

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

OPTION : PHYSIQUE QUANTIQUE

THEME

A Propos de Quelques Métriques dans le Cadre de la Relativité Générale

Par

MERIEM ABDELAZIZ

SOUTENU LE : 11/02/2014

Devant le jury :

Président : L. GUECHI Prof. Université Constantine 1

Rapporteur : S. R. ZOZOU Prof. Université Constantine 1

Examineurs : F. BENAMIRA Prof. Université Constantine 1

Kh. BOUDJEMAA M.C.A. Université de Khenchela

Remerciement

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à terminer ce travail, je remercie tous ceux qui m'ont aidé.

Je tiens à remercier chaleureusement mon enseignant et mon encadreur Pr Zouzou Sami Riyad qui m'a encadré durant la préparation de ce mémoire avec volonté. Ses conseils précieux m'ont été très utiles le serons toujours.

Je tiens à remercier sincèrement aussi les membres de jury, monsieur le président Pr L. Guechi et l'examineur Pr F. Benamira qui étaient mes enseignants pendant la quatrième année et en poste graduation et aussi je remercie Dr Kh. Boujmaa pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire de Majister

Je remercie également mon enseignant à l'université de Constantine Dr K.Ait Moussa et aussi ceux de l'université de Batna monsieur J. Debeche, monsieur Z.Bousnan et monsieur H.Righi qui m'ont enseigné pendant les trois années de graduation.

Mes derniers remerciements iront à mes parents, ma famille, mes proches, à l'école Lahwel pour leur aide et leurs encouragements, aussi et à mes élèves Choukri ,Monsef ,Abderhman et Ikram . Une forte pensée à la mémoire de ma tante Amel.

Table des matières

Introduction	3
1 Précis de Relativité Générale	4
1.1 Le principe d'équivalence	4
1.2 Analyse tensorielle	5
1.2.1 Principe de covariance générale	5
1.2.2 Scalaires, vecteurs et tenseurs	5
1.2.3 Opérations sur les tenseurs	7
Combinaison linéaire	7
Produit direct	7
Contraction	8
Densité tensorielle	8
1.3 Connexion affine, dérivée covariante, tenseur de courbure, tenseur de Ricci, scalaire de courbure	9
1.3.1 Tenseur de courbure ou tenseur de Riemann-Christoffel	10
1.3.2 Tenseur de Ricci	10
1.3.3 Scalaire de courbure	10
1.4 Equations d'Einstein	11
2 Méthode de Killing	13
2.1 Rotations	14
2.2 Translations	15
2.2.1 Translations temporelles	15
2.2.2 Translations spatiales	16
2.3 Quasi-translations	18
2.4 Métrique à symétrie sphérique	19
2.5 Détermination de la forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique	20

2.6	Détermination de la forme la plus générale d'une métrique satisfaisant au principe de symétrie maximale	23
2.6.1	Métrique à symétrie maximale : cas plat	23
2.6.2	Métrique à symétrie maximale : cas sphérique	24
2.6.3	Métrique à symétrie maximale : cas pseudo-sphérique	26
2.7	Détermination de la forme la plus générale d'une métrique statique à symétrie sphérique	27
3	Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker	31
3.1	La Métrique de Friedmann	32
3.1.1	Equations de Friedmann	32
4	Métrique de Schwarzschild- de Sitter ou métrique de Kottler	36
4.1	Métrique de Kottler à l'extérieur de la distribution de matière	38
4.2	Equations de la géodésique à l'extérieur de la distribution de matière	40
4.3	Métrique de Kottler à l'intérieur de la distribution de matière dans le modèle fluide parfait	42
4.4	Equations de la géodésique à l'intérieur de la distribution de matière dans le modèle fluide parfait	50
4.5	Métrique de Kottler à l'intérieur de la distribution de matière : cas général	54
	Conclusion	57
	Annexe A	58
	Annexe B	62
	Bibliographie	67

Introduction

Ce travail est consacré à la dérivation ou la redérivation de certaines métriques satisfaisant à des symétries données. Plus explicitement, nous considérerons les métriques de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, à la base du modèle standard de Cosmologie, dans ses trois variantes plate, sphérique et pseudo-sphérique, de Schwarzschild, métrique statique à symétrie sphérique en l'absence de constante cosmologique, de Kottler, également appelée métrique de Schwarzschild-de Sitter, métrique statique à symétrie sphérique en présence de constante cosmologique. Dans les cas des métriques de Schwarzschild et de Kottler, nous considérerons séparément les solutions extérieures et intérieures.

Nous procéderons en deux étapes.

Dans une première étape, nous imposerons les symétries du problème, ce qui restreint la forme de la métrique. Pour ce faire, nous ferons usage de la méthode des vecteurs de Killing, qui constitue une manière rigoureuse et élégante pour implémenter les symétries. Dans une deuxième étape, nous compléterons la détermination de la métrique en adoptant des modèles pour le tenseur d'énergie-impulsion.

Le manuscrit de ce mémoire de Magister, qui comprend une introduction, quatre chapitres, une conclusion, deux annexes et une bibliographie est organisé comme suit : Après une courte introduction, le premier chapitre est consacré à un précis de Relativité Générale qui a comme objectif de faciliter la lecture du manuscrit sans recours à une documentation supplémentaire. Le deuxième chapitre est consacré à la mise en oeuvre de la méthode de Killing pour implémenter les symétries dans chacun des cas considérés : cas homogène et isotrope, cas statique à symétrie sphérique. Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés respectivement à compléter la détermination des métriques de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker et de Kottler (la métrique de Schwarzschild étant considérée comme un cas particulier de la métrique de Kottler), en adoptant des modèles pour le tenseur d'énergie-impulsion. Le manuscrit s'achève par une conclusion et deux annexes consacrés à certains détails techniques, en plus d'une bibliographie.

Chapitre 1

Précis de Relativité Générale

Le lecteur Intéressé par plus de détails en Relativité Générale et en Cosmologie pourra consulter, en cas de besoin, avec profit les références [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

1.1 Le principe d'équivalence

Le principe d'équivalence qui est à la base de la relativité générale postule l'égalité des masses inertielle, qui intervient dans l'écriture de l'équation du mouvement, et gravitationnelle, qui intervient dans l'expression de la force gravitationnelle de Newton. Einstein a ensuite présenté cette égalité comme une équivalence du champ de gravitation avec une accélération. C'est le principe d'équivalence faible qui stipule qu'il est toujours possible de définir en chaque point d'espace-temps dans un champ gravitationnel arbitraire un système de coordonnées localement inertiel tel que dans une région suffisamment petite autour du point en question les lois de la mécanique puissent être formulées comme en l'absence du champ de gravitation.

Ce principe a été ensuite étendu au principe d'équivalence fort ou généralisé qui stipule qu'on peut choisir en tout point d'espace-temps dans un champ de gravitation arbitraire un système de coordonnées localement inertiel tel que toutes les lois de la physique, et pas seulement les lois de la mécanique, dans une région suffisamment petite autour du point en question, prennent la même forme qu'en relativité restreinte.

Considérons une particule libre se déplaçant uniquement sous l'effet de forces purement gravitationnelles. D'après le principe d'équivalence, il existe un système de coordonnées en chute libre ζ^α tel que le mouvement de la particule soit une ligne droite dans l'espace-temps et l'équation du mouvement pour une particule massive s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{d\tau^2} = 0, \tag{1.1}$$

où τ est le temps propre,

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta, \quad (1.2)$$

et pour une particule sans masse, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{d\sigma^2} = 0, \quad (1.3)$$

où σ est un paramètre affine, qui ne peut être le temps propre.

Dans un système de coordonnées arbitraires x^μ , appelé souvent système du laboratoire, l'équation de la géodésique pour une particule massive est la suivante :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (1.4)$$

où τ est le temps propre, et pour une particule sans masse, l'équation de la géodésique sera :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0, \quad (1.5)$$

où σ est un paramètre affine, qui ne peut être le temps propre.

1.2 Analyse tensorielle

1.2.1 Principe de covariance générale

Le principe de covariance générale est une version alternative au principe d'équivalence, complètement équivalent à ce dernier, mais plus facile à mettre en oeuvre.

Il stipule qu'une équation physique est valable dans un champ de gravitation général si deux conditions sont réunies :

1. L'équation est valable en l'absence de gravitation. Autrement dit, elle doit concorder avec les lois de la relativité restreinte lorsque le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ se réduit au tenseur de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ et lorsque la connexion affine $\Gamma^\mu_{\rho\lambda}$ s'annule.
2. L'équation est covariante générale : la forme de l'équation doit être préservée sous un changement de coordonnées général. Autrement dit, l'équation doit avoir la même forme dans tous les systèmes de coordonnées.

1.2.2 Scalaires, vecteurs et tenseurs

On appelle scalaire un objet invariant sous les transformations de coordonnées générales. Donc si ϕ est un scalaire, alors sous un changement de coordonnées généralisé,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad (1.6)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi. \quad (1.7)$$

Un vecteur contravariant V^μ est un objet qui est défini comme se transformant sous un changement de coordonnées généralisé, (1.6), comme

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (1.8)$$

La différentielle dx^μ constitue un prototype de vecteur contravariant. En effet

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu.$$

Un vecteur covariant U_μ est défini comme se transformant sous un changement de coordonnées généralisé, (1.6), comme

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu. \quad (1.9)$$

Un prototype de vecteur covariant est $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$, où ϕ est un champ scalaire. En effet

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu},$$

où on a utilisé les règles de dérivation d'une fonction composée.

Les notions de scalaire, de vecteur covariant et de vecteur contravariant sont généralisées en la notion de tenseur. On appelle (p, q) tenseur un être mathématique avec p indices contravariants μ, \dots, λ et q indices covariants ν, \dots, ζ $T^{\mu \dots \lambda}_{\nu \dots \zeta}$ se transformant sous un changement de coordonnées généralisé, (1.6), comme :

$$T'^{\mu \dots \lambda}_{\nu \dots \zeta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\theta} \dots \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\zeta} T^{\theta \dots \rho}_{\xi \dots \gamma}. \quad (1.10)$$

Il s'ensuit qu'un scalaire, un vecteur contravariant, un vecteur covariant peuvent être perçus comme des tenseurs particuliers. Un scalaire ϕ est un $(0, 0)$ tenseur, un vecteur contravariant est un $(1, 0)$ tenseur et un vecteur covariant est un $(0, 1)$ tenseur. Si tous les indices d'un tenseur sont contravariants, le tenseur est dit contravariant, et si tous ses indices sont covariants, le tenseur est dit covariant. Autrement, le tenseur est dit mixte.

Un exemple très important de $(0, 2)$ tenseur est le tenseur métrique défini à l'occasion du passage d'un système de coordonnées localement inertiel ζ^α à un système de coordonnées du laboratoire x^μ par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (1.11)$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ est le "tenseur" de Minkowski

Considérons maintenant le passage d'un système de coordonnées localement inertiel à un autre système de coordonnées du laboratoire x'^μ . Le tenseur métrique $g'_{\mu\nu}$ dans le système de coordonnées x'^μ est défini par

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (1.12)$$

En utilisant les règles de différentiation d'une fonction composée, il s'ensuit que

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}$$

et par conséquent

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}, \quad (1.13)$$

ce qui montre, comme son nom l'indique, que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est bien un $(0, 2)$ tenseur.

Il est facile de montrer que l'inverse du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ défini par

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho, \quad (1.14)$$

où δ^μ_ρ est le symbole de Kronecker ($\delta^\mu_\rho = 1$ pour $\mu = \rho$ et $\delta^\mu_\rho = 0$ autrement), est un $(0, 2)$ tenseur. Il est également facile de montrer que le symbole de Kronecker est un $(1, 1)$ tenseur.

Il est important de noter qu'un objet avec des indices contravariants et covariants n'est pas forcément un tenseur. C'est la loi de transformation qui permet de trancher si l'objet est ou non un tenseur. Un exemple est la connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, qui porte un indice contravariant et deux indices covariants, mais qui n'est pas néanmoins un tenseur.

1.2.3 Opérations sur les tenseurs

Combinaison linéaire

Soient deux (p, q) tenseurs $R^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho}$ et $S^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho}$, et a et b deux scalaires. On peut montrer que

$$T^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho} := a R^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho} + b S^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho} \quad (1.15)$$

est également un (p, q) tenseur.

Produit direct

Si $V^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho}$ est un (p_1, q_1) tenseur et $W^{\xi\cdots\zeta}_{\theta\cdots\varphi}$ est un (p_2, q_2) tenseur, alors

$$Z^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho}{}^{\xi\cdots\zeta}_{\theta\cdots\varphi} := V^{\mu\cdots\lambda}_{\nu\cdots\rho} W^{\xi\cdots\zeta}_{\theta\cdots\varphi} \quad (1.16)$$

est un $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ tenseur.

Contraction

Soit $T^{\mu\dots\xi\lambda}_{\nu\dots\zeta\rho}$ un tenseur mixte, c'est à dire un (p, q) tenseur avec $p \neq 0$ et $q \neq 0$. Si on prend un indice contravariant égal à un indice covariant, par exemple si on prend $\lambda = \rho$, alors on peut montrer que

$$X^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\zeta} := T^{\mu\dots\xi\lambda}_{\nu\dots\zeta\lambda} \quad (1.17)$$

est un $(p-1, q-1)$ tenseur. Il est clair qu'on peut répéter la contraction des indices jusqu'à l'épuisement des indices contravariants et/ou des indices covariants.

On peut également combiner les différentes opérations précédentes. Un exemple est l'abaissement ou l'élévation d'indices grâce au tenseur métrique ou au tenseur métrique inverse. Par exemple, si $T^{\mu\dots\xi\lambda}_{\nu\dots\zeta\rho}$ est un tenseur mixte, c'est à dire un (p, q) tenseur avec $p \neq 0$ et $q \neq 0$, alors

$$Y^{\mu\dots\xi}_{\lambda\nu\dots\zeta\rho} := g_{\lambda\theta} T^{\mu\dots\xi\theta}_{\nu\dots\zeta\rho} \quad (1.18)$$

est un $(p-1, q+1)$ tenseur et

$$U^{\mu\dots\xi\lambda}_{\nu\dots\zeta}{}^\rho := g^{\rho\theta} T^{\mu\dots\xi\lambda}_{\nu\dots\zeta\theta} \quad (1.19)$$

est un $(p+1, q-1)$ tenseur.

Densité tensorielle

Considérons la transformation de $g = -\det g_{\mu\nu}$ sous une transformation générale de coordonnées, (1.6). D'après (1.13),

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho},$$

ou

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} g_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}.$$

Considéré comme matrice, $g'_{\mu\nu}$ est le produit de trois matrices : le transposé de la matrice ayant comme éléments $\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}$, la matrice $g_{\lambda\rho}$ et la matrice d'éléments $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}$. Il s'ensuit que le déterminant de $g'_{\mu\nu}$ est le produit des déterminants des trois matrices. Ceci d'une part. D'autre part, prendre le transposé d'une matrice ne change pas son déterminant. Donc le déterminant de $g'_{\mu\nu}$ est le produit du déterminant de $g_{\mu\nu}$ fois le carré du déterminant de la matrice d'éléments $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}$, appelé Jacobien de la transformation inverse $x'^\mu \rightarrow x^\mu$ et noté $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$.

Donc

$$-g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 (-g)$$

ou en multipliant les deux membres de l'équation précédente par $-$

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g. \quad (1.20)$$

Comme le Jacobien de la transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, noté $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$, est l'inverse du Jacobien de la transformation $x'^\mu \rightarrow x^\mu$, alors

$$g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} g. \quad (1.21)$$

Donc g n'est pas un scalaire, mais sa loi de transformation ne diffère de celle d'un scalaire que par une puissance du Jacobien. g est appelé pour cette raison une densité scalaire de poids -2 , le poids étant par définition la puissance avec laquelle intervient le Jacobien.

On définit de même une (p, q) densité tensorielle $\tilde{T}^{\mu \dots \rho}_{\nu \dots \lambda}$ de poids ω comme un objet de transformant sous un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ comme :

$$\tilde{T}'^{\mu \dots \rho}_{\nu \dots \lambda} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^\omega \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\xi} \dots \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \tilde{T}^{\xi \dots \zeta}_{\theta \dots \gamma}. \quad (1.22)$$

A partir d'une (p, q) densité tensorielle de poids ω , on peut toujours construire un (p, q) tenseur en multipliant la densité tensorielle par $g^{\omega/2}$. Comme exemples de densités tensorielles, le symbole de Levi-Cevita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est une densité tensorielle de poids -1 , et d^4x , l'élément de volume quadridimensionnel, est une densité scalaire de poids $+1$. Il s'ensuit que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}/\sqrt{g}$ est un $(4,0)$ tenseur et $\sqrt{g} d^4x$ est un scalaire.

1.3 Connexion affine, dérivée covariante, tenseur de courbure, tenseur de Ricci, scalaire de courbure

La connexion affine, appelée aussi symboles de Christoffel, est construite à partir du tenseur métrique inverse et des dérivées premières du tenseur métrique

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right). \quad (1.23)$$

On peut montrer que la connexion métrique n'est pas un tenseur. Ceci d'une part. D'autre part, la dérivée ordinaire d'un tenseur n'est pas un tenseur. C'est à dire, si $T^{\mu \dots \xi}_{\nu \dots \lambda}$ est un (p, q) tenseur, alors

$$\partial_\rho T^{\mu \dots \xi}_{\nu \dots \lambda} := \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu \dots \xi}_{\nu \dots \lambda} \quad (1.24)$$

n'est pas un $(p, q + 1)$ tenseur.

Mais on peut combiner dérivation et connexion affine de telle manière à former un tenseur : c'est la notion de dérivée covariante.

La dérivée covariante d'un tenseur $T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\lambda}$, notée $D_\rho T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\lambda}$, est définie par

$$D_\rho T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\lambda} := \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\lambda} + \Gamma^\mu_{\zeta\rho} T^{\zeta\dots\xi}_{\nu\dots\lambda} + \dots + \Gamma^\xi_{\zeta\rho} T^{\mu\dots\zeta}_{\nu\dots\lambda} - \Gamma^\theta_{\nu\rho} T^{\mu\dots\xi}_{\theta\dots\lambda} - \dots - \Gamma^\theta_{\lambda\rho} T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\theta}. \quad (1.25)$$

Il est facile de montrer que $D_\rho T^{\mu\dots\xi}_{\nu\dots\lambda}$ est un $(p, q + 1)$ tenseur.

1.3.1 Tenseur de courbure ou tenseur de Riemann-Christoffel

Le tenseur de courbure, appelé également tenseur de Riemann-Christoffel, est défini par

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}. \quad (1.26)$$

On peut aisément montrer que le tenseur de courbure $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$ est, comme son nom l'indique, un $(1, 3)$ tenseur.

1.3.2 Tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci, noté $R_{\mu\nu}$, est construit à partir du tenseur de courbure par contraction d'indices

$$R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu}, \quad (1.27)$$

où $R_{\lambda\mu\sigma\nu}$ est la forme complètement covariante du tenseur de courbure donnée par

$$R_{\lambda\mu\sigma\nu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \right) + g_{\zeta\xi} \left(\Gamma^\zeta_{\lambda\sigma} \Gamma^\xi_{\mu\nu} - \Gamma^\zeta_{\lambda\nu} \Gamma^\xi_{\mu\sigma} \right). \quad (1.28)$$

Il est clair, d'après sa procédure de construction, que le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est un $(0, 2)$ tenseur.

1.3.3 Scalaire de courbure

Le scalaire de courbure R est lui-même construit à partir de la forme mixte du tenseur de Ricci par contraction d'indices.

$$R := R^\lambda_{\lambda} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\lambda}. \quad (1.29)$$

De nouveau, la règle de construction du scalaire de courbure R , montre que ce dernier est, comme son nom l'indique, bien un scalaire.

1.4 Equations d'Einstein

Nous nous intéressons à la dynamique de la relativité générale, c'est à dire aux équations qui gouvernent le tenseur métrique.

Pour un champ faible statique créé par une distribution non relativiste de matière, nous avons pour g_{00} l'expression suivante :

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad (1.30)$$

où ϕ est le potentiel de Newton, qui est une solution de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.31)$$

où Δ désigne le Laplacien, G est la constante de Newton et ρ est la densité de masse de la distribution non relativiste de matière. Il s'ensuit en combinant (1.30) et (1.31) que

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho. \quad (1.32)$$

Si on tient compte du fait que la généralisation tensorielle de la densité de masse est le tenseur d'énergie-impulsion avec

$$T_{00} = \rho, \quad (1.33)$$

où T_{00} est la composante 00 du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, l'équation (1.32) peut être réécrite comme

$$\Delta g_{00} = 8\pi G T_{00}. \quad (1.34)$$

La généralisation covariante de Lorentz de (1.34) est

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (1.35)$$

D'après le principe de covariance générale, les équations qui gouvernent le champ de gravitation dans le cas général sont

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

où $G_{\mu\nu}$ doit se réduire à $G_{\alpha\beta}$ pour des champs faibles. Le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, qui doit avoir une divergence nulle pour préserver la conservation de l'énergie-impulsion,

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.37)$$

est la source du champ de gravitation. Le tenseur $G_{\mu\nu}$ doit posséder les propriétés suivantes :

- $G_{\mu\nu}$ comme $T_{\mu\nu}$ doit être un (0, 2) tenseur.
- $G_{\mu\nu}$ tout comme $T_{\mu\nu}$ doit être symétrique.

- Comme $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$, $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$.
- $G_{\mu\nu}$ doit être nul dans un espace plat.
- $G_{\mu\nu}$ doit être fonction uniquement du tenseur de Riemann-Christoffel, de ses contractions et du tenseur métrique.
- Pour des champs faibles statiques produits par une distribution de masse non relativiste, la composante G_{00} du tenseur $G_{\mu\nu}$ doit se réduire, selon (1.34), (1.35) et (1.36) à Δg_{00} , $G_{00} = \Delta g_{00}$.

Si de plus, on impose à $G_{\mu\nu}$ la condition supplémentaire de ne contenir que des termes linéaires dans les dérivées secondes ou quadratiques dans les dérivées premières du tenseur métrique, alors $G_{\mu\nu}$ est complètement défini

$$G_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.38)$$

et les équations d'Einstein s'écrivent alors comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

ou de façon équivalente

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (1.40)$$

Si on renonce à la condition supplémentaire dont il a été question plus haut, le tenseur $G_{\mu\nu}$ peut contenir un terme proportionnel au tenseur métrique

$$G_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.41)$$

où la constante Λ , appelée constante cosmologique, a été proposée initialement par Einstein, qui y renonça par la suite. Les équations d'Einstein s'écrivent alors comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.42)$$

ou de façon équivalente

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.43)$$

Il vaut la peine de noter que l'on peut considérer le terme ajouté $\Lambda g_{\mu\nu}$ comme une sorte de tenseur d'énergie-impulsion $T'_{\mu\nu}$ avec

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

Dans cette interprétation

$$T'_{00} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{00}. \quad (1.45)$$

peut être considéré comme la densité d'énergie du vide.

Chapitre 2

Méthode de Killing

La méthode de Killing [1] permet de déterminer la forme la plus générale d'une métrique invariante sous certaines symétries. Par définition, une métrique $g_{\mu\nu}(x)$ est invariante sous une transformation

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad (2.1)$$

si et seulement si

$$g_{\rho\sigma}(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}(x'). \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une transformation continue, on peut passer à la forme infinitésimale

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x), \quad (2.3)$$

où ϵ est un paramètre infinitésimal et les ξ^μ sont les composantes d'un vecteur dénommé vecteur de Killing associé à la transformation. Ce vecteur de Killing permet de construire un champ vectoriel, appelé champ vectoriel de Killing associé à la transformation et défini par

$$\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.4)$$

Donc, à chaque transformation continue est associée un champ vectoriel de Killing. Au premier ordre en ϵ , la condition d'invariance (2.2) se réduit à

$$\xi^\mu \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Construisons les champs vectoriels de Killing associés aux rotations autour de ox , oy et oz , aux translations temporelle et spatiales le long de ox , oy et oz , aux pseudo-translations spatiales le long de ox , oy et oz . Dans ce dernier cas, nous allons examiner les deux cas sphérique et pseudo-sphérique.

2.1 Rotations

Donnons les expressions des transformations associées aux rotations autour de ox , de oy et oz , puis leurs formes infinitésimales, qui vont nous permettre de déduire les champs vectoriels de Killing correspondant à chaque cas. Les rotations d'un angle α autour de ox , oy et oz , dans le système de coordonnées t, x, y, z s'expriment respectivement par

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= \cos \alpha y - \sin \alpha z \\z' &= \sin \alpha y + \cos \alpha z,\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= \cos \alpha x + \sin \alpha z \\y' &= y \\z' &= -\sin \alpha x + \cos \alpha z\end{aligned}\tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= \cos \alpha x - \sin \alpha y \\y' &= \sin \alpha x + \cos \alpha y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Considérons maintenant des rotations infinitésimales, c'est à dire avec un angle de rotation $\delta\alpha$, avec $|\delta\alpha| \ll 1$. Les relations (2.6), (2.7) et (2.8) se simplifient alors respectivement en

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= y - \delta\alpha z \\z' &= z + \delta\alpha y,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x + \delta\alpha z \\y' &= y \\z' &= z - \delta\alpha x\end{aligned}\tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - \delta\alpha y \\y' &= y + \delta\alpha x \\z' &= z.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Les relations (2.9), (2.10) et (2.11) nous permettent de déduire les composantes des vecteurs de Killing, puis les champs vectoriels de Killing correspondant aux rotations autour de ox , oy et oz . Nous avons

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = -z, \quad \xi^3 = y,\tag{2.12}$$

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = z, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = -x,\tag{2.13}$$

et

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = -y, \quad \xi^2 = x, \quad \xi^3 = 0,\tag{2.14}$$

correspondant aux rotations autour ox , oy et oz respectivement. Les champs vectoriels de Killing associés s'écrivent alors respectivement comme

$$y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\tag{2.15}$$

$$z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},\tag{2.16}$$

et

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.\tag{2.17}$$

2.2 Translations

2.2.1 Translations temporelles

Les translations temporelles sont définies par

$$\begin{aligned}t' &= t + b \\x' &= x \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Les translations infinitésimales correspondantes s'obtiennent en rendant le paramètre b infinitésimal

$$\begin{aligned}t' &= t + \delta \\x' &= x \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.19}$$

avec $|\delta| \ll 1$. On en déduit les composantes du vecteur de Killing correspondant aux translations temporelles

$$\xi^0 = 1, \quad \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 0,\tag{2.20}$$

et le champ vectoriel de Killing associé

$$\frac{\partial}{\partial t}.\tag{2.21}$$

2.2.2 Translations spatiales

Les translations spatiales le long des axes ox , oy et oz sont définies respectivement comme

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x + c \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= y + c \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.23}$$

et

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= y \\z' &= z + c.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Les translations infinitésimales correspondantes sont obtenues en rendant le paramètre c infinitésimal

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x + \epsilon \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= y + \epsilon \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x \\y' &= y \\z' &= z + \epsilon,\end{aligned}\tag{2.27}$$

avec $|\epsilon| \ll 0$. Les composantes des vecteurs de Killing correspondants aux translations le long de ox , oy et oz sont donnés respectivement par

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = 1, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 0,\tag{2.28}$$

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 1, \quad \xi^3 = 0,\tag{2.29}$$

et

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 1. \quad (2.30)$$

On en déduit les champs vectoriels de Killing associés

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.32)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.33)$$

2.3 Quasi-translations

Les quasi-translations infinitésimales le long des axes ox , oy et oz s'écrivent respectivement comme

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x + \epsilon [1 - Kr^2]^{1/2} \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x \\ y' &= y + \epsilon [1 - Kr^2]^{1/2} \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z + \epsilon [1 - Kr^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il faut distinguer ici entre les cas sphérique, auquel cas $K > 0$, et pseudo-sphérique, auquel cas $K < 0$.

2.4 Métrique à symétrie sphérique

Notre but ici est de déterminer la forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique, c'est à dire invariante sous les transformations (2.6),(2.7),(2.8), ou, de façon équivalente, sous les transformations infinitésimales (2.9), (2.10), (2.11). Il est judicieux de passer aux coordonnées "sphériques" (t, r, θ, φ) associées aux coordonnées "cartésiennes" (t, x, y, z) et liées à ces dernières par les relations

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{2.37}$$

Pour cela, nous devons exprimer les champs vectoriels de Killing associés aux rotations en termes de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.38}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \tilde{D} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},\tag{2.39}$$

avec \tilde{D} matrice carrée 3×3 donnée par

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.40}$$

La relation matricielle (2.39) peut être inversée, pour exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ en termes de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \tilde{D}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix},\tag{2.41}$$

où \tilde{D}^{-1} désigne l'inverse de la matrice \tilde{D} . Le calcul de \tilde{D}^{-1} donne

$$\tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

La relation matricielle (2.41) peut être explicitée, en tenant compte de (2.42) en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En faisant usage de (2.43), on peut exprimer les champs vectoriels de Killing associés aux rotations autour des trois axes ox , oy et oz , (2.15), (2.16) et (2.17), en termes des coordonnées sphériques. Nous obtenons :

$$y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.44)$$

$$z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.45)$$

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.46)$$

On en déduit les composantes des vecteurs de Killing associés respectivement aux rotations autour de ox , oy et oz . En utilisant des notations évidentes,

$$\xi^t = \xi^r = 0, \quad \xi^\theta = -\sin \varphi, \quad \xi^\varphi = -\cos \varphi \cot \theta. \quad (2.47)$$

$$\xi^t = \xi^r = 0, \quad \xi^\theta = \cos \varphi, \quad \xi^\varphi = -\sin \varphi \cot \theta. \quad (2.48)$$

$$\xi^t = \xi^r = \xi^\theta = 0, \quad \xi^\varphi = 1. \quad (2.49)$$

2.5 Détermination de la forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique

Remarquons tout d'abord que le commutateur de deux rotations autour de deux des trois axes est une rotation autour du troisième [9]. Il s'ensuit que pour garantir l'invariance

de la métrique sous les rotations, il suffit d'imposer l'invariance sous les rotations autour de deux des trois axes, par exemple les axes oy et oz . Commençons d'abord par imposer l'invariance sous les rotations autour de l'axe oz , qui se traduit, en tenant compte de (2.49), par

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.50)$$

qui signifie que les $g_{\mu\nu}$ sont indépendants de φ . L'invariance de la métrique sous les rotations autour de l'axe oy se traduit par

$$\left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\mu} g_{\theta\nu} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\mu} g_{\varphi\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\nu} g_{\mu\theta} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\nu} g_{\mu\varphi} = 0. \quad (2.51)$$

En tenant compte du fait que $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0$, la relation (2.51) se simplifie en

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\mu} g_{\theta\nu} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\mu} g_{\varphi\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\nu} g_{\mu\theta} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\nu} g_{\mu\varphi} = 0. \quad (2.52)$$

En explicitant la condition (2.52) pour les différentes valeurs de μ et ν , voir annexe, on aboutit aux contraintes suivantes pour les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées sphériques (t, r, θ, φ)

$$\begin{aligned} g_{t\theta} &= g_{t\varphi} = g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0, \\ g_{tt} &= g_{tt}(t, r), \quad g_{tr} = \tilde{F}(t, r), \quad g_{rr} = \tilde{G}(t, r), \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \tilde{H}(t, r), \quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta g_{\theta\theta} = \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(t, r) \end{aligned} \quad (2.53)$$

ou, sous forme matricielle,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(t, r) & \tilde{F}(t, r) & 0 & 0 \\ \tilde{F}(t, r) & \tilde{G}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \tilde{H}(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \tilde{H}(t, r) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Partant de l'équation (2.53), dérivons maintenant l'expression du tenseur métrique correspondant au cas à symétrie sphérique, mais dans le système de coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) . Il suffit pour cela de remarquer que l'élément de temps propre $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ est invariant sous un changement de coordonnées et d'exprimer dr , $d\theta$ et $d\varphi$ en termes de dx , dy et dz . Pour ce faire, utilisons d'abord (2.37) pour exprimer dx , dy et dz en termes

de dr , $d\theta$ et $d\varphi$. On obtient

$$\begin{aligned}
dx &= \sin\theta \cos\varphi dr + r \cos\theta \cos\varphi d\theta - r \sin\theta \sin\varphi d\varphi, \\
dy &= \sin\theta \sin\varphi dr + r \cos\theta \sin\varphi d\theta + r \sin\theta \cos\varphi d\varphi, \\
dz &= \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Inversons (2.55) pour obtenir dr , $d\theta$ et $d\varphi$ en termes de dx , dy et dz , ce qui donne

$$\begin{aligned}
dr &= \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz \\
d\theta &= \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} dy - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} dz \\
\sin\theta d\varphi &= -\frac{y}{r \sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{x}{r \sqrt{x^2 + y^2}} dy
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Réécrivons l'élément de temps propre au carré en termes des coordonnées cartésiennes en substituant à dr , $d\theta$ et $d\varphi$ leurs expressions en termes de dx , dy et dz , (2.56). On obtient, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &= g_{00} dt^2 + 2\tilde{F} \frac{x}{r} dt dx + 2\tilde{F} \frac{y}{r} dt dy + 2\tilde{F} \frac{z}{r} dt dz + \\
&\quad \left(\tilde{G} \frac{x^2}{r^2} + \tilde{H} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \right) dx^2 + \left(\tilde{G} \frac{y^2}{r^2} + \tilde{H} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \right) dy^2 + \\
&\quad \left(\tilde{G} \frac{z^2}{r^2} + \tilde{H} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right) dz^2 + 2\frac{xy}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) dx dy + \\
&\quad 2\frac{xz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) dx dz + 2\frac{yz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) dy dz,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

avec, $g_{00} = g_{tt}$. De (2.57), on déduit l'expression du tenseur métrique correspondant au cas à symétrie sphérique exprimé en termes des coordonnées cartésiennes. Nous avons sous forme matricielle

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & \frac{x}{r} \tilde{F} & \frac{y}{r} \tilde{F} & \frac{z}{r} \tilde{F} \\ \frac{x}{r} \tilde{F} & \frac{x^2}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) + \tilde{H} & \frac{xy}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) & \frac{xz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) \\ \frac{y}{r} \tilde{F} & \frac{xy}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) & \frac{y^2}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) + \tilde{H} & \frac{yz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) \\ \frac{z}{r} \tilde{F} & \frac{xz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) & \frac{yz}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) & \frac{z^2}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}) + \tilde{H} \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

ou encore

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & xF & yF & zF \\ xF & x^2G + H & xyG & xzG \\ yF & xyG & y^2G + H & yzG \\ zF & xzG & yzG & z^2G + H \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

où les fonctions, de t et de r , F , G et H sont reliées aux fonctions \tilde{F} , \tilde{G} et \tilde{H} par

$$F = \frac{\tilde{F}}{r}, \quad G = \frac{1}{r^2} (\tilde{G} - \tilde{H}), \quad H = \tilde{H}. \quad (2.60)$$

2.6 Détermination de la forme la plus générale d'une métrique satisfaisant au principe de symétrie maximale

La métrique doit être d'abord invariante sous les rotations, ce qui suppose que notre métrique doit être de la forme (2.59) et nous avons ici à distinguer trois cas : le cas plat, le cas sphérique et le cas pseudo-sphérique.

2.6.1 Métrique à symétrie maximale : cas plat

Dans le cas plat, la métrique doit être invariante sous les translations. En faisant usage des champs vectoriels de Killing associés aux translations le long de ox , oy et oz , (2.31), (2.32) et (2.33), les conditions d'invariance s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.62)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z} g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.63)$$

D'après (2.61), (2.62) et (2.63), les composantes du tenseur métrique doivent être indépendantes de x , y et z . Elles ne peuvent donc dépendre que de t . Il s'ensuit, qu'en termes des fonctions F , G et H , $F = 0$, $G = 0$ et H ne peut dépendre que de t : $H = H(t)$. La matrice représentant la métrique (2.59) se réduit alors à

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H(t) \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

D'après le théorème de Sylvestre, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, à l'instar du tenseur de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, (on parle ici des représentations matricielles) admet une valeur propre positive et trois valeurs propres négatives. Ceci d'une part. D'autre part, comme le tenseur métrique, (2.64), est sous forme diagonale, il en résulte que $g_{00}(t)$ et $H(t)$ sont les valeurs propres du tenseur métrique, avec des multiplicités 1 et 3 respectivement. Il s'ensuit que les fonctions $g_{00}(t)$ et $H(t)$ doivent être définies positive et négative respectivement. Redéfinissons la coordonnée temporelle t , $t \rightarrow \tilde{t}$ par la relation

$$d\tilde{t}^2 = g_{00}(t) dt^2 \quad (2.65)$$

ou encore

$$d\tilde{t} = \sqrt{g_{00}(t)} dt, \quad (2.66)$$

qui s'intègre en

$$\tilde{t} = \int \sqrt{g_{00}(t)} dt, \quad (2.67)$$

qui donne \tilde{t} en fonction de $t : \tilde{t}(t)$, qu'on peut inverser pour exprimer t en fonction de $\tilde{t} : t(\tilde{t})$. Définissons maintenant la fonction définie positive $a(\tilde{t})$ comme

$$a^2(\tilde{t}) = -H(t(\tilde{t})) \quad (2.68)$$

Finalement, réappelons $\tilde{t} t$. La matrice représentant le tenseur métrique, (2.64), prend alors la forme

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

qui est la forme populaire donnée dans la littérature [1, 2, 7, 9].

2.6.2 Métrique à symétrie maximale : cas sphérique

Ici, en plus de l'invariance sous les rotations, on doit avoir invariance sous les pseudo-translations (2.34), (2.35) et (2.36), avec K positif. On peut toujours choisir un système d'unités tel que K vaut 1. Les champs vectoriels de Killing associés aux quasi-translations le long des trois axes ox , oy , oz sont donnés respectivement par

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.70)$$

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.71)$$

et

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.72)$$

L'invariance sous les quasi-translations le long des trois axes ox , oy et oz se traduit respectivement par les équations

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{1\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 1} = 0, \quad (2.73)$$

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{2\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 2} = 0 \quad (2.74)$$

et

$$(1 - r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{3\nu} + \frac{\partial (1 - r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 3} = 0. \quad (2.75)$$

Si on a à l'esprit que le tenseur métrique a 10 composantes indépendantes, nous devons satisfaire à 3×10 équations, qui donnent, voir plus de détails en annexe,

$$F = 0, \quad H = H(t), \quad G = \frac{H(t)}{1 - r^2}. \quad (2.76)$$

La matrice représentant le tenseur métrique, (2.59), se réduit alors à

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H(t) \left(1 + \frac{x^2}{1-r^2}\right) & \frac{xy}{1-r^2} H(t) & \frac{xz}{1-r^2} H(t) \\ 0 & \frac{xy}{1-r^2} H(t) & H(t) \left(1 + \frac{y^2}{1-r^2}\right) & \frac{yz}{1-r^2} H(t) \\ 0 & \frac{xz}{1-r^2} H(t) & \frac{yz}{1-r^2} H(t) & H(t) \left(1 + \frac{z^2}{1-r^2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

En procédant de manière similaire au cas plat, (2.65), (2.66) et (2.67), on obtient \tilde{t} en fonction de $t : \tilde{t}(t)$, qu'on peut inverser pour exprimer t en fonction de $\tilde{t} : t(\tilde{t})$. En définissant de nouveau la fonction définie positive, le facteur d'échelle $a(\tilde{t})$ par la relation (2.68) et en réappelant \tilde{t} t , la matrice représentant le tenseur métrique prend alors la forme

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) \left(1 + \frac{x^2}{1-r^2}\right) & -a^2(t) \frac{xy}{1-r^2} & -a^2(t) \frac{xz}{1-r^2} \\ 0 & -a^2(t) \frac{xy}{1-r^2} & -a^2(t) \left(1 + \frac{y^2}{1-r^2}\right) & -a^2(t) \frac{yz}{1-r^2} \\ 0 & -a^2(t) \frac{xz}{1-r^2} & -a^2(t) \frac{yz}{1-r^2} & -a^2(t) \left(1 + \frac{z^2}{1-r^2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

2.6.3 Métrique à symétrie maximale : cas pseudo-sphérique

Ici, en plus de l'invariance sous les rotations, on doit avoir invariance sous les pseudo-translations (2.34), (2.35) et (2.36), mais cette fois-ci avec K négatif. De façon analogue au cas sphérique, on peut toujours choisir un système d'unités tel que K vaut -1 . Les champs vectoriels de Killing associés aux quasi-translations le long des trois axes ox , oy , oz sont donnés respectivement par

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.79)$$

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.80)$$

et

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.81)$$

L'invariance sous les quasi-translations le long des trois axes ox , oy et oz se traduit respectivement par les équations

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{1\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 1} = 0, \quad (2.82)$$

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{2\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 2} = 0 \quad (2.83)$$

et

$$(1+r^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} g_{\mu\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\mu} g_{3\nu} + \frac{\partial (1+r^2)^{1/2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 3} = 0. \quad (2.84)$$

Comme dans le cas sphérique, nous devons satisfaire à 3×10 équations, qui donnent, les détails sont donnés en annexe,

$$F = 0, \quad H = H(t), \quad G = -\frac{H(t)}{1+r^2}. \quad (2.85)$$

La matrice représentant le tenseur métrique, (2.59), se réduit alors à

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H(t) \left(1 - \frac{x^2}{1+r^2}\right) & -\frac{xy}{1+r^2} H(t) & -\frac{xz}{1+r^2} H(t) \\ 0 & -\frac{xy}{1+r^2} H(t) & H(t) \left(1 - \frac{y^2}{1+r^2}\right) & -\frac{yz}{1+r^2} H(t) \\ 0 & -\frac{xz}{1+r^2} H(t) & -\frac{yz}{1+r^2} H(t) & H(t) \left(1 - \frac{z^2}{1+r^2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

Procédons comme dans le cas plat. Introduisons une nouvelle coordonnée temporelle \tilde{t} liée à la coordonnée temporelle t via la relation (2.66), qui s'intègre pour donner \tilde{t} en fonction

de t , (2.67), relation qui peut être inversée pour exprimer t en terme de \tilde{t} . On introduit alors de nouveau la fonction définie positive, le facteur d'échelle $a(\tilde{t})$, via la relation (2.68). Finalement, en réappelant \tilde{t} t , la matrice représentant la métrique se réduit à

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 \left(1 - \frac{x^2}{1+r^2}\right) & a(t)^2 \frac{xy}{1+r^2} & a(t)^2 \frac{xz}{1+r^2} \\ 0 & a(t)^2 \frac{xy}{1+r^2} & -a(t)^2 \left(1 - \frac{y^2}{1+r^2}\right) & a(t)^2 \frac{yz}{1+r^2} \\ 0 & a(t)^2 \frac{xz}{1+r^2} & a(t)^2 \frac{yz}{1+r^2} & -a(t)^2 \left(1 - \frac{z^2}{1+r^2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

L'élément de temps propre $d\tau^2$ correspondant à (2.78), symétrie maximale, cas sphérique, s'écrit comme

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{x^2}{1-r^2}\right) dx^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{y^2}{1-r^2}\right) dy^2 - a^2(t) \left(1 + \frac{z^2}{1-r^2}\right) dz^2 - 2a^2(t) \frac{xy}{1-r^2} dx dy - 2a^2(t) \frac{xz}{1-r^2} dx dz - 2a^2(t) \frac{yz}{1-r^2} dy dz. \quad (2.88)$$

De même, L'élément de temps propre $d\tau^2$ correspondant à (2.87), symétrie maximale, cas pseudo-sphérique, s'écrit comme

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(1 - \frac{x^2}{1+r^2}\right) dx^2 - a^2(t) \left(1 - \frac{y^2}{1+r^2}\right) dy^2 - a^2(t) \left(1 - \frac{z^2}{1+r^2}\right) dz^2 + 2a^2(t) \frac{xy}{1+r^2} dx dy + 2a^2(t) \frac{xz}{1+r^2} dx dz + 2a^2(t) \frac{yz}{1+r^2} dy dz. \quad (2.89)$$

Il est facile de montrer qu'on peut mettre (2.88) et (2.89) respectivement sous les deux formes

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{r} \cdot d\vec{r} - \frac{a^2(t)}{1-r^2} \left(\vec{r} \cdot d\vec{r}\right)^2 \quad (2.90)$$

et

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{r} \cdot d\vec{r} + \frac{a^2(t)}{1+r^2} \left(\vec{r} \cdot d\vec{r}\right)^2. \quad (2.91)$$

Nous retrouvons ainsi les formes bien connues dans la littérature (2.90) et (2.91) [1, 2].

2.7 Détermination de la forme la plus générale d'une métrique statique à symétrie sphérique

Dans ce cas il est plus commode de travailler dans un système de coordonnées sphériques, auquel cas l'exigence d'une symétrie sphérique, c'est à d'une invariance sous les rotations, se traduit, comme on l'a déjà vu par la forme (2.54) pour le tenseur métrique.

Pour que la mérique soit statique, il faut qu'elle soit invariante sous les translations temporelles dont le champ de Killing est donné par (2.21). Il est alors très simple de voir que la condition de staticité implique que les composantes du tenseur métrique doivent être indépendantes du temps t , d'où la forme du tenseur métrique correspondant au cas statique à symétrie sphérique

$$\begin{pmatrix} g_{tt}(r) & \tilde{F}(r) & 0 & 0 \\ \tilde{F}(r) & \tilde{G}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \tilde{H}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \tilde{H}(r) \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

L'élément de temps propre au carré $d\tau^2$ correspondant à la métrique (2.92) s'écrit

$$d\tau^2 = g_{tt}(r) dt^2 + 2\tilde{F}(r) dt dr + \tilde{G}(r) dr^2 + r^2 \tilde{H}(r) d\theta^2 + \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(r) d\varphi^2. \quad (2.93)$$

Changeons la variable temporelle t en une nouvelle variable t' , avec

$$t = t' + S(r), \quad (2.94)$$

où $S(r)$ une fonction arbitraire de r . Exprimé en termes des coordonnées t', r, θ, φ , l'élément de temps propre au carré $d\tau^2$ (2.93) s'écrit, sachant que,

$$dt = dt' + \frac{dS}{dr} dr, \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} d\tau^2 = & g_{tt}(r) dt'^2 + 2 \left(g_{tt}(r) \frac{dS}{dr} + \tilde{F}(r) \right) dt' dr + \\ & \left(g_{tt}(r) \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 + 2\tilde{F}(r) \frac{dS}{dr} + \tilde{G}(r) \right) dr^2 + r^2 \tilde{H}(r) d\theta^2 + \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(r) d\varphi^2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Par un choix judicieux de la fonction $S(r)$, on peut rendre la métrique diagonale, ce qui revient à annuler le terme en $dt' dr$. Pour ce faire, $S(r)$ doit satisfaire à l'équation différentielle suivante

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{\tilde{F}(r)}{g_{tt}(r)}, \quad (2.97)$$

qui s'intègre en

$$S(r) = -\int \frac{\tilde{F}(r)}{g_{tt}(r)} dr. \quad (2.98)$$

Pour un tel choix pour $S(r)$, (2.98), l'élément de temps propre $d\tau^2$, (2.96), prend la forme suivante

$$d\tau^2 = g_{tt}(r) dt'^2 + \left(-\frac{\tilde{F}^2(r)}{g_{tt}(r)} + \tilde{G}(r) \right) dr^2 + r^2 \tilde{H}(r) d\theta^2 + \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(r) d\varphi^2, \quad (2.99)$$

d'où le tenseur métrique associé

$$\begin{pmatrix} g_{tt}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}(r) - \frac{\tilde{F}^2(r)}{g_{tt}(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \tilde{H}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(r) \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Le théorème de Sylvestre stipule que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ doit posséder le même nombre de valeurs positives, négatives et nulles que le tenseur de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. Comme ce dernier possède une valeur propre positive et trois valeurs propres négatives, il en de même du tenseur métrique. Comme le tenseur métrique (2.100) est sous forme diagonale, ses valeurs propres ne sont autres que ses éléments diagonaux. Il s'ensuit obligatoirement que la fonction $g_{tt}(r)$ est définie positive tandis que les deux fonctions $\tilde{G}(r) - \frac{\tilde{F}^2(r)}{g_{tt}(r)}$ et $\tilde{H}(r)$ sont définies négatives. Changeons maintenant la coordonnée radiale r en r' , avec

$$r' = r \sqrt{-\tilde{H}(r)}, \quad (2.101)$$

relation qui peut être inversée pour exprimer r en terme de r' , $r = r(r')$. Si on introduit les fonctions définies positives $A(r')$ et $B(r')$ par

$$A(r') := \frac{\tilde{F}^2(r(r'))}{g_{tt}(r(r'))} - \tilde{G}(r(r')) \quad (2.102)$$

et

$$B(r') := g_{tt}(r(r')), \quad (2.103)$$

et si on réappelle t' et r' t et r respectivement, l'élément de temps propre au carré $d\tau^2$ s'écrit

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dt^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.104)$$

d'où on déduit le tenseur métrique sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

qui est la forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique [1, 2].

Chapitre 3

Métrie de Friedmann-Lemaître-Robertson-walker

En cosmologie, la métrie de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (en abrégé FLRW) est une métrie permettant de décrire un univers homogène et localement isotrope en expansion ou en contraction. On peut d'ailleurs montrer que la métrie de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker est la seule métrie répondant à l'exigence simultanée d'un univers homogène et isotrope autour de chaque point. Cette métrie constitue le modèle cosmologique standard de l'univers. En cosmologie, les deux propriétés d'homogénéité et d'isotropie autour de chaque point ne doivent pas être considérées comme de grands principes de la physique mais plutôt comme des hypothèses de travail. D'ailleurs les propriétés d'homogénéité et d'isotropie autour de chaque point ne sont valables qu'à grande échelle, lorsqu'on moyenne sur des cellules d'espace suffisamment grandes.

Il s'ensuit que le modèle FLRW ne peut rendre compte en particulier du Big Bang car celui-ci suppose des fluctuations de densité, qui sont bien présentes dans l'univers. En effet, le modèle strictement FLRW suppose l'absence des amas de galaxies, des étoiles, des planètes et même des êtres biologiques, puisque ces objets sont de loin plus denses que l'univers en moyenne.

Le modèle FLRW est utilisé comme une première approximation. Son atout principal est la simplicité qu'il apporte aux calculs. Eventuellement, on peut tenir compte des fluctuations de densité en apportant des modifications au modèle FLRW, tels les métriques FLRW perturbées. La plupart des cosmologistes s'accordent à ce que la partie de l'Univers observable est bien approximée par un modèle presque FLRW, c'est-à-dire un modèle qui suit la métrie FLRW à part des fluctuations primordiales de densité.

3.1 La Métrique de Friedmann

En coordonnées polaires, elle peut être écrite comme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.1)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.2)$$

$a(t)$ est le facteur d'échelle de l'univers à l'époque t et k est un paramètre qui exprime la courbure spatiale et peut prendre trois valeurs : $+1$, 0 ou -1 correspondant respectivement à un espace courbe fermé, correspondant à la géométrie de la sphère, à un espace plat, correspondant à la géométrie euclidienne usuelle, et à un espace courbe ouvert, correspondant à la géométrie de la pseudo-sphère.

On peut faire un changement de coordonnées pour faire apparaître la distance comobile χ

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \chi, & k = 0, \\ \sin \chi, & k = +1, \\ \sinh \chi, & k = -1. \end{cases} \quad (3.3)$$

La métrique (3.1) peut être alors réécrite sous la forme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega^2), \quad (3.4)$$

Pour étudier l'expansion de l'univers, on prendra la forme (3.4), chaque fois qu'on considèrera les géodésiques radiales des photons : $\theta = cste$, $\varphi = cste$.

3.1.1 Equations de Friedmann

Il s'agit tout d'abord d'écrire les équations d'Einstein, et donc de calculer les composantes du tenseur de Ricci et celles du tenseur d'énergie impulsion

Les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont :

$$g_{tt} = 1, g_{rr} = -\frac{a(t)^2}{1 - kr^2}, g_{\theta\theta} = -r^2 a(t)^2, g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta a(t)^2 \quad (3.5)$$

les symboles de Christoffel non nuls correspondants sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= aa_t / (1 - kr^2), & \Gamma_{\theta\theta}^t &= aa_t r^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r (1 - kr^2), & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r (1 - kr^2) \sin^2 \theta, & \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = a_t/a, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta t}^\theta = a_t/a, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = a_t/a, & \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = 1/r, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où a_t désigne la dérivée première du facteur d'échelle $a(t)$ par rapport au temps t . En utilisant l'expression du tenseur de Ricci, on obtient

$$R_{tt} = 3a_{tt}/a, \quad (3.7)$$

$$R_{rr} = -\frac{(aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k)}{(1 - kr^2)}, \quad (3.8)$$

$$R_{\theta\theta} = -r^2 (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k), \quad (3.9)$$

$$R_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k), \quad (3.10)$$

où a_{tt} désigne la dérivée seconde du facteur d'échelle $a(t)$ par rapport au temps t . On calcule le scalaire de courbure R par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

En utilisant les expressions des composantes du tenseur de Ricci (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), on obtient pour ce dernier l'expression suivante :

$$R = +6 (a_{tt}a + a_t^2 + k) / a^2.$$

Pour écrire les équations d'Einstein, on adoptera la forme

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (3.12)$$

avec $T := T^\mu{}_\mu$, complètement équivalente à la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Il s'ensuit qu'on a besoin de connaître l'expression du tenseur énergie-impulsion. On va adopter dans ce qui suit la forme générale du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ dans le cas d'un fluide parfait avec densité ρ et pression p donnée par

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

où U_μ désigne la 4-vitesse du fluide. Vu qu'on travaille dans un système de coordonnées comobiles, seule la composante temporelle de U_μ est non nulle

$$U_\mu(U_t, 0, 0, 0). \quad (3.15)$$

Comme

$$U_\mu U^\mu = 1, \quad (3.16)$$

et vu que le tenseur métrique est diagonal avec $g^{tt} = 1$, on arrive à

$$U_t^2 = 1. \quad (3.17)$$

Comme U_t est obligatoirement positif, on a finalement

$$U_t = 1. \quad (3.18)$$

Il vaut la peine de noter que nous obtenons deux équations indépendantes, qui correspondent respectivement aux composantes temporelle tt et spatiale rr du tenseur de Ricci, les deux autres composantes spatiales $\theta\theta$ et $\varphi\varphi$ du tenseur de Ricci donnant le même résultat que la composante rr . Ces deux équations s'écrivent explicitement comme

$$3\frac{a_{tt}}{a} - \Lambda = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (3.19)$$

et

$$-\frac{a_{tt}}{a} - 2\frac{a_t^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} + \Lambda = -4\pi G(\rho - p). \quad (3.20)$$

On obtient ainsi deux équations du second ordre en a . On peut éliminer la dérivée seconde de a , a_{tt} , en prenant une combinaison linéaire convenable de équations (3.19) et (3.20). Plus explicitement, en multipliant l'équation (3.20) par 3 et en lui additionnant l'équation (3.19), on obtient l'équation suivante du premier ordre en a .

$$a_t^2 + k = \frac{1}{3}(8\pi G\rho + \Lambda)a^2. \quad (3.21)$$

L'équation (3.21), appelée équation fondamentale de Friedmann, gouverne l'expansion de l'univers. Il est évident que l'équation de Friedmann (3.21) n'est pas équivalente à l'ensemble des deux équations (3.19) et (3.20). Il y'a une information restante contenue dans l'équation

$$\rho_t = -3\frac{a_t}{a}(\rho + p). \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) n'est autre que l'équation de conservation de l'énergie impulsion. Ceci n'est guère surprenant vu que la conservation de l'énergie impulsion est une conséquence des équations d'Einstein. On a donc à résoudre le système formé des deux équations (3.21) et (3.22). On commence d'abord par postuler une équation d'état $p(\rho)$, c'est à dire une relation entre la pression p et la densité de matière ρ . Ceci permet alors, à l'aide de (3.22), de tirer ρ en fonction de a . En injectant ensuite dans (3.21), on obtient a en fonction de t , $a(t)$. On adopte généralement une équation d'état de la forme :

$$p = w\rho, \quad (3.23)$$

avec w indépendant de t . L'équation (3.22) se simplifie alors en

$$\rho_t = -3(1+w) \frac{a_t}{a} \rho, \quad (3.24)$$

ce qui donne ρ en terme du facteur d'échelle a

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (3.25)$$

Dans le cas d'une matière sombre froide $p = 0$. Par conséquent, $w = 0$ et (3.25) se simplifie en

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (3.26)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (3.27)$$

En reportant (3.27) dans (3.21), on obtient

$$a_t^2 + k = \frac{1}{3} \left(8\pi G \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Lambda \right) a^2 \quad (3.28)$$

ou, en travaillant dans un système d'unités où $8\pi G = 1$

$$a_t^2 = A/a + \Lambda a^2/3 - k, \quad (3.29)$$

avec $A = a_0^3 \rho_0/3$, ou bien encore en prenant la racine carrée

$$a_t = \sqrt{A/a + \Lambda a^2/3 - k}. \quad (3.30)$$

Comme $a(t)$ est une fonction monotone de t , on peut donc parler de son inverse $t(a)$ et l'équation pour $t(a)$ s'écrit

$$dt/da = 1/\sqrt{A/a + \Lambda a^2/3 - k}. \quad (3.31)$$

Chapitre 4

Métrie de Schwarzschild- de Sitter ou métrie de Kottler

L'élément de temps propre au carré correspondant à la forme la plus générale de la métrie dans le cas statique à symétrie sphérique est donné par

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (4.1)$$

où $A(r)$ et $B(r)$ sont des fonctions de r seul. En identifiant avec

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (4.2)$$

on déduit les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique

$$g_{tt} = B(r), \quad g_{rr} = -A(r), \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\theta. \quad (4.3)$$

Comme le tenseur métrique est diagonal, le tenseur métrique inverse l'est également et les composantes contravariantes du tenseur métrique sont simplement les inverses des composantes covariantes correspondantes. Plus explicitement,

$$g^{tt} = 1/B(r), \quad g^{rr} = -1/A(r), \quad g^{\theta\theta} = -1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = -1/(r^2 \sin^2\theta). \quad (4.4)$$

En tenant compte de l'expression de la connexion affine

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (4.5)$$

les symboles de Christoffel non nuls correspondant à la métrique, équations (4.3) et (4.4), sont donnés par

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{A(r)} \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ sont les composantes diagonales données par

$$R_{tt} = \frac{-B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \tag{4.7}$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \tag{4.8}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}, \tag{4.9}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \left(-1 + \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} \right), \tag{4.10}$$

où on a fait usage de la définition générale du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu}, \tag{4.11}$$

ainsi que de l'expression de la forme complètement covariante du tenseur de courbure $R_{\lambda\mu\sigma\nu}$

$$R_{\lambda\mu\sigma\nu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \right) + g_{\zeta\xi} \left(\Gamma^\zeta_{\lambda\sigma} \Gamma^\xi_{\mu\nu} - \Gamma^\zeta_{\lambda\nu} \Gamma^\xi_{\mu\sigma} \right). \tag{4.12}$$

4.1 Métrique de Kottler à l'extérieur de la distribution de matière

Les équations d'Einstein dans le vide, en présence d'une constante cosmologique Λ , s'écrivent alors comme

$$R_{tt} = \Lambda B(r), \quad (4.13)$$

$$R_{rr} = -\Lambda A(r), \quad (4.14)$$

$$R_{\theta\theta} = -\Lambda r^2, \quad (4.15)$$

$$R_{\varphi\varphi} = -\Lambda r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.16)$$

avec R_{tt} , R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ et $R_{\varphi\varphi}$ données respectivement par (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10).

En combinant les équations d'Einstein pour R_{tt} et R_{rr} , (4.13) et (4.14) respectivement, on aboutit à

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = 0,$$

ou, en multipliant par $-rA(r)^2B(r)$,

$$A'(r)B(r) + A(r)B'(r) = 0,$$

d'où on déduit que

$$A(r)B(r) = C^{te}.$$

Considérons d'abord le cas $\Lambda = 0$, c'est à dire la métrique de Schwarzschild. Si on impose à la métrique de tendre vers la métrique de Minkowski pour r tendant vers l'infini. Autrement dit, si on impose à la métrique d'être asymptotiquement plate, alors

$$B(r) \rightarrow 1, \quad A(r) \rightarrow 1, \quad (4.17)$$

ce qui fixe la valeur de C^{te} à 1. Il s'ensuit que $A(r)B(r) = 1$ et par conséquent $A(r) = 1/B(r)$. L'équation d'Einstein pour $R_{\theta\theta}$, (4.15), se réduit alors à

$$\frac{d}{dr} [rB(r)] = 1,$$

qui s'intègre en

$$B(r) = 1 + \frac{C^{te'}}{r},$$

où $C^{te'}$ est une constante à déterminer. Pour déterminer la constante $C^{te'}$, considérons la limite d'un champ faible statique créé par une distribution de masse non relativiste. Dans ce cas, g_{tt} doit se réduire à

$$g_{tt} = 1 + 2\phi(r),$$

où $\phi(r)$ est le potentiel gravitationnel de Newton, qui à une distance r du centre d'une masse sphérique M est donné par

$$\phi = -\frac{G M}{r},$$

où G est la constante de Newton. Il s'ensuit que

$$C^{tel} = -2 G M.$$

Ceci détermine complètement la métrique de Schwarzschild à l'extérieur de la distribution de matière, l'élément de temps propre au carré prenant alors la forme

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (4.18)$$

avec

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (4.19)$$

Considérons maintenant le cas avec constante cosmologique Λ . L'équation d'Einstein pour $R_{\theta\theta}$, (4.15), se réduit alors à

$$\frac{d}{dr} [rB(r)] = C^{te} (1 - \Lambda r^2),$$

qui s'intègre en

$$B(r) = C^{te} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{C^{tel}}{r} \right),$$

où C^{te} et C^{tel} sont des constantes à déterminer. Pour r suffisamment petit $B(r)$ peut être approximé par :

$$B(r) \simeq C^{te} \left(1 + \frac{C^{tel}}{r} \right).$$

En comparant alors à l'expression de $B(r)$ correspondant à la solution de Schwarzschild

$$B(r) = 1 - \frac{2 G M}{r},$$

on aboutit à

$$C^{te} = 1, C^{tel} = -2 G M, \quad (4.20)$$

ce qui détermine complètement la métrique de Kottler [8] à l'extérieur de la distribution de matière, l'élément de temps propre au carré prenant alors la forme

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (4.21)$$

avec

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (4.22)$$

4.2 Equations de la géodésique à l'extérieur de la distribution de matière

Dans le cas à symétrie sphérique, le mouvement se fait dans un plan, qu'on peut choisir comme étant le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. En utilisant les expressions des symboles de Christoffel, (4.6), et en tenant compte du fait que $A(r) = 1/B(r)$, avec $B(r)$ donné par (4.22), les équations des géodésiques

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0$$

s'écrivent

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (4.23)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} B(r) B'(r) \dot{t}^2 - \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{r}^2 - r B(r) \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.24)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0, \quad (4.25)$$

où

$$\dot{} := \frac{d}{dp}$$

Par intégration, les équations (4.23) et (4.25), après redéfinition du paramètre affine p , donnent respectivement

$$\dot{t} = \frac{1}{B(r)} = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1}, \quad (4.26)$$

et

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{r^2}, \quad (4.27)$$

où la constante d'intégration J est interprétée comme un moment cinétique par unité de masse. En remplaçant \dot{t} et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions respectives (4.26) et (4.27) dans (4.24), on obtient

$$\frac{d^2 r}{dp^2} - \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \dot{r}^2 - \frac{J^2 B}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} = 0.$$

En multipliant l'équation précédente par $2\frac{\dot{r}}{B}$, on arrive à

$$\frac{1}{B} \frac{d\dot{r}^2}{dp} + \frac{d\left(\frac{1}{B}\right)}{dp} \dot{r}^2 + J^2 \frac{d\left(\frac{1}{r^2}\right)}{dp} - \frac{d\left(\frac{1}{B}\right)}{dp} = 0,$$

qui peut également se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{B} \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} \right) = 0,$$

dont l'intégration donne

$$\frac{1}{B} \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -E, \quad (4.28)$$

où la constante d'intégration E s'interprète comme une énergie par unité de masse. Considérons l'élément invariant d'espace-temps, ou plutôt son carré $d\tau^2$. Nous avons

$$d\tau^2 = B dt^2 - \frac{1}{B} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.29)$$

Si on tient compte du fait que $\theta = \frac{\pi}{2}$, ainsi que des relations (4.26), (4.27) et (4.28), l'expression de $d\tau^2$, (4.29), se réduit à

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (4.30)$$

Dans le cas du photon, et de toute particule de masse nulle, $d\tau^2 = 0$ et par conséquent $E = 0$. L'équation (4.28) se simplifie alors en

$$\frac{1}{B} \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = 0, \quad (4.31)$$

d'où on tire une expression pour \dot{r}^2

$$\dot{r}^2 = 1 - \frac{J^2 B}{r^2}, \quad (4.32)$$

d'où

$$\dot{r} = \pm \sqrt{1 - \frac{J^2 B}{r^2}}. \quad (4.33)$$

En divisant (4.33) par (4.27), nous obtenons

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{J^2} - B}. \quad (4.34)$$

Au périlens, c'est à dire lorsque la coordonnée r a atteint sa valeur minimale r_p

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_p} = 0. \quad (4.35)$$

Il s'ensuit une expression pour J

$$J = \frac{r_p}{\sqrt{B(r_p)}}. \quad (4.36)$$

En remplaçant J par son expression (4.36) dans (4.34), on obtient après quelques manipulations simples

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_p} \frac{r}{r+r_p}} \quad (4.37)$$

ou encore

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1}} \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_p} \frac{r}{r+r_p} \right)^{-1/2}. \quad (4.38)$$

Remarquons que la constante cosmologique Λ a complètement disparu de l'expression de $\frac{d\varphi}{dr}$. D'ailleurs, l'expression (4.38) est identique à celle obtenue dans le cadre de la métrique de Schwarzschild. La disparition de la constante cosmologique de l'expression de $\frac{d\varphi}{dr}$ est un simple accident de calcul, qui a été à l'origine de la croyance, longtemps répandue, que la constante cosmologique n'avait pas d'influence sur le phénomène de la déflexion de la lumière [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Cette croyance a été par la suite remise en cause suite aux travaux d'Ishak et Rindler [17], ce qui donna lieu à une grande polémique [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Notons finalement que dans le cas d'une masse non nulle la constante cosmologique ne disparaît pas. Dérivons maintenant une expression pour $\frac{dt}{dr}$. Nous avons en tenant compte des relations (4.26) et (4.27) ainsi que de l'expression (4.38)

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\sqrt{B(r_p)}}{B(r) \sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r^2}}} \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_p} \frac{r}{r+r_p} \right)^{-1/2}. \quad (4.39)$$

Remarquons que dans l'expression de $\frac{dt}{dr}$, (4.39), la constante cosmologique Λ est bien présente. La relation (4.39) constitue le point de départ du calcul du temps de retard dans le cadre de la métrique de Kottler [30]. Notons que d'autres calculs de temps de retard [31] ont été réalisés dans le cadre d'un modèle plus réaliste, en l'occurrence le modèle d'Einstein-Straus [32, 33, 34], résultant du raccordement de la métrique de Kottler à l'intérieur d'une vacuole à la métrique de Friedmann-lemaitre-Robertson-Walker à l'extérieur de la vacuole.

4.3 Métrique de Kottler à l'intérieur de la distribution de matière dans le modèle fluide parfait

Considérons maintenant les équations d'Einstein à l'intérieur de la distribution de matière, supposée statique et à symétrie sphérique. Les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.40)$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie impulsion. Dans le cas d'un fluide parfait $T_{\mu\nu}$ a comme expression

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (4.41)$$

Il est facile de montrer que

$$T_{00} = \rho B(r), \quad (4.42)$$

$$T_{ii} = -P g_{ii}, \quad (4.43)$$

$$T := T^\mu{}_\mu = -3P + \rho. \quad (4.44)$$

En explicitant les équations d'Einstein (4.40), nous obtenons

$$R_{tt} - \frac{1}{2} B R + \Lambda B = -8\pi G \rho B, \quad (4.45)$$

$$R_{rr} + \frac{1}{2} A R - \Lambda A = -8\pi G P A, \quad (4.46)$$

$$-\frac{R_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{1}{2} R + \Lambda = 8\pi G P. \quad (4.47)$$

En faisant usage de l'expression du scalaire de courbure R ,

$$R = \frac{1}{B} R_{tt} - \frac{1}{A} R_{rr} - \frac{2}{r^2} R_{\theta\theta}, \quad (4.48)$$

et en tenant compte des expressions de R_{tt} , (4.7), R_{rr} , (4.8), et $R_{\theta\theta}$, (4.9), en termes de B et de A , les équations (4.45) et (4.46) peuvent être réécrites après quelques manipulations simples comme

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) - \Lambda = 8\pi G \rho \quad (4.49)$$

et

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} + \frac{1}{r A B} \frac{dB}{dr} + \Lambda = 8\pi G P \quad (4.50)$$

respectivement. Ceci d'une part. D'autre part, la conservation du tenseur d'énergie-impulsion se traduit par la nullité de sa dérivée covariante :

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.51)$$

En utilisant la définition de la dérivée covariante, la relation (4.51) peut être réécrite comme

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} T^{\mu\rho} = 0. \quad (4.52)$$

Pour $\nu = t$, la relation (4.52) se réduit, en tenant compte du fait que le tenseur d'énergie-impulsion est diagonal, à

$$\partial_t T^{tt} + \Gamma^\mu{}_{\mu t} T^{tt} + \Gamma^t{}_{\mu\mu} T^{\mu\mu} = 0. \quad (4.53)$$

Mais les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\mu t}$ et $\Gamma^t_{\mu\mu}$ sont tous nuls et la relation (4.53) se simplifie en

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{B} \right) = 0, \quad (4.54)$$

où on a tenu compte de l'expression de T^{tt}

$$T^{tt} = \frac{\rho}{B}. \quad (4.55)$$

Comme B est une fonction de r seul, (4.54) se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.56)$$

Pour $\nu = r$, la relation (4.52) se réduit, en tenant compte du fait que le tenseur d'énergie-impulsion est diagonal, à

$$\begin{aligned} \partial_r T^{rr} + \left(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\varphi_{\varphi r} \right) T^{rr} + \\ \Gamma^r_{tt} T^{tt} + \Gamma^r_{rr} T^{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi} T^{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} \partial_r T^{rr} + \left(\Gamma^t_{tr} + 2\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\varphi_{\varphi r} \right) T^{rr} + \\ \Gamma^r_{tt} T^{tt} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi} T^{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

En tenant compte des expressions des symboles de Christoffel, (4.6), de celle de T^{tt} , (4.55), et également des expressions de T^{rr} , de $T^{\theta\theta}$ et de $T^{\varphi\varphi}$ données respectivement par

$$T^{rr} = -P g^{rr} = \frac{P}{A}, \quad (4.59)$$

$$T^{\theta\theta} = -P g^{\theta\theta} = \frac{P}{r^2}, \quad (4.60)$$

$$T^{\varphi\varphi} = -P g^{\varphi\varphi} = \frac{P}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.61)$$

où on a fait usage de l'expression du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$, (4.4), on obtient finalement

$$\partial_r P + \frac{B'}{2B} (P + \rho) = 0. \quad (4.62)$$

Pour $\nu = \theta$ et $\nu = \varphi$, on peut vérifier que la relation (4.52) est identiquement satisfaite. Considérons le cas d'un fluide incompressible (étoile de Schwarzschild) caractérisé par $\rho = \text{cste}$ et $P = P(r)$. La relation (4.62) peut alors être réécrite comme

$$\partial_r (P + \rho) + \frac{B'}{2B} (P + \rho) = 0. \quad (4.63)$$

Comme la conservation du tenseur d'énergie-impulsion est une conséquence des équations d'Einstein, l'équation (4.63) est une conséquence des équations d'Einstein (4.45), (4.46) et (4.47). Autrement dit, l'équation (4.63) est une combinaison appropriée des équations d'Einstein (4.45), (4.46) et (4.47). Il est en fait plus avantageux de travailler avec le système d'équations (4.45), (4.46) et (4.63) qu'avec le système d'équations (4.45), (4.46) et (4.47) qui lui est strictement équivalent. Nous allons travailler avec le système d'équations

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) - \Lambda = 8\pi G\rho \quad (4.64)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} + \frac{1}{r AB} \frac{dB}{dr} + \Lambda = 8\pi GP \quad (4.65)$$

obtenues respectivement à partir de (4.45) et (4.46) après quelques manipulations simples, et

$$\partial_r (P + \rho) + \frac{B'}{2B} (P + \rho) = 0. \quad (4.66)$$

En multipliant (4.64) par r^2 , on aboutit à

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) + 1 - (\Lambda + 8\pi G\rho) r^2 = 0, \quad (4.67)$$

qui s'intègre en

$$-\frac{r}{A} + r - \frac{1}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho) r^3 = Cste, \quad (4.68)$$

La constante $Cste$ est déterminée en évaluant (4.68) pour $r = R$ et en imposant à $A(r)$ d'être continue sur la sphère $r = R$. La continuité de $A(r)$ en $r = R$ implique que

$$A(R) = \left(1 - \frac{2GM}{R} - \frac{1}{3} \Lambda R^2 \right)^{-1}. \quad (4.69)$$

En tenant compte de la relation liant la masse M à la densité ρ et au rayon R de la distribution de matière

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

la relation (4.69) se réduit à

$$A(R) = \left(1 - \frac{1}{3} (8\pi G\rho + \Lambda) R^2 \right)^{-1}. \quad (4.70)$$

En évaluant maintenant (4.68) pour $r = R$ et en tenant compte de (4.70), on aboutit à

$$-R \left(1 - \frac{1}{3} (8\pi G\rho + \Lambda) R^2 \right) + R - \frac{1}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho) R^3 = Cste, \quad (4.71)$$

d'où on déduit que $Cste = 0$. Il s'ensuit que

$$-\frac{r}{A} + r - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho)r^3 = 0, \quad (4.72)$$

d'où l'expression de $A(r)$

$$A(r) = \left(1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho)r^2\right)^{-1}, \quad (4.73)$$

Si on pose, en suivant les notations de Schücker [35],

$$w(r) := \sqrt{1 - \gamma r^2}, \quad (4.74)$$

avec

$$\gamma := \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho), \quad (4.75)$$

alors $A(r)$ peut être mis sous la forme

$$A(r) = \frac{1}{w^2}. \quad (4.76)$$

Considérons maintenant l'équation (4.63) qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{(\rho + P)'}{(\rho + P)} = -\frac{1}{2} \frac{B'}{B} \quad (4.77)$$

ou

$$\frac{d}{dr} \log(\rho + P) = -\frac{1}{2} \frac{d \log B}{dr}, \quad (4.78)$$

qui s'intègre en

$$\log(\rho + P) = \log B^{-1/2} + Cste, \quad (4.79)$$

ou encore

$$(\rho + P) = Cste' \frac{1}{\sqrt{B}}. \quad (4.80)$$

De nouveau la constante d'intégration $Cste'$ est déterminée en évaluant (4.80) en $r = R$ et en imposant à la pression $P(r)$ d'être continue sur la sphère $r = R$. Comme la pression à l'extérieur de la distribution est identiquement nulle, l'exigence de continuité de la pression $P(r)$ implique que cette dernière doit être également nulle sur la surface de la sphère de distribution de matière $r = R$. Donc,

$$P(R) = 0. \quad (4.81)$$

Par conséquent, en reportant dans (4.80)

$$\rho + P(R) = \rho = Cste' \frac{1}{\sqrt{B(R)}},$$

d'où la valeur de la constante $Cste'$

$$Cste' = \rho \sqrt{B(R)}. \quad (4.82)$$

Il s'ensuit que

$$Cste' = \rho \sqrt{B(R)}. \quad (4.83)$$

Par conséquent

$$\rho + P(r) = \rho \frac{\sqrt{B(R)}}{\sqrt{B(r)}},$$

d'où l'expression de $P(r)$ en terme de $B(r)$

$$P(r) = \rho \left(\frac{\sqrt{B(R)}}{\sqrt{B(r)}} - 1 \right). \quad (4.84)$$

Mais

$$B(R) = \frac{1}{A(R)} = 1 - \frac{1}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho) R^2 = w(R)^2 = K^2,$$

où, en suivant toujours les notations de Schücker [35], on a posé

$$K := w(R), \quad (4.85)$$

ce qui permet de réécrire (4.84) sous la forme

$$P(r) = \rho \left(\frac{K}{\sqrt{B(r)}} - 1 \right). \quad (4.86)$$

Remplaçons maintenant $A(r)$ et $P(r)$ par leurs expressions respectives (4.76) et (4.86) dans (4.65). Nous obtenons

$$\frac{1}{r} w(r)^2 \frac{B'(r)}{B(r)} - \gamma + (\Lambda + 8\pi G\rho) - \frac{8\pi G\rho K}{\sqrt{B(r)}} = 0,$$

ou, en faisant usage de la définition de γ , (4.75),

$$\frac{1}{r} w(r)^2 \frac{B'(r)}{B(r)} + 2\gamma - \frac{8\pi G\rho K}{\sqrt{B(r)}} = 0. \quad (4.87)$$

En multipliant (4.87) par $\sqrt{B(r)}$, on arrive à

$$\frac{1}{r}w(r)^2 \frac{B'(r)}{\sqrt{B(r)}} + 2\gamma\sqrt{B(r)} - 8\pi G\rho K = 0. \quad (4.88)$$

Mais

$$\frac{B'(r)}{\sqrt{B(r)}} = \frac{d}{dr} \left(2\sqrt{B(r)} \right),$$

ce qui nous permet de mettre l'équation (4.88) sous la forme

$$\frac{1}{r}w(r)^2 \frac{d}{dr} 2\sqrt{B(r)} + 2\gamma\sqrt{B(r)} = 8\pi G\rho K, \quad (4.89)$$

qui est une équation différentielle du premier ordre pour \sqrt{B} avec second membre. Comme il est bien connu, la solution générale de (4.89) est la somme de la solution générale de (4.89) sans second membre et d'une solution particulière de (4.89) avec second membre. Il est clair que (4.89) admet une solution particulière sous forme de constante.

$$\sqrt{B(r)} = C.$$

Pour déterminer la constante C remplaçons dans (4.89). On obtient

$$2\gamma C = 8\pi G\rho K,$$

d'où

$$C = \frac{8\pi G\rho K}{2\gamma} = \alpha K,$$

où, de nouveau nous avons posé, en accord avec les notations de Schücker, [35],

$$\alpha := \frac{8\pi G\rho}{2\gamma}. \quad (4.90)$$

Donc

$$\sqrt{B(r)} = \alpha K, \quad (4.91)$$

est une solution particulière de (4.89). Considérons maintenant la solution générale de

$$\frac{1}{r}w(r)^2 \frac{d}{dr} 2\sqrt{B(r)} + 2\gamma\sqrt{B(r)} = 0. \quad (4.92)$$

Mais

$$2\gamma = -\frac{1}{r} \frac{dw^2}{dr},$$

ce qui nous permet de réécrire (4.92) sous la forme

$$\frac{1}{r}w(r)^2 \frac{d}{dr} 2\sqrt{B(r)} - \frac{1}{r} \frac{dw^2}{dr} \sqrt{B(r)} = 0, \quad (4.93)$$

qu'on peut aussi réécrire, en multipliant par $\frac{r}{2w^2\sqrt{B}}$, comme

$$\frac{\frac{d}{dr} \sqrt{B(r)}}{\sqrt{B(r)}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{dw^2}{dr}}{w^2}, \quad (4.94)$$

ou encore

$$\frac{d}{dr} \log \sqrt{B(r)} = \frac{1}{2} \frac{d \log w^2}{dr}, \quad (4.95)$$

qui s'intègre en

$$\log \sqrt{B(r)} = \log w(r) + Cste, \quad (4.96)$$

ou

$$\sqrt{B(r)} = Cste' w(r). \quad (4.97)$$

La solution générale de (4.89) est donc

$$\sqrt{B(r)} = Cste' w(r) + \alpha K. \quad (4.98)$$

Pour déterminer la constante d'intégration $Cste'$, on évalue la relation précédente pour $r = R$ en faisant de nouveau usage de la condition aux limites $\sqrt{B(R)} = K$, ce qui donne

$$K = (Cste' + \alpha)K,$$

d'où

$$Cste' = 1 - \alpha = \frac{-\frac{1}{6}8\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3}}{\gamma},$$

En suivant les mêmes notations que ceux de Schücker [35], on définit le paramètre β comme

$$\beta := 1 - \alpha = \frac{-\frac{1}{6}8\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3}}{\gamma}, \quad (4.99)$$

et $\sqrt{B(r)}$, (4.98), s'écrit, en tenant compte des conditions aux limites, comme

$$\sqrt{B(r)} = \beta w(r) + \alpha K, \quad (4.100)$$

ou

$$B(r) = (\beta w(r) + \alpha K)^2, \quad (4.101)$$

En substituant à $B(r)$ son expression, (4.101), dans celle de $P(r)$, (4.86), on obtient pour expression finale de $P(r)$

$$P(r) = \rho \left(\frac{K}{\beta w + \alpha K} - 1 \right). \quad (4.102)$$

Les expressions de $A(r)$, (4.76), $B(r)$, (4.101), et $P(r)$, (4.102), ainsi obtenues sont identiques à ceux obtenues par Schücker [35] et d'autres auteurs [36, 37].

Dans le cas où $\Lambda = 0$, c'est à dire en l'absence de constante cosmologique, les paramètres γ , (4.75), α , (4.90), et β , (4.99), se réduisent à

$$\gamma = \frac{1}{3}8\pi G\rho, \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}8\pi G\rho}{\frac{1}{3}8\pi G\rho} = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{-\frac{1}{6}8\pi G\rho}{\frac{1}{3}8\pi G\rho} = -\frac{1}{2}, \quad (4.103)$$

et les expressions de $A(r)$, (4.76), $B(r)$, (4.101), et $P(r)$, (4.102), se simplifient respectivement en

$$A(r) = \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho r^2 \right)^{-1}, \quad (4.104)$$

$$B(r) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho R^2 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho r^2 \right)^{1/2}, \quad (4.105)$$

$$P(r) = \rho \left(\frac{- \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho R^2 \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho r^2 \right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho R^2 \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{1}{3}8\pi G\rho r^2 \right)^{1/2}} \right). \quad (4.106)$$

4.4 Equations de la géodésique à l'intérieur de la distribution de matière dans le modèle fluide parfait

En utilisant les expressions des symboles de Christoffel, (4.6), et en tenant compte des expressions de $A(r)$, (4.73), et de $B(r)$, (4.101), les équations de la géodésique

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0$$

s'écrivent

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (4.107)$$

$$\ddot{r} + \frac{B'(r)}{2A(r)} \dot{t}^2 + \frac{A'(r)}{2A(r)} \dot{r}^2 - \frac{r}{A(r)} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.108)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (4.109)$$

Une première intégration des équations de la géodésique (4.107) et (4.109), donne respectivement

$$\dot{t} = \frac{1}{B(r)}, \quad (4.110)$$

et

$$\dot{\varphi} = \frac{D}{r^2}, \quad (4.111)$$

où D est une constante d'intégration. En remplaçant ensuite \dot{t} et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions respectives (4.110) et (4.111) dans (4.108) et en intégrant, on obtient

$$A(r) \dot{r}^2 - \frac{1}{B(r)} + \frac{D^2}{r^2} = -E, \quad (4.112)$$

où E est une constante d'intégration. Dans le cas où on s'intéresse à la géodésique du photon, c'est à dire au cas sans masse, $E = 0$ et (4.112) se réduit à

$$A(r) \dot{r}^2 - \frac{1}{B(r)} + \frac{D^2}{r^2} = 0 \quad (4.113)$$

ou

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{A(r)B(r)} - \frac{D^2}{r^2 A(r)}. \quad (4.114)$$

En divisant (4.114) par le carré de (4.111), on obtient

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2}{A(r)B(r)} \left(\frac{r^2}{D^2} - B(r)\right), \quad (4.115)$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = \pm \frac{r}{\sqrt{A(r)B(r)}} \left(\frac{r^2}{D^2} - B(r)\right)^{1/2}. \quad (4.116)$$

On peut réécrire (4.115) sous la forme

$$\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} = \frac{1}{A(r)} \left(\frac{r^2}{B(r)D^2} - 1\right). \quad (4.117)$$

Si on définit

$$C := \left(R \frac{d\varphi}{dr}(R)\right)^{-2}, \quad (4.118)$$

alors

$$C = \frac{1}{A(R)} \left(\frac{R^2}{B(R)D^2} - 1\right),$$

ce qui nous permet de tirer une expression de D en terme de C et d'éliminer ainsi la constante d'intégration D dans (4.117). Nous obtenons ainsi :

$$\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} = \frac{1}{A(r)} \left(\frac{r^2}{R^2} \frac{1}{B(r)} (C + B(R)) - 1 \right). \quad (4.119)$$

Développons le membre de droite de (4.119). Développons pour cela l'expression de $B(r)$, (4.101). Nous avons à des termes d'ordre deux inclus :

$$\begin{aligned} B(r) = & 1 + \frac{1}{6}8\pi G\rho r^2 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{1}{2}8\pi G\rho R^2 + \\ & \frac{1}{48}(8\pi G\rho r^2)^2 - \frac{1}{24}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda r^2) + \\ & \frac{1}{48}(8\pi G\rho R^2)^2 - \frac{1}{24}(8\pi G\rho R^2)(\Lambda R^2) - \\ & \frac{1}{24}(8\pi G\rho r^2)(8\pi G\rho R^2) + \frac{1}{12}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2). \end{aligned} \quad (4.120)$$

On en déduit le développement de $1/B(r)$ à des termes d'ordre deux inclus

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(r)} = & 1 - \frac{1}{6}8\pi G\rho r^2 + \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{1}{2}8\pi G\rho R^2 + \\ & \frac{1}{144}(8\pi G\rho r^2)^2 - \frac{5}{72}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda r^2) + \\ & \frac{11}{48}(8\pi G\rho R^2)^2 + \frac{1}{24}(8\pi G\rho R^2)(\Lambda R^2) - \\ & \frac{1}{8}(8\pi G\rho r^2)(8\pi G\rho R^2) + \frac{1}{4}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2) + \frac{1}{9}(\Lambda r^2)^2 \end{aligned} \quad (4.121)$$

En remplaçant $A(r)$ et $B(R)$ par leurs expressions respectives (4.76) et

$$B(R) = \frac{1}{A(R)} = 1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho) R^2, \quad (4.122)$$

dans (4.119), on obtient

$$\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} = \left(1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho) R^2\right) \left(\frac{r^2}{R^2} \frac{1}{B(r)} \left(C + 1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho) R^2\right) - 1\right). \quad (4.123)$$

En remplaçant ensuite $1/B(r)$ par son développement jusqu'à l'ordre deux inclus, (4.121), dans (4.123), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} &= \left(1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho) R^2\right) \left[\frac{r^2}{R^2} \left(C + 1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho) R^2\right) \right. \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{6}8\pi G\rho r^2 + \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{1}{2}8\pi G\rho R^2 + \frac{1}{144}(8\pi G\rho r^2)^2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{5}{72}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda r^2) + \frac{11}{48}(8\pi G\rho R^2)^2 + \frac{1}{24}(8\pi G\rho R^2)(\Lambda R^2) - \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{8}(8\pi G\rho r^2)(8\pi G\rho R^2) + \frac{1}{4}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2) + \frac{1}{9}(\Lambda r^2)^2\right) - 1 \right].
\end{aligned} \tag{4.124}$$

En développant (4.124), en ne retenant que les termes jusqu'à l'ordre deux inclus et en regroupant les termes selon les différents ordres, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} &= -1 + \frac{r^2}{R^2}(C + 1) + \\
&\quad \frac{1}{2}(C + 1) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) (8\pi G\rho r^2) + \\
&\quad \frac{1}{8} \left[-\frac{7}{3}C - 1 + \frac{1}{2}(C + 1) \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{3}C + 1\right) \frac{R^2}{r^2} \right] (8\pi G\rho r^2)^2 + \\
&\quad \frac{1}{4} \left[\frac{1}{6}(C - 3) + \frac{1}{3}(C + 3) \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2}(C + 1) \frac{r^4}{R^4} \right] (8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2).
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Dans (4.125), la première ligne correspond aux termes d'ordre zéro, la deuxième ligne aux termes d'ordre un (terme en $8\pi G\rho r^2$ et les troisième et quatrième lignes aux termes d'ordre deux (termes en $(8\pi G\rho r^2)^2$ et en $(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2)$ respectivement). Il vaut ici la peine de noter que contrairement à la solution extérieure, la constante cosmologique apparaît ici explicitement dans l'expression de $\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2}$, (4.125), à l'occasion de termes du second ordre (termes en $(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2)$). Il vaut la peine de noter que nous retrouvons exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par Schücker, [35].

4.5 Métrique de Kottler à l'intérieur de la distribution de matière : cas général

En fait, on peut montrer que le tenseur d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ le plus général correspondant au cas statique à symétrie sphérique est de la forme

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{B} & q & 0 & 0 \\ q & \frac{P_r}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_a}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P_a}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (4.126)$$

où ρ , P_r , P_a et q sont des fonctions de r uniquement. Le fait que le tenseur de Ricci n'admette que des composantes diagonales implique que la fonction q doit s'annuler. Si on considère le cas d'un fluide incompressible, ρ doit alors être constant. Le tenseur d'énergie-impulsion, (4.126), se simplifie alors en

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_r(r)}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_a(r)}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P_a(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.127)$$

Nous avons donc ici deux pressions : une pression dite radiale P_r et une pression dite azimuthale P_a . En exigeant de nouveau que la dérivée covariante du tenseur d'énergie-impulsion s'annule

$$D_\mu T^{\mu\nu} := \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} T^{\mu\lambda} = 0. \quad (4.128)$$

Pour $\nu = t, \theta, \varphi$, on obtient respectivement

$$\partial_t \rho = 0, \quad (4.129)$$

$$\partial_\theta P_a = 0, \quad (4.130)$$

$$\partial_\varphi P_a = 0, \quad (4.131)$$

qui sont identiquement satisfaites vu que ρ ne dépend pas de t et que P_a ne dépend ni de θ , ni de φ . Pour $\nu = r$, (4.128) donne

$$P'_r + \frac{B'}{2B} (P_r + \rho) + 2 \frac{P_r - P_a}{r} = 0. \quad (4.132)$$

Donc si on compare au cas avec une seule pression $P_r = P_a = P$, l'équation (4.64) demeure inchangée. Dans l'équation (4.65), il faut juste remplacer P par la pression radiale P_r .

Finalement, l'équation (4.63) doit être remplacée par (4.132). Autrement dit, on doit considérer le système d'équations

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (4.133)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} + \frac{1}{rAB} \frac{dB}{dr} + \Lambda = 8\pi GP_r \quad (4.134)$$

et

$$P_r' + \frac{B'}{2B} (P_r + \rho) + 2 \frac{P_r - P_a}{r} = 0. \quad (4.135)$$

L'expression de $A(r)$ sera donc identique à celle obtenue précédemment (4.104) Nous avons donc ici trois fonctions de r à déterminer : $B(r)$, $P_r(r)$ et $P_a(r)$, mais nous ne disposons que de deux équations (4.134) et (4.135). Nous devons donc nous donner une relation entre les deux paramètres P_r et P_a . Pour illustrer la procédure à suivre, considérons une relation du type

$$P_a = bP_r, \quad (4.136)$$

où b est une constante. L'équation (4.132) se réduit dans ce cas à

$$P_r' + \left[\frac{B'}{2B} + \frac{2(1-b)}{r} \right] P_r = -\frac{B'}{2B} \rho \quad (4.137)$$

Considérons la solution générale de l'équation sans second membre

$$P_r' + \left[\frac{B'}{2B} + \frac{2(1-b)}{r} \right] P_r = 0, \quad (4.138)$$

qu'on peut également mettre sous la forme

$$\frac{P_r'}{P_r} = - \left[\frac{B'}{2B} + \frac{2(1-b)}{r} \right], \quad (4.139)$$

qui s'intègre en

$$\log P_r = \log B^{-1/2} + \log r^{-2(1-b)} + Cste, \quad (4.140)$$

ou en prenant l'exponentiel des deux membres

$$P_r = Cste' B^{-1/2} r^{-2(1-b)}. \quad (4.141)$$

$Cste$ et $Cste'$ sont des constantes d'intégration. Cherchons maintenant une solution particulière de (4.137) avec second membre. Pour cela, utilisons la méthode de la variation de la constante. Ceci revient à chercher une solution sous la forme

$$P_r = E(r) B^{-1/2} r^{-2(1-b)}. \quad (4.142)$$

En remplaçant dans (4.137), on aboutit à une équation différentielle du premier ordre pour $E(r)$

$$\frac{dE(r)}{dr} = -\frac{dB}{dr} r^{-2(b-1)} \rho, \quad (4.143)$$

qui s'intègre en

$$E(r) = -\rho \int^r \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr'. \quad (4.144)$$

Il s'ensuit que la solution générale de (4.137) est donnée par

$$P_r = Cste' B^{-1/2}(r) r^{-2(1-b)} - \rho \int^r \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr' B^{-1/2}(r) r^{-2(1-b)}. \quad (4.145)$$

Pour déterminer la constante $Cste'$, on impose à $P_r(r)$ d'être continue sur la sphère $r = R$, ce qui donne

$$Cste' = \rho \int^R \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr'. \quad (4.146)$$

Il en résulte une expression de P_r en terme de $B(r)$

$$P_r(r) = \rho \left(\int^R \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr' - \int^r \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr' \right) B^{-1/2}(r) r^{-2(1-b)} \quad (4.147)$$

En remplaçant $P_r(r)$ par son expression en terme de $B(r)$, (4.147), dans (4.134), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} + \frac{1}{rAB} \frac{dB}{dr} + \Lambda &= 8\pi G\rho \left(\int^R \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr' - \right. \\ &\quad \left. \int^r \frac{dB(r')}{2B^{1/2}(r')} r'^{-2(b-1)} dr' \right) B^{-1/2}(r) r^{-2(1-b)}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

L'équation (4.148) est une équation intégro-différentielle pour $B(r)$, dont la résolution doit se faire numériquement. Une fois la solution numérique pour $B(r)$ obtenu, on obtiendra une expression, également numérique, pour $P_r(r)$ grâce à (4.147). On peut vérifier que pour $b = 1$, on retrouve, comme il se doit, les expressions (4.101) et (4.102) respectivement pour $B(r)$ et $P(r)$.

Conclusion

Nous nous sommes attelés dans ce travail de mémoire de magister à redériver, dans le cadre de la Relativité Générale d'Einstein, certaines métriques d'espace-temps. Ces métriques sont intéressantes, notamment du point de vue de l'usage dont on fait en cosmologie. Nous avons considéré les métriques correspondant à la symétrie maximale, à la base du modèle standard de cosmologie. La symétrie maximale stipule que l'espace est homogène et isotrope autour de chaque point d'espace. Autrement dit, tous les points d'espace et toutes les directions autour de chaque point d'espace jouent le même rôle. L'exigence de la symétrie maximale mène à la métrique de Friedmann-LeMaître-Robertson-Walker (métrique FRLW) dans ses trois versions plate, sphérique et pseudo-sphérique. On distingue également les cas avec ou sans constante cosmologique Λ . Nous avons également considéré des métriques statiques et à symétrie sphérique : Les métriques de Schwarzschild, sans constante cosmologique, et de Kottler ou Schwarzschild-de Sitter, en présence d'une constante cosmologique. Nous avons distingué les solutions extérieures et intérieures (à l'extérieur et à l'intérieur de la distribution de matière).

Notre travail s'est effectué en deux étapes. Dans une première étape, nous avons déterminé la forme la plus générale de la métrique satisfaisant à des symétries données. Pour ce faire, nous avons fait usage de la méthode de Killing, qui constitue un outil rigoureux et élégant pour implémenter les symétries. À chaque transformation continue est associé un champ vectoriel de Killing. L'invariance sous la transformation continue en question impliquant alors des équations que doivent satisfaire les composantes du tenseur métrique : C'est l'équation de Killing pour la métrique. Dans cette première étape, aucune référence n'est faite à la dynamique. Seule la cinématique de la Relativité Générale est utilisée.

Une fois déterminée la forme la plus générale d'une métrique satisfaisant à des symétries données, nous avons dans une deuxième étape parachevé la détermination du tenseur métrique. Pour arriver à nos fins, nous avons utilisé les équations d'Einstein. Pour ce faire, nous avons besoin de connaître le tenseur d'énergie impulsion. À défaut de connaître ce dernier, nous avons adopté des formes plus ou moins justifiées pour ce dernier. Nous avons en particulier considéré le modèle du fluide parfait. Dans le cas statique à symétrie sphérique, nous avons considéré en outre une forme plus générale du tenseur énergie impulsion. Nous avons alors ramené le problème à la résolution d'une équation intégral-différentielle,

que nous n'avons pas résolu.

L'usage de la méthode de Killing pour imposer des symétries qui est facultative dans le cadre de la Relativité Générale d'Einstein, devient obligatoire dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan, lorsque on veut imposer des symétries à la connexion métrique. En plus de la condition de métricité, la connexion métrique doit, pour respecter certaines symétries, satisfaire à des équations de Killing, similaires aux équations de Killing pour la métrique, une équation pour chaque symétrie respectée. Si on veut considérer par la suite la théorie d'Einstein-Cartan, alors le travail effectué dans ce mémoire de magister aura constitué une bonne préparation.

Il nous reste également à essayer de résoudre numériquement l'équation intégro-différentielle, qui a résulté de l'utilisation de la forme la plus générale pour le tenseur d'énergie impulsion respectant les symétries du problème dans le cas statique à symétrie sphérique.

Annexe A

La métrique est invariante sous les rotations autour de l'axe oy si les relations suivantes, dans un système de coordonnées sphériques, sont satisfaites

$$\left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\mu} g_{\theta\nu} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\mu} g_{\varphi\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\nu} g_{\mu\theta} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\nu} g_{\mu\varphi} = 0, \quad (149)$$

avec

$$\xi^\theta = \cos \varphi, \quad \xi^\varphi = -\sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (150)$$

En tenant compte du fait que $\partial g_{\mu\nu} / \partial \varphi = 0$, relation qui traduit l'invariance sous les rotations autour de l'axe oz , (149) se simplifie en

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\mu} g_{\theta\nu} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\mu} g_{\varphi\nu} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial x^\nu} g_{\mu\theta} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x^\nu} g_{\mu\varphi} = 0. \quad (151)$$

Explicitons la condition (151) pour les différentes valeurs de μ et de ν . Pour $\mu = \nu = t$ et $\mu = t, \nu = r$ la relation (151) se simplifie respectivement en

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{tt} = 0, \quad (152)$$

et

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{tr} = 0, \quad (153)$$

ce qui signifie que g_{tt} et g_{tr} sont indépendants de θ . Considérons maintenant $\mu = t, \nu = \theta$, la relation (151) se réduit alors à

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} g_{t\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{t\varphi} = 0. \quad (154)$$

Il est clair que la relation (154) ne peut être satisfaite que si $\frac{\partial}{\partial \theta} g_{t\theta}$ et $g_{t\varphi}$ sont séparément nuls :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g_{t\theta} = 0, \quad g_{t\varphi} = 0. \quad (155)$$

En exigeant que la condition (151) soit satisfaite pour $\mu = t$, $\nu = \varphi$, nous obtenons

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{t\varphi} - \sin \varphi g_{t\theta} - \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g_{t\varphi} = 0, \quad (156)$$

qui, compte tenu de (155), implique que

$$g_{t\theta} = 0. \quad (157)$$

Donc, pour résumer, nous sommes arrivés jusqu'ici aux conclusions

$$g_{tt} = g_{tt}(t, r), \quad g_{tr} = g_{tr}(t, r), \quad g_{t\theta} = 0, \quad g_{t\varphi} = 0. \quad (158)$$

La relation (151) donne pour $\mu = \nu = r$

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{rr} = 0, \quad (159)$$

qui signifie que g_{rr} est indépendant de θ , c'est à dire est uniquement fonction de t et de r

$$g_{rr} = g_{rr}(t, r), \quad (160)$$

et donne pour $\mu = \nu = \theta$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} g_{\theta\theta} + 2 \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\theta\varphi} = 0, \quad (161)$$

qui ne peut être satisfaite que si

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g_{\theta\theta} = 0, \quad g_{\theta\varphi} = 0 \quad (162)$$

ou

$$g_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}(t, r), \quad g_{\theta\varphi} = 0. \quad (163)$$

En tenant compte de (163), (151) s'écrit pour $\mu = \nu = \varphi$ comme

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g_{\varphi\varphi} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g_{\varphi\varphi} = 0, \quad (164)$$

qui s'intègre facilement en

$$g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta C(t, r), \quad (165)$$

où $C(t, r)$ est une fonction arbitraire de t et de r . Imposons maintenant la condition (151) pour $\mu = r, \nu = \theta$. Nous obtenons

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} g_{r\theta} + 2 \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{r\varphi} = 0, \quad (166)$$

qui ne peut satisfaite que si

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g_{r\theta} = 0, \quad g_{r\varphi} = 0, \quad (167)$$

ou

$$g_{r\theta} = g_{r\theta}(t, r), \quad g_{r\varphi} = 0. \quad (168)$$

L'équation (151) pour $\mu = r, \nu = \varphi$ s'écrit comme

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{r\varphi} - \sin \varphi g_{r\theta} - \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g_{r\varphi} = 0, \quad (169)$$

qui, compte tenu de (168), se réduit à

$$g_{r\theta} = 0. \quad (170)$$

Il nous reste à imposer la condition d'invariance (151) pour $\mu = \theta, \nu = \varphi$, ce qui donne

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} g_{\theta\varphi} + \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta} g_{\varphi\varphi} - \sin \varphi g_{\theta\theta} - \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g_{\theta\varphi} = 0, \quad (171)$$

qui en tenant compte du fait que $g_{\theta\varphi} = 0$, (163), se simplifie en une relation algébrique entre $g_{\theta\theta}$ et $g_{\varphi\varphi}$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\varphi\varphi}, \quad (172)$$

qui compte tenu de (165) donne

$$g_{\theta\theta} = C(t, r). \quad (173)$$

Résumons nos trouvailles. l'invariance sous les rotations nous a imposé les contraintes suivantes, (158), (160) (163), (165), (168), (170), (173), :

$$\begin{aligned} g_{tt} = g_{tt}(t, r), \quad g_{tr} = g_{tr}(t, r), \quad g_{rr} = g_{rr}(t, r), \quad g_{\theta\theta} = C(t, r), \quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta C(t, r), \\ g_{t\theta} = 0, \quad g_{t\varphi} = 0, \quad g_{r\theta} = 0, \quad g_{r\varphi} = 0, \quad g_{\theta\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (174)$$

Il est facile de voir qu'il est toujours possible, sans perte de généralité, et ce pour faire le contact avec les notations de la partie principale du manuscrit, d'adopter la paramétrisation suivante pour les composantes non nulles du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} g_{tt} = g_{tt}(t, r), \quad g_{tr} = \tilde{F}(t, r), \quad g_{rr} = \tilde{G}(t, r), \\ g_{\theta\theta} = r^2 \tilde{H}(t, r), \quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta r^2 \tilde{H}(t, r). \end{aligned} \quad (175)$$

Annexe B

Prenons comme point de départ la forme la plus générale d'un tenseur métrique correspondant au cas isotrope, c'est à dire invariant par rotation. Nous avons, sous forme matricielle, dans un système de coordonnées cartésiennes

$$\begin{pmatrix} g_{00} & xF & yF & zF \\ xF & x^2G + H & xyG & xzG \\ yF & xyG & y^2G + H & yzG \\ zF & xzG & yzG & z^2G + H \end{pmatrix}, \quad (176)$$

où g_{00} , F , G et H sont à priori des fonctions de t et de $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Imposons maintenant à la métrique d'être invariante sous les quasi-translations, en distinguant les deux cas sphérique et pseudosphérique. Considérons le cas pseudo-sphérique. Pour garantir l'invariance de la métrique sous les quasi-translations, il suffit d'imposer l'invariance de la métrique sous les quasi-translations selon les trois axes ox , oy et oz , qui se traduisent respectivement par les équations suivantes :

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\mu} g_{1\nu} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 1} = 0, \quad (177)$$

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\mu} g_{2\nu} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 2} = 0, \quad (178)$$

et

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\mu} g_{3\nu} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 3} = 0. \quad (179)$$

Nous avons en dérivant

$$\frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+r^2}}, \quad (180)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{01}}{\partial x} &= F + \frac{x^2}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial z} = \frac{xz}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{02}}{\partial x} &= \frac{xy}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial y} = F + \frac{y^2}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial z} = \frac{yz}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{03}}{\partial x} &= \frac{xz}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{03}}{\partial y} = \frac{yz}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{03}}{\partial z} = F + \frac{z^2}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{11}}{\partial x} &= 2xG + \frac{x^3}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial y} = \frac{x^2y}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial z} = \frac{x^2z}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{22}}{\partial x} &= \frac{xy^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial y} = 2yG + \frac{y^3}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial z} = \frac{y^2z}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x} &= \frac{xz^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial y} = \frac{yz^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial z} = 2zG + \frac{z^3}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial H}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{12}}{\partial x} &= yG + \frac{x^2y}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial y} = xG + \frac{xy^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial z} = \frac{xyz}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{13}}{\partial x} &= zG + \frac{x^2z}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial y} = \frac{xyz}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{13}}{\partial z} = xG + \frac{xz^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \\
\frac{\partial g_{23}}{\partial x} &= \frac{xyz}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial y} = zG + \frac{y^2z}{r} \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial z} = yG + \frac{yz^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r},
\end{aligned} \tag{181}$$

Grâce à ces résultats, nous pouvons expliciter les contraintes, (177), (178) et (179), imposées par l'invariance sous les pseudo-translations. Nous avons en faisant $\mu = 0$ et $\nu = 0$ dans (177), (178) et (179)

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{10} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{01} = 0, \tag{182}$$

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{20} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{02} = 0, \tag{183}$$

et

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial z} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{30} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{03} = 0. \tag{184}$$

Comme $\frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} = 0$, les équations (182), (183) et (184) se simplifient en

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x} = 0, \tag{185}$$

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial y} = 0, \tag{186}$$

et

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{00}}{\partial z} = 0, \tag{187}$$

ce qui signifie que g_{00} ne peut dépendre ni de x , ni de y , ni de z , et par conséquent, g_{00} , qui est à priori une fonction de t et de r , ne dépend en fait que de t . Faisons maintenant $\mu = 0$ et $\nu = 1$ dans (177). Nous avons

$$\sqrt{1+r^2} \frac{\partial g_{01}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial t} g_{11} + \frac{\partial \sqrt{1+r^2}}{\partial x} g_{01} = 0, \quad (188)$$

qui en tenant compte de l'expression de g_{01} et de (180) et (181) se simplifie en

$$\sqrt{1+r^2} \left(F + \frac{x^2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{x}{\sqrt{1+r^2}} x F = 0, \quad (189)$$

ou en multipliant par $\sqrt{1+r^2}$ et en réorganisant les termes

$$F + x^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{1+r^2} \right) = 0. \quad (190)$$

Comme il est clair que nous pouvons toujours considérer x et r comme deux variables indépendantes, la relation (190) ne peut être satisfaite que si les coefficients des deux termes, le terme indépendant de x et celui en x^2 s'annulent simultanément, ce qui donne

$$F = 0 \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{1+r^2} = 0.$$

Il est clair que $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{1+r^2} = 0$ est satisfaite si $F = 0$. Par conséquent, (190) est réalisée si

$$F = 0. \quad (191)$$

On vérifie facilement que si $F = 0$ les conditions d'invariance sous les quasi-translations le long des axes oy et oz pour $\mu = 0$, $\nu = 1$ se trouvent satisfaites. Il en est de même pour les conditions d'invariance sous les quasi-translations le long des axes ox , oy et oz pour $\mu = 0$ et $\nu = 2, 3$. Imposons maintenant la condition d'invariance sous les quasi-translations le long de l'axe ox pour $\mu = \nu = 1$, qui s'écrit, en tenant compte de (180) et (181), comme

$$\sqrt{1+r^2} \left(2xG + \frac{x^3}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{2x}{\sqrt{1+r^2}} (x^2G + H) = 0, \quad (192)$$

ou, en multipliant par $\sqrt{1+r^2}$ et en réorganisant les termes selon les puissances de x ,

$$x \left(2G + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2H}{1+r^2} \right) + x^3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2G}{1+r^2} \right) = 0. \quad (193)$$

On peut toujours considérer que x et $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sont deux variables indépendantes. Il s'ensuit que pour que (193) soit satisfaite $\forall x$, il faudrait que les deux facteurs devant x et x^3 soient séparément nuls, ce qui se traduit par les deux équations

$$2G + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2H}{1+r^2} = 0 \quad (194)$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2G}{1+r^2} = 0. \quad (195)$$

L'équation (195) s'intègre en

$$G = \frac{E}{1+r^2} = 0, \quad (196)$$

où E est une fonction arbitraire du temps.

Exigeons maintenant l'invariance sous les quasi-translations le long de l'axe oy , (178), pour les mêmes valeurs de μ et ν que précédemment : $\mu = \nu = 1$. Nous avons, toujours en tenant compte de (180) et de (181),

$$\sqrt{1+r^2} \left(\frac{x^2 y}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{2x}{\sqrt{1+r^2}} xyG = 0, \quad (197)$$

qui peut être réécrite en divisant par $\sqrt{1+r^2}$ et en regroupant les termes selon les puissances des variables x et y comme

$$y \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + x^2 y \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2G}{1+r^2} \right) = 0. \quad (198)$$

On peut maintenant considérer que x , y et r sont des variables indépendantes, auquel cas la relation (197) ne peut être satisfaite que si les coefficients devant y et $x^2 y$ sont séparément nuls, ce qui donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad (199)$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2G}{1+r^2} = 0. \quad (200)$$

La relation (199) implique que H est uniquement une fonction de t . Quand on combine cette dernière relation avec (194), on obtient une relation entre G et H

$$G(t, r) = -\frac{H(t)}{1+r^2}. \quad (201)$$

Les équations restantes de (177), (178) et (179) n'apportent pas de contraintes supplémentaires. Donc, pour résumer, nous avons les contraintes suivantes sur les fonctions g_{00} , F , G et H , qui garantissent l'invariance sous les quasi-translations dans le cas pseudosphérique.

$$g_{00} = g_{00}(t), \quad F = 0, \quad H = H(t), \quad G(t, r) = -\frac{H(t)}{1+r^2}. \quad (202)$$

Considérons maintenant le cas sphérique. De nouveau, pour garantir l'invariance de la métrique sous les quasi-translations, il suffit d'imposer l'invariance de la métrique sous les

quasi-translations selon les trois axes ox , oy et oz , qui se traduisent respectivement par les équations suivantes :

$$\sqrt{1-r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\mu} g_{1\nu} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 1} = 0, \quad (203)$$

$$\sqrt{1-r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\mu} g_{2\nu} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 2} = 0, \quad (204)$$

et

$$\sqrt{1-r^2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\mu} g_{3\nu} + \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x^\nu} g_{\mu 3} = 0. \quad (205)$$

Nous avons besoin des résultats suivants :

$$\frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \frac{\partial \sqrt{1-r^2}}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (206)$$

ainsi que des résultats (181) obtenus précédemment. les calculs sont quasiment identiques à ceux du cas pseudo-sphérique et donnent les contraintes suivantes pour les fonctions g_{00} , F , G et H

$$g_{00} = g_{00}(t), \quad F = 0, \quad H = H(t), \quad G(t, r) = \frac{H(t)}{1-r^2}. \quad (207)$$

Bibliographie

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons 1972).
- [2] S.Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, New York 2008).
- [3] C. Misner, K. Thorne et A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1977).
- [4] R.Durrer, *Relativité Générale* (Département de Physique Théorique, Université de Genève, Quai E. Ansermet 24,1211 Genève 4, Switzerland 2002, editors : D. Eckert, O.A. Usmani).
- [5] J. Leite-Lopes, *Théorie relativiste de la gravitation* (Masson,Paris, 1993).
- [6] J. Plebański and A Krasinski *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press 2006).
- [7] I. Zouzou, *Géométrie Riemannienne et univers presque symétriques*, thèse de Doctorat d'Etat, université de Constantine, Algérie (2007).
- [8] F. Kottler, Ann. Phys. **361**, 401 (1918).
- [9] A. Tilquin, T.Schücker, Gen. Relativ. Gravit. **43**, 2965 (2011).
- [10] N.J. Islam, Phys. Lett. A **97**, 239 (1983).
- [11] W.H.C. Freire, V.B. Bezerra, J.A.S. Lima, Gen. Relativ. Gravit. **33**, 1407 (2001).
- [12] A.W. Kerr, J.C. Hauck, B. Mashhoon, Class. Quant. Grav. **20**, 2727 (2003).
- [13] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, Phys. Lett. B **634**, 465 (2006).
- [14] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, Phys. Rev. D **75**, 043003 (2007).
- [15] M. Sereno, Ph. Jetzer, Phys. Rev. D **73**, 063004 (2006).
- [16] K. Lake, arXiv :0711.0673.
- [17] W. Rindler, M. Ishak, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).
- [18] M. Sereno, Phys. Rev. D **77**, 043004 (2008).
- [19] M. Sereno, Phys. Rev. Lett. **102**, 021301 (2009).
- [20] T. Schücker, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 67 (2009).

- [21] T. Schücker, arXiv :0805.1630, Moriond Proceedings ‘Cosmology 2008’
- [22] H. Miraghaei, M. Nouri-Zonoz, arXiv :0810.2006.
- [23] R. Kantowski, B. Chen, X. Dai, arXiv :0909.3308v1.
- [24] I.D. Khriplovich, A.A. Pomeransky, Int. J. Mod. Phys. D **17**(12), 2255 (2008).
- [25] M. Park, Phys. Rev. D **78**, 023014 (2008).
- [26] G.W. Gibbons, C.M. Warnick, M.C. Werner, Class. Quant. Grav. **25**, 245009 (2008).
- [27] F. Simpson, J.A. Peacock, A.F. Heavens, arXiv :0809.1819.
- [28] M. Ishak, W. Rindler, W. Dossett, Mon. Not. R. Astron. Soc. DOI :10.1111/j.1365 – 2966.2010.16261.x(2010).
- [29] T. Schücker, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 1595 (2009).
- [30] T. Schücker, N. Zaimen, A & A **484**, 103 (2008).
- [31] Kh. Boudjema, M. Guenouche, S.R. Zouzou, Gen. Relativ. Gravit. **43**, 1707 (2011).
- [32] A. Einstein, E.G. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- [33] A. Einstein, E.G. Straus, Rev. Mod. Phys. **18**, 148 (1946).
- [34] E. Schücking, Z. Phys. **137**, 5 (1954).
- [35] T. Schücker, Gen. Relativ. Gravit. **42**, 1991 (2010).
- [36] Z. Stuchlík, Acta Phys. Slovaca **50**, 219 (2000).
- [37] C. G. Boehmer, Gen. Rel. Grav. **36**, 1039 (2004).

Résumé

Le travail de ce mémoire de magister s'inscrit dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein. Après une courte introduction, suivie d'un exposé de Relativité Générale concis mais complet dans le but de dispenser le lecteur de recourir à un support documentaire externe, nous nous sommes attelés à la redérivation de certaines métriques de Relativité Générale présentant un intérêt évident, en particulier dans le domaine de la cosmologie. Nous avons considéré tour à tour :

La métrique de FLRW, satisfaisant au principe cosmologique, c'est-à-dire correspondant à un univers homogène isotrope, ce qui se traduit par l'invariance sous les rotations et les translations (cas plat), ou sous les rotations et les quasi-translations (cas sphérique et pseudo-sphérique).

La métrique de Schwarzschild, statique et à symétrie sphérique, c'est-à-dire invariante sous les translations temporelles et sous les rotations, sans constante cosmologique.

La métrique de Kottler ou de Schwarzschild-de Sitter, également statique et à symétrie sphérique, mais avec constante cosmologique.

Le travail se fait en deux étapes :

Dans une première étape et pour chacun des cas considérés, nous imposons les symétries correspondantes. La méthode utilisée est celle des vecteurs de Killing, qui est une méthode élégante et rigoureuse pour implémenter les symétries. Les symétries se traduisent par des contraintes sur la forme de la métrique. Dans cette première étape nous ne faisons pas appel aux équations d'Einstein, c'est-à-dire que nous ne faisons pas appel à la dynamique.

Dans une deuxième étape, après avoir déterminé dans l'étape précédente la forme la plus générale d'une métrique satisfaisant à certaines symétries donnée, nous achevons la détermination de la métrique en faisant appel aux équations d'Einstein. A défaut de connaître ce dernier, nous avons adopté des formes plus ou moins justifiées du tenseur d'énergie-impulsion. Nous retrouvons ainsi les métriques de FLRW, de Schwarzschild à l'intérieur et à l'extérieur de la distribution de matière, et de Kottler également à l'intérieur et à l'extérieur de la distribution de matière.

Mots clés

Relativité Générale, cosmologie, métrique, méthode de Killing, symétrie sphérique, principe cosmologique, constante cosmologique, tenseur d'énergie-impulsion.

Abstract

The work of this Magister's memory is in the framework of the General Theory of Relativity of Einstein. After a short introduction, followed by a concise but complete presentation of general relativity in order to dispense the reader to refer to an external document support, we tackled the rederivation of some interesting metrics of General Relativity, especially in the field of cosmology. We considered in turn:

The FLRW metric, satisfying the cosmological principle, that is to say corresponding to a homogeneous isotropic universe, which is reflected by the invariance under rotations and translations (flat case), or under rotations and quasi-translations (spherical and pseudo-spherical cases).

Shwarzshild metric, static and spherically symmetric, that is to say invariant under temporal translations and rotation, in absence of cosmological constant.

The Kottler metric or Schwarzschild-de Sitter, also static and spherically symmetric, but with cosmological constant

The work is done in two steps:

In a first step and for each considered case, we impose the corresponding symmetries. The method used is that of the Killing vectors, which is an elegant and rigorous method to implement symmetries. Symmetries result in constraints on the form of the metric. During this first stage we do not appeal to Einstein's equations, that is to say we do not use dynamics.

In a second step, having determined in the previous step the most general form of a metric satisfying some symmetries, we complete determination of the metric by tacking into account the Einstein equations. To this end, we have conjectured some more or less justified forms for the energy-momentum tensor. In this way, we find the FLRW metric, the Schwarzshild metric inside and outside of the distribution of matter, and also Kottler metric inside and outside of the distribution of matter.

Keywords

General relativity, cosmology, metric, Killing method, spherical symmetry, cosmological principle, the cosmological constant, energy-momentum tensor.

ملخص

يندرج عمل مذكرة الماجستير هذه في اطار نظرية النسبية العامة ل Einstein

بعد مقدمة قصيرة، تلاها عرض موجز لكن مُلمُّ لكل جوانب النسبية العامة كان الهدف منه استغناء القارئ عن اللجوء الى مراجع خارجية، انكبنا عن اعادة اشتقاق بعض متريات النسبية العامة التي تمثل فائدة واضحة، بالخصوص في مجال الكسولوجيا . اعتبرنا على التوالي:

مترية FLRW التي تحقق المبدأ الكسولوجي، الموافق لكون متجانس موحد الخواص، الشئ الذي يترجم بالصمود ازاء عمليات الدوران و الانسحابات (الحالة مستوية) او ازالة عمليات الدوران و شبه الانسحابات (الحالة الكروية) و شبه الكروية.

مترية Schwarzschild ساكنة و ذات تناظر كروي ، اي صامدة ازاء الانسحابات الزمنية و الدورانات ، بدون الثابت الكسولوجي .

مترية Kottler او Schwarzschild-de Sitter الساكنة و ذات التناظر الكروي ، في حضور الثابت الكسولوجي .

العمل يجري في مرحلتين اثنتين .

في مرحلة اولى و من اجل كل حالة معتبرة ، نفرض التناظرات المقابلة . الطريقة المستعملة هي طريقة اشعة Killing التي تشكل طريقة انيقة و دقيقة لفرض التناظرات.

تترجم التناظرات بقيود على شكل المترية . في هذه المرحلة الاولى ، لا نستعين بمعادلات Einstein اي لا نستعين بالديناميكا .

في مرحلة ثانية ، بعد ان نكون قد حددنا في المرحلة السابقة الشكل العام للمترية المحققة لبعض التناظرات ، نكمل تعيين المترية بالاستعانة بمعادلات Einstein . لهذا الغرض نحتاج الى التنسور طاقة-اندفاع . نظرا لعدم معرفتنا لهذا الاخير ، قمنا بتبني اشكال مبررة نوعا ما . نحصل من جديد على مترية FLRW ، مترية Schwarzschild ، داخل و خارج التوزيع المادي ، و مترية Kottler داخل و خارج التوزيع المادي .

الكلمات المفاتيح

النسبية العامة ، الكسولوجيا ، المترية ، طريقة Killing ، تناظر كروي ، المبدأ الكسولوجي ، الثابت الكسولوجي ، تنسور الطاقة-اندفاع