

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :

N° d'ordre :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER EN PHYSIQUE

Spécialité : ENERGETIQUE

Option : PHOTOTHERMIQUE

Thème :

ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS DES ENCEINTES COURBEES
AYANT DEUX PAROIS ACTIVES COURBEES VERTICALES ET DEUX PAROIS
INACTIVES COURBEES HORIZONTALES

Par

YAHIAOUI ABDELAZIZ

Soutenu le : / / 2012

Devant le jury :

Présidente : A. CHAKER Professeur Univ. Mentouri Constantine

Rapporteur : M. DJEZZAR M.C.A Univ. Mentouri Constantine

Examineurs : N. BELLEL Professeur Univ. Mentouri Constantine

D. OMEÏRI Professeur Univ. 20 Août 55 Skikda



Je dédie ce mémoire à mes parents.

A ma femme et mes enfants.

A mes frères et mes sœurs.

A tous mes amis.



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Djeddar Mahfoud, Maître de conférences à l'université Mentouri Constantine de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestions.

Je tiens à remercier sincèrement Madame Chaker Abla, Professeur à l'université Mentouri Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen et ce malgré ses nombreuses occupations, qu'elle trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Messieurs Bellel Nadir Professeur à l'université Mentouri Constantine et Omeïri Djamel Professeur à l'université 20 août 55 Skikda, ont accepté d'examiner ce travail, qu'ils trouvent ici, l'expression de mes sincères remerciements.

Enfin, Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Nomenclature

Lettres latines :

a :	Diffusivité thermique. ($m^2 \cdot s^{-1}$)
C_p :	Capacité calorifique massique du fluide à pression constante. ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
D_h :	Longueur caractéristique. (m)
\vec{g} :	Vecteur du champ d'accélération de la pesanteur. ($m \cdot s^{-2}$)
h :	Coefficient métrique dimensionnel défini dans la relation (2.20). (m)
H :	Coefficient métrique adimensionnel.
K_{eq} :	Conductivité thermique équivalente locale.
$\overline{K_{eq}}$:	Valeur moyenne de la conductivité thermique équivalente locale K_{eq} .
L :	Constante définie dans le système de coordonnées bicylindriques. (m)
Nu :	Nombre de Nusselt local.
\overline{Nu} :	Nombre de Nusselt moyen.
P :	Pression au sein du fluide. ($N \cdot m^{-2}$)
q :	Densité de flux de chaleur. ($W \cdot m^{-2}$)
S_ϕ :	Terme de source figurant dans l'équation. (3.3)
t :	Temps. (s)
T :	Température du fluide. (K)
T_1 :	Température chaude. (K)
T_2 :	Température froide. (K)
T_d :	Ecart de température $T_d = T - T_0$. (K)
ΔT :	Ecart de température $\Delta T = T_1 - T_2$. (K)
u, v :	Composantes de vitesse en coordonnées cartésiennes. ($m \cdot s^{-1}$)
\vec{V} :	Vecteur vitesse du fluide. ($m \cdot s^{-1}$)
V_η, V_θ :	Composantes de la vitesse suivant η et θ . ($m \cdot s^{-1}$)

x, y, z : Coordonnées cartésiennes. (m)

Lettres grecques :

α : Angle d'inclinaison.(°)

λ : Conductivité thermique du fluide. ($W. m^{-1}. K^{-1}$)

β : Coefficient de dilatation thermique a pression constante. (K^{-1})

μ : Viscosité dynamique du fluide . ($kg. m^{-1}.s^{-1}$)

ν : Viscosité cinématique du fluide. ($m^2. s^{-1}$)

ρ : Masse volumique du fluide. ($kg. m^{-3}$)

ϕ : Fonction générale représente (T^+ ou ω^+) figurant dans l'équation (3.3).

Γ_ϕ : Coefficient de diffusion adimensionnel figurant dans l'équation (3.3).

τ_{ij} : Tenseur des contraintes visqueuses.

η, θ, z : Coordonnées bicylindriques.

ω : Vorticité. (s^{-1})

ψ : Fonction de courant. ($m^2. s^{-1}$)

Nombres adiabatiques :

Gr : Nombre de Grashof $Gr = \frac{g \beta \Delta T D_h^3}{\nu^2}$

P_r : Nombre de Prandtl $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$

R_a : Nombre de Rayleigh $R_a = Gr. P_r$

Exposant :

+

Paramètres adimensionnels.

Indices :

i : Indice des nœuds suivant η .

j : Indice des nœuds suivant θ .

η : Suivant la coordonnée η .

θ : Suivant la coordonnée θ .

Sommaire

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	2
CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE	7
2.1. Description du problème	7
2.2. Approximation de Boussinesq	8
2.3. Hypothèses simplificatrices	8
2.4. Formulation du problème	9
2.4.1. Formulation vectorielle du problème	9
2.4.2. Formulation indicielle	10
2.4.3. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes	11
2.5. Equation de vortacité	11
2.6. Introduction des coordonnées bicylindriques	12
2.7. Adimensionalisation	14
2.8. Coefficients d'échange de chaleur	16
2.8.1. Valeur locale du nombre de Nusselt	16
2.8.2. Nombre de Nusselt moyen	16
CHAPITRE 3 – FORMULATION NUMERIQUE	17
3.1. Introduction	17
3.2. Méthode de résolution numérique	18
3.2.1. Méthode des volumes finis	18
3.2.1.1. Etapes de la méthode des volumes finis (MVF)	18
3.2.2. Volume élémentaire d'intégration	19
3.2.3. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable ϕ dans le volume de contrôle	21
3.2.3.1. Intégration de l'équation du transfert	22
3.2.3.2. Linéarisation du terme source	23
3.2.3.3. Schémas de discrétisation spatiale	26
3.2.3.3.1. Schéma des différences centrées	26
3.2.3.3.2. Schéma Upwind	26

3.2.3.3.3. Schéma Exponentiel	27
3.2.3.3.4. Schéma hybride	27
3.2.3.3.5. Schéma Power Law	28
3.3. Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)	28
3.3.1. Détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$)	30
3.3.2. Discrétisation des conditions aux limites	33
3.3.2.1. Description du problème	33
3.3.2.2. Adimensionnement des conditions aux limites	34
3.3.2.3. Discrétisation des conditions aux limites	34
3.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	36
3.4.1. Discrétisation des conditions aux limites	37
3.5. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	38
3.5.1. Discrétisation des conditions aux limites	39
3.6. Discrétisation des composantes de la vitesse	40
3.7. Processus de calcul	40
CHAPITRE 4 – RESULTATS ET DISCUSSIONS	43
4.1. Introduction	43
4.2. Etude du maillage	43
4.3. Validation	46
4.3.1. Comparaison des lignes de courants	48
4.3.2. Comparaison des isothermes	48
4.4. Convection naturelle dans une enceinte carrée	49
4.4.1. Influence du nombre de Rayleigh	49
4.4.1.1. Isothermes et lignes de courants	49
4.4.1.2. Nombre de Nusselt local	52
4.4.1.2.1. Variation du nombre de Nusselt local	52
4.4.1.2.2. Variation du nombre de Nusselt moyen	54
4.5. Convection naturelle dans une enceinte à parois courbées	55
4.5.1. Convection naturelle dans une enceinte à parois horizontales convexes et parois verticales concaves (enceinte A)	55
4.5.1.1. Influence du nombre de Rayleigh	55

4.5.1.1.1. Isothermes et lignes de courants	55
4.5.1.1.2. Variation du nombre de Nusselt local	58
4.5.1.1.3. Variation du nombre de Nusselt moyen	60
4.5.2. Convection naturelle dans une enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes (enceinte B)	61
4.5.2.1. Influence du nombre de Rayleigh	61
4.5.2.1.1. Isothermes et lignes de courants	61
4.5.2.1.2. Variation du nombre de Nusselt local	63
4.5.2.1.3. Variation du nombre de Nusselt moyen	66
4.6. Tableau de comparaison	67
4.7. Comparaison des conductivités thermiques équivalentes pour différentes enceintes	68
4.8. Etude des températures au sein des trois enceintes pour $Ra=10^3$	69
4.8.1. Enceinte carrée	69
4.8.1.1. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	69
4.8.1.2. Température du fluide sur l'axe médian vertical	69
4.8.2. Enceinte A	70
4.8.2.1. Température du fluide sur l'axe médian vertical	70
4.8.2.2. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	70
4.8.3. Enceinte B	71
4.8.3.1. Température du fluide sur l'axe médian vertical	71
4.8.3.2. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	71
4.9. Etude des températures au sein des trois enceintes pour $Ra=10^6$	72
4.9.1. Enceinte carrée	72
4.9.1.1. Température du fluide sur l'axe médian vertical	72
4.9.1.2. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	73
4.9.2. Enceinte A	74
4.9.2.1. Température du fluide sur l'axe médian vertical	74

4.9.2.2. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	75
4.9.3. Enceinte B	76
4.9.3.1. Température du fluide sur l'axe médian vertical	76
4.9.3.2. Température du fluide sur l'axe médian horizontal	77
CONCLUSION GENERALE	78
ANNEXE 1 : Coordonnées bicylindriques	79
ANNEXE 2 : Approximation des dérivées partielles	91
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	95

Introduction

Au cours de ces dernières années, la convection naturelle dans des enceintes fermées de différentes formes et différentiellement chauffées a fait l'objet de nombreuses études aussi bien théoriques qu'expérimentales, en raison de son importance dans de nombreux phénomènes naturels et applications industrielles, tels que le refroidissement des circuits électroniques ou électriques dans des boîtes fermées, les réacteurs nucléaires, l'isolation des bâtiments, l'isolation à double parois thermique, les serres agricoles, les espaces inoccupés dans les immeubles, la circulation naturelle dans l'atmosphère, etc.

Notre travail a pour objectif l'étude de la convection naturelle, laminaire et permanente dans une enceinte bidimensionnelle courbée, remplie d'air, ayant deux parois actives courbées verticales, et deux parois inactives courbées horizontales, et orientée selon un angle α . Les parois verticales de l'enceinte sont maintenues isothermes (différentiellement chauffées), et les parois horizontales sont adiabatiques.

Etant donné l'abondance des travaux concernant le phénomène de convection naturelle pouvant se dérouler dans des enceintes fermées, nous illustrons dans le premier chapitre, une riche étude bibliographique qui nous a permis de situer notre travail et de dégager une problématique.

Dans le deuxième chapitre nous établissons les équations de mouvement et du transfert de chaleur à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et l'approximation de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire.

Le troisième chapitre est consacré à la formulation numérique. Dans ce chapitre nous présentons les techniques de discrétisation des équations de transfert et des conditions aux limites ainsi que les différents schémas de discrétisations. Pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles de type parabolique décrivant l'écoulement et leurs conditions aux limites associées, nous avons choisis la méthode des volumes finis, alors que pour l'équation de la fonction de courant qui est une équation aux dérivées partielles de type elliptique nous avons utilisé un développement en série de Taylor, et finalement, le système d'équations algébriques obtenu est résolu en utilisant la méthode de relaxation successive.

Dans notre quatrième et dernier chapitre nous avons présenté une étude du maillage, puis nous avons validé notre code de calcul et enfin nous avons rassemblé les résultats des simulations. Les résultats numériques des transferts de chaleur en termes des nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois des enceintes, de la fonction de courant et des isothermes au sein du fluide sont représentés graphiquement puis analysés en fonction du nombre de Rayleigh, pour voir son effet sur les transferts de chaleur au sein des enceintes considérées.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

La convection naturelle dans des enceintes fermées de différentes formes occupe une grande partie de la littérature des transferts de chaleur.

Le carré, le rectangle, le triangle, la géométrie cylindrique, elliptique et sphérique ont été étudiées dans de nombreuses recherches, D'autre part, les études traitant les problèmes de convection naturelle à l'intérieur de géométries plus complexes ont été plutôt limitées.

Les géométries complexes couvrent différents types de configurations géométriques, à savoir les cavités à parois ondulées, les cavités à parois courbées concaves et convexes.

Parmi les travaux concernant les effets de courbure des parois des enceintes fermées sur le transfert de chaleur, la majorité ont été consacrés à la géométrie carrée et rectangulaire dont une ou deux parois sont ondulées.

Javad Rostami [1] a étudié numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité à parois verticales ondulées et à parois horizontales droites. Les deux parois horizontales sont considérées adiabatiques, tandis que les parois verticales sont maintenues isothermes et leurs limites sont approchées par une fonction cosinus. Les équations sont discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis et résolus par l'algorithme SIMPLE en coordonnées curvilignes. Dans son travail, il a étudié l'influence du nombre de Grashof, du nombre de Prandtl, du rapport d'aspect et d'ondulation de la surface sur le nombre de Nusselt. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les données disponibles numériques et expérimentales.

L. Adjlout et al [2] ont étudié numériquement l'effet de la paroi ondulée sur le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire dans une cavité inclinée carrée, différentiellement chauffée. Ils ont étudié différentes valeurs de l'angle d'inclinaison, différentes valeurs du nombre de Rayleigh, en maintenant le nombre de Prandtl constant. Deux configurations géométriques ont été utilisées à une et trois ondulations. Leurs résultats montrent que l'ondulation de la paroi chaude affecte l'écoulement et le taux de transfert de chaleur dans la cavité. Le nombre de Nusselt moyen diminue comparé à la cavité carrée.

M. Belkadi et al [3] ont étudié numériquement l'effet de la géométrie de la paroi chaude sur la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée inclinée différentiellement chauffée. Pour différents angles d'inclinaisons et nombres de Rayleigh, et

avec trois configurations géométriques. Les résultats obtenus montrent que la géométrie de la paroi chaude affecte l'écoulement et le taux de transfert de chaleur dans la cavité, et que le nombre de Nusselt moyen diminue en le comparant avec le transfert de chaleur dans la cavité carrée.

A. Sabeur et al [4] ont étudié numériquement l'effet des conditions aux limites non uniformes sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité rectangulaire à parois verticales chaudes ondulées et froides planes. La distribution non uniforme de la température est une fonction sinusoïdale. Deux configurations géométriques ont été étudiées à une et trois ondulations à différents rapports d'aspect. Les résultats montrent que :

- la cavité à trois ondulations semble réduire davantage le transfert de chaleur global par rapport à la cavité à une ondulation.
- la tendance du nombre de Nusselt local est ondulée sur la paroi chaude, et que le nombre de Nusselt moyen baisse comparé à celui de la cavité rectangulaire.
- la distribution sinusoïdale de la température sur les parois verticales favorise le transfert de chaleur, et par conséquent le nombre de Nusselt local augmente comparé aux parois isothermes.
- le nombre de Nusselt diminue en augmentant le rapport d'aspect.

Khudheyer S. Mushatet [5] a étudié numériquement le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide à l'intérieur d'une cavité carrée inclinée ayant deux parois verticales ondulées différentiellement chauffées et deux parois horizontales planes isolées. Il a étudié l'effet de l'angle d'inclinaison, l'amplitude et le nombre d'ondulations pour Rayleigh $Ra = 10^5$. Les résultats obtenus montrent que le taux du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre d'ondulations, de l'angle d'inclinaison et du nombre de Rayleigh, par contre l'augmentation de l'amplitude de la cavité diminue le nombre de Nusselt local et donc le taux du transfert de chaleur.

A. Slimani et al [6] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffé par une température constante et uniforme, les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante. Ils ont trouvé que l'écoulement dans l'enceinte est caractérisé par des zones de recirculation sur les sommets et dans les creux, où le nombre de Nusselt local est toujours minime, et que l'écoulement et le transfert de chaleur sont fortement affectés par l'amplitude de l'ondulation, et en général les transferts développés au sein d'une cavité à fond de topographie non plane sont inférieurs à ceux obtenus dans une cavité à fond horizontal et uniforme de la même longueur.

Ridouane E.H et A. Campo [7] ont étudié la convection naturelle dans une cavité carrée de côté H , une cavité circulaire de diamètre H et une cavité arc carrée de diamètre H en utilisant la méthode des volumes finis. Pour les trois enceintes, les parois verticales sont différentiellement chauffées, et les parois horizontales sont considérées adiabatiques. La conclusion la plus importante qu'ils ont tirée, en utilisant la cavité carrée comme référence, est que l'augmentation du transfert de chaleur fournie par la cavité circulaire est grande pour les faibles nombres de Rayleigh, décroît pour des nombres de Rayleigh modérés et disparaît pratiquement pour les nombres de Rayleigh élevés.

N. Ferdous et al [8] quant à eux, ont utilisé la méthode des volumes finis pour étudier numériquement la convection naturelle et le rayonnement dans une cavité circulaire et arc carrée remplie d'air, les parois gauches et droites de la cavité sont respectivement chauffées et refroidies à une température constante, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont étudié les effets du nombre de Rayleigh, de l'émissivité et de l'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur. Ils ont pu conclure que le pourcentage du transfert de chaleur par rayonnement diminue progressivement à bas nombre de Rayleigh, augmente à haut nombre de Rayleigh et diminue de nouveau pour les nombres élevés de Rayleigh. Le flux de chaleur du rayonnement est une fonction croissante de l'émissivité de la surface, par contre le flux de chaleur convectif est une fonction fortement décroissante de celui-ci, et que le pourcentage du transfert de chaleur par rayonnement augmente avec l'angle d'inclinaison au-delà d'une valeur précise.

M.R.H. Nobari et M.T. Mehrabani [9] ont étudié numériquement le transfert de chaleur dans un anneau excentrique courbé. Ils ont étudié les effets des différents paramètres physiques tels que l'excentricité, le nombre de Dean, la courbure, le nombre de Prandtl sur le champ d'écoulement et les caractéristiques thermiques pour différentes conditions aux limites. Ils ont démontré que, contrairement aux anneaux excentriques droits, l'augmentation du taux de transfert de chaleur est possible dans les anneaux excentriques courbés à cause de la présence d'écoulements secondaires générés par la courbure, et que le nombre de Prandtl a un effet significatif sur le transfert de chaleur dans les anneaux excentriques courbés.

Y. Liu et al [10] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection forcée qui se produit dans des micros canaux. Les résultats montrent que la rainure en forme de bouclier micro canal possède la plus haute performance d'échange de chaleur. Comparé à la faible efficacité du transfert de chaleur de la structure à surface plane, le nombre de Nusselt peut être augmenté en moyenne d'environ 1,3 fois.

M. Zakir Hossain et A.K. M. Sadrul Islam [11] ont étudié l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur dans des canaux ondulés (sinusoïdaux et triangulaires) dans des conditions d'écoulement transitoires et des conditions aux limites périodiques en utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont observé que l'écoulement devient instable avec une

oscillation auto entretenue au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique ce qui augmente le taux de transfert de chaleur.

C. R. Hedlund et P. M. Ligrani [12] ont étudié le transfert de chaleur dans un canal avec une portion droite suivie d'une partie courbée pour un nombre de Dean allant de 300 à 750. Ils ont remarqué que les nombres de Nusselt mesurés sur la surface concave sont significativement supérieurs à ceux mesurés sur la surface convexe dans la partie courbée du canal.

Jorge Facao et Armando C. Oliveira [13] ont étudié le transfert de chaleur par convection dans un canal rectangulaire courbé en utilisant le code fluent. La conduite est chauffée par sa surface convexe en maintenant les autres parois isolées. Dans des conditions d'écoulement laminaires, les résultats montrent que le nombre de Nusselt pour la conduite courbée est jusqu'à 10 fois plus élevé que pour la conduite droite à cause de la formation des tourbillons contrarotatifs secondaires. Aussi ils ont conclu que le coefficient de transfert de chaleur sur la paroi convexe est plus élevé que celui sur la paroi concave.

Lian-Ping Wang et Micheal H. Du [14] ont fait une simulation directe à trois dimensions de l'écoulement visqueux dans un tuyau onduleux. Ils ont constaté que le tuyau onduleux pourrait fournir une conception simple pour renforcer le mixage et le transfert de chaleur dans les tuyaux.

R.N. Mondal et al [15] ont étudié les effets de l'écoulement secondaire sur le transfert de chaleur par convection à travers une conduite rectangulaire courbée avec parois verticales différentiellement chauffées. Ils ont constaté que le transfert de chaleur par convection est significativement amélioré par le flux secondaire. Si l'écoulement devient périodique et puis chaotique, et que le nombre de Dean Dn augmente, le taux du transfert de chaleur augmente remarquablement comparant à un canal rectiligne.

Aswatha et al [16] ont étudié numériquement l'effet des différentes conditions aux limites de température sur le transfert de chaleur par convection. Les parois verticales de la cavité rectangulaire sont maintenues à une température constante, la paroi supérieure est adiabatique et la paroi inférieure est soumise à une température uniforme/ sinusoidale/ linéairement variable. Ils ont constaté que le mode de transfert de chaleur par conduction est dominant jusqu'à $Ra \leq 5 \cdot 10^3$, alors qu'il est dominant jusqu'à $Ra \leq 2 \cdot 10^4$ pour la température sinusoidale. La température uniforme donne le plus grand nombre de Nusselt de la paroi inférieure comparé à celui avec la température sinusoidale et linéairement variable.

Prodip Kumar Das et Shohel Mahmud [17] ont étudié numériquement la poussée induite de l'écoulement et le transfert de chaleur dans une enceinte ayant deux parois horizontales ondulées et deux parois verticales planes en utilisant la méthode des volumes finis. Les parois verticales sont maintenues isothermes, tandis que les parois horizontales sont considérées adiabatiques. Le nombre de Prandtl $Pr = 1.0$. Ils ont constaté que le rapport

amplitude-longueur d'onde affecte à la fois le taux du transfert de chaleur local, le champ d'écoulement ainsi que le champ thermique. Le rapport amplitude-longueur d'onde n'a pas d'influence significative, en moyenne, sur le taux de transfert de chaleur. A bas nombres de Grashof, le taux de transfert de chaleur augmente uniquement lorsque le rapport amplitude-longueur d'onde change de zéro à d'autres valeurs, puis il a un effet presque négligeable en moyenne sur celui-ci.

Chapitre 2

Analyse théorique

2.1/ Description du problème :

L'enceinte considérée dans cette étude est représentée dans la figure (2.1). Suivant les deux valeurs de l'angle d'inclinaison α ($\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$) notre enceinte prend les deux configurations représentées dans la figure (2.1.a). Les deux parois horizontales courbées de l'enceinte sont adiabatiques et les deux parois verticales courbées sont isothermes maintenues aux températures T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$. L'enceinte est remplie d'air ($Pr = 0,702$).

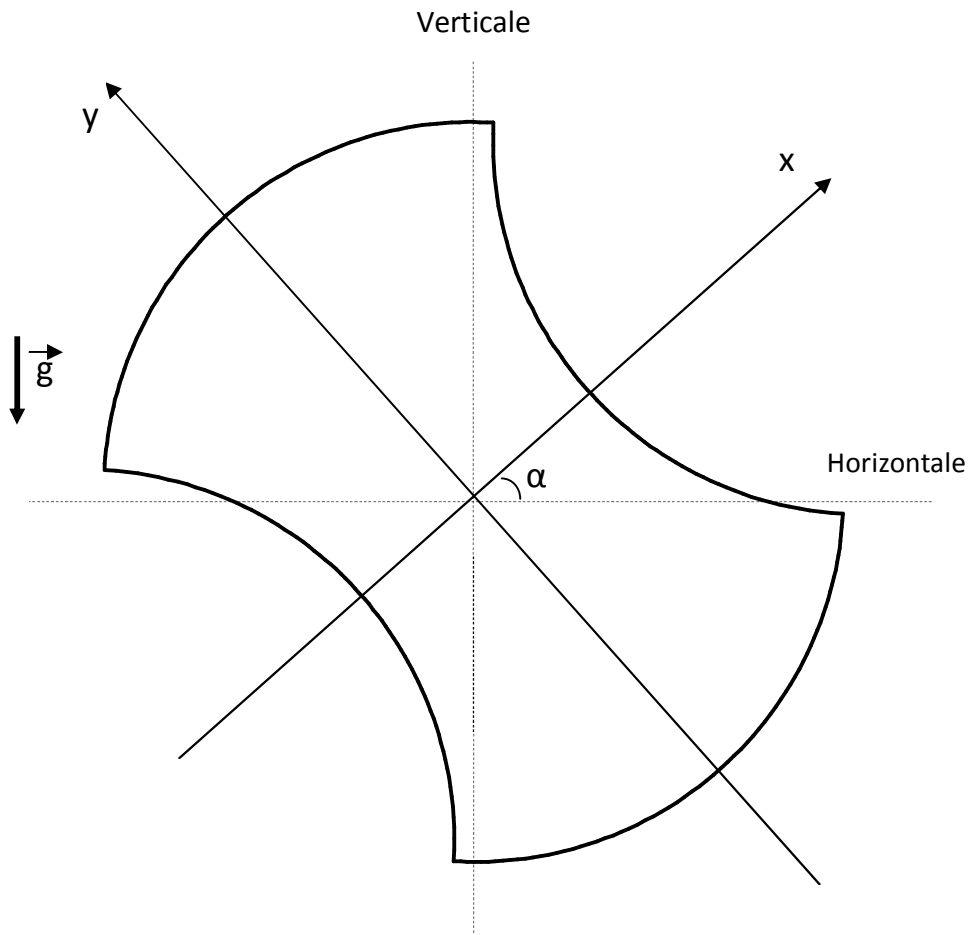


Figure 2.1: L'enceinte étudiée.

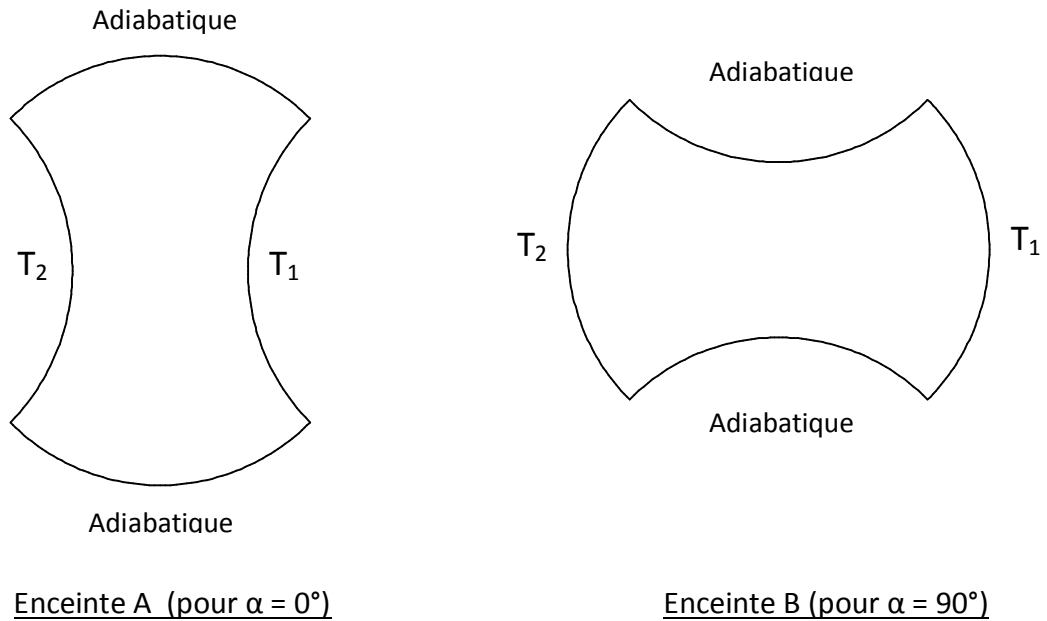


Figure 2.1.a : Les deux configurations de l'enceinte étudiée.

2.2/ Approximation de Boussinesq :

Joseph Boussinesq a donné son nom à l'approximation de Boussinesq, ainsi définie : « Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent très peu, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci ».

L'approximation prend comme hypothèse que les fluides ont une masse volumique constante, et qui peut varier linéairement avec la température dans le terme représentant la flottabilité (ne dépend que de sa température si l'on considère que la dimension horizontale est beaucoup plus grande que celle verticale).

Ces variations sont traduites par l'équation d'état :

$$\rho = \rho(P, T) = \rho(T) = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)]$$

Où : β : est le coefficient de dilatation thermique à pression constante (coefficient de compression isochore).

ρ_0 : la masse volumique de référence (constante).

T_0 : la température de référence (constante) associée à ρ_0 .

2.3/ Hypothèses simplificatrices:

Les hypothèses simplificatrices retenues afin de réduire les équations générales du problème étudié dans ce travail sont :

1/ Vu que les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles, et les vitesses d'écoulement sont assez lentes (infiniment petites devant la vitesse du son), on peut considérer que : **L'écoulement du fluide (air) est incompressible.**

2/ **La masse volumique est constante et égale à ρ_0** , sauf dans le terme des forces de gravité (forces de volume) elle varie linéairement avec la température du fluide confiné à l'intérieur de l'enceinte, et elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad (2.1)$$

3/ Les vitesses mises en jeu sont faibles. **L'écoulement est laminaire et permanent.**

4/ Le fluide étudié est **newtonien.**

5/ Les propriétés physiques du fluide sont **constantes.**

6/ La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur.

7/ Le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des parois étant négligées).

8/ Les dimensions de la section transversale suivant les axes x et y de notre enceinte sont négligeables par rapport à la dimension de celle-ci suivant l'axe z. **L'écoulement est supposé bidimensionnel suivant x et y**

2.4/ Formulation du problème :

Résoudre complètement un problème de convection revient à déterminer en tous points et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide, soit :

La vitesse \vec{V} définie par ses trois composantes : V_1, V_2, V_3

La masse volumique ρ

La pression P

La température T

Ce qui permet ensuite d'évaluer les transferts de chaleur, et pour calculer ces fonctions il est nécessaire d'établir une formulation du problème.

2.4.1/ Formulation vectorielle du problème :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) = 0 \quad : \text{ sans sources de chaleur ni puits.} \quad (2.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement :

Pour les fluides réels incompressibles :

$$\rho [(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (2.3)$$

Equation d'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad (2.4)$$

Pour notre cas : écoulement permanent, laminaire et incompressible, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, ces relations s'écrivent :

Equation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.5)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{V}$$

Ce qui donne:
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = [1 - \beta(T - T_0)] \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{V} \quad (2.6)$$

Equation d'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad (2.7)$$

Avec :

- \vec{V} : Vecteur vitesse du fluide.
- \vec{g} : Vecteur accélération de la pesanteur.
- P : Pression du fluide.
- λ : Conductivité thermique du fluide.
- T : Température du fluide.
- C_p : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.
- t : temps
- μ : viscosité dynamique du fluide
- ν : viscosité cinématique du fluide

2.4.2/ Formulation indicielle :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.5.a)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.6.a)$$

Equation d'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.7.a)$$

Avec : τ_{ij} : Tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

2.4.3/ Formulation des équations en coordonnées cartésiennes :

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations s'écrivent respectivement en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) \beta T_d + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) \beta T_d + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

Avec : $p^* = p + \rho_0 g z$: pression motrice.

2.5/ Equation de vorticité :

L'introduction des variables vorticité ω et fonction de courant ψ a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression.

Dérivant les équations du mouvement (2.9.a) et (2.9.b) respectivement par rapport à y et à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \beta T_d \sin(\alpha) \right) \\ + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \beta T_d \cos(\alpha) \right) \\ + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.b)$$

En soustrayant l'équation (2.11.a) de (2.11.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité ω , nous obtenons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \beta \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\text{Avec :} \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.b)$$

2.6/ Introduction des coordonnées bicylindriques :

Il est commode de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites « bicylindriques » [18,19], permettent, précisément dans notre cas, d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées (η, θ, z) , les surfaces $\eta = \text{constante}$ sont des cylindres circulaires avec des axes dans le plan xz , les surfaces $\theta = \text{constante}$ sont les portions des cylindres circulaires avec des axes dans le plan yz , et les surfaces $z = \text{constante}$ sont les plans parallèles.

$$+ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \} + \frac{\nu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.19)$$

Avec :

$$h = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

$$F(\eta, \theta) = \frac{1 - ch(\eta)\cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \quad (2.20)$$

$$G(\eta, \theta) = \frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

V_η, V_θ : composantes du vecteur vitesse suivant les directions η, θ respectivement.

La fonction de courant ψ et de vorticité ω sont définies par les relations suivantes :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

En introduisant la fonction de courant, de façon à vérifier l'équation de continuité il vient :

$$V_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (2.21)$$

Vérification :

Equation de continuité : $\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(h \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \left(-\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \theta}$$

La relation est vérifiée

La vorticité : $\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$

$$\text{D'où : } \omega = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = - \Delta \psi$$

$$\text{Donc : } \omega = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.22)$$

2.7/ Adimensionalisation :

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier a priori la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$D_h = L \quad , \quad H = \frac{h}{D_h} \quad , \quad V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{a} \quad , \quad V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{a} \quad , \quad \psi^+ = \frac{\psi}{a} \quad , \quad \omega^+ = \omega \frac{D_h^2}{a}$$

$$t^+ = t \frac{a}{D_h^2}$$

Avec :

a : Diffusivité thermique.

L : distance entre les pôles apparaissant dans la relation des coordonnées (η, θ)

$\frac{a}{D_h}$: vitesse caractéristique.

$\frac{D_h^2}{a}$: Temps caractéristique.

La température adimensionnelle :

1/ Parois isothermes (verticales) :

$$T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

Avec : T_1 : température chaude.

T_2 : Température froide.

2/ Parois adiabatiques (horizontales) :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad \text{ce qui donne :} \quad \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (2.17), (2.18), (2.19) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+) = 0 \quad (2.23)$$

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + H V_\eta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + H V_\theta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \quad (2.24)$$

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + H V_\eta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + H V_\theta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = P_r \cdot R_a \cdot H \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right.$$

$$\left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} + P_r \left[\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.25)$$

Avec : $R_a = \frac{g \beta \Delta T D_h^3}{\nu a}$: nombre de Rayleigh

$P_r = \frac{\nu}{a}$: nombre de Prandtl

Les composantes V_{η}^+ , V_{θ}^+ de la vitesse adimensionnelle sont définies par :

$$\begin{aligned} \text{On a : } V_{\eta} &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Leftrightarrow V_{\eta}^+ \frac{a}{D_h} = \frac{a}{H D_h} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \\ &\Leftrightarrow V_{\eta}^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.26.a)$$

$$\text{Aussi : } V_{\theta}^+ = - \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \quad (2.26.b)$$

La vorticité adimensionnelle ω^+ est définie par :

$$\begin{aligned} \omega &= - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \Leftrightarrow \frac{a}{D_h^2} \omega^+ = - \frac{1}{H^2} \frac{a}{D_h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \omega^+ = - \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.8/ Coefficients d'échange de chaleur :

2.8.1/ Nombre de Nusselt local

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt. Les valeurs de ce dernier sur les parois verticales des enceintes A et B sont définies comme suit :

Enceinte A :

$$Nu = - \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cste} \quad (2.28)$$

Enceinte B :

$$Nu = - \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \Big|_{\theta=cste} \quad (2.29)$$

2.8.2/ Nombre de Nusselt moyen :

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt le long des parois verticales des deux enceintes A et B se calculent comme suit :

Enceinte A :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu d\theta \quad (2.30)$$

Enceinte B :

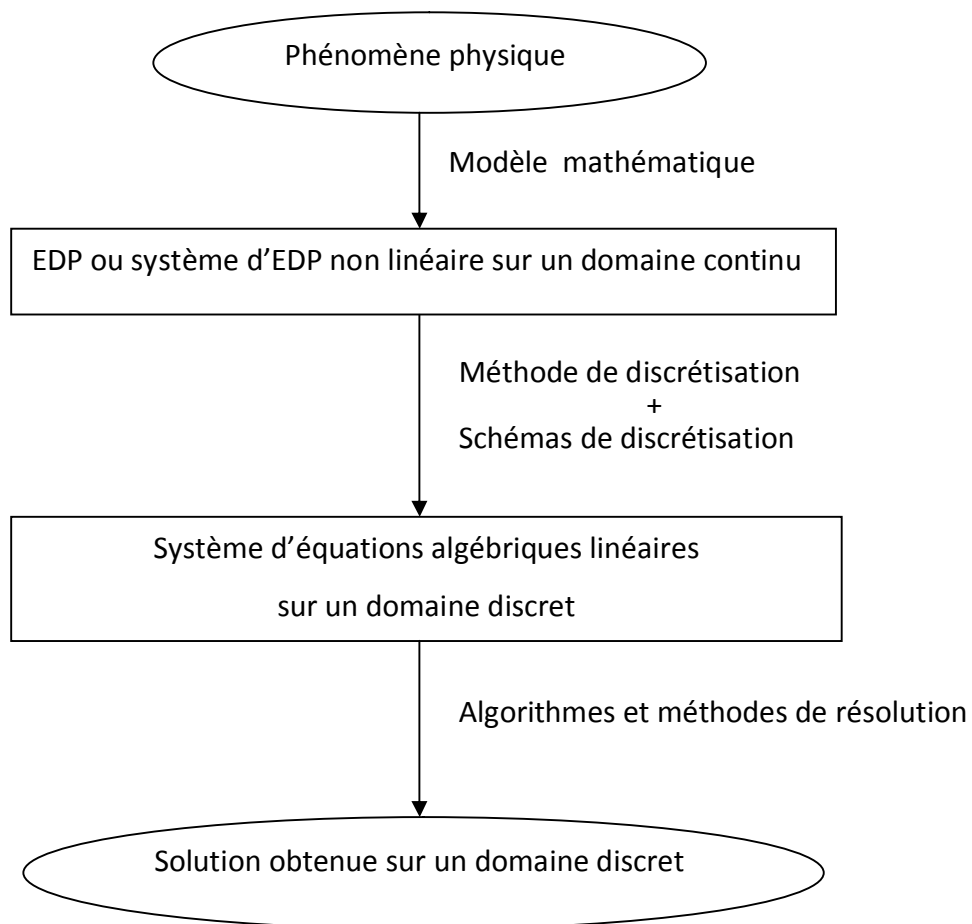
$$\overline{Nu} = \frac{1}{\eta_{NI} - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_{NI}} Nu d\eta \quad (2.31)$$

Chapitre 3

Formulation numérique

3.1/ Introduction :

La simulation numérique (calcul numérique) d'un phénomène physique, dans ce cas l'étude de la convection naturelle dans des enceintes courbées ayant deux parois actives courbées verticales et deux parois inactives courbées horizontales, suit en général le principe suivant :



Le modèle mathématique constitué par une équation ou un système d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), qui régit le phénomène physique, se traduit en utilisant une méthode de discrétisation, en un système d'équations algébriques.

Parmi les méthodes de discrétisation les plus connues citons :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode spectrale.
- La méthode des volumes finis.

3.2/ Méthode de résolution numérique :

Pour résoudre le système d'équation (2.24), (2.25) et les conditions aux limites associées nous choisissons, pour les discrétiser, la méthode des volumes finis, Alors que pour l'équation (2.27) nous utilisons un développement en série de Taylor.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transfert, elles sont bien exposées par S.V.PATANKAR [20] et par NOGOTOV [21].

3.2.1/ Méthode des volumes finis :

C'est une méthode de discrétisation qui discrétise les EDP en équations algébriques pouvant être résolues numériquement.

3.2.1.1/ Etapes de la méthode des volumes finis:

1/ Le maillage : la transformation d'un domaine physique continu (la géométrie) en un domaine de calcul discret constitué d'un certain nombre de points et de mailles (volumes finis) voire figure (3.1).

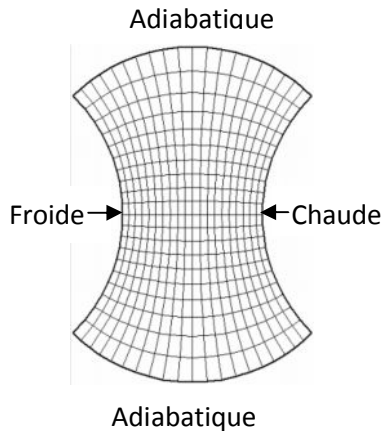
2/ Tous les termes des équations modélisantes sont intégrés un par un sur chaque volume de contrôle.

3/ Des profils ou des lois d'interpolation, entre des nœuds voisins, sont utilisées pour approcher la variation de Φ (variable générale d'écoulement).

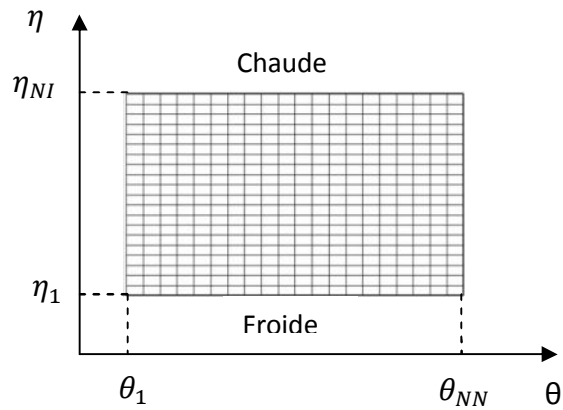
4/ Obtention des équations algébriques en fonction des valeurs de ϕ aux nœuds des maillages.

5/ La résolution du système d'équations algébriques.

Pour $\alpha = 0$:

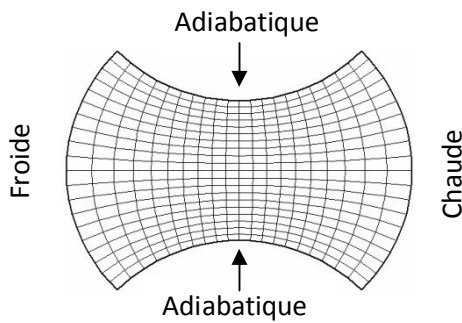


Domaine physique

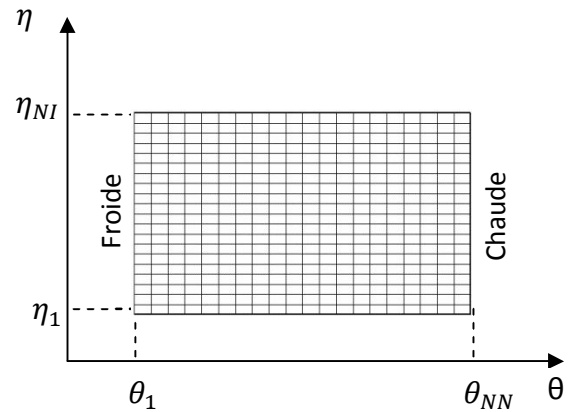


Domaine de calcul

Pour $\alpha = 90$:



Domaine physique



Domaine de calcul

Figure 3.1 : Représente le domaine physique et le domaine de calcul.

3.2.2/ Volume élémentaire d'intégration :

Le domaine physique est divisé en un nombre de volumes finis, le centre d'un volume fini typique est un point « P », et ces faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud » sont localisées aux points e , w , n et s .

Les points E, W, N et S sont les nœuds des quatre volumes de contrôles adjacents respectivement à l'est, ouest, nord et sud du volume de contrôle typique.

Les variables (vorticité, température) sont stockées aux centres des volumes de contrôles.

Pour un nœud principal « P », les points E et W sont pris dans la direction θ , tandis que N et S sont pris dans la direction η .

La figure (3.2) représente un volume fini typique et son voisinage dans un volume de calcul.

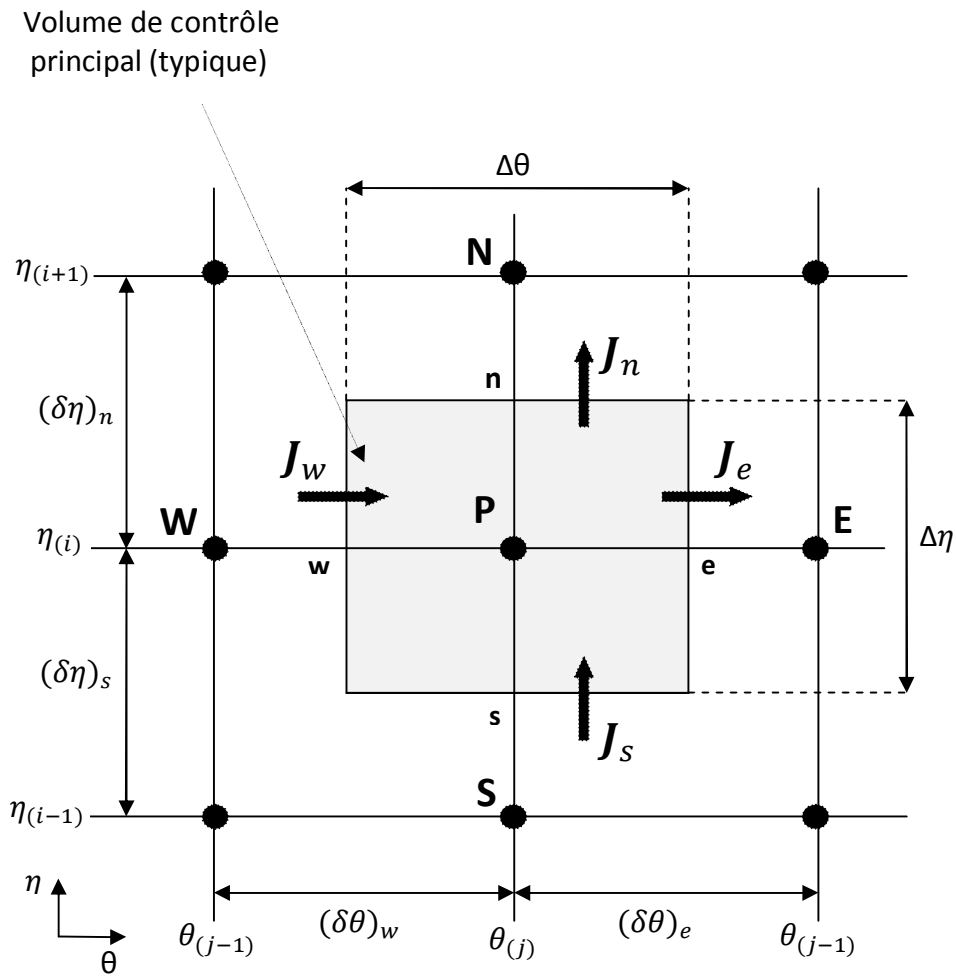


Figure 3.2 : Représentation du volume de contrôle typique.

Soit :

i : indice des nœuds suivant η

j : indice des nœuds suivant θ

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

NI : le nombre de points suivant η

NN : le nombre de points suivant θ

3.2.3/ Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable ϕ dans le volume de contrôle :

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Additionnons l'équation de la chaleur (2.24) a l'équation de continuité (2.23) multipliée par T^+ :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + [T^+ \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+) + H V_\eta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta}] + [T^+ \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+) + H V_\theta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta}] = [\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2}]$$

D'où : $H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ T^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ T^+) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{\partial T^+}{\partial \eta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0$

Finalement on trouve :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0 \tag{3.1}$$

En Additionnant l'équation du mouvement (2.25) à l'équation de continuité (2.23) multipliée par ω^+ on trouve :

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ \omega^+ - P_r \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ \omega^+ - P_r \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta}) = P_r R_\alpha H \{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \} \tag{3.2}$$

Ces deux équations sont de la forme générale suivante :

$$H^2 \frac{\partial \phi}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) = S_\phi \tag{3.3}$$

Le tableau suivant illustre les différentes expressions des termes : Γ_ϕ , ϕ , S_ϕ

équation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
3.1	T^+	1	0
3.2	ω^+	P_r	$P_r R_\alpha H \{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \}$

Tableau 3.1 : les différentes expressions des termes : Γ_ϕ , ϕ , S_ϕ

ϕ : Fonction générale représente (T^+ ou ω^+)

Γ_φ : Coefficient adimensionnel.

S_ϕ : Terme de source.

3.2.3.1/ Intégration de l'équation de transfert :

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume de contrôle fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de ϕ .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} H^2 \frac{\partial \phi}{\partial t^+} dt d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ \phi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & + \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ \phi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & = \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} S_\phi dt d\eta d\theta \right] dz \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

L'équation (3.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} H^2 \frac{\partial \phi}{\partial t^+} dt d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \eta} (J_\eta) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & + \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & = \int_0^1 \left[\iiint_{s w}^{n e} \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} S_\phi dt d\eta d\theta \right] dz \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Avec : $J_\eta = H V_\eta^+ \phi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$

$$J_\theta = H V_\theta^+ \phi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

J_η , J_θ sont les flux totaux (convection plus diffusion).

De l'équation (3.5) on trouve :

$$(\phi_p - \phi_p^0) \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta \cdot 1}{\Delta t^+} + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (3.6)$$

$\overline{S_\phi}$: est la valeur moyenne du terme source S_ϕ dans le volume de contrôle élémentaire.

J_e, J_w, J_n, J_s sont les valeurs des flux totaux aux interfaces Est, Ouest, Nord et Sud du volume de contrôle.

$$J_e = \int_s^n \left[(H V_\theta^+ \phi)_e - \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e \right] d\eta .1 = (J_\theta)_e \Delta\eta .1$$

$$J_w = \int_s^n \left[(H V_\theta^+ \phi)_w - \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w \right] d\eta .1 = (J_\theta)_w \Delta\eta .1$$

$$J_n = \int_w^e \left[(H V_\eta^+ \phi)_n - \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n \right] d\theta .1 = (J_\eta)_n \Delta\theta .1$$

$$J_s = \int_w^e \left[(H V_\eta^+ \phi)_s - \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s \right] d\theta .1 = (J_\eta)_s \Delta\theta .1$$

3.2.3.2/ Linéarisation du terme source :

Le terme source peut généralement être linéarisé en fonction de ϕ_p (au nœud P) sous la forme :

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_p \cdot \phi_p$$

Avec: S_0 : la partie constante de $\overline{S_\phi}$ qui ne dépend pas de ϕ_p .

$$S_p < 0$$

Par suite l'équation (3.6) devienne:

$$(\phi_p - \phi_p^0) \frac{H^2 \Delta\eta \Delta\theta .1}{\Delta t^+} + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \Delta V \quad (3.7)$$

Discrétisons l'équation de continuité (2.23) :

$$\int_0^1 \left[\iint_{s_w}^{n_e} \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+) d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\iint_{s_w}^{n_e} \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+) d\eta d\theta \right] dz = 0$$

$$\text{On trouve :} \quad (F_n - F_s) + (F_e - F_w) = 0 \quad (3.8)$$

F_n, F_s, F_e et F_w sont les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle.

$$\begin{cases} F_n = (H V_\eta^+)_n \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_s = (H V_\eta^+)_s \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_e = (H V_\theta^+)_e \cdot \Delta\eta \cdot 1 \\ F_w = (H V_\theta^+)_w \cdot \Delta\eta \cdot 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

En multipliant l'équation (3.8) par la fonction ϕ_p et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \frac{H^2 \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^+} + (J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = \\ = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \Delta V \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les termes $(J_i - F_i \phi_p)$, $i = e, w, n, s$ peuvent se mettre, d'après S.V.PATANKAR [20], sous la forme suivante :

$$J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E)$$

$$J_w - F_w \phi_p = a_W (\phi_p - \phi_W)$$

$$J_n - F_n \phi_p = a_N (\phi_p - \phi_N)$$

$$J_s - F_s \phi_p = a_S (\phi_p - \phi_S)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \frac{H^2 \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^+} + a_E (\phi_p - \phi_E) - a_W (\phi_p - \phi_W) + a_N (\phi_p - \phi_N) - a_S (\phi_p - \phi_S) \\ = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \Delta V \end{aligned}$$

D'où l'équation discrétisée :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.11)$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \cdot \Delta V$$

$$b = S_0 \Delta V + a_p^0 \phi_p^0$$

$$\begin{cases} a_p^0 = \frac{H^2 \Delta\eta \Delta\theta \cdot 1}{\Delta t^+} \\ a_E = D_e A (|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w A (|P_w|) + \|-F_w, 0\| \\ a_N = D_n A (|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s A (|P_s|) + \|-F_s, 0\| \end{cases} \quad (3.12)$$

La fonction $A (| P |)$ est donnée, d'après S.V.PATANKAR [20], par le schéma " power law " comme suit :

$$A (| P |) = \| 0 , (1 - 0,1 | P |)^5 \|$$

Le symbole $\| A , B \|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de diffusion sont définies par :

$$D_e = (\Gamma_\varphi)_e \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_e}$$

$$D_w = (\Gamma_\varphi)_w \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_w}$$

$$D_n = (\Gamma_\varphi)_n \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_n}$$

$$D_s = (\Gamma_\varphi)_s \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_s}$$

$(\delta\theta)_e$, $(\delta\theta)_w$, $(\delta\eta)_n$ et $(\delta\eta)_s$: sont les pas d'intégrations, qui peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\theta$, $\Delta\eta$ respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$. Considérons que les interfaces e , w , n et s sont les milieux des nœuds (P , E) , (P , W) (P , N) et (P , S) .

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = (\Gamma_\varphi)_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w = (\Gamma_\varphi)_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_n = (\Gamma_\varphi)_n \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s = (\Gamma_\varphi)_s \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Les nombres de Peclet P_e , P_w , P_n et P_s sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

3.2.3.3/ Schémas de discrétisation spatiale :

L'évaluation des flux de diffusion et de convection aux interfaces des volumes de contrôle après intégration se fera à l'aide des schémas de discrétisation.

Pour choisir le schéma de discrétisation approprié, il faut prendre en considération un certains nombres de critères tels que : stabilité, précision, coût de calcul numérique,... souvent les modèles les moins précis sont très robustes, tandis que les modèles les plus précis sont moins robustes et plus lents et coûtent cher.

Les différents schémas proposés par S.V. PATANKAR [20] permettant d'exprimer la fonction $A(|P|)$ sont les suivants :

3.2.3.3.1/ Schéma des différences centrées :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = 1 - 0,5|P|$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = D_e (1 - 0,5|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_W = D_w (1 - 0,5|P_w|) + \|F_w, 0\|$$

$$a_N = D_n (1 - 0,5|P_n|) + \|-F_n, 0\|$$

$$a_S = D_s (1 - 0,5|P_s|) + \|F_s, 0\|$$

Remarque :

- Le schéma des différences centrées est stable pour $|P| \leq 2$ est donne des coefficients (a_E, a_W, a_N, a_S) positifs, et la précision du schéma sera acceptable.

- Pour $|P| > 2$ les coefficients de l'équation discrétisée peuvent être négatifs, et dans ces conditions les résultats ne respectent pas la physique du phénomène.

- Ce schéma est utilisé dans le cas ou la convection ne domine pas la diffusion, mais il n'est pas recommandé d'être utilisé au calcul des écoulements.

3.2.3.3.2/ Schéma Upwind :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = 1$$

Alors les coefficients seront :

$$a_E = D_e + \|-F_e, 0\|$$

$$a_W = D_w + \|F_w, 0\|$$

$$a_N = D_n + \|-F_n, 0\|$$

$$a_S = D_s + \|F_s, 0\|$$

Remarque :

- Pour le schéma Upwind les coefficients de l'équation discrétisée ne sont jamais négatifs (schéma inconditionnellement stable).

- schéma non approprié pour les faibles valeurs de $|P|$.

- le schéma Upwind est appliqué pour les écoulements à dominance convective suivant le sens de l'écoulement.

3.2.3.3.3/ Schéma Exponentiel:

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\exp(|P|) - 1}$$

Alors les coefficients seront :

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \quad , \quad a_W = \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1}$$

$$a_N = \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} \quad , \quad a_S = \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1}$$

Remarque :

Ce schéma est assez peu utilisé car :

- Les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement.

- Il n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

3.2.3.3.4/ Schéma hybride :

La fonction $A(|P|)$ est définie comme suit :

$$A(|P|) = \|-0, (1 - 0,5|P|)\|$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = \parallel -F_e, D_e - 0,5 F_e, 0 \parallel$$

$$a_W = \parallel F_w, D_w + 0,5 F_w, 0 \parallel$$

$$a_n = \parallel -F_n, D_n - 0,5 F_n, 0 \parallel$$

$$a_S = \parallel F_s, D_s + 0,5 F_s, 0 \parallel$$

Remarque :

- le schéma hybride est une combinaison améliorée entre le schéma centré et le schéma Upwind.

- Avec ce schéma l'erreur est maximale pour $|P| \cong 2$.

3.2.3.3.5/ Schéma Power Law :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = \parallel 0, (1 - 0,1|P|)^5 \parallel$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = D_e \parallel 0, (1 - 0,1|P_e|)^5 \parallel + \parallel 0, -F_e \parallel$$

$$a_w = D_w \parallel 0, (1 - 0,1|P_w|)^5 \parallel + \parallel 0, F_w \parallel$$

$$a_n = D_n \parallel 0, (1 - 0,1|P_n|)^5 \parallel + \parallel 0, -F_n \parallel$$

$$a_S = D_s \parallel 0, (1 - 0,1|P_s|)^5 \parallel + \parallel 0, F_s \parallel$$

Remarque :

Le schéma Power Law est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, c'est pourquoi notre choix s'est posé sur ce schéma.

3.3/ Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie) :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0$$

En remplaçant dans l'équation (3.3) la fonction ϕ par la température adimensionnelle T^+ et le terme source S_ϕ par zéro, l'équation de la chaleur discrétisée sera :

$$a_P T^+_P = a_E T^+_E + a_W T^+_W + a_N T^+_N + a_S T^+_S + b \tag{3.15}$$

Avec : $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0$

$$b = a_P^0 \phi_P^0$$

a_E , a_W , a_N , a_S et a_p^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.12).

3.3.1/ Détermination des coefficients F_i , D_i , P_i ($i = n, s, e, w$):

Le calcul des coefficients a_E , a_W , a_N , a_S nécessite la détermination des coefficients F_i , D_i , P_i ($i = n, s, e, w$).

Remplaçant les vitesses adimensionnelles V_η^+ par : $\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$ et V_θ^+ par : $-\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ dans le système (3.9) on obtient :

$$F_n = \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n$$

$$F_s = \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s$$

$$F_e = \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e$$

$$F_w = \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w$$

En appliquant une interpolation linéaire (différence centrée), et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance des nœuds on trouve :

$$\psi_n^+ = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2}$$

$$\psi_s^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2}$$

$$\psi_e^+ = \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2}$$

$$\psi_w^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de NOGOTOV [21], comme suit :

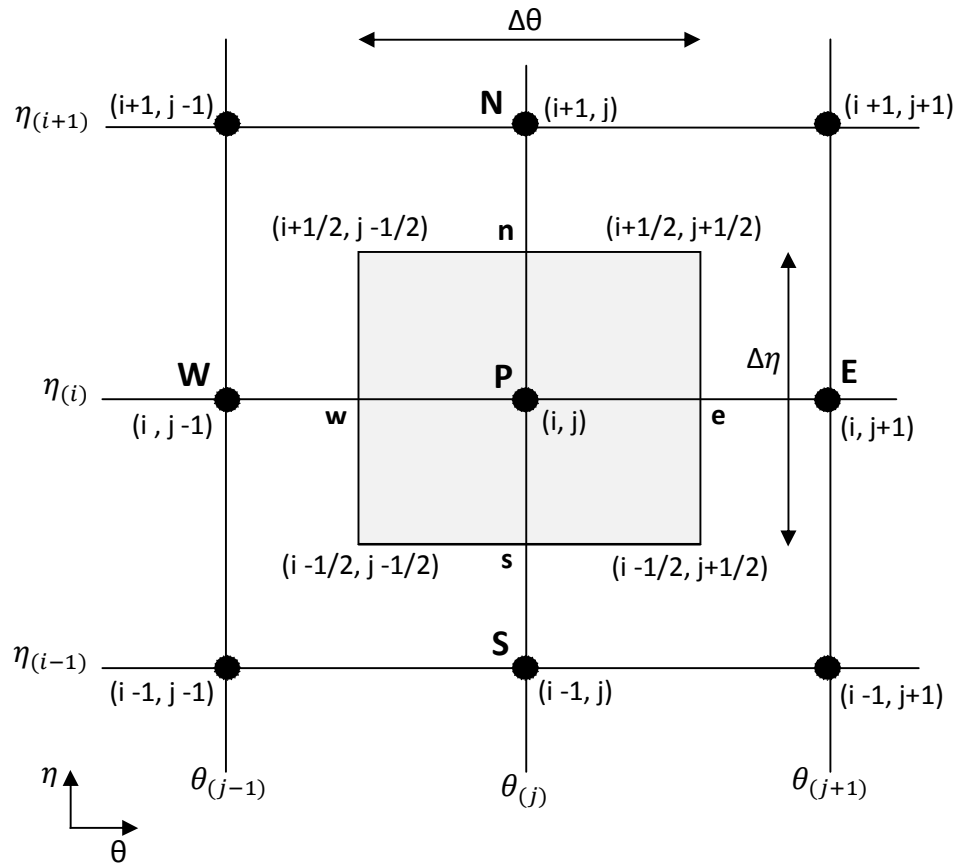


Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage.

A l'interface " e " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e = \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j)}{4\Delta \eta}$$

A l'interface " w " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \eta}$$

A l'interface " n " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)}{\Delta \theta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

A l'interface " s " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i-1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta \theta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s &= \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \theta}$$

Et les expressions F_e, F_w, F_n et F_s deviennent :

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.16.a)$$

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.16.b)$$

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.16.c)$$

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.16.d)$$

Pour l'équation de la chaleur, le coefficient $\Gamma_\phi = 1$ (voir tableau 3.1).

En portant cette valeur dans le système (3.13), les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s s'écrivent :

$$D_e = D_w = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

$$D_n = D_s = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}$$

Et les nombres de Péclet dans le système (3.14) deviennent :

$$P_e = F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}, \quad P_n = F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

$$P_w = F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}, \quad P_s = F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.15), on symbolise les nœuds W, P, E, N et S respectivement par :

$$(i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i-1, j)$$

Les coefficients a_E, a_W, a_N, a_S et a_p^0 sont pris aux nœuds (i, j)

Donc l'équation (3.15) peut s'écrire comme suit :

$$a_p T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) + b \quad (3.17)$$

3.3.2/ Discrétisation des conditions aux limites:

3.3.2.1/ Description du problème :

Les conditions aux limites sur les frontières du domaine de calcul :

- $T = T_1$ pour : $J = NN$ et $1 \leq I \leq NI$
- $T = T_2$ pour : $J = 1$ et $1 \leq I \leq NI$
- $V_\theta = V_\eta = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$: condition de non-glissement des particules de fluides sur les parois de l'enceinte rigides et imperméables.
- Sur les parois adiabatiques : $\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$

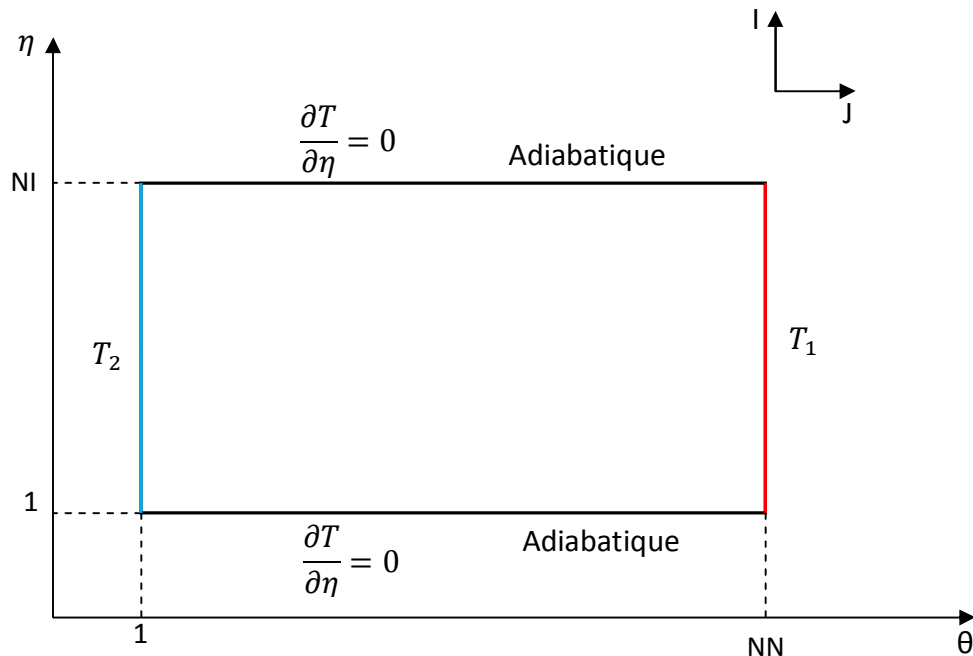


Figure 3.4 : conditions aux limites sur le domaine de calcul (enceinte B).

Remarque :

Pour les conditions aux limites sur le domaine de calcul de l'enceinte A nous remplaçons, dans les relations et sur les axes, la variable η par θ et l'inverse.

Exemple : Dans la figure (3.4) :

Pour les parois horizontales adiabatiques on aura : $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

L'axe vertical sera : θ et l'axe horizontal sera η

3.3.2.2/ Adimensionnement des conditions aux limites :

- Sur la paroi verticale droite (J = NN et $1 \leq I \leq NI$) :

$$\text{On a : } T = T_1$$

$$\text{Et puisque : } T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ on aura } T^+ = 1$$

- Sur la paroi verticale gauche (J = 1 et $1 \leq I \leq NI$) :

$$\text{On a : } T = T_2$$

$$\text{Et puisque : } T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ on aura } T^+ = 0$$

- Parois horizontales (adiabatiques) : ($1 \leq J \leq NN$)

$$\text{On a : } \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \text{ ce qui donne : } \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$$

- Sur les frontières du domaine de calcul (l'enceinte) :

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = 0$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right)$$

3.3.2.3/ Discrétisation des conditions aux limites :

- Sur la paroi verticale droite (J = NN et $1 \leq I \leq NI$) :

$$\text{On a : } T^+ = 1$$

L'équation (3.15) nous donne :

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \text{ et } b = 1$$

- Sur la paroi verticale gauche (J = 1 et $1 \leq I \leq NI$) :

$$\text{On a : } T^+ = 0$$

L'équation (3.15) nous donne :

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \text{ et } b = 0$$

- Paroi horizontale inférieure (adiabatique) :

$$I = 1, 1 \leq J \leq NN$$

$$\text{On a : } \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i, j)}{\Delta \eta} = 0$$

$$\text{Ce qui donne : } T^+(i+1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit : } T^+_N = T^+_p$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_N = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

- Paroi horizontale supérieure (adiabatique) :

$$I = NI, 1 \leq J \leq NN$$

$$\text{On a : } \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i-1, j) - T^+(i, j)}{\Delta \eta} = 0$$

$$\text{Ce qui donne : } T^+(i-1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit : } T^+_S = T^+_p$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_S = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = 0$$

$$a_p^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

3.4/ Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement :

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^+ \omega^+ - P_r \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^+ \omega^+ - P_r \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} \right) = P_r R_a H \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\}$$

En remplaçant dans l'équation discrétisée (3.11) :

- La fonction ϕ par: la vorticité adimensionnelle ω^+ .
- Le terme S_p par: zéro ($S_p = 0$)
(le terme source S_{ω^+} est indépendant de la vorticité ω^+).

Nous obtenons l'équation discrétisée de quantité de mouvement:

$$a_p \omega^+_p = a_E \omega^+_E + a_W \omega^+_W + a_N \omega^+_N + a_S \omega^+_S + b \tag{3.18}$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0$$

$$b = S_0 \Delta V + a_p^0 \phi_p^0$$

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \cdot 1$$

$$S_0 = P_r R_a H \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\}$$

Les coefficients : a_E , a_W , a_N , a_S et a_p^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.12) .

Comme dans l'équation de quantité de mouvement le terme Γ_{ϕ} égal à P_r : ($\Gamma_{\phi} = P_r$) (voire tableau (3.1)) :

Aux interfaces e , w , n et s les coefficients D_e , D_w , D_n et D_s seront :

$$D_e = D_w = P_r \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta}$$

$$D_n = D_s = P_r \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta}$$

Et les nombres de Péclet dans le système (3.14) deviennent:

$$P_e = \frac{1}{P_r} F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \quad , \quad P_n = \frac{1}{P_r} F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

$$P_w = \frac{1}{P_r} F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \quad , \quad P_s = \frac{1}{P_r} F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

Avec : F_e , F_w , F_n et F_s ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.16.a), (3.16.b), (3.16.c) et (3.16.d).

Finalement dans l'équation (3.18) le coefficient " b " a pour expression :

$$b = H^3 P_r R_\alpha \{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \} \Delta\eta \cdot \Delta\theta + a_p^0 \Phi_p^0$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta\eta}$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta\theta}$$

En prenant les mêmes notations précédentes, pour les nœuds W , P , E , N et S qui sont respectivement :

$$(i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i-1, j)$$

L'équation (3.18) peut s'écrire comme suit :

$$a_P \omega^+(i, j) = a_E \omega^+(i, j+1) + a_W \omega^+(i, j-1) + a_N \omega^+(i+1, j) + a_S \omega^+(i-1, j) + b \quad (3.19)$$

Les coefficients a_E , a_W , a_N , a_S , a_p^0 et b sont pris au nœuds (i , j).

3.4.1/ Discretisation des conditions aux limites:

Condition sur la paroi horizontale inférieure (i = 1, j) :

$$\omega^+(1, j) = - \frac{1}{H^2(1,j)} \left[\frac{\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{-7\psi^+(1, j) + 8\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure (i = NI , j) :

$$\omega^+ (NI, j) = - \frac{1}{H^2(NI, j)} \left[\frac{\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{-7\psi^+(NI, j) + 8\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale gauche (i , j = 1) :

$$\omega^+ (i, 1) = - \frac{1}{H^2(i, 1)} \left[\frac{\psi^+(i+1, 1) - 2\psi^+(i, 1) + \psi^+(i-1, 1)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{-7\psi^+(i, 1) + 8\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{2(\Delta\theta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale droite (i , j = NN) :

$$\omega^+ (i, NN) = - \frac{1}{H^2(i, NN)} \left[\frac{\psi^+(i+1, NN) - 2\psi^+(i, NN) + \psi^+(i-1, NN)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{-7\psi^+(i, NN) + 8\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2)}{2(\Delta\theta)^2} \right]$$

3.5/ Discrétisation de l'équation de la fonction de courant :

$$\omega^+ = - \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right)$$

Réécrivons cette équation sous la forme :

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)$$

L'équation (2.27) donne:

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \Big|_{i, j} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \Big|_{i, j}$$

Pour discrétiser cette équation nous utiliserons le développement en série de Taylor, ce qui donne :

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\theta)^2}$$

Et qui conduit à écrire :

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} - 2\psi^+(i, j) \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]$$

Ce qui donne la fonction de courant au nœuds P $\ll \psi^+(i, j) \gg$ qui est exprimée en fonction de celle aux nœuds W, E, N et S comme suit :

$$\psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left[H^2(i, j) \omega^+(i, j) + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \quad (3.20)$$

3.5.1/ Discrétisation des conditions aux limites :

Condition sur la paroi horizontale inférieure ($i = 1$) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{1, j} = \frac{-3\psi^+(1, j) + 4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^+(1, j) = \frac{4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{3}$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure ($i = NI$) :

$$\psi^+(NI, j) = \frac{4\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale gauche ($j = 1$) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i, 1} = \frac{-3\psi^+(i, 1) + 4\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{2\Delta\theta} = 0$$

$$\psi^+(i, 1) = \frac{4\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale droite ($j = NN$) :

$$\psi^+(i, NN) = \frac{4\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2)}{3}$$

3.6/ Discrétisation des composantes de la vitesse :

Nous choisissons les différences centrées pour discrétiser les composantes adimensionnelles V_η^+ , V_θ^+ de la vitesse.

$$V_\eta^+ = \frac{1}{H(i,j)} \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right]$$

$$V_\theta^+ = \frac{-1}{H(i,j)} \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{-1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right]$$

Avec: $1 < i < NI$

$1 < j < NN$

3.7/ Processus de calcul :

Pour résoudre le système d'équations (3.17), (3.19) et (3.20) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [21].

En choisissant une méthode itérative à coefficient de relaxation, ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$T^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_T) T^n(i,j) + \frac{\alpha_T}{a_P} \left[a_E T^n(i,j+1) + a_W T^{n+1}(i,j-1) \right. \\ \left. + a_N T^n(i+1,j) + a_S T^{n+1}(i-1,j) \right] \quad (3.21)$$

$$\omega^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_\omega) \omega^n(i,j) + \frac{\alpha_\omega}{a_P} \left[a_E \omega^n(i,j+1) + a_W \omega^{n+1}(i,j-1) \right. \\ \left. + a_N \omega^n(i+1,j) + a_S \omega^{n+1}(i-1,j) + b(i,j) \right] \quad (3.22)$$

$$\psi^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_\psi) \psi^n(i,j) + \frac{\alpha_\psi}{2} \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \\ \left[\frac{\psi^n(i+1,j) + \psi^{n+1}(i-1,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i,j+1) + \psi^{n+1}(i,j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i,j)\omega^+(i,j) \right] \quad (3.23)$$

Avec:

n : ordre de l'intégration.

α_T , α_ω , α_ψ : sont les facteurs de relaxation. Leurs valeurs dépendent de la valeur du nombre de Rayleigh R_a .

La résolution du système d'équation (3.21), (3.22) et (3.23), en utilisant le code de calcul, se fait comme suit:

1/ Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.

2/ Calcul de la distribution de la température.

3/ Calcul de la vorticité.

4/ Calcul de la distribution de la fonction de courant.

5/ Le processus itératif répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de ψ par rapport au critère de convergence suivante :

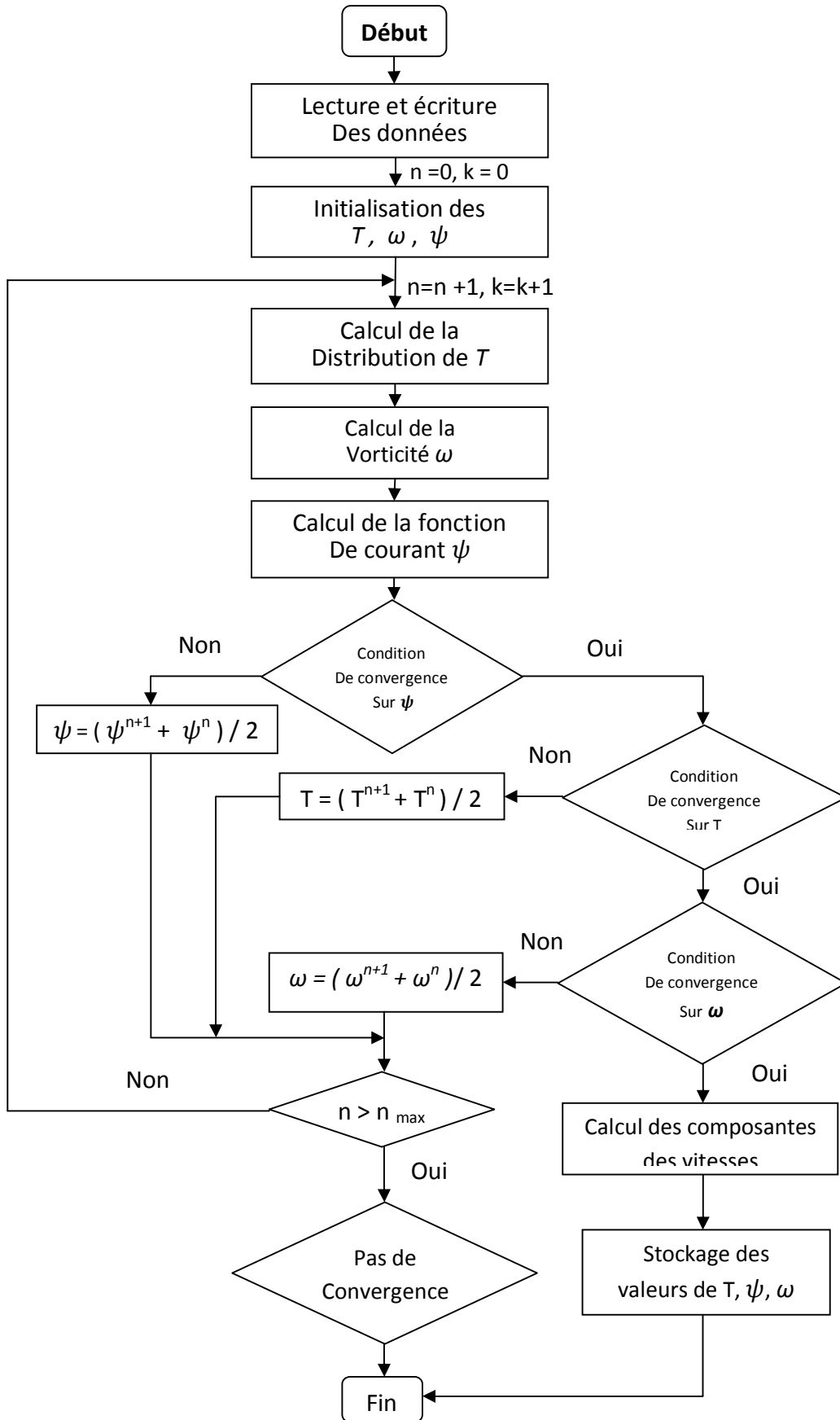
$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

6/ Le même critère est utilisé pour la température.

7/ Le même critère est utilisé pour la vorticité.

8/ Calcul des composantes de la vitesse.

9/ Stockage des valeurs de T , ω et ψ .



Chapitre 4

Résultats et discussions

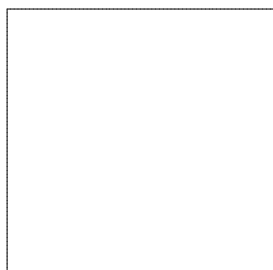
4.1/ Introduction:

Dans ce chapitre nous allons étudier l'influence de la courbure des parois d'une cavité bidimensionnelle remplie d'air, sur la convection naturelle.

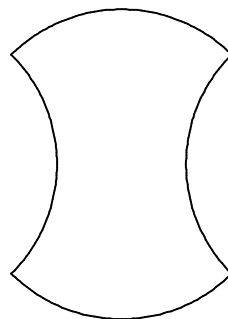
Pour cela nous considérons trois enceintes bidimensionnelles, une cavité à parois planes (carrée), une deuxième cavité à parois horizontales concaves et parois verticales convexes (enceinte A), une troisième cavité à parois horizontales convexes et parois verticales concaves (enceinte B).

Dans notre étude nous utilisons les conditions pariétales suivantes :

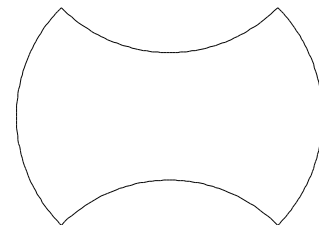
- Les deux parois verticales sont maintenues isothermes à des températures T_1 , T_2 avec T_1 (chaude) et T_2 (froide).
- Les deux parois horizontales sont considérées adiabatiques.



Enceinte carrée



Enceinte A



Enceinte B

Figure 4.1 : Représentation des enceintes étudiées.

Enceinte A : enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes.

Enceinte B : enceinte à parois horizontales convexes et parois verticales concaves.

4.2/ Etude du maillage:

Le choix du maillage a une grande influence sur la précision des résultats et le temps de calcul, et pour voir cet effet, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour les

trois configurations précédemment citées. Les tableaux (4.1), (4.2) et (4.3) illustrent la variation du nombre de Nusselt moyen et la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds. Notre choix s'est porté sur le maillage (71x71) qui assure un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

Pour l'enceinte carrée:

Rayleigh	Maillage ►	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction ▼								
Ra = 50	Er (%)		0	0	0,41	0	0	0	0
	ψ_{\max}	0,243	0,243	0,243	0,244	0,244	0,244	0,244	0,244
	Er (%)		0	0	0	0	0	0	0
	\overline{Nu}	0,640	0,640	0,640	0,640	0,640	0,640	0,640	0,640
Ra = 500	Er (%)		1,00	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	ψ_{\max}	2,016	1,996	1,997	1,998	1,999	2,000	2,001	2,000
	Er (%)		1,32	0,12	0	0	0,12	0	0
	\overline{Nu}	0,824	0,835	0,836	0,836	0,836	0,835	0,835	0,835
Ra = 10 ³	Er (%)		1,81	0,06	0,03	0,03	0,03	0,06	0
	ψ_{\max}	3,214	3,157	3,155	3,156	3,157	3,158	3,160	3,160
	Er (%)		1,81	0,19	0	0,10	0	0	0
	\overline{Nu}	1,028	1,047	1,049	1,049	1,048	1,048	1,048	1,048
Ra = 10 ⁴	Er (%)		12,53	1,81	0,48	0,19	2,49	2,68	0,04
	ψ_{\max}	8,712	7,742	7,604	7,568	7,554	7,747	7,545	7,542
	Er (%)		4,99	0,69	0,23	0,05	0	0	0
	\overline{Nu}	2,039	2,146	2,161	2,166	2,167	2,167	2,167	2,167
Ra = 10 ⁵	Er (%)		40,53	7,40	2,19	0,87	0,40	0,22	0,13
	ψ_{\max}	20,877	14,856	13,833	13,536	13,419	13,365	13,335	13,318
	Er (%)		23,45	3,84	1,08	0,42	0,21	0,09	0,05
	\overline{Nu}	3,108	4,060	4,222	4,268	4,286	4,295	4,299	4,301
Ra = 10 ⁶	Er (%)		87,57	23,38	8,11	3,51	1,64	0,88	0,53
	ψ_{\max}	64,042	34,110	27,646	25,571	24,704	24,305	24,093	23,967
	Er (%)		45,03	15,76	5,32	2,22	0,15	0,57	0,33
	\overline{Nu}	3,412	6,207	7,368	7,782	7,959	8,045	8,091	8,118

Tableau 4.1: Variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds (enceinte carrée).

Pour l'enceinte A :

Rayleigh	Maillage	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction								
Ra = 50	Er (%)		7,14	0	0	0	0	0	0
	ψ_{\max}	0,030	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
	Er (%)		1,83	0,52	0,26	0,17	0,09	0,09	0,09
	\overline{Nu}	1,124	1,145	1,151	1,154	1,156	1,157	1,158	1,159
Ra = 500	Er (%)		4,98	3,57	0	3,56	0	0	0
	ψ_{\max}	0,295	0,281	0,280	0,280	0,281	0,281	0,281	0,281
	Er (%)		1,83	0,61	0,26	0,17	0,17	0	0,09
	\overline{Nu}	1,129	1,150	1,157	1,160	1,162	1,164	1,164	1,165
Ra = 10 ³	Er (%)		5,04	0,36	0,18	0,18	0	0,18	0
	ψ_{\max}	0,584	0,556	0,554	0,553	0,554	0,554	0,555	0,555
	Er (%)		36,85	41,91	0,34	0,17	0,08	0,08	0,08
	\overline{Nu}	1,140	1,666	1,174	1,178	1,180	1,181	1,182	1,183
Ra = 10 ⁴	Er (%)		6,55	0,97	0,39	0,14	0	0	0,03
	ψ_{\max}	3,888	3,649	3,613	3,599	3,594	3,594	3,594	3,593
	Er (%)		6,01	1,40	0,50	0,22	0,11	0,06	0
	\overline{Nu}	1,658	1,764	1,789	1,798	1,802	1,804	1,805	1,805
Ra = 10 ⁵	Er (%)		14,46	2,78	1,16	0,54	0,27	0,16	0,08
	ψ_{\max}	12,226	10,681	10,392	10,273	10,218	10,190	10,174	10,166
	Er (%)		8,66	2,07	0,78	0,39	0,18	0,12	0,06
	\overline{Nu}	2,944	3,223	3,291	3,317	3,330	3,336	3,340	3,342
Ra = 10 ⁶	Er (%)		38,18	4,25	1,84	0,89	0,53	0,30	0,18
	ψ_{\max}	25,749	18,634	17,887	17,563	17,408	17,317	17,266	17,235
	Er (%)		17,07	4,45	1,73	0,82	0,44	0,29	0,17
	\overline{Nu}	4,502	5,429	5,682	5,782	5,830	5,856	5,873	5,883

Tableau 4.2: Variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds (enceinte A).

Pour l'enceinte B :

Rayleigh	Maillage ▶	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction ▼								
Ra = 50	Er (%)		6,25	0	0	0	0	0	0
	ψ_{\max}	0,017	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016
	Er (%)		1,37	0,55	0,28	0	1,63	1,93	0
	\overline{Nu}	0,371	0,366	0,364	0,363	0,363	0,363	0,362	0,362
Ra = 500	Er (%)		5,03	0,63	0	0	0	0	0
	ψ_{\max}	0,167	0,159	0,158	0,158	0,158	0,158	0,158	0,158
	Er (%)		1,09	0,55	0,27	0	1,35	1,65	0
	\overline{Nu}	0,372	0,368	0,366	0,365	0,365	0,364	0,364	0,364
Ra = 10 ³	Er (%)		5,36	0,32	0	0	0	0	0,32
	ψ_{\max}	0,334	0,317	0,316	0,316	0,316	0,316	0,316	0,317
	Er (%)		1,07	0,54	0,27	0	1,60	1,90	0
	\overline{Nu}	0,377	0,373	0,371	0,370	0,370	0,370	0,369	0,369
Ra = 10 ⁴	Er (%)		8,09	0,93	0,04	0,07	0,11	0,04	0,07
	ψ_{\max}	3,047	2,819	2,793	2,792	2,794	2,797	2,798	2,800
	Er (%)		6,41	0,52	0	0	0,13	0	0
	\overline{Nu}	0,715	0,764	0,768	0,768	0,768	0,767	0,767	0,767
Ra = 10 ⁵	Er (%)		29,42	9,09	2,20	0,80	0,10	0,05	0,07
	ψ_{\max}	16,112	12,449	11,412	11,166	11,077	11,066	11,061	11,069
	Er (%)		35,55	8,15	1,23	0,21	1,68	1,64	0
	\overline{Nu}	1,670	2,591	2,821	2,856	2,862	2,863	2,864	2,864
Ra = 10 ⁶	Er (%)		29,44	21,70	14,41	6,88	2,42	0,69	0,14
	ψ_{\max}	59,618	46,057	37,845	33,077	30,948	30,218	30,011	29,970
	Er (%)		49,12	27,02	13,41	5,39	1,87	0,65	0,22
	\overline{Nu}	1,976	3,884	5,322	6,146	6,496	6,620	6,663	6,678

Tableau 4.3: Variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds (enceinte B).

4.3/ Validation :

Davis [22] et J. C. Kalita [23] ont considéré dans leurs études, une cavité carrée de côté L remplie d'air, avec des parois verticales différentiellement chauffées tandis que les parois horizontales sont considérées adiabatiques. D. Gerardo et al [24] eux aussi ont étudié numériquement l'effet du rayonnement de la surface sur la convection naturelle dans une enceinte parabolique avec des parois verticales adiabatiques et des parois horizontales plates différentiellement chauffées, et ils ont validé leurs résultats en considérant la même

enceinte que celle de Davis [22]. Nous avons regroupé dans le tableau (4.4.a) les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois, issues de nos calculs avec ceux des références [22] et [23], et dans le tableau (4.4.b) nos valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois actives et nos valeurs maximales de la fonction de courant, et celles des références [22] et [24], en plus nous avons pris les mêmes paramètres que ceux utilisés dans la référence [7] qui ont considéré eux aussi dans leur étude une cavité carrée, pour présenter dans les figures (4.2) et (4.3) une comparaison qualitative entre les fonctions de courant et les isothermes obtenues par notre code de calcul et les leurs.

Ra	Référence Maillage	Davis [22] (81x81)	Nos résultats (81x81)	Ecart relatif (%)	Kalita et al. [23] (41x41)	Nos résultats (41x41)	Ecart relatif (%)
10^3	\overline{Nu}	1,118	1,119	0,09	1,117	1,119	0,18
10^4	\overline{Nu}	2,243	2,251	0,36	2,245	2,253	0,36
10^5	\overline{Nu}	4,519	4,533	0,31	4,522	4,522	0,00
10^6	\overline{Nu} Maillage	8,800 (81x81)	8,829 (81x81)	0,31	8,829 (81x81)	8,829 (81x81)	0,00

Tableau 4.4.a : Comparaison des nombres de Nusselt moyens.

Nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Davis [22] et de Kalita et al. [23], l'écart relatif maximal dans tous les cas ne dépasse pas : 0,36%.

Ra	Nos calculs $ \psi_{\max} $	Davis [22] $ \psi_{\max} $	Ecart relatif (%)	Réf [24] $ \psi_{\max} $	Ecart relatif (%)	Nos calculs \overline{Nu}	Davis [22] \overline{Nu}	Ecart relatif (%)	Réf [24] \overline{Nu}	Ecart relatif (%)
10^3	1,172	1,174	0,17	1,172	0	1,120	1,116	0,360	1,119	0,09
10^4	5,059	5,098	0,77	5,046	0,26	2,253	2,242	0,49	2,254	0,04
10^5	9,649	9,644	0,05	9,550	1,04	4,522	4,523	0,02	4,545	0,51
10^6	17,346	16,961	2,67	16,807	3,21	8,692	8,928	2,64	8,979	3,20

Tableau 4.4.b : Comparaison des fonctions de courant et des nombres de Nusselt moyens pour un maillage de 41x41.

Nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Davis [22] et de la référence [24], l'écart relatif maximal dans tous les cas ne dépasse pas : 3,2% pour les nombres de Nusselt moyens, et 3,21% pour les valeurs maximales de la fonction de courant.

Remarque :

Ecart relatif = (Nos résultats – Résultats Réf. [X]) / Résultats Réf. [X]

4.3.1/ Comparaison des isothermes :

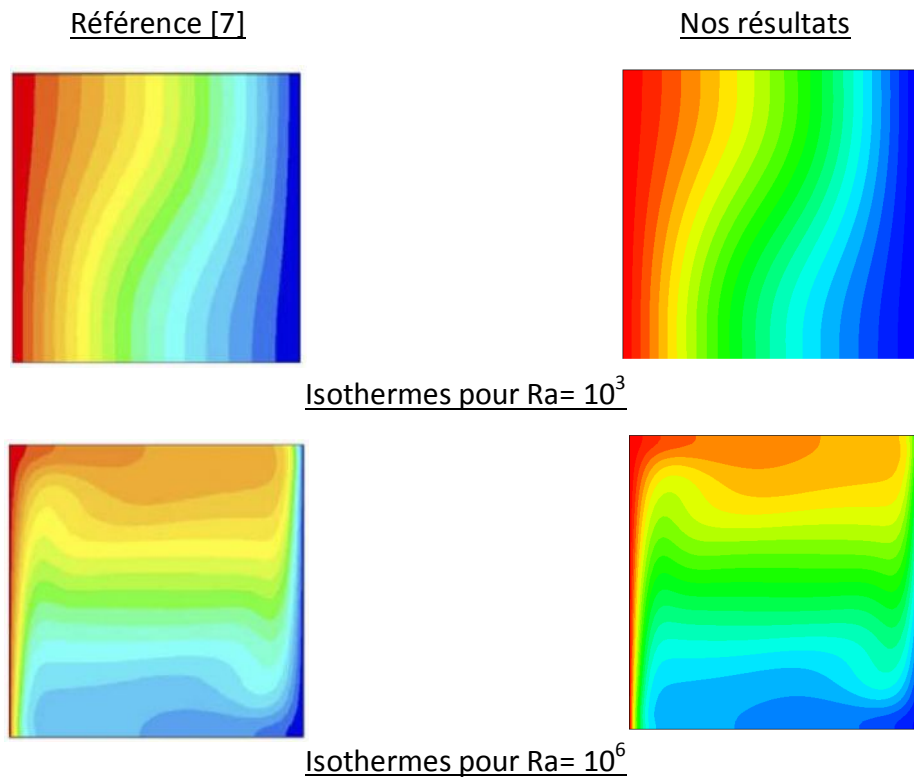


Figure 4.2 : Isothermes dans une cavité carrée différentiellement chauffée.

4.3.2/ Comparaison des lignes de courants

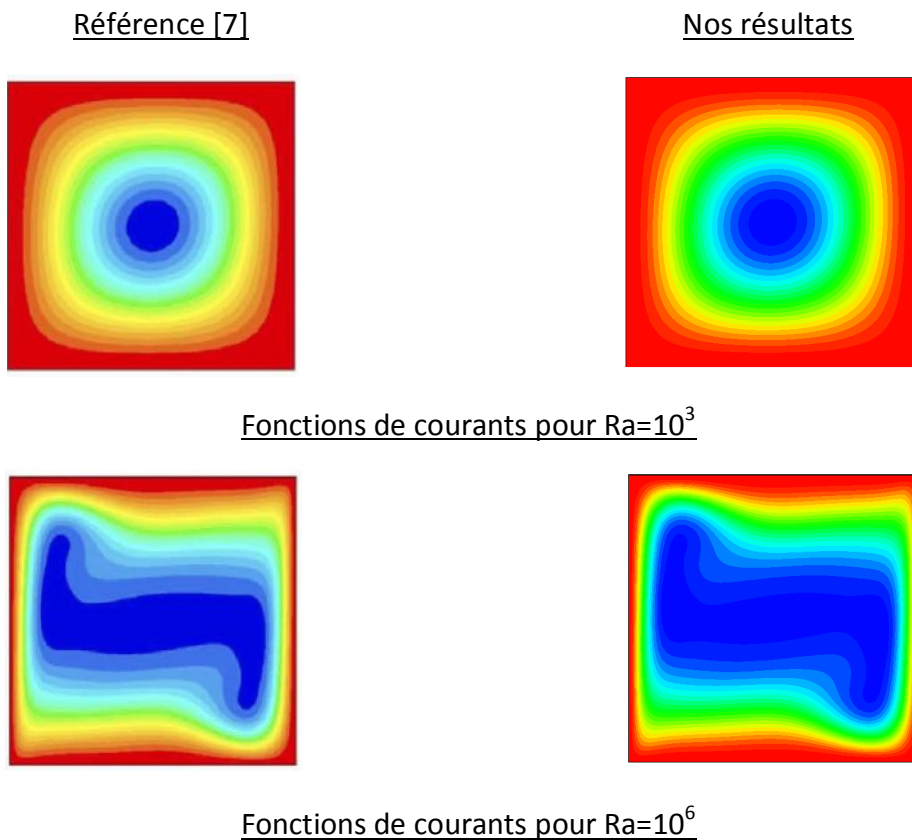


Figure 4.3 : Lignes de courants dans une cavité carrée différentiellement chauffée.

4.4/ Convection naturelle dans une enceinte carrée:

Pour bien voir l'influence de la courbure des parois de l'enceinte sur les champs dynamiques (lignes de courants) et thermiques (isothermes) ainsi que sur le taux de transfert de chaleur nous étudions tout d'abord l'enceinte à parois planes et par la suite nous passerons à l'étude de l'enceinte à parois courbées.

4.4.1/ Influence du nombre de Rayleigh:

4.4.1.1/ Isothermes et lignes de courants:

Les figures (4.4-4.9) représentent les lignes de courants et les isothermes dans une enceinte carrée pour des nombres de Rayleigh $Ra = 50, 500, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$. Nous remarquons un écoulement monocellulaire du fluide dans le sens trigonométrique pour $Ra = 50, 500, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ cet écoulement est dû au mouvement ascendant des particules du fluide qui s'échauffe le long de la paroi chaude sous l'effet de la poussée d'Archimède et du mouvement descendant des particules du fluide qui se refroidit le long de la paroi froide sous l'effet de la pesanteur.

Dans la figure (4.4) pour $Ra=50$ les lignes isothermes sont presque parallèles aux parois verticales de l'enceinte carrée, et les valeurs de la fonction de courant sont très faibles, dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide, et les lignes de courant sont des cercles concentriques qui tendent à épouser la forme de l'enceinte vers l'extérieur, le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction.

Les figures (4.5) et (4.6) qui correspondent respectivement à $Ra=500$ et $Ra=10^3$ montrent que les lignes isothermes commencent à se modifier et se déforment légèrement en suivant le sens de rotation des lignes de courant mais restent encore presque parallèles aux parois latérales froide (moitié supérieure) et chaude (moitié inférieure), les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur ces figures augmentent sensiblement ce qui traduit une convection naturelle naissante, les transferts thermiques restent toujours dominés par un régime pseudo conductif.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra=10^4, Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) les figures (4.7), (4.8) et (4.9) montrent que les lignes isothermes se modifient beaucoup pour devenir parallèles aux parois horizontales inactives au milieu de l'enceinte et épouser la forme des parois actives verticales tout en étant très serrées ce qui dénote d'un transfert très intense dans ces régions là, ce qui est très bien illustré par la figure (4.9) qui montre aussi que même les lignes de courant sont très serrées près de ces parois. Les valeurs de la fonction de courant correspondant à ces figures augmentent significativement tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante. L'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle.

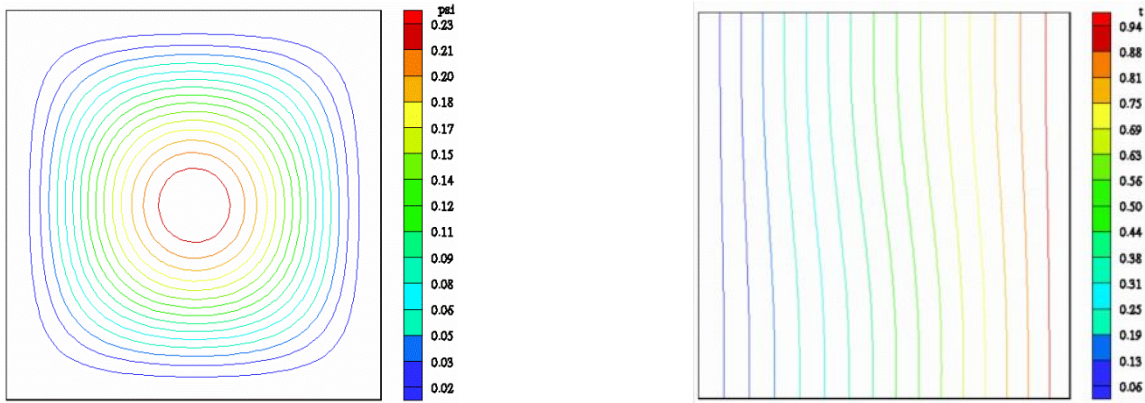


Figure 4.4 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 50$

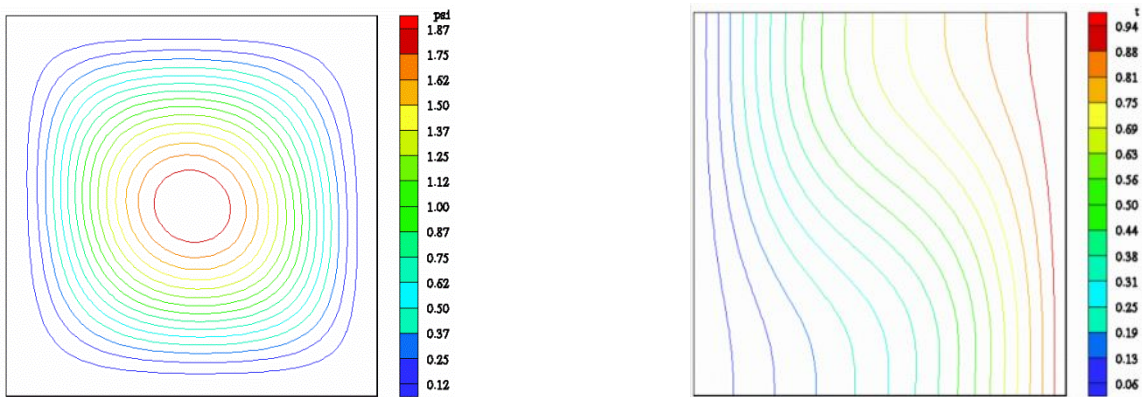


Figure 4.5 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 500$

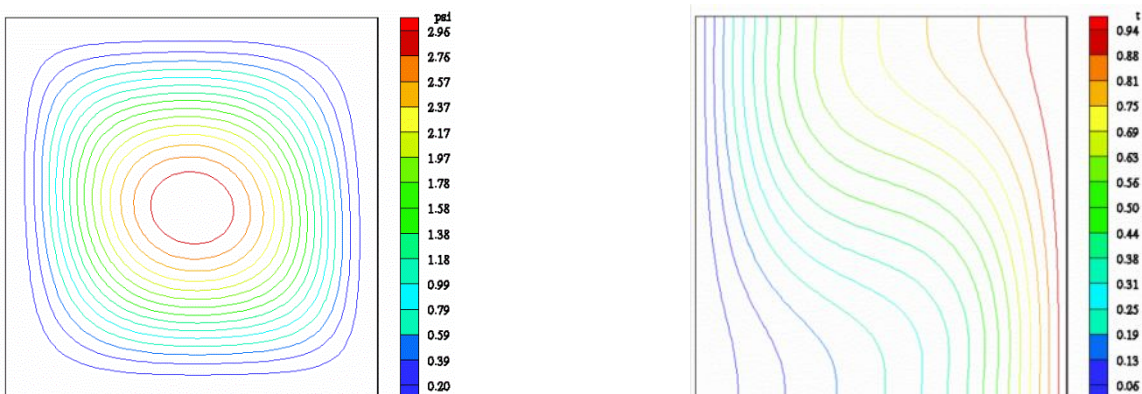


Figure 4.6 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^3$

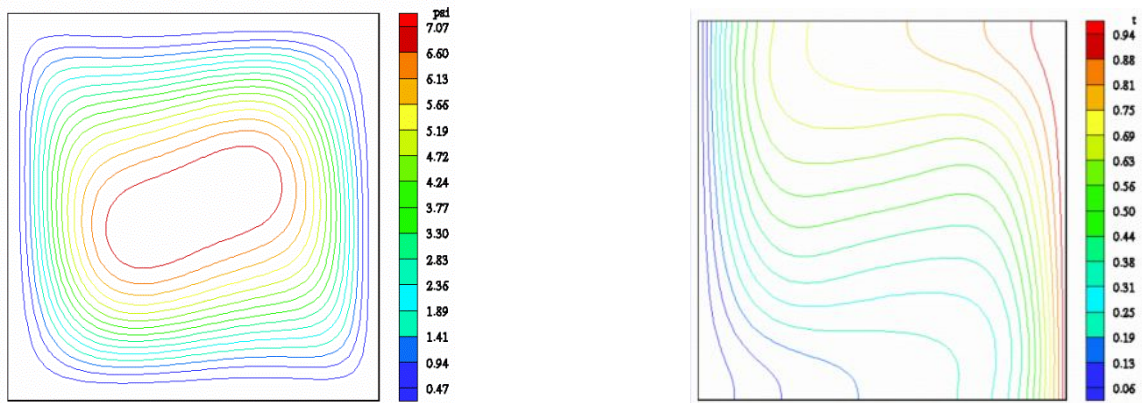


Figure 4.7 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^4$

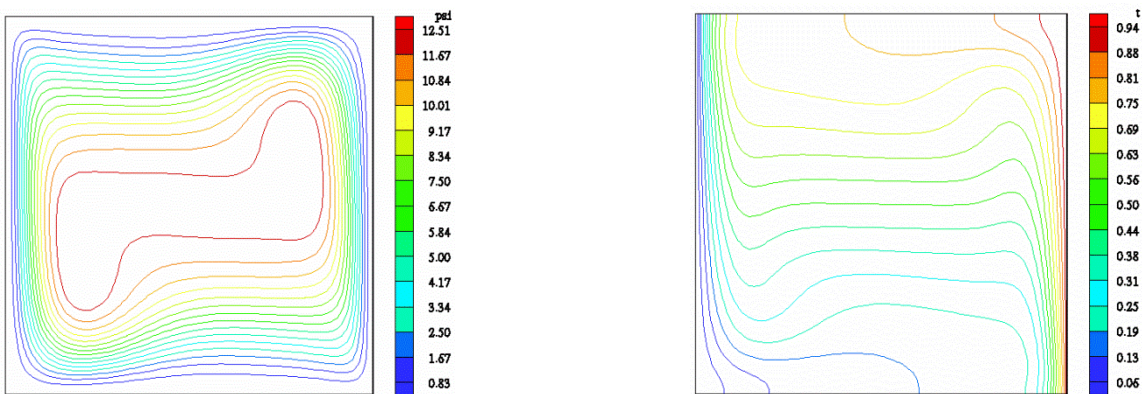


Figure 4.8 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^5$

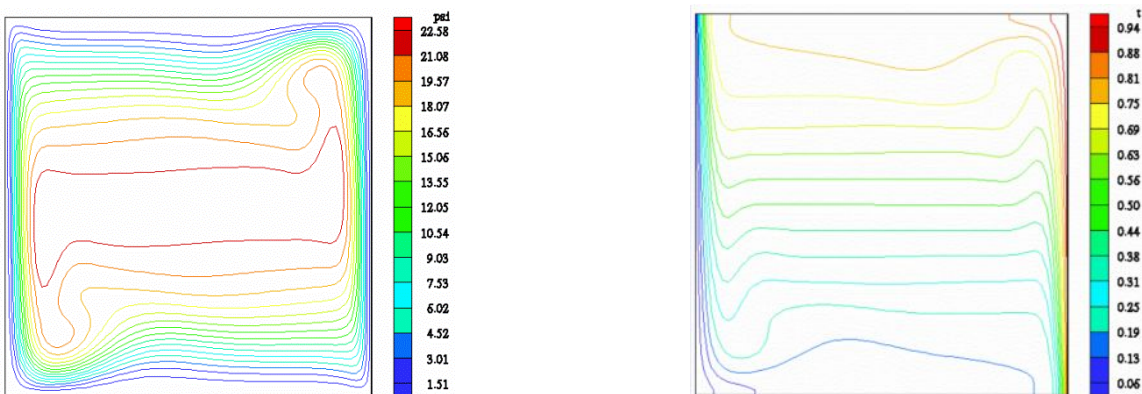


Figure 4.9 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^6$

4.4.1.2/ Nombre de Nusselt local :

Nous déterminons les nombres de Nusselt locaux dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des fonctions de courant, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres, par exemple, si l'on considère un point courant sur une paroi suivant une coordonnée, l'observation d'une diminution monotone du nombre de Nusselt local correspond à un écoulement dirigé suivant cette coordonnée, l'observation d'une augmentation, correspond à un écoulement dirigé en sens opposé, un minimum traduit l'existence d'un tourbillon éloignant le fluide de la paroi, par contre un maximum traduit, l'existence d'un tourbillon rapprochant le fluide vers la paroi.

4.4.1.2.1/ Variation du nombre de Nusselt local:

Pour la paroi chaude :

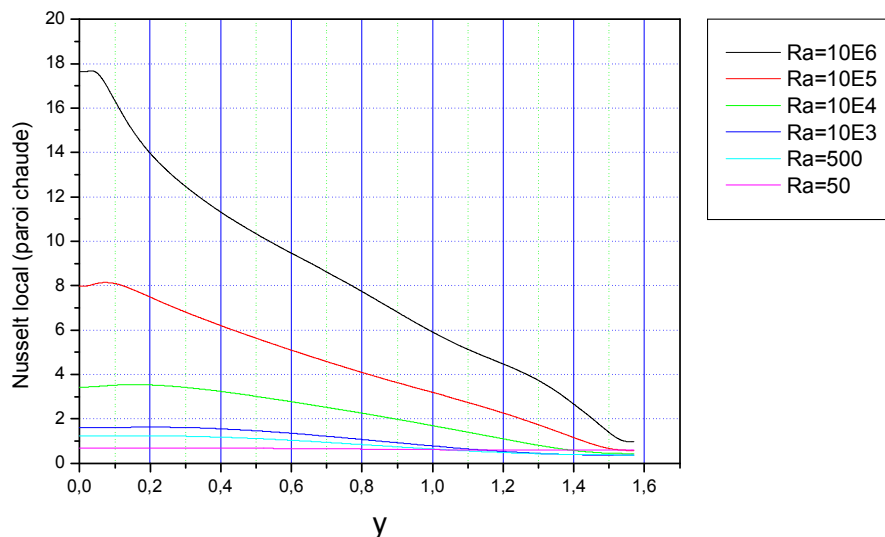


Figure 4.10 : Nombre de Nusselt local pour la paroi chaude pour différents nombres de Rayleigh

La figure (4.10) représente la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude en fonction de y pour les nombres de Rayleigh suivants : 50, 500, 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 .

D'après les courbes de la figure (4.10) nous pouvons dire que :

1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude atteint son maximum au point bas de la paroi chaude puis il commence à diminuer en descendant la paroi pour arriver à son minimum au point haut de la paroi chaude, et cela veut dire que le fluide arrive vers la paroi en bas, ce qui traduit un gradient de température important à cet endroit et il quitte la paroi en haut, et donc le gradient de température est moins important à cet endroit.

2/ Pour la même coordonnée y le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, et cela veut dire que l'échange de chaleur est meilleur pour des nombres de Raleigh élevés.

Pour la paroi froide :

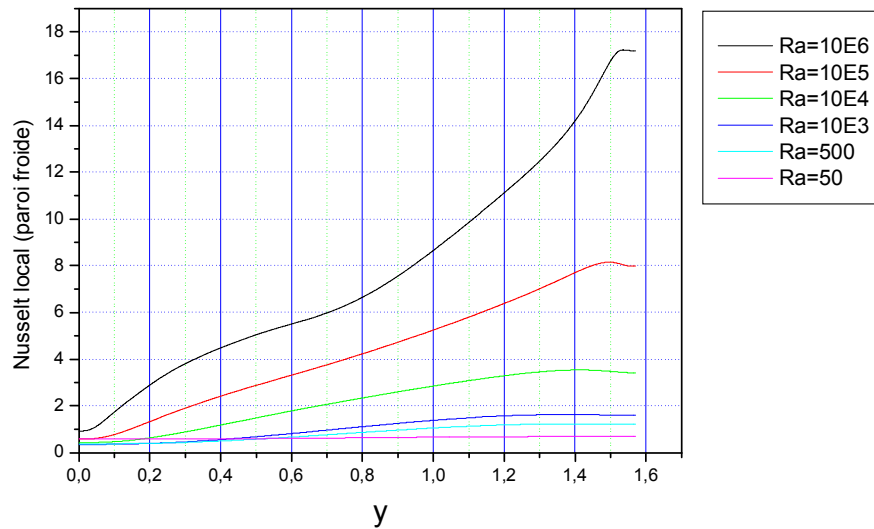


Figure 4.11 : Nombre de Nusselt local pour la paroi froide pour différents nombres de Rayleigh

D'après les courbes de la figure (4.11) nous pouvons dire que :

1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi froide atteint son maximum au point haut de la paroi froide puis il commence à diminuer en descendant la paroi pour arriver à son minimum au point bas de la paroi froide, et cela est conforme au sens de l'écoulement en sachant que le nombre de Nusselt local est minimum si le fluide s'éloigne de la paroi et maximum si le fluide arrive vers la paroi.

2/ Pour la même coordonnée y le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, et cela veut dire que l'échange de chaleur est meilleur pour des nombres de Raleigh élevés.

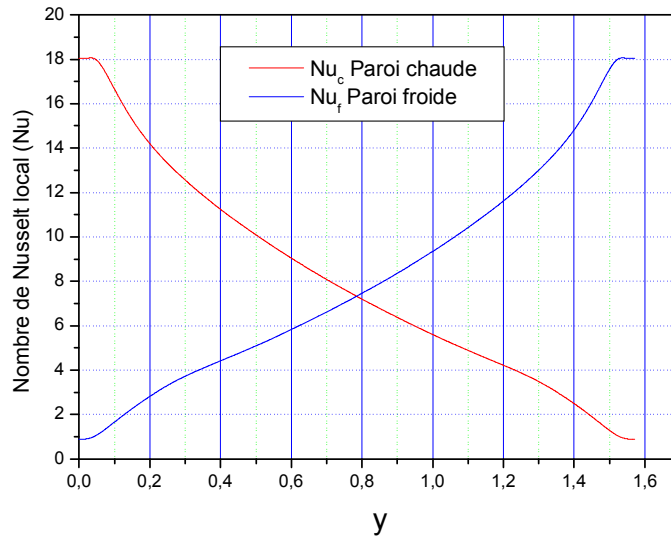


Figure 4.12 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et la paroi froide Pour $Ra= 10^6$.

La figure (4.12) présente une parfaite symétrie entre les courbes de variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et sur la paroi froide, ce qui est évident car l'écoulement qui est ascendant du côté paroi chaude est descendant du côté paroi froide.

4.4.1.2.2/ Variation du nombre de Nusselt moyen :

Pour la paroi chaude :

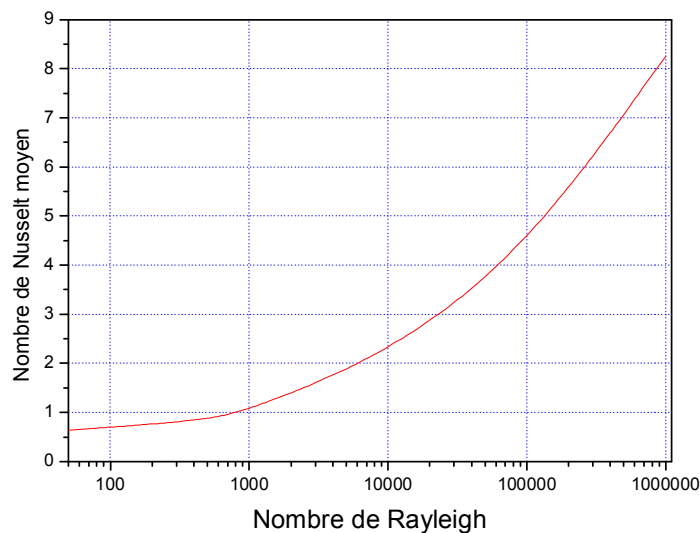


Figure 4.13 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh

La figure (4.13) représente la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh. Sur cette figure nous remarquons que :

1/ Le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude croît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

2/ Pour les bas nombres de Rayleigh $Ra \leq 10^3$ le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction du fait que le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude est inférieur à un pour cette gamme de Ra, par contre l'échange de chaleur sera dominé par la convection naturelle pour des valeurs élevées de Ra ($Ra > 10^3$).

4.5/ Convection naturelle dans une enceinte à parois courbées :

4.5.1/ Convection naturelle dans une enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes (enceinte A) :

4.5.1.1/ Influence du nombre de Rayleigh :

4.5.1.1.1/ Isothermes et lignes de courants :

Les figures (4.14 - 4.19) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Nous remarquons que le régime de l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule épousant la forme de l'enceinte, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique du fait que les particules du fluide s'échauffent près de la paroi chaude et montent le long de cette paroi, sous l'action de la poussée d'Archimède, puis ce mouvement s'oriente vers la paroi froide par la présence de la paroi horizontale supérieure où les particules du fluide perdent leur chaleur et descendent le long de la paroi froide et finissent par s'orienter de nouveau, par la paroi horizontale inférieure, vers la paroi chaude, c'est ainsi que se forme la cellule.

Pour $Ra = 50, 500$ et 10^3 les figures (4.14), (4.15) et (4.16) montrent que les lignes isothermes épousent le profil des parois verticales et restent parallèles entre elles et les lignes de courant restent concentriques avec l'apparition de deux cellules ayant le même sens de rotation de part et d'autre du plan médian horizontal ces deux cellules tournent très lentement comme le montre les valeurs sur la légende ci-contre, cette configuration montre que nous sommes en présence d'un régime pseudo conductif.

Les figures (4.17), (4.18) et (4.19) correspondant aux valeurs $Ra = 10^4, 10^5$ et 10^6 montrent que les lignes isothermes commencent à subir des déformations pour devenir, au milieu de l'enceinte, presque parallèles aux parois horizontales de l'enceinte A pour $Ra = 10^5$, et finir par devenir parallèles et presque horizontales, au milieu de l'enceinte, pour $Ra = 10^6$. Les valeurs de la fonction de courant augmentent considérablement, le transfert thermique dans ce cas se fait par convection.

A partir de $Ra = 10^4$ les lignes isothermes commencent à devenir plus serrées du côté bas de la paroi chaude et du côté haut de la paroi froide pour finir d'être très serrées sur toutes la longueur des deux parois latérales chaude et froide pour $Ra = 10^6$ ce qui explique que le transfert de chaleur par convection commence à être plus intense sur le côté bas de la paroi chaude et sur le côté haut de la paroi froide et continue de s'intensifier sur toute la longueur de la paroi chaude et la paroi froide.

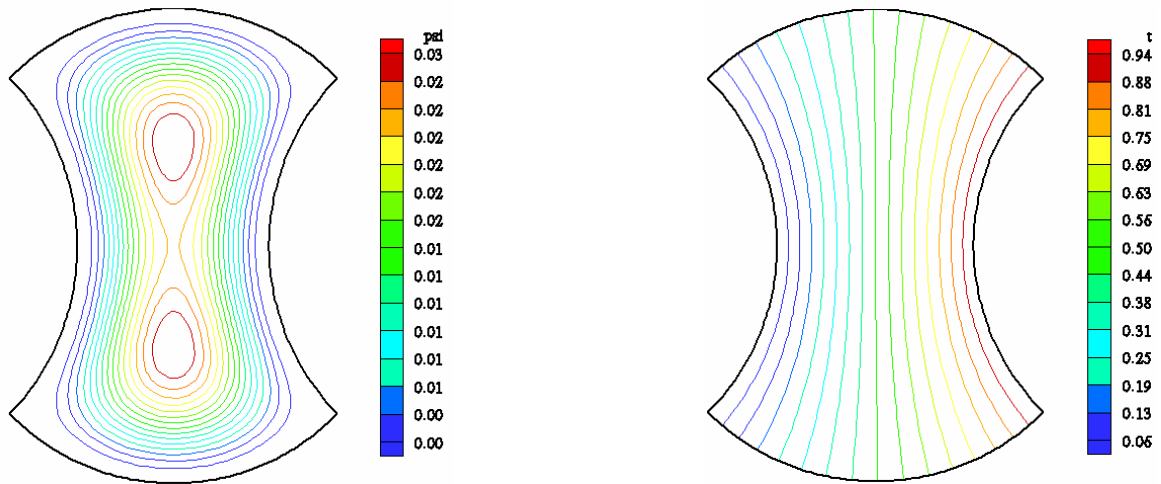


Figure 4.14 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 50$

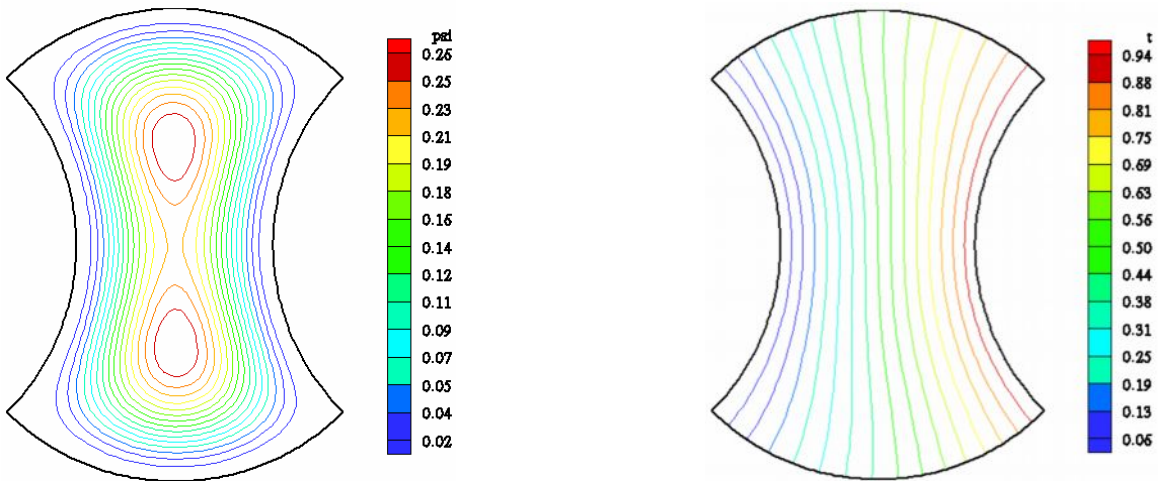


Figure 4.15 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 500$

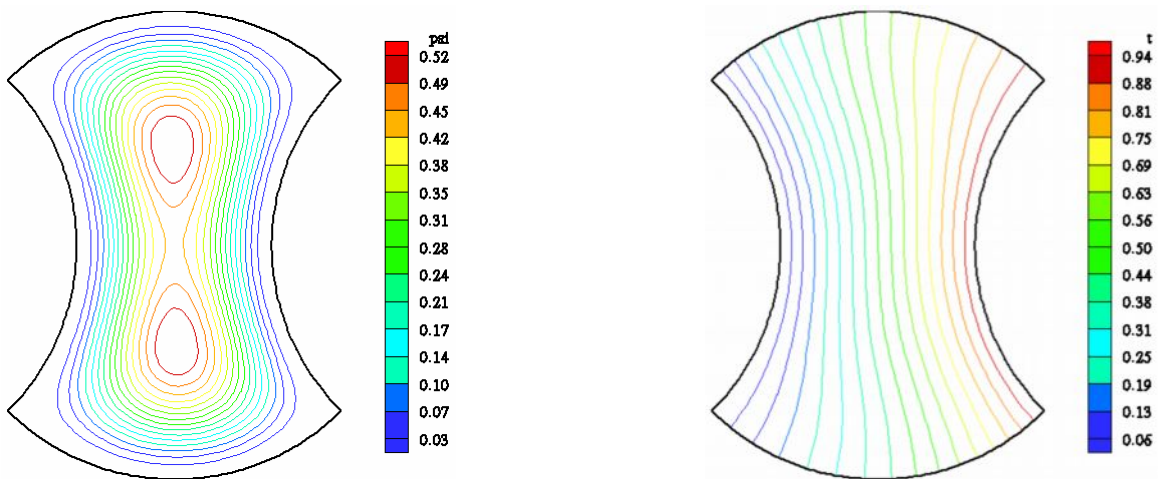


Figure 4.16 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^3$

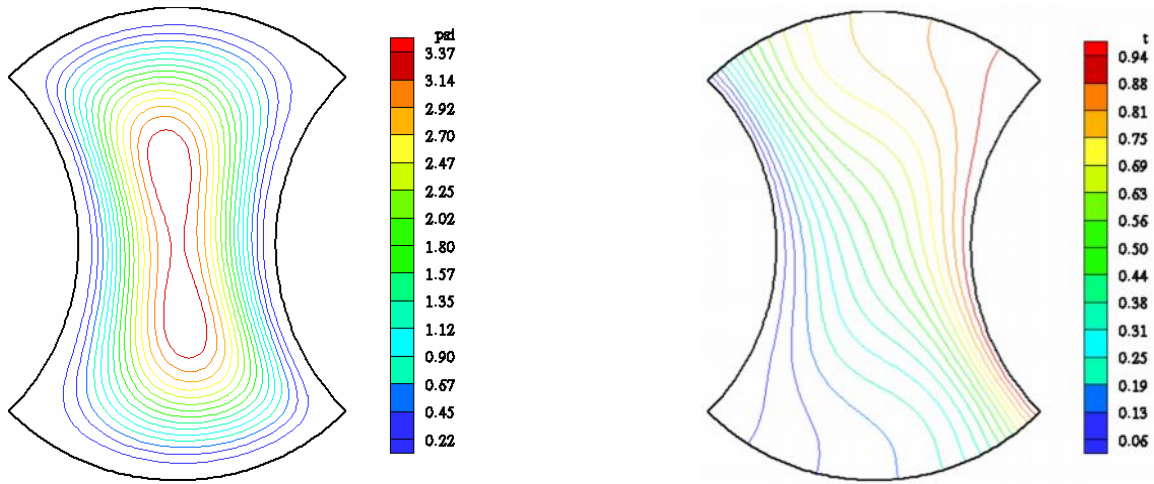


Figure 4.17 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^4$

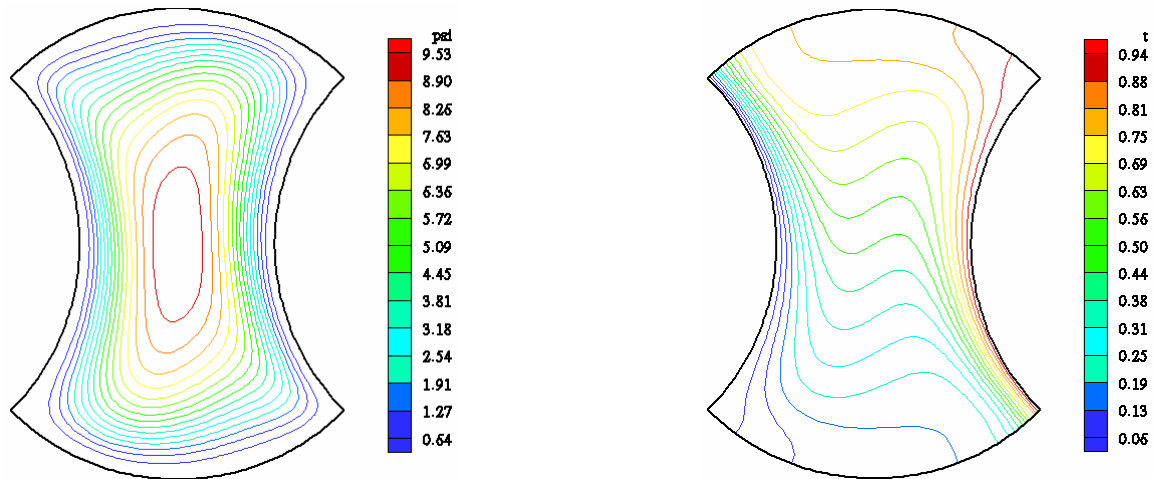


Figure 4.18 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^5$

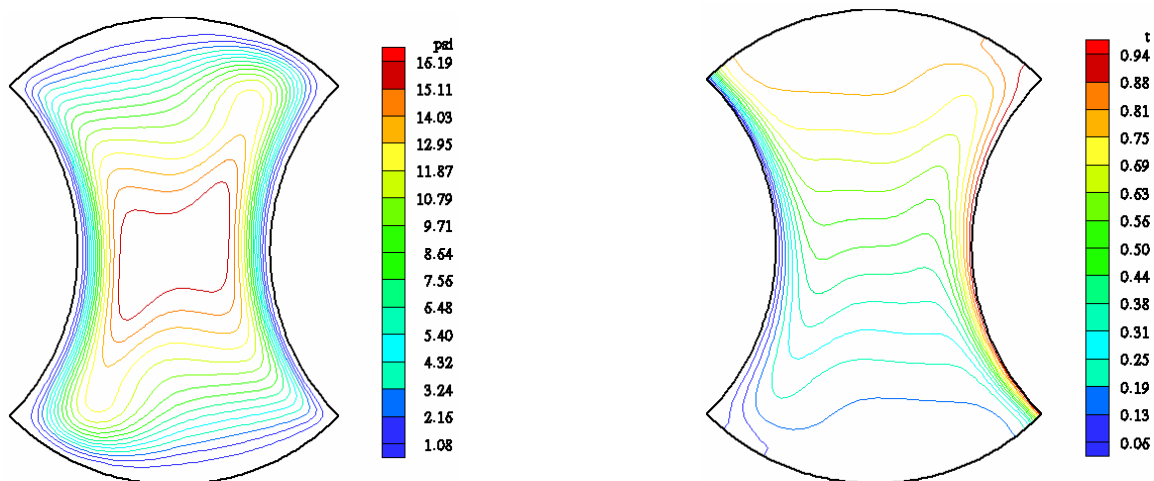


Figure 4.19 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^6$

4.5.1.1.2/ Variation du nombre de Nusselt local :

Pour la paroi chaude :

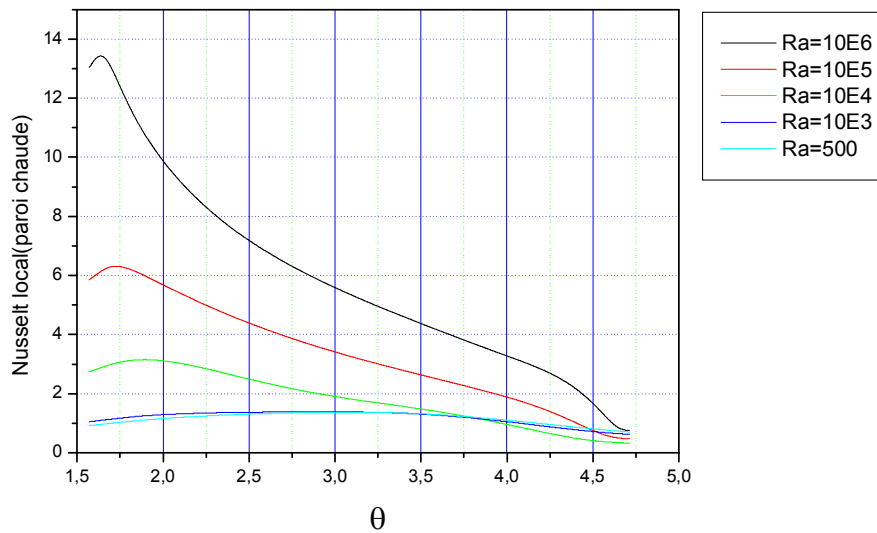


Figure 4.20 : Nombre de Nusselt local pour la paroi chaude pour différents nombres de Rayleigh.

D'après les courbes de la figure (4.20) nous pouvons dire que :

- 1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude atteint son maximum en bas de celle-ci puis sa valeur diminue le long de cette dernière pour arriver à son minimum du côté haut.
- 2/ Pour la même coordonnée θ le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Pour la paroi froide :

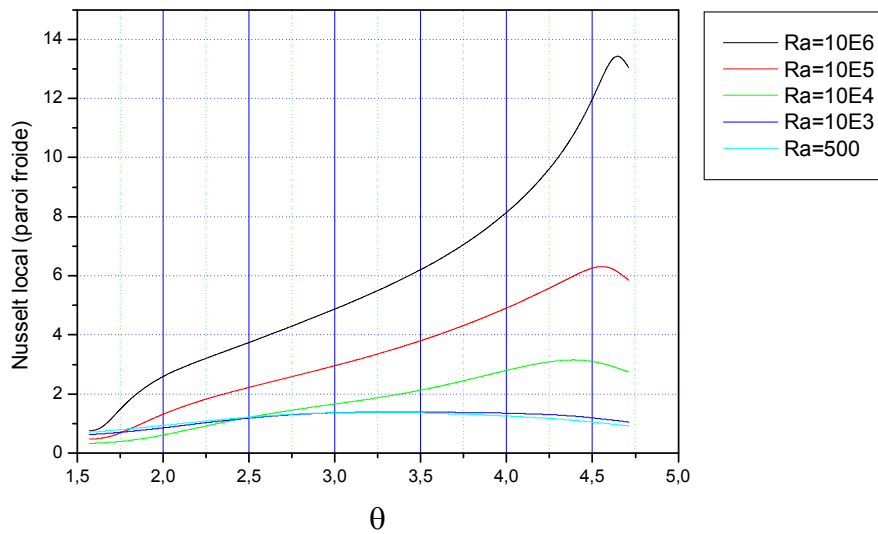


Figure (4.21) : Nombre de Nusselt local pour la paroi froide pour différents nombres de Rayleigh

D'après les courbes de la figure (4.21) nous pouvons dire que :

1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi froide atteint son maximum à l'endroit le plus haut de cette dernière, puis sa valeur diminue en descendant la paroi pour arriver à son minimum au bas de celle-ci.

2/ Pour la même coordonnée θ le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

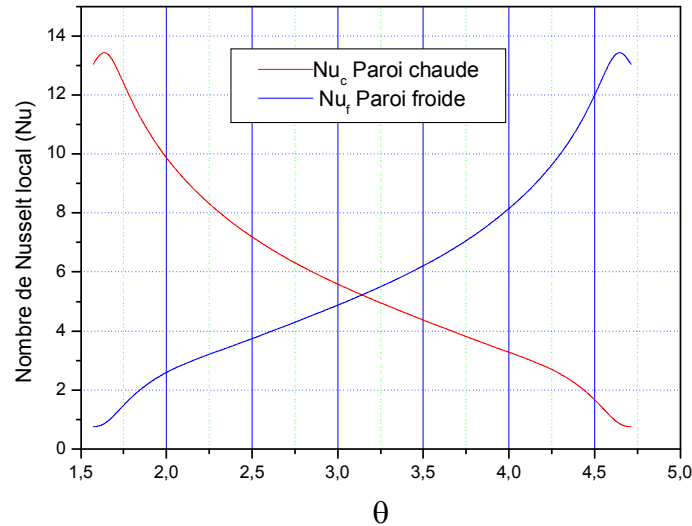


Figure 4.22 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et la paroi froide Pour $Ra= 10^6$.

La figure (4.22) présente une parfaite symétrie entre les courbes de variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et la paroi froide, ce qui est évident du moment que le fluide qui est ascendant du côté paroi chaude devient descendant du côté paroi froide.

4.5.1.1.3/ Variation du nombre de Nusselt moyen :

Pour la paroi chaude :

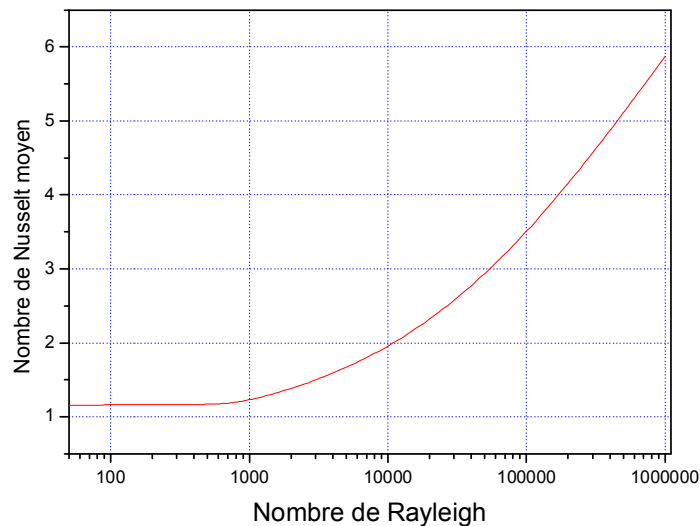


Figure 4.23 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh.

La figure (4.23) représente la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh. Sur cette figure nous remarquons que :

1/ Le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude croit avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

2/ Pour les bas nombres de Rayleigh $Ra \leq 10^3$ le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction bien qu'il y est de la convection (le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude est légèrement supérieur à un pour cette gamme de Ra) par contre l'échange de chaleur se fait essentiellement par convection pour des valeurs élevées de Ra ($Ra > 10^3$).

4.5.2/ Convection naturelle dans une enceinte à parois horizontales convexes et parois verticales concaves (enceinte B) :

4.5.2.1/ Influence du nombre de Rayleigh :

4.5.2.1.1/ Isothermes et lignes de courants :

Les figures (4.24-4.29) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Nous remarquons que le régime de l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule épousant la forme de l'enceinte B, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique.

Pour $Ra = 50, 500$ et 10^3 les figures (4.24), (4.25) et (4.26) montrent que la présente configuration de l'enceinte favorise l'apparition de deux cellules qui tournent dans les mêmes sens et qui sont de part et d'autre d'un plan vertical médian. Dans ce cas les lignes isothermes épousent le profil des parois verticales et restent parallèles entre elles et les lignes de courant restent concentriques ces deux cellules tournent très lentement comme le montre les valeurs de la fonction de courant sur les légendes ci-contre ces figures, cette configuration montre que nous sommes en présence d'un régime pseudo conductif.

Dans le cas où nous augmentons notre chauffage en augmentant bien sûr le nombre de Rayleigh Ra , nous remarquons que les centres des deux cellules à partir de $Ra = 10^5$ se déplacent d'une manière opposée l'une vers la moitié supérieure de la paroi chaude et l'autre vers la moitié inférieure de la paroi froide comme l'illustrent bien les figures (4.28) et (4.29). Ces cellules tournent rapidement vu les valeurs de la fonction de courant figurants sur les légendes ci-contre ces figures, ceci d'une part, d'autre part les lignes isothermes deviennent très serrées sur les parois ce qui dénote que nous sommes en présence d'un régime convectif prépondérant.

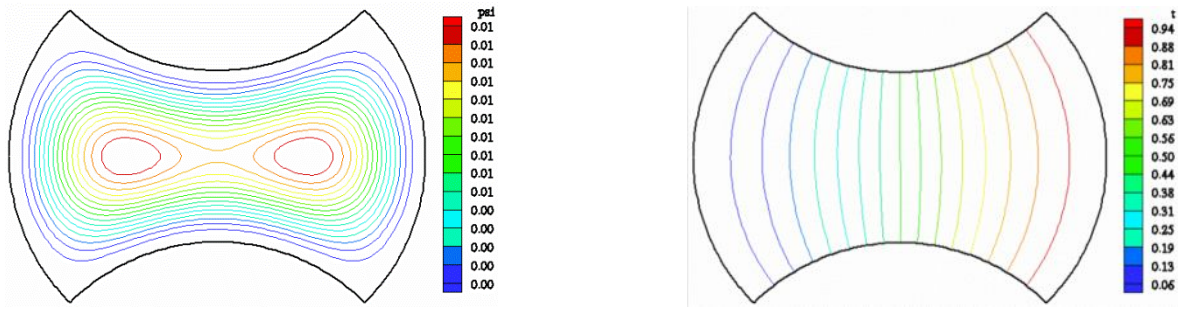


Figure 4.24 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 50$

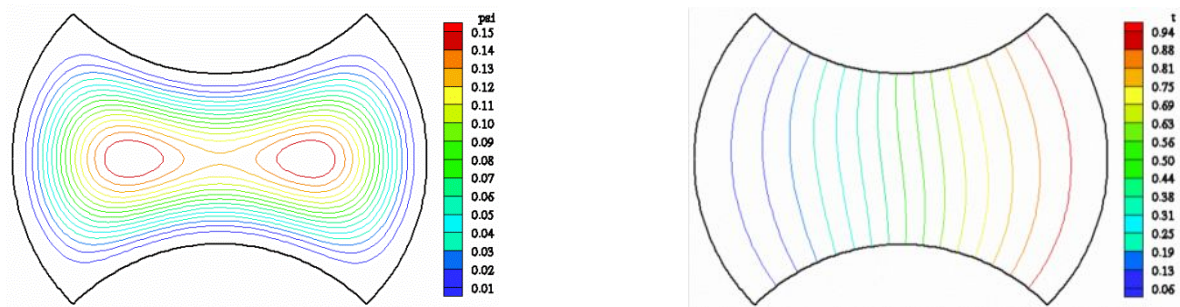


Figure 4.25 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 500$

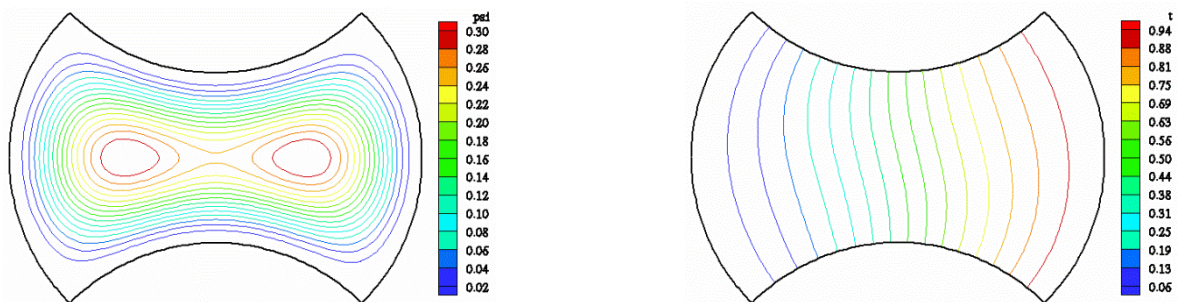


Figure 4.26 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^3$

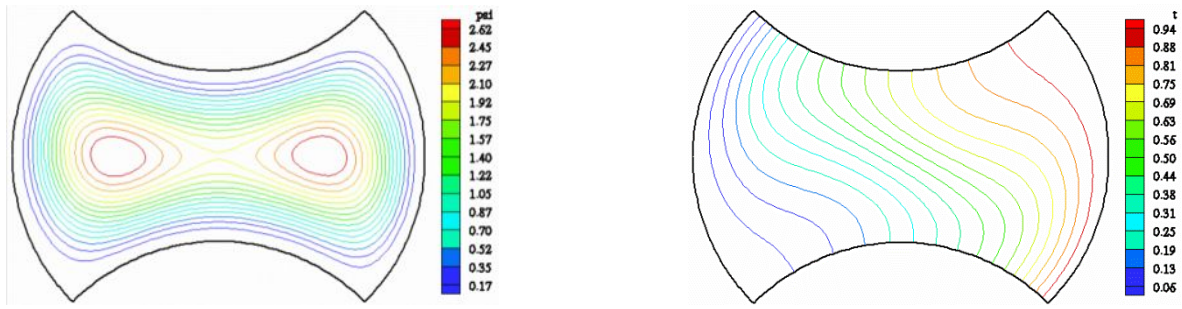


Figure 4.27 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^4$

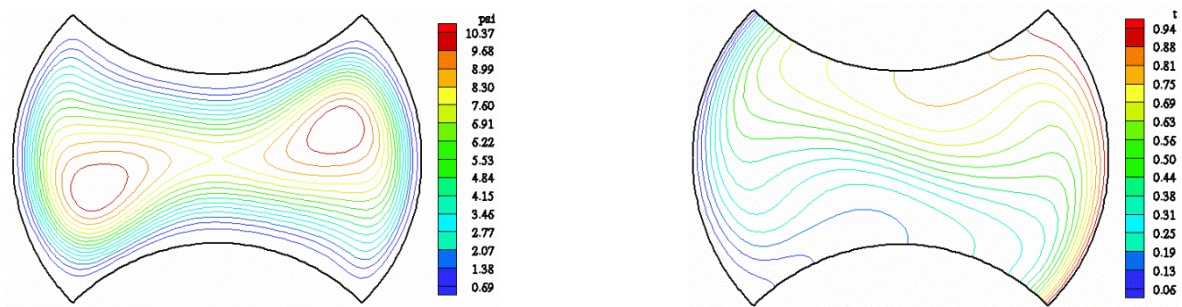


Figure 4.28 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^5$

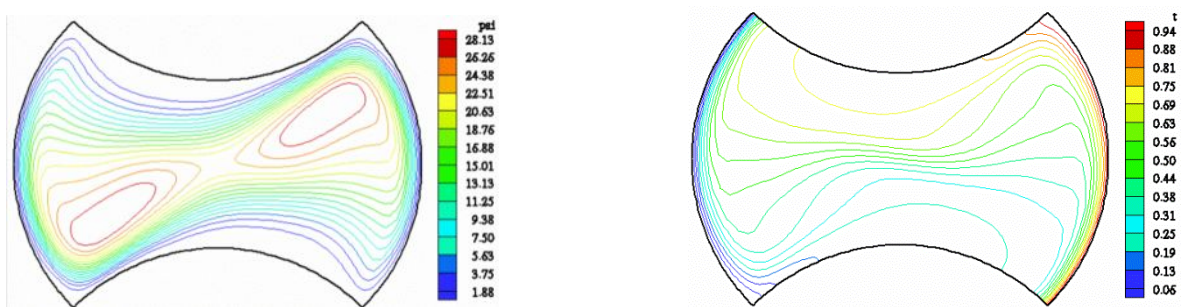


Figure 4.29 : Fonction de courant et isothermes pour $Ra = 10^6$

La zone centrale de la figure (4.29) :

La figure (4.29) nous montre une zone centrale dont les isothermes sont parallèles, horizontales et très serrées. Cette zone est créée par les deux tourbillons qui, en tournant dans le sens anti horaire, obligent le fluide chaud (se trouvant près de la paroi horizontale supérieure) de descendre et de s'orienter grâce à la convexité de la paroi horizontale supérieure vers le milieu de l'enceinte, et le fluide froid (se trouvant près de la paroi horizontale inférieure) de monter et de s'orienter grâce à la convexité de la paroi horizontale inférieure vers le milieu de l'enceinte, là où se rencontrent les deux couches d'air chaude et froide et qui vont se tasser au centre de l'enceinte en formant cette zone centrale.

4.5.2.1.2/ Variation du nombre de Nusselt local :

Pour la paroi chaude :

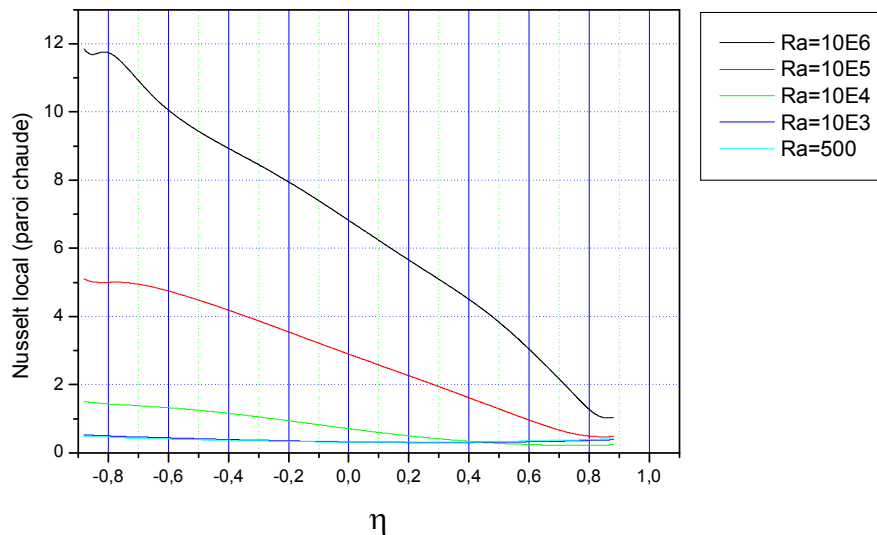


Figure 4.30 : Nombre de Nusselt local pour la paroi chaude pour différents nombres de Rayleigh

D'après les courbes de la figure (4.30) nous pouvons dire que :

- 1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude atteint son maximum en bas de celle-ci puis sa valeur diminue le long de cette dernière pour arriver à son minimum du côté haut.
- 2/ Pour la même coordonnée η le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.
- 3/ Pour $Ra < 10^4$ c'est le transfert de chaleur par conduction qui domine.

Pour la paroi froide:

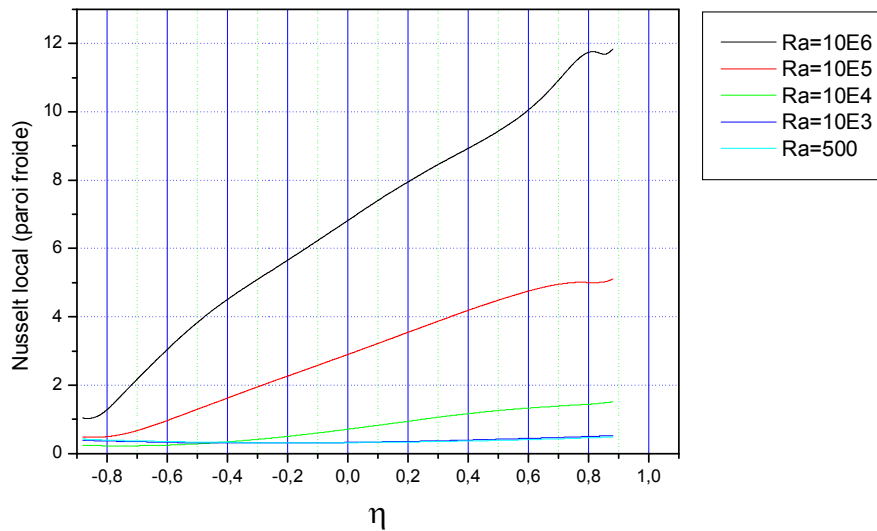


Figure 4.31 : Nombre de Nusselt local pour la paroi froide pour différents nombres de Rayleigh

D'après les courbes de la figure (4.31) nous pouvons dire que :

- 1/ Le nombre de Nusselt local sur la paroi froide atteint son maximum à l'endroit le plus haut de cette dernière, puis sa valeur diminue en descendant la paroi pour arriver à son minimum au bas de celle-ci.
- 2/ Pour la même coordonnée η le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.
- 3/ Pour $Ra < 10^4$ c'est le transfert de chaleur par conduction qui domine.

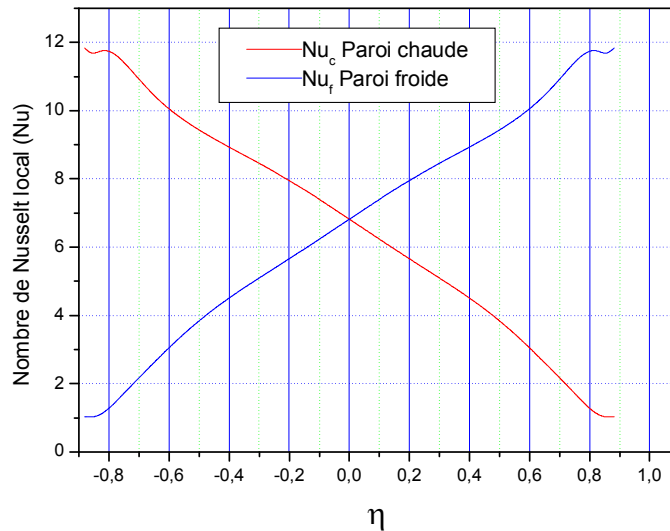


Figure 4.32 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et la paroi froide Pour $Ra= 10^6$.

La figure (4.32) présente une parfaite symétrie entre la courbe de variation du nombre de Nusselt local sur les parois chaude et froide, ce qui nous permet de dire que toute la chaleur perdue par la paroi chaude de l'enceinte est entièrement recueillie par la paroi froide, et que le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide se fait d'une manière parfaite et sans perte et cela est en bon accord avec la condition pariétale considérée (parois horizontales adiabatiques).

4.5.2.1.3/ Variation du nombre de Nusselt moyen:

Pour la paroi chaude :

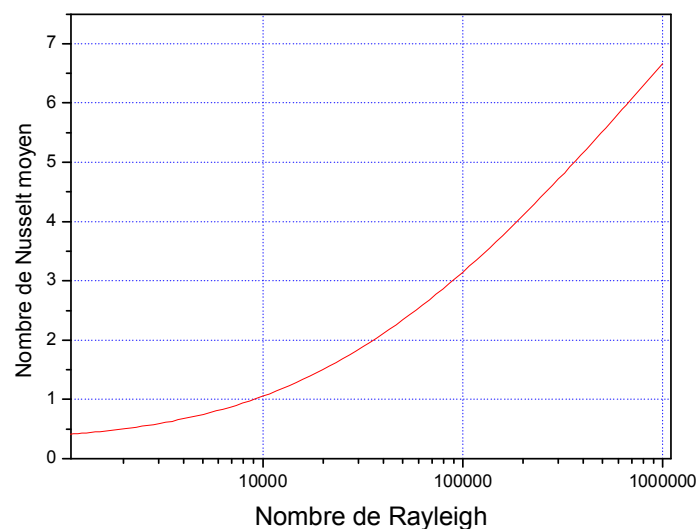


Figure 4.33 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh

La figure (4.33) représente la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh. Sur cette figure nous remarquons que :

- 1/ Le Nusselt moyen sur la paroi chaude croit avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.
- 2/ Pour les bas nombres de Rayleigh $Ra < 10^4$ le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction bien qu'il y est de la convection (le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude est inférieur à un pour cette gamme de Ra) par contre l'échange de chaleur se fait essentiellement par convection pour des valeurs élevées de Ra ($Ra \geq 10^4$).

4.6/ Tableau de comparaison :

Ra	$\overline{K_{eq}}$ (carrée)	$\overline{K_{eq}}$ enceinte A	$\overline{K_{eq}}$ enceinte B	Diff % enceinte A/Carrée	Diff % enceinte B/Carrée	Diff % enceinte B/A
50	1,005	1	1	- 0,50	- 0,50	0
500	1,311	1,006	1,006	- 23,26	- 23,26	0
10^3	1,645	1,021	1,019	- 37,93	- 38,05	- 0,20
10^4	3,402	1,559	2,120	- 54,17	- 37,68	35,98
$4 \cdot 10^4$	5,163	2,313	5,144	-55,20	- 0,37	122,40
10^5	6,749	2,884	7,912	- 57,27	17,23	174,34
10^6	12,702	5,072	18,406	- 60,07	44,91	262,89

Tableau 4.5 : Comparaison des conductivités thermiques équivalentes relatives aux trois enceintes considérées.

La conductivité thermique équivalente locale : K_{eq}

Est définie comme étant le rapport d'un gradient de température lors d'un échange convectif, sur un gradient de température lors d'un échange conductif.

Pour l'enceinte A :

$$K_{eq} = \frac{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{convection}}{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{conduction}}$$

Pour l'enceinte B :

$$K_{eq} = \frac{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{convection}}{\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{conduction}}$$

$\overline{K_{eq}}$: La valeur moyenne de La conductivité thermique équivalente locale K_{eq} .

Enceinte A : enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes.

Enceinte B : enceinte à parois horizontales convexes et parois verticales concaves.

4.7/ Comparaison des conductivités thermiques équivalentes pour différentes enceintes :

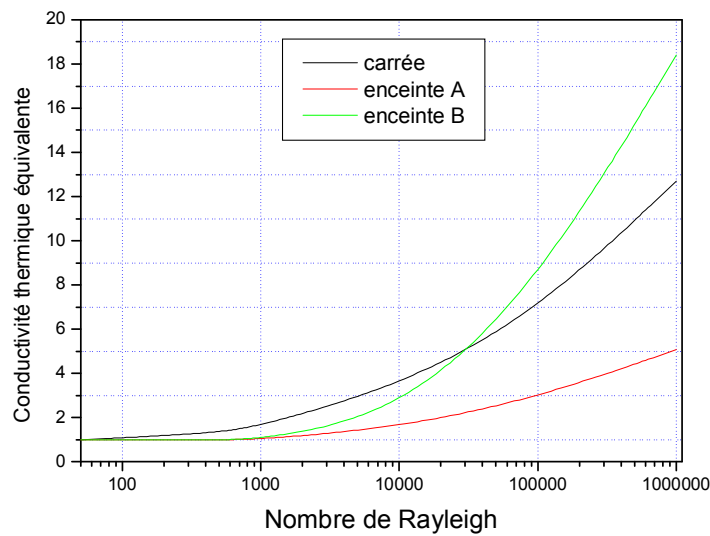


Figure 4.34 : Conductivité thermique équivalente en fonction du nombre de Rayleigh.

D'après la figure (4.34) nous remarquons que :

- 1/ Le transfert de chaleur par convection naturelle dans l'enceinte B est plus meilleur que dans l'enceinte A et cela pour toutes les valeurs de Ra allant de 10^3 jusqu'à 10^6 .
- 2/ Le transfert de chaleur par convection dans l'enceinte carrée est plus meilleur que dans les enceintes A et B pour des valeurs de Rayleigh allant de $Ra=50$ jusqu'à $Ra = 4.10^4$ comme le montre la figure (4.34) ci-dessus, mais au-delà de cette valeur de Ra Le transfert de chaleur par convection deviens plus meilleur dans l'enceinte B que dans les enceintes carrée et A.

4.8/ Etude des températures au sein des trois enceintes pour $Ra=10^3$:

4.8.1/ Enceinte carrée :

4.8.1.1/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

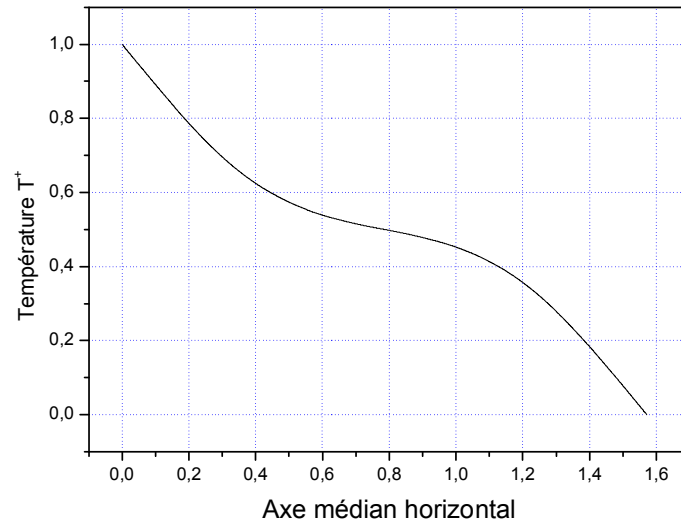


Figure 4.35 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte carrée pour $Ra=10^3$.

4.8.1.2/ Température du fluide sur l'axe médian vertical :

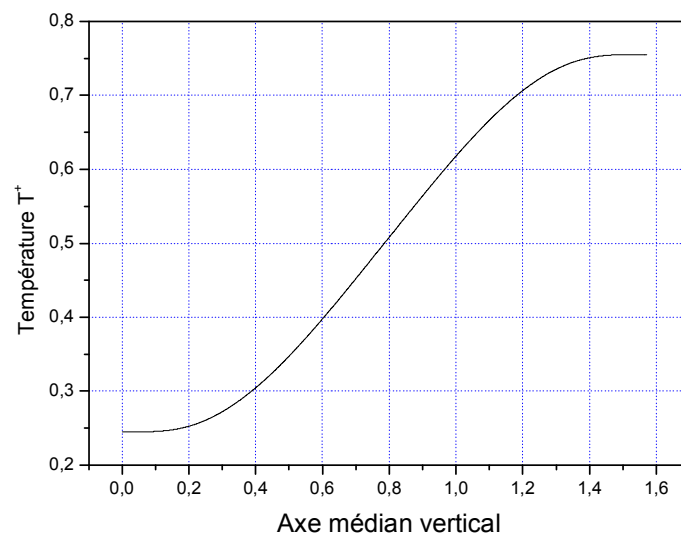


Figure 4.36 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte carrée pour $Ra=10^3$.

Les figures (4.35) et (4.36) nous montrent que la température diminue, le long de l'axe médian horizontal, continuellement et lentement de la paroi chaude à la paroi froide avec une légère rapidité près des deux parois. Suivant l'axe médian vertical, la température augmente continuellement et lentement à partir de la paroi de bas vers la paroi de haut.

4.8.2/ Enceinte A :

4.8.2.1/ Température du fluide sur l'axe médian vertical :

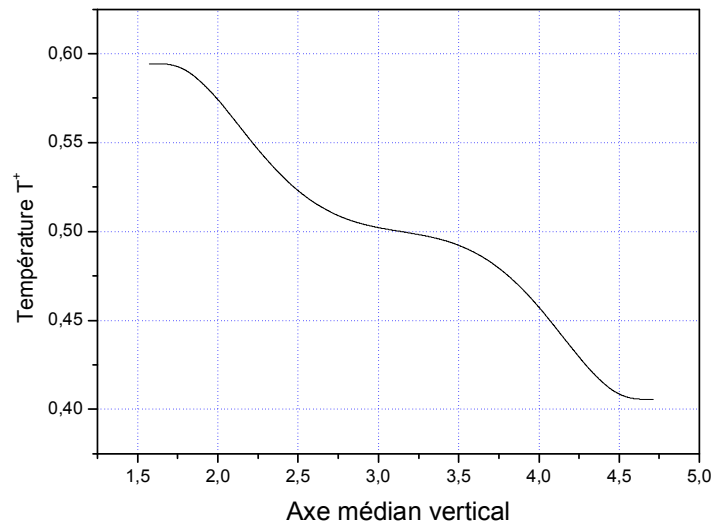


Figure 4.37 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte A pour $Ra=10^3$.

4.8.2.2/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

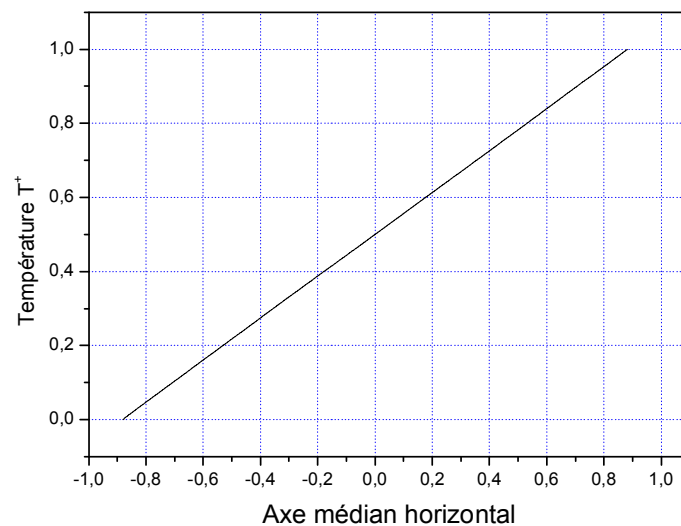


Figure 4.38 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte A pour $Ra=10^3$.

Les figures (4.37) et (4.38) nous montrent que la température diminue le long de l'axe médian horizontal linéairement de la paroi chaude vers la paroi froide, et le long de l'axe médian vertical la température diminue lentement de haut en bas de l'enceinte avec une petite zone au milieu de l'enceinte où la température reste presque constante (diminue très lentement).

4.8.3/ Enceinte B:

4.8.3.1/ Température du fluide sur l'axe médian vertical :

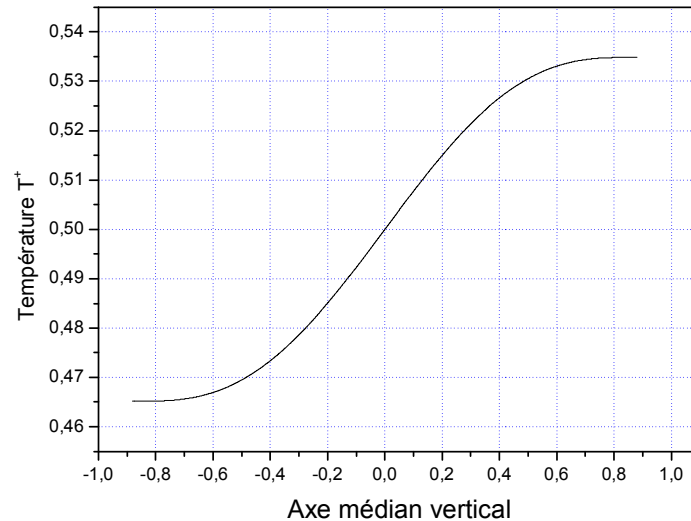


Figure 4.39: Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte B pour $Ra=10^3$.

4.8.3.2/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

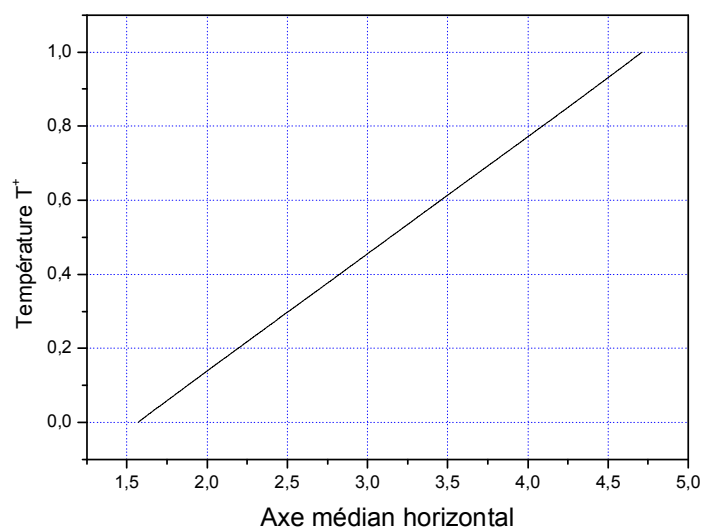


Figure 4.40 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte B pour $Ra=10^3$.

Les figures (4.39) et (4.40) nous montrent que la température diminue, le long de l'axe médian horizontal, linéairement de la paroi chaude vers la paroi froide, et le long de l'axe médian vertical la température diminue continuellement de haut en bas de l'enceinte et presque de la même manière que pour l'enceinte carrée.

4.9/ Etude des températures au sein des trois enceintes pour $Ra=10^6$:

4.9.1/ Enceinte carrée :

4.9.1.1/ Température du fluide sur l'axe médian vertical :

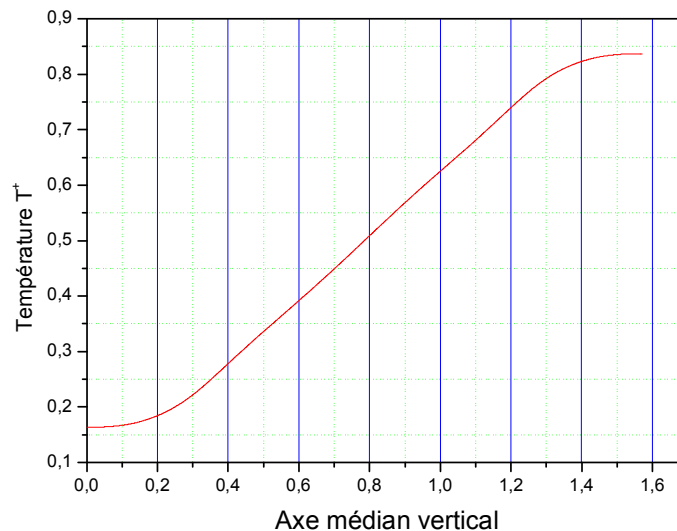


Figure 4.41 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte carrée pour $Ra=10^6$.

La figure (4.41) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte carrée. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi horizontale basse (vers l'intérieur) en suivant l'axe médian de l'enceinte, la température du fluide augmente lentement et d'une façon monotone, et cela est bien visible sur la figure (4.9) qui montre que les isothermes sont suffisamment espacés près de la paroi horizontale basse. Loin de la paroi toujours en suivant l'axe médian vertical, la température augmente linéairement et d'une façon peu rapide, et cela est bien visible sur la figure précédente où nous voyons au centre de l'enceinte que les isothermes sont parallèles et horizontales. En s'approchant de la paroi horizontale haute la température continue d'augmenter lentement, et cela est bien visible sur la figure (4.9) où nous voyons que les isothermes sont suffisamment espacées près de la paroi horizontale haute.

4.9.1.2/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

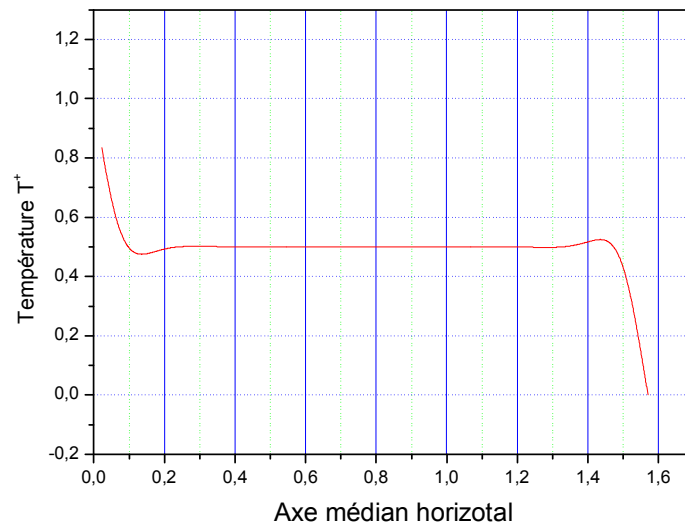


Figure 4.42 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte carrée pour $Ra=10^6$.

La figure (4.42) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte carrée. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi verticale chaude (vers l'intérieur de l'enceinte) en suivant l'axe médian horizontal de l'enceinte, la température du fluide diminue d'une façon rapide et presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.9) qui montre que les isothermes sont très serrés près de la paroi chaude. Loin de la paroi, toujours en suivant l'axe médian horizontal, la température du fluide reste presque constante sur une large zone, et cela est bien visible sur la figure précédente qui montre que les isothermes restent parallèles et horizontales. En s'approchant de la paroi froide, la température diminue de nouveau d'une façon rapide et presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.9) où nous voyons que les isothermes sont très serrés près de la paroi froide de l'enceinte.

4.9.2/ Enceinte A :

4.9.2.1/ Température du fluide sur l'axe médian vertical :

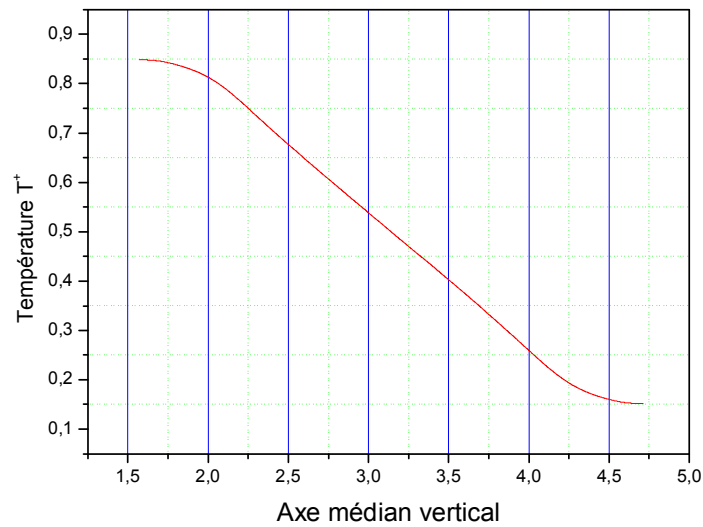


Figure 4.43 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte A pour $Ra=10^6$.

La figure (4.43) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte A. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi horizontale haute (vers l'intérieur) en suivant l'axe médian de l'enceinte, la température du fluide diminue lentement sur une zone étroite, et cela est bien visible sur la figure (4.19) qui montre que les isothermes sont suffisamment espacées près de la paroi horizontale haute. Loin de la paroi, toujours en suivant l'axe médian vertical (vers le centre de l'enceinte), la température diminue linéairement et d'une façon peu rapide, et cela est bien visible sur la figure précédente où nous voyons au centre de l'enceinte que les isothermes sont parallèles et horizontales. En s'approchant de la paroi horizontale basse, la température du fluide continue à diminuer lentement, et cela est bien visible sur la figure (4.19) où nous voyons que les isothermes sont suffisamment espacées près de la paroi horizontale basse.

4.9.2.2/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

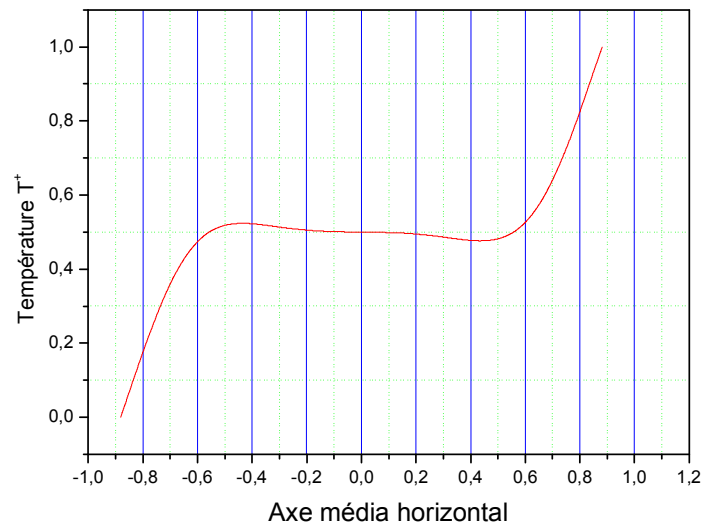


Figure 4.44 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte A pour $Ra=10^6$.

La figure (4.44) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte A. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi verticale froide (vers l'intérieur de l'enceinte) en suivant l'axe médian horizontal de l'enceinte, la température du fluide augmente d'une façon rapide et presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.19) qui montre que les isothermes sont très serrés près de la paroi froide. Loin de la paroi, toujours en suivant l'axe médian horizontal, la température du fluide reste presque constante et cela est bien visible sur la figure (4.19) qui montre que les isothermes restent parallèles et horizontales. En s'approchant de la paroi chaude, la température augmente de nouveau d'une façon rapide et presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.19) où nous voyons que les isothermes sont très serrés près de la paroi chaude de l'enceinte.

4.9.3/ Enceinte B :

4.9.3.1/ Température du fluide sur l'axe médian vertical:

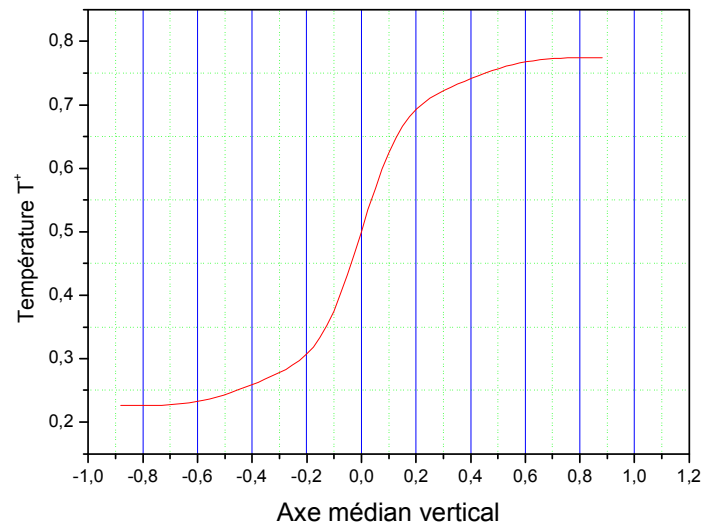


Figure 4.45: Variation de la température T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte B pour $Ra=10^6$.

La figure (4.45) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian vertical de l'enceinte B. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi horizontale basse vers l'intérieur en suivant l'axe médian de l'enceinte, la température du fluide augmente lentement et d'une façon monotone, et cela est bien visible sur la figure (4.29) qui montre que les isothermes sont suffisamment espacés près de la paroi horizontale basse. Loin de la paroi, toujours en suivant l'axe médian vertical (vers le centre de l'enceinte), la température augmente linéairement et d'une façon rapide, et cela est bien visible sur la figure précédente où nous voyons au centre de l'enceinte que les isothermes sont parallèles et très serrés. En s'approchant de la paroi horizontale haute, la température continue d'augmenter lentement et d'une manière monotone, et cela est bien visible sur la figure (4.29) où nous voyons que les isothermes sont suffisamment espacés près de la paroi horizontale haute.

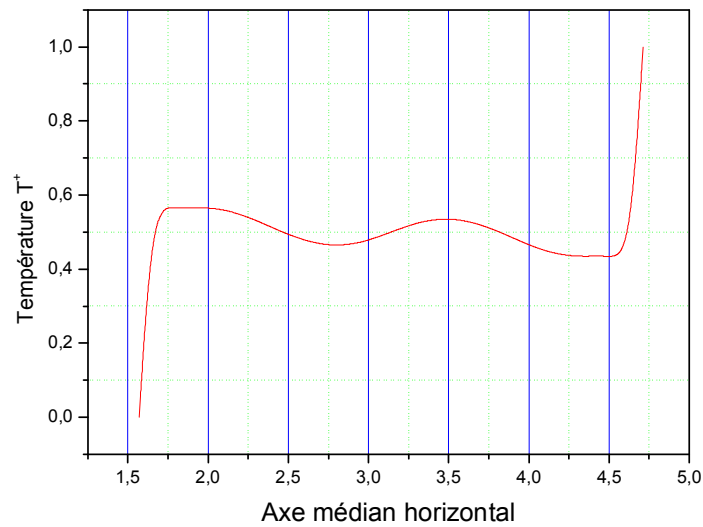
4.9.3.2/ Température du fluide sur l'axe médian horizontal :

Figure 4.46 : Variation de la température T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte B pour $Ra=10^6$.

La figure (4.46) représente la variation de la température adimensionnelle T^+ le long de l'axe médian horizontal de l'enceinte B. Sur cette figure, nous remarquons qu'en s'éloignant de la paroi verticale chaude (vers l'intérieur de l'enceinte) en suivant l'axe médian horizontal de l'enceinte, nous constatons une diminution rapide de la température du fluide d'une façon presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.29) qui montre que les isothermes sont très serrés près de la paroi chaude. Loin de la paroi, toujours en suivant l'axe médian horizontal, la température du fluide subit des fluctuations autour d'une valeur moyenne et cela est à cause des flux d'air chaud et froid qui se rencontrent, sous l'effet des deux tourbillons en permanence, dans cette zone centrale. En s'approchant de la paroi froide la température diminue de nouveau d'une façon rapide et presque linéaire, et cela est bien visible sur la figure (4.29) où nous voyons que les isothermes sont très serrés près de la paroi froide de l'enceinte.

Conclusion Générale

Nous avons fait une étude numérique comparative de la convection naturelle laminaire et permanente dans des enceintes à parois courbées, et des enceintes à parois planes (carrées), les parois horizontales de ces enceintes sont adiabatiques et les parois verticales sont maintenues isothermes (différentiellement chauffées).

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de mouvement au sein du fluide et de chaleur à travers les parois de l'enceinte. Ce modèle repose sur l'approximation de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Nous avons mis au point un code de calcul numérique, basé sur la méthode des volumes finis, qui permet de déterminer les champs de température et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens sur les parois de l'enceinte. Nous avons étudié l'influence de la courbure des parois, du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

Notre étude comparative de l'échange de chaleur par convection naturelle laminaire entre les trois enceintes précédemment citées nous a mené à tirer les conclusions suivantes :

1/ L'enceinte carrée favorise mieux l'échange de chaleur comparée à l'enceinte A pour toute la gamme de Rayleigh $50 \leq Ra \leq 10^6$, et cela est dû au fait que les parois verticales actives de l'enceinte A, qui sont plus proches que celles de l'enceinte carrée, favorisent le transfert conductif par rapport au transfert convectif.

2/ Pour la gamme de Rayleigh $4 \cdot 10^4 < Ra \leq 10^6$ l'échange de chaleur est meilleur dans l'enceinte B que dans l'enceinte carrée, ceci est dû au fait que les parois actives de l'enceinte B qui sont éloignées comparées à celles de l'enceinte carrée favorisent le transfert de chaleur convectif.

3/ L'échange de chaleur dans l'enceinte B est meilleur que celui dans l'enceinte A pour toute la gamme de Rayleigh allant de 10^3 jusqu'à 10^6 , et ceci est dû aux parois verticales actives qui sont plus éloignées dans le cas de l'enceinte B par rapport à l'enceinte A.

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'algorithme développé en étudiant l'effet d'autres types de courbures des parois, le degré de courbure des parois, d'autres types de fluides sur l'écoulement et le transfert de chaleur et d'appliquer d'autres conditions aux limites telle qu'une température ou une densité de flux de chaleur variant périodiquement.

Annexe 1

Coordonnées bicylindriques

A.1/ Propriétés de quelques fonctions :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\operatorname{ch}^2(\alpha) - \operatorname{sh}^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{ch}(2\alpha) = \operatorname{ch}^2(\alpha) + \operatorname{sh}^2(\alpha) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(\alpha) = 2\operatorname{ch}^2(\alpha) - 1$$

$$\operatorname{sh}(2\alpha) = 2 \operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha)$$

$$e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) \quad , \quad e^{-x} = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad , \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A.2/ Coordonnées bicylindriques :

A.2.1/ Introduction :

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la figure (A.1), nous observons dans le plan (xy) deux groupes de cercles:

- Les cylindres définis par $u=\text{constant}$, tracés autour des deux pôles $x = -L$ et $x = +L$, centrés sur l'axe (x).
- Les cylindres définis par $v = \text{constant}$, centrés sur l'axe (y). La translation de ces cercles parallèlement à l'axe (z) engendre une famille de cylindres. Les coordonnées (η, θ, z) sont dites "coordonnées bicylindriques".

Les surfaces $\eta = \text{constantes}$ sont des cylindres dont les axes sont dans le plan (xz); Les surfaces $\theta = \text{constantes}$ sont des cylindres avec des axes dans le plan (yz) et les surfaces $z = \text{constantes}$ sont des plans parallèles.

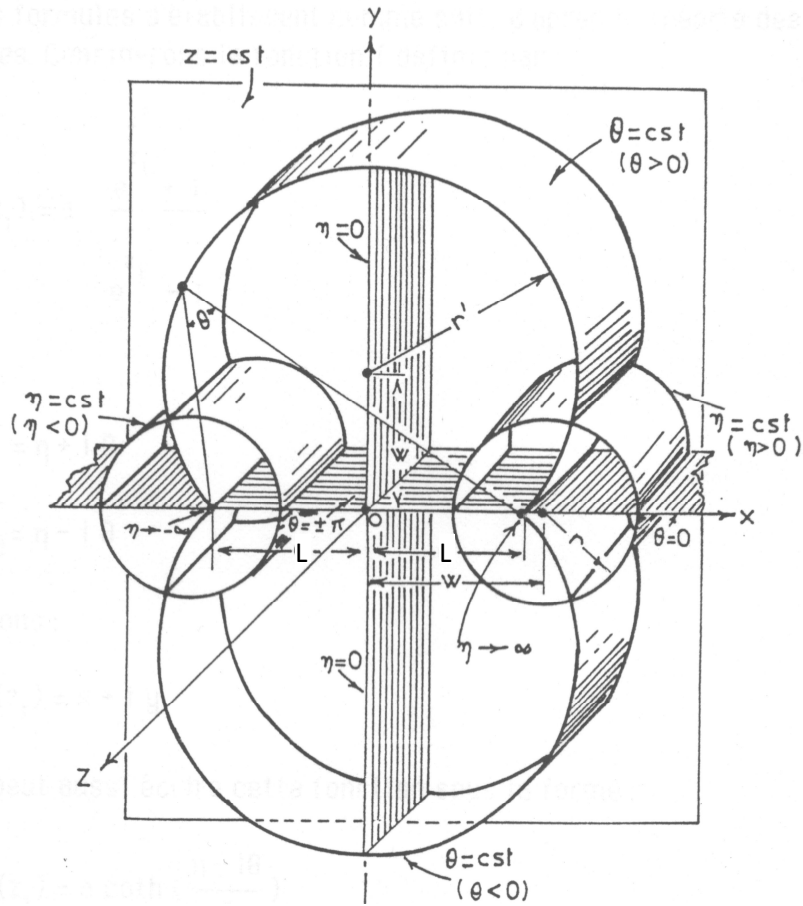


Figure A.1 : Représentation schématique des coordonnées bicylindriques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y &= \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$Z = z$$

Ces formules s'établissent comme suit:

Considérons la fonction g définie par:

$$g(z_1) = L \operatorname{coth}(z_1) \quad \text{avec : } z_1 = \frac{\eta - i\theta}{2}$$

Posons: $g(z_1) = x + iy$

Prenons: $f(\omega) = \operatorname{coth}(\omega) \quad \text{avec : } \omega = \eta - i\theta = 2z_1$

On peut écrire:
$$f(\omega) = \frac{ch(\omega)}{sh(\omega)} = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} - e^{-\omega}}$$

$$= \frac{e^{\eta} \cdot e^{-i\theta} + e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}{e^{\eta} \cdot e^{-i\theta} - e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}$$

D'où:

$$f(\omega) = \frac{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - i \sin(\theta)] + [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + i \sin(\theta)]}{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - i \sin(\theta)] - [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + i \sin(\theta)]}$$

Ce qui donne:

$$f(\omega) = \frac{ch(\eta) \cos(\theta) - i sh(\eta) \sin(\theta)}{sh(\eta) \cos(\theta) - i ch(\eta) \sin(\theta)}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur on trouve:

$$f(\omega) = \frac{ch(\eta)sh(\eta) \cos^2(\theta) + i ch^2(\eta) \cos(\theta) \sin(\theta) - i sh^2(\eta) \cos(\theta) \sin(\theta) + ch(\eta)sh(\eta) \sin^2(\theta)}{sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)}$$

$$f(\omega) = \frac{ch(\eta)sh(\eta) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + i \cos(\theta) \sin(\theta) [ch^2(\eta) - sh^2(\eta)]}{sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)}$$

Puisque :

$$sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) = sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \cos^2(\theta) - ch^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) &= -\cos^2(\theta)[ch^2(\eta) - sh^2(\eta)] + ch^2(\eta)[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] \\ &= ch^2(\eta) - \cos^2(\theta) \\ &= 1 + sh^2(\eta) + \sin^2(\theta) - 1 \\ &= sh^2(\eta) + \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Donc: $sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) = ch^2(\eta) - \cos^2(\theta) = sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)$

On aura :
$$f(\omega) = \frac{ch(\eta)sh(\eta) + i \cos(\theta) \sin(\theta)}{sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)}$$

Puisque : $sh(2\eta) = 2 ch(\eta) sh(\eta)$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Aussi : $2sh^2(\eta) + 2\sin^2(\theta) = (2sh^2(\eta) + 1) - (1 - 2\sin^2(\theta)) = ch(2\eta) - \cos(2\theta)$

On aura :
$$f(\omega) = \frac{sh(2\eta)}{ch(2\eta) - \cos(2\theta)} + i \frac{\sin(2\theta)}{ch(2\eta) - \cos(2\theta)}$$

Donc :
$$g(z_1) = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} + i \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \sin(\theta)} = x + i y$$

Par identification on trouve :

$$x = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \quad (\text{A.2})$$

$$y = \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \quad (\text{A.3})$$

A.3/ Démonstration géométrique :

A partir de la relation (A.2) on trouve :

$$\cos(\theta) = \operatorname{ch}(\eta) - \frac{L}{x} \operatorname{sh}(\eta)$$

la relation (A.3) donne : $L \sin(\theta) = y [\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]$

$$\frac{x}{y} L \sin(\theta) = x [\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)] = L \operatorname{sh}(\eta)$$

Donc:
$$\sin(\theta) = \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta) \quad (\text{A.4})$$

Puisque : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ on trouve :

$$\left[\operatorname{ch}(\eta) - \frac{L}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right]^2 + \left[\frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right]^2 = 1$$

Multipliant les deux membres par : $\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$, avec $\eta \neq 0$

On trouve :
$$[x \operatorname{coth}(\eta) - L]^2 + y^2 = \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

$$x^2 \operatorname{coth}^2(\eta) - 2L x \operatorname{coth}(\eta) + L^2 + y^2 = \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

$$x^2 \left[\operatorname{coth}^2(\eta) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\eta)} \right] - 2L x \operatorname{coth}(\eta) + y^2 = -L^2 \quad (\text{A.5})$$

De cette relation : $\operatorname{ch}^2(\eta) - \operatorname{sh}^2(\eta) = 1$

On tire :
$$\frac{\operatorname{ch}^2(\eta)}{\operatorname{sh}^2(\eta)} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

D'où :
$$\operatorname{coth}^2(\eta) - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\eta)} \quad \text{et} \quad \operatorname{coth}^2(\eta) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\eta)} = 1$$

Alors (A.5) donne :

$$x^2 - 2L x \coth(\eta) + L^2 \coth^2(\eta) - L^2 \coth^2(\eta) + y^2 = -L^2$$

$$[x - L \coth(\eta)]^2 + y^2 = L^2[\coth^2(\eta) - 1]$$

D'où : $[x - L \coth(\eta)]^2 + y^2 = \frac{L^2}{\text{sh}^2(\eta)}$, $\eta \neq 0$

C'est l'équation d'une famille de cercles dont les centres sont : $(L \coth(\eta), 0)$ et les rayons :

$$R = \frac{L}{|\text{sh}(\eta)|} \quad , \quad \text{avec} : \eta \neq 0$$

On remarque que :

1/ La valeur du rayon R tend vers l'infini quand η devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface η se réduit au plan yz .

2/ Lorsque η varie de : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ le centre du cercle se déplace sur l'axe (x, x') entre : $-L$ et $-\infty$ et entre : $+\infty$ et $+L$ respectivement.

D'autre part :

la relation (A.3) donne : $L \sin(\theta) = y [\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)]$

$$\text{ch}(\eta) = \frac{L}{y} \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

(A.4) donne : $\text{sh}(\eta) = \frac{x}{y} \sin(\theta)$

Puisque : $\text{ch}^2(\eta) - \text{sh}^2(\eta) = 1$ on trouve :

$$\left[\frac{L}{y} \sin(\theta) + \cos(\theta) \right]^2 - \left[\frac{x}{y} \sin(\theta) \right]^2 = 1$$

Multipliant les deux membres par : $\left[\frac{y}{\sin(\theta)} \right]^2$, avec : $\theta \neq 0 + k\pi$, k : nombre entier

$$[L + y \cotg(\theta)]^2 - x^2 = \frac{y^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$L^2 + y^2 \cotg^2(\theta) + 2L y \cotg(\theta) - x^2 = \frac{y^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$y^2 \left[\cotg^2(\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] + 2L y \cotg(\theta) - x^2 = -L^2$$

Puisque : $1 + \cotg^2(\theta) = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \Leftrightarrow \cotg^2(\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} = -1$

On trouve : $y^2 - 2L y \cotg(\theta) + x^2 = L^2$

$$x^2 + y^2 - 2L y \cotg(\theta) + L^2 \cotg^2(\theta) = L^2 + L^2 \cotg^2(\theta)$$

$$x^2 + [y - L \cotg(\theta)]^2 = L^2 [1 + \cotg^2(\theta)]$$

$$x^2 + [y - L \cotg(\theta)]^2 = \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}, \quad \theta \neq 0 + k\pi, \quad k : \text{nombre entier}$$

C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon : $R = \frac{L}{|\sin(\theta)|}$ qui passent par deux Points fixes (pôles) de coordonnées $(x = +L, y = 0)$, $(x = -L, y = 0)$.

$$\text{Pour } y = 0 : x^2 + L^2 \cotg^2(\theta) = \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$x^2 = L^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\theta)} - \cotg^2(\theta) \right]$$

$$x^2 = L^2 \Leftrightarrow x = \pm L$$

On remarque que :

1/ La valeur du rayon R tend vers l'infini quand θ devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface θ se réduit au plan xz .

2/ Lorsque θ varie de : $]0, \pi[$ le centre du cercle se déplace sur l'axe (y, y') entre : $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

A.4/ Coefficients métriques :

En coordonnées cartésiennes, un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $(ds)^2$ est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1(du_1)^2 + h_2(du_2)^2$$

u_1, u_2 : des coordonnées curvilignes.

h_1, h_2 : coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a $h_x = h_y = 1$, et en coordonnées bicylindriques :

$$h_\eta = h_\theta = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{L sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L \sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \\ z = z \end{array} \right. \quad \eta \neq 0, \quad \theta \neq 0 + 2k\pi, \quad k : \text{nombre entier}$$

Et les définitions suivantes :

$$h_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2$$

$$h_{\theta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$

$$h_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2$$

A.4.1/ calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{ sh(\eta)[ch(\eta) - \cos(\theta)] - sh^2(\eta) \}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [ch^2(\eta) - ch(\eta)\cos(\theta) - sh^2(\eta)]$$

Puisque : $ch^2(\eta) - sh^2(\eta) = 1$

On trouve :

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - ch(\eta)\cos(\theta)]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 - ch(\eta)\cos(\theta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [-\sin(\theta) sh(\eta)]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\sin(\theta) sh(\eta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [-\sin(\theta) sh(\eta)]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\sin(\theta) sh(\eta)]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{ \cos(\theta)[ch(\eta) - \cos(\theta)] - \sin^2(\theta) \}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{ \cos(\theta) ch(\eta) - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \}$$

Puisque : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

On trouve : $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [ch(\eta)\cos(\theta) - 1]$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [ch(\eta)\cos(\theta) - 1]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Résumé :

On remarque que : $\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2$, $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$

Ce qui nous mènent a : $h_{\eta}^2 = h_{\theta}^2$

A.4.2/ calcul des coefficients métriques :

$$h_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$h_{\eta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} \{ [1 - ch(\eta)\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta) sh(\eta)]^2 \}$$

$$h_{\eta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 + ch^2(\eta)\cos^2(\theta) - 2 ch(\eta)\cos(\theta) + sh^2(\eta) \sin^2(\theta)]$$

Comme : $ch^2(\eta) \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) = ch^2(\eta) - \sin^2(\theta)$

$$h_{\eta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 + \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) - 2 ch(\eta)\cos(\theta)]$$

$$h_{\eta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\cos^2(\theta) + ch^2(\eta) - 2 ch(\eta)\cos(\theta)]$$

$$h_{\eta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [ch(\eta) - \cos(\theta)]^2$$

$$h_{\eta}^2 = h_{\theta}^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2}$$

$$h_{\eta} = h_{\theta} = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \quad , \quad \theta \neq 0 + 2k\pi \quad , \quad k : \text{nombre entier} \quad , \quad \eta \neq 0 \quad (A.6)$$

$$h_z^2 = 0 + 0 + 1 = 1$$

A.4.3/ Les opérateurs différentiels :**A.4.3.1/ En coordonnées cartésiennes :****A.4.3.1.1/ Champ scalaire :**

Operateur Nabla: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Laplacien : $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

A.4.3.1.2/ Champ de vecteur :

Soit le vecteur \vec{F}

$$\text{Divergence : } \quad \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\text{Rotationnel : } \quad \text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{Propriété : } \quad \text{div } (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \Delta f$$

Le divergent d'un gradient est le laplacien.

A.4.3.1/ En coordonnées curvilignes :

Le principal avantage de l'utilisation des coordonnées curvilignes est de transformer un domaine physique de géométrie complexe en un domaine de calcul de géométrie simple, elles permettent de transformer des courbes en droites et facilitent, de ce fait, le calcul des aires.

, θ , z coordonnées curvilignes .

Soit : $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ vecteurs unitaires suivant η, θ, z .

$$h_1 = h_\eta, \quad h_2 = h_\theta, \quad h_3 = h_z$$

$$\text{Operateur Nabra : } \quad \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{e}_\eta + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{Gradient : } \quad \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{e}_\eta + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Laplacien : } \quad \Delta \phi = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Divergence : } \quad \text{div } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2 F_3) \right]$$

F_1, F_2, F_3 : composantes de \vec{F} suivant : η, θ, z .

Rotationnel :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial z} (h_2 F_2) \right] \vec{e}_\eta + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_3 F_3) \right] \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 F_1) \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

A.5/ Formulation des équations de continuité, de la chaleur et de la quantité de mouvement dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales :

A.5.1/ Equation de continuité :

$$\text{Posons : } \quad h_1 = h_\eta, \quad h_2 = h_\theta, \quad h_3 = h_z$$

$$\text{Puisque : } \quad h_\eta = h_\theta, \quad h_z = 1 \quad \text{on aura : } \quad h_1 = h_2 = h, \quad h_3 = 1$$

Et comme le problème est bidimensionnel alors :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{donne :} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0$$

V_η, V_θ : composantes du vecteur vitesse en coordonnées curvilignes orthogonales.

A.5.2/ Equation d'énergie :

$$\text{Puisque :} \quad \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = \Delta T$$

L'équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) T = \frac{\lambda}{\rho C_P} \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \quad (\text{A.9})$$

$$(A.7) \text{ donne :} \quad (\vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$(A.8) \text{ donne :} \quad \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

$$(A.9) \text{ donne :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho C_P} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\text{D'où :} \quad h \frac{\partial T}{\partial t} + V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho C_P} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

A.5.3/ Equation de quantité de mouvement :

L'équation (2.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \omega = g \beta \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \nu \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \omega) \quad (\text{A.10})$$

Réécrivons cette équation en coordonnées orthogonales curvilignes.

$$\text{On a :} \quad (\vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \omega = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

$$\nu \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \omega) = \frac{\nu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right]$$

Pour le terme : $g \beta \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right]$ déterminons tout d'abord :

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{en coordonnées orthogonales curvilignes.}$$

$$\text{Puisque :} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

Alors pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \end{array} \right.$$

$$dx = \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] d\eta - \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] d\theta \quad (\text{A.11})$$

$$dy = - \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] d\eta - \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] d\theta \quad (\text{A.12})$$

Déterminant les expressions de : $d\eta$ et $d\theta$ en fonction de : dx et dy

Le déterminant du système d'équation (A.11), (A.12) est:

$$\det = \frac{-L^2}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^4} \{ [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)]^2 + \sin^2(\theta) \operatorname{sh}^2(\eta) \}$$

$$\det = \frac{-L^2}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2}$$

$$\det = -h_\eta^2 = -h_\theta^2$$

Et par suite:

$$d\eta = \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L} dx - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{L} dy$$

$$d\theta = - \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L} dy - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{L} dx$$

Puisque : $d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy$$

On obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{L}$$

Comme les dérivées partielles de T par rapport à x et y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{L} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{L} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{L} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{L} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

En portant ces relations dans l'expression : $[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha)]$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) &= \left\{ \frac{1}{L} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] \cos(\alpha) + \frac{1}{L} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] \sin(\alpha) \right\} \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{L} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] \sin(\alpha) - \frac{1}{L} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] \cos(\alpha) \right\} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) &= \frac{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)}{L} \left\{ \left[\frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} \\ \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) &= \frac{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)}{L} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

Avec:

$$F(\eta, \theta) = \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)}$$

$$G(\eta, \theta) = \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)}$$

Finalement, l'équation de quantité de mouvement (A.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{g\beta}{h} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{v}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

Annexe 2

Approximation des dérivées partielles

Approximation des dérivées partielles aux frontières par le développement en série de Taylor :

1/ Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ sur les parois horizontales :

Paroi horizontale inférieure ($i = 1, j$) :

Le développement en série de Taylor de la fonction de courant au voisinage de la paroi ($i = 1, j$) donne:

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + O[\Delta \eta]^3$$

$$\psi^+(3, j) = \psi^+(1, j) + \frac{2\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + O[\Delta \eta]^3$$

Eliminons les dérivées secondes en soustrayant la deuxième relation de la première multipliée par quatre (4) on obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i=1, j} = \frac{-3 \psi^+(1, j) + 4 \psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta \eta} + O[\Delta \eta]^2$$

Paroi horizontale supérieure ($i = NI, j$) :

Procédons de la même manière que précédemment au voisinage de la paroi ($i = NI, j$) :

$$\psi^+(NI - 1, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} + O[\Delta \eta]^3$$

$$\psi^+(NI - 2, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{2\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} + O[\Delta \eta]^3$$

On obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i=NI, j} = \frac{3 \psi^+(NI, j) - 4 \psi^+(NI-1, j) + \psi^+(NI-2, j)}{2\Delta \eta} + O[\Delta \eta]^2$$

2/ Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$ sur les parois verticales :

Paroi verticale gauche ($i, j = 1$) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i, j=1} = \frac{-3 \psi^+(i, 1) + 4 \psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{2\Delta \theta} + O[\Delta \theta]^2$$

Paroi verticale droite (i , j = NN) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j=NN} = \frac{3 \psi^+(i, NN) - 4 \psi^+(i, NN-1) + \psi^+(i, NN-2)}{2\Delta\theta} + O[\Delta\eta]^2$$

3/ Approximation de $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2}$ sur les parois horizontales :

Paroi horizontale inférieure (i = 1 , j) :

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi (i= 1, j) dans la direction de η :

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta\eta]^4$$

$$\psi^+(3, j) = \psi^+(1, j) + \frac{2\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \frac{(2\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta\eta]^4$$

On multiplie la première relation par 8 et on retranche de celle obtenue la deuxième relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} \right|_{i=1, j} = \frac{-7 \psi^+(1, j) + 8 \psi^+(2, j) - \psi^+(3, j) - 6\Delta\eta \cdot g_1}{2(\Delta\eta)^2} + O[\Delta\eta]^2$$

$$\text{Avec : } g_1 = \left. \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} \right|_{i=1, j}$$

Paroi horizontale supérieure (i = NI , j) :

$$\psi^+(NI - 1, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} - \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta\eta]^4$$

$$\psi^+(NI - 2, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{2\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} - \frac{(2\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta\eta]^4$$

On obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} \right|_{i=NI, j} = \frac{-7 \psi^+(NI, j) + 8 \psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j) + 6\Delta\eta \cdot g_2}{2(\Delta\eta)^2} + O[\Delta\eta]^2$$

$$\text{Avec : } g_2 = \left. \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} \right|_{i=NI, j}$$

4/ Approximation de $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2}$ sur les parois verticales :

Paroi verticale gauche (i , j = 1) :

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi (i , j = 1) dans la direction de θ , et en suivant les mêmes démarches que pour la paroi horizontale, on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i, j=1)}{\partial \theta^2} \right|_{i, j=1} = \frac{-7 \psi^+(i, 1) + 8 \psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3) - 6 \Delta \theta . g_3}{2(\Delta \theta)^2} + O[\Delta \theta]^2$$

$$\text{Avec : } g_3 = \left. \frac{\partial \psi^+(i, 1)}{\partial \theta} \right|_{i, j=1}$$

Paroi verticale droite (i , j = NN) :

On procédant de la même manière que sur la paroi (i , j=1) on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i, j=NN)}{\partial \theta^2} \right|_{i, j=NN} = \frac{-7 \psi^+(i, NN) + 8 \psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2) + 6 \Delta \theta . g_4}{2(\Delta \theta)^2} + O[\Delta \theta]^2$$

$$\text{Avec : } g_4 = \left. \frac{\partial \psi^+(i, NN)}{\partial \theta} \right|_{i, j=NN}$$

5/ Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2}$ autour du point i :

Développons en série de Taylor la fonction de courant autour du point i dans la direction de η :

$$\psi^+(i-1, j) = \psi^+(i, j) - \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(i, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(i, j)}{\partial \eta^2} - \frac{(\Delta \eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(i, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta \eta]^4$$

$$\psi^+(i+1, j) = \psi^+(i, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(i, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(i, j)}{\partial \eta^2} + \frac{(\Delta \eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(i, j)}{\partial \eta^3} + O[\Delta \eta]^4$$

En prenant les deux premiers termes de la première relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i, j} = \frac{\psi^+(i, j) - \psi^+(i-1, j)}{\Delta \eta}$$

C'est la dérivée d'ordre 1 de la fonction ψ^+ , au point (i , j), approchée par la méthode des différences finies régressives d'ordre 1 .

En prenant les deux premiers termes de la deuxième relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i,j)}{\Delta \eta}$$

C'est la dérivée d'ordre 1 de la fonction ψ^+ , au point (i, j) , approchée par la méthode des différences finies progressives d'ordre 1.

En soustrayant la première relation de la deuxième on obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta \eta}$$

Approximation par la méthode des différences finies centrales d'ordre 2

En additionnant les deux relations précédentes on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i,j)}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i-1,j) - 2\psi^+(i,j) + \psi^+(i+1,j)}{(\Delta \eta)^2}$$

Approximation par la méthode des différences finies centrées d'ordre 2

6/ Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2}$ autour du point j :

Procédons de la manière que précédemment autour du point j on trouve :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta \theta}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i,j)}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i,j-1) - 2\psi^+(i,j) + \psi^+(i,j+1)}{(\Delta \theta)^2}$$

Références bibliographiques

- [1] Javad Rostami, Unsteady Natural Convection in an Enclosure With Vertical Wavy Walls, *Heat Mass Transfer* (2008) 44: 1079-1087.
- [2] L. Adjlout , O. Imine , A. Aziz and M. Belkadi, Laminar natural convection in an inclined cavity with a wavy wall, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 (2002) 2141-2152.
- [3] M. Belkadi, M. Aounallah, A. Azzi, O. Imine and L. Adjlout, Effect of the Hot Wall Geometry on Laminar Natural Convection in an Inclined Cavity, *Journal of Applied Sciences* 5(8):1496 -1503, (2005).
- [4] A. Sabeur, Bendehina, L. Adjlout and O. Imine, Effect of Sinusoidal Distribution of the Temperature on Laminar Natural Convection in Wavy Rectangular Enclosures, *Journal of Applied Sciences* 6(3): 710 - 715, (2006).
- [5] Khudheyer S. Mushatet, Simulation of Natural Convection in an Inclined Square Cavity with Two Wavy Walls, *Journal of Applied Sciences Research* 6(12): 2111 – 2122, (2010).
- [6] A. Slimani, M. Rebhi, A. Belkacem and K. Bouhadef, Natural Convection in a Horizontal Wavy Enclosure, *Journal of Applied Sciences* 7(3): 334 – 341, (2007).
- [7] E.H. Ridouane and A. Campo, Free Convection Performance of Circular Cavities Having two Curved Vertical Sides and two Inactive Curved Horizontal Sides, *Applied Thermal Engineering* 26(2006) 2409 – 2416.
- [8] N. Ferdous, Md. Tofiqul Islam, and Md. A. Hasan Mamun, Natural Convection and Radiation in Circular and Arc Cavity, *Proceedings of the International Conference on Mechanical Engineering*, (2009).
- [9] M.R.H. Nobari and M.T. Mehrabani, A Numerical Study of Fluid Flow and Heat Transfer in Eccentric Curved Annuli, *International Journal of Thermal Sciences* 49 (2010) 380 – 396.
- [10] Y. Liu, J. Cui, Y.X. Jiang and W.Z. Li, A Numerical Study on Heat Transfer Performance of Microchannels with Different Surface Microstructures, *applied thermal Engineering* 31(2011) 921 – 931.
- [11] M. Zakir Hossain and A.K. M. Sadrul Islam, Numerical Investigation of Unsteady Flow and Heat Transfer in Wavy Channels, 15th Australasian Fluid Mechanics Conference the University of Sydney, Sydney, Australia 13 – 17 December (2004).

- [12] C. R. Hedlund and P. M. Ligrani, Heat Transfer in Curved and Straight Channels With Transitional Flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, No. 3, pp. 563 – 573, (1998).
- [13] Jorge Facao and Armando C. Oliveira, Modeling Laminar Heat Transfer in a Curved Rectangular Duct With a Computational Fluid Dynamics Code, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 48: 165 – 177, (2005).
- [14] Lian-Ping Wang and Michael H. Du, Direct Simulation of Viscous flow in a Wavy Pipe Using the Lattice Boltzmann Approach, *Int. J. Engineering Systems Modeling and Simulation*, Vol. 1, No.1, (2008).
- [15] R.N. Mondal, M.A. Huda, S.F. Ahmmed and D. Tarafder, Effects of secondary Flow on Convective Heat Transfer Through a Curved Rectangular Duct, *Journal of Applied Sciences Research* 3(12): 1842 – 1850, (2007).
- [16] Aswatha, C. J. Gangadhara Gowda, S. N. Sridhara and K. N. Seetharamu, Effect of Different Thermal Boundary Conditions at Bottom Wall on Natural Convection in Cavities, *Journal of Engineering Science and Technology* Vol. 6, No. 1(2011) 109 – 130.
- [17] Prodip Kumar Das and Shohel Mahmud, Numerical Investigation of Natural Convection inside a Wavy Enclosure, *International Journal of Thermal Sciences* 42(2003) 397 – 406.
- [18] P. Moon. and E. spencer, *Field theory Hand book*, springer, P. 349, Berlin (1971).
- [19] P. Moon. and E. spencer, *Field theory Engineers*, D. VAN. Nostrand Company, LTD, Toronto, P. 356, Canada (1961).
- [20] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, Mc Graw-Hill book Company, New York, (1980).
- [21] E. F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat Transfer*, Mc Graw-Hill book Company, New York, (1978).
- [22] Davis, D. V, *Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution*. *Int. J. Numer. Method fluid*, 3: 249 – 264. (1983)
- [23] J. C. Kalita, D. C. Dalal, and A. K. Dass, Fully Compact Higher-Order Computation of Steady-State Natural Convection in a Square Cavity, *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 066703-1-066703-13, (2001).
- [24] G. Diaz and R. Winston, Effect of Radiation on Natural Convection in Parabolic Enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 53: 891- 906, (2008).

Titre : Etude de la convection naturelle dans des enceintes courbées ayant deux parois actives courbées verticales et deux parois inactives courbées horizontales.

Résumé :

Nous avons étudié dans ce travail le phénomène de la convection naturelle en régime laminaire et permanent dans une enceinte courbée ayant deux parois actives courbées verticales et deux parois inactives courbées horizontales, orientée selon un angle α , et nous l'avons comparé avec l'enceinte carrée. Les parois horizontales de l'enceinte sont considérées adiabatiques et les parois verticales sont maintenues isothermes, T_1 pour la paroi de droite et T_2 pour la paroi de gauche, avec $T_1 > T_2$. Le fluide étudié est l'air, et l'écoulement est supposé incompressible. Le nombre de Rayleigh varie de 50 à 10^6 , et le nombre de Prandtl est fixé à 0,702.

Le modèle mathématique gouvernant notre problème a été développé en se basant sur l'approximation de Boussinesq. Les équations de continuité, de la chaleur et de la quantité de mouvement sont exprimées dans un système de coordonnées bicylindriques pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire.

Un code de calcul, qui utilise la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations, a été mis au point pour la simulation numérique de ce problème.

Les résultats numériques obtenus, ont été représentés sous forme de lignes de courants, lignes isothermes et courbes des nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois de l'enceinte. Ces résultats montrent que la courbure des parois affecte le transfert de chaleur.

Mots-clés : convection naturelle, enceintes à parois courbées, équations de Boussinesq, vorticité-fonction de courant.

Title: Study of natural convection in curved enclosure with two curved active vertical walls and two curved inactive horizontal walls.

Abstract:

We studied in this work the phenomenon of the natural, laminar and permanent convection in a curved enclosure with two curved vertical active walls and two horizontal inactive curved walls, this latter is oriented at an angle α , and we compared it with square enclosure. The horizontal walls of the enclosure are considered adiabatic and the vertical walls are maintained isothermal, T_1 for the right wall and T_2 for the left wall, with $T_1 > T_2$. The studied fluid is air, and the flow is assumed incompressible. The number of Rayleigh ranges from 50 to 10^6 , and the number of Prandtl is fixed at 0,702.

The mathematical model governing our problem has been developed based on the Boussinesq approximation. The equations of continuity, heat and momentum are expressed in a coordinate system bicylindrical to facilitate the writing of the boundary conditions and to transform the curvilinear field into a rectangular one.

A computer code, which uses the finite volume method for discretization of equation, was developed for numerical simulation of this problem.

The numerical results obtained were represented as a current lines, isothermal lines and curves of local and average Nusselt numbers on the walls of the enclosure. These results show that the curvature of the walls affects the heat transfer.

Keywords: natural convection, enclosures with curved walls, Boussinesq equations, vorticity-stream function formulation.

العنوان:

دراسة الحمل الطبيعي الموجود في تجويف منحني له حاجزين فعالين (نشطين) منحنيين شاقوليين وحاجزين غيرفعالين (غير نشطين) منحنيين أفقيين.

ملخص:

قمنا في إطار هذا العمل بدراسة عددية لظاهرة إنتقال الحرارة عن طريق الحمل الحراري الطبيعي الرقائقي والدائم في تجويف منحني له حاجزين فعالين (نشطين) منحنيين شاقوليين وحاجزين غير فعالين (غير نشطين) منحنيين أفقيين، و موجه وفق زاوية α ، و قارناه مع تجويف مربع. الجدارين الأفقيين للتجويف أعتبرنا كظيمين والجدارين الشاقوليين أفترضا ثابتي درجة الحرارة T_1 بالنسبة للجدار الأيمن و T_2 بالنسبة للجدار الأيسر مع $T_1 > T_2$. المائع المدروس هو الهواء، و الجريان أعتبر غير منضغط. عدد Rayleigh يتغير بين 50 و 10^6 ، أما عدد Prandtl فثبت على القيمة 0,702. النموذج الرياضي الذي يحكم موضوعنا كتب بالإعتماد على تقريب Boussinesq. معادلات الإستمرارية، الحرارة و كمية الحركة صيغت في جملة إحداثيات لتسهيل كتابة الشروط الحدية وتحويل المجال المنحني إلى مجال مستطيل.

برنامج معلوماتي، يستعمل طريقة الحجم المنتهية وضع للدراسة العددية لهذا الموضوع . النتائج العددية المتحصل عليها، مثلت على شكل خطوط تيار، خطوط متساوية الحرارة و منحنيات Nusselt موضعية و متوسطة على جدران التجويف. هذه النتائج تبين أن إنحناء الجدران يؤثر على إنتقال الحرارة.

المفاتيح:

الحمل الطبيعي، تجويف بجدران منحنية، تجويف مغلق، معادلات Boussinesq، صيغة التدويم-دوال التيارات.