REPUBLIQUE ALGERIE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : ……………

Série : …………………….

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

OPTION : PHYSIQUE QUANTIQUE

THEME

Paramétrisation du Facteur de Croissance dans un Espace Plat

Par

HACENE BOUGUERNE

SOUTENU LE : / / 2013

Devant le jury :

Président :	**S. R. ZOUZOU**	**Prof.**	**Université Constantine 1**
Rapporteur :	**I. ZOUZOU**	**M.C. A.**	**Université Constantine 1**
Examinateurs :	**F. BENAMIRA**	**Prof.**	**Université Constantine 1**
	L. GUECHI	**Prof.**	**Université Constantine 1**
	Kh. BOUDJEMAA	**M. C. A**	**Université de Khenchela**

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à la paramétrisation du facteur de croissance, dans un espace plat, dans le cadre de la relativité générale.
Plusieurs observations cosmologiques, par exemple [1], [2], [3], ont démontrées que l'univers est entré en phase d'expansion accélérée. L'origine de cette accélération cosmique est aujourd'hui l'une des questions les plus importantes ouvertes de la physique. Le premier modèle proposé, pour expliquer l'accélération cosmique dans le cadre de la cosmologie de Robertson-Walker, est une nouvelle composante d'énergie, de nature inconnue et qui constitue le 2/3 du contenu total de l'univers : l'énergie sombre ou noire (Dark Energy). Cette énergie sombre peut conduire à une gravitation négative car sa pression ou d'une manière équivalente son équation d'état $w = p/\rho$ est négative. La nature de l'énergie sombre est l'un des grands problèmes non résolus de la physique moderne. Le candidat le plus simple de l'énergie sombre est la constante cosmologique Λ avec $w = -1$. Devant les difficultés liées à son ordre de grandeur prédit théoriquement par rapport à celle de l'énergie du vide observée, d'autres modèles dynamiques d'énergie sombre ont été proposés. Parmi tous ces modèles dynamiques, nous allons nous concentrer sur l'énergie noire primordiale ou early dark energy (EDE).
Le deuxième modèle est que l'accélération de l'expansion peut être causé par une modification de la gravitation. En d'autres termes, la relativité générale n'est plus valable aux échelles cosmologiques. Comme exemple le modèle de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) [4], dans lequel la gravitation apparait à quatre dimenssions pour les petites distances et à cinq dimenssions pour les grandes distances. Ces deux familles de modèles sont radicalement différents, et la question qui se pose comment distinguer ces deux possibilitées. Récemment, on a utilisé le taux de croissance des perturbations de la matière ou facteur de croissance f pour distinguer entre les deux possibilités. En effet, les différentes théories de la gravitation peuvent donner la même histoire de l'expansion mais elles peuvent être distingué par leur facteur de croissance. On insinue ici par histoire, la totalité des expériences observées. A grande échelle et à l'ordre 1, dans le cadre de la relativité générale, les perturbations de la densité de matière δ sont gouvernées par une équation différentielle. En termes du facteur de croissance f la solution de cette équation peut être approximée par $f = \Omega_M^\gamma$ [5], [6], [7], [8] où Ω_M est le paramètre de densité de matière et γ est l'index de

croissance. La première approximation a été donnée par Peebles pour un univers dominé par la matière comme $f(z=0)=\Omega_{M0}^{0,6}$ [5], puis amélioré pour le même modèle dans [6], [7] par $f(z=0)=\Omega_{M0}^{4/7}$. Les modèles d'énergie sombre avec l'équation d'état w, constante, sont considérés dans le référence [9]. L'auteur [9] trouve une expression de γ comme fonction de Ω_M et w pour un espace plat. Ce résultat a été généralisé par [10] pour les modèles à courbure. L'approche du développement de l'index de croissance γ autour d'une certaine valeur asymptotique ou primordiale, $\Omega_M=1$ quand l'univers été dominé par la matière pour les trés grands redshift, ne couvre pas les autres redshifts quand l'univers dévie loin de cette ère où les données des observations sont disponibles, car l'erreur $f/\Omega_M^\gamma - 1$ devient grande. L'objectif de notre travail est de trouver une paramétrization pour l'index de croissance couvrant une large gamme de redshifts, bas, intermédiaire et très large, jusqu'au moment du découplage (z_{CMB}), dans le cadre du un modèle dynamique d'énergie sombre primordiale dit de Mocker. La paramétrization de loin meilleure que celle trouvée pour le modèle ΛCDM composé, de matière froide sans pression d'équation d'état $w=0$ et avec constante cosmologique avec $w=-1$.
Ce mémoire est organisé comme suit :
Le manuscrit débute par une introduction. Le chapitre 1 est une introduction à la cosmologie moderne donnant les éléments de base d'un univers "d'ordre zéro", c'est à dire un univers homogène et isotrope, dont nous aurons besoin par la suite au cours de ce mémoire. Le chapitre deux est consacré à des petites fluctuations. Le chapitre trois est consacré à paramétriser le facteur de croissance pour modèle d'énergie noire primordiale. Le manuscrit se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Univers uniforme en expansion.

Dans ce chapitre nous allons commencer par dériver la métrique de Robertson-Walker décrivant un univers homogène et isotrope. Puis nous introduirons un outil necessaire, la relativité générale. Nous appliquons les équations d'Einstein à la métrique de Robertson-Walker et nous explorons leurs conséquences.

1.1 Principe Cosmologique

Deux hypothèses sont à la base de la plupart des modèles cosmologiques. Il s'agit des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.
L'homogénéité de l'univers signifie que tous les points jouent le même rôle : deux observateurs placés en des points différents rapportent les mêmes observations et les mêmes expériences. Quand à l'isotropie de l'univers, elle stipule que toutes les directions sont équivalentes : en un point donné les observations ne dépendent pas de la direction selon laquelle elles sont effectuées. L'ensemble des deux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie est désigné sous le nom de Principe Cosmologique. Le Principe Cosmologique ne doit pas être compris comme un grand principe de la physique, mais plutôt comme une hypothèse de travail, dont la pertinence est jugée à la lumière de la comparaison des prédictions théoriques avec les observations expérimentales. Il clair que les deux hypthéses d'homogénéité et d'isotropie sont mises à défaut localemet (à petite échelle). En vérité l'homogénéité et l'isotropie de l'univers doivent être comprises comme des propriétés valables à grande échelle, de l'ordre de 10^8 années lumière comprenant plusieurs amas ou superamas de galaxies. Les observations astronomiques comme la distribution des galaxies ou le rayonnement de fond cosmologique à 3^0K, sont conformes au principe cosmologique. La supposition d'homogénéité et d'isotropie de l'univers nous conduit à choisir le système de coordonnées d'espace-temps telle que la métrique prenne une forme simple, d'abord obtenue par Friedmann comme solution des équations d'Einstein et ensuite dérivée par Robertson

et Walker en se basant uniquement sur les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

1.2 Métrique de Robertson-Walker

Comme préparation au calcul de la métrique d'espace-temps, considérons d'abord la géométrie d'un espace à trois dimensions homogène et isotrope. Comme la géométrie est codée dans la métrique g_{ij}, (avec $i, j = 1, 2, 3$), ou d'une manière équivalente dans l'écriture mathématique de l'élément de ligne $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, où les x^i sont les coordonnées cartésiennes, avec sommation sur les indices répétés. ($\mathrm{d}s$ est la distance propre entre deux points séparés par $\mathrm{d}\vec{x}$ dans un système de coordonnées cartésiennes.) On montre [?], [?], [13] qu'il y'a trois possibilités pour un espace à trois dimensions homogène et isotrope.

– Un espace plat caractérisé par l'élément de ligne

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{1.1}$$

avec des longueurs définies positives.
Les transformations de coordonnées qui laissent invariant l'élément de ligne précédent sont les rotations et les translations ordinaires à trois dimensions.

– Une surface sphérique avec un rayon a plongée dans un espace Euclidien à quatre dimentions avec l'élément de ligne

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x}^2 + \mathrm{d}z^2, \quad z^2 + \vec{x}^2 = a^2. \tag{1.2}$$

Les transformations de coordonnées, qui laissent invariants l'élément de ligne ci-dessus, sont les rotations dans un espace Euclidien à quatre dimensions. Ces transformations peuvent transporter en n'importe quel point donné sur la tri-sphère, et n'importe quelle direction en ce point en un autre point et une autre direction laissant l'élément de ligne donné par l'équation (1.2) inchangé.

– Une surface pseudo-sphérique plongée dans un espace pseudo-Euclidien à quatre dimenssions avec l'élément de ligne

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x}^2 - \mathrm{d}z^2, \quad z^2 - \vec{x}^2 = a^2, \tag{1.3}$$

où a^2 est pour (le moment) une constante positive arbitraire. Les transformations de coordonnées qui laissent invariants l'équation (1.3) sont les pseudo-rotations à quatre dimensions, exactement comme les transformations de Lorentz mais avec z à la place de t, dans l' espace plat de Minkowski.

En faisant le changement d'échelle des coordonnées

$$\vec{x'} = a^{-1}\,\vec{x}, \quad z' = a^{-1}\,z, \tag{1.4}$$

et en supprimant les primes, l'élément de ligne, dans le cas de l'espace plat, s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \,\mathrm{d}\vec{x}^2, \tag{1.5}$$

et les éléments de ligne dans les cas sphérique pseudo-sphérique prennent la forme

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \,[\mathrm{d}\vec{x}^2 \pm \mathrm{d}z^2], \qquad z^2 \pm \vec{x}^2 = 1. \tag{1.6}$$

D'autre part, la différentielle de l'équation $z^2 \pm \vec{x}^2 = 1$ donne $z\,\mathrm{d}z = \mp \vec{x}\,\mathrm{d}\vec{x}$, d'où en substituant dans $\mathrm{d}s^2 = a^2 \left(\mathrm{d}\vec{x}^2 \pm \mathrm{d}z^2\right)$, on a

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \left[\mathrm{d}\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x}\,\mathrm{d}\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2}\right] \tag{1.7}$$

Il est clair que, pour les trois cas (plat, sphérique, et pseudo-sphérique), $\mathrm{d}s^2$ peut être écrit sous une forme unifiée :

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \left[\mathrm{d}\vec{x}^2 + k\,\frac{(\vec{x}\,\mathrm{d}\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2}\right] \tag{1.8}$$

où $k = +1$, -1, ou 0 selon que l'espace est sphérique, pseudo-sphérique, ou plat respectivement
Maintenant, nous devons prendre a^2 positif pour avoir $\mathrm{d}s^2$ positif en $x = 0$, et par conséquent en tout point. Il y'a une façon manifeste d'étendre ceci à la géométrie de l'espace-temps, pour cela il suffit juste d'inclure (1.8) dans l'élément de ligne de l'espace-temps $\mathrm{d}\tau^2$, ce qui donne

$$\mathrm{d}\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\vec{x}^2 + k\,\frac{(\vec{x}\,\mathrm{d}\vec{x})^2}{1 - k\,\vec{x}^2}\right]. \tag{1.9}$$

(Les indices grecs μ, ν parcourent les quatre coordonnées d'espace-temps appelées 1, 2, 3, 0, avec x^0, la coordonnée temps). On note que ici et ailleurs, que nous utilisons la convention de sommation implicite sur des indices répétés de 0 à 3. $a(t)$ est maintenant une fonction arbitraire du temps, qui détermine la taille physique de l'univers, connue sous le nom de facteur d'échelle de Robertson-Walker, $g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) est le tenseur métrique, rappelons que c'est un champ possédant deux propriétées, la première est que sous une tranformation de coordonnées $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$ la métrique se transforme en

$$g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x)\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}, \tag{1.10}$$

(les quantitées qui se transforment comme l'équation (1.10) sont dits tenseurs covariants), la seconde est que la métrique dans un système de coordonnées localement inertielles et cartésiennes en un point x, est celle de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ (c'est une matrice diagonale avec $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ et $\eta_{00} = -1$), et les dérivées premières de la métrique en ce point sont nulles. τ est le temps propre. $\mathrm{d}\tau^2$ est une quantité scalaire, c'est-à-dire invariante sous une tranformation de coordonnées. En effet, du fait que sous un changement de coordonnées $x^\rho \longrightarrow x'^\rho = x'^\rho(x)$, la différentielle $\mathrm{d}x^\rho$ se transforme comme

$$\mathrm{d}x^\rho \longrightarrow \mathrm{d}x'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu, \tag{1.11}$$

alors

$$g'_{\rho\sigma}(x')\mathrm{d}x'^\rho \mathrm{d}x'^\sigma = g_{\mu\nu}(x)\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\,\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\,\mathrm{d}x^\kappa\,\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\,\mathrm{d}x^\lambda = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{1.12}$$

où on a aussi utilisé que

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\,\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} = \delta^\mu{}_\kappa, \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\,\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} = \delta^\nu{}_\lambda \tag{1.13}$$

où $\delta^\mu{}_\nu$, appelé symbole de Kronecker, est le tenseur mixte défini en n'importe quel système de coordonnées par

$$\delta^\mu{}_\nu \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.14}$$

La métrique donnée par l'équation (1.9) est connnue en Cosmologie sous le nom de métrique de Robertson-Walker. On peut montrer [?] que c'est l'unique métrique (à une transformation de coordonnées près) décrivant un univers homogène et isotrope pour des observateurs en chute libre, tels que des astronomes dans des galaxies typiques. Les composantes de cette métrique dans ce système de coordonnées cartésiennes sont :

$$g_{ij} = a^2(t)\,\left(\delta_{ij} + k\,\frac{x^i\,x^j}{1 - k\,\vec{x}^2}\right), \;\; g_{i0} = 0, \;\; g_{00} = -1, \tag{1.15}$$

avec $i,\ j = 1, 2, 3$, et $x^0 = t$, et $\delta_{ij} = 0$ à moins que $i = j$ auquel cas δ_{ij} est égal à 1. Dans un espace plat $k = 0$, la métrique de Robertson-Walker donnée par l'équation (1.9) se réduit à

$$\mathrm{d}\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\mathrm{d}\vec{x}^2, \tag{1.16}$$

avec

$$g_{ij} = a^2(t)\,\delta_{ij}, \quad g_{i0} = 0, \quad g_{00} = -1, \tag{1.17}$$

avec i, $j = 1, 2, 3$, et $x^0 = t$. A la place des coordonnées cartésiennes x^i, on peut utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) auquel cas $\mathrm{d}\vec{x}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega$, avec $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$. Il s'ensuit que la métrique donnée par l'équation (1.16) se met sous la forme

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{1.18}$$

1.2.1 Equation de la géodésique

L'équation de mouvement pour une particule en chute libre dans un champ gravitationnel est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0, \tag{1.19}$$

où $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ est la connection affine, qui s'écrit en termes de la métrique comme

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right]. \tag{1.20}$$

Les $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ sont aussi appelée symboles de Christoffel, et τ est le temps propre paramétrant la position de la particule massive le long de sa trajectoire. Pour les particules de masse nulle tel que les photons τ est remplacé par un certain autre paramètre σ et les équations de mouvement doivent préserver $\mathrm{d}\tau^2 = 0$ le long de la trajectoire. La trajectoire qui satisfait l'équation (1.19) est appelée géodésique d'espace-temps, car sur une telle trajectoire l'intégrale

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{\mathrm{d}x^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu(u)}{\mathrm{d}\tau}}\ \mathrm{d}\tau \tag{1.21}$$

est stationnaire sous les variations qui laissent $x^\mu(\tau)$ fixes aux points extrêmes τ_1 et τ_2 Notons que les indices en haut dans $g^{\mu\nu}$ sont importants : $g^{\mu\nu}$ est le tenseur contravariant, défini comme l'inverse de la métrique $g_{\mu\nu}$. Autrement dit

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \tag{1.22}$$

où $\delta^\mu{}_\nu$ est le symbole de Kronecker, défini par l'équation (1.14).
Les $g^{\mu\lambda}$ dans la métrique de Robertson-Walker pour un espace plat sont donnés par

$$g^{ij} = a^{-2}(t)\,\delta_{ij},\ \ g^{i0} = 0,\ \ g^{00} = -1, \tag{1.23}$$

En utilisant l'équation (1.20) et la métrique de Robertson-Walker, dans le cas d'un espace plat, donnée par les équations (1.17), (1.23) dans les cas covariant et contravariant respectivement, on peut dériver les symboles de Christoffel pour un univers homogène et isotrope en expansion. Commençons par calculer les composantes avec un indice en haut égale à 0 :

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\, g^{00} \left[\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right] \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Dans la deuxième ligne de l'équation ci-dessus la dérivée est non nulle seulement si les indices μ, et ν sont des indices d'espace, d'où la composante non nulle

$$\Gamma^0{}_{ij} = a\,\dot{a}\,\delta_{ij}, \tag{1.25}$$

où $\dot{}$ indique la dérivée par rapport à t. Quand l'indice en haut est spatial, $\Gamma^i{}_{\mu\nu}$ n' est différent de zéro si l'un de ses indices du bas est 0 et l'autre est spatial, d'où

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{0j} &= \frac{1}{2}\, g^{il} \left[\frac{\partial g_{l0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l}\right] \\ &= \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.2.2 Coordonnées comobiles, Temps cosmique, et Facteur d'échelle.

Comme $\Gamma^i{}_{00} = 0$, l'équation de la géodésique, donnée par (1.19), se réduit à $\mathrm{d}^2 x^i/\mathrm{d}\tau^2 = 0$, ce qui implique qu'une particule au repos dans ces coordonnées restera au repos. On dit que ces coordonnées sont comobiles. Elles suivent le mouvement des observateurs typiques ou d'une manière équivalente : Ces observateurs ont des coordonnées spatiales constantes. On peut imaginer des coordonnés comobiles en traçant des lignes à la surface d'un ballon en caoutchouc par exemple, sur lequel sont fixées des punaises représentant des galaxies, quand on gongle ou on dégonfle le ballon les punaises se déplacent avec les lignes, ce qui implique que leurs coordonnées restent les mêmes.
L'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}$ pour une horloge comobile est exactement $\mathrm{d}t$ car $g_{00} = -1$, d'où t est le temps mesuré dans le repère au repos de l'horloge comobile. La coordonnée t est appelée temps cosmologique.
Pour rendre claire la signification du facteur d'échelle $a(t)$ de Robertson-Walker calculons la distance propre, à l'instant t, entre l'observateur placé à l'origine et l'objet comobile de coordonnée radiale r :

$$d(r,t) = a(t) \int_0^r \mathrm{d}r = a(t)\, r \quad \text{pour un espace plat : } k = 0. \tag{1.27}$$

La coordonnée radiale r est indépendante du temps dans ce système de coordonnées comobiles, il en résulte que la distance propre qui nous sépare de l'objet comobile croît ou décroît avec $a(t)$. (on verra par la suite que $a(t)$ est croîssant car l'univers est en expansion) Comme notre position n'est pas priviligiée alors la distance propre entre deux observateurs comobiles quelconques n'importe où dans l'univers est proportionnelle à $a(t)$. Si la distance comobile entre deux observateurs est aujourd'hui r_0, alors la distance propre entre ces deux observateurs à un certain instant t, plus tôt, était $a(t)r_0$. Le taux de variation d'une telle distance propre $d(t)$ est

$$\dot{d}(t) = \dot{a}r = d\,\dot{a}/a \tag{1.28}$$

où on a tenu compte du fait que $\dot{r} = 0$. On voit donc que la vitesse $v = \dot{d}$ croît linéairemt avec la distance.

1.3 Tenseur énergie-impulsion

L'invariance par translation et par rotation du tenseur énergie-impulsion, $T^{\mu\nu}$, requièrent que ses composantes, dans un univers (plat) en expansion, prennent partout la forme :

$$T^{00} = \rho(t), \qquad T^{i0} = 0, \qquad T^{ij} = \delta_{ij}a^{-2}(t)p(t), \tag{1.29}$$

où $\rho(t)$ et $p(t)$ sont la densité d'énergie et la pression mesurées par un observateur comobile. L'équation (1.29) peut prendre la même forme que celle d'un fluide parfait

$$T^{\mu\nu} = p\,g^{\mu\nu} + (\rho + p)\,u^\mu\,u^\nu, \qquad g_{\mu\nu}u^\mu\,u^\nu = -1, \tag{1.30}$$

où u^μ est le quadri-vitesse comobile, avec $u^0 = 1$ et $u^i = 0$, et $g^{\mu\nu}$ est la métrique de Robertson-Walker, dans le cas plat, donnée par l'équation (1.23). Notons que la relation $u^i = 0$ montre que les composants, du fluide cosmique de l'univers sont, en moyenne, au repos dans le système de coordonnées comobiles, comme on s'y attendait.
Comme, en l'absence de la gravitation le tenseur énergie-impulsion est conservé dans le sens que $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = 0$. En présence du champ gravitationnel la loi de conservation devient

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\kappa\nu}T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu{}_{\kappa\nu}T^{\mu\kappa} = 0. \tag{1.31}$$

C'est la dérivée covariante du tenseur $T^{\mu\nu}$. Pour $\mu = i$, la loi de conservation de l'impulsion $T^{i\nu}{}_{;\nu} = 0$ est automatiquement satisfaite par la métrique de Robertson-Walker et le tenseur énergie-impulsion donné par l'équation (1.30). Et pour $\mu = 0$, en utilisant les équations (1.29), (1.26), et (1.25), la loi de conservation de l'énergie $T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$ donne :

$$\begin{aligned} 0 = T^{0\nu}{}_{;\nu} &= \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma^i{}_{i0}T^{00} + \Gamma^0{}_{ij}T^{ij}, \\ &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(\rho + p)\,, \end{aligned} \tag{1.32}$$

où on a utilisé $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$.

1.4 Equations d'Einstein

Les résultats que nous avons obtenu jusqu'à maintenant sont généraux. Pour aller plus loin, nous avons besoin d'introduire les équations d'Einstein de la gravitation, (la gravitation est codée dans la métrique. Cette dernière est dans notre cas donnée par la métrique de Robertson-Walker décrivant un univers en expansion), qui relie la métrique de l'espace-temps à son contenu en matière ou, de façon équivalente, en énergie. Ce qui permet de faire des hypothèses sur la dynamique de l'expansion cosmologique, c'est à dire sur la pression et la densité d'énergie cosmiques constituant l'univers. L'expansion de l'univers est gouverné par les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.33}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion avec des indices en bas :

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} T^{\lambda\kappa}, \tag{1.34}$$

$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$), qui dépend de la métrique et de ses dérivées, exprimé en terme de la connection affine par :

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}, \tag{1.35}$$

et G est la constante de Newton. Les équations d'Einstein, données par l'équation (1.33), peuvent être mises sous la forme convenable suivante :

$$R_{\mu\nu} = -8\,\pi\, G\, S_{\mu\nu}, \tag{1.36}$$

où $S_{\mu\nu}$ est donné en termes du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ par

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{1.37}$$

Cette équation est facile à obtenir, il suffit de contracter l'équation (1.33) par $g^{\mu\nu}$, pour obtenir $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, d'où $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$, qu'on la substitue dans l'équation (1.33). D'où le résultat voulu. Il se trouve qu'il y a seulement deux jeux de composantes non nulles du tenseur de Ricci : l'un avec $\mu = \nu = 0$ et l'autre avec $\mu = \nu = i$. La composante $R_{0i} = R_{i0}$ est nulle car cette composante est un tri-vecteur, et doit par conséquent s'annuler à cause de l'isotropie de la métrique de Robertson-Walker. Rappelons comme nous l'avons vu dans la soussection (1.2.1) que les symboles de Christoffel, pour la métrique de Robertson-Walker, purement spatiales ou avec deux ou trois indices temps sont nulles. Il s'ensuit que :

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma^0{}_{ij}}{\partial t} + \Gamma^0{}_{ik}\Gamma^k{}_{j0} + \Gamma^k{}_{i0}\Gamma^0{}_{jk} - \Gamma^0{}_{ij}\Gamma^l{}_{0l} \tag{1.38}$$

et

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{i0}}{\partial t} + \Gamma^i{}_{0j}\Gamma^j{}_{0i} \tag{1.39}$$

En utilisant les relations (1.25) et (1.26) pour les composantes non nulles de la connection affine, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^0{}_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\dot{a}\right), \quad \Gamma^0{}_{ik}\Gamma^k{}_{j0} = \dot{a}^2\delta_{ij}, \quad \Gamma^0{}_{ij}\Gamma^l{}_{0l} = 3\dot{a}^2\delta_{ij}, \\
\frac{\partial \Gamma^i{}_{i0}}{\partial t} = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right), \quad \Gamma^i{}_{0j}\Gamma^j{}_{i0} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

où on a utilisé $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$, $\delta_{ii} = 3$ et $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$. En utilisant l'équation (1.40) dans les équations (1.38) et (1.39), nous obtenons les composantes non nulles du tenseur de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= -\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\dot{a}\right) + \delta_{ij}\dot{a}^2 + \delta_{ij}\dot{a}^2 - 3\delta_{ij}\dot{a}^2 \\
&= -\delta_{ij}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

et

$$\begin{aligned}
R_{00} &= 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\
&= 3\frac{\ddot{a}}{a}.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Pour écrire les équations d'Einstein nous avons aussi besoin des composantes $S_{\mu\nu}$. Pour cela nous utilisons le tenseur énergie-impulsion covariant (indices en bat) et mixte (un indice en haut et un en bat), qu'on peut déduire à partir du tenseur énergie-impulsion contravariant donné par l'équation (1.29), en faisant intervenir le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, qui sert à abaisser les indices (le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ sert à élèver les indices), par l'intermidiaire des relations $T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}T^{\lambda\kappa}$, et $T^\mu{}_\nu = g_{\nu\rho}T^{\mu\rho}$, avec $g_{\mu\nu}$ donnée par l'équation (1.17), d'où, les composantes du tenseur énergie-impulsion covariant $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \rho(t), \qquad T_{i0} = 0, \qquad T_{ij} = \delta_{ij}a^2(t)p(t), \tag{1.43}$$

et du tenseur mixte $T^{\mu}{}_{\nu}$

$$T^{0}{}_{0} = -\rho(t), \qquad T^{0}{}_{i} = 0, \qquad T^{i}{}_{j} = \delta_{ij} p(t). \tag{1.44}$$

En particulier,

$$T^{i}{}_{i} = 3p(t). \tag{1.45}$$

L'équation (1.37) donne alors

$$S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij} \left(T^{0}{}_{0} + T^{k}{}_{k} \right) = a^2 p \delta_{ij} - \frac{1}{2}\, (-\rho + 3p)\, a^2 \delta_{ij} = \frac{1}{2}\, (\rho - p)\, a^2 \delta_{ij}, \tag{1.46}$$

$$S_{00} = T_{00} - \frac{1}{2}\, g_{00} \left(T^{0}{}_{0} + T^{k}{}_{k} \right) = \rho + \frac{1}{2}\, (-\rho + 3p) = \frac{1}{2}\, (\rho + 3p)\,. \tag{1.47}$$

En substituant, d'une part, aux composantes, du tenseur de Ricci, R_{ij} et R_{00} et d'autre part aux composantes, du tenseur de $S_{\mu\nu}$, S_{ij} et S_{00} leurs expressions données respectivement par les équations (1.41), (1.42), (1.46), et (1.47), les équations d'Einstein s'écrivent

$$-2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} = 4\,\pi\, G\, (p - \rho)\,, \tag{1.48}$$

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\,\pi\, G\, (3p + \rho)\,. \tag{1.49}$$

Notons que $S_{i0} = 0$, entraîne que l'équation $R_{i0} = -8\,\pi\, G\, S_{0i}$ se réduit à une identité car $R_{0i} = 0$. Pour éliminer les termes avec dérivées secondes, ajoutons 3 fois (1.48) à (1.49) et simplifions on obtient

$$\dot{a}^2 = \frac{8\,\pi\, G \rho}{3}\, a^2. \tag{1.50}$$

C'est l'équation fondamentale de Friedmann gouvernant l'expansion de l'univers. En dérivant l'équation (1.50) par rapport au temps t, on obtient $\dot{a}\ddot{a} = (4\,\pi\, G/3) \left(2a\dot{a}\rho + a^2 \dot{\rho} \right)$ et en éliminant $\ddot{a}$ entre l'équation obtenue et l'équation (1.49), on retrouve la loi de conservation de l'énergie donnée par l'équation (1.32)

$$\dot{\rho} = -3\, \frac{\dot{a}}{a}\, (\rho + p)\,. \tag{1.51}$$

En introduisant l'équation d'état w donnée par

$$w = p/\rho, \tag{1.52}$$

équation liant la densité des constituants de l'univers à leur pression, l'équation (1.51) se réécrit comme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(1+w)\,. \tag{1.53}$$

L'équation (1.53) peut s'intégrer en

$$\frac{\rho(a)}{\rho_0} = exp\, -3\int_{a_0}^{a} \frac{1+w(a')}{a'}\,da', \tag{1.54}$$

pour trouver ρ comme fonction de a $\rho(a)$. Notons que pour w constante l'équation (1.54) s'écrit

$$\rho = \rho_0\, a^{-3-3w}, \tag{1.55}$$

où $\rho_0 \equiv \rho(a = a_0)$, où a_0 est la valeur du facteur d'échelle aujourd'hui $t = t_0$. En particulier on a pour les trois cas

- Radiation : $w = 1/3$ $(p = \rho/3)$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \tag{1.56}$$

- Matière : $w = 0$ $(p = 0)$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \tag{1.57}$$

L'indice 0 dénote la valeur actuelle. On pense aujourd'hui que la matière existe sous deux formes :

matière ordinaire : ou baryonique en référence aux protons et aux neutrons, particules de la famille des baryons, dont les particules interagissent gravitationnellement et, si elles sont chargées avec la radiation,

matière noire : invisibles aux téléscopes (de nature jusqu'à maintenant inconnue), elle n'interagit avec le rayonnement, et elle se comporte comme la matière ordinaire vis-à-vis de la gravitation. On l'étudie indirectement par ses effets gravitationnels, par exemple par le biais d'effets de lentilles gravitationnelles. Elle représente la majorité du contenu en masse de l'univers $84,4\%$ de toute la matière.

– Energie du vide : $w = -1$ ($p = -\rho$) auquel cas

$$\rho = \text{constante} = \rho_0, \tag{1.58}$$

connue (à des facteurs numériques conventionnels près) soit comme la constante cosmologique soit comme l'énergie du vide. C'est le candidat le plus simple de l'énergie noire ou sombre à ne pas confondre avec la matière noire. Cette forme inconnue d'énergie répulsive constitue l'essentiel de l'univers ($69,4\%$).

Notons que, en cas de coexistence de la matière, rayonnement, et de l'énergie du vide, les résultats obtenus ci-dessus peuvent s'appliquer séparément à chacune des composantes, à condition qu'il n'y ait pas d'échange d'énergie entre les différentes composantes.

1.5 Paramètres cosmologiques

Définissons maintenant quelques paramètres cosmologiques (qui nous seront utiles par la suite). Commençons par le paramètre de Hubble :

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.59}$$

C'est le taux d'expanssion de l'univers. H à l'heure actuelle ($t = t_0$) est la constante de Hubble

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(t_0). \tag{1.60}$$

On définit la densité critique :

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{1.61}$$

et le paramètre de densité Ω :

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}. \tag{1.62}$$

Il s'ensuit que pour un univers constitué par un mélange de matière, de radiation et d'énergie noire, la densité d'énergie ρ s'écrit

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_{DE} = \frac{3H^2}{8\pi G}\left(\Omega_M + \Omega_R + \Omega_{DE}\right), \tag{1.63}$$

où ρ_M, ρ_R, et ρ_{DE} sont respectivement les densités de Matière, de radiation et d'énergie noire, et Ω_M, Ω_R, et Ω_{DE} sont respectivement les paramètres de densité de Matière, de radiation et d'énergie noire, avec

$$\rho_M = \frac{3H^2\Omega_M}{8\pi G}, \quad \rho_R = \frac{3H^2\Omega_R}{8\pi G}, \quad \rho_{DE} = \frac{3H^2\Omega_{DE}}{8\pi G}. \tag{1.64}$$

En reportant l'équation (1.63) dans l'équation (1.50) en tenant compte du fait que $H = \dot{a}/a$, on obtient

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_{DE} = 1. \tag{1.65}$$

La somme des paramètres de densité vaut l'unité. En particulier pour $t = t_0$ (aujourd'hui)

$$\Omega_{M0} + \Omega_{R0} + \Omega_{DE0} = 1. \tag{1.66}$$

En utilisant les relations (1.57) et (1.56) et en substituant aux ρ_0 leurs expressions données par les équations (1.64) indicées par un 0 (aujourd'hui), ρ se réecrit comme

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\Omega_{DE0}\frac{\rho_{DE(a)}}{\rho_{DE0}} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]. \tag{1.67}$$

On rappelle que ρ_{DE} est donnée par l'équation (1.54). En identifiant l'énergie sombre à l'énergie du vide et en utilisant (1.58), on a

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right], \tag{1.68}$$

où $\Omega_{\Lambda 0}$ est le paramètre de densitédu vide. L'utilisation de l'expression de ρ donnée par l'équation (1.67) et de l'équation (1.50), donnent le paramètre de Hubble en termes des Ω_s

$$H = H_0\sqrt{\Omega_{DE0}\frac{\rho_{DE(a)}}{\rho_{DE0}} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4}, \tag{1.69}$$

et

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{H_0 a\sqrt{\Omega_{DE0}\frac{\rho_{DE(a)}}{\rho_{DE0}} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4}}. \tag{1.70}$$

Les deux équations précédentes (1.69) et (1.70) s'écrivent, dans le cas où l'énergie noire n'est autre que l'énergie du vide, respectivement comme

$$H = H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4}, \tag{1.71}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{H_0 a\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{R0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4}}. \tag{1.72}$$

La variation du taux d'expansion de l'univers se mesure par le paramètre de décélération défini, traditionnellement (car on supposait a priori que le taux d'expansion devait diminuer, du fait que l'attraction gravitationnelle entre les galaxies contrarierait l'expansion), par

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \tag{1.73}$$

où $\ddot{a}$ est la dérivée seconde de a par rapport à t. En utilisant l'équation (1.49) et le fait que $H = \dot{a}/a$, on donne la formule générale du paramètre de décélération

$$q = -\frac{a^2}{\dot{a}^2}\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G\left(3p + \rho\right)}{3H^2}. \tag{1.74}$$

En particulier pour $t = t_0$

$$q_0 = \frac{4\pi G\left(3p_0 + \rho_0\right)}{3H_0^2}. \tag{1.75}$$

Il est interressant d'exprimer q en termes des Ω_s. pour cela on introduit l'équation d'état $w \equiv p/\rho$, égale à w_{DE}, 0, et 1/3 selon qu'il s'agit respectivement de l'énergie sombre, de la matière, et de la radiation, ($w_{DE} = -1$ si on prend comme modèle d'énergie sombre, l'énergie du vide) dans l'équation (1.74). q s'écrit alors

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi G\rho_M}{3H^2} + \frac{8\pi G\rho_R}{3H^2} + \frac{4\pi G\rho_{DE}}{3H^2}\left(1 + 3w_{DE}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\Omega_M + 2\Omega_R + \Omega_{DE}\left(1 + 3w_{DE}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\Omega_M + 2\Omega_R - 2\Omega_\Lambda\right), \end{aligned} \tag{1.76}$$

où on a utilisé dans la deuxième ligne les relations données par l'équation (1.64) et dans la troisième ligne $w_{DE} = -1$ En particulier la valeur du paramètre de décélération actuelle est

$$q_0 = \frac{1}{2}\left(\Omega_{MO} + 2\Omega_{R0} - 2\Omega_{\Lambda 0}\right), \tag{1.77}$$

1.6 Le décalage vers le rouge ou redshift cosmologique et expansion de l'univers

Le décalage en fréquence de la lumière provenant des galaxies lointaines, comparativement à celles observées sur terre, nous fournit une information précieuse sur le facteur d'échelle $a(t)$. Pour calculer ces décalages de fréquence, considérons un rayon lumineux qui nous parvient en $r = 0$ (l'origine des coordonnées confondue avec l'observateur que nous sommes) aujourd'hui à $t = t_0$ d'une galaxie lointaine immobile (comobile) de coordonnées radiales r_1. Deux crêtes successives reçues aux dates t_0 et $t_0 + \delta t_0$ sont émises aux dates t_1 et $t_1 + \delta t_1$ respectivement. Comme le rayon lumineux a voyagé vers nous (sur terre) selon la direction radiale (θ et ϕ sont constantes) et le long d'une géodésique nulle ($\mathrm{d}\tau^2 = 0$), la métrique de Robertson-Walker donnée par l'équation (1.18) peut être utilisée pour relier ces quatre temps à r_e. D'où

$$\mathrm{d}t = -a(t)\mathrm{d}r. \tag{1.78}$$

(On a choisit le signe ($-$) et non pas ($+$) dans l'équation (1.78) car pour un rayon se propageant vers l'origine, r décroît quand t croît.). L'équation (1.78) conduit aux relations

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^{r_1} \mathrm{d}r \qquad \text{et} \qquad \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^{r_1} \mathrm{d}r, \tag{1.79}$$

d'où

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}, \tag{1.80}$$

et par conséquent

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}. \tag{1.81}$$

δt_0 est la période du signal émis mesurée par l'observateur tandis que la période du même signal émis mesurée sur la source est δt_1. Comme pour toutes sortes de radiation électromagnétique reçues des galaxies, δt_1 et δt_0 sont de petites fractions de seconde, (de l'ordre de 10^{-14} sec) le facteur d'échelle $a(t)$ peut être pris comme approximativement constant dans les intégrales de l'équation (1.81). Il vient alors

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \tag{1.82}$$

Comme les fréquences (ν) sont inversement proportionnelles à leurs périodes, ($\nu_0 = 1/\delta t_0$ et $\nu_1 = 1/\delta t_1$), on a

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \tag{1.83}$$

Notons que, si $a(t)$ croît (respectivement $a(t)$ décroît), on a affaire à un décalage vers le rouge ou redshift (respectivement décalage vers le bleu ou blueshift) : une décroissance (respectivement croissance) dans les fréquences par un facteur $a(t_1)/a(t_0)$, ou d'une manière équivalente une croissance (respectivement décroissance) en longueurs d'ondes d'un facteur conventionnel appelé $1+z$:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \tag{1.84}$$

où z est le paramètre redshift. Si l'univers est en expansion, $a(t_0) > a(t_1)$. Il s'ensuit que z est positif d'aprés l'équation (1.84) et on a un redshift. Alternativement, si l'univers est en phase de contraction, $a(t_0) < a(t_1)$, donc z est négatif et on a un blueshift d'aprés la même équation (1.84). De tels décalages en fréquence trouvent une explication en termes de l'effet Doppler. En interprétant z (pour $z \ll 1$) comme un décalage Doppler, une source lumineuse avec un décalage z telle une galaxie (relativement proche) a une vitesse radiale (selon la ligne de visé) cosmologique $c\,z$, où c est la vitesse de la lumière (ou z dans un système d'unités où $c = 1$). Elle s'éloigne ou s'approche de nous selons que z est positif (redshift) ou z est négatif (blueshift). On s'attendrait est ce que z varierait au hasard d'une galaxie à une autre, et pourrait être aussi bien souvent positif que négatif. Ceci est à peut prés vrai pour notre groupe local (formé par notre galaxie, sa voisine Andromède et une petite trentaine de galaxies satellites). Au-delà du groupe local z est toujours positif, indiquant que toutes ces galaxies s'éloignent de la nôtre. Ces mouvements furent d'abord découvert par Slipher, puis étudiés par Hubble, qui annonça au début de 1930, aprés avoir mesuré des redshifs et des distances au amas de Coma ($z \simeq 0,02$), avoir trouvé une relation linéaire entre le red shift et la distance : plus une galaxie est éloignée, plus sa vitesse de recession est grande. La conclusion était claire : réellement l'univers est en expansion.

1.7 Distances de luminosité

Ce sont les mesures de distances pour de grands redshifts $z > 0,1$ (redshifts, qui sont assez grands pour tenir compte de l'expansion cosmologique sur la détermination des distances) qui peuvent nous dire si l'univers est expansion accélérée ou décélérée. La méthode la plus fréquente pour déterminer les distances en cosmologie est basée sur la mesure de la luminosité apparente l (énergie reçue par unité de temps et par unité de surface du récepteur) d'une source lumineuse de luminosité absolue L connue (appelée chandelle standard). Si l'énergie est émise de manière isotrope, alors, dans le cas d'une géométrie Euclidienne, la relation familière entre l et L est donnée par

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}, \tag{1.85}$$

relation trouvée en imaginant que la source lumineuse est entourée d'une sphère de rayon égale à la distance d entre la source et la terre. L'énergie totale passant à travers la sphère est alors $4\pi d^2 l$, d'où la relation (1.85). Pour de grandes distances, la formule correcte de la luminosité apparente d'une source de coordonnée radiale r_1 avec un redshift z de valeur quelconque est

$$l = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)\,(1+z)^2}, \tag{1.86}$$

obtenue à partir de la relation (1.85), en remplaçant le facteur $1/4\pi d^2$ par $1/\left(4\pi r_1^2 a^2(t_0)\right)$ car à l'instant t_0 où la lumière atteint la terre, la surface propre de la sphère dessinée autour de l'objet lumineux et passant à travers la terre est donnée par la métrique (1.18) comme $4\pi r_1^2 a^2(t_0)$. Et en tenant compte du fait que le taux d'arrivée des photons individuels arrivés est plus petit que le taux avec lequel ils sont émis par le facteur de redshift $a(t_1)/a(t_0) = 1/(1+z)$, et que l'énergie $h\nu_0$ des photons individuels reçus sur terre est plus petite que l'énergie avec laquelle ils sont émis avec le même facteur de red shift $1/(1+z)$. En tenant compte de tout ce qui précède, on obtient la formule (1.86).
On introduit la distance de luminosité d_L définie par

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \tag{1.87}$$

en comparant à l'équation (1.86), on déduit une expression de d_L

$$d_L = a(t_0) r_1 (1+z)\,. \tag{1.88}$$

Pour calculer la distance de luminosité d_L, on a besoin de connaître la coordonnée radiale $r_1 \equiv r(z)$ de la source qui est observée maintenant avec un redshift z. En utilisant la première relation de l'équation (1.79) puis en substituant à $\mathrm{d}t$ son expression donnée par l'équation (1.70) , on obtient

$$\begin{aligned} r(z) &= \int_{t(z)}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \sqrt{\Omega_{DE0}\rho_{DE}(x)/\rho_{DE0} + \Omega_{M0}x^{-3} + \Omega_{R0}x^{-4}}}, \end{aligned} \tag{1.89}$$

avec $x \equiv a/a_0 = 1/(1+z)$. En substituant (1.89)) dans l'équation (1.88), on obtient la distance de luminosité d'une source observée avec un redshift z

$$d_L = a(t_0)r_1(1+z) = \frac{1+z}{H_0}\int_{1/(1+z)}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\Omega_{DE0}\rho_{DE}(x)/\rho_{DE0} + \Omega_{M0}x^{-3} + \Omega_{R0}x^{-4}}} \quad (1.90)$$

Dans le cas où l'énergie sombre est l'énergie du vide, l'équation(1.90) donnant la distance de luminosité s'écrit comme

$$d_L = a(t_0)r_1(1+z) = \frac{1+z}{H_0}\int_{1/(1+z)}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M0}x^{-3} + \Omega_{R0}x^{-4}}}. \quad (1.91)$$

1.8 Energie sombre et Accélération de l'expansion de l'univers

Considérons maintenant des redshifts $z > 0,1$, qui sont assez grands pour tenir compte de l'expansion cosmologique sur la détermination des distances. La comparaison, des observations des supernovae de Type Ia (supernovae de type Ia : est une étoile naine blanche, membre d'un système binaire qui explose quand sa masse atteint celle de Chandrasekhar ($1,4$ fois celle du soleil). Son éclat est si fort qu'on peut la voir à des milliards d'années-lumière de distance. La luminosité intrinsèque est la même pour toutes ces supernovae. Seule la luminosité apparente varie avec la distance.) avec les prédictions théoriques de la distance de luminosité en fonction du redshift équation (1.91) pour une compsition donnée en énergie de l'univers, en même temps par deux groupes : The Supernova Cosmology Project [**?**] et the High-z Supernova Search Team [**?**], donne une évidence direct pour l'énergie sombre : forme inconnue d'énergie répulsive baignant le cosmos, près des trois quarts du contenu de l'univers. L'évidence est basée sur la différence entre la distance de luminosité pour un univers dominé par la matière et pour un univers dominé par l'énergie sombre. Ces deux groupes trouvent que la distance de luminosité est plus grande, pour les supernovae de type Ia pour les grands redshift, dans un univers dominé par l'énergie sombre. Cependant, des objets, de même luminosité intrinsèque, leur luminosité apparente devrait être plus faible si l'univers est dominé par l'énergie sombre. Plus concrétement, Les deux groupes (Riess et al, 1998, Perlmutter et al, 1999) trouvent que pour un espace plat et en négligeant le rayonnement $\Omega_{0R} = 0$, de sorte que $\Omega_{0M} + \Omega_\Lambda = 1$, que $\Omega_{0M} = 0,28$. Donc pour $\Omega_{OM} = 0,28$ et $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{0M}$, l'équation (1.77) donne un paramètre de décélération négatif ($q_0 < 0$), indiquant un univers en expansion accélérée. Le signe moins dans l'équation (1.77) refletent que la matière et l'énergie du vide ont des effets opposés sur l'expansion cosmologique : la matière ralenti l'expansion, tandis que l'énergie du vide l'accélére. Les observations de l'accélération de l'univers sont consistents avec l'existence d'une énergie du vide constante, mais ne prouve pas que cette énergie est réellement constante. L'accélération de l'expansion cosmologique signifie que $\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}t^2$ est positive. Pour que cela se produit, le terme $\rho + 3p < 0$ dans le deuxième membre de l'équation (1.49) doit être négative ou $p < \rho/3$. Comme la densité d'énergie est toujours positive, alors l'accélération cosmologique exige qu'une grande partie de la densité d'énergie de l'univers soit dans la forme qu'elle ait une pression négative, $p < 0$, à la différence de la matière et de la radiation. On lui donne le nom d'énergie sombre. Il est devenu conventiel d'-analyser les observations de l' énergie noire en termes du rapport de sa pression/densité : $w \equiv p_{DE}/\rho_{DE}$. $w = -1$ dans le cas de l'énergie du vide constante. La conclusion que l'énergie noire forme une grande partie de l'énergie constituant l'univers a été validé par des études indépendantes, en particulier par des anisotropies dans le rayonnement de fond cosmologique.

Chapitre 2

Les perturbations linéaires

Jusqu'à maintenant nous avons considéré un univers homogène et isotrope, avec un champ gravitationnel décrit par la métrique de Robertson-Walker. Ceci est une première approximation ignorant la structure de l'univers c'est à dire les objets existant dans ce dernier comme les amas de galaxies, les galaxies, les amas globulaires, les étoiles, etc. Dans ce chapitre nous allons analyser les déviations linéaires par rapport à l'homogéniété et à l'isotropie. Pour cela, nous allons dériver les équations relativistes gouvernant les fluctuations linéaires. Nous allons commencer par perturber les symboles de Christtofel, le tenseur de Ricci, le tenseur énergie impulsion du fluide parfait puis écrire les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion et finalement les équations d'Eintein à l'ordre un en la perturbation. Puis en nous confinant aux perturbations de la matière, on déduira l'équation décrivant la perturbation de la densité de matière. Rappellons que nous travaillons toujours dans un espace plat. Et notons que nous considérons uniquement les perturbations scalaires.

2.1 Les équations du champ gravitationnel perturbé.

2.1.1 Les symboles de Christo el perturbé.

Commençons par écrire la métrique perturbée

$$g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

où $\overline{g}_{\mu\nu}$ est la métrique non perturbée de Robertson-Walker dans le cas plat ($k = 0$) donnée par l'équation (1.17) du chapitre précédent

$$\overline{g}_{00} = -1, \quad \overline{g}_{i0} = \overline{g}_{0i} = 0, \quad \overline{g}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \tag{2.2}$$

et $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ est une petite pertubation dépendant des x^i, $i = 1, 2, 3$ et de t. (Ici et à partir de maintenant la barre sur n'importe quelle valeur dénote sa valeur non perturbée). En faisant usage de la relation $\delta M^{-1} = -M^{-1}(\delta M)M^{-1}$, donnant la perturbation de l'inverse d'une matrice, la pertubation à l'inverse de la métrique est donnée par

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \overline{g}^{\mu\nu} = -\overline{g}^{\mu\rho}\overline{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}, \tag{2.3}$$

dont les composantes sont

$$\begin{aligned} h^{ij} &= -\overline{g}^{i\rho}\overline{g}^{j\sigma}h_{\rho\sigma} \\ &= -\overline{g}^{il}\overline{g}^{jk}h_{lk} \\ &= -a^{-4}(t)h_{ij}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} h^{i0} &= -\overline{g}^{i\rho}\overline{g}^{0\sigma}h_{\rho\sigma} \\ &= -\overline{g}^{ij}\overline{g}^{00}h_{j0} \\ &= a^{-2}(t)h_{i0}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} h^{00} &= -\overline{g}^{0\rho}\overline{g}^{0\sigma}h_{\rho\sigma} \\ &= -\overline{g}^{00}\overline{g}^{00}h_{00} \\ &= -h_{00}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où on a utilisé la métrique inverse non pertubée donnée, par l'équation (1.23) du chapitre précédent dans le cas plat, par

$$\overline{g}^{00} = -1, \quad \overline{g}^{i0} = \overline{g}^{0i} = 0, \quad \overline{g}^{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \tag{2.7}$$

et $\delta_{ij} = 1$ ou 0 suivant que $i = j$ ou $i \neq j$.
La perturbation au tenseur métrique produit une perturbation à la connection affine

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\left[\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}\right] \tag{2.8}$$

($\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$) donnée par

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\left(-\overline{g}^{\mu\sigma}\overline{g}^{\rho\kappa}h_{\sigma\kappa}\right)\left[\partial_\lambda \overline{g}_{\nu\rho} + \partial_\nu \overline{g}_{\rho\lambda} - \partial_\rho \overline{g}_{\nu\lambda}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\,\overline{g}^{\mu\rho}\left[\partial_\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\nu\lambda}\right], \end{aligned} \tag{2.9}$$

où on a remplacé $\delta g^{\mu\rho}$ par son expression ($h^{\mu\rho} = -\overline{g}^{\mu\sigma}\overline{g}^{\rho\kappa}h_{\sigma\kappa}$), donnée par (2.3), et $\delta g_{\nu\rho}$ par $h_{\nu\rho}$. En utilisant l'expression de la connection donnée par (2.8) le premier terme du membre de droite de l'équation (2.9) se réécrit comme $-2h_{\sigma\kappa}\overline{g}^{\mu\sigma}\overline{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}$. Finalement, en remplaçant dans l'équation (2.9), et en réappelant σ, ρ en κ, σ, on obtient l'expression de la perturbation de la connection affine $\delta\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$

$$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,\overline{g}^{\mu\rho}\left[-2h_{\rho\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\lambda} + \partial_\lambda h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\nu\lambda}\right], \tag{2.10}$$

Rappelons que les composantes non nulles de la connection affine non perturbée dans le cas plat sont données par (1.25) et (1.26) du chapitre précédent par

$$\overline{\Gamma}^{i}{}_{j0} = \overline{\Gamma}^{i}{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}, \quad \overline{\Gamma}^{0}{}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{2.11}$$

Maintenant, nous avons tous les éléments en main pour calculer les composantes de la perturbation de la connection affine. Nous avons pour μ, ν, λ tous indices spatiaux.

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{i}{}_{jk} &= \frac{1}{2}\,\overline{g}^{il}\left[-2h_{l0}\overline{\Gamma}^{0}{}_{jk} + \partial_k h_{jl} + \partial_j h_{lk} - \partial_l h_{jk}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2}\,\delta_{il}\left[-2h_{l0}a\dot{a}\delta_{jk} + \partial_k h_{jl} + \partial_j h_{lk} - \partial_l h_{jk}\right] \\
&= \frac{1}{2a^2}\left[-2a\dot{a}h_{i0}\delta_{jk} + \partial_k h_{ji} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk}\right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De la même manière, on calcule les composantes restantes :

$$\delta\Gamma^{i}{}_{j0} = \frac{1}{2a^2}\left[-2\,\frac{\dot{a}}{a}h_{ij} + \dot{h}_{ji} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0}\right], \tag{2.13}$$

$$\delta\Gamma^{0}{}_{ij} = \frac{1}{2}\left[2a\dot{a}h_{00}\delta_{ij} - \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{0j} + \dot{h}_{ij}\right], \tag{2.14}$$

$$\delta\Gamma^{i}{}_{00} = \frac{1}{2a^2}\left[2\dot{h}_{0i} - \partial_i h_{00}\right], \tag{2.15}$$

$$\delta\Gamma^{0}{}_{i0} = \frac{\dot{a}}{a}\,h_{i0} - \frac{1}{2}\,\partial_i h_{00}. \tag{2.16}$$

$$\delta\Gamma^{0}{}_{00} = -\frac{1}{2}\,\dot{h}_{00}, \tag{2.17}$$

Les équations (2.12), (2.13) se réduisent repectivement pour $i = j$ à

$$\delta\Gamma^{i}{}_{ik} = \frac{1}{2a^2}\left[-2a\dot{a}h_{k0} + \partial_k h_{ii}\right], \tag{2.18}$$

$$\delta\Gamma^{i}{}_{i0} = \frac{1}{2a^2}\left[-2\,\frac{\dot{a}}{a}\,h_{ii} + \dot{h}_{ii}\right]. \tag{2.19}$$

En ajoutant les équations (2.17) et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda 0} &= \delta\Gamma^{0}{}_{00} + \delta\Gamma^{i}{}_{i0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a^2}\, h_{ii} - \frac{1}{2}\, h_{00}\right].\end{aligned} \tag{2.20}$$

De même, en ajoutant les équations (2.16) et (2.18), on a

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda k} &= \delta\Gamma^{0}{}_{0k} + \delta\Gamma^{i}{}_{ik} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{1}{2a^2}\, h_{ii} - \frac{1}{2}\, h_{00}\right],\end{aligned} \tag{2.21}$$

où on a tenu compte du fait que $a(t)$ est une fonction de t uniquement, et on a une sommation implicite sur i. Les équations (2.20) et (2.21) peuvent être réécrites sous une forme unifiée,

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{2a^2}\, h_{ii} - \frac{1}{2}\, h_{00}\right], \tag{2.22}$$

avec sommation implicite sur l'indice i de 1 à 3.
Cette relation nous sera utile par la suite.

2.1.2 Le tenseur de Ricci perturbé

Pour écrire les équations d'Einstein perturbées, nous avons besoin du tenseur de Ricci non perturbé donné par l'équation (1.35) du chapitre précédent comme

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta},$$

dont la perturbation $\delta R_{\mu\kappa}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\kappa} &= \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} \\ &+ \delta\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{\kappa\eta} + \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\kappa\eta} - \delta\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\eta} - \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{\mu\kappa}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta},\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec les composantes

$$
\begin{aligned}
\delta R_{jk} &= \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{j\lambda}}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{jk}}{\partial x^{\lambda}} \\
&+ \delta\Gamma^{\eta}{}_{j\nu}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{k\eta} + \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{j\nu}\delta\Gamma^{\nu}{}_{k\eta} - \delta\Gamma^{\eta}{}_{jk}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\eta} - \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{jk}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta} \\
&= \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{j\lambda}}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta\Gamma^{0}{}_{jk}}{\partial x^0} - \frac{\partial \delta\Gamma^{i}{}_{jk}}{\partial x^i} \\
&+ \delta\Gamma^{l}{}_{j0}\overline{\Gamma}^{0}{}_{kl} + \delta\Gamma^{0}{}_{jl}\overline{\Gamma}^{l}{}_{k0} + \overline{\Gamma}^{0}{}_{jl}\delta\Gamma^{l}{}_{k0} + \overline{\Gamma}^{i}{}_{j0}\delta\Gamma^{0}{}_{ki} - \delta\Gamma^{0}{}_{jk}\overline{\Gamma}^{i}{}_{i0} - \overline{\Gamma}^{0}{}_{jk}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu 0}, \\
&= \frac{1}{2a^2}\,\partial_k\partial_j h_{ii} - \frac{1}{2}\,\partial_k\partial_j h_{00} \\
&- \frac{1}{2}\left[2\left(\ddot{a}a + \dot{a}^2\right)\delta_{jk}h_{00} + 2a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00} - \partial_k\dot{h}_{j0} - \partial_j\dot{h}_{k0} + \ddot{h}_{jk}\right] \\
&- \frac{1}{2a^2}\left[-2a\dot{a}\partial_i h_{i0}\delta_{jk} + \partial_i\partial_k h_{ij} + \partial_i\partial_j h_{ik} - \partial_i\partial_i h_{jk}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{kl}\left[-2\frac{\dot{a}}{a}\,h_{lj} + \partial_j h_{l0} - \partial_l h_{j0} + \dot{h}_{jl} + 2a\dot{a}\delta_{jl}h_{00} - \partial_l h_{j0} - \partial_j h_{l0} + \dot{h}_{jl}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{jl}\left[-2\frac{\dot{a}}{a}\,h_{lk} + \partial_k h_{l0} - \partial_l h_{k0} + \dot{h}_{lk}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}\left[2a\dot{a}\delta_{ki}h_{00} - \partial_i h_{k0} - \partial_k h_{i0} + \dot{h}_{ki}\right] \\
&- \frac{1}{2}\,\delta_{ii}\,\frac{\dot{a}}{a}\left[2a\dot{a}\delta_{jk}h_{00} - \partial_k h_{j0} - \partial_j h_{k0} + \dot{h}_{jk}\right] \\
&- a\dot{a}\delta_{jk}\left[-\frac{1}{2}\,\dot{h}_{00} - \frac{\dot{a}}{a^3}\,h_{ii} + \frac{1}{2a^2}\,\dot{h}_{ii}\right]
\end{aligned}
$$

où nous avons fait usage des équations (2.11) (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17).En regroupant les termes, la perturbation d'ordre un de la composante jk du tenseur de Ricci peut se metrre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\delta R_{jk} &= -\frac{1}{2}\,\partial_j\partial_k h_{00} - \left(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right)\delta_{jk}h_{00} - \frac{1}{2}a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00} \\
&+ \frac{1}{2a^2}\,\left(\nabla^2 h_{jk} - \partial_i\partial_j h_{ik} - \partial_i\partial_k h_{ij} + \partial_j\partial_k h_{ii}\right) \\
&- \frac{1}{2}\,\ddot{h}_{jk} + \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\dot{h}_{jk} - \delta_{jk}\dot{h}_{ii}\right) + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\,\left(-2h_{jk} + \delta_{jk}h_{ii}\right) \\
&+ \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{jk}\partial_i h_{i0} + \frac{1}{2}\,\left(\partial_j\dot{h}_{k0} + \partial_k\dot{h}_{j0}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}\right), \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Le calcul de δR_{0j} et de δR_{00} se fait de façon analogue.

$$
\begin{aligned}
\delta R_{0j} &= \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{0j}}{\partial x^{\lambda}} \\
&+ \delta\Gamma^{\eta}{}_{0\nu}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{j\eta} + \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{0\nu}\delta\Gamma^{\nu}{}_{j\eta} - \delta\Gamma^{\eta}{}_{0j}\overline{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\eta} - \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{0j}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta} \\
&= \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial \delta\Gamma^{0}{}_{0j}}{\partial t} - \frac{\partial \delta\Gamma^{i}{}_{0j}}{\partial x^i} \\
&+ \delta\Gamma^{i}{}_{00}\overline{\Gamma}^{0}{}_{ji} + \delta\Gamma^{0}{}_{0i}\overline{\Gamma}^{i}{}_{j0} + \overline{\Gamma}^{l}{}_{0i}\delta\Gamma^{i}{}_{jl} - \delta\Gamma^{0}{}_{0j}\overline{\Gamma}^{i}{}_{i0} - \overline{\Gamma}^{i}{}_{0j}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\nu i} \\
&= \partial_t\left(\frac{1}{2a^2}\,\partial_j h_{ii}\right) - \frac{1}{2}\,\partial_j \dot{h}_{00} \\
&+ \left(-\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{j0} - \frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{j0} + \frac{1}{2}\,\partial_j \dot{h}_{00} \\
&- \frac{1}{2a^2}\left(-2\,\frac{\dot{a}}{a}\,\partial_i h_{ij} + \partial_i \dot{h}_{ij} + \partial_i\partial_j h_{i0} - \partial_i\partial_i h_{j0}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}\left(2\dot{h}_{i0} - \partial_i h_{00}\right) + \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}\left(\frac{\dot{a}}{a}\,h_{i0} - \frac{1}{2}\,\partial_i h_{00}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a^3}\,\delta_{li}\left(-2a\dot{a}h_{i0}\delta_{jl} + \partial_l h_{ij} + \partial_j h_{il} - \partial_i h_{jl}\right) \\
&- 3\,\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} h_{j0} - \frac{1}{2}\,\partial_j h_{00}\right) \\
&- \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}\left(-\frac{1}{2}\,\partial_i h_{00} + \frac{1}{2a^2}\,\partial_i h_{kk}\right).
\end{aligned}
$$

Aprés simplifications et arrangement des termes, on obtient la perturbation au premier ordre de la composante $0j$ du tenseur de Ricci :

$$
\begin{aligned}
\delta R_{j0} = \delta R_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a}\,\partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2}\left(\nabla^2 h_{j0} - \partial_j\partial_i h_{i0}\right) - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{j0} \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\left(\partial_j h_{ii} - \partial_i h_{ij}\right)\right]. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Il nous reste maintenant à calculer la composante 00 de la perturbation au premier ordre du tenseur de Ricci perturbé

$$
\begin{aligned}
\delta R_{00} &= \frac{\partial \delta \Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial \delta \Gamma^{\lambda}{}_{00}}{\partial x^{\lambda}} \\
&+ \delta \Gamma^{\eta}{}_{0\nu} \overline{\Gamma}^{\nu}{}_{0\eta} + \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{0\nu} \delta \Gamma^{\nu}{}_{0\eta} - \delta \Gamma^{\eta}{}_{00} \overline{\Gamma}^{\nu}{}_{\nu\eta} - \overline{\Gamma}^{\eta}{}_{00} \delta \Gamma^{\nu}{}_{\nu\eta} \\
&= \frac{\partial \delta \Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial \delta \Gamma^{0}{}_{00}}{\partial t} - \frac{\partial \delta \Gamma^{i}{}_{00}}{\partial x^{i}} \\
&+ \delta \Gamma^{i}{}_{0j} \overline{\Gamma}^{j}{}_{0i} + \delta \Gamma^{i}{}_{0j} \overline{\Gamma}^{j}{}_{0i} - \delta \Gamma^{0}{}_{00} \overline{\Gamma}^{i}{}_{i0} \\
&= -\frac{1}{2} \ddot{h}_{00} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{2a^2} h_{ii} \right) + \frac{1}{2} \ddot{h}_{00} - \frac{1}{2a^2} \left(2\partial_i \dot{h}_{i0} - \partial_i \partial_i h_{00} \right) \\
&+ \frac{\dot{a}}{a^3} \delta_{ij} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} h_{ij} + \dot{h}_{ij} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{1}{2} \dot{h}_{00} \right).
\end{aligned}
$$

Après regroupement des termes, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\delta R_{00} &= \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{i0} \\
&+ \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right].
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

2.1.3 Perturbation du tenseur énergie-impulsion

Pour écrire les équations d'Einstein, on a aussi besoin du tenseur énergie-impulsion. Pour un fluide parfait, il s'écrit comme

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p)\, u_\mu u_\nu, \tag{2.27}$$

avec

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1. \tag{2.28}$$

Rappelons que dans le cas non perturbé le tenseur énergie-impulsion $\overline{T}_{\mu\nu}$ doit avoir la forme d'un fluide parfait

$$\overline{T}_{\mu\nu} = \overline{p}\, \overline{g}_{\mu\nu} + (\overline{\rho} + \overline{p})\, \overline{u}_\mu \overline{u}_\nu, \tag{2.29}$$

où $\overline{\rho}(t)$, $\overline{p}(t)$, et $\overline{u}^\mu$ sont la densité d'énergie, la pression, et le quadri-vecteur vitesse non perturbés, avec

$$\overline{u}^0 = 1, \quad \overline{u}^i = 0. \tag{2.30}$$

En faisant usage de l'équation (2.2) donnant les composantes du tenseur métrique $\overline{g}_{\mu\nu}$ qui sert à abaisser les indices, on en déduit facilement les composantes covariantes du quadri-vecteur vitesse non pertubé :

$$\overline{u}_0 = \overline{g}_{00}\overline{u}^0 = -1, \quad \overline{u}_i = \overline{g}_{ij}\overline{u}^j = 0. \tag{2.31}$$

Rappelons aussi qu'à partir des équations d' Einstein non perturbées, données par les équations (1.48) et (1.49) du chapitre 1, $\overline{\rho}(t)$, et $\overline{p}(t)$ peuvent s'écrire en terme du facteur d'échelle a et de ses dérivées comme

$$\overline{\rho} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad \overline{p} = -\frac{1}{8\pi G}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \tag{2.32}$$

(La première équation n'est autre que l'équation de Friedmann, qu'on a déja obtenue. Tandis que $\overline{p}$ résulte simplement de la soustraction de (1.49) de (1.48).) Il s'ensuit en particulier que la trace $\overline{T}^{\mu}{}_{\mu}$ du tenseur énergie-impulsion non perturbé est

$$\begin{aligned} \overline{T}^{\mu}{}_{\mu} &= 3\overline{p} - \overline{\rho} && (2.33)\\ &= -\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), && (2.34) \end{aligned}$$

où on a fait usage dans la première égalité des relations $\overline{T}^0{}_0 = -\rho$ et $\overline{T}^i{}_j = \overline{p}\delta_{ij}$ du chapitre précédent. Revenons maintenant à la condition de normalisation donnée par l'équation (2.28), qui donne

$$\delta u^0 = \delta u_0 = h_{00}/2. \tag{2.35}$$

En effet. La condition de normalisation (2.28), implique que $\delta\left(g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu\right) = 0$, d'où à l'ordre 1, on a $\delta g^{\mu\nu}\overline{u}_\mu\overline{u}_\nu + 2\overline{g}^{\mu\nu}\delta u_\mu u_\nu = 0$, qui se réduit à $h_{00}\overline{u}_0{}^2 + 2\delta u_0\overline{u}_0 = 0$, et ceci en tenant compte du fait que $\delta g^{00} = h^{00} = -h_{00}$, $\overline{g}^{00} = -1$, et $\overline{u}_i = 0$. Enfin, en substituant à $\overline{u}_0$ sa valeur -1, on obtient le résultat voulu. De la même façon on démontre $\delta u^0 = h_{00}/2$. Notons que δu_i est une variable dynamique indépendante, qui peut être décomposé [**?**] en gradiant d'un potentiel vitesse scalaire δu et d'un vecteur de divergence nulle δu_i^V. Plus explicitement,

$$\delta u_i \equiv \partial_i \delta u + \delta u_i^V, \quad \partial_i \delta u_i^V = 0. \tag{2.36}$$

Comme dans notre travail on s'intéresse seulement aux perturbations sclaires, $\delta u_i^V = 0$, et δu_i se réduit à

$$\delta u_i = \partial_i \delta u. \tag{2.37}$$

La perturbation d'ordre 1 au tenseur énergie-impulsion donnée par l'équation (2.27) est

$$\begin{aligned}\delta T_{\mu\nu} &= \overline{p}h_{\mu\nu} + \delta p \overline{g}_{\mu\nu} \\ &+ (\overline{\rho} + \overline{p})\,\delta u_\mu \overline{u}_\nu + (\overline{\rho} + \overline{p})\,\overline{u}_\mu \delta u_\nu + (\delta\rho + \delta p)\,\overline{u}_\mu \overline{u}_\nu,\end{aligned} \tag{2.38}$$

ou en termes de composantes,

$$\delta T_{ij} = \overline{p}h_{ij} + a^2\delta_{ij}\delta p,\ \ \delta T_{i0} = \overline{p}h_{i0} - (\overline{\rho} + \overline{p})\,\partial_i \delta u,\ \ \delta T_{00} = -\overline{\rho}h_{00} + \delta\rho, \tag{2.39}$$

où on a utilisé les équations (2.2), (2.31), (2.35) et (2.37)
Calculons maintenant les composantes mixtes perturbées du tenseur énergie-impulsion dont on aura besoin un peu plus loin pour les lois de conservation. Pour cela utilisons la relation

$$\delta T^{\mu}{}_{\nu} = \overline{g}^{\mu\lambda}\left[\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa}\overline{T}^{\kappa}{}_{\nu}\right], \tag{2.40}$$

qu'on peut démontrer à partir de l'égalité $T^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\lambda}\, T_{\lambda\nu}$. En effet

$$\begin{aligned}\delta T^{\mu}{}_{\nu} &= \delta\left(g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu}\right) \\ &= \overline{g}^{\mu\lambda}\delta T_{\lambda\nu} + h^{\mu\lambda}\overline{T}_{\lambda\nu} \\ &= \overline{g}^{\mu\lambda}\delta T_{\lambda\nu} - \overline{g}^{\mu\rho}\overline{g}^{\lambda\sigma}h_{\rho\sigma}\overline{T}_{\lambda\nu} \\ &= \overline{g}^{\mu\lambda}\delta T_{\lambda\nu} - \overline{g}^{\mu\rho}h_{\rho\sigma}\overline{T}^{\sigma}{}_{\nu},\end{aligned} \tag{2.41}$$

où on utilisé l'équation (2.3) et contracté les tenseurs $\overline{g}^{\lambda\sigma}$ et $\overline{T}_{\lambda\nu}$. Enfin, en réappelant l'indice muet ρ, λ, on obtient l'équation (2.40).
Avant d'entamer le calcul des composantes mixtes perturbées du tenseur énergie-impulsion rappelons les composantes mixtes non perturbées du tenseur énergie-impulsion car on en a besoin ici

$$\overline{T}^{i}{}_{j} = \overline{p}\delta_{ij},\ \ \overline{T}^{i}{}_{0} = 0,\ \ \overline{T}^{0}{}_{0} = -\rho,\ \ \overline{T}^{0}{}_{i} = 0. \tag{2.42}$$

Revenons maitenant aux composantes mixtes perturbées. En appliquant la relation donnée par l'équation (2.40), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\delta T^i_{\ j} &= \overline{g}^{i\lambda}\left[\delta T_{\lambda j} - h_{\lambda\kappa}\overline{T}^{\kappa}_{\ \ j}\right] \\
&= \overline{g}^{ik}\left[\delta T_{kj} - h_{kl}\overline{T}^{l}_{\ j}\right] \\
&= a^{-2}\delta_{ik}\left[\delta T_{kj} - h_{kl}\overline{p}\delta_{lj}\right], \\
&= a^{-2}\left[\delta T_{ij} - h_{ij}\overline{p}\right], \\
&= \delta_{ij}\delta p,
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

résultat obtenu en tenant compte du fait que $\lambda = 0$ et $\kappa = 0$ ne contribuent pas car $\overline{g}^{i0} = 0$ et $\overline{T}^{0}_{\ j} = 0$ d'après les équations (2.7) et (2.42) donnant les composantes covariantes du tenseur métrique non perturbé et les composantes mixtes du tenseur énergie-impulsion non perturbé. En remplaçant $\overline{g}^{ik}$ et $\overline{T}^{l}_{\ j}$ par leurs expressions données par les mêmes équations, et finalement en substituant à δT_{ij} son expression donnée par l'équation (2.39). En procédant de la même manière pour les composantes restantes, on obtient

$$
\delta T^i_{\ 0} = a^{-2}\left(\overline{\rho} + \overline{p}\right)\left(h_{i0} - \partial_i \delta u\right), \quad \delta T^0_{\ i} = \left(\overline{\rho} + \overline{p}\right)\partial_i \delta u, \quad \delta T^0_{\ 0} = -\delta\rho. \tag{2.44}
$$

Il s'ensuit en particulier que la trace du tenseur énergie-impulsion perturbée s'écrit

$$
\begin{aligned}
\delta T^\lambda_{\ \lambda} &= \delta T^0_{\ 0} + \delta T^i_{\ i} \\
&= -\delta\rho + 3\delta p,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Les composantes du tenseur énergie-impulsion obéissent à la condition de conservation : La dérivée covariante du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu}_{\ \nu;\mu}$ est nulle. Plus explicitement,

$$
T^{\mu}_{\ \nu;\mu} \equiv \partial_\mu T^{\mu}_{\ \nu} + \Gamma^{\mu}_{\ \mu\lambda} T^{\lambda}_{\ \nu} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} T^{\mu}_{\ \lambda} = 0, \tag{2.46}
$$

qui donne à l'ordre un de la perturbation

$$
\partial_\mu \delta T^{\mu}_{\ \nu} + \overline{\Gamma}^{\mu}_{\ \mu\lambda}\delta T^{\lambda}_{\ \nu} - \overline{\Gamma}^{\lambda}_{\ \mu\nu}\delta T^{\mu}_{\ \lambda} + \delta\Gamma^{\mu}_{\ \mu\lambda}\overline{T}^{\lambda}_{\ \nu} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\overline{T}^{\mu}_{\ \lambda} = 0. \tag{2.47}
$$

Pour $\nu = j$, l'équation (2.47) s'écrit

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \delta T^0_{\ j} + \partial_i \delta T^i_{\ j} + \overline{\Gamma}^{i}_{\ i0}\delta T^0_{\ j} - \overline{\Gamma}^{i}_{\ 0j}\delta T^0_{\ i} - \overline{\Gamma}^{0}_{\ ij}\delta T^i_{\ 0} \\
&\qquad + \delta\Gamma^{0}_{\ 0i}\overline{T}^{i}_{\ j} + \delta\Gamma^{l}_{\ li}\overline{T}^{i}_{\ j} - \delta\Gamma^{0}_{\ 0j}\overline{T}^{0}_{\ 0} - \delta\Gamma^{l}_{\ kj}\overline{T}^{k}_{\ l} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

où, on a tenu compte du fait que, d'une part $\overline{\Gamma}$ s'annule lorsque deux de ses indices au moins, ou lorsque ses trois indices sont spatiaux et que, d'autre part, les composantes mixtes de $\overline{T}$ sont nulles quand l'un de ses indices est temporel et l'autre est spatial. En substituant dans l'équation ci-dessus, aux composantes mixtes perturbées et non perturbées du tenseur énergie-impulsion leurs expressions données respectivement par les équations (2.43), (2.44) et (2.42), et aux composantes de la connection affine non perturbée et à la composante pertubée $\delta\Gamma^{0}{}_{0j}$ (le deuxième et le dernier terme de la deuxième ligne de l'équation se simplifient entre eux car en remplaçant dans le premier $\overline{T}^{i}{}_{j}$ par $\delta_{ij}\overline{p}$, on obtient $\overline{p}\delta\Gamma^{l}{}_{lj}$ et de la même manière pour le second, on trouve le même résultat) leurs expressions données respectivement par (2.11) et (2.16), on obtient, aprés un calcul simple et une regroupant les termes

$$\partial_t \left[(\overline{\rho} + \overline{p})\, \partial_j \delta u \right] + \partial_j \delta p + 3\, \frac{\dot{a}}{a}\, (\overline{\rho} + \overline{p})\, \partial_j \delta u - \frac{1}{2}\, (\overline{\rho} + \overline{p})\, \partial_j h_{00} = 0, \tag{2.49}$$

Pour $\nu = 0$, l'équation (2.47) se réduit à

$$\partial_\mu \delta T^{\mu}{}_{0} + \overline{\Gamma}^{\mu}{}_{\mu\lambda} \delta T^{\lambda}{}_{0} - \overline{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu 0} \delta T^{\mu}{}_{\lambda} + \delta\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} \overline{T}^{\lambda}{}_{0} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu 0} \overline{T}^{\mu}{}_{\lambda} = 0, \tag{2.50}$$

En ne gardant que les termes qui contribuent, pour les même raisons que dans le cas $\nu = j$, on a

$$\partial_t \delta T^{0}{}_{0} + \partial_i \delta T^{i}{}_{0} + \overline{\Gamma}^{i}{}_{i0} \delta T^{0}{}_{0} - \overline{\Gamma}^{i}{}_{j0} \delta T^{j}{}_{i} + \delta\Gamma^{i}{}_{i0} \overline{T}^{0}{}_{0} - \delta\Gamma^{j}{}_{i0} \overline{T}^{i}{}_{j} = 0. \tag{2.51}$$

En utilisant les équations (2.42), (2.43), (2.44), (2.11) et (2.13), et en procédant pour l'équation ci-dessus de la même manière que pour $\nu = j$, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t\, (\delta\rho) + \partial_i \left[a^{-2}\, (\overline{\rho} + \overline{p})\, (\partial_i \delta u - h_{io}) \right] + \frac{3\dot{a}}{a}\, (\delta\rho + \delta p) + & \\ + \frac{1}{2a^2}\, (\overline{\rho} + \overline{p}) \left(-\frac{2\dot{a}}{a} h_{ii} + \dot{h}_{ii} \right) = 0 & \end{aligned} \tag{2.52}$$

2.1.4 Equations d'Einstein perturbées

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les équations d'Einstein peuvent toujours se mettre sous la forme

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu},$$

avec

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \tag{2.53}$$

ou

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda}.$$

(La constante cosmologique, notée Λ, peut être accomodé en incluant dans le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ un terme proportionnel à $g_{\mu\nu}$, avec un coefficient constant. Dans le cas du vide la densité d'énegie ρ_V est constante et $\Lambda = 8\,\pi\,G\,\rho_V$.) La perturbation à la métrique et au tenseur énergie-impulsion produisent une perturbation au tenseur $S_{\mu\nu}$:

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\overline{g}_{\mu\nu}\delta T^{\lambda}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}\overline{T}^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{2.54}$$

Les composantes de la perturbation au tenseur $S_{\mu\nu}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\delta S_{jk} &= \delta T_{jk} - \frac{1}{2}\,\overline{g}_{jk}\,(-\delta\rho + 3\delta p) - \frac{1}{2}\,h_{jk}\,(-\overline{\rho} + 3\overline{p})\,, \\
\delta S_{j0} &= \delta T_{j0} - \frac{1}{2}\,\overline{g}_{j0}\,(-\delta\rho + 3\delta p) - \frac{1}{2}\,h_{j0}\,(-\overline{\rho} + 3\overline{p})\,, \\
\delta S_{00} &= \delta T_{00} - \frac{1}{2}\,\overline{g}_{00}\,(-\delta\rho + 3\delta p) - \frac{1}{2}\,h_{00}\,(-\overline{\rho} + 3\overline{p})\,,
\end{aligned}$$

où on a remplacé $\delta T^{\lambda}{}_{\lambda}$ et $\overline{T}^{\lambda}{}_{\lambda}$ par leurs expressions données respectivement par les équations (2.45)et (2.33).
En substituant aux composantes du tenseur métrique non perturbé $\overline{g}_{\mu\nu}$, et aux composantes du tenseur énergie-impulsion perturbé $\delta T_{\mu\nu}$ leurs expressions données respectivement par les équations (2.2) et (2.39), les composantes du tenseur $S_{\mu\nu}$ perturbé se réécrivent comme suit :

$$\delta S_{jk} = \frac{1}{2}\,(\overline{\rho} - \overline{p})\,h_{jk} + \frac{1}{2}a^2\delta_{jk}\,(\delta\rho - \delta p)\,, \tag{2.55}$$

$$\delta S_{j0} = \frac{1}{2}\,(\overline{\rho} - \overline{p})\,h_{j0} - (\overline{\rho} + \overline{p})\,\partial_i\delta u, \tag{2.56}$$

$$\delta S_{00} = -\frac{1}{2}\,(\overline{\rho} + 3\overline{p})\,h_{00} + \frac{1}{2}\,(\delta\rho + 3\delta p)\,. \tag{2.57}$$

En substituant aux composantes perturbées du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et du tenseur $S_{\mu\nu}$ leurs expressions données par les équations (2.24), (2.25), et (2.26) pour $R_{\mu\nu}$ et par les équations (2.55), (2.56), et (2.57) pour $S_{\mu\nu}$, les équations d'Einstein perturbées

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\,\pi\,G\,\delta S_{\mu\nu} \tag{2.58}$$

prennent alors la forme

$$
\begin{aligned}
-4\pi G\left[\,(\overline{\rho}-\overline{p})\,h_{jk}+a^2\delta_{jk}\,(\delta\rho-\delta p)\,\right] &= -\,\frac{1}{2}\,\partial_j\partial_k h_{00}-\left(\ddot{a}a+2\dot{a}^2\right)\delta_{jk}h_{00}\\
&-\frac{1}{2}a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00}+\frac{1}{2a^2}\,\left(\nabla^2 h_{jk}-\partial_i\partial_j h_{ik}-\partial_i\partial_k h_{ij}+\partial_j\partial_k h_{ii}\right)\\
&-\frac{1}{2}\,\ddot{h}_{jk}+\frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\dot{h}_{jk}-\delta_{jk}\dot{h}_{ii}\right)+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\,\left(-2h_{jk}+\delta_{jk}h_{ii}\right)\\
&+\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{jk}\partial_i h_{i0}+\frac{1}{2}\,\left(\partial_j\dot{h}_{ko}+\partial_k\dot{h}_{jo}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\partial_j h_{ko}+\partial_k h_{jo}\right), \qquad (2.59)\\
-8\pi G\left[\frac{1}{2}\,(\overline{\rho}-\overline{p})\,h_{j0}-(\overline{\rho}+\overline{p})\,\partial_i\delta u\right] &= \frac{\dot{a}}{a}\,\partial_j h_{00}+\frac{1}{2a^2}\,\left(\nabla^2 h_{jo}-\partial_j\partial_i h_{i0}\right)\\
&-\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h_{j0}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\,(\partial_j h_{ii}-\partial_i h_{ij})\right], \qquad (2.60)\\
-4\pi G\left[-\,(\overline{\rho}+3\overline{p})\,h_{00}+(\delta\rho+3\delta p)\right] &= \frac{1}{2a^2}\,\nabla^2 h_{00}+\frac{3}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{00}-\frac{1}{a^2}\,\partial_i\dot{h}_{i0}\\
&+\frac{1}{2a^2}\left[\ddot{h}_{ii}-2\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{ii}+2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ii}\right]. \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'équation (2.32), on peut exprimer le premier terme entre parenthèses figurant dans le membre de gauche de chacune des équations ci-dessus en fonction du facteur d'échelle a et de ses dérivées. C'est à dire, on substitue à $(\overline{\rho}-\overline{p})$ et à $(\overline{\rho}+3\overline{p})$ $(4\pi G)^{-1}\left(2\dot{a}^2/a^2+\ddot{a}/a\right)$ et $-\,(3/4\pi G)\,(\ddot{a}/a)$ respectivement. Puis, en les transposant chacun dans le membre de droite correspondant, les équations d'Einstein ci-dessus se réécrivent comme suit :

$$
\begin{aligned}
-4\pi G a^2\delta_{jk}\,(\delta\rho-\delta p) &= -\,\frac{1}{2}\,\partial_j\partial_k h_{00}-\left(\ddot{a}a+2\dot{a}^2\right)\delta_{jk}h_{00}\\
&-\frac{1}{2}a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00}+\frac{1}{2a^2}\,\left(\nabla^2 h_{jk}-\partial_i\partial_j h_{ik}-\partial_i\partial_k h_{ij}+\partial_j\partial_k h_{ii}\right)\\
&-\frac{1}{2}\,\ddot{h}_{jk}+\frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\dot{h}_{jk}-\delta_{jk}\dot{h}_{ii}\right)+\frac{\ddot{a}}{a}h_{jk}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\delta_{jk}h_{ii}\\
&+\frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{jk}\partial_i h_{i0}+\frac{1}{2}\,\left(\partial_j\dot{h}_{ko}+\partial_k\dot{h}_{jo}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\partial_j h_{ko}+\partial_k h_{jo}\right), \qquad (2.62)\\
+8\pi G\,(\overline{\rho}+\overline{p})\,\partial_j\delta u &= \frac{\dot{a}}{a}\,\partial_j h_{00}+\frac{1}{2a^2}\,\left(\nabla^2 h_{jo}-\partial_j\partial_i h_{i0}\right)\\
&+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\,(\partial_j h_{ii}-\partial_i h_{ij})\right], \qquad (2.63)\\
-4\pi G\,(\delta\rho+3\delta p) &= 3\,\frac{\ddot{a}}{a}h_{00}+\frac{1}{2a^2}\,\nabla^2 h_{00}+\frac{3}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{00}-\frac{1}{a^2}\,\partial_i\dot{h}_{i0}\\
&+\frac{1}{2a^2}\left[\ddot{h}_{ii}-2\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{ii}+2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ii}\right]. \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

Notons que que les équations de conservation (2.52) et (2.49) ne sont pas des conditions indépendantes, mais elles peuvent être dérivées à partir des équations d'Einstein. Cependant, il est souvent convenable d'utiliser l'une d'elles ou toutes les deux à la place d'une ou de deux équations d'Einstein. Nous allons utiliser ici la troisième équation d'Einstein (2.64) et les deux équations de conservation (2.52) et (2.49).

La jauge synchrone

La perturbation à la métrique s'écrit dans le cas des perturbations scalaires [12], dans la jauge synchrone, comme :

$$h_{00} = 0, \quad h_{i0} = 0, \quad h_{ij} = a^2 \left[A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} \right], \tag{2.65}$$

où les perturbations A et B sont des fonctions de x^i avec $i = 1, 2, 3$ et de t. La métrique compléte perturbée est, donc

$$g_{00} = -1, \quad g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \left[(1 + A)\, \delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} \right], \tag{2.66}$$

Remplaçons maintenant l'équation (2.65) dans les équations (2.64), (2.49), et (2.52). Commençons par considérer l'équation (2.64) qui se réduit à

$$-4\pi G\, (\delta\rho + 3\delta p) = \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - 2\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{h}_{ii} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right], \tag{2.67}$$

avec

$$h_{ii} = a^2 \left(3A + \nabla^2 B\right) \tag{2.68}$$

$$\dot{h}_{ii} = 2a\dot{a} \left(3A + \nabla^2 B\right) + a^2 \left(3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}\right) \tag{2.69}$$

$$\ddot{h}_{ii} = 2\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)\left(3A + \nabla^2 B\right) + 4a\dot{a}\left(3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}\right) + a^2\left(3\ddot{A} + \nabla^2 \ddot{B}\right), \tag{2.70}$$

où, on a permuté les dérivées partielles temporelle et spatiale. Donc, dans cette jauge l'équation (2.67) prend la forme

$$-4\pi G\, (\delta\rho + 3\delta p) = 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\dot{A} + \frac{3}{2}\,\ddot{A} + \frac{\dot{a}}{a}\,\nabla^2 \dot{B} + \frac{1}{2}\,\nabla^2 \ddot{B}. \tag{2.71}$$

En substituant à h_{ii} et $\dot{h}_{ii}$ leurs expressions données respectivement par les équations (2.68) et (2.69) ($h_{i0} = 0$), l'équation (2.52) prend alors dans la jauge synchrone la forme

$$\delta\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2 \left[a^{-2}\,(\overline{\rho} + \overline{p})\,\delta u \right] + \frac{1}{2}\,(\overline{\rho} + \overline{p})\left(3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}\right) = 0., \tag{2.72}$$

où on a permuté δ et ∂_t. Ceci d'une part. D'autre part, on a fait sortir ∂_i à l'extérieur de la parenthèse du second terme de l'équation (2.52) ($\partial_i \left[a^{-2}\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\partial_i \delta u\right] = \nabla^2 \left[a^{-2}\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u\right]$) car $a^{-2}\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)$ ne dépend que de t.
Enfin, l'équation (2.49), donnant la loi de conservation de l'impulsion, s'écrit dans la jauge choisit comme :

$$\partial_j \left[\partial_t \left[\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u\right] + \delta p + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u\right] = 0, \tag{2.73}$$

où, on a permuté ∂_j et ∂_t, et on a met ∂_j en facteur car le facteur d'échelle a, la densité d'énergie $\overline{\rho}$, et la pression $\overline{p}$ ne dépendent pas des coordonnées spatiales.
On n'en déduit de l'équation (2.73) la dernière équation voulu dans la jauge synchrone dans laquelle on travaille

$$\partial_t \left[\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u\right] + \delta p + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u = 0. \tag{2.74}$$

En posant $\psi \equiv \frac{1}{2}\left[3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}\right]$, les équations (2.71) et (2.72) se réécrivent respectivement comme

$$-4\pi G a^2 \left(\delta\rho + 3\delta p\right) = \frac{\partial}{\partial t}\,\left(a^2\psi\right) \tag{2.75}$$

et

$$\delta\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left(\delta\rho + \delta p\right) + \nabla^2\left[a^{-2}\left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\delta u\right] + \left(\overline{\rho}+\overline{p}\right)\psi = 0. \tag{2.76}$$

Dans notre travail présent, nous considérons seulement les perturbations à la densité de matière non relativiste (les densités des autres composants de l'univers sont uniformes) composée de la matière noire froide ou (CDM)et de la matière baryonique. Les particles de cette matière (matière noire froide et matière baryonique) se meuvent avec des vitesses très petites devant la vitesse de la lumière. Dans ce cas, on peut négliger la pression aussi bien de la matière noire que de la matière baryonique, et donc, on peut prendre

$$\overline{p}_D = \delta p_D = 0, \tag{2.77}$$
$$\overline{p}_B = \delta p_B = 0. \tag{2.78}$$

Dorénavant les indice D et B désignent respectivement la matière noire froide et la matière baryonique. On peut adopter [**?**] une jauge synchrone particulière dans laquelle la vitesse de la la matière noire froide est nulle, c'est à dire

$$u^i_D = 0. \tag{2.79}$$

La matière noire froide est donc caractérisée par sa densité totale $\overline{\rho}_D(t) + \delta\rho_D(\vec{x}, t)$, avec la densité non perturbée $\overline{\rho}_D(t)$ décroissant comme $a^{-3}(t)$, la pression et la vitesse nulles. La matière baryonique est caractérisée par la densité non perturbée $\overline{\rho}_B(t)$ qui décroit comme $a^{-3}(t)$, et la perturbation de densité $\delta\rho_B(\vec{x}, t)$, avec la pression nulle mais non le potentiel vitesse $\delta u_B(\vec{x}, t)$.

Pour obtenir l'équation de conservation d'énergie dans le cas de la matière baryonique, on utilise l'équation (2.76). En tenat compte de (2.78), nous obtenons

$$\delta\dot{\rho}_B + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\delta\rho_B + a^{-2}\overline{\rho}_B\nabla^2\delta u_B + \overline{\rho}_B\psi = 0, \tag{2.80}$$

où on a fait sortir $a^{-2}\overline{\rho}_B$ de sous le signe ∇^2 car a et $\overline{\rho}_B$ sont indépendants des coordonnées spatiales. En divisant l'équation (2.80) par $\overline{\rho}_B(t)$ qui est proportionnelle à $a^{-3}(t)$. Nous avons

$$a^3\delta\dot{\rho}_B + 3\,a^2\,\dot{a}\,\delta\rho_B + a^{-2}\nabla^2\delta u_B + \psi = 0, \tag{2.81}$$

ou encore

$$\left(a^3\delta\rho_B\right)^{\cdot} + a^{-2}\nabla^2\delta u_B + \psi = 0. \tag{2.82}$$

En substituant une autre fois à a^3 son expression $(\overline{\rho}_B(t))^{-1}$, on obtient

$$\left(\frac{\delta\rho_B}{\overline{\rho}_B}\right)^{\cdot} + a^{-2}\nabla^2\delta u_B + \psi = 0, \tag{2.83}$$

ou

$$\dot{\delta}_B + a^{-2}\nabla^2\delta u_B = -\psi, \tag{2.84}$$

avec $\delta_B \equiv \delta\rho_B/\overline{\rho}_B$. De même pour la loi de conservation d'énergie dans le cas de la matière noire froide, on utilise l'équation (2.76), avec la pression et le potentiel vitesse nuls. En procédant de la même manière que pour la matière baryonique, on trouve

$$\dot{\delta}_D = -\psi, \tag{2.85}$$

où $\delta_D \equiv \delta\rho_D/\overline{\rho}_D$. L'équation de conservation de l'impulsion pour la matière baryonique est donnée par l'équation (2.74) avec la pression nulle,

$$\partial_t\left(\overline{\rho}_B\delta u_B\right) + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\overline{\rho}_B\delta u_B = 0. \tag{2.86}$$

En multipliant l'équation (2.86) par a^3, on a

$$a^3\partial_t\left(\overline{\rho}_B\delta u_B\right) + 3a^2\dot{a}\overline{\rho}_B\delta u_B = 0 \tag{2.87}$$

ou

$$\partial_t \left(a^3 \overline{\rho}_B \delta u_B\right) = 0. \tag{2.88}$$

Comme $\overline{\rho}_B \propto a^{-3}$, on a simplement

$$\delta \dot{u}_B = 0, \tag{2.89}$$

où on a permuté δ et ∂_t. Finalement, si on tient compte simplement des perturbations de la densité de la matière (matière noire froide + matière baryonique), l'équation (2.75) du champ gravitationnel devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\psi\right) &= -4\pi G a^2 \left(\delta\rho_B + \delta\rho_D\right) \\ &= -4\pi G a^2 \left(\overline{\rho}_B \delta_B + \overline{\rho}_D \delta_D\right), \end{aligned} \tag{2.90}$$

où on a tenu compte dans la première ligne, des équations (2.77) (2.78), et on a fait usage dans la deuxième ligne de la notation qu'on a vu un peu plus haut $\delta \equiv \delta\rho/\overline{\rho}$.

Comme,

$$\rho_M = \rho_B + \rho_D, \quad \delta\rho_M = \delta\rho_B + \delta\rho_D, \quad \overline{\rho}_M = \overline{\rho}_B + \overline{\rho}_D,$$

on a :

$$\begin{aligned} \delta_M \equiv \frac{\delta\rho_M}{\overline{\rho}_M} &= \frac{\delta\rho_B}{\overline{\rho}_M} + \frac{\delta\rho_D}{\overline{\rho}_M} \\ &= \frac{\overline{\rho}_B\delta_B + \overline{\rho}_D\delta_D}{\overline{\rho}_M} \\ &= \frac{\overline{\rho}_B\delta_B + \overline{\rho}_D\delta_D}{\overline{\rho}_B + \overline{\rho}_D} \end{aligned} \tag{2.91}$$

En substituant, dans l'équation (2.90), à $(\overline{\rho}_B\delta_B + \overline{\rho}_D\delta_D)$ son expression $\overline{\rho}_M\delta_M$, déduite de de l'équation (2.91), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\psi\right) = -4\pi G a^2 \overline{\rho}_M \delta_M. \tag{2.92}$$

Ceci d'une part. D'autre part, multiplions l'équation (2.84) par a^2, puis dérivons la par rapport à t, et en tenant compte de l'équation (2.89), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\dot{\delta}_B\right) = -\frac{d}{dt}\left(a^2\psi\right). \tag{2.93}$$

De même en dérivant l'équation (2.85) par rapport à t, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\dot{\delta}_D\right) = -\frac{d}{dt}\left(a^2\psi\right). \quad (2.94)$$

Comme les fractions de densité des perturbations de la matière noire froide δ_D et de la matière baryonique δ_B s'approchent l'une de l'autre [?], il s'ensuit que la fraction de perturbation δ_M dans la densité de masse totale approche

$$\delta_M \equiv \frac{\overline{\rho}_B\delta_B + \overline{\rho}_D\delta_D}{\overline{\rho}_B + \overline{\rho}_D} \rightarrow \delta_D \rightarrow \delta_B \quad (2.95)$$

et deviennent eventuellement toutes égales. L'équation (2.92) s'écrit alors, en utilisant les équations (2.94) et (2.93),

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\dot{\delta}_M\right) = 4\pi G a^2 \overline{\rho}_M \delta_M. \quad (2.96)$$

L'équation (2.96) peut encore s'écrire sous la forme

$$\ddot{\delta}_M + H\dot{\delta}_M - 4\pi G a^2 \overline{\rho}_M \delta_M = 0, \quad (2.97)$$

où $H = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble. L'équation (2.97), est l'équation différentielle d'ordre un de la perturbation à laquelle satisfait la densité de perturbation de la matière $\delta_M = \delta\rho_M/\overline{\rho}_M$ à grande échelle.

Chapitre 3

L'index de croissance

Nous avons vu, au chapitre précédent, que dans le cadre de la relativité générale, la perturbation linéaire de la densité de matière $\delta = \delta\rho_M/\rho_M$, à grande échelle, satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_M\delta = 0, \tag{3.1}$$

où $H = \dot{a}(t)/a(t)$ est le paramètre de Hubble. (on a ôté la barre de la densité de matière non perturbée $\overline{\rho}_M$ et l'idice M de δ_M et de ses dérivées.) L'interprétation physique de l'équation (3.1) est très simple : la perturbation croît selon le terme source comprenant la quantité de matière susceptible de se grouper et est restreint par un terme de friction provenant de l'expansion de l'univers (H). Dans ce chapitre, nous allons écrire l'équation (3.1) en terme du facteur de croissance $f = d\ln\delta/d\ln a$, puis nous approximerons la solution de l'équation obtenue par Ω_M^γ, où γ est l'index de croissance qui dépend toujours du modèle, et qui peut être utilisé comme signature des modèles d'énergie noire et de la modification de la gravitation. La dépendance en γ de l'équation d'état $w \equiv p/\rho$ a soulevé beacoup d'attention en suscitant une large littérature. Dans notre travail, nous allons considérer un modèle dynamique d'énergie noire primordial ou (early dark energy) appelé le modèle de Mocker, introduit pour la première fois par [14], où l'énergie noire se comporte comme la matière non relativiste pour de grands redshift. Nous obtiendrons une paramètrisation pour γ comme fonction Ω_M et w. Cette paramètrisation couvre aussi bien les petits, intermédiaires, et les grands redshifts. Pour cela, nous allons faire un développement de l'index de croissance γ autour de $\Omega_M = 1$ et $w = 0$ où l'univers était dominé par la matière. Puis nous apportererons à ce développement une correction tenant compte de la petite quantité d'énergie noire dans l'univers primordial. L'expression de $\gamma(\Omega_M, w)$ étant compliquée, nous allons essayer d'obtenir une expression simple, pour ce modèle, qui appoxime le facteur de coissance f. Puis nous comparerons l'approximation Ω_M^γ avec f grâce à l'erreur ralative $\left(\Omega_M^\gamma - f\right)/f$.

3.1 La solution approximative

En termes du facteur de croissance f, défini par $f \equiv d\ln\delta/d\ln a$, (3.1), la perturbation de densité de matière, devient

$$f' + f^2 + \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 2\right) f = \frac{3}{2}\,\Omega_M, \tag{3.2}$$

(où prime $'$ dénote $d/d\ln a$, et point $\cdot$ dénote d/dt). En effet,
$f = d\ln\delta/d\ln a = (d\ln\delta/dt)\,(dt/da)\,(da/d\ln a) = \left(\dot{\delta}/\delta\right)(a/\dot{a}) = \dot{\delta}/\left(H\delta\right)$ donne

$$\dot{\delta} = H\,f\,\delta. \tag{3.3}$$

Ceci d'une part. D'autre part, $\ddot{\delta} = \mathrm{d}\dot{\delta}/\mathrm{d}t = \left(\mathrm{d}\dot{\delta}/\mathrm{d}\ln a\right)(\mathrm{d}\ln a/\mathrm{d}t) = H\mathrm{d}\dot{\delta}/\mathrm{d}\ln a$ (car $H = \dot{a}/a$). En substituant à $\dot{\delta}$ son expression $\dot{\delta} = H\,f\,\delta$, (3.3), $\ddot{\delta}$ s'écrit : $\ddot{\delta} = H\mathrm{d}\left(H\,f\,\delta\right)/\mathrm{d}\ln a = H\left(H'\,f\,\delta + H\,f'\,\delta + H\,f\,\delta'\right)$. Mais comme $H' = \dot{H}/H$ et $\delta' = \dot{\delta}/H = f\,\delta$, $\ddot{\delta}$ devient

$$\ddot{\delta} = \left(\frac{\dot{H}}{H^2}\,f + f' + f^2\right) H^2\,\delta. \tag{3.4}$$

En substituant, dans l'équation (3.1), à $\dot{\delta}$ et $\ddot{\delta}$ leurs expressions respectives (3.3) et (3.4), et en introduisant la densité de matière sans dimenssion $\Omega_M = 8\pi G\rho_M/\left(3H^2\right)$, on aboutit à l'équation voulu

$$f' + f^2 + \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 2\right) f = \frac{3}{2}\,\Omega_M.$$

En général, il n'y a pas une solution analytique à l'équation (3.2), et le facteur de croissance f est approximée [5], [6], [7], [8] par

$$f = \Omega_M^\gamma, \tag{3.5}$$

où γ est l'index de croissance, qui dépend du paramètre de la densité de matière Ω_M et de l'équation d'état de l'énergie sombre w : $\gamma(\Omega_M(a), w(a))$. On suppose que Ω_M et w sont indépendants.

Substituons maintenant la solution approximative $f = \Omega_M^\gamma$ dans l'équation (3.2), on obtient

$$\left(\gamma' \ln\Omega_M + \gamma\,\frac{\Omega_M'}{\Omega_M}\right)\Omega_M^\gamma + \Omega_M^{2\gamma} + \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 2\right)\Omega_M^\gamma - \frac{3}{2}\,\Omega_M = 0. \tag{3.6}$$

En substituant à γ' son expression $\gamma' = (\partial\gamma/\partial w)\, w' + (\partial\gamma/\partial\Omega_M)\, \Omega'_M$ dans l'équation précédente, et en la divisant par Ω_M^γ, l'équation (3.6) se réécrit comme

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w} w' + \frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\Omega'_M\right) \ln\Omega_M + \gamma\,\frac{\Omega'_M}{\Omega_M} + \Omega_M^\gamma + \left(\frac{\dot H}{H^2} + 2\right) - \frac{3}{2}\,\Omega_M^{1-\gamma} = 0. \qquad (3.7)$$

Exprimons maintenant w', Ω'_M, et $\dot H/H^2$ en fonction de Ω_M et de w.

3.2 Expression de ˙ ^{2} en fonction de Ω_M et de .

En additionnant les deux équations d'Einstein,

$$-2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \frac{\ddot a}{a} = 4\,\pi\, G\,(p - \rho) \qquad (3.8)$$

et

$$3\frac{\ddot a}{a} = -4\,\pi\, G\,(3p + \rho) \qquad (3.9)$$

données au chapitre un, on obtient

$$-\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{\ddot a}{a} = -4\pi G\,(\rho + p) \qquad (3.10)$$

ou

$$\dot H = -4\pi G\,(\rho + p)\,. \qquad (3.11)$$

(Car $\dot H = \mathrm{d}\,(\dot a/a)\,/\mathrm{d}t = \ddot a/a - (\dot a/a)^2$). Notons que la densité d'énergie et d'impulsion, dans les deux équations précédentes, sont ceux de tous les constituants de l'univers, c'est à dire de la matière (la matière noire + la matière baryonique) et l'énergie noire (on néglige la contribution du rayonnement). Plus explicitement l'équation (3.11), s'écrit

$$\dot H = -4\pi G\left[\rho_M + \rho_{DE}\,(1 + w)\right]. \qquad (3.12)$$

L'équation d'état définie par $w = p_{DE}/\rho_{DE}$ figurant dans l'équation (3.12) est celle de l'énergie noire, celle de la matière est nulle (car p de matière est nulle). En divisant par H^2 et en introduisant le paramètre de densité, de la matière et de l'énergie sombre, défini dans le chapitre un par $\Omega = 8\pi G\rho/\left(3H^2\right)$, on obtient

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\left[\Omega_M + \Omega_{DE}\left(1+w\right)\right]. \tag{3.13}$$

En utilisant la relation $\Omega_{ED} = 1 - \Omega_M$, déduite de l'équation (1.65) dans le cas d'un espace plat avec le rayonnement négligeable, l'équation (3.13) se réécrit comme

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\left[1 + w\left(1-\Omega_M\right)\right]. \tag{3.14}$$

3.3 Expression de Ω'_M en fonction de Ω_M et de .

Commençons par écrire l'équation de conservation de l'énergie, $\dot{\rho} = -3\,H\,(\rho + p)$, pour la matière uniquement, (ceci est permis car les constituants du fluide de notre univers énergie sombre ou noire et la matière n'intéragissent pas)

$$\dot{\rho}_M = -3H\rho_M. \tag{3.15}$$

Ceci d'une part. D'autre part, la dérivation par rapport au temps de $\rho_M = 3H^2\Omega_M/\left(8\pi G\right)$ donne

$$\dot{\rho}_M = \frac{3H\dot{H}\Omega_M}{4\pi G} + \frac{3H^2\dot{\Omega}_M}{8\pi G}. \tag{3.16}$$

En égalant les équations (3.15) et (3.16), on btient

$$\dot{\Omega}_M = -2\,\frac{\dot{H}}{H}\,\Omega_M - \frac{8\pi G}{H}\,\rho_M. \tag{3.17}$$

Or, $\dot{\Omega}_M = H\Omega'_M$, d'où

$$\Omega'_M = -2\,\frac{\dot{H}}{H^2}\,\Omega_M - \frac{8\pi G}{H^2}\,\rho_M. \tag{3.18}$$

En substituant à $\dot{H}/H^2$ son expression donnée par l'équation (3.14) et en utilisant encore une fois la relation $\rho_M = 3H^2\Omega_M/\left(8\pi G\right)$, on arrive à l'expression Ω'_M en fonction de Ω_M et w :

$$\Omega'_M = 3w\Omega_M\left(1-\Omega_M\right). \tag{3.19}$$

3.4 Expression de $'$ en fonction de .

Comme nous l'avons dit un plus haut, nous allons travailler dans le cadre du modèle de Mocker.
L'équation d'état de l'énergie noire de ce modèle est donnée par :

$$w(a) = -1 + \left[1 - \frac{w_0}{1+w_0}\, a^C\right]^{-1}, \tag{3.20}$$

où $a = 1/(1+z)$ est le facteur d'échelle, w_0 est l'équation d'état de l'énergie noire aujourd'hui et C est un paramètre. Dans ce modèle l'énergie noire a, comme la matière non relativiste, pour équation d'état $w = 0$ pour de grands redshifts z, mais tend asymptotiquement vers la constante cosmologique avec $w = -1$. L'évolution de la densité de l'énergie noire peut être obtenue aisement via l'équation (1.54) du chapitre un. On substitue à w son expression donnée par l'équation (3.85)

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{EDE}(a)}{\rho_{EDE0}} &= exp - 3\int_1^a \frac{\mathrm{d}a'}{a'}\left(\frac{1}{1 - \frac{w_0}{1+w_0}\, a'^C}\right) \\
&= exp - 3\int_1^a \mathrm{d}a' \left(\frac{1}{a'} + \frac{\frac{w_0}{1+w_0}\, a'^{C-1}}{1 - \frac{w_0}{1+w_0}\, a'^C}\right) \\
&= exp - 3\left[\ln a - \frac{1}{C}\ln\left(1 - \frac{w_0}{1+w_0}\, a^C\right) + \frac{1}{C}\ln\left(\frac{1}{1+w_0}\right)\right] \\
&= \left[(1+w_0)\, a^{-C} - w_0\right]^{3/C},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où $\rho_{EDE0} \equiv \rho_{EDE}\,(a = a_0 = 1)$. Le paramètre de Hubble H donné par l'équation (1.71) s'écrit dans ce cas d'énergie noire primordiale (EDE), pour un univers spatialement plat ($k = 0$) avec rayonnement négligeable, comme

$$\begin{aligned}
H &= H_0\sqrt{\Omega_{DE0}\left[(1+w_0)\, a^{-C} - w_0\right]^{3/C} + \Omega_{M0} a^{-3}} \\
&= H_0\sqrt{(1-\Omega_{M0})\left[(1+w_0)\, a^{-C} - w_0\right]^{3/C} + \Omega_{M0} a^{-3}},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

où $H_0 \equiv H(a = 1)$ est le paramètre de Hubble aujourd'hui.
Les valeurs des paramètres w et C sont ($w_0 = -0,95$, $C = 2,5$), données par [**?**, **?**].
Exprimons maintenant w' en fonction de w. En substituant dans l'équation (3.19), w par son expression donnée par l'équation (3.85), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_M}{\Omega_M(1-\Omega_M)} = 3\left[-\frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}a}{a\left(1 - \frac{w_0 a^C}{1+w_0}\right)}\right], \tag{3.23}$$

où on a utilisé le fait que $\Omega_M' = d\Omega_M/d\ln a = a\left(d\Omega_M/da\right)$, puis on a séparé les variables Ω_M et a. En décomposant $1/\left[a\left(1-w_0 a^C/\left(1+w_0\right)\right)\right]$ en $1/a+\left[w_0 a^{C-1}/\left(1+w_0\right)\right]/\left[1-w_0 a^C/\left(1+w_0\right)\right]$ et la fraction $\Omega_M/\left[\Omega_M\left(1-\Omega_M\right)\right]$ en $1/\Omega_M + 1/\left(1-\Omega_M\right)$ l'équation (3.23) se réécrit aprés simplification comme

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_M}{\Omega_M} + \frac{\mathrm{d}\Omega_M}{1-\Omega_M} = 3\,\frac{\frac{w_0}{1-w_0}\,a^{C-1}}{1-\frac{w_0}{1+w_0}\,a^C}\mathrm{d}a. \tag{3.24}$$

En intégrant, nous obtenons

$$\ln\Omega_M - \ln\left(1-\Omega_M\right) = -\frac{3}{C}\,\ln\left(1-\frac{w_0 a^C}{1+w_0}\right) + constante. \tag{3.25}$$

Aprés une manipulation simple, de l'équation ci-dessus et en tenant compte de la condition : $\Omega_M = \Omega_{M0}$ pour $a = 1$, on obtient le paramètre de densité Ω_M

$$\Omega_M = \frac{1}{1+\frac{\left(1+w_0\right)^{3/C}}{\frac{\Omega_{M0}}{1-\Omega_{M0}}}\left(1-\frac{w_0}{1+w_0}a^C\right)^{3/C}}. \tag{3.26}$$

Revenons maintenant à l'équation (3.25), qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\ln\Omega_M - \ln\left(1-\Omega_M\right) = \frac{3}{C}\,\ln\left(1+w\right) + constante, \tag{3.27}$$

car on déduit facilement de l'équation (3.85), que $1-w_0 a^C/\left(1+w_0\right) = \left(1+w\right)^{-1}$. Dérivons maitenant l'équation (3.27) par rapport à $\ln a$. Obtenons

$$\frac{\Omega_M'}{\Omega_M} + \frac{\Omega_M'}{1-\Omega_M} = \frac{3}{C}\,\frac{w'}{1+w}. \tag{3.28}$$

En substituant à Ω_M' son expression donnée par l'équation (3.19) dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$w' = C\,w\left(1+w\right). \tag{3.29}$$

En substituant dans l'équation (3.7) $\dot{H}/H^2$, Ω_M', et w' par leurs expressions respectives (3.14), (3.19), et (3.29), on obtient

$$\begin{aligned} C\,\frac{\partial\gamma}{\partial w}\,w\left(1+w\right)\ln\Omega_M + 3w\,\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\,\Omega_M\left(1-\Omega_M\right)\ln\Omega_M + \\ +3w\gamma\left(1-\Omega_M\right) + \Omega_M^{\gamma} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,w\left(1-\Omega_M\right) - \frac{3}{2}\,\Omega_M^{1-\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Faisons maitenant un développement en série de toutes les quantités, de l'équation (3.30), jusqu'à des termes d'ordre 5 autour de $\Omega_M = 1$ et $w = 0$ quand l'univers était dominé par la matière. Commençons par le premier terme de la première ligne dont le développement jusqu'à l'ordre 5 donne

$$\begin{aligned}
C\frac{\partial\gamma}{\partial w}w\left(1+w\right)\ln\Omega_M &= C\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)\\
&+C\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\right]w\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+C\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right]w\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&+C\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\right]w\left(\Omega_M-1\right)^4\\
&+C\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\right]w^2\left(\Omega_M-1\right)\\
&+C\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\right]w^2\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+C\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right]w^2\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&+C\left[\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}\right]w^3\left(\Omega_M-1\right)\\
&+C\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\right]w^3\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+C\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0}\right]w^4\left(\Omega_M-1\right).
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Le second terme de la première ligne de l'équation (3.30), peut s'écrire comme la somme de $-3w\left(\partial\gamma/\partial\Omega_M\right)(\Omega_M-1)^2\ln\Omega_M$ (contribuant au développement par 4 termes $-3\left(\partial\gamma/\partial\Omega_M\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^3$, $(3/2)\left(\partial\gamma/\partial\Omega_M\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^4$, $-3\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^4$, et $-3\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega_M\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)^3$) et de $3w\left(\partial\gamma/\partial\Omega_M\right)(1-\Omega_M)\ln\Omega_M$, donnant le reste des termes figurant dans le développement ci-dessous :

$$\begin{aligned}
3\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}w\Omega_M\left(1-\Omega_M\right)\ln\Omega_M = &-3\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&-\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+3\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right]w\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\right]w\left(\Omega_M-1\right)^4\\
&-3\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&-\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+3\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\right]w^2\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w^3\left(\Omega_M-1\right)^2. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Passons maintenant à la deuxième ligne de l'équation (3.30). Le développement du premier terme donne

$$\begin{aligned}
3w\left(1-\Omega_M\right)\gamma = &-3\gamma_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)-3\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}w\left(\Omega_M-1\right)^4\\
&-3\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)-3\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}w^3\left(\Omega_M-1\right)\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}w^3\left(\Omega_M-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}w^4\left(\Omega_M-1\right) \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

La quantité $1/2 - 3w\left(1-\Omega_M\right)/2$ reste telle qu'elle est, tandis que le développement du terme Ω_M^γ, donne

$$
\begin{aligned}
\Omega_M^\gamma = {} & 1 + \gamma_{1,0}\left(\Omega_M - 1\right) + \left[-\frac{\gamma_{1,0}}{2} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^2}{2}\right]\left(\Omega_M-1\right)^2 \\
& + \left[\frac{\gamma_{1,0}}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{\gamma_{1,0}^2}{2} + \gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^3}{6}\right]\left(\Omega_M-1\right)^3 \\
& + \left[-\frac{\gamma_{1,0}}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} + \frac{11}{24}\gamma_{1,0}^2 - \gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}^2 + \frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{\gamma_{1,0}^3}{4} + \frac{\gamma_{1,0}^2}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^4}{24}\right]\left(\Omega_M-1\right)^4 \\
& + \left[\frac{\gamma_{1,0}}{5} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial\Omega_M^4}\right)_{1,0}\right. \\
& \quad - \frac{5}{12}\gamma_{1,0}^2 + \frac{11}{12}\gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}^2 \\
& \quad - \frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{7}{24}\gamma_{1,0}^3 - \frac{3}{4}\gamma_{1,0}^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} \\
& \quad \left. + \frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}^2 + \frac{\gamma_{1,0}^3}{6}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{\gamma_{1,0}^4}{12} + \frac{\gamma_{1,0}^2}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^5}{120}\right]\left(\Omega_M-1\right)^5 \\
& + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} w\left(\Omega_M-1\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} - \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\right] w\left(\Omega_M-1\right)^2 \\
& + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\right. \\
& \qquad \left. + \gamma_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^2}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\right] w\left(\Omega_M-1\right)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\\
&\quad+\frac{11}{12}\gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}-\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\quad-\gamma_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\\
&\quad-\frac{3}{4}\gamma_{1,0}^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\gamma_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{\gamma_{1,0}^2}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{\gamma_{1,0}^3}{6}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\Bigg]w\left(\Omega_M-1\right)^4\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)\\
&+\Bigg[-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2+\frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\Bigg]w^2\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+\Bigg[\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2\\
&\quad-\frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\qquad\quad+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{\gamma_{1,0}}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2+\frac{\gamma_{1,0}^2}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\Bigg]w^2\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}w^3\left(\Omega_M-1\right)\\
&+\Bigg[-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{\gamma_{1,0}}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\Bigg]w^3\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0}w^4\left(\Omega_M-1\right). \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

Enfin le développement limité du dernier terme $\Omega_M^{1-\gamma}$, donne

$$\Omega_M^{1-\gamma} = 1 + \left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\Omega_M - 1\right) - \left[\frac{1-\gamma_{1,0}}{2} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{2}\right]\left(\Omega_M-1\right)^2$$

$$+ \left[\frac{1-\gamma_{1,0}}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{2} - \left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\right.$$

$$\left. + \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3}{6}\right]\left(\Omega_M-1\right)^3$$

$$+ \left[-\frac{1-\gamma_{1,0}}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} + \frac{11}{24}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\right.$$

$$+ \left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)^2_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3}{4}$$

$$\left. - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^4}{24}\right]\left(\Omega_M-1\right)^4$$

$$+ \left[\frac{1-\gamma_{1,0}}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} - \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial\Omega_M^4}\right)_{1,0}\right.$$

$$- \frac{5}{12}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2 - \frac{11}{12}\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)^2_{1,0} + \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial^2\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}$$

$$+ \frac{7}{24}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)^2_{1,0}$$

$$- \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3}{6}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^4}{12} - \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}$$

$$\left. + \frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^5}{120}\right]\left(\Omega_M-1\right)^5$$

$$- \left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} w\left(\Omega_M-1\right)$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} - \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\right] w\left(\Omega_M-1\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg[-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\\
&\quad-\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\qquad\qquad-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\Bigg]w\left(\Omega_M-1\right)^3\\
&+\Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\\
&\quad-\frac{11}{12}\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}-\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\quad+\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\\
&\quad+\frac{3}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}+\left(1-\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\qquad\qquad-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3}{6}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\Bigg]w\left(\Omega_M-1\right)^4\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}w^2\left(\Omega_M-1\right)\\
&+\Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2\\
&\qquad\qquad-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\Bigg]w^2\left(\Omega_M-1\right)^2\\
&+\Bigg[-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\quad+\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2+\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}^2-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\Bigg]w^2\left(\Omega_M-1\right)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0} w^3\left(\Omega_M-1\right) \\
&+\left[\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{\left(1-\gamma_{1,0}\right)}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}\right] w^3\left(\Omega_M-1\right)^2 \\
&-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0} w^4\left(\Omega_M-1\right). \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

($_{1,0}$ dénote $(\Omega_M=1, w=0)$)
Dans ces calculs nous avons utilisé le développement de γ en série de puissance jusqu'à l'ordre 4 autour de $\Omega_M=1$ et $w=0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_{1,0}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} w+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\Omega_M-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0} w^2 \\
&+ \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} w\left(\Omega_M-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}\left(\Omega_M-1\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0} w^3 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0} w^2\left(\Omega_M-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} w\left(\Omega_M-1\right)^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\left(\Omega_M-1\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0} w^4+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0} w^3\left(\Omega_M-1\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} w^2\left(\Omega_M-1\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} w\left(\Omega_M-1\right)^3 \\
&+ \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial\Omega_M^4}\right)_{1,0}\left(\Omega_M-1\right)^4, \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

et les développements limités $\Omega_M^\gamma = 1+\gamma\ln\Omega_M+\left(\gamma\ln\Omega_M\right)^2/2!+\left(\gamma\ln\Omega_M\right)^3/3!+\left(\gamma\ln\Omega_M\right)^4/4!+\left(\gamma\ln\Omega_M\right)^5/5!$, et $\ln\Omega_M=\Omega_M-1-\left(\Omega_M-1\right)^2/2+\left(\Omega_M-1\right)^3/3-\left(\Omega_M-1\right)^4/4+\left(\Omega_M-1\right)^5/5$, pour Ω_M au voisinage de 1.
En substituant les équations (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35) dans l'équation (3.30) puis en regroupant les termes selon les différentes puissances en w, Ω_M-1 et leurs produits mixtes, on obtient
En Ω_M-1 :

$$
\gamma_{1,0}-\frac{3}{2}\left(1-\gamma_{1,0}\right)=0 \qquad (3.37)
$$

d'où

$$\gamma_{1,0} = \frac{3}{5}. \tag{3.38}$$

Dans la littérature $\gamma_{1,0}$ est noté γ_∞ ou γ_{early}.
Nous retrouvons ici $\gamma_{1,0} = 0,6$, le résultat obtenu dans [5] par Peebles pour un univers dominé par la matière.
On procéde de la même façon pour obtenir les autres coefficients du développement de γ.
En $(\Omega_M - 1)^2$:

$$+\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\gamma_{1,0} + \frac{\gamma_{1,0}^2}{2} - \frac{3}{4}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} = 0. \tag{3.39}$$

En substituant à $\gamma_{1,0}$ sa valeur donnée par l'équation (3.38) dans l'équation (3.39), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} = -0,024. \tag{3.40}$$

En $(\Omega_M - 1)^3$:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\gamma_{1,0} - \frac{1}{2}\gamma_{1,0}^2 + \frac{3}{4}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^2 + \frac{1}{6}\gamma_{1,0}^3 - \frac{1}{4}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^3 \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \frac{5}{4}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} = 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

En utilisant (3.38) et (3.40) dans l'équation ci-dessus, on obtient la valeur numérique de $\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}$

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} = 0,03104. \tag{3.42}$$

En $(\Omega_M - 1)^4$:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{8} - \frac{5}{8}\gamma_{1,0} + \frac{11}{24}\gamma_{1,0}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{1,0}^3 + \frac{1}{24}\gamma_{1,0}^4 - \frac{11}{16}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^3 - \frac{1}{16}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^4 \\ &+ \left[-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\gamma_{1,0} + \frac{1}{2}\gamma_{1,0}^2 + \frac{3}{4}\left(1 - \gamma_{1,0}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}^2 \\ &+ \left(\frac{1}{8} - \frac{\gamma_{1,0}}{4}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{5}{12}\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} = 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

En substituant (3.38), (3.40), (3.42) dans (3.43), nous déduisons le coefficient $\left(\partial^3\gamma/\partial\Omega_M^3\right)_{1,0}$

$$\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} = -0,07075. \tag{3.44}$$

En $(\Omega_M - 1)^5$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{10} + \frac{5}{10}\gamma_{1,0} - \frac{5}{12}\gamma_{1,0}^2 + \frac{7}{24}\gamma_{1,0}^3 - \frac{1}{12}\gamma_{1,0}^4 + \frac{1}{120}\gamma_{1,0}^5 + \frac{5}{8}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2 - \frac{7}{16}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3 \\
&+\frac{1}{8}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^4 - \frac{1}{80}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^5 + \left[\frac{3}{4} - \frac{11}{24}\gamma_{1,0} - \frac{3}{4}\gamma_{1,0}^2 + \frac{1}{6}\gamma_{1,0}^3 - \frac{9}{8}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\right. \\
&\left.+\frac{1}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3\right]\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\gamma_{1,0} + \frac{1}{4}\gamma_{1,0}^2 + \frac{3}{8}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} \\
&+\left(\frac{5}{4}\gamma_{1,0} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0} \\
&+\frac{5}{48}\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial\Omega_M^4}\right)_{1,0} = 0.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

La substitution des équations (3.38), (3.40), (3.42), et (3.44) dans (3.45), donne

$$\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial\Omega_M^4}\right)_{1,0} = 0,23081. \tag{3.46}$$

En $w\left(\Omega_M - 1\right)$:

$$\left(\frac{5}{2} + C\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} + \frac{3}{2} - 3\gamma_{1,0} = 0. \tag{3.47}$$

En remplaçant $\gamma_{1,0}$ par sa valeur donnée par l'équation (3.38) dans l'équation ci-dessus, on arrive à la valeur numérique de $(\partial\gamma/\partial w)_{1,0}$,

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} = 0,06 \qquad \text{pour } C = 2,5. \tag{3.48}$$

En $w\left(\Omega_M - 1\right)^2$:

$$\left(\frac{5}{2} + C\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - 6\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0} + \left(\frac{1}{4} - \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} = 0. \tag{3.49}$$

En tenant compte des équations (3.38), (3.40), et (3.48), l'équation (3.49)donne

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} = -0,0132 \qquad \text{pour } C = 2,5. \tag{3.50}$$

En $w\left(\Omega_M-1\right)^3$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{4}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\left[-\frac{2}{3}+\frac{C}{3}+\frac{1}{2}\gamma_{1,0}+\frac{1}{2}\gamma_{1,0}^2+\frac{3}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{9}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\left(\frac{1}{4}-\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}=0.
\end{aligned}\tag{3.51}$$

Les équations (3.38), (3.40), (3.42), (3.48), (3.50), et (3.51) donnent

$$\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}=0,01592\qquad\text{pour } C=2,5.\tag{3.52}$$

En $w\left(\Omega_M-1\right)^4$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{12}+\frac{C}{6}\right)\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}-2\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}\\
&+\left[\frac{3}{4}-\frac{C}{4}-\frac{11}{24}\gamma_{1,0}-\frac{3}{4}\gamma_{1,0}^2+\frac{1}{6}\gamma_{1,0}^3-\frac{9}{8}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^3\right]\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\\
&+\left[-\frac{2}{3}+\frac{C}{3}+\frac{1}{2}\gamma_{1,0}+\frac{1}{2}\gamma_{1,0}^2+\frac{3}{4}\left(1-\gamma_{1,0}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&+\left(\frac{1}{8}-\frac{C}{4}-\frac{1}{4}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}+\left(-1+\frac{5}{2}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\
&-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}=0.
\end{aligned}\tag{3.53}$$

En utilisant les équations (3.38), (3.40), (3.42), (3.44), (3.48), (3.50), (3.52) et (3.53), on obtient

$$\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^3}\right)_{1,0}=-0,0339\qquad\text{pour } C=2,5.\tag{3.54}$$

En $w^2(\Omega_M - 1)$:

$$\left(\frac{5}{4}+C\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0} - (3-C)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} = 0. \tag{3.55}$$

En substituant à $(\partial\gamma\partial w)_{1,0}$ sa valeur donnée par l'équation (3.48), on a

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0} = 8.10^{-3} \qquad \text{pour } C = 2,5.. \tag{3.56}$$

En $w^2(\Omega_M - 1)^2$:

$$\left(\frac{5}{4}+C\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{C}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} + \left(\frac{1}{8}-\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}$$
$$+(C-6)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)^2_{1,0} = 0. \tag{3.57}$$

En utilisant les équations (3.48), (3.50), (3.56) et (3.57), nous déduisons que

$$\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0} = 0,01064 \qquad \text{pour } C = 2,5. \tag{3.58}$$

En $w^2(\Omega_M - 1)^3$:

$$\left(\frac{5}{8}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} + \frac{C}{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0} - \left(\frac{3}{2}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}$$
$$+\left[\frac{C}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\gamma_{1,0}+\frac{1}{4}\gamma_{1,0}^2+\frac{3}{8}(1-\gamma_{1,0})^2\right]\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0} + \left(-\frac{9}{2}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0}$$
$$+\left(\frac{1}{8}-\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega_M}\right)_{1,0}$$
$$+\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)^2_{1,0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0} = 0. \tag{3.59}$$

En substituant à $\gamma_{1,0}$, $(\partial\gamma/\partial\Omega_M)_{1,0}$, $(\partial\gamma/\partial w)_{1,0}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega_M\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial w\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}$ $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{1,0}$, et $\left(\partial^3\gamma/\partial w^2\partial\Omega_M\right)_{1,0}$ leurs valeurs données respectivement par les équations (3.38), (3.40), (3.48), (3.50), (3.52), (3.56), et (3.58), on obtient

$$\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M^2}\right)_{1,0} = -0,01533 \qquad \text{pour } C = 2,5. \tag{3.60}$$

En $w^3\left(\Omega_M-1\right)$:

$$\left(\frac{5}{12}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}-\left(\frac{3}{2}-C\right)\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}=0. \tag{3.61}$$

En remplaçant $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{1,0}$ par sa valeur donnée par l'équation (3.56), l'équation (3.61) donne

$$\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}=-4,8.10^{-3} \qquad \text{pour } C=2,5. \tag{3.62}$$

En $w^3\left(\Omega_M-1\right)^2$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{12}+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0}-\frac{C}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}-(3-C)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^2\partial\Omega_M}\right)_{1,0}\\&+\left(\frac{1}{24}-\frac{C}{4}-\frac{1}{12}\gamma_{1,0}\right)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{1,0}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{1,0}=0.\end{aligned} \tag{3.63}$$

En utilisant les valeurs numériques de $\gamma_{1,0}$, $(\partial\gamma/\partial w)_{1,0}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial w^3\right)_{1,0}$, et $\left(\partial^3\gamma/\partial w^2\partial\Omega_M\right)_{1,0}$, données respectivement par les équations (3.38), (3.48), (3.56), (3.62), et (3.58) dans l'équation obtenue ci-dessus, on en déduit

$$\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^3\partial\Omega_M}\right)_{1,0}=7,44.10^{-3} \qquad \text{pour } C=2,5. \tag{3.64}$$

Enfin, la puissance en $w^4\left(\Omega_M-1\right)$, donne

$$\left(\frac{5}{48}+\frac{C}{6}\right)\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0}-\frac{1}{2}(1-C)\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial w^3}\right)_{1,0}=0. \tag{3.65}$$

Puis, en substituant à $\left(\partial^3\gamma/\partial w^3\right)_{1,0}$, sa valeur donnée par l'équation (3.62), on a

$$\left(\frac{\partial^4\gamma}{\partial w^4}\right)_{1,0}=6,91.10^{-3} \qquad \text{pour } C=2,5. \tag{3.66}$$

Retournons maintenant à l'équation (3.36). En substituant aux coefficents du développement de γ, $\gamma_{1,0}$, $(\partial\gamma/\partial w)_{1,0}$, $(\partial\gamma/\partial\Omega_M)_{1,0}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{1,0}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega_M\right)_{1,0}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial w^3\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial w^2\partial\Omega_M\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial w\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}$, $\left(\partial^3\gamma/\partial\Omega_M^3\right)_{1,0}$, $\left(\partial^4\gamma/\partial w^4\right)_{1,0}$, $\left(\partial^4\gamma /\partial w^3\partial\Omega_M\right)_{1,0}$, $\left(\partial^4\gamma/\partial w^2\partial\Omega_M^2\right)_{1,0}$, $\left(\partial^4\gamma/\partial w\partial\Omega_M^3\right)_{1,0}$, et $\left(\partial^4\gamma/\partial\Omega_M^4\right)_{1,0}$, leurs valeurs données respectivement par les équations (3.38), (3.48), (3.40), (3.56), (3.50), (3.42), (3.62), (3.58), (3.52), (3.44), (3.66), (3.64), (3.60), (3.54), et (3.46), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\gamma &= 0,6 + 0,06\,w + 0,024\,(1-\Omega_M) \\
&+ 4.10^{-3}\,w^2 + 0,0132\,w\,(1-\Omega_M) + 0,01552\,(1-\Omega_M)^2 \\
&- 8.10^{-4}\,w^3 - 5,32.10^{-3}\,w^2\,(1-\Omega_M) + 7,96.10^{-3}\,w\,(1-\Omega_M)^2 \\
&+ 0,01179\,(1-\Omega_M)^3 + 2,88.10^{-4}\,w^4 - 1,24.10^{-3}\,w^3\,(1-\Omega_M) \\
&- 3,83.10^{-3}\,w^2\,(1-\Omega_M)^2 + 5,65.10^{-3}\,w\,(1-\Omega_M)^3 \\
&+ 9,62.10^{-3}\,(1-\Omega_M)^4\,. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

On mentionne que le développement de γ donné par l'équation (3.67) ne tient pas compte de la petite fraction, non négligeable, de l'énergie noire présente pour les grands redshifts, contrairement au modèle ΛCDM, où $\Omega_{DE}\simeq 0$ (ou d'une manière équivalente $\Omega_M\simeq 1$). Donc, il va falloir corriger l'équation (3.67). Pour cela, nous allons utiliser cette même dernière équation pour en déduire le développement de γ au voisinage de $\Omega_M = (1 -$ cette petite fraction d'énergie noire) et $w = 0$ pour les grands redshifts. Nous calculons cette fraction d'énergie noire, qu'on note Ω_{EDE}, pour différentes valeurs de $\Omega_{M0}\equiv\Omega_M$ aujourd'hui (c'est à dire $a = 1$ ou $z = 0$), ($\Omega_{M0}= 0,3$ avec les valeurs des paramètres C et w_0 comme nous l'avons déja dit données par [?], $C = 2,5$ et $w_0 = -0,95$. Pour calculer le développement de γ au voisinage de $\Omega_M = 1-\Omega_{EDE}$ et $w = 0$, commençons d'abord par dériver l'équation (3.67) par rapport à w et Ω_M, pour obtenir l'ordre premier du développement de γ. Ensuite, on passe à l'ordre 2 en calculant les dérivées partielles $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega_M\right)$, et $\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega_M^2\right)$. Les résultats obtenus sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial w} &= 0,06 + 8.10^{-3}\,w + 0,0132\,(1-\Omega_M) \\
&- 24.10^{-4}\,w^2 - 0,01064\,w\,(1-\Omega_M) + 7,96.10^{-3}\,(1-\Omega_M)^2 \\
&+ 1,15.10^{-3}\,w^3 - 3,72.10^{-3}\,w^2\,(1-\Omega_M) - 7,66.10^{-3}\,w\,(1-\Omega_M)^2 \\
&+ 5,65.10^{-3}\,(1-\Omega_M)^3\,. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega_M} &= -0,024 \,-\, 0,0132\,w \,-\, 0,03104\,(1-\Omega_M) \\
&+\; 5,32.10^{-3}\,w^2 \,-\, 0,01592\,w\,(1-\Omega_M) \,-\, 0,03537\,(1-\Omega_M)^2 \\
&+\; 1,24.10^{-3}\,w^3 \,+\, 7,66.10^{-3}\,w^2\,(1-\Omega_M) \,-\, 16,95.10^{-3}\,w\,(1-\Omega_M)^2 \\
&-\; 0,03848\,(1-\Omega_M)^3\,. \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2} &= 8.10^{-3} \,-\, 4,8.10^{-3}\,w \,-\, 0,01064\,(1-\Omega_M) \\
&+\; 3,45.10^{-3}\,w^2 \,-\, 7,44.10^{-3}\,w\,(1-\Omega_M) \,-\, 7,66.10^{-3}\,(1-\Omega_M)^2\,. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M\partial w} &= -0,0132 \,+\, 0,01064\,w \,-\, 0,01592\,(1-\Omega_M) \\
&+\; 3,72.10^{-3}\,w^2 \,+\, 0,01532\,w\,(1-\Omega_M) \,-\, 0,01695\,(1-\Omega_M)^2\,. \qquad (3.71)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2} &= 0,03104 \,+\, 0,01592\,w \,+\, 0,07075\,(1-\Omega_M) \\
&-\; 7,66.10^{-3}\,w^2 \,+\, 0,0339\,w\,(1-\Omega_M) \,+\, 0,1154\,(1-\Omega_M)^2\,. \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

Pour déterminer les valeurs numériques des coéfficients du développement de γ au voisinage de $w = 0$ et $\Omega_M = 1 - \Omega_{EDE}$ (quand l'univers était dominé par la matière) jusqu'à l'ordre 2, pour la valeur actuelle de Ω_M : $\Omega_{M0} = 0,3$, il nous reste à déterminer la valeur de Ω_{EDE} pour $\Omega_{M0} = 0,3$. Pour cela remplaçons dans l'expression de Ω_M donnée par l'équation (3.26), a et Ω_{M0} par leurs valeurs respectives 1 et $\Omega_{M0} = 0,3$, on obtient $\Omega_M = 0,93978$, d'où $\Omega_{EDE} = 1 - \Omega_M = 0,06022$. Nous avons maintenant tous les éléments en main pour calculer ces coéfficients notés $\gamma_{0,1-\Omega_{EDE}}$, $(\partial\gamma/\partial w)_{0,1-\Omega_{EDE}}$, $(\partial\gamma/\partial\Omega_M)_{0,1-\Omega_{EDE}}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega_M\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$, $\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega^2\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$ en substituant respectivement dans les équations (3.67), (3.68), (3.69), (3.70), (3.71) et (3.72), à w et à $1 - \Omega_M$ leurs valeurs respectives 0 et $0,06022$, en négligeant les termes d'ordre 10^{-5} des corrections provenant des différents ordres. D'où, on obtient,
pour le terme d'ordre 0

$$
\gamma_{0,1-\Omega_{EDE}} = 0,6 + 10^{-3} = 0,601, \qquad (3.73)
$$

pour le terme d'ordre 1 en w, $(\partial\gamma/\partial w)_{0,1-\Omega_{EDE}}$,

$$
\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{0,1-\Omega_{EDE}} = 0,06 + 8.10^{-4} = 0,0608, \qquad (3.74)
$$

pour le terme d'ordre 1 en $1-\Omega_{EDE}-\Omega_M$, $(\partial\gamma/\partial\Omega_M)_{0,1-\Omega_{EDE}}$,

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega}\right)_{0,1-\Omega_{EDE}} = -0,024 - 1,9.10^{-3} - 1.10^{-4} = 0,026, \tag{3.75}$$

pour le terme d'ordre 2 en w, $\left(\partial^2\gamma/\partial w^2\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$,

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{0,1-\Omega_{EDE}} = 8.10^{-3} - 6.10^{-4} = 7,4.10^{-3}, \tag{3.76}$$

pour le terme d'ordre 2 mixte en w et $1-\Omega_{EDE}-\Omega_M$, $\left(\partial^2\gamma/\partial w\partial\Omega\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$,

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega}\right)_{0,1-\Omega_{EDE}} = -0,0132 - 10^{-3} = -0,0142, \tag{3.77}$$

et enfin pour le terme d'ordre 2 en $1-\Omega_{EDE}-\Omega_M$, $\left(\partial^2\gamma/\partial\Omega_M^2\right)_{0,1-\Omega_{EDE}}$,

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega_M^2}\right)_{0,1-\Omega_{EDE}} = 0,031 + 4,3.10^{-3} + 4.10^{-4} = 0,0357. \tag{3.78}$$

Les résultats obtenus pour $\Omega_{M0} = 0,3$, sont résumés ci-dessous

$$\begin{aligned}
\gamma_\infty &= 0,601, & \left(\frac{\partial\gamma}{\partial w}\right)_{w=0,\Omega=0,9398} &= 0,0608,\\
\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega}\right)_{w=0,\Omega=0,9398} &= -0,026, & \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w\partial\Omega}\right)_{w=0,=0,9398} &= -0,0142,\\
\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial w^2}\right)_{w=0,\Omega=0,9398} &= 7,4.10^{-3}, & \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\Omega^2}\right)_{w=0,\Omega=0,9398} &= 0,0357,
\end{aligned} \tag{3.79}$$

où Ω désigne Ω_M. D'où le développement de γ au voisinage de $w=0$ et $\Omega = 0,93978$,

$$\begin{aligned}
\gamma &= 0,601 + 0,0608\, w + 0,026\,(1-\Omega_{EDE}-\Omega) + 3,7.10^{-3}\, w^2\\
&+ 0,0142\, w\,(1-\Omega_{EDE}-\Omega) + 0,0179\,(1-\Omega_{EDE}-\Omega)^2,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

avec $\Omega_{EDE} = 0,0602$ pour $\Omega_{M0} \equiv \Omega_0 = 0,3$. Réecrivons maintenant le développement de γ ci-dessus jusqu'à l'ordre 1 en termes de w et $1-\Omega$. Nous obtienons

$$\gamma = 0,599 + 0,0599\, w + 0,024\,(1-\Omega). \tag{3.81}$$

En utilisant l'équation (3.80)), on retouve le premier terme d'ordre 0 : $0,599$ qu'on note γ_{early}, obtenu en ajoutant à $0,601$ (le premier terme d'ordre 0 du développement de γ) la contribution provenant de $0,026\,(1-\Omega_{EDE}-\Omega)$: $0,026.\Omega_{EDE}$ (la contribution venant de $0,0179.\Omega_{EDE}^2$ est de l'ordre de 10^{-5} est négligeable), c'est à dire

$$\gamma_{early} = 0,601 - 2.10^{-3} = 0,599. \tag{3.82}$$

Le second terme $0,0599$ qu'on note $(\partial\gamma/\partial w)$ provient du terme en w du développement de γ, donné toujours par l'équation (3.80)), en lui ajoutant la contribution qui vient du terme $0,0142w\,(1-\Omega_{EDE}-\Omega)$: $0,0142.\Omega_{EDE}$, d'où

$$\frac{\partial\gamma}{\partial w} = 0,0608 - 9.10^{-4} = 0,0599. \tag{3.83}$$

Enfin le dernier terme $0,024$ noté $(\partial\gamma/\partial\Omega)$ provient du coefficient du terme d'ordre 1 en $(1-\Omega_{EDE}-\Omega)$: $0,026$ en lui ajoutant la contribution provenant du terme $0,0179.$ $(1-\Omega_{EDE}-\Omega)^2$, c'est à dire $-2.0,0179.\Omega_{EDE}$, ce qui donne

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\Omega} = 0,026 - 2.10^{-3} = 0,024. \tag{3.84}$$

Dans le but de savoir comment l'approximation Ω^γ, avec $\gamma = 0599 + 0,0599\,w + 0,024\,(1-\Omega)$, donné par l'équation (3.81), pour ce modèle d'énergie noire primordiale de Mocker s'ajuste avec le facteur de croissance f, nous avons besoin de résoudre numériquement l'équation (3.30). Nous substituons l'expression de $\Omega_M \equiv \Omega$

$$\Omega = \frac{1}{1 + \frac{(1+w_0)^{3/C}}{\frac{\Omega_{M0}}{1-\Omega_{M0}}}\left(1 - \frac{w_0}{1+w_0}a^C\right)^{3/C}}.$$

donnée par l'équation (3.26) et l'expression de w donnée par

$$w(a) = -1 + \left[1 - \frac{w_0}{1+w_0}\,a^C\right]^{-1},$$

dans l'équation (3.30) puis nous résolvons l'équation numériquement, et nous comparons le résultat numérique f avec l'approximtion analytique Ω^γ. La différence relative entre Ω^γ

et f c'est à dire $\Omega^\gamma/f-1$ est relevée dans le tableau ci-dessous.

Tableau donnant l'erreur relative $\Omega^\gamma/f-1$ en fonction du redshift z

z	w	Ω	γ	f	$\Omega^\gamma/f-1$
0	-0,95	0,3	0,5589	0,508	0,004
0,01	-0,949	0,306	0,5588	0,514	0,0031
0,02	-0,948	0,312	0,5588	0,52	0,0022
0,03	-0,946	0,318	0,5587	0,526	0,0014
0,04	-0,945	0,324	0,5586	0,532	0,00062
0,05	-0,944	0,33	0,5585	0,538	$-5,5.10^{-5}$
0,06	-0,943	0,336	0,5585	0,544	-0,00066
0,07	-0,941	0,342	0,5584	0,550	-0,0012
0,08	-0,940	0,348	0,5583	0,555	-0,0017
0,09	-0,939	0,354	0,5583	0,561	-0,0021
0,1	-0,937	0,36	0,5582	0,566	-0,0025
0,15	-0,931	0,389	0,5579	0,593	-0,0039
0,2	-0,923	0,417	0,5577	0,617	-0,0045
0,25	-0,916	0,445	0,5575	0,640	-0,0047
0,26	-0,914	0,450	0,5574	0,644	-0,0046
0,3	-0,908	0,471	0,5573	0,661	-0,0045
0,4	-0,891	0,521	0,5571	0,698	-0,0035
0,5	-0,873	0,567	0,5571	0,731	-0,0025
0,6	-0,854	0,607	0,5573	0,758	-0,0014
0,7	-0,835	0,643	0,5576	0,782	-0,0006
0,8	-0,814	0,675	0,5581	0,803	$4,2.10^{-5}$
0,9	-0,792	0,703	0,5587	0,821	0,0005
1	-0,771	0,727	0,5594	0,836	0,0008
1,1	-0,748	0,749	0,5602	0,850	0,0010
1,2	-0,726	0,768	0,5611	0,861	0,0011
1,3	-0,703	0,784	0,5621	0,871	0,0012
1,4	-0,680	0,799	0,5631	0,880	0,0012
1,5	-0,658	0,812	0,5641	0,888	0,0012
1,6	-0,635	0,823	0,5652	0,895	0,0012
1,7	-0,613	0,833	0,5663	0,901	0,0011
1,8	-0,592	0,842	0,5642	0,906	0,0010
1,9	-0,570	0,850	0,5684	0,911	0,0010
2	-0,549	0,857	0,5695	0,915	0,0009
2,1	-0,529	0,863	0,5706	0,919	0,00088
2,2	-0,509	0,869	0,5716	0,922	0,0008
2,3	-0,490	0,874	0,5727	0,925	0,00078

z	w	Ω	γ	f	$\Omega^{\gamma}/f-1$
2,4	-0,471	0,879	0,5737	0,928	0,00073
2,5	-0,453	0,883	0,5747	0,930	0,00068
2,6	-0,436	0,887	0,5756	0,933	0,00064
2,7	-0,419	0,890	0,5765	0,935	0,0006
2,8	-0,403	0,894	0,5774	0,937	0,00057
2,9	-0,387	0,897	0,5783	0,938	0,00050
3	-0,373	0,899	0,5791	0,940	0,00051
3,1	-0,358	0,902	0,5799	0,941	0,00048
3,2	-0,345	0,904	0,5807	0,943	0,00046
3,3	-0,331	0,906	0,5814	0,944	0,00043
3,4	-0,319	0,908	0,5821	0,945	0,00041
3,5	-0,307	0,910	0,5828	0,946	0,00039
3,6	-0,295	0,911	0,5835	0,947	0,00038
3,7	-0,284	0,913	0,5841	0,948	0,00034
3,8	-0,273	0,914	0,5847	0,948	0,00035
3,9	-0,263	0,915	0,5853	0,949	0,00033
4	-0,254	0,917	0,5858	0,950	0,00032
4,1	-0,244	0,918	0,5863	0,951	0,00031
4,2	-0,236	0,919	0,5868	0,951	0,0003
4,3	-0,227	0,920	0,5873	0,952	0,00029
4,4	-0,219	0,921	0,5878	0,952	0,00028
4,5	-0,211	0,921	0,5882	0,953	0,00028
4,6	-0,204	0,922	0,5887	0,953	0,00027
4,7	-0,197	0,923	0,5891	0,954	0,00026
4,8	-0,190	0,924	0,5895	0,954	0,00026
4,9	-0,183	0,924	0,5898	0,954	0,00025
5	-0,177	0,925	0,5902	0,955	0,00025
5,5	-0,150	0,928	0,5918	0,956	0,00023
6	-0,128	0,930	0,5930	0,958	0,00021
7	-0,095	0,933	0,5949	0,959	0,00019
8	-0,073	0,934	0,5962	0,960	0,00018
9	-0,057	0,936	0,5971	0,961	0,00018
10	-0,045	0,937	0,5978	0,961	0,00017
20	-0,0093	0,939	0,5999	0,963	0,00017
25	-0,0055	0,939	0,6001	0,963	0,00017

z	w	Ω	γ	f	$\Omega^{\gamma}/f - 1$
30	-0,0035	0,940	0,6002	0,963	0,00017
40	-0,0018	0,940	0,6003	0,963	0,00017
50	-0,0010	0,940	0,6004	0,963	0,00017
70	-0,00045	0,940	0,6004	0,963	0,00017
80	-0,00032	0,940	0,6004	0,963	0,00017
90	-0,00024	0,940	0,6004	0,963	0,00017
100	-0,000185	0,940	0,6004	0,963	0,00017
1000	$-5,99.10^{-7}$	0,940	0,6004	0,963	0,00017
1089	$-4,8.10^{-7}$	0,940	0,6004	0,963	0,00017

Le tableau montre, que l'index de croissance $\gamma = 0599 + 0,0599\,w + 0,024\,(1 - \Omega)$ opproxime très bien le facteur d'échelle, l'erreur est inférieure à $0,5\%$. Par conséquent cela devrait être utile dans les analyses future de la banque des données cosmologiques sur l'origine de l'accélération cosmique.

Conclusion

L'approximation Ω^γ peut être utilisé pour approximer le facteur de croissance f. L'index de croissance γ peut être utilisé pour distinguer entre l'énergie noire et la modification de la gravitation pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'univers. Nous avons trouvé une paramétrisation de l'index de croîssance γ :

$$\gamma = \, 0,599 \, + \, 0,0599\, w \, + \, 0,024\; (1 - \Omega)$$

pour un modèle d'énergie noire primordiale.
L'expression analytique obtenue de γ n' approxime pas seulement trés le facteur de croissance, avec une erreur inférieure à $0,5\%$ sur tous les redshifts jusqu'au découplage, mais a également une forme analytique simple. Ceci fournit un moyen pour la banque des observations futures pour distinguer entre les deux modèles d'énergie noire et de gravitation modifiée.

Bibliographie

[1] A.G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998).

[2] S. Perlmutter et al., Astrophy. J. 517, 565 (1999).

[3] A.G. Riess et al., Astrophys. J. 607, 665 (2004).

[4] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, Phys.Lett. B 485 208 (2000).

[5] P.J.E. Peebles, *The large-Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1980).

[6] J.N. Fry, Phys. Lett. B 158, 211 (1985).

[7] A.P. Lightman and P.L. Schechter, Astrophys. J. 74, 831 (1990).

[8] L. Wang and P.J. Steinhardt, Astrophys. J. 508, 483 (1998).

[9] Y.G. Gong, arXiv :0808.1316v2 [astro-ph] (2008).

[10] Y. Gong, M. Ishak, A. Wang, arXiv :0903.0001v1 [astro-ph.CO] (2009).

[11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons 1972).

[12] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press 2008)

[13] W. Misner, S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company San Fransisco 1973).

[14] E. Linder, Phys. Rev. D 73, 063010 (2006)

[15] J.Q. Xia, M. Viel, JcAP 0904 002 (2009).

Paramétrisation du Facteur de Croissance dans un Espace Plat.

Résumé

Ce mémoire traite de la cosmologie relativiste à grande échelle, dans un univers spatialement plat.

Ce manuscrit commence par une introduction suivi par trois chapitres et se termine par une conclusion puis une bibliographie.

Dans l'introduction on a exposé la motivation de notre travail ainsi que l'organisation de ce manuscrit.

Le premier chapitre est une introduction la cosmologie relativiste. Nous avons supposé que l'univers est homogène et isotrope. Ce qui nous a conduit a choisir un système de coordonnées d'espace temps telle que la métrique prenne une forme simple avec un seul paramètre appelé facteur d'échelle. Cette métrique est connue sous le nom de métrique de Robertson-Walker. Nous avons appliqué les équations d'Einstein a la métrique de Robertson-Walker, et nous avons dérivé certains résultat base dont nous avons besoin ici dans ce manuscrit : citons par exemple l'équation de Friedman gouvernant l'expansion cosmologique.

Dans le second chapitre, nous avons sommes concentrés sur des petites déviations par rapport à l'homogénéité et isotropie. Nous avons appliqué les équations d'Einstein a la métrique de Robertson-Walker perturbée et nous avons dérivé l'équation gouvernant la croissance des perturbations de la densité de matières, en supposant que tous les autres composants de l'univers sont uniformes.

Si l'accélération cosmique est due à l'énergie noire figurant dans l'équations d'Einstein, alors la croissance observée des perturbations de la densité de matière doit être consistante avec celle prédite via l'équation différentielle gouvernant croissance. Toute déviation significative à cette consistance peut être une signature de la modification de la gravité à grande échelle. Différent théorie de la gravitation donnent le même paramètre de Hubble pour des temps cosmiques récents, mais elles peuvent être distinguées par leurs taux de croissance. Le taux de croissance des perturbations de matière peut donc être utilisé pour distingues entre l'énergie noire et de la modification de la gravitation à grande échelle comme explication de l'accélération cosmique. Le facteur de croissance peut être parametrisé par l'index de croissance γ.

Le dernier chapitre traite de la paramétrisation de l'index de croissance, utilisant un modéle d'énergie noire primordiale. Dans ce modèle d'énergie noire comme de matière non relativiste à grande échelle. Et tend asymptotiquement vers la constante cosmologique. Nous obtenons une expression simple pour γ comme constante du paramètre de densité de matière Ω et de l'équation d'état w de l'énergie noire primordiale. Cette paramétrisation converge tous radshifts. Jusqu'à l'époque du couplage CMB. La paramétrisation ajuste tré bien le facteur de croissance. La précision est supérieure à 0.5

Mots clés : Cosmologie relativiste, Energie noire, Accélération cosmique, Paramètre de Hubble, Radshift, Energie noire primordiale CMB, Petites perturbations.

<u>Growth facteur parametrization in flat universe.</u>

Abstract

This memory with relativistic cosmology at large scales, in flat universe.
The manuscript begins with an introduction followed by three chapters and ended with a conclusion.
In the introduction, the motivation of our work is given together with the organization of manuscript.
The first chapter is an introduction to relativistic cosmology. We deal with homogeneous and isotropic universe. The assumption that the universe is homogeneous and isotropic leads us to choose the space-time coordinate system so that the metric takes a simple forme, called Robertson-Walker metric. We applied the Einstein equations to the Robertson-Walker metric, and derived some of the basic results that are needed here in this manuscript.
The second chapter concentrates on the small departures from homogeneity and isotropy.
We applied the Einstein equations to the perturbed Robertson-Walker metric, we derived the equation governing growth of density perturbations in the matter, assuming all other components of universe smooth.
The growth rate of matter perturbations can be used to distinguish between dark energy and modified gravity at cosmological scales as explanation to the observed cosmic acceleration.
The growth rate is parametrized by a growth index The last chapter deals with parametrization of the growth index, using Mocker model for early dark energy. We found simple expression for gama as function od the dimensionless matters density and the equation of state w of of the early dark energy. The parametrization covering low intermediate and high redshifts up to ZCMBat the decoupling epoch. The parametrization Fit very well the growth factor. The fit is better than 0.5%

Key worde : Relativistic cosmology ,dark energy ,cosmic acceleration , hubble parameter, growth factor, redshift, Early dark energy, CMB, small perturbations

توسيط عامل النمو في الفضاء مسطح

ملخص

هده المدكرة تهتم بالكسمولوجيا النسبية عند الابعاد الكبيرة في فضاء مسطح. هدا المخطط يبدا بمدخل تتبعه ثلاث فصول وينتهي بملخص.
نجد في المدخل الحافز الدي قادنا لهدا العمل وهو توسيط عامل النمو في فضاء مسطح، كما نجد تنظيم هدا المخطط.
الفصل الاول هو مدخل للكسمولوجيا النسبية في الفضاء نفترض انه متجانس وموحد الخواص. الفرضيتان السابقتان فضاء متجانس وموحد الخواص تؤديان بنا الى اختيار جملة احداثيات فضاء-زمن حيث ان المترية تاخد شكلا بسيطا بحيث تتعلق بوسيط واحد في حالة قضاء مسطح يدعى الكوسمولوجيا على مترية Robertson-Walker.
تركز معظم النمادج في الكسمولوجيا على مترية Robertson-Walker على الاقل كتقريب اولي. نطبق معادلات Einstein على مترية Robertson-Walker ونستخرج بعض النتائج الاساسية التي سنستعملها لاحقا كمعادلة التي تحكم الكون.
الفصل التاني يركز على النزياحات الضغيرة عن المبدا الكسمولوجي الدي ينص على ان الفضاء متجانس وموحد الخواص .
نطبق معادلات Einstein على مترية المضطربة ونشتق المعادلات التفاضلية التي تحكم نمو اضطرابات كثافة المادة بافتراض ان المركبات الاخرى تكون منتظمة
ادا كان التسارع ناتجا عن الطاقة السوداء في معادلات Einstein ، فان النمو الاضطرابات المقاسة يجب ان يكون متوافقا مع النمو الاطرابات المتوقعة انطلاقا من المعادلات التفاضلية التي تحكم النمو. وكل انزياح عن هدا التوافق يمكن ان يكون اشارة لتغير الجادبية عند الابعاد الكسمولوجية. و نظريات المختلفة تعطي نفس الوسيط Hubble ، لكن يمكن تفريقها بمعدل الاضطرابات. وبالتالي فانه يمكن استعمال معدل النمو الاضطرابات لكثافة المادة للتفريق بين الطاقة السوداء ونظرية تغير الجادبية عند الابعاد الكسمولوجية كمرشحين لشرح التسارع الكسمولوجي. من المهم ان نشير ان معدل النمو يوسط بمؤشر النمو
في الفصل الاخير نهتم بتوسيط مؤشر النمو باستعمال نمودج Mocker للطاقة السوداء الاساسية . في هدا النمودج الطاقة السوداء كالمادة عند الانزياحات الطفيفة الكبيرة نحو الاحمر redshifts وتؤول تقريبا نحو الثابث الكسمولوجي .
نجد عبارة بسيطة لمؤشر النمو كدالة لوسيط كثافة المادة ومعادلة الحال للطاقة السوداء. هدا التوسيط يغطي كل النزياحات الطفيفة نحو الاحمر حتى عهد فصل المادة عن الاشعاع. هدا التوسيط يقارب جدا معامل النمو. دقة التقريب احسن من 0.5

كلمات مفتاحية : كسمولوجيا النسبية ، طاقة سوداء ، تسارع التوسع ، وسيط hubble، عامل النمو ، الانزياح الطيفي ، الطاقة السوداء الاساسية ، الاطرابات الصغيرة.