

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Physique théorique

Option : Physique quantique

Par

DJAZI Moussadek

THEME

Etude de quelques systèmes quantiques avec masse dépendante  
de la position par l'approche supersymétrique

Soutenu le :...../...../2012

**Devant le Jury :**

Président :	L. Guechi	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Rapporteur :	F. Benamira	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Examineurs :	S. R. Zouzou	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
	B. Bentag	M. C. A	Univ. Mentouri- Constantine

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 La supersymétrie en mécanique quantique</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Méthode de factorisation et oscillateur harmonique . . . . .	7
1.3 Définition de la SUSYQM . . . . .	11
1.3.1 Définition : . . . . .	11
1.3.2 SUSYQM dans le cas $N = 2$ . . . . .	12
1.4 Brisure de la SUSY dans la SUSYQM . . . . .	13
1.4.1 Définitions : . . . . .	13
1.5 Formalisme général . . . . .	13
1.5.1 Construction des Hamiltoniens partenaires . . . . .	13
1.5.2 Illustration sur les opérateurs $Q$ et $Q^+$ : . . . . .	15
1.6 Relation entre les Hamiltoniens $H_1$ et $H_2$ . . . . .	16
1.7 Les potentiels partenaires et le superpotentiel . . . . .	18
1.8 Propriétés générales du superpotentiel pour une bonne SUSY . . . . .	21
1.9 Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires . . . . .	22
1.10 Invariance de forme . . . . .	25
1.10.1 Définition : . . . . .	26
1.11 Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires . . . . .	27
<b>2 Approche supersymétrique pour les systèmes quantiques avec masse dépendante de l'espace</b>	<b>31</b>

2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Equation stationnaire non relativiste pour une particule dont la masse est dépendante de sa position. . . . .	32
2.3	Résolution par l'approche de la supersymétrie . . . . .	35
2.3.1	Approche de supersymétrie généralisée . . . . .	35
2.3.2	Méthode de la transformation de la fonction propre . . . . .	37
2.3.3	Approche de la transformation ponctuelle . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Etude du spectre non relativiste pour une particule de masse dépendante de la position, placée dans le potentiel d'un oscillateur harmonique non linéaire</b>	<b>42</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Expression du potentiel effectif . . . . .	46
3.3	Expressions du superpotentiel et des opérateurs d'annihilation et de création . . . . .	47
3.4	Expressions des potentiels partenaires et de l'énergie de l'état fondamental . . . . .	48
3.5	Expressions des énergies des états excités . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Etude du spectre non relativiste pour une particule de masse dépendante de la position, placée dans un potentiel de Hulthén</b>	<b>52</b>
4.1	Potentiel effectif pour une distribution de la masse du type $M(x) = (1 - e^{-\lambda x})^{-p}$	52
4.2	Potentiel physique du type Hulthén . . . . .	54
4.2.1	Expression du potentiel effectif . . . . .	54
4.2.2	Condition pour que la paticule ne chute pas au centre du potentiel . . . . .	56
4.2.3	Superpotentiel et fonction propre de l'état fondamental . . . . .	57
4.2.4	Invariance de forme et spectre d'énergies . . . . .	60
4.2.5	Illustration par quelques cas spéciaux . . . . .	62
	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

# Introduction

L'homme a toujours voulu comprendre les phénomènes qui l'entourent et, par conséquent, connaître les lois suivant lesquelles ces phénomènes se manifestent. En employant toutes ses connaissances, et pour ce faire, il utilisa différentes méthodes et approches et proposa donc plusieurs modèles, en essayant toujours d'expliquer, de la façon la plus correcte et la plus élégante, les résultats et les faits expérimentaux qui sont à sa disposition.

Dès le début du siècle dernier, les sciences physiques ont connu un développement notable, surtout avec l'établissement de la théorie relativiste, par Albert Einstein, et la théorie quantique, par le célèbre Niels Bohr, complétées plus tard par les travaux de plusieurs savants, qu'on ne peut pas les citer tous dans ces quelques lignes.

Dès son apparition en 1922, la théorie quantique a été la cause de plusieurs débats entre les physiciens, surtout à cause de son aspect probabiliste. Cependant, l'excellent accord entre les résultats théoriques et expérimentaux a fini par convaincre tout le monde de la puissance de cette nouvelle théorie à expliquer les phénomènes qui se passent à l'échelle atomique et nucléaire.

La combinaison de la théorie quantique avec la théorie relativiste a donné naissance à la théorie quantique relativiste qui fut plus tard la pierre sur laquelle se fonda la théorie quantique des champs.

Parallèlement au développement des sciences physiques sur le plan expérimental, l'outil mathématique, nécessaire pour le développement théorique de cette nouvelle branche de la physique, connaîtra aussi une progression éclatante. En effet, durant les 70 dernières années, le domaine d'étude des systèmes quantiques a été de plus en plus enrichi par de nouvelles méthodes et approches mathématiques, analytiques et algébriques, à travers les travaux d'une centaine

de physiciens.

La supersymétrie, (abrégé en SUSY), est l'une des puissantes méthodes algébriques qui a largement contribué dans l'étude des systèmes quantiques et qui a conduit les physiciens à établir un nouveau domaine qui est connu maintenant par le nom de la mécanique quantique super symétrique (abrégé en SUSYQM).

La SUSY a été utilisée pour la première fois dans la théorie des champs dans les années soixante-dix par plusieurs auteurs [1, 2, 3, 4], dans le but d'obtenir une description unifiée des interactions fondamentales de la nature. Et c'est dans le contexte de vouloir comprendre la raison de brisure de la super symétrie dans cette théorie que les études sur la SUSY ont commencé à se développer.

Bien qu'il n'y a aucune évidence expérimentale de la SUSY, qui peut être réalisée dans la nature, ses idées ont contribué à la naissance de plusieurs nouvelles approches dans différentes branches de la physique; physique atomique, moléculaire, nucléaire, statistique, physique de solide et bien sur la mécanique quantique.

Dès le début des recherches sur la SUSY, il a été clair qu'elle n'était pas seulement un modèle pour tester les méthodes de la théorie des champs, mais aussi un outil intéressant et puissant par ses propres idées. Pour la première, les idées de la SUSY ont été appliquées en mécanique quantique non relativiste (SUSYQM) par Nicolai en 1976 [5], et ensuite par Witten [6], qui ont montré le lien avec la méthode de factorisation, proposée pour la première fois par Schrödinger [7] pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène. Ces travaux ont été généralisés par la suite par Infeld et Hull [8] qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles en considérant six formes différentes de factorisation. Un développement considérable a été donné à ces travaux par plusieurs auteurs [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19], et notamment après l'introduction du concept d'invariance de forme en 1983 par Gendenshtein [20]. Ce concept est à l'origine de la découverte d'une large classe de potentiels analytiquement (algébriquement) solubles.

Cette nouvelle approche est devenue très célèbre par sa simplicité à obtenir le spectre des potentiels supersymétriques algébriquement et avec un moindre coût. Elle est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problèmes avec potentiels non hermitiens, et aussi aux problèmes relativiste et non relativiste avec masse variable. C'est justement dans ce dernier cré-

neau que notre travail se situe, où nous allons présenter deux contributions originales concernant l'étude de deux problèmes physiques non relativistes avec masse dépendante de la position.

Le mémoire est structuré en quatre chapitres en plus d'une introduction et de la conclusion. Dans le chapitre 1, nous présentons un aperçu assez général sur l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique. Nous insistons sur les propriétés requises pour un potentiel pour qu'il puisse être traité par cette approche et nous donnons les expressions générales des énergies propres et fonctions propres normalisées dans un contexte général.

Le chapitre 2 est réservé à un complément sur l'équation de Schrödinger pour une particule avec masse dépendante de la position. Partons d'une représentation générale de la partie cinétique, nous discutons différentes manières pour ramener l'équation de Schrödinger à une forme adéquate, traitable par l'approche de la supersymétrie. Les travaux originaux de ce mémoire sont présentés dans les chapitres 3 et 4, où nous discutons en détail deux problèmes. Le problème étudié dans le chapitre 3 concerne l'oscillateur non linéaire, représenté par une particule de masse dépendante de la position, placée dans un potentiel physique harmonique non linéaire. Nous donnons l'expression exacte qui génère les énergies des états liés, en suivant l'approche de la supersymétrie généralisée. Le chapitre 4 est consacré à l'étude du spectre d'une particule de masse dépendante de la position, placée dans un potentiel de Hulthén. Nous montrons en détails comment l'équation de Schrödinger peut être ramenée à une équation du même type avec potentiel dépendant de l'énergie. Nous présentons ainsi une technique de résolution dans le cadre de l'approche supersymétrique et nous obtenons un résultat général exact pour les énergies des états liés. Nous discutons quelques cas particuliers en guise d'illustration.

# Chapitre 1

## La supersymétrie en mécanique quantique

### 1.1 Introduction

D'une manière générale, la symétrie joue depuis longtemps un rôle important en physique théorique. Il y'a plusieurs genres de symétries dans la nature ; certains sont statiques et d'autres sont dynamiques, parfois elles sont visibles et d'autres sont parfois cachées.

Mathématiquement, l'étude des symétries entre dans le cadre de la théorie des groupes où la symétrie d'un système physique peut être vue comme un invariant sous l'action d'un groupe. Non seulement elle joue un rôle important dans l'étude des systèmes classiques, mais aussi elle nous aide à mieux comprendre les phénomènes en mécanique quantiques.

La supersymétrie SUSY est une symétrie supposée de la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la SUSY, chaque fermion de spin demi entier est associé à un « superpartenaire » de spin entier, alors que chaque boson est associé à un « superpartenaire » de spin demi-entier. Elle a été introduite dans la physique des hautes énergies dans le but d'obtenir une description unifiée de toutes les interactions fondamentales de la nature. C'est une symétrie extraordinaire puisque les fermions et les bosons ont des propriétés différentes.

L'algèbre qui évolue dans la SUSY est une algèbre de Lie fermée sur un ensemble de relations

de commutation et d'anti-commutation. Dans le contexte de la physique des particules, la SUSY prédit l'existence d'un superpartenaire à chaque particule fondamentale, avec un spin qui diffère de celui de la particule par le nombre  $1/2$ . Elle prédit aussi que les deux superpartenaires doivent avoir la même masse dans le cas où la SUSY est une bonne symétrie de la nature, ça veut dire : non brisée. Malheureusement il n'y a aucun fait expérimental qui assure l'existence de cette supersymétrie, ce qui conduit à croire que la SUSY, dans le monde physique, est spontanément brisée. Dans l'attente d'une vérification expérimentale, un grand point d'interrogation restera lié à la question sur la raison de la brisure de la SUSY dans la théorie quantique des champs.

La première application de la SUSY dans le domaine de la mécanique quantique (non relativiste) fut introduite par Nicolai en 1976 [5], dans sa tentative de construire le modèle de spin dans la physique statistique. C'est dans le même domaine que Witten [6] suggéra en 1981 qu'il fallait, avant, comprendre la raison de la brisure de la SUSY dans le cadre de la mécanique quantique. Il proposa donc une nouvelle formulation de la supersymétrie en mécanique quantique (SUSYQM), basée sur une superalgèbre simple et présenta un modèle dans lequel il tenta d'expliquer la raison de la brisure de la SUSY.

## 1.2 Méthode de factorisation et oscillateur harmonique

La méthode de factorisation a été introduite par Schrödinger pour résoudre l'équation qui porte son nom pour certains potentiels physiques. La méthode consiste en gros à écrire l'Hamiltonien  $H$  du système sous forme d'un produit de deux opérateurs  $A$  et  $B$ , qui sont à priori adjoint l'un de l'autre. Pour une bonne illustration, nous allons considérer dans cette section l'application de cette méthode au problème de l'oscillateur harmonique à une dimension, qui demeure par excellence aussi bien un modèle pédagogique et physique de part son application dans différents domaines de la physique et de la chimie quantiques.

À une dimension, la détermination du spectre et des fonctions d'onde du problème stationnaire d'une particule placée dans un potentiel quadratique, appelé oscillateur harmonique, revient à la résolution de l'équation de Schrödinger suivante :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi = E\psi. \quad (1.1)$$



Les solutions d'une telle équation sont bien connues et peuvent être obtenues analytiquement. Elle sont données par

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1.2)$$

et

$$\psi_n(\tilde{x}) = N_n \exp(-\tilde{x}^2) H_n(\tilde{x}), \quad (1.3)$$

où  $N_n$  est une constante de normalisation et  $H_n(\tilde{x})$  désigne le polynôme d'Hermite de degré  $n$ ,

$$H_n(\tilde{x}) = (-1)^n \exp(\tilde{x}^2) \frac{d^n}{d\tilde{x}^n} \exp(-\tilde{x}^2) \quad (1.4)$$

avec

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x. \quad (1.5)$$

Dans ce qui suit, on va voir comment obtenir ces solutions en utilisant la méthode de factorisation basée sur les opérateurs de création et d'annihilation, qui mène à un traitement purement algébrique, simple et économique.

Considérons pour cela l'Hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = H - \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (1.6)$$

tel que  $H$  est l'Hamiltonien défini dans (1.1). Il est clair que les fonctions propres de  $\hat{H}$  sont les mêmes que celles de  $H$  et les valeurs propres diffèrent par le facteur additif  $-\frac{\hbar\omega}{2}$ . Par conséquent, l'énergie de l'état fondamental de  $\hat{H}$  est nulle. Ce résultat n'est pas trivial car, comme on va le voir dans les sections qui viennent, il est lié directement au concept de brisure de la SUSY.

Définissons maintenant les opérateurs d'annihilation et de création  $a$  et  $a^+$  comme suit :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx}, \quad (1.7)$$

et

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}, \quad (1.8)$$

qui vérifient la relation de commutation

$$[a, a^+] = I, \quad (1.9)$$

où  $I$  est l'opérateur unité.

On peut vérifier sans difficulté que  $\hat{H}$  se factorise en fonction des opérateurs de création et d'annihilation sous la forme

$$\hat{H} = \hbar\omega a^+ a. \quad (1.10)$$

Ainsi,  $\hat{H}$  forme une algèbre fermée avec  $a$  et  $a^+$ , tels que

$$[\hat{H}, a^+] = \hbar\omega a^+, \quad [\hat{H}, a] = -\hbar\omega a. \quad (1.11)$$

En admettant que  $\psi$  est une fonction propre de  $\hat{H}$ , avec la valeur  $\hat{E}$ , et en utilisant (1.11), on trouvera

$$\hat{H}(a^+\psi) = (\hat{E} + \hbar\omega)a^+\psi, \quad (1.12)$$

et

$$\hat{H}(a\psi) = (\hat{E} - \hbar\omega)a\psi. \quad (1.13)$$

Donc, on voit bien que  $a^+\psi$  et  $a\psi$  sont aussi des fonctions propres de  $\hat{H}$  avec les valeurs propres respectives  $(\hat{E} + \hbar\omega)$  et  $(\hat{E} - \hbar\omega)$ . Ceci montre bien comment  $a^+$  augmente les valeurs propres de  $\hat{H}$  de  $\hbar\omega$  et  $a$  les fait diminuer de  $\hbar\omega$ .

Sachant que le spectre de  $\hat{H}$  a une limite inférieure ( $\hat{E}_0 = 0$ ), le processus d'annihilation doit forcément s'arrêter à l'état  $\psi_0(x)$ , ce qui donne, par conséquent

$$a\psi_0(x) = 0, \quad (1.14)$$

où  $\psi_0(x)$  est la fonction propre associée à l'état fondamental.

En combinant les résultats (1.8) et (1.14), on peut trouver facilement l'expression de la fonction d'onde de l'état fondamental de  $\hat{H}$  sous la forme

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right), \quad (1.15)$$

qui est en parfait accord avec (1.3).

Essayons maintenant de trouver la fonction propre correspondant au premier état excité. Pour cela, on a, d'un coté, l'équation (1.12) nous donne

$$\hat{H} [a^+ \psi_0(x)] = \hbar\omega [a^+ \psi_0(x)], \quad (1.16)$$

et d'un autre coté, et en utilisant l'équation aux valeurs propres de  $\hat{H}$  qui correspond au premier état excité, on obtient

$$\hat{H}\psi_1(x) = \hbar\omega\psi_1(x). \quad (1.17)$$

En comparant (1.16) et (1.17), on peut écrire

$$\psi_1(x) = N_1 a^+ \psi_0(x), \quad (1.18)$$

où  $N_1$  est une constante de normalisation.

En procédant de la même manière pour le reste des états excités, on obtient pour le nième état,

$$\psi_n(x) = N_n (a^+)^n \psi_0(x) \quad \text{et} \quad \hat{E}_n = n\hbar\omega. \quad (1.19)$$

On constate donc que les fonctions propres  $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\hat{H}$  peuvent être obtenues simplement par applications successives ( $n$  fois) de l'opérateur de création  $a^+$  sur la fonction de l'état fondamental  $\psi_0(x)$ .

Finalement, on aboutira au spectre de  $H$  et à la formule génératrice des fonctions propres correspondantes en utilisant (1.6) et (1.19), ce qui donne

$$\psi_n(x) = N_n (a^+)^n \cdot \psi_0(x) \quad \text{et} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (1.20)$$

où  $N_n$  est une constante de normalisation, et  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.3 Définition de la SUSYQM

Considérons un système quantique représenté par un Hamiltonien agissant sur un certain espace de Hilbert  $\mathfrak{R}$ , et postulons l'existence d'un ensemble d'opérateurs auto-adjoints  $\{Q_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , appelés supercharges, qui agissent aussi sur  $\mathfrak{R}$ .

#### 1.3.1 Définition :

Un système quantique, caractérisé par l'ensemble  $\{H, Q_1, \dots, Q_N, \mathfrak{R}\}$ , est dit supersymétrique si la relation suivante est vérifiée pour tous les  $i$  possibles

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij}H \quad (1.21)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\{, \}$  désigne l'anti-commutateur de deux opérateurs.

Les opérateurs  $\{Q_i\}$  sont appelés " Supercharges " et  $H$  est appelé " Hamiltonien supersymétrique ".

La relation (1.21) étant vérifiée, l'Hamiltonien du système commute alors avec tous les opérateurs de supercharges. Cela s'écrit donc

$$[H, Q_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.22)$$

ce qui veut dire que l'Hamiltonien  $H$  est invariant sous les transformations engendrées par les opérateurs de supercharges.

A partir de (1.21), on peut écrire :

$$H = 2Q_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.23)$$

ce qui permet d'exprimer  $H$  aussi sous la forme

$$H = \frac{2}{N} \sum_i^N Q_i^2. \quad (1.24)$$

Ce résultat est très important, car il montre que le spectre de  $H$  est positif, et par conséquent l'énergie de l'état fondamental l'est aussi. Ainsi

$$E_0 \geq 0. \tag{1.25}$$

Parfois, on préfère définir la SUSYQM par la donnée d'opérateurs, qui ne sont pas auto-adjoints, comme on va le voir dans l'exemple suivant.

### 1.3.2 SUSYQM dans le cas $N = 2$

Comme on l'a vu précédemment, la SUSYQM peut être définie par la donnée de deux opérateurs auto-adjoints  $Q_1$  et  $Q_2$  qui vérifient (1.21). Maintenant nous allons introduire une paire d'opérateurs, appelés " Supercharges complexes ",  $Q$  et  $Q^+$ , définis par

$$Q = \frac{Q_1 + i Q_2}{\sqrt{2}}, \tag{1.26}$$

et

$$Q^+ = \frac{Q_1 - i Q_2}{\sqrt{2}}. \tag{1.27}$$

On peut démontrer que ces nouveaux opérateurs, avec l'Hamiltonien, obéissent aux relations suivantes, qui découlent directement de (1.21), (1.26) et (1.27)

$$Q^2 = 0 = (Q^+)^2, \tag{1.28}$$

( $Q$  et  $Q^+$  sont nilpotents), et

$$\begin{cases} \{Q, Q^+\} = H \\ [Q, H] = [Q^+, H] = 0 \end{cases}. \tag{1.29}$$

Dans ce cas, l'ensemble  $\{H, Q, Q^+, \mathfrak{R}\}$  est dit supersymétrique.

## 1.4 Brisure de la SUSY dans la SUSYQM

Le concept de brisure de la SUSY, était et restera, jusqu'à nouvel ordre, l'un des énigmes qui ont embêtés les chercheurs lors de l'application de la SUSY dans le domaine de la théorie des champs. En fait, et comme nous l'avions dit dans l'introduction de ce mémoire, l'étude de la brisure de la SUSY est directement responsable du développement des recherches sur la supersymétrie dans différents domaines.

Il est bien connu que la symétrie d'un Hamiltonien est considérée comme brisée si l'état possédant la plus petite énergie, (état fondamental), ne respecte pas cette symétrie.

Dans cette section, on va juste mentionner les propriétés essentielles de l'état fondamental du système étudié, qui sont liées directement au concept de brisure de la SUSY.

Soit  $\{H, Q_1, \dots, Q_N, \mathfrak{R}\}$  un système supersymétrique, défini sur un espace de Hilbert  $\mathfrak{R}$ .

### 1.4.1 Définitions :

- 1) Pour une bonne SUSY, il existe au moins un état de  $H$  qui a une énergie nulle.
- 2) Un système supersymétrique est dit possédant une bonne SUSY si l'énergie de l'état fondamental est nulle. Par contre, si elle est strictement positif, la SUSY est dite brisée.
- 3) Pour avoir une bonne SUSY il faut et il suffit que la fonction propre de l'état fondamental soit normalisable.

## 1.5 Formalisme général

### 1.5.1 Construction des Hamiltoniens partenaires

Considérons l'équation de Schrödinger pour une particule de masse constante  $m$ , placée dans le champ d'un potentiel conservatif à une dimension  $V(x)$ . Supposons aussi que ce système admet un nombre fini ou infini d'états liés non relativistes, obtenus à partir de l'équation de Schrödinger

$$H\psi_n(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad (1.30)$$

avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Pour  $n = 0$ , on peut écrire

$$(H - E_0) \psi_0(x) = 0. \quad (1.31)$$

On définit un nouveau Hamiltonien  $H_1$  par

$$H_1 = H - E_0, \quad (1.32)$$

dont les fonctions propres coïncident avec celles de  $H$  et les valeurs propres sont décalées par rapport à celles de ce dernier par la soustraction de l'énergie de son état fondamental  $E_0$ .

L'équation aux valeurs propres de  $H_1$  peut être écrite comme

$$H_1 \psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}(x), \quad (1.33)$$

avec

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0. \quad (1.34)$$

En particulier, on a

$$\begin{cases} E_0^{(1)} = 0 \\ \psi_0^{(1)}(x) = \psi_0(x) \end{cases}. \quad (1.35)$$

Postulons l'existence d'une paire d'opérateurs,  $A$  et son adjoint  $A^+$ , de telle sorte que  $H_1$  puisse être exprimé sous la forme

$$H_1 = A^+ A. \quad (1.36)$$

A partir de l'équation aux valeurs propres (1.33), qu'on écrit suivant la notation de Dirac comme

$$H_1 = A^+ A \left| \psi_n^{(1)} \right\rangle = E_n^{(1)} \left| \psi_n^{(1)} \right\rangle,$$

il vient, en admettant que les états sont normés, que

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(1)} \left| A^+ A \right| \psi_n^{(1)} \right\rangle = \left\| A \left| \psi_n^{(1)} \right\rangle \right\|^2 \geq 0, \quad (1.37)$$

qui signifie que les énergies propres sont toujours positives ou nulles,

$$E_n^{(1)} \geq 0, \forall n. \quad (1.38)$$

En parallèle, si on construit un autre Hamiltonien  $H_2$  par

$$H_2 = AA^+, \quad (1.39)$$

l'équation aux valeurs propres de ce dernier s'écrit

$$H_2 \psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)}(x), \quad (1.40)$$

où  $E_n^{(2)}$  est l'énergie du  $n$ ème niveau de  $H_2$  et  $\psi_n^{(2)}(x)$  la fonction propre correspondante, supposée aussi normée.

En suivant une démarche similaire, on montre aussi que les énergies  $E_n^{(2)}$  sont aussi positives ou nulles,

$$E_n^{(2)} \geq 0, \forall n \quad (1.41)$$

Les deux opérateurs  $H_1$  et  $H_2$  sont appelés, Hamiltoniens supersymétriques partenaires (ou simplement partenaires)

### 1.5.2 Illustration sur les opérateurs $Q$ et $Q^+$ :

Soit  $H_{susy}$  l'Hamiltonien supersymétrique d'un système donné, qui a par hypothèse un spectre discret, et soit

$$H_{susy} \cdot \phi_i = E_i \cdot \phi_i, \quad (1.42)$$

son équation aux valeurs propres.

Ecrivons les opérateurs de supercharges  $Q$  et  $Q^+$ , en utilisant une représentation à deux dimensions, comme suit

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$



où l'on peut facilement s'assurer de leur nilpotence. Les produits  $QQ^+$  et  $Q^+Q$  donnent successivement ce qui suit

$$QQ^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix}, \quad Q^+Q = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Il vient donc que

$$\{Q, Q^+\} = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = H_{susy}. \quad (1.45)$$

L'équation aux valeurs propres de  $H_{susy}$  devient alors

$$\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i^{(1)} \\ \phi_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i^{(1)} & 0 \\ 0 & E_i^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i^{(1)} \\ \phi_i^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

où

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^{(1)} \\ \phi_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_i = \begin{pmatrix} E_i^{(1)} & 0 \\ 0 & E_i^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Cela nous conduit directement à (1.33) et (1.40).

## 1.6 Relation entre les Hamiltoniens $H_1$ et $H_2$

Pour démontrer la relation étroite entre les Hamiltoniens partenaires  $H_1$  et  $H_2$ , on va utiliser les deux équations (1.33) et (1.40). Appliquant, dans une première étape, l'opérateur  $A$  à gauche sur les deux membres de l'équation (1.33), on aura

$$A \left[ H_1 \psi_n^{(1)}(x) \right] = A \left[ E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}(x) \right], \quad (1.48)$$

ce qui donne, en tenant compte de (1.36) et (1.39)

$$H_2 \left[ A \psi_n^{(1)}(x) \right] = E_n^{(1)} \left[ A \psi_n^{(1)}(x) \right], \quad (1.49)$$

qui veut dire que  $A \psi_n^{(1)}(x)$  est une fonction propre de  $H_2$  avec la valeur propre  $E_n^{(1)}$ .

Dans une deuxième étape, appliquons cette fois l'opérateur  $A^+$  à gauche sur les deux

membres de l'équation (1.40). D'une manière analogue, et tenant compte, encore une fois, de (1.36) et (1.39), on trouvera

$$H_1 \left[ A^+ \psi_n^{(2)}(x) \right] = E_n^{(2)} \left[ A^+ \psi_n^{(2)}(x) \right]. \quad (1.50)$$

Autrement dit,  $A^+ \psi_n^{(2)}(x)$  est une fonction propre de  $H_1$  avec la valeur propre  $E_n^{(2)}$ .

Maintenant, le fait d'avoir  $E_0^{(1)} = 0$  n'est pas dépourvu de sens, car il conduit directement au résultat suivant :

$$A\psi_0^{(1)}(x) = 0. \quad (1.51)$$

En combinant les résultats (1.33), (1.40), (1.49) et (1.50), on peut aboutir aux relations qui relient les énergies et les fonctions propres de  $H_1$  à celles de  $H_2$ . En effet, on trouvera

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x) & \propto & A \psi_{n+1}^{(1)}(x) \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x) & \propto & A^+ \psi_n^{(2)}(x) \\ E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, & E_0^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Tandis que toutes les fonctions propres  $\{\psi_n^{(1)}(x)\}$  et  $\{\psi_n^{(2)}(x)\}$  sont supposées normalisées, on va réécrire (1.52) sous une autre forme plus adéquate

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} \left[ A \psi_{n+1}^{(1)}(x) \right] \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \left[ A^+ \psi_n^{(2)}(x) \right] \\ E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

## Conclusion

A la fin de cette section, et au vu de tous les résultats obtenus jusqu'à maintenant, on va dire que les opérateurs de création  $A^+$  et d'annihilation  $A$  génèrent certaines transformations reliant le spectre de  $H_1$  à celui de  $H_2$  et vice-versa.

En effet, l'état fondamental de  $H_2$  est équivalent au premier état excité de  $H_1$ . Et le premier état excité de  $H_2$  est équivalent au deuxième état excité de  $H_1$  et ainsi de suite. L'état fondamental de  $H_1$  n'ayant pas d'équivalent dans le spectre de  $H_2$ , on dit qu'il n'a pas

de partenaire. On dit aussi que les deux Hamiltoniens superpartenaires  $H_1$  et  $H_2$  sont « Isospectraux ».

Le schéma suivant montre comment on passe d'un état quelconque à l'état précédant ou à l'état suivant, respectivement par application de l'opérateur d'annihilation ou l'opérateur de création

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Spectre de } H_1 & & \text{Spectre de } H_2 & & \text{Spectre de } H_1 & & \text{Spectre de } H_2 \\
E_n^{(1)} \text{ —} & \leftarrow A^+ & \text{—} E_{n-1}^{(2)} & & E_n^{(1)} \text{ —} & A \Rightarrow & \text{—} E_{n-1}^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
E_3^{(1)} \text{ —} & \leftarrow A^+ & \text{—} E_{21}^{(2)} & & E_3^{(1)} \text{ —} & A \Rightarrow & \text{—} E_{21}^{(2)} \\
E_2^{(1)} \text{ —} & \leftarrow A^+ & \text{—} E_1^{(2)} & & E_2^{(1)} \text{ —} & A \Rightarrow & \text{—} E_1^{(2)} \\
E_1^{(1)} \text{ —} & \leftarrow A^+ & \text{—} E_0^{(2)} & & E_1^{(1)} \text{ —} & A \Rightarrow & \text{—} E_0^{(2)} \\
E_0^{(1)} \text{ —} & & & & E_0^{(1)} \text{ —} & & \\
\end{array} \tag{1.54}$$

## 1.7 Les potentiels partenaires et le superpotentiel

Quand on a introduit les deux opérateurs  $A$  et  $A^+$ , on a rien dit sur leurs expressions explicites. D'ailleurs, c'est ce qui est bien clair dans les formules que nous avons obtenues.

A partir de la définition (1.32), et de la relation explicite de  $H$ , donnée dans (1.30), on peut écrire

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E_0 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x),
\end{aligned} \tag{1.55}$$

tel que

$$V_1(x) = V(x) - E_0. \tag{1.56}$$

On a déjà vu que  $H_1$  peut être factorisé par l'intermédiaire des opérateurs  $A$  et  $A^+$ . Définissons ces deux opérateurs comme suit :

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.57)$$

et

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.58)$$

où  $W(x)$  est une nouvelle fonction, appelée "superpotentiel", introduit dans la SUSYQM en 1981 par Witten [6].

Ainsi, on va utiliser (1.36), (1.57) et (1.58) pour écrire  $H_1$  en terme du superpotentiel et de sa dérivée première, sous la forme

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \quad (1.59)$$

où  $W'(x)$  est la dérivée par rapport à  $x$  du superpotentiel  $W$ .

De (1.55) et (1.59) vient que

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.60)$$

Par une démarche similaire, et en faisant appel aux expressions (1.39), (1.57) et (1.58), on peut avoir l'expression de  $H_2$  en fonction du superpotentiel. Ainsi, on obtient

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.61)$$

Par analogie, on posera

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.62)$$

La relation (1.61) devient donc

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad (1.63)$$

où  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont appelés " potentiels supersymétriques partenaires " ou simplement " potentiels partenaires ". Notons que les expressions (1.60) et (1.62) sont des équations différentielles non linéaires du type Riccati.

Dans ce qui suit, on va établir les relations qui relient le superpotentiel et les potentiels partenaires à la fonction propre de l'état fondamental de  $H_1(H)$ . Pour ce faire, supposons que cette fonction est connue. Elle doit vérifier (1.51), qui s'écrit en faisant appel à (1.57) sous forme d'une équation différentielle du premier ordre

$$\left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0^{(1)}(x) = 0, \quad (1.64)$$

qui donne le superpotentiel sous la forme

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x). \quad (1.65)$$

On peut aussi inverser cette dernière relation pour obtenir la fonction propre de l'état fondamental comme fonctionnelle du superpotentiel, sous la forme

$$\psi_0^{(1)}(x) = N_0 \exp \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(t) dt \right), \quad (1.66)$$

où  $N_0$  est une constante de normalisation.

Donc, connaissant la fonction propre de l'état fondamental de  $H_1(H)$ , on peut obtenir l'expression du superpotentiel en utilisant (1.65) et vice-versa, la connaissance de l'expression du superpotentiel nous permet de calculer la fonction propre de l'état fondamental.

La même chose peut être dite dans le cas des potentiels partenaires. En effet, et tenant compte de (1.31), (1.32) et (1.55), on aura

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{[\psi_0^{(1)}(x)]''}{\psi_0^{(1)}(x)}, \quad (1.67)$$

où  $[\psi_0^{(1)}(x)]''$  représente la dérivée seconde par rapport à  $x$  de  $\psi_0^{(1)}(x)$ .

De même,  $V_2(x)$  peut être écrit, en tenant compte de (1.62) et (1.65, comme suit :

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left[ \frac{[\psi_0^{(1)}(x)]'}{\psi_0^{(1)}(x)} \right]^2 - \frac{[\psi_0^{(1)}(x)]''}{\psi_0^{(1)}(x)} \right\}. \quad (1.68)$$

Donc, connaissant la fonction propre de l'état fondamental, on trouvera aisément les expressions des potentiels partenaires.

On remarque que  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont reliés l'un à l'autre par la relation

$$V_2(x) = -V_1(x) + 2W^2(x), \quad (1.69)$$

où de façon équivalente

$$\begin{aligned} V_2(x) &= V_1(x) + 2W'(x) \\ &= V_1(x) - 2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (1.70)$$

## 1.8 Propriétés générales du superpotentiel pour une bonne SUSY

–1) Dans le cas où la SUSY est bonne, il ya un lien étroit entre les zéros du superpotentiel et les extrémas de la fonction d'onde de l'état fondamental.

– La supersymétrie serait brisée si  $W(x)$  aurait un nombre pair de noeuds.

– Au contraire, elle serait bonne s'il y aurait un nombre impair de noeuds.

–2) Posant :  $W_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) \in \mathbb{R}^*$

– Si les signes de  $W_+$  et  $W_-$  sont identiques, la supersymétrie est dite brisée.

– Si par contre ils ont des signes différents, alors elle est bonne.

–3) Si  $W(x)$  est une fonction propre de la parité d'espace, dans ce cas la supersymétrie est bonne lorsque  $W(x)$  est une fonction impaire et elle est brisée si  $W(x)$  est une fonction paire.

## 1.9 Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires

On a vu dans la section 1.7 comment construire la paire d'Hamiltoniens supersymétriques  $H_1$  et  $H_2$ . On a donc entre les mains une procédure qui peut être itérée pour construire un autre Hamiltonien supersymétrique  $H_3$  en partant cette fois de l'Hamiltonien  $H_2$ . On appelle  $H_3$  l'Hamiltonien partenaire de  $H_2$ .

Avant de continuer, on va suggérer de faire un petit changement de notation pour faciliter le traitement ultérieur du sujet. L'Hamiltonien de départ  $H_1$  peut dépendre d'un certain ensemble de paramètres qu'on dénotera par  $a_0$ . Ces paramètres se retrouveront automatiquement dans les définitions du superopérateur et par conséquent dans  $A_1$  et  $A_1^+$ . Il convient dès maintenant d'explicitier  $a_0$  et écrire donc

$$H_1(a_0) = A_1^+(a_0) A_1(a_0) + E_0^{(1)}(a_0), \quad (1.71)$$

et

$$H_2(a_0) = A_1(a_0) A_1^+(a_0) + E_0^{(1)}(a_0). \quad (1.72)$$

En tenant compte de (1.70), on obtient

$$V_2(a_0) = V_1(a_0) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln \psi_0^{(1)}(x, a_0) \right]. \quad (1.73)$$

En suivant maintenant la même procédure, utilisée pour obtenir (1.53), on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{n+1}^{(1)}(a_0) = E_n^{(2)}(a_0) \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } E_0^{(1)}(a_0) = 0 \\ \psi_n^{(2)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}(a_0) - E_0^{(1)}(a_0)}} A_1(a_0) \psi_{n+1}^{(1)}(x; a_0) \text{ pour } n \geq 0 \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}(a_0) - E_0^{(1)}(a_0)}} A_1^+(a_0) \psi_n^{(2)}(x; a_0) \text{ pour } n \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.74)$$

Partant maintenant de l'Hamiltonien  $H_2$  et reprenant tous ce qui a été fait dans la section 1.7, nous allons construire l'Hamiltonien  $H_3$ , le superpartenaire de  $H_2$ . Par analogie avec (1.71),

écrivons d'abord  $H_2$  sous une nouvelle forme

$$H_2(a_0) = A_2^+(a_0) A_2(a_0) + E_0^{(2)}(a_0). \quad (1.75)$$

Son partenaire doit se mettre alors sous la forme

$$H_3(a_0) = A_2(a_0) A_2^+(a_0) + E_0^{(2)}(a_0). \quad (1.76)$$

Toujours en exploitant (1.70), on obtient

$$\begin{aligned} V_3(a_0) &= V_2(a_0) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln \psi_0^{(2)}(x, a_0) \right] \\ &= V_1(a_0) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln \psi_0^{(1)}(x, a_0) \psi_0^{(2)}(x, a_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

En employant la même procédure, utilisée dans la section 1.7, on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(3)}(a_0) = E_{n+1}^{(2)}(a_0) \\ \psi_n^{(3)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)}(a_0) - E_0^{(2)}(a_0)}} A_2(a_0) \cdot \psi_{n+1}^{(2)}(x; a_0) \\ \psi_{n+1}^{(2)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)}(a_0) - E_0^{(2)}(a_0)}} A_2^+(a_0) \cdot \psi_n^{(3)}(x; a_0) \end{array} \right. \quad (1.78)$$

En mettant à profit les relations (1.74), on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(3)}(a_0) = E_{n+2}^{(1)}(a_0) \ , \ E_0^{(1)}(a_0) = 0 \\ \psi_n^{(3)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)}(a_0) - E_0^{(1)}(a_0)} \sqrt{E_{n+2}^{(1)}(a_0) - E_1^{(1)}(a_0)}} A_2(a_0) \cdot A_1(a_0) \cdot \psi_{n+2}^{(1)}(x; a_0) \ , \\ \psi_{n+2}^{(1)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)}(a_0) - E_0^{(1)}(a_0)} \sqrt{E_{n+2}^{(1)}(a_0) - E_1^{(1)}(a_0)}} A_1^+(a_0) \cdot A_2^+(a_0) \cdot \psi_n^{(3)}(x; a_0) \ . \end{array} \right. \quad (1.79)$$

ce qui nous permettra de trouver le spectre et les fonctions propres de  $H_3$  à partir du spectre et des fonctions propres de  $H_1$  et vice versa.



Pour généraliser cette démarche, on doit partir d'un Hamiltonien  $H_p$  défini, par analogie à ce qui a été fait auparavant, comme suit :

$$H_p(a_0) = A_p^+(a_0) A_p(a_0) + E_0^{(p)}(a_0). \quad (1.80)$$

L'expression de son partenaire  $H_{p+1}$  est donnée alors sous la forme

$$H_{p+1}(a_0) = A_p(a_0) A_p^+(a_0) + E_0^{(p)}(a_0). \quad (1.81)$$

La relation (1.36) s'écrit dans ce cas comme

$$V_{p+1}(a_0) = V_p(a_0) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln \psi_0^{(p)}(x, a_0) \right], \quad (1.82)$$

ce qui conduit, par itération, à

$$V_{p+1}(a_0) = V_1(a_0) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \ln \prod_{k=1}^p \psi_0^{(k)}(x, a_0) \right]. \quad (1.83)$$

Par analogie, on obtient les fonctions propres sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(p+1)}(a_0) = E_{n+1}^{(p)}(a_0) \\ \psi_n^{(p+1)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(p)}(a_0) - E_0^{(p)}(a_0)}} \cdot A_p(a_0) \cdot \psi_{n+1}^{(p)}(x; a_0) \\ \psi_{n+1}^{(p)}(x; a_0) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(p)}(a_0) - E_0^{(p)}(a_0)}} \cdot A_p^+(a_0) \cdot \psi_n^{(p+1)}(x; a_0) \end{array} \right. \quad (1.84)$$

En mettant à profit, encore une fois, les relations (1.74), on aboutit à la généralisation suivante, écrite sous forme compacte,

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(p+1)}(a_0) = E_{n+p}^{(1)}(a_0) \ , \ E_0^{(1)}(a_0) = 0 \\ \psi_n^{(p+1)}(x; a_0) = \prod_{k=1}^p \left[ \left( E_{n+p}^{(1)}(a_0) - E_{p-k}^{(1)}(a_0) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot A_{p-k+1}(a_0) \right] \cdot \psi_{n+p}^{(1)}(x; a_0) \ . \\ \psi_{n+p}^{(1)}(x; a_0) = \prod_{k=1}^p \left[ \left( E_{n+p}^{(1)}(a_0) - E_{k-1}^{(1)}(a_0) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot A_k^+(a_0) \right] \cdot \psi_n^{(p+1)}(x; a_0) \end{array} \right. \quad (1.85)$$

Cependant, si l'Hamiltonien  $H_1$  possède  $m$  états liés, l'Hamiltonien  $H_q$  (où  $1 \leq q \leq m$ ) aura  $(m - q + 1)$  états liés, et on peut donc construire une hiérarchie de  $(m - 1)$  Hamiltoniens partenaires à partir de l'Hamiltonien de départ  $H_1$ . En revanche, une fois la hiérarchie construite, en empruntant le chemin inverse, c'est-à-dire, en partant de l'Hamiltonien  $H_m$ , on peut reconstruire tout le spectre de  $H_1$ , mis à part l'état fondamental, à partir du spectre des partenaires. On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(1)}(a_0) = E_0^{(n+1)}(a_0) \ , \ E_0^{(1)}(a_0) = 0 \\ \psi_n^{(1)}(x; a_0) = \left[ \prod_{k=1}^n \left( E_n^{(1)}(a_0) - E_{k-1}^{(1)}(a_0) \right)^{-\frac{1}{2}} A_k^+(a_0) \right] \psi_0^{(n+1)}(a_0) \ , \end{array} \right. \quad (1.86)$$

pour  $n \geq 0$ .

En conclusion, les relations (1.86) déterminent les liens qui existent entre les énergies propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien de départ  $H_1$  avec celles des différents Hamiltoniens de la hiérarchie ; les caractéristiques du même niveau de  $H_1$  sont directement liées avec celles de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $H_{m-1}$ . En d'autres termes, l'approche supersymétrique est une technique élégante pour la construction de potentiels isospectraux à partir d'un potentiel donné.

## 1.10 Invariance de forme

Jusqu'à maintenant, l'approche supersymétrique ne nous montre pas comment obtenir les énergies propres et les fonctions propres relatives à un potentiel donné. Ceci est en fait possible grâce à la propriété de l'invariance de forme entre les potentiels partenaires, comme on va le voir dans cette section. Nous allons montrer que si  $H_1$  et  $H_2$  possèdent cette propriété importante,

il sera possible d'obtenir algébriquement les caractéristiques des niveaux excités de  $H_1$  par des formules génératrices.

### 1.10.1 Définition :

Si deux potentiels  $V$  et  $V'$  ont la même dépendance spatiale, donc la même forme, et ne diffèrent que par un ensemble fini de paramètres, on dit que ce sont des "potentiels invariants de formes". Explicitement, l'invariance de forme se caractérise par la relation suivante [18, 19]

$$V(x; a_0) = V'(x; a_1) + R(a_0) , \quad (1.87)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont deux jeux finis de paramètres, reliés par

$$a_1 = f(a_0) , \quad (1.88)$$

et  $R(a_0)$  est une fonction indépendante de  $x$ , appelée " Reste ".

La fonction  $f$  peut être une fonction quelconque, mais jusqu'à présent toutes les études effectuées sur les différents potentiels connus qui sont analytiquement solubles, ont conduit seulement à trouver deux formes principales. La première forme relie  $a_0$  et  $a_1$  par une relation de translation, de la forme

$$a_1 = a_0 + \alpha, \quad (1.89)$$

où  $\alpha$  est une constante finie arbitraire.

La plupart des potentiels que nous pouvons rencontrer dans les études des systèmes quantiques (non relativistes) appartiennent à la première catégorie.

La seconde forme relie  $a_0$  et  $a_1$  par un facteur d'échelle sous la forme

$$a_1 = qa_0 \quad , \quad 0 < q < 1 . \quad (1.90)$$

Il existe, toutefois, d'autres possibilités pouvant, peut être, conduire à d'autres classes de potentiels invariants de formes. L'une est une généralisation de la seconde forme, considérée

ci-dessus, prenant la forme

$$a_1 = qa_0^p, \quad 0 < q < 1 \quad \text{et} \quad p = 2, 3, 4, \dots, \quad (1.91)$$

Une autre relation est proposée sous la forme

$$a_1 = \frac{qa}{1+pa}, \quad 0 < q < 1 \quad \text{et} \quad pa \lll 1. \quad (1.92)$$

## 1.11 Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires

A présent et de tout ce qui a été mentionné dans la section précédente, on peut dès lors appliquer le concept d'invariance de forme à la SUSY. Pour commencer, supposons que les deux potentiels partenaires  $V_1$  et  $V_2$ , déjà définis par (1.60) et (1.62), sont invariants de formes, on peut donc écrire

$$V_2(a_0) = V_1(a_1) + R(a_0). \quad (1.93)$$

Les relations (1.63) et (1.93) entraînent que

$$H_2(a_0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(a_1) + R(a_0).$$

En tenant compte de (1.55), on peut aussi écrire

$$H_2(a_0) = H_1(a_1) + R(a_0), \quad (1.94)$$

qui signifie que le spectre de  $H_2(a_0)$  est le même que celui de  $H_1(a_1)$  mais décalé d'un facteur constant  $R(a_0)$ . Ceci veut dire aussi que les fonctions propres  $\psi_n^{(2)}(x, a_0)$  et  $\psi_n^{(1)}(x, a_1)$  sont

identiques. Explicitement, on écrit :

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x, a_0) = \psi_n^{(1)}(x, a_1) \\ E_n^{(2)}(a_0) = E_n^{(1)}(a_1) + R(a_0) \end{cases} .$$

Combinant maintenant les relations (1.71), (1.75) et (1.94), on aura

$$A_2^+(a_0) A_2(a_0) + E_0^{(2)}(a_0) = A_1^+(a_1) A_1(a_1) + E_0^{(1)}(a_1) + R(a_0), \quad (1.95)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} E_0^{(2)}(a_0) = E_0^{(1)}(a_1) + R(a_0) \\ A_2(a_0) = A_1(a_1) \end{cases}, \quad (1.96)$$

ou d'une autre façon

$$\begin{cases} E_1^{(1)}(a_0) = R(a_0) \\ A_2(a_0) = A_1(a_1) \end{cases} . \quad (1.97)$$

A présent, réunissons les résultats les plus importants qu'on a obtenus jusqu'à maintenant :

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x, a_0) = \psi_n^{(1)}(x, a_1) \\ E_1^{(1)}(a_0) = R(a_0) \\ A_2(a_0) = A_1(a_1) \end{cases} . \quad (1.98)$$

Appliquons encore une fois la condition d'invariance de forme aux deux partenaires  $V_2$  et  $V_3$ . On trouvera

$$V_3(a_0) = V_2(a_1) + R(a_0), \quad (1.99)$$

ce qui donne par conséquent

$$H_3(a_0) = H_2(a_1) + R(a_0). \quad (1.100)$$

En utilisant (1.94), on arrive à exprimer  $H_3(a_0)$  en fonction  $H_1(a_2)$  sous la forme

$$H_3(a_0) = H_1(a_2) + R(a_0) + R(a_1), \quad (1.101)$$

ce qui conduit à exprimer les caractéristiques de  $H_3(a_0)$  en fonction de celles de  $H_1(a_2)$  comme

$$\begin{cases} \psi_n^{(3)}(x, a_0) = \psi_n^{(1)}(x, a_2) \\ E_n^{(3)}(a_0) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_0) + R(a_1) \end{cases} .$$

En utilisant (1.71), (1.78) et (1.101), on arrive à

$$A_3^+(a_0) A_3(a_0) + E_0^{(3)}(a_0) = A_1^+(a_2) A_1(a_2) + E_0^{(1)}(a_2) + R(a_0) + R(a_1). \quad (1.102)$$

Il vient que

$$\begin{cases} E_0^{(3)}(a_0) = E_0^{(1)}(a_2) + R(a_0) + R(a_1) \\ A_3(a_0) = A_1(a_2) \end{cases} . \quad (1.103)$$

Autrement dit, on a aboutit à

$$\begin{cases} E_2^{(1)}(a_0) = R(a_0) + R(a_1) \\ \psi_n^{(3)}(x, a_0) = \psi_n^{(1)}(x, a_2) \\ A_3(a_0) = A_1(a_2) \end{cases} . \quad (1.104)$$

On peut à présent procéder à une généralisation en considérant deux potentiels partenaires successifs  $V_{p+1}$  et  $V_p$  de la hiérarchie. On peut écrire donc

$$V_{p+1}(a_0) = V_p(a_1) + R(a_0), \quad (1.105)$$

ce qui conduira, par analogie, à

$$H_{p+1}(a_0) = H_1(a_p) + \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k). \quad (1.106)$$

Par conséquent, on obtient finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n^{(1)}(a_0) = \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) \\ \psi_n^{(p+1)}(x, a_0) = \psi_n^{(1)}(x, a_p) \quad , \quad \text{avec } n \geq 1 \\ A_{p+1}(a_0) = A_1(a_p) \end{array} \right. \quad (1.107)$$

Maintenant il ne nous reste que de mettre à profit la deuxième relation de (1.86) et la combiner avec le résultat (1.107) pour arriver à ce qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n^{(1)}(x, a_0) = \prod_{k=1}^n \left( \left[ E_n^{(1)}(a_0) - E_{k-1}^{(1)} \right]^{-\frac{1}{2}} A_1^+(a_{k-1}) \right) \cdot \psi_0^{(1)}(x, a_n) \\ E_n^{(1)}(a_0) = \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) \\ E_0^{(1)}(a_0) = 0 \end{array} \right. \quad , \quad (1.108)$$

où  $n \geq 1$ .

Enfin, on est arrivé à un résultat très intéressant ; pour obtenir tous les niveaux excités de  $H_1$ , il suffit d'obtenir la fonction d'onde  $\psi_0^{(1)}(x, a_0)$  de son état fondamental par le biais de (1.66), puis calculer  $\psi_0^{(1)}(x, a_n)$ , et après on applique la condition d'invariance de forme pour trouver les restes  $R(a_k)$ .

En se servant de (1.34) et (1.35), on obtient le spectre et les fonctions propres de l'Hamiltonien original  $H$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n(x, a_0) = \prod_{k=1}^n \left( \left[ E_n^{(1)}(a_0) - E_{k-1}^{(1)} \right]^{-\frac{1}{2}} A_1^+(a_{k-1}) \right) \psi_0^{(1)}(x, a_n) \\ E_n(a_0) = E_0 + \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) \end{array} \right. \quad , \quad (1.109)$$

pour  $n \geq 0$ .

## Chapitre 2

# Approche supersymétrique pour les systèmes quantiques avec masse dépendante de l'espace

### 2.1 Introduction

L'idée de trouver les états liés d'une particule non relativiste ou relativiste dont la masse est une fonction de l'espace n'est pas fortuite. En effet, il existe beaucoup de problèmes en physique, en chimie, en biologie ou même en médecine où l'on peut assimiler l'évolution d'un phénomène par une équation du type Schrödinger, Klein-Gordon ou même de Dirac, relative à une particule de masse variable dans l'espace. Pour se limiter seulement en physique du solide, le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique, représentant le réseau cristallin, est assimilé au mouvement d'une particule libre avec une masse effective, qui dépend essentiellement des caractéristiques du réseau. Si l'échantillon est composé de plusieurs parties représentant des matériaux différents, appelées hétérostructures, la masse prendra des valeurs différentes dans chaque partie (structure).

Pour cela, les théoriciens ne cessent d'investiguer ce domaine très intéressant en présentant différents modèles pour la distribution de la masse comme fonction de la position et essayant de trouver des solutions aux équations de Schrödinger, Klein-Gordon et Dirac. Vu, la complexité



de la tâche, on se limite souvent à des modèles à une dimension, en choisissant des potentiels connus en mécanique quantique, auxquels on associe des distributions de masse appropriées de telle sorte que l'équation étudiée peut être ramener, par des transformations adéquates, à une équation équivalente qu'on peut résoudre par les méthodes usuelles.

En ce qui nous concerne dans ce travail, nous allons nous limiter à discuter l'équation non relativiste de Schrödinger à une dimension dans le contexte de la masse variable.

## 2.2 Equation stationnaire non relativiste pour une particule dont la masse est dépendante de sa position.

La quantification de l'Hamiltonien classique d'une particule soumise à un potentiel et dont la masse est une fonction de sa position n'est pas une chose évidente. Il faut en principe passer par plusieurs étapes. La première consiste à partir de l'équation de Newton classique et déterminer d'abord le Lagrangien dont elle dérive. Ensuite, il faut construire le Hamiltonien correspondant par les techniques usuelles et enfin, quantifier ce dernier. Cette dernière étape revient à symétriser l'Hamiltonien obtenu vis-à-vis des opérateurs impulsion et position pour le rendre Hermitien. Dans la littérature, cette démarche n'est pas suivie ; c'est juste la dernière étape qui est considérée. Autrement dit, à partir d'un Hamiltonien quantique connu, pour une particule de masse constante, on suppose que cette dernière est une fonction de l'espace et on le symétrise. Ceci revient à symétriser juste la partie cinétique, qui se présente généralement comme des produits de l'opérateur impulsion et de fonctions de l'espace.

Pour les problèmes, à une dimension, que nous considérons dans ce travail, nous dénotons par

$$m(x) = m_0 M(x), \quad (2.1)$$

la masse de la particule, où  $m_0$  est une constante positive ayant les dimensions d'une masse et  $M(x)$ , une fonction sans dimensions, définie positive. Nous admettons aussi que l'Hamiltonien classique est une simple somme de la partie cinétique et de l'énergie potentiel. Ainsi l'Hamiltonien symétrisé sera dénoté comme

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} + V(x). \quad (2.2)$$

où  $\{\}$  désigne l'opération de symétrisation. L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrira donc sous la forme

$$\left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} + V(x)\right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.3)$$

En fait, l'opération de symétrisation n'est pas unique de sorte que la partie cinétique, dans ce cas, peut être écrite de différentes manières. Entre autre, en représentation position, où l'opérateur impulsion est donné par

$$p \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx},$$

on peut écrire

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx}, \quad (2.4)$$

ou bien

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{(M(x))^{\frac{1}{4}}} \frac{d}{dx} \frac{1}{(M(x))^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} \frac{1}{(M(x))^{\frac{1}{4}}}. \quad (2.5)$$

En fait, il n'existe aucune recette à suivre pour la symétrisation de la partie cinétique et plusieurs propositions ont été faites dans la littérature [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. La proposition qui a reçu plus d'intérêt par la communauté des physiciens revient à Von Roos [32, 33]. Il a suggéré une expression générale dépendant de deux paramètres ajustables, donnée sous la forme

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \left( (M(x))^\alpha \frac{d}{dx} (M(x))^\beta \frac{d}{dx} (M(x))^\gamma + (M(x))^\gamma \frac{d}{dx} (M(x))^\beta \frac{d}{dx} (M(x))^\alpha \right), \quad (2.6)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des nombres réels, qui doivent évidemment satisfaire la contrainte suivante :

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \quad (2.7)$$

En particulier, pour  $\alpha = \gamma = 0$ , et  $\alpha = \gamma = -\frac{1}{4}$ , on retrouve les cas particuliers (2.4) et (2.5).

Par conséquent, chaque choix des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  correspondra à un Hamiltonien différent et par conséquent, le même problème physique conduira à des spectres différents. Pour cette raison, les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont souvent appelés, paramètres d'ambiguïté.

Ainsi, en éliminant un des paramètres par l'intermédiaire de la contrainte (2.7), la par-

tie cinétique de Von Roos s'exprime en fonction de deux paramètres libres. Parfois, l'un des deux paramètres ou même tous les deux doivent être fixés à des valeurs bien déterminées ou même contraints à satisfaire certaines relations pour que le système possède des états liés. Si ce n'est pas le cas, le spectre du problème en question sera fonction de ces deux paramètres. L'existence de paramètres libres dans les expressions analytiques du spectre d'un problème peut avoir plusieurs avantages. Par exemple, ces paramètres peuvent être ajustés de telle sorte à approcher les valeurs expérimentales d'un problème physique connu. On peut aussi procéder à une extrémalisation pour minimiser certaines valeurs propres.

Il est facile de montrer que la forme générale (2.6) peut se mettre sous la forme plus adéquate suivante

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + U_{\alpha\beta}(x), \quad (2.8)$$

avec

$$U_{\alpha\beta}(x) = \frac{\hbar^2}{4m_0} (\beta + 1) \frac{M''(x)}{M^2(x)} - \frac{\hbar^2}{2m_0} [\alpha(\alpha + \beta + 1) + \beta + 1] \frac{M'^2(x)}{M^3(x)}, \quad (2.9)$$

où  $M'(x)$  et  $M''(x)$  désignent respectivement les dérivées première et seconde de la distribution de la masse  $M(x)$  par rapport à la variable  $x$ .

Par conséquent l'Hamiltonien (2.2) peut être mis sous la forme

$$H_{VR} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + \tilde{V}(x), \quad (2.10)$$

où  $\tilde{V}(x)$ , qui sera appelé potentiel effectif, est la somme du potentiel physique et du potentiel d'ambiguïté

$$\tilde{V}(x) = V(x) + U_{\alpha\beta}(x), \quad (2.11)$$

L'équation de Schrödinger s'écrira donc

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + \tilde{V}(x) \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.12)$$

Ainsi, la forme de symétrisation de Von Roos conduit à un Hamiltonien quantique, noté ici

$H_{VR}$ , dont la partie cinétique est symétrisée selon la formule (2.4) et le potentiel d'interaction est maintenant composé de la somme du potentiel physique et d'une partie additive  $U_{\alpha\beta}(x)$  qui dépend de la fonction de distribution de la masse, de ses dérivées première et seconde et bien sur des paramètres d'ambiguïté  $\alpha$  et  $\beta$ . Evidemment, cette partie, qu'on appellera potentiel d'ambiguïté, n'a pas d'origine matérielle; elle disparaîtra si la masse est une constante, auquel cas le problème est standard, ou si l'on choisit  $\alpha = 0$  et  $\beta = -1$ .

## 2.3 Résolution par l'approche de la supersymétrie

Dans le but de résoudre l'équation de Schrödinger (2.12) par l'approche de la supersymétrie, il existe plusieurs méthodes qui ont été proposées dans la littérature. Elles ne sont pas toutes équivalentes puisque chacune d'elles peut s'adapter à certains types de potentiels mais pas à d'autres. Nous allons proposer dans cette section d'en discuter trois méthodes qui nous serviront pour résoudre les problèmes que nous proposerons dans le chapitre suivant.

### 2.3.1 Approche de supersymétrie généralisée

Partant de l'Hamiltonien (2.12), le but est de procéder par analogie avec la démarche de la supersymétrie pour une masse constante. Ceci veut dire qu'on cherche à construire un opérateur  $A$  et son adjoint  $A^+$  qui permettent de définir des Hamiltoniens partenaires  $H_-$  et  $H_+$  tels que

$$H_- = A^+A = H - E_0, \quad (2.13)$$

et

$$H_+ = AA^+. \quad (2.14)$$

On définit ces opérateurs par

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (2.15)$$

et

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} + W(x), \quad (2.16)$$

qui coïncident respectivement avec les définitions (1.57) et (1.58) pour une distribution de masse égale à 1.

La fonction propre de l'état fondamental sera donnée par la solution de l'équation différentielle

$$\left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0(x) = 0, \quad (2.17)$$

qui s'intègre pour donner

$$\psi_0(x) \propto \exp \left( -\frac{\sqrt{2m_0}}{\hbar} \int^x W(y) \sqrt{M(y)} dy \right). \quad (2.18)$$

En construisant le produit  $A^+ A$ , on obtient le premier Hamiltonien partenaire sous la forme

$$\begin{aligned} H_- &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{d}{dx} \frac{W(x)}{\sqrt{M(x)}} - \frac{W(x)}{\sqrt{M(x)}} \frac{d}{dx} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{W(x)}{\sqrt{M(x)}} \right)'. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En tenant compte de (2.10), (2.13) et (2.19), on obtient

$$\tilde{V}(x) - E_0 = V_-(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{W(x)}{\sqrt{M(x)}} \right)'. \quad (2.20)$$

De la même manière, on obtient le second Hamiltonien partenaire  $H_+$  sous la forme

$$\begin{aligned} H_+ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \frac{d}{dx} W(x) - W(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{W'(x)}{\sqrt{M(x)}} + \frac{W(x)M'(x)}{2M(x)\sqrt{M(x)}} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

On constate alors que la partie cinétique du membre de droite (2.21) n'a pas la même forme que celle de (2.19) si  $M(x) \neq 1$ . Pour surmonter cette difficulté, on utilise le commutateur

$$\left[ \frac{d}{dx}, \frac{1}{\sqrt{M(x)}} \right] = -\frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)}, \quad (2.22)$$

qui permet de transformer (2.21) et la mettre sous la forme

$$H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx} \frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{W'(x)}{\sqrt{M(x)}} + \frac{W(x)M'(x)}{2M^{\frac{3}{2}}(x)} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{M'^2(x)}{M^3(x)} - \frac{1}{2} \frac{M''(x)}{M^2(x)} \right). \quad (2.23)$$

Ainsi, le partenaire  $V_+(x)$  sera défini par

$$V_+(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \frac{W'(x)}{\sqrt{M(x)}} + \frac{W(x)M'(x)}{2M^{\frac{3}{2}}(x)} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{3}{4} \frac{M'^2(x)}{M^3(x)} - \frac{1}{2} \frac{M''(x)}{M^2(x)} \right). \quad (2.24)$$

Le prix à payer en passant de (2.21) à (2.23) est que l'expression du partenaire  $V_+(x)$  est plus compliquée comparativement à celle de  $V_-(x)$ , de sorte qu'on pourrait penser qu'il n'est pas facile de trouver des couples de fonctions  $W(x)$  et  $M(x)$  qui pourront conduire à des partenaires satisfaisant à la condition d'invariance de forme, néanmoins il en existe certains comme on va le voir dans le chapitre suivant.

Il est aussi visible que pour  $M(x) \equiv 1$ , (2.20) et (2.24) se réduisent respectivement à (1.60) et (1.62) correspondant à une théorie avec masse constante.

A partir de là, tout ce qui a été dit dans le chapitre 1 demeure valide ici. En particulier, si pour un couple de fonctions  $W(x)$  et  $M(x)$  données, les partenaires  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$  satisfont à la condition d'invariance de forme, le spectre et les fonctions propres du potentiel effectif seront donnés par des relations similaires à (1.109).

### 2.3.2 Méthode de la transformation de la fonction propre

Le but de cette méthode est de procéder par la transformation de la fonction propre dans l'équation (2.12) pour la ramener à une équation équivalente du type Schrödinger pour une particule de masse constante. Pour utiliser cette méthode, il est utile d'écrire l'Hamiltonien (2.10) sous la forme équivalente suivante :

$$H_{VR} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( -\frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} \right) + \tilde{V}(x). \quad (2.25)$$

Par conséquent l'équation (2.12) se ramène à la forme suivante

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( -\frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} \right) + \tilde{V}(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.26)$$

On définit la nouvelle fonction  $\varphi(x)$  par la relation

$$\psi(x) = \sqrt{M(x)}\varphi(x). \quad (2.27)$$

En substituant (2.27) dans (2.26), on s'aperçoit que la nouvelle fonction  $\varphi(x)$  vérifie l'équation suivante :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_E(x) \right) \varphi(x) = 0, \quad (2.28)$$

où le potentiel effectif  $V_E(x)$  est donné par

$$V_E(x) = m_0 M(x) \left( \tilde{V}(x) - E \right) + \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{3}{4} \left( \frac{M'(x)}{M(x)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{M''(x)}{M(x)} \right). \quad (2.29)$$

En substituant (2.9) et (2.11) dans (2.29), cette dernière peut se mettre sous la forme

$$V_E(x) = m_0 M(x) \left( V(x) - E - \frac{\hbar^2}{2} \left( \left( \alpha(\alpha + \beta + 1) + \beta + \frac{1}{4} \right) \left( \frac{M'(x)}{M(x)} \right)^2 - \frac{\beta}{2} \frac{M''(x)}{M(x)} \right) \right). \quad (2.30)$$

Ainsi, (2.28) peut être vue comme une équation de Schrödinger pour une énergie nulle, relative à une particule de masse unité, placée dans le potentiel  $V_E(x)$ . Pour la résoudre avec les techniques de l'approche supersymétrique, quand elle est applicable, on peut considérer plutôt l'équation de Schrödinger standard suivante :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_E(x) \right) \Phi(x) = \varepsilon \Phi(x), \quad (2.31)$$

pour une particule de masse unité, où  $E$  figure maintenant comme un paramètre dans le potentiel  $V_E(x)$ . Si  $V_E(x)$  est un potentiel supersymétrique, admettant des états liés, on peut déterminer les valeurs propres  $\varepsilon_n$  et les fonctions propres correspondantes par les formules du chapitre 1. Les valeurs propres du problème original seront obtenues par les solutions réelles de l'équation

$$\varepsilon_n(E) = 0, \quad (2.32)$$

et les fonctions propres correspondantes seront données par

$$\varphi_n(x) = \Phi_n(x)|_{\varepsilon_n=0}. \quad (2.33)$$

Les fonctions propres, normalisées, du problème original seront donc données par

$$\psi_n(x) = N_n \sqrt{M(x)} \Phi_n(x)|_{\varepsilon_n=0} = \sqrt{M(x)} \varphi_n(x), \quad (2.34)$$

où  $N_n$  est la constante de normalisation. Ces fonctions doivent satisfaire aux conditions aux limites requises pour l'existence d'états liés.

### 2.3.3 Approche de la transformation ponctuelle

Pour transformer l'équation (2.26) en une équation de Schrödinger standard avec un potentiel supersymétrique, il est parfois nécessaire de passer par une transformation ponctuelle générale, définie par

$$y = g(x), \quad (2.35)$$

et

$$\psi(x) = f(y)\varphi(y), \quad (2.36)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions à déterminer de telle sorte que  $\varphi(y)$  satisfait à une équation du type Schrödinger standard.

A partir de (2.35), on obtient

$$\frac{d}{dx} = g'(x) \frac{d}{dy}, \quad (2.37)$$

et

$$\frac{d^2}{dx^2} = (g'(x))^2 \frac{d^2}{dy^2} + g''(x) \frac{d}{dy}, \quad (2.38)$$

de sorte

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} = \frac{(g'(x))^2}{M(x)} \frac{d^2}{dy^2} + \left( \frac{g''(x)}{M(x)} - \frac{M'(x)}{M^2(x)} g'(x) \right) \frac{d}{dy}. \quad (2.39)$$



Il est donc évident qu'il faut choisir

$$g'(x) = \sqrt{M(x)}, \quad (2.40)$$

et par conséquent (2.39) se réduit en

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{2} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \frac{d}{dy}. \quad (2.41)$$

En appliquant, les deux membres de (2.41) sur la fonction  $\psi(x)$  définie par (2.36), il vient que

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) &= \left( \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{2} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \frac{d}{dy} \right) f(y) \varphi(y) \\ &= \left( f'' \varphi + 2f' \varphi' + f \varphi'' - \frac{1}{2} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} (f' \varphi + f \varphi') \right) \\ &= f \left( \varphi'' + \left( \frac{2f'}{f} - \frac{1}{2} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \right) \varphi' + \left( \frac{f''}{f} - \frac{1}{2} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \frac{f'}{f} \right) \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Pour annuler identiquement le coefficient de  $\varphi'$ , dans le membre de droite de (2.42), on doit choisir

$$\frac{f'}{f} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{M(x)}} = \frac{1}{4} \frac{M'(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)}, \quad (2.43)$$

ce qui donne

$$\frac{f''}{f} = \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{M''(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} - \frac{3}{2} \frac{M'^2(x)}{M^{\frac{5}{2}}(x)} \right). \quad (2.44)$$

Par conséquent, (2.42) se réduit à

$$\left( \frac{1}{M(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'(x)}{M^2(x)} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) = f \left( \varphi''(y) + \left( -\frac{1}{16} \frac{M'^2(x)}{M^3(x)} - \frac{3}{8} \frac{M''(x)}{M^{\frac{5}{2}}(x)} + \frac{1}{4} \frac{M''(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \right) \varphi(y) \right). \quad (2.45)$$

En substituant (2.45) dans (2.26), on obtient l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle

fonction  $\varphi$  sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\varphi''(y) + U(y)\varphi(y) = E\varphi(y), \quad (2.46)$$

avec

$$U(y) = \tilde{V}(g^{-1}(y)) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( -\frac{1}{16} \frac{M'^2(x)}{M^3(x)} - \frac{3}{8} \frac{M''^2(x)}{M^{\frac{5}{2}}(x)} + \frac{1}{4} \frac{M''(x)}{M^{\frac{3}{2}}(x)} \right) \Big|_{x=g^{-1}(y)}. \quad (2.47)$$

Nous avons ainsi transformé l'équation de Schrödinger (2.26) relative à la fonction d'onde d'une particule de masse variable dans l'espace, placée dans le potentiel  $\tilde{V}(x)$  en une autre équation de Schrödinger (2.46) pour la fonction  $\varphi(y)$  relative à une particule de masse constante, placée dans le potentiel  $U(y)$ . On remarque que l'énergie qui figure dans les deux équations est la même et par conséquent, cette technique peut servir pour obtenir des potentiels isospectraux, l'un correspondant à une particule de masse constante et l'autre correspondant à une particule de masse dépendante de l'espace. En général, partant de l'équation (2.26) avec un potentiel physique  $\tilde{V}(x)$  et une distribution de la masse  $M(x)$ , arbitraires, il n'est pas garanti d'aboutir à un potentiel  $U(y)$  supersymétrique, ou même seulement soluble. La démarche est souvent inversée; on part d'un potentiel  $U(y)$ , appelé potentiel source, qui est choisit soluble, disant par la méthode supersymétrique, et on cherche à construire un couple de fonctions  $M(x)$  et  $\tilde{V}(x)$ , où ce dernier est appelé potentiel cible, à partir de la relation (2.47).

## Chapitre 3

# Etude du spectre non relativiste pour une particule de masse dépendante de la position, placée dans le potentiel d'un oscillateur harmonique non linéaire

### 3.1 Introduction

Nous nous proposons de résoudre l'équation de Schrödinger à une dimension pour une particule non relativiste, dont la masse dépend de la position,  $m(x) = m_0 M(x)$ , avec

$$M(x) = \frac{1}{1 + \lambda x^2}, \quad (3.1)$$

et placée dans le potentiel physique

$$V(x) = \frac{m_0 \omega^2}{2} \frac{x^2}{1 + \lambda x^2}, \quad (3.2)$$

où  $m_0$ ,  $\lambda$  et  $\omega$  sont des paramètres réels positifs.

L'Hamiltonien classique s'écrit

$$H = \frac{p^2}{2m(x)} + \frac{1}{2}\omega^2 m(x)x^2, \quad (3.3)$$

et par conséquent, le système classique associé correspond à un oscillateur harmonique ordinaire avec masse dépendante de la position.

Les allures du potentiel et de la distribution de la masse sont représentées respectivement sur les figures 1 et 2 pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

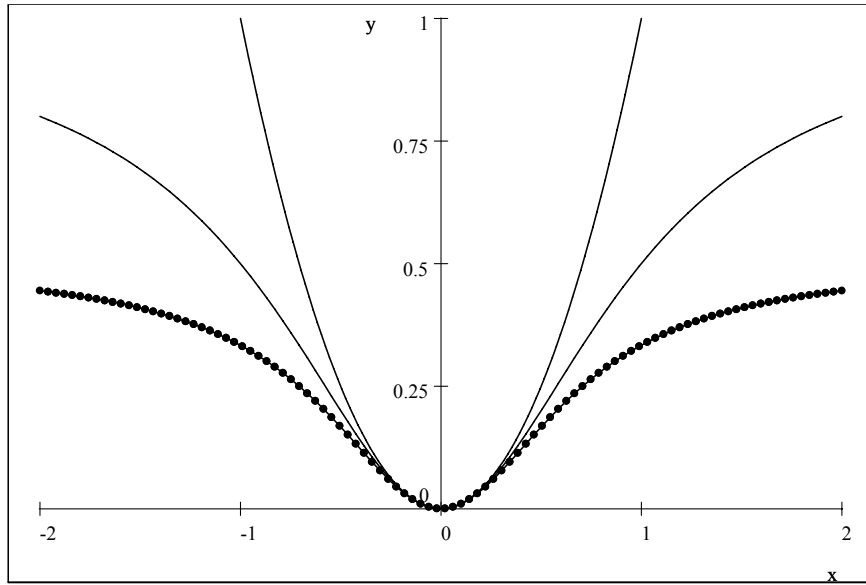


Figure 1 : Allure de  $V(x)$  pour  $m_0\omega^2 = 2$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ , et  $\lambda = 2$ .

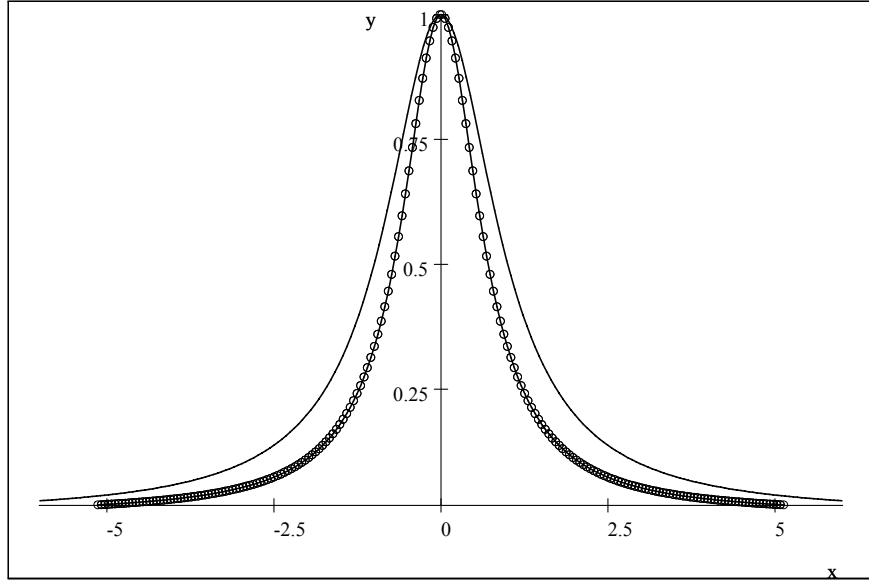


Figure 2 : Allure de  $M(x)$  pour  $\lambda = 1$  et 2.

En mécanique quantique, ce problème est connu dans la littérature sous le nom d'oscillateur harmonique non linéaire [34, 35, 36]. On note que pour  $\lambda = 0$ , il se réduit à celui d'un oscillateur harmonique usuel, représenté par une particule de masse constante, placée dans un potentiel quadratique. Pour une masse constante, l'équation de Schrödinger correspondante au potentiel (3.2) ne peut être résolue que pour une valeur particulière du paramètre  $\lambda$ . Dans ce cas, le problème est connu sous le nom d'oscillateur isotonique [37].

Avant de procéder à la résolution du problème, notons que dans les travaux des références [34, 35, 36], le sujet a été discuté uniquement dans le cas particulier où le potentiel d'ambiguïté est identiquement nul, c'est-à-dire pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = -1$ . En outre, la symétrisation de la partie cinétique, qui a été adoptée dans ces travaux, conduit à un Hamiltonien non hermitien. Pour palier à cette difficulté, on a choisit de faire les calculs dans un espace de Hilbert particulier  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\lambda)$ , où le produit scalaire de deux fonctions est défini par rapport à la mesure  $d\mu_\lambda$ , choisie sous la forme

$$d\mu_\lambda = \frac{dx}{\sqrt{1 + \lambda x^2}}. \quad (3.4)$$

Dans cet espace, la partie cinétique classique a été quantifiée d'une manière unique sous la

forme [34]

$$\frac{p^2}{2m} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \sqrt{1 + \lambda x^2} \frac{d}{dx} \right)^2, \quad (3.5)$$

de sorte que l'Hamiltonienne sous la forme

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( (1 + \lambda x^2) \frac{d^2}{dx^2} + \lambda x \frac{d}{dx} \right) + \frac{m_0 \omega^2}{2} \frac{x^2}{1 + \lambda x^2}, \quad (3.6)$$

qui n'est pas hermitien au sens de la mécanique quantique ordinaire, c'est-à-dire par rapport à un espace de Hilbert standard  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ .

Les auteurs arguent que, dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\lambda)$ , il est possible de définir l'opérateur impulsion généralisée sous la forme

$$P_x = -i\hbar \sqrt{1 + \lambda x^2} \frac{d}{dx}, \quad (3.7)$$

qui est anti auto-adjoint par rapport à la mesure (3.4),

$$P_x^+ = i\hbar \sqrt{1 + \lambda x^2} \frac{d}{dx}. \quad (3.8)$$

Il a été montré que, moyennant cet ansatz, le problème peut être résolu par la méthode générale aussi bien que par l'approche de supersymétrie. Avec cette dernière méthode, les potentiels partenaires sont facilement obtenus du fait que les parties cinétiques dans les Hamiltoniens partenaires sont identiques, contrairement à ce qu'on a obtenu dans les relations (2.19) et (2.21).

Le spectre associé à (3.6) est obtenu sous la forme [34, 35, 36]

$$E_n = \hbar \alpha \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2 \lambda}{2m_0} n^2, \quad (3.9)$$

avec

$$\alpha = \frac{\hbar}{2m_0} \left( -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \left( \frac{2m_0 \omega}{\hbar} \right)^2} \right). \quad (3.10)$$

En ce qui nous concerne ici, nous considérons l'espace de Hilbert usuel  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  et nous suivons la démarche présentée dans la section 2.3.1, valide dans cet espace. Nous allons montrer que le problème demeure soluble dans un cadre général, c'est-à-dire en tenant compte des

paramètres d'ambiguïté, bien que les calculs soient parfois plus ardues.

### 3.2 Expression du potentiel effectif

Un calcul simple permet d'obtenir les expressions des dérivées première et seconde de la distribution de la masse sous les formes

$$M'(x) = -\frac{2\lambda x}{(1 + \lambda x^2)^2}, \quad (3.11)$$

et

$$M''(x) = -\frac{2\lambda}{(1 + \lambda x^2)^2} + \frac{8\lambda^2 x^2}{(1 + \lambda x^2)^3}. \quad (3.12)$$

En insérant (3.11) et (3.12) dans (2.9), on obtient l'expression du potentiel d'ambiguïté sous la forme

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta}(x) &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{1}{2}(\beta + 1) \left( -2\lambda + \frac{8\lambda^2 x^2}{1 + \lambda x^2} \right) - [\alpha(\alpha + \beta + 1) + \beta + 1] \frac{4\lambda^2 x^2}{1 + \lambda x^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \lambda(\beta + 1) + 4\alpha(\alpha + \beta + 1) \frac{\lambda^2 x^2}{1 + \lambda x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

On remarque ainsi que, à des constantes additive et multiplicative près, le potentiel d'ambiguïté a la même forme que le potentiel physique (3.2). Ceci est dû en fait au choix particulier de la distribution de la masse.

Le potentiel effectif, relation (2.11), s'écrit donc

$$\tilde{V}(x) = a + \frac{bx^2}{1 + \lambda x^2}, \quad (3.14)$$

avec

$$a = -\frac{\hbar^2 \lambda (\beta + 1)}{2m_0}, \quad (3.15)$$

et

$$b = \frac{m_0 \omega^2}{2} - \frac{2\hbar^2 \lambda^2}{m_0} \alpha(\alpha + \beta + 1). \quad (3.16)$$

Ainsi, le potentiel effectif est donné, à une constante additive près, par une expression similaire à celle du potentiel physique. Nous devons, cependant imposer que le paramètre  $b$

soit strictement positif, ce qui nous conduit donc à imposer une contrainte sur les paramètres d'ambiguïté, sous la forme

$$\alpha(\alpha + \beta + 1)\lambda^2 < \left(\frac{m_0\omega}{2\hbar}\right)^2. \quad (3.17)$$

### 3.3 Expressions du superpotentiel et des opérateurs d'annihilation et de création

Au vu de la forme du potentiel effectif, donné par (3.14), nous proposons le superpotentiel sous la forme

$$W(x; \gamma) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{\gamma x}{\sqrt{1 + \lambda x^2}}, \quad (3.18)$$

où le facteur  $\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}$  est introduit par commodité et  $\gamma$  est un paramètre réel.

Les opérateurs d'annihilation et de création  $A$  et  $A^+$ , donnés par (2.15) et (2.16), s'écrivent dans ce cas comme

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( \sqrt{1 + \lambda x^2} \frac{d}{dx} + \frac{\gamma x}{\sqrt{1 + \lambda x^2}} \right), \quad (3.19)$$

et

$$A^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left( -\frac{d}{dx} \sqrt{1 + \lambda x^2} + \frac{\gamma x}{\sqrt{1 + \lambda x^2}} \right), \quad (3.20)$$

qui se réduisent à ceux de l'oscillateur harmonique linéaire (1.7) et (1.8), pour  $\lambda = 0$ .

En insérant (3.1) et (3.18) dans (2.18), on obtient l'expression de la fonction propre de l'état fondamental sous la forme

$$\psi_0(x) \propto (1 + \lambda x^2)^{-\frac{\gamma}{2\lambda}}. \quad (3.21)$$

Cette fonction satisfait aux conditions aux limites,  $\psi_0(\pm\infty) = 0$ , si  $\gamma$  est un paramètre strictement positif. En outre dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , elle se réduit à

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_0(x) \propto e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}, \quad (3.22)$$

qui coïncide évidemment avec la fonction propre de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique linéaire.



### 3.4 Expressions des potentiels partenaires et de l'énergie de l'état fondamental

Pour déterminer le paramètre  $\gamma$  ainsi que l'expression de l'énergie de l'état fondamental, en fonction des paramètres du problème, on doit tout d'abord déterminer les expressions des potentiels partenaires et utiliser la relation (2.20). Pour ce faire, on montre d'abord les relations suivantes :

$$W^2(x; \gamma) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\gamma^2 x^2}{1 + \lambda x^2}, \quad (3.23)$$

$$\left( \frac{W(x; \gamma)}{\sqrt{M(x)}} \right)' = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \gamma, \quad (3.24)$$

$$\frac{W'(x)}{\sqrt{M(x)}} + \frac{W(x)M'(x)}{2M^{\frac{3}{2}}(x)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \gamma \left( 1 - \frac{2\lambda x^2}{1 + \lambda x^2} \right), \quad (3.25)$$

et

$$\left( \frac{3}{4} \frac{M'^2(x)}{M^3(x)} - \frac{1}{2} \frac{M''(x)}{M^2(x)} \right) = \lambda - \frac{\lambda^2 x^2}{1 + \lambda x^2}. \quad (3.26)$$

En substituant les relations (3.18-3.26) dans (2.20) et (2.24), on obtient les potentiels partenaires, donnés par les expressions suivantes :

$$V_-(x; \gamma) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{\gamma^2 x^2}{1 + \lambda x^2} - \gamma \right), \quad (3.27)$$

et

$$V_+(x; \gamma) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{(\gamma - \lambda)^2 x^2}{1 + \lambda x^2} + \gamma - \lambda \right), \quad (3.28)$$

qui se réduisent exactement à ceux de l'oscillateur harmonique linéaire pour  $\lambda = 0$ .

En substituant (3.14) et (3.27) dans (2.20), et tenant compte du fait que  $\gamma$  doit être un paramètre strictement positif, on obtient

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m_0 b}{\hbar^2}}. \quad (3.29)$$

L'expression de l'énergie de l'état fondamental,  $E_0$ , sera aussi donnée sous la forme

$$\begin{aligned} E_0 &= a + \frac{\hbar^2}{2m_0}\gamma \\ &= a + \sqrt{\frac{\hbar^2 b}{2m_0}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.5 Expressions des énergies des états excités

Pour déterminer les énergies des états excités possibles, remarquons que les potentiels partenaires  $V_-(x; \gamma)$  et  $V_+(x; \gamma)$  satisfont à la condition d'invariance de forme,

$$V_+(x; a_0) = V_-(x; a_1) + R(a_0), \quad (3.31)$$

avec

$$a_0 = \gamma, \quad (3.32)$$

$$a_1 = a_0 - \lambda = \gamma - \lambda, \quad (3.33)$$

et

$$R(a_0) = \frac{\hbar^2}{m_0}(a_0 - \lambda). \quad (3.34)$$

Par généralisation, le paramètre  $a_k$  relatif au potentiel partenaire de la  $k$ ème génération et le reste correspondant seront donnés par

$$a_k = a_0 - k\lambda \quad (3.35)$$

et

$$R(a_k) = \frac{\hbar^2}{m_0}(a_0 - (k+1)\lambda). \quad (3.36)$$

Par conséquent, et compte tenu de (1.108), le spectre associé à  $V_-(x; \gamma)$  sera donné par

$$\begin{aligned} E_n^{(-)} &= \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) = \frac{\hbar^2}{m_0} \left( na_0 - \frac{\lambda}{2}n(n+1) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{m_0} \left( n\gamma - \frac{\lambda}{2}n(n+1) \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le nombre entier  $n$  doit être limité par une valeurs  $n_{\max}$ , qui peut être fixée en imposant la condition que  $E_n^{(-)}$  doit être une fonction croissante par rapport à la variable  $n$ . Par conséquent la dérivée de  $E_n^{(-)}$  par rapport à  $n$  (pris comme une variable continue) doit être positive. On obtient donc

$$0 \leq n < \left\{ \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{1}{2} \right\} = n_{\max}, \quad (3.38)$$

où  $\{x\}$  désigne le plus grand entier, inférieur ou égal à  $(\frac{\gamma}{\lambda} - \frac{1}{2})$ .

En tenant compte de (1.109), (3.30) et (3.37), on obtient l'expression de l'énergie du nième état excité sous la forme

$$\begin{aligned} E_n &= a + \frac{\hbar^2}{2m_0} ((2n+1)\gamma - \lambda n(n+1)) \\ &= -\frac{\hbar^2 \lambda (\beta+1)}{2m_0} + \frac{\hbar^2}{2m_0} ((2n+1)\gamma - \lambda n(n+1)) \\ &= \hbar \bar{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda \hbar^2}{2m_0} n(n+1) + a, \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{1 - \left( \frac{2\hbar\lambda}{\omega m_0} \right)^2 \alpha(\alpha + \beta + 1)}, \quad (3.40)$$

et  $n$  donné par (3.38).

Dans la limite  $\lambda = 0$ , on retrouve bien sur le spectre de l'oscillateur harmonique linéaire (usuel).

Pour le cas particulier  $\alpha = 0$  et  $\beta = -1$ , très populaire dans la littérature, on obtient

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda \hbar^2}{2m_0} n(n+1), \quad (3.41)$$

qui ne coïncide pas avec le résultat des références [34, 35, 36], exprimé par (3.9-3.10)

Notre résultat est donc plus général et intéressant car il tient compte de l'effet des paramètres d'ambiguïté. En comparant, (3.39) et (3.41), on constate que l'effet des paramètres d'ambiguïté se manifeste d'une part, par une translation des niveaux d'énergie par la valeur  $a$  et d'autre part, par le remplacement de  $\omega$  par  $\bar{\omega}$ . Ce dernier effet, peut conduire à une amplification ou désamplification des niveaux d'énergie selon le signe de  $(\alpha + \beta + 1)$ . Aussi, en donnant aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  des valeurs particulières, on peut ajuster les niveaux d'énergie ainsi que leur

nombre de plusieurs manières.

Pour finir, notons que les expressions des fonctions propres peuvent être facilement obtenues en utilisant la formule générale (1.109).

## Chapitre 4

# Etude du spectre non relativiste pour une particule de masse dépendante de la position, placée dans un potentiel de Hulthén

Dans ce chapitre nous allons aborder la résolution de l'équation de Schrödinger pour un modèle intéressant en utilisant l'approche de la transformation de la fonction propre. En fait, cette étude peut s'appliquer à plusieurs potentiels physiques intéressants mais nous nous restreindrons à considérer en détail, le potentiel de Hulthén avec une distribution de la masse particulière..

### 4.1 Potentiel effectif pour une distribution de la masse du type

$$M(x) = (1 - e^{-\lambda x})^{-p}$$

Considérons une particule dont la distribution de la masse est une fonction qui dépend de deux paramètres réels  $\lambda$  et  $p$ , donnée par

$$m(x) = m_0 M(x) = \frac{m_0}{(1 - e^{-\lambda x})^p}. \quad (4.1)$$

où  $m_0$  est une constante positive, représentant la masse asymptotique. Puisque  $m(x)$  doit être définie positive sur l'intervalle du mouvement permis, ce dernier doit être limité au demi axe positif, c'est-à-dire  $x \geq 0$ .

Par un calcul simple, on obtient

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = -\frac{p\lambda}{e^{\lambda x} - 1} \quad (4.2)$$

et

$$\frac{M''(x)}{M(x)} = \frac{p\lambda^2}{e^{\lambda x} - 1} + \frac{p(p+1)\lambda^2}{(e^{\lambda x} - 1)^2}. \quad (4.3)$$

En substituant (4.2) et (4.3) dans (2.30), le potentiel effectif s'écrit

$$V_E(x) = \frac{m_0}{(1 - e^{-\lambda x})^p} (V(x) - E) - \frac{a_p}{e^{\lambda x} - 1} + \frac{b_p}{(e^{\lambda x} - 1)^2}, \quad (4.4)$$

avec

$$a_p = -\frac{\hbar^2 \lambda^2}{4} \beta p, \quad (4.5)$$

et

$$b_p = -\frac{\hbar^2 \lambda^2}{2} \left( p^2 \left[ \alpha(\alpha + \beta + 1) + \frac{1}{4} \right] + \frac{p(p-1)}{2} \beta \right), \quad (4.6)$$

Pour que  $V_E(x)$  soit un potentiel supersymétrique, il faut qu'on puisse lui associer un superpotentiel. Ceci dépend évidemment à la fois du potentiel physique  $V(x)$  et du paramètre  $p$ . Autrement dit, le potentiel physique et la distribution de la masse doivent être interdépendants. Les modèles évidents qui peuvent mener à un potentiel effectif supersymétrique sont, le potentiel de Hulthén pour  $p = 1$  et le potentiel de Morse pour  $p = 2$ . Dans ce travail, nous allons nous occuper en détail du premier modèle et déterminer toutes les conditions nécessaires sur les paramètres d'ambiguïté pour qu'il soit exactement soluble. Le modèle du potentiel de Morse peut être traité d'une manière similaire.

## 4.2 Potentiel physique du type Hulthén

### 4.2.1 Expression du potentiel effectif

Nous considérons ici le potentiel physique comme étant le potentiel de Hulthén

$$V(x) = -\frac{V_0}{e^{\lambda x} - 1}, \quad (4.7)$$

défini pour  $x \geq 0$ , où  $V_0$  est un paramètre positif. Dans ce cas, nous donnons au paramètre  $p$  la valeur 1.

En substituant (4.7) dans (4.4) et prenant  $p = 1$ , on obtient le potentiel effectif sous la forme d'un potentiel du type Hulthén généralisé, donné par

$$V_E(x) = -\frac{m_0(V_0 + E) + a_1}{e^{\lambda x} - 1} + \frac{b_1 - m_0 V_0}{(e^{\lambda x} - 1)^2} - m_0 E, \quad (4.8)$$

avec

$$a_1 = -\frac{\hbar^2 \lambda^2}{4} \beta, \quad (4.9)$$

et

$$b_1 = -\frac{\hbar^2 \lambda^2}{2} \left( \alpha (\alpha + \beta + 1) + \frac{1}{4} \right). \quad (4.10)$$

Les allures de  $V(x)$  pour  $V_0 = 1$  et de la distribution de la masse sont représentées sur les figures 3 et 4 pour deux valeurs de  $\lambda$ .

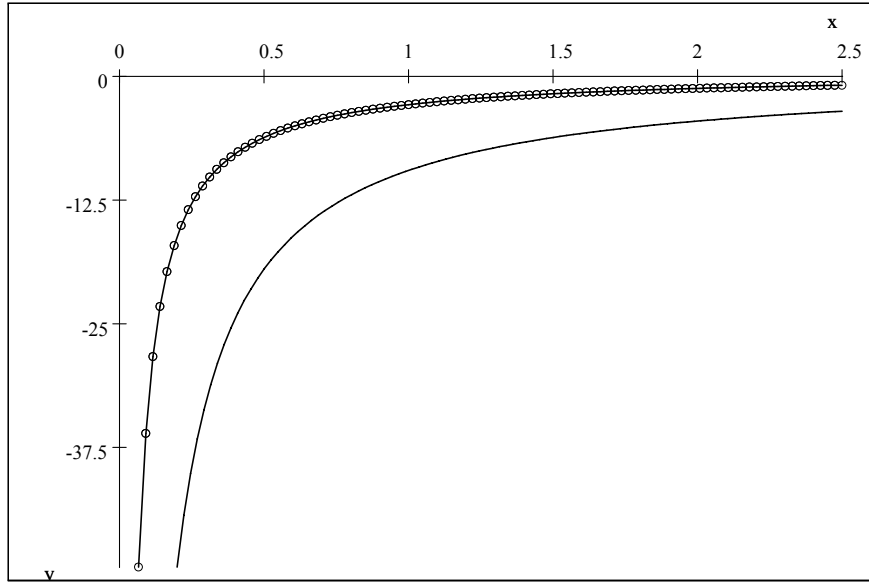


Figure 3 : Allure de  $V(x)$  pour  $V_0 = 1$ ,  $\lambda = 0.1$  et  $0.3$ .

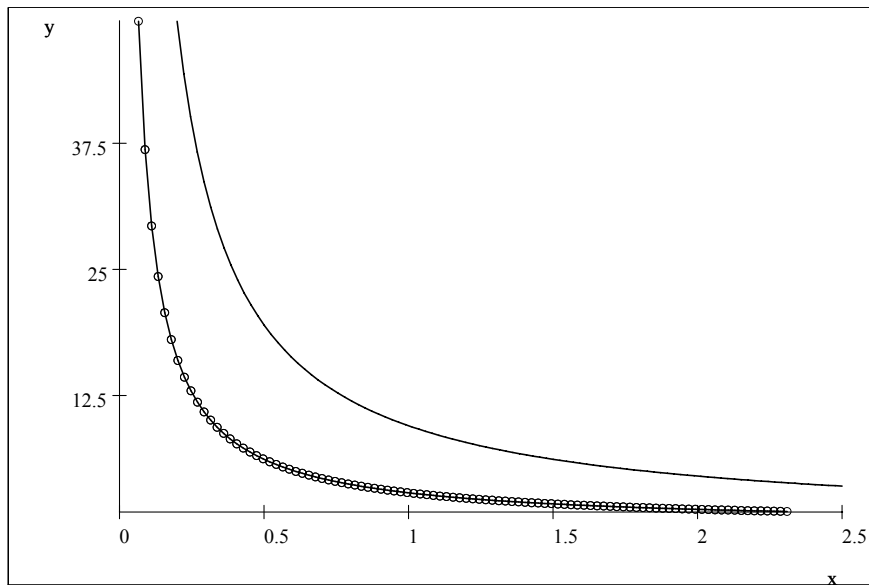


Figure 4 : Allure de  $M(x)$  pour  $\lambda = 0.1$  et  $0.3$ .

Le potentiel (4.8) est du type Rosen-Morse dépendant de plusieurs paramètres, à priori libres. Cependant, il ne peut avoir d'états liés que si ces paramètres satisfont certaines contraintes entre eux, contrairement à ce qui a été obtenu dans la référence [38]. Comme nous allons le



voir, ces contraintes seront déterminés au fur et à mesure que nous développons l'approche de la supersymétrie pour déterminer le spectre des états liés.

### 4.2.2 Condition pour que la particule ne chute pas au centre du potentiel

Avant de passer à la détermination du spectre et des contraintes nécessaires sur les paramètres du potentiel (4.8), remarquons tout d'abord que ce dernier est singulier au voisinage de l'origine. En fait, il se comporte comme  $1/x^2$ , où le coefficient  $(\hbar - m_0 V_0)/\lambda^2$  peut être positif ou négatif selon le choix des paramètres d'ambiguïté, de  $\lambda$  et de  $V_0$ . Si le signe du coefficient est positif, le potentiel est diffusif, et il est attractif pour un coefficient négatif. Le problème est que l'attraction peut être si forte que la particule sera absorbée au centre du potentiel (à l'origine). On dit dans ce cas qu'il y a chute de la particule au centre du potentiel [39]. Par conséquent, la particule restera indéfiniment au centre et il n'y aura pas d'états liés au sens propre du terme. Le but est alors de déterminer la contrainte qu'il faut imposer au coefficient  $(b_1 - m_0 V_0)$  pour éviter que la particule chute au centre du potentiel.

Au voisinage de l'origine,  $x \rightarrow 0$ , l'équation (2.31), pour une énergie finie, s'écrit

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta}{x^2}\right)\Phi(x) = 0, \quad (4.11)$$

avec

$$\delta = \frac{2}{\hbar^2 \lambda^2} (b_1 - m_0 V_0), \quad (4.12)$$

où nous avons négligé le terme en  $1/x$  et les termes finis.

En cherchant des solutions sous la forme  $\Phi(x) \propto x^s$ , on voit que  $s$  peut prendre les valeurs

$$s_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}, \quad s_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}, \quad (4.13)$$

de sorte que la solution générale du problème original au voisinage de  $x = 0$ , s'écrit

$$\psi(x) \propto Ax^{\sqrt{\delta + \frac{1}{4}}} + Bx^{-\sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}.$$

Pour que  $\Psi(x)$  corresponde à un état lié, il doit être réel et s'annuler en  $x = 0$ . Ainsi, on

doit prendre  $B = 0$  et imposer que  $\delta$  satisfait à la contrainte suivante :

$$\delta > -\frac{1}{4}. \quad (4.14)$$

Ainsi, pour que la particule ne chute pas au centre du pntiel, la contrainte (4.14) doit être satisfaite, ce qui conduit à une contrainte reliant les paramètres d'ambiguïté aux autres paramètres du potentiel et de la masse, donnée par

$$\alpha(\alpha + \beta + 1) + \frac{2m_0V_0}{\hbar^2\lambda^2} < 0. \quad (4.15)$$

On constate donc que les paramètres d'ambiguïté ne peuvent pas être totalement libres. Par exemple si on prend  $\beta = -1$ , ce qui correspond à prendre le terme cinétique sous la forme particulière (2.4), il est impossible de satisfaire la contrainte (4.15) pour  $V_0 \geq 0$  et par conséquent la particule sera absorbée à l'origine.

### 4.2.3 Superpotentiel et fonction propre de l'état fondamental

Pour résoudre l'équation de Schrödinger, cherchons le superpotentiel sous la forme

$$W(x; A, B) = \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}} \left[ \frac{A}{e^{\lambda x} - 1} + \frac{1}{2} \left( A - \frac{B}{A} \right) \right], \quad (4.16)$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres réels et le facteur  $\frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}}$  est introduit par commodité.

Les potentiels partenaires s'écrivent alors comme

$$V_E^{(-)}(x) = \frac{\lambda^2\hbar^2}{2} \left[ \frac{A(A+1)}{(e^{\lambda x} - 1)^2} + \frac{A(A+1) - B}{(e^{\lambda x} - 1)} + \frac{1}{4} \left( A - \frac{B}{A} \right)^2 \right], \quad (4.17)$$

et

$$V_E^{(+)}(x) = \frac{\lambda^2\hbar^2}{2} \left[ \frac{A(A-1)}{(e^{\lambda x} - 1)^2} + \frac{A(A-1) - B}{(e^{\lambda x} - 1)} + \frac{1}{4} \left( A - \frac{B}{A} \right)^2 \right]. \quad (4.18)$$

Pour fixer les paramètres  $A$  et  $B$ , on doit imposer que

$$V_E^{(-)}(x) = V_E(x) - \varepsilon_0, \quad (4.19)$$

ce qui donne

$$A(A+1) = \frac{2}{\lambda^2 \hbar^2} (b_1 - m_0 V_0), \quad (4.20)$$

$$B - A(A+1) = \frac{2}{\lambda^2 \hbar^2} (m_0 (V_0 + E) + a_1), \quad (4.21)$$

et

$$\varepsilon_0 = -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{8} \left( A - \frac{B}{A} \right)^2 - m_0 E.. \quad (4.22)$$

La fonction propre non normalisée de l'état fondamental s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_0(x; A, B) &\propto \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{\hbar} \int^x W(y; A, B) dy \right] \\ &\propto \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-A} e^{\frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{A} \right) \lambda x}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pour que  $\Phi_0(x; A, B)$  soit la fonction propre de l'état fondamental du potentiel (4.4), il faut qu'elle soit de carré sommable. Ceci exige donc qu'elle doit nécessairement satisfaire les conditions aux limites

$$\Phi_0(0) = \Phi_0(\infty) = 0, \quad (4.24)$$

qui impliquent que les paramètres  $A$  et  $B$  doivent vérifier les contraintes suivantes :

$$A < 0, \quad (4.25)$$

et

$$B > A^2. \quad (4.26)$$

Cependant, notre but final est la détermination des énergies propres et des fonctions propres du problème original. Par conséquent, la fonction propre correspondant à l'état fondamental du problème original doit être aussi de carré sommable. Cette dernière est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi_0(x; A, B) &\propto \sqrt{M(x)} \Phi_0(x; A, B) \\ &\propto \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-\left( A + \frac{1}{2} \right)} e^{\frac{1}{2} \left( A + \frac{B}{A} + 1 \right) \lambda x}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Elle doit satisfaire donc des conditions aux limites similaires, tels que

$$\Psi_0(0) = \Psi_0(\infty) = 0, \quad (4.28)$$

qui impliquent que les paramètres  $A$  et  $B$  doivent vérifier les contraintes suivantes :

$$A < -\frac{1}{2}, \quad (4.29)$$

et

$$B > A^2. \quad (4.30)$$

Ainsi, pour qu'à la fois  $\Phi_0(0)$  et  $\Psi_0(0)$  soient de carrés sommables, et par conséquent avoir une supersymétrie non brisée, on doit exiger la satisfaction des relations (4.29) et (4.30) simultanément.

En résolvant (4.20) et (4.21), tout en tennant compte de la contrainte (4.29), on trouve les paramètres  $A$  et  $B$  sous les formes suivantes

$$A = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\lambda^2 \hbar^2} (b_1 - m_0 V_0)} \right), \quad (4.31)$$

et

$$B = \frac{2}{\lambda^2 \hbar^2} (a_1 + b_1 + m_0 E). \quad (4.32)$$

Notons que la positivité de l'expression sous le radical dans (4.31) est assurée par la contrainte (4.15). Par ailleurs, (4.30) conduit à une nouvelle contrainte sur le paramètre  $E$ , qui s'exprime sous la forme

$$E > -V_0 + \frac{\lambda^2 \hbar^2}{4m_0} \left( \beta + 1 + 2\sqrt{-\alpha(\alpha + \beta + 1) - \frac{2m_0 V_0}{\lambda^2 \hbar^2}} \right), \quad (4.33)$$

et qui donne une borne inférieure sur l'énergie de l'état fondamental pour le problème original.

#### 4.2.4 Invariance de forme et spectre d'énergies

Si on considère  $a_0 = A$  comme un paramètre dans le potentiel partenaire  $V_E^{(-)}(x, a_0)$ , on s'aperçoit que la condition d'invariance de forme est satisfaite. En effet, on a

$$V_E^{(+)}(x, a_0) = V_E^{(-)}(x, a_1) + R(a_0), \quad (4.34)$$

avec

$$R(a_0) = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2} \left[ \frac{1}{4} \left( a_0 - \frac{B}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( a_1 - \frac{B}{a_1} \right)^2 \right], \quad (4.35)$$

et

$$a_1 = f(a_0) = a_0 - 1. \quad (4.36)$$

Il vient alors que

$$R(a_k) = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2} \left[ \frac{1}{4} \left( a_k - \frac{B}{a_k} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( a_{k+1} - \frac{B}{a_{k+1}} \right)^2 \right]. \quad (4.37)$$

Ainsi, l'énergie du nième niveau excité correspondant au partenaire  $V_E^{(-)}(x, A)$  sera donnée

$$\varepsilon_n^{(-)} = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2} \left[ \frac{1}{4} \left( A - \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( A - n - \frac{B}{A - n} \right)^2 \right], \quad (4.38)$$

de sorte que l'expression de l'énergie correspondant au nième état du potentiel effectif  $V_E(x)$  est donnée par

$$\varepsilon_n = -m_0 E - \frac{\lambda^2 \hbar^2}{8} \left( A - n - \frac{B}{A - n} \right)^2, \quad (4.39)$$

où  $n$  est un entier positif ou nul satisfaisant à

$$B > (A - n)^2. \quad (4.40)$$

Compte tenu de (2.32), l'énergie  $E_n$  du nième état excité du problème original sera donnée par la solution réelle de l'équation

$$m_0 E + \frac{\lambda^2 \hbar^2}{8} \left( A - n - \frac{2}{\lambda^2 \hbar^2} \frac{a_1 + b_1}{A - n} - \frac{2}{\lambda^2 \hbar^2} \frac{m_0}{A - n} E \right)^2 = 0, \quad (4.41)$$

qui soit compatible avec (4.40).

On montre alors que la réalité des solutions de (4.41) exige que

$$a_1 + b_1 > 0, \quad (4.42)$$

qui mène à une nouvelle contrainte sur les paramètres d'ambiguïté, donnée par

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) < 0. \quad (4.43)$$

Enfin, en tenant compte de (4.40), on trouve le spectre d'énergie du problème original sous la forme

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m_0} \left( A - n + \sqrt{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)} \right)^2, \\ &= -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m_0} \left( -n - \frac{1}{2} - \sqrt{-\left(\alpha(\alpha + \beta + 1) + \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}\right)} + \sqrt{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec

$$0 \leq n < \left( \sqrt{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)} - \sqrt{-\left(\alpha(\alpha + \beta + 1) + \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}\right)} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.45)$$

Par conséquent, la condition qu'il faut encore imposer pour qu'il existe au moins un état lié est

$$\sqrt{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)} > \frac{1}{2} + \sqrt{-\left(\alpha(\alpha + \beta + 1) + \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}\right)}. \quad (4.46)$$

En conclusion, on peut dire que l'existence d'états liés avec énergies réelles est subordonnée par la satisfaction simultanée des trois contraintes (4.15), (4.43) et (4.46). Par ailleurs, leur nombre dépend aussi du choix de ces paramètres selon (4.45). Pour  $m_0, \lambda$  et  $V_0$  fixés, il peut être optimisé sur les paramètres d'ambiguïté.

En pratique, on doit tout d'abord choisir les paramètres d'ambiguïté selon la contrainte (4.43) et ensuite fixer le domaine de variation de  $V_0$  en utilisant les deux autres contraintes. Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter quelques exemples illustratifs.

### 4.2.5 Illustration par quelques cas spéciaux

Pour satisfaire la contrainte (4.43), on doit choisir les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\beta > 0 \text{ et } -\frac{1}{2} > \alpha > -\left(\beta + \frac{1}{2}\right), \quad (4.47)$$

ou bien

$$\beta < 0 \text{ et } -\left(\beta + \frac{1}{2}\right) > \alpha > -\frac{1}{2}; \quad (4.48)$$

la valeur  $\beta = 0$  étant exclue car dans ce cas la contrainte (4.43) ne sera jamais satisfaite.

En dehors de ces intervalles, pour les paramètres d'ambiguïté, le spectre du problème original est discret mais complexe. Les valeurs propres se présentent en paires ; chaque valeur complexe lui correspond une valeur complexe conjugué. Cependant, le potentiel effectif demeure hermitien. Nous allons nous intéresser aux problèmes avec spectres réels et dresser quelques cas spéciaux.

#### Cas avec $\beta = 1$ et $\alpha = -1$

Dans ce cas, la partie cinétique de Von Roos s'écrit sous la forme symétrique suivante:

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} m(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{m(x)}. \quad (4.49)$$

La contrainte (4.46) se réduit à

$$\sqrt{1 - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}} < 0, \quad (4.50)$$

qui est impossible à satisfaire quels que soient les autres paramètres. Par conséquent, ce choix conduit à un potentiel effectif ne possédant aucun état lié.

#### Cas avec $\beta = 2$ et $\alpha = -\frac{3}{2}$

La partie cinétique hermitienne s'écrit aussi sous une forme symétrique, donnée par

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}(x)} \frac{d}{dx} m^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}(x)}. \quad (4.51)$$

Les contraintes (4.15) et (4.46) se réduisent à la condition suivante sur le paramètre  $V_0$

$$\frac{9}{8} \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0} > V_0 > \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0}, \quad (4.52)$$

et la contrainte (4.45) s'écrit

$$0 \leq n < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}}. \quad (4.53)$$

Ainsi, dans ce cas, il existe seulement un état qui est l'état fondamental dont l'énergie est donnée par

$$E_0 = -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m_0} \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}} \right)^2 \quad (4.54)$$

En tenant compte de (2.27), (2.33) et (4.23), la fonction propre correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= N_0 \Psi_0(x; A, B)|_{E=E_0} \\ &= N_0 \Psi_0(x, A, B_0) \\ &= N_0 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-(A+\frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}(1+A+\frac{B_0}{A})\lambda x}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec  $B_0 = B(E_0)$  et  $N_0$  est une constante de normalisation. On obtient donc

$$\psi_0(x) = N_0 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-(A+\frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}(1+A+\frac{B_0}{A})\lambda x}. \quad (4.56)$$

### Cas avec $\beta = 5$ et $\alpha = -3$

Dans ce cas, on a

$$\left\{ \frac{p^2}{m(x)} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{m^3(x)} \frac{d}{dx} m^5(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{m^3(x)}. \quad (4.57)$$

Les contraintes (4.15) et (4.46) se réduisent à la condition suivante sur le paramètre  $V_0$ .

$$\frac{9}{2} \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0} > V_0 > \frac{5}{2} \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0}, \quad (4.58)$$



La relation (4.45) s'écrit alors

$$0 \leq n < 2 - \sqrt{9 - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}}. \quad (4.59)$$

Par conséquent, si  $V_0$  est telle que (4.58) est satisfaite, il existe au plus deux états liés qui sont l'état fondamental et le premier état excité. Pour

$$4 \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0} \geq V_0 > \frac{5}{2} \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0}, \quad (4.60)$$

il n'existe que l'état fondamental, dont l'énergie est donnée par

$$E_0 = -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m_0} \left( 2 - \sqrt{9 - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}} \right)^2, \quad (4.61)$$

et la fonction propre est

$$\psi_0(x, A) = N_0 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-(A+\frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}(1+A+\frac{B_0}{A})\lambda x}. \quad (4.62)$$

Si par contre, le potentiel est tel que

$$\frac{9}{2} \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0} > V_0 > 4 \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m_0}, \quad (4.63)$$

il existe, en plus de l'état fondamental, d'énergie (4.61), un premier état excité dont l'énergie sera donnée par

$$E_1 = -\frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m_0} \left( 1 - \sqrt{9 - \frac{2m_0 V_0}{\hbar^2 \lambda^2}} \right)^2. \quad (4.64)$$

La fonction propre correspondante sera donnée par

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= N_1 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W(x, A, B) \right) \Phi_0(x, A-1, B) \Big|_{E=E_1} \\ &= N_1 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W(x, A, B_1) \right) \Phi_0(x, A-1, B_1), \end{aligned} \quad (4.65)$$

avec  $B_1 = B(E_1)$  et  $N_1$ , la constante de normalisation.

Après quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= N_1 \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2A-1}{e^{\lambda x} - 1} + A - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{A-1} + \frac{B_1}{A} \right) \right) \Phi_0(x, A-1, B_1). \\
&= N_1 \left( \frac{2A-1}{e^{\lambda x} - 1} + A - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{A-1} + \frac{B_1}{A} \right) \right) \left( e^{\lambda x} - 1 \right)^{-(A-1)} e^{\frac{1}{2} \left( A-1 + \frac{B_1}{A-1} \right) \lambda x}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

On constate bien que  $\psi_1(x)$  satisfait aussi aux conditions aux limites  $\psi_1(\pm\infty) = 0$  et qu'elle a un zéro au point d'abscisse satisfaisant à l'équation

$$\frac{2A-1}{e^{\lambda x} - 1} + A - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{A-1} + \frac{B_1}{A} \right) = 0. \tag{4.67}$$

# Conclusion

Le sujet de ce mémoire s'articule sur l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique pour résoudre l'équation de Schrödinger associée à certains problèmes à une dimension avec masse dépendante de la position. Bien que d'autres approches soient aussi efficaces dans l'étude des systèmes quantiques avec masses variables dans l'espace, l'approche supersymétrique se distingue par sa manière algébrique qui est à la fois simple et élégante pour la détermination du spectre et des fonctions propres correspondantes.

Nous rappelons dans le premier chapitre tous les ingrédients de l'approche supersymétrique, parfois en détail pour rendre l'exposé plus accessible aux non familiers avec cette nouvelle approche de la mécanique quantique. Nous développons ainsi la théorie pour un système général avec masse constante et nous montrons comment obtenir son spectre et ses fonctions propres si le potentiel en question satisfait à la propriété d'invariance de forme.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons comment quantifier la partie cinétique d'un Hamiltonien classique à une dimension si la masse est fonction de la position. Nous exposons ainsi toutes les difficultés associées à la variation de la masse et nous montrons par trois approches différentes comment les surmonter.

En guise d'application, nous présentons dans les chapitres 3 et 4 des études détaillées pour deux systèmes quantiques avec masse dépendante de la position.

Le premier, traité dans le chapitre 3, concerne l'oscillateur harmonique non linéaire, qui peut être vu classiquement comme une déformation de l'oscillateur harmonique usuel, qui consiste à considérer la masse comme une fonction de la position. En mécanique quantique, le problème est vu comme une double déformation à la fois sur la masse et sur le potentiel. Nous avons traité ce problème par l'approche de la supersymétrie généralisée en considérant la symétrisation de

Von Roos et par conséquent l'introduction de paramètres d'ambiguïté dans l'Hamiltonien. Il s'est avéré que l'Hamiltonien quantique associé est un Hamiltonien supersymétrique parfait. De ce fait, il nous a été possible de lui associer un superpotentiel qui a permis un traitement exact par la supersymétrie. Le spectre est alors obtenu sous une forme compacte, tenant compte des paramètres d'ambiguïté.

L'étude du deuxième système a fait l'objet du chapitre 4, qui concerne une particule à une dimension soumise au potentiel de Hulthén et dont la variation de la masse en fonction de la position est supposée suivre une loi du type Hulthén aussi, mais qui demeure toujours positive. Nous avons traité ce système par l'approche de la transformation de la fonction propre. Il s'est avéré que l'équation de Schrödinger associée se réduit, après cette transformation, en une équation de Schrödinger aussi mais pour une particule de masse constante, placée dans un potentiel effectif du type Hulthén généralisé et dépendant de l'énergie et des paramètres d'ambiguïté. Par un *ansatz* adéquat, nous avons montré comment résoudre ce problème par l'approche de la supersymétrie décrite au chapitre 1. L'étude a été faite en détail, en explicitant toutes les contraintes que doivent satisfaire les paramètres du problème pour l'existence d'états liés. Le spectre est alors obtenu exactement et exprimé par une formule de récurrence générale. Nous avons présenté à la fin du travail quelques exemples typiques en guise d'illustration. Les techniques utilisées pour ce modèle peuvent être parfaitement appliquées à d'autres systèmes quantiques comme celui d'une particule de masse variable, placée dans le potentiel de Morse.

# Bibliographie

- [1] Y. A. Gel'fand, E. P. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971).
- [2] P. Ramond, Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971).
- [3] A. Neveu and J. Schwarz, Nucl. Phys. B **31**, 86 (1971).
- [4] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974) ; B **78**,1 (1974).
- [5] H. Nicolai, J. Phys. A : Math. Gen. **9**, 1497 (1976).
- [6] E. Witten, Dynamical breaking of symmetry, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
- [7] E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish. Acad. **46** A, 183 (1941).
- [8] L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [9] F. Cooper, B. Freedman, Ann. Phys (NY) **146**, 262 (1983).
- [10] D. Lancaster, Nuovo Cimento A **79**, 28 (1984).
- [11] L. Gendenshtein, I.V. Krive, Sov. Phys. Usp. **28**, 654 (1985).
- [12] G. Stedman, Euro. Jour. Phys. **6**, 163 (1985).
- [13] C. V. Sukmar, J. Phys. A **18**, L57 (1985).
- [14] R. Hamaker and A. R. P. Rau, Am. Jour. Phys. **54**, 928 (1986).
- [15] R. Dutt, A.Khare and U. Sukatme, Am. Jour. Phys. **56**, 163 (1988).
- [16] A. Lahiri, P. Roy and B. Bagchi, Int. Jour. Mod. Phys. A **5**, 1383 (1990).
- [17] O. L de Lange and R. E. Raab, Oxford University Press (1991).
- [18] F. Cooper, A.Khare and U. Sukhatme, Phy. Rep. **251**, 267 (1995) ; *Supersymmetry in quantum mechanics*, World Scientific Publishings, Singapor (2001).

- [19] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, 1996 (Berlin Springer).
- [20] L. Gendenshtein, JETP. lett. **38**, 356 (1983).
- [21] D. J. BenDaniel and C. B. Duke, Phys. Rev., **152**, 683 (1966).
- [22] T. Gora and F. Williams, Phys. Rev. **177**, 1179 (1969).
- [23] Q. G. Zhu and H. Kroemer, Phys, Rev, B **27**, 3519 (1983).
- [24] R. A. Morrow and K. R. Brownstein, Phys, Rev, B **30**, 678 (1984).
- [25] R. A. Morrow, Phys. Rev. B **35**, 8074 (1987).
- [26] J. Thomsen, G. T. Einevoll and P. C. Hemmer, Phys-Rev. B **39**, (1989).
- [27] T. Li and K.J. Kuhn, Phys. Rev.B **47**, 12760 (1993).
- [28] O. Mustafa and S.H. Mazharimousavi, Int. J. Theor. Phys., **46**, (2007).
- [29] O. Mustafa and S. H. Mazharimousavi, Phys. Lett. A **373**, 325 (2009).
- [30] T. Tanaka, J. Phys. A : Math. Theor. **39**, 219 (2006).
- [31] D. de Souza, J. Phys. A : Maht. Theor. **39**, 203 (2006).
- [32] O. Von Roos, Phys. Rev. B **27**, 7547 (1983).
- [33] O. Von Roos and H. Mavromatis, Phys. Rev. B **31**, 2294 (1985).
- [34] J. F. Carinena, M. F. Ranada and M. Santander, Rep. Math. Phys. **54** 285, (2004).
- [35] B. Midya, B. Roy and A. Biswas, Phys. Scr. **79**, 065003 (2009).
- [36] X.-H. Wang and Y.-B. Liu, Int. J. Theor. Phys. **50**, 2697 (2011).
- [37] J. F. Carinena, A. M. Perelomov, M. F. Ranada and M. Santander, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 085301, (2008).
- [38] R. Sever, C. Tezcan, O. Yesiltas and M. Bucurgat, Int. J. Theor. Phys., **47**, 2243 (2008).
- [39] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory*. Vol. 3 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-080-20940-1. (1977).