, nous remarquons aussi que l'évolution de la température froide règne dans une partie supérieure de la cavité plus petite que celle illustrée dans le premier type d'écoulement. En fait les faibles flux de chaleur récupérés, par le fluide, de la source chaude sont directement évacués à travers la partie inférieure des parois verticales. Par conséquent, le champ de température n'est pas affecté par l'augmentation du nombre de Richardson.

❖ Champs dynamiques

Ce champ est représenté pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (IV-10). La solution présente un écoulement symétrique caractérisé par une paire de zone de recirculation contrarotative identique. La convection de la chaleur causée par : recirculation du fluide justifie la configuration générale des isothermes.

L'équivalence entre les forces de flottabilité et celles de viscosité caractérisée par l'augmentation du nombre de Richardson provoque une nouvelle structure d'écoulement.

Deux cellules contrarotatives sont observées pour ces valeurs du nombre de Richardson et sont d'un ordre de grandeur de la moitié de la cavité, la première horaire à droite tandis que la deuxième antihoraire à gauche.

❖ Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur le graphe (IV-7). D'une manière générale, avant d'avoir sa diminution régulière pour se stabiliser à une valeur fixe, ce nombre passe par des oscillations dont leurs intensités sont différentes durant les tous premiers instants.

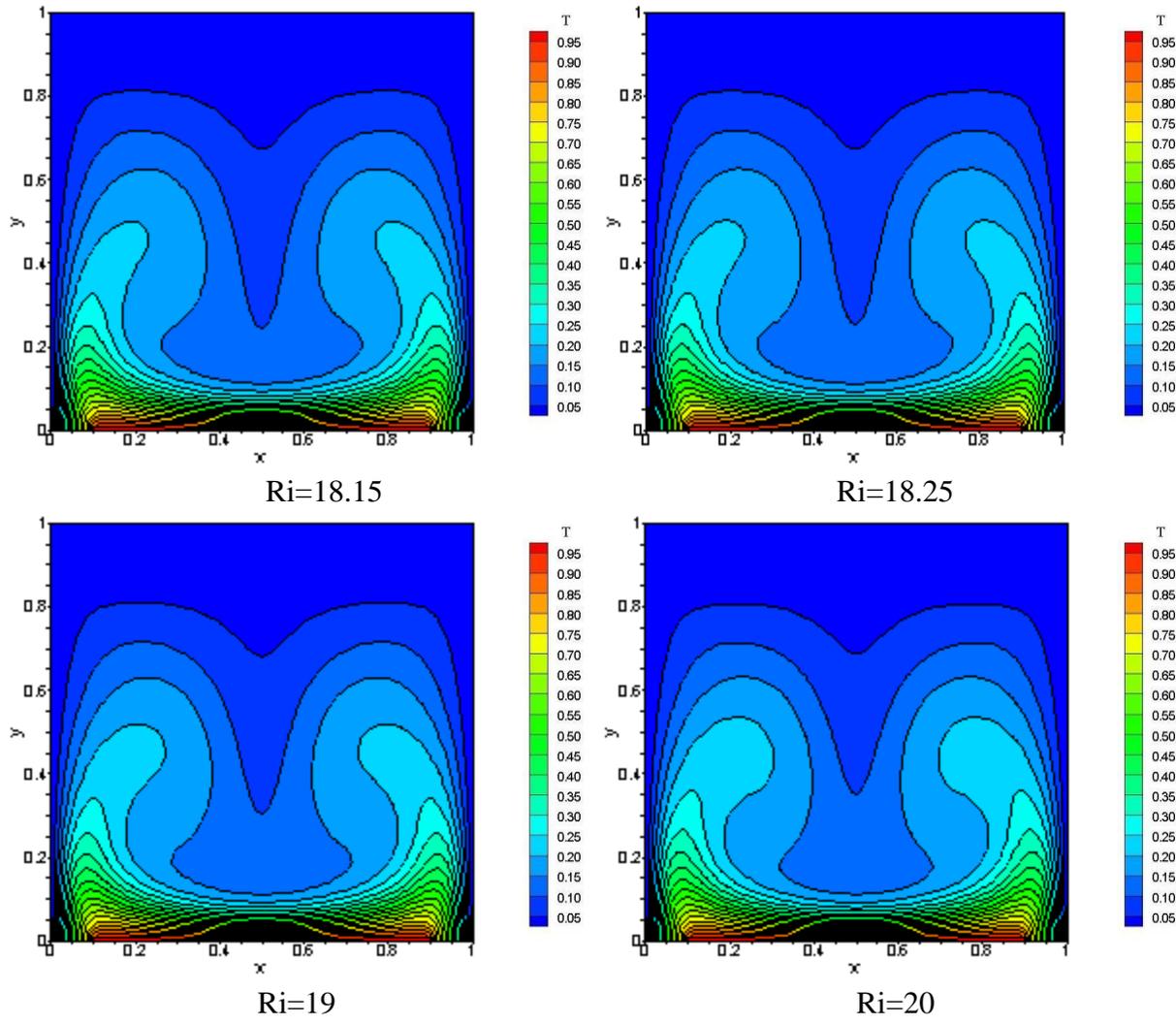
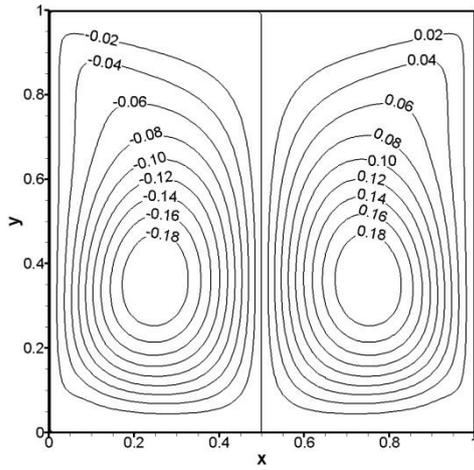
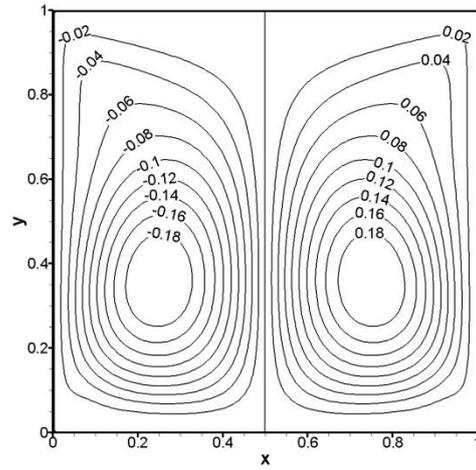


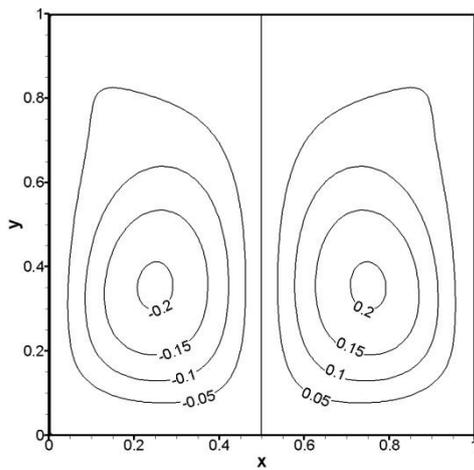
Figure (IV-9) : Champ thermique dans le cas du quatrième type d'écoulement.



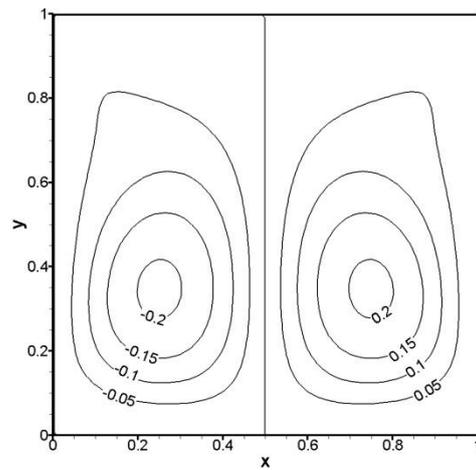
Ri=18.15



Ri=18.25

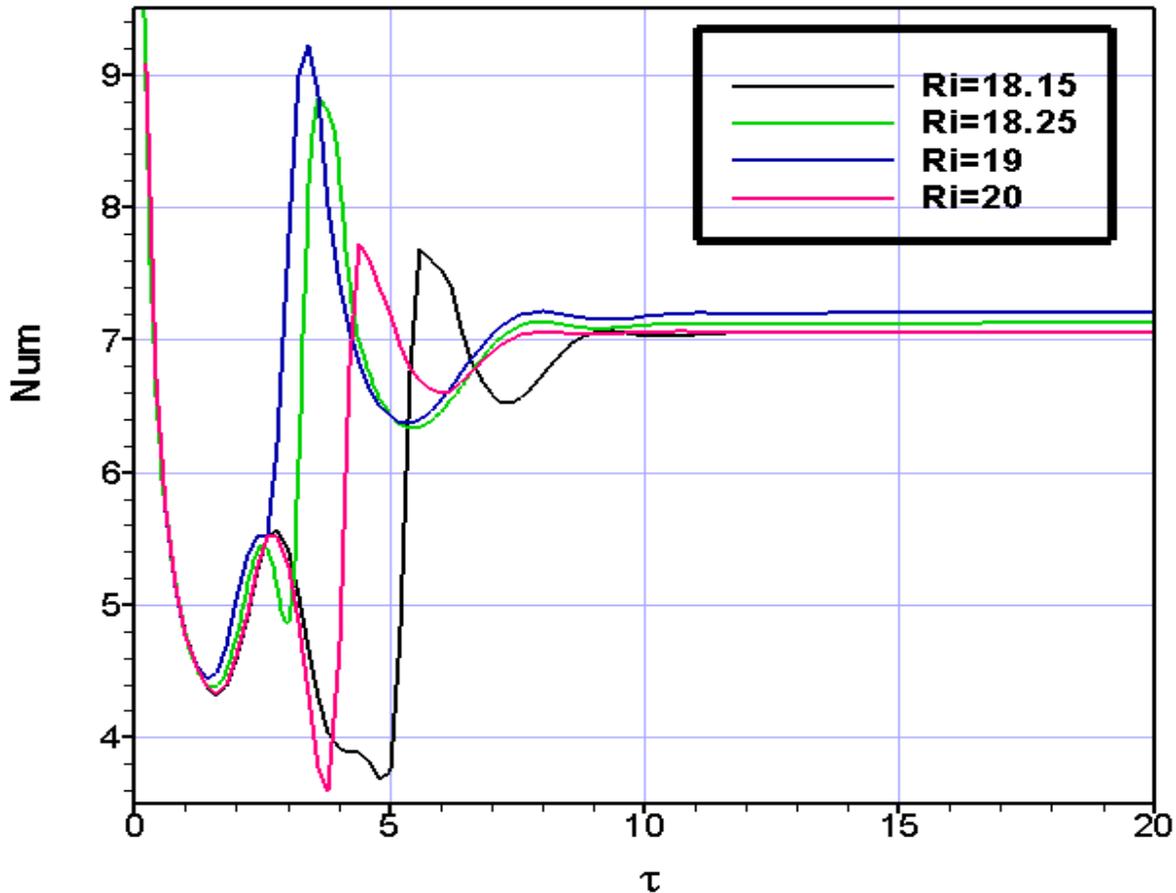


Ri=19



Ri=20

Figure (IV-10) : Champ dynamique dans le cas du quatrième type d'écoulement.



Grphe (IV-7) : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du quatrieme type d'ecoulement.

IV.4.5 Cinquieme type d'ecoulement $Ri \geq 21$:

❖ Champs dynamiques

Ces champs sont representes dans la figure (IV-12), une bifurcation vers un nouveau regime d'ecoulement symetrique caracterise par :

- Une premiere structure formee de deux cellules contrarotatives et parfaitement symetriques. Au fur et a mesure il s'apparait une deuxieme structure caracterisee par deux cellules contrarotatives mais non-symetriques afin de se stabiliser vers une autre structure definie par quatre cellules symetriques pour les nombres de Richardson dont la valeur est comprise entre 21 et 25.
- Une premiere structure caracterisee par quatre cellules non-symetriques avant l'obtention d'une deuxieme structure qui est toujours composee de quatre cellules symetriques est mise en evidence pour la valeur de Richardson comprise entre 30 et 50.

Ce qui vient a figurer dans la figure (IV-12).

❖ Champs thermiques

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (IV-13), un passage vers un nouveau régime d'écoulement symétrique caractérisé par :

- Une première structure où les couches de fluide adjacentes aux parois tendent vers un assemblage au centre de l'enceinte et la température froide règne dans la partie supérieure. Au fur et à mesure il s'apparait une deuxième structure où la répartition de la température dans la cavité est caractérisée par la perte de la symétrie qui se maintient jusqu'à l'apparition d'une troisième structure où la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de la cavité, elle est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales pour les nombres de Richardson dont la valeur est comprise entre 21 et 25.
- Dès le premier instant de l'évolution de ce régime, la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de la cavité, elle est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales. Cette structure est obtenue pour un nombre de Richardson dont la valeur est comprise entre 30 et 50.

❖ Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur le graphe (IV-9), cette évolution est strictement monotone, ensuite elle présente une diminution du nombre de Nusselt moyen de plus en plus importante lorsque le nombre de Richardson augmente, caractérisant ainsi le passage d'un écoulement symétrique à autre non-symétrique qui se maintient jusqu'à l'atteindre de sa stabilisation en revenant à un autre écoulement symétrique.

L'augmentation du nombre de Richardson a pour conséquence l'augmentation du nombre de Nusselt moyen.

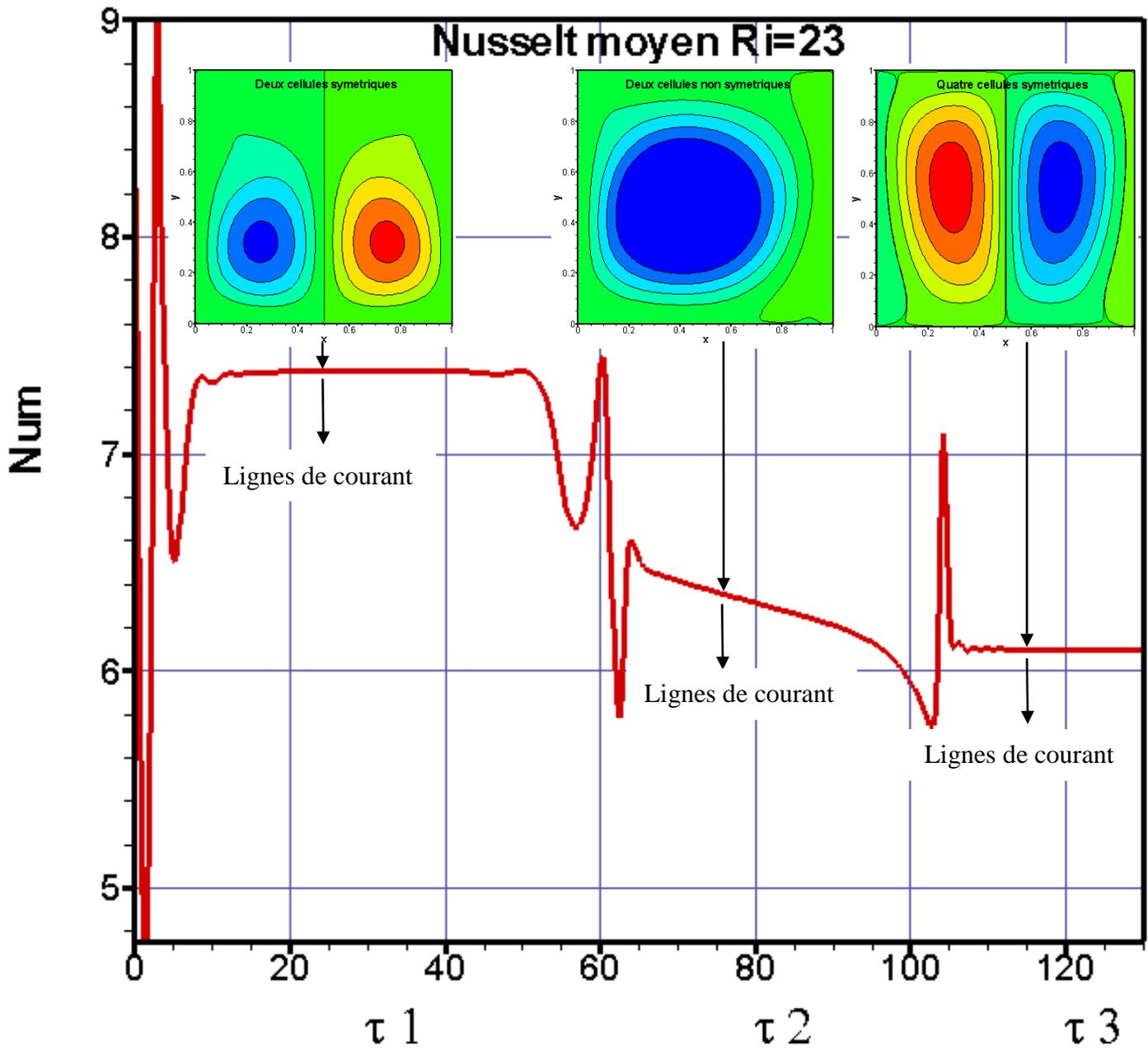
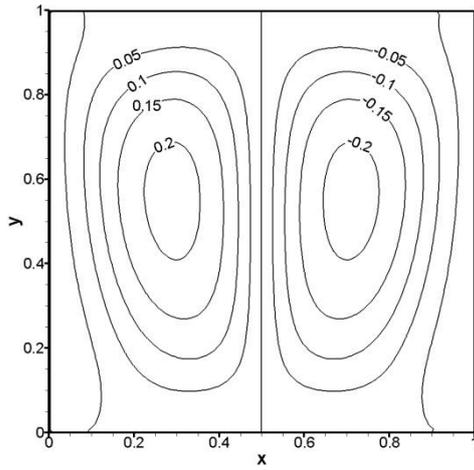
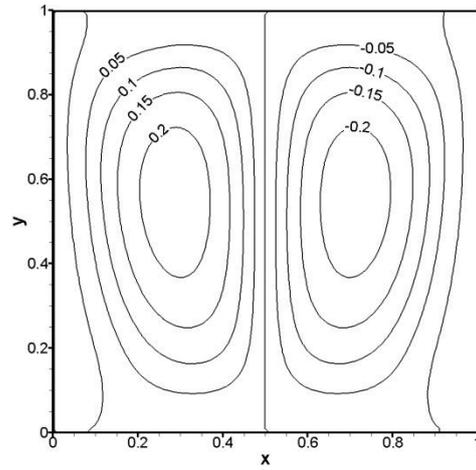


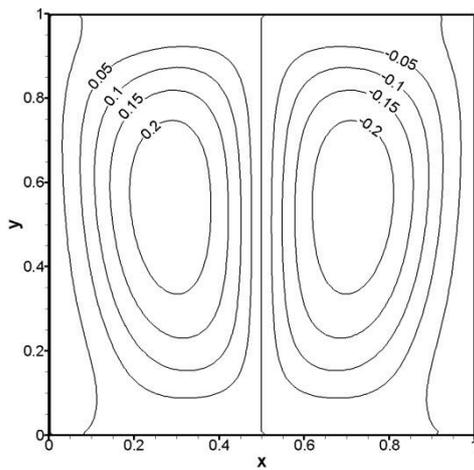
Figure (IV-11) : Le passage des différentes formes de structures de l'écoulement selon l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour la valeur de Ri correspondant à 23



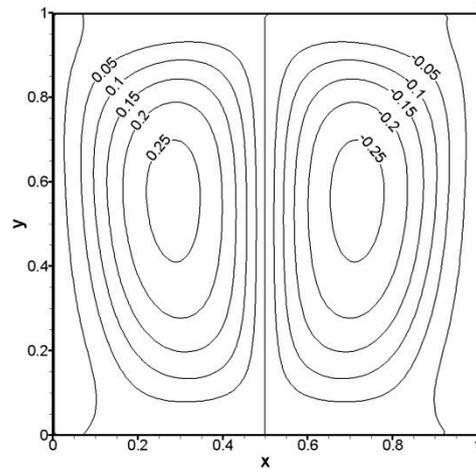
Ri=21



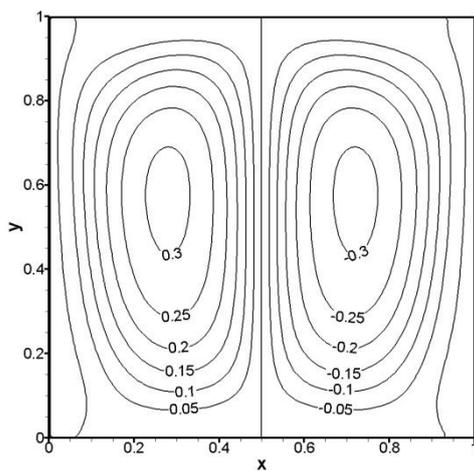
Ri=23



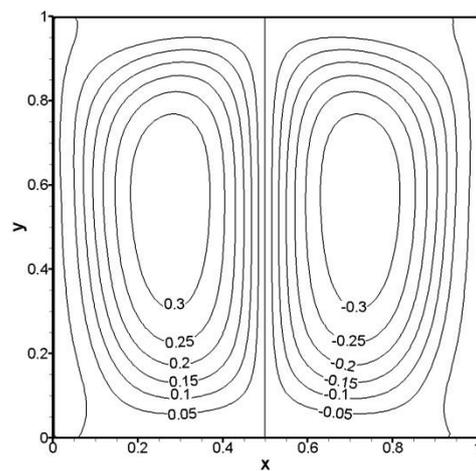
Ri=25



Ri=30



Ri=40



Ri=50

Figure (IV-12) : Champs dynamiques dans le cas du cinquième type d'écoulement.

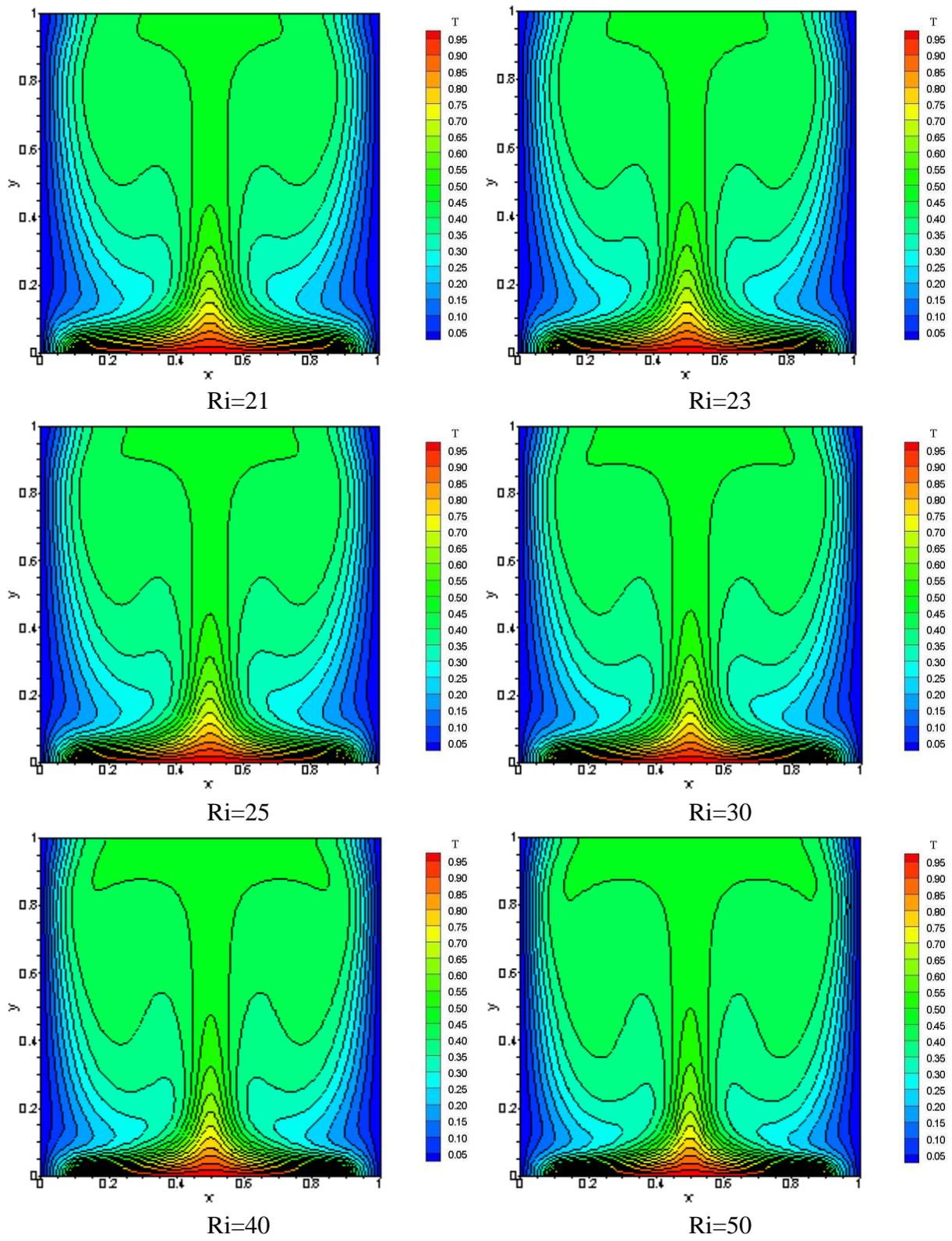
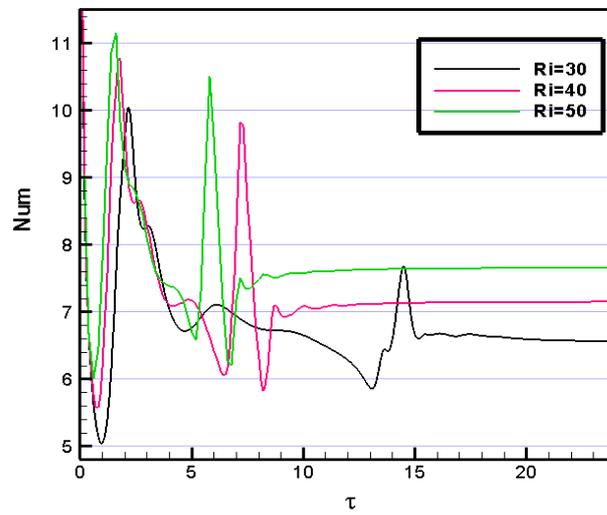
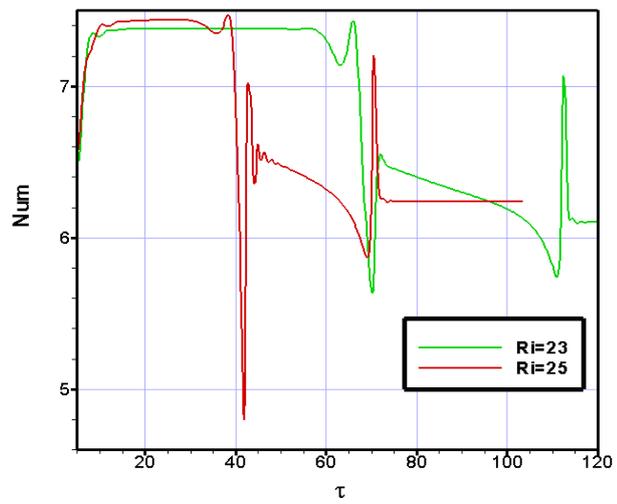
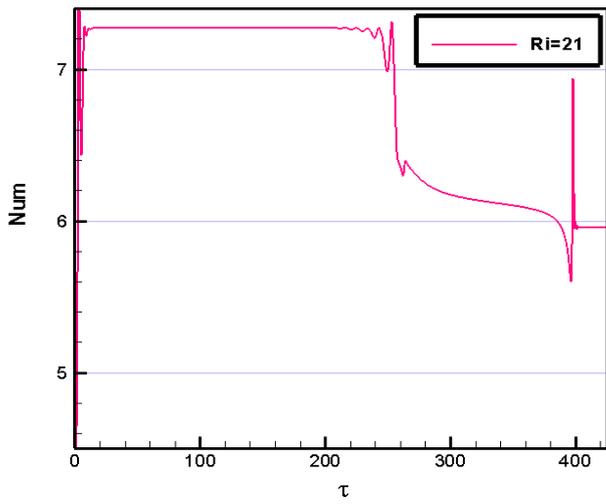
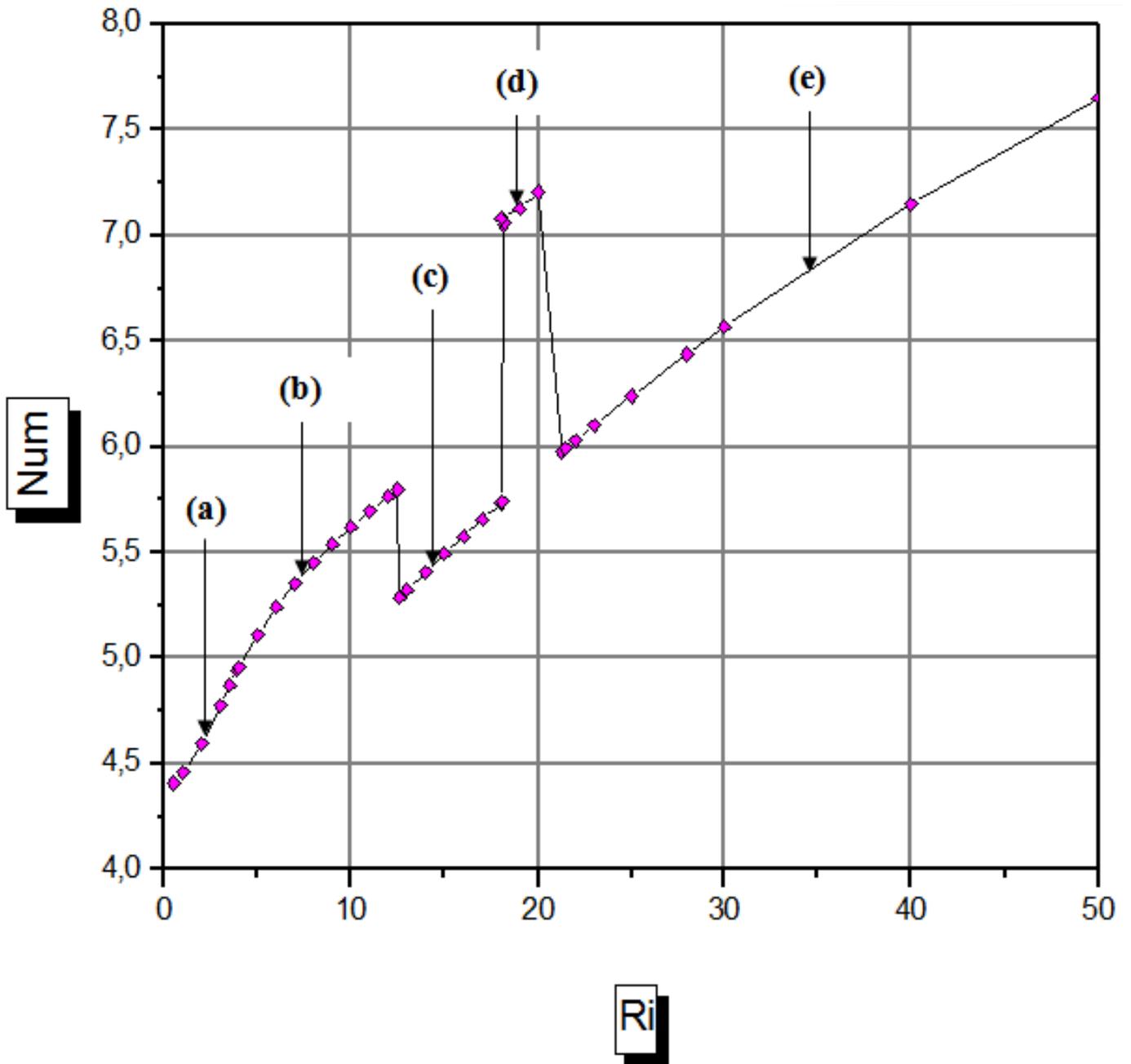


Figure (IV-13) : Champs thermiques dans le cas du cinquième type d'écoulement.

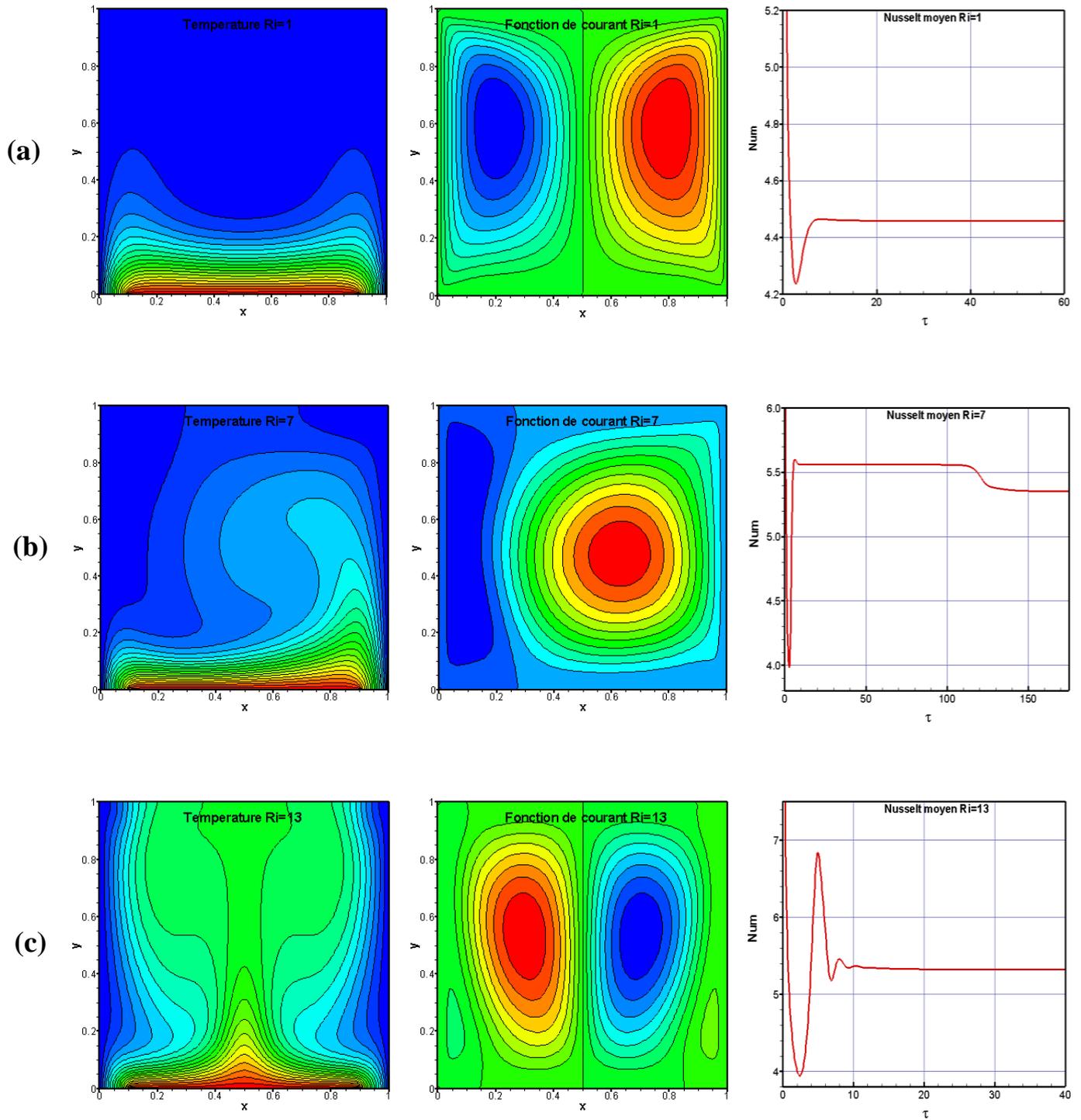


Grphe (IV-9) : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du cinquième type d'écoulement.

Les résultats obtenus montrent l'existence de cinq structures d'écoulement totalement différentes en fonction de la valeur du nombre de Richardson, sont présentés par le graphe (IV-10) où on a élaboré un exemple de chaque type d'écoulement qui schématise les champs de température, de fonction de courant, ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt moyen.



Graphe (IV-10) : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ri pour les différents cinq types d'écoulement.



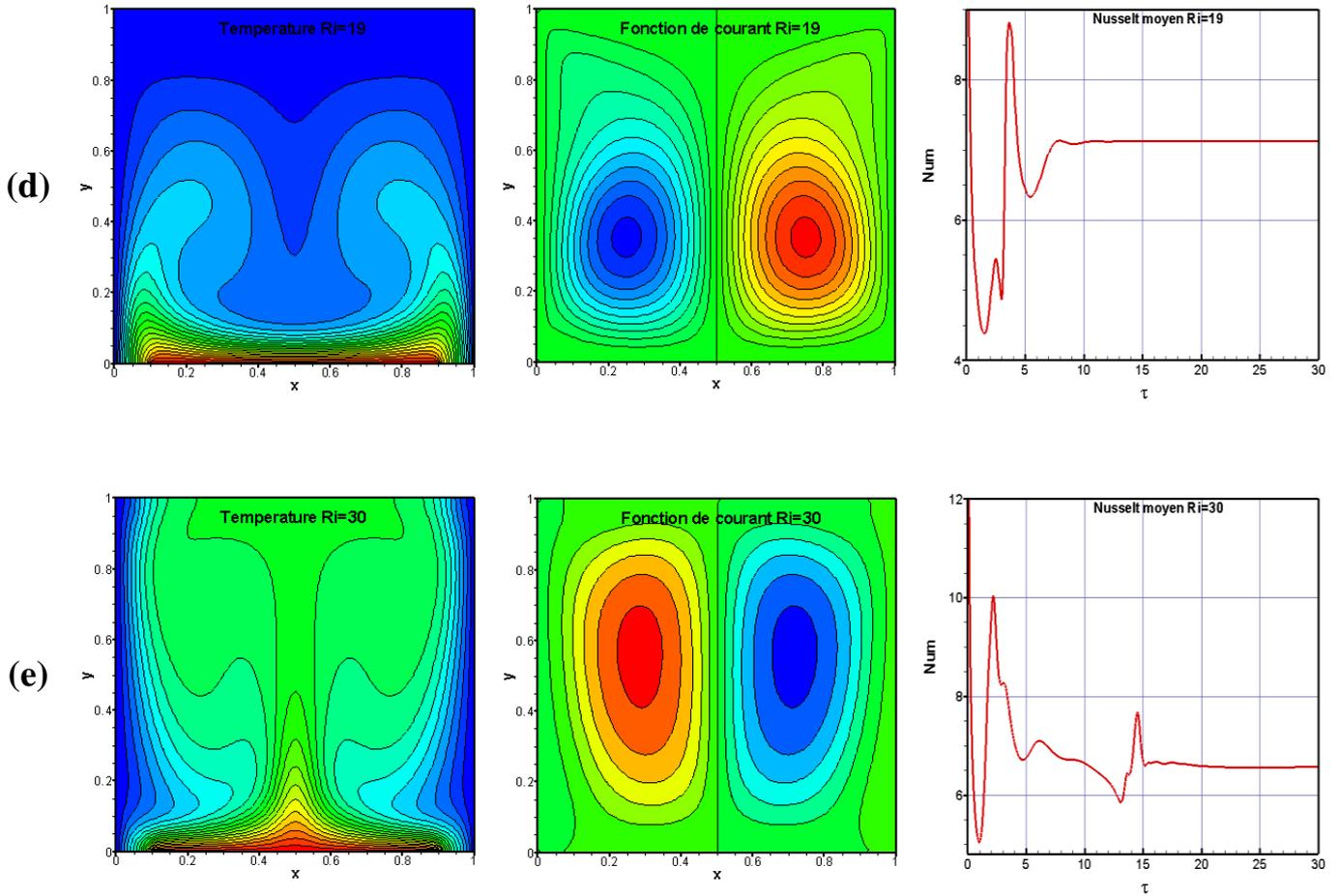


Figure (IV-12) : Contours de température, iso courants et évolution du nombre de Nusselt moyen pour différent nombres de Richardson.

On peut résumer les différentes cinq structures de l'écoulement qu'on a rencontré dans ce travail selon le tableau ci-dessous qui identifie les différents intervalles du nombre de Richardson et les agencements de l'écoulement qui leurs correspondent.

Intervalle du nombre de Richardson	Caractérisation de la structure de l'écoulement
0.1-3.85	Deux cellules symétriques
4-12.5	Deux cellules non-symétriques
12.6-18.1	Quatre cellules symétriques
18.15-20	Deux cellules symétriques
21-50	Quatre cellules symétriques

Tableau (IV-b) : Les cinq différents types d'écoulement selon les différentes intervalles du nombre de Richardson .

Conclusion générale

C ONCLUSION

GENERALE

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la convection mixte dans une cavité ayant des parois latérales mobiles. Une partie chauffée située au milieu de la base de la cavité, alors que les parois latérales sont maintenues à une température froide. Les autres parties sont considérées adiabatiques.

En se basant sur la méthode des différences finies pour discrétiser les équations écrites en considérant la formulation (ψ, ω) nous avons pu déterminer les lignes de courant, les isothermes ainsi que les variations du nombre de Nusselt en fonction du temps, pour les différents nombres de Richardson.

Les résultats préliminaires obtenus mettent en évidence l'existence de cinq structures d'écoulements totalement différentes suivant la valeur du nombre de Richardson.

Le passage de la première structure vers la deuxième se traduit par une perte de symétrie des champs dynamique et thermique. Tandis que le passage de la deuxième structure vers la troisième se produit d'une manière brusque pour une valeur bien déterminée de ce même nombre et conduit à un changement d'un régime constitué de deux cellules non symétriques à un autre constitué de quatre cellules symétriques.

Une autre évolution vers un nouveau type d'écoulement caractérisé par une symétrie de deux cellules des isothermes et des iso-courants tend vers une antisymétrie pour un nombre bien précisé de Richardson. Le dernier passage s'exprime par un changement d'une structure composée de deux cellules symétriques à une autre composée de quatre zones symétriques de circulation.

Nous estimons que ce travail constitue une modeste contribution à la maîtrise de la théorie générale et des solutions numériques du phénomène de transfert de la chaleur par convection dans des milieux confinés. Nous espérons que le même travail fera l'objet d'une étude numérique dans une cavité cubique pour voir l'influence de la troisième dimension sur la structure générale de l'écoulement.

Bibliographie

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]. **A.M. Bianchi, Y. Fautrelle, J. Etay.** «*Modes fondamentaux de transfert thermique* », Int.Transferts thermiques/Première édition, pp. 4–5, (2004).
- [2]. **R. frederik and F. Quiroz.** « *On the transition from conduction to convection in a cubical enclosure with a partially heated wall* », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44 pp. 1699–1709, (2001).
- [3]. **N. Quertatani, N.B. Cheikh, B.B. Beya, T. Lilli, A. Campo.** «*Mixed convection in a double lid-driven cubic cavity* », International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, Issue 7, pp. 1265–1272, (2009).
- [4]. **A. Baïri.** «*Transient thermal characteristics of airborne electronic equipment with discrete hot bands in square cavities* », Applied Energy, Vol. 85, pp. 951–967, (2008).
- [5]. **K. Torrance, R. Davis, K. Eike, P. Gill, D. Gutman, A. Hsui, S. Lyons, H. Zien.** «*Cavity flows driven by buoyancy and shear* », J. Fluid Mech, Vol. 51, Part 2, pp. 221–231, (1972).
- [6]. **M.K. Moallemi, K.S. Jang.** «*Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity* », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35 pp. 1881–1892, (1992).
- [7]. **T. Basak, S. Roy, P.K. Sharma, I. Pop.** «*Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side walls* », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52 pp. 2224–2242, (2009).
- [8]. **K. Kamafer, K. Vafain and M. lightstone.** « *Mixed convection heat transfer in two-dimensional open- ended enclosures* », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 5171–5190, (2002).

- [9]. **Mostapha. Najam, Mustapha. El Alami, Mohammed. Hasnaoui, Abdelkhalek. Amahmid.** «*Étude numérique de la convection mixte dans une cavité en forme de «T» soumise à un flux de chaleur constant et ventilée par le bas à l'aide d'un jet d'air vertical*», Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier, (2002).
- [10]. **Tsan. Hsu, Sheng-Gwo Wang.** «*Mixed convection of micropolar fluids in a cavity* », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 1563–1572, (2000).
- [11]. **Hakan F. Oztop, I. Dagtekin.** «*Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity*», International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 47, pp. 1761–1769, (2004).
- [12]. **S.K. Mahapatra, Anjan Sarkar.** «*Numerical simulation of opposing mixed convection in differentially heated square enclosure with partition*», International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, Issue 10, pp. 1761–1769, (2007).
- [13]. **O. Aydin; Wen-Jei Yang.** «*Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls*», Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 695–710, (2000).
- [14]. **Abdalla M. Al-Amiri a, Khalil M. Khanafer, Ioan Pop.** «*Numerical simulation of unsteady mixed convection in a driven cavity using an externally excited sliding lid*», European Journal of Mechanics – B/Fluids, Vol. 26, 669–687. (2007).
- [15]. **M.A.R. Sharif.** «*Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom* », Applied Thermal Engineering, Vol. 27, pp. 1036 – 1042, (2007).
- [16]. **T. S. Cheng, W.H. Liu.** «*Effect of Temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity* », Computers and Fluids, Vol. 39, 965–978, (2010).
- [17]. **G. Guo, Muhammad.A.R. Sharif.** «*Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottem wall*», International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, Issue 10, pp. 465–475, (2004).

[18]. **P. Kandaswamy, J. Lee and M. Muthtamilselvan.** «Heat transfer of copper water nanofluids in a lid-driven enclosure», Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 15 pp. 1501 – 1510, (2009).

[19]. **B. Dahdi.** « Développement d'un programme de calcul de l'écoulement avec transfert de chaleur dans une cavité avec des parois mobiles», Mémoire de magister, Département de Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine, (2009).

[20]. **E. Saadjan.** «Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques», Polytechnica, ISBN 2-84054-057-6, (1998).

[21]. **Dale.A.Anderson, John.C.Tannehill et Richard.H.Pletcher.** «Computational fluid mechanics and heat transfer», Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Hemisphere Publishing Corporation. USA, (1984).

[22]. **J. P. Lamoitier.** « Exercices de programmation en fortran IV», BORDAS, Paris, pp. 82, (1977).

[23]. **T. Kawamura, H. Takami et K. Kuwahara.** « New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations», Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol. 218, pp. 291–295, (1985).

[24]. **T.J. Chung.** « Computational fluid dynamics», The Edinberg Building Cambridge, CPU, (2002).

Annexe

A. DISCRETISATION DU TERME CONVECTIF ET DIFFUSIF:

I.1 DISCRETISATION DU TERME CONVECTIF $\left(U \frac{\partial \phi}{\partial X}, V \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)$:

Pour discrétiser les termes convectifs figurants dans le système d'équations à résoudre, on a choisi un schéma Upwind du 3^{ème} ordre de Kawamura.

Schémas Upwind du 3^{ème} ordre de Kawamura :

Considérant le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante ϕ négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, ce schéma est représenté comme suit :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i^{3\text{ème ordre}} = U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_c^{4\text{ème ordre}} + \frac{1}{2} |U| \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{ar}}^{2\text{nd ordre}} - \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{av}}^{2\text{nd ordre}} \right\} \quad [23] \quad (\text{III-1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{ar}}^{2\text{nd ordre}} = \frac{1}{2\Delta x} (\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 3\phi_{i,j})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{av}}^{2\text{nd ordre}} = \frac{1}{2\Delta x} (-3\phi_{i,j} + 4\phi_{i-1,j} - \phi_{i+2,j})$$

Différence centrale :

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} \quad (\text{a})$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} \quad (\text{b})$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} \quad (\text{c})$$

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - 2\Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} \quad (\text{d})$$

Pour arriver à l'expression donnant la différence centrale, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ a pour but d'éliminer la dérivée quatrième (ϕ^{IV}), le second est l'élimination de la dérivée troisième (ϕ^{III}) et la dernière étape pour éliminer la dérivée première (ϕ^I):

Multipliant (b) par (-16) et faire la sommation entre l'équation obtenue et (a), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x \phi^I + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \phi^{II} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \phi^{III} \\ -16\phi_{i+1,j} = -16\phi_{i,j} - 16\Delta x \phi^I - 8(\Delta x)^2 \phi^{II} - \frac{8}{3} \phi^{III} \end{array} \right.$$

$\phi_{i+2,j} - 16\phi_{i+1,j} = -15\phi_{i,j} - 14\Delta x \phi^I - 6(\Delta x)^2 \phi^{II} - \frac{8}{3} \phi^{III}$

-----(I)

De la même façon pour (a) et (c) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x \phi^I + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \phi^{II} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \phi^{III} \\ -16\phi_{i-1,j} = -16\phi_{i,j} + 16\Delta x \phi^I - 8(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{8}{3} \phi^{III} \end{array} \right.$$

$\phi_{i+2,j} - 16\phi_{i-1,j} = -15\phi_{i,j} - 18\Delta x \phi^I - 6(\Delta x)^2 \phi^{II} + \frac{12}{3} \phi^{III}$

-----(II)

Pour (a) et (d) on multiplie (d) par (-1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x \phi^I + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \phi^{II} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \phi^{III} \\ -\phi_{i-2,j} = -\phi_{i,j} + 2\Delta x \phi^I - 2(\Delta x)^2 \phi^{II} + \frac{4}{3} \phi^{III} \end{array} \right.$$

$\phi_{i+2,j} - \phi_{i-2,j} = 4\Delta x \phi^I + \frac{4}{3} \phi^{III}$

-----(III)

Afin d'obtenir les trois équations mentionner (I), (II) et (III) par la suite, éliminant la dérivée troisième (ϕ''') :

Multipliant (I) par (+3), on aura :

$$\begin{cases} 3\phi_{i+2,j} - 48\phi_{i+1,j} = -45\phi_{i,j} - 42\Delta x\phi' - 18(\Delta x)^2\phi'' \\ + \phi_{i+2,j} - 16\phi_{i-1,j} = -15\phi_{i,j} - 18\Delta x\phi' - 6(\Delta x)^2\phi'' \end{cases}$$

$$\boxed{\phi_{i+2,j} - 12\phi_{i+1,j} - 4\phi_{i-1,j} = -15\phi_{i,j} - 6\Delta x\phi' - 6(\Delta x)^2\phi''} \quad \text{-----(A)}$$

De la même façon pour (I) et (III), en multipliant (I) par (+2) :

$$\begin{cases} 2\phi_{i+2,j} - 32\phi_{i+1,j} = -30\phi_{i,j} - 28\Delta x\phi' - 12(\Delta x)^2\phi'' \\ + \phi_{i+2,j} - \phi_{i-2,j} = 4\Delta x\phi' - 6(\Delta x)^2\phi'' \end{cases}$$

$$\boxed{3\phi_{i+2,j} - 32\phi_{i+1,j} - \phi_{i-2,j} = -30\phi_{i,j} - 24\Delta x\phi' - 12(\Delta x)^2\phi''} \quad \text{-----(B)}$$

Finalement l'élimination de la dérivée seconde rend la différence centrale comme ceci :

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_c = \frac{1}{12\Delta x} (-\phi_{i+2,j} + 8\phi_{i+1,j} - 8\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j})} \quad \text{(III-2)}$$

Différence arrière :

De la même façon analogue, en multipliant (a) par (-4) et faire la sommation

$$\begin{cases} \phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x\phi' + \frac{(\Delta x)^2}{2}\phi'' \\ + \phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x\phi' + 4\frac{(\Delta x)^2}{2}\phi'' \end{cases}$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{ar}^{2nd \text{ ordre}} = \frac{1}{2\Delta x} (\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 3\phi_{i,j})} \quad \text{(III-3)}$$

Différence avant :

De même

$$\begin{cases} \phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x\phi' + \frac{(\Delta x)^2}{2}\phi'' \\ + \phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + 2\Delta x\phi' + 4\frac{(\Delta x)^2}{2}\phi'' \end{cases}$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{av}^{2nd \text{ ordre}} = \frac{1}{2\Delta x} (-3\phi_{i,j} + 4\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j})} \quad \text{(III-4)}$$

$i-2, i-1, i, i+1, i+2$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12\Delta x} U(-\phi_{i+2,j} + 8\phi_{i+1,j} - 8\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}) \\ + \frac{1}{2} |U| \frac{1}{2\Delta x} [(\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 3\phi_{i,j}) - (-3\phi_{i,j} + 4\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j})] \end{array} \right.$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i = \frac{1}{12\Delta x} \left\{ \begin{array}{l} U(-\phi_{i+2,j} + 8\phi_{i+1,j} - 8\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}) \\ + 3|U| (\phi_{i-2,j} - 4\phi_{i-1,j} + 6\phi_{i,j} - 4\phi_{i+1,j} + \phi_{i+2,j}) \end{array} \right. \quad (\text{III-5})$$

Nœuds près des parois :

Pour les nœuds près des parois on va établir un schéma de Kawamura du premier ordre comme suit :

$i-1, i$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$i, i+1$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i=2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\Delta x} U(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \\ + \frac{1}{2} |U| \left[\frac{1}{\Delta x} (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) - (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \right] \end{array} \right.$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i=2} = \frac{1}{2\Delta x} U[(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + |U|(-\phi_{i-1,j} + 2\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})]$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i=nxt-1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\Delta x} U(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \\ + \frac{1}{2} |U| \left[\frac{1}{\Delta x} (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) - (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \right] \end{array} \right.$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i=nxt-1} = \frac{1}{2\Delta x} [U(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + |U|(-\phi_{i-1,j} + 2\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})]$$

I.2 DISCRETISATION DU TERME DIFFUSIF $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)$:

Nœuds internes:

L'élimination de la dérivée première rend le terme diffusif, en multipliant (A) par (-4).

$$\begin{cases} \phi_{i+2,j} - 12\phi_{i+1,j} - 4\phi_{i-1,j} = -15\phi_{i,j} - 6\Delta x\phi^I - 6(\Delta x)^2\phi^{II} \\ + \\ 3\phi_{i+2,j} - 32\phi_{i+1,j} - \phi_{i-2,j} = -30\phi_{i,j} - 24\Delta x\phi^I - 12(\Delta x)^2\phi^{II} \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_i = \frac{1}{12(\Delta x)^2} (-\phi_{i+2,j} + 16\phi_{i+1,j} - 30\phi_{i,j} + 16\phi_{i-1,j} - \phi_{i-2,j})$$

Nœuds près des parois :

Pour les nœuds près des parois on va établir un schéma de Kawamura du deuxième ordre comme suit :

$$\begin{cases} \phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x\phi^I + \frac{(\Delta x)^2}{2}\phi^{II} \\ + \\ \phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x\phi^I + \frac{(\Delta x)^2}{2}\phi^{II} \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|^{i=2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|^{i=nxt-1} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j})$$

B. DISCRETISATION DU TERME SOURCE:

De façon analogue que précédemment pour discrétiser la dérivée première, la dernière étape a pour but d'éliminer la dérivée seconde. Il en découle l'expression suivante pour la dérivée première.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x} (-\theta_{i+2,j} + 8\theta_{i+1,j} - 8\theta_{i-1,j} + \theta_{i-2,j}) \quad (\text{III-8})$$

ملخص

موضوع عملنا الحالي يدور حول دراسة عددية لظاهرة الحمل الحراري الرقائقي المزدوج داخل فجوة مربعة الشكل.

الجدران الجانبيان لهذه الفجوة خاضعان لدرجة برودة محددة- ينزلقان بسرعة ثابتة نحو الأعلى . في منتصف قاعدتها توضع مصدر حراري يمثل مركب الكتروني ذو طول يساوي أربعة أخماس من طول الفجوة- في حين بقية الأجزاء الأخرى تعتويعازلة. معادلات انحفاظ الكتلة-كمية الحركة- و الطاقة المميزة لظاهرة الحمل الحراري الرقائقي المزدوج تم تحويلها إلى نموذج

رياضي يرتكز على العبارة « $\omega - \psi$ ».

حل هذه المعادلات يتطلب الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية و الحدودية لكل متغير. التقريب العددي الذي اختير لحل هذا النموذج كان طريقة الفروق المنتهية- حيث قمنا بإعداد برنامج حاسوب مكننا من الحصول على طريقة توزيع الحرارة داخل الفجوة تم بتثبيت عدد رينولدز عند القيمة (100) و إعطاء قيم مختلفة لعدد ريشاردسون.

تأثير عدد ريشاردسون و الجزء الساخن على الحقلين الحراري و الديناميكي و كذا على عامل التحول الحراري كان محل دراستنا هذه.

لقد تمكنا من اكتشاف عدة أنماط لسريان المائع حسب قيم محددة لعدد ريشاردسون داخل الفجوة.

الكلمات المفتاحية

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري الرقائقي المزدوج- طريقة الفروق المنتهية- نموذج كوامارا

ABSTRACT

In this work we study numerically the laminar mixed convection in a square cavity; the side walls submitted to uniform heat moving with a constant velocity. In the middle of the bottom wall is placed a heat source with relative height l equal four fifth to the same of the cavity L modeless an electronic corposant. The other walls are assumed adiabatic.

The equations are those expressing the conservation of mass, momentum and energy governing this phenomenon were transformed into mathematical model is based on the formulation stream function ψ - vorticity ω .

The numerical approach was chosen for the resolution of this model is the finite difference method. The discretisation of time terms has been adopted by Runge–Kutta method of 4th order. The diffusive and source terms are calculated by a central difference scheme of the 4th order, while the convective terms are discretised using a 3rd order Upwind scheme of Kawamura.

The influence of the Richardson number into the thermal and dynamic fields and the heat transfer coefficient has been examined. The obtained results show in evidence for a fixed Richardson number a lot of structures differences of the fluid flow in the interior of the enclosure.

Key words

Key words : *Mixed convection, Finite difference method, Critical Richardson.*

RÉSUMÉ

L'objet de ce présent travail consiste en l'étude numérique de la convection mixte laminaire dans une cavité carrée. Les deux parois latérales de cette cavité, soumises à une température froide fixée, se déplacent avec une vitesse constante. Au milieu de la paroi inférieure est disposée une source de chaleur de longueur l égale au quatre cinquième de celle de la cavité L modélisant un composant électronique. Toutes les autres parties de la cavité sont supposées adiabatiques.

Les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant le phénomène de la convection mixte laminaire sont transformées en un modèle mathématique basé sur la formulation fonction du courant ψ - vorticité ω . La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable indépendante.

La méthode numérique des différences finies a été utilisée dans ce travail. Le système d'équations régissant notre problème est discr t s  en approchant les dérivées partielles par des différences finies. La discrétisation des équations du modèle mathématique utilise la méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 4. Les termes diffusifs ainsi que les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie, vitesses) sont discr t s s en utilisant le schéma centré du 4eme ordre, alors que les termes convectifs sont discr t s s à l'aide du schéma Upwind du 3eme ordre de Kawamura.

L'influence du nombre de Richardson sur les champs dynamique et thermique ainsi que le coefficient de transfert de chaleur a été examinée. Nous avons pu mettre en évidence, suivant la valeur du nombre de Richardson, plusieurs structures différentes de l'écoulement du fluide dans la cavité.

Mots clés

Mots clés : Convection mixte, Méthode des différences finies, Schéma de Kawamura.