

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة منتوري قسنطينة
كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

رقم الترتيب:

السلسلة:

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماجستير في الفيزياء
تخصص
فيزياء فلكية

تحت عنوان:

علم الكون الديناميكي في الفضاء-الزمان-

غير ريماني والطاقة المظلمة

تمت المناقشة يوم 6 جويلية 2011

تحت إشراف:
البروفيسور مبارك نور الدين

من تقديم:
الطالب مالكي أحمد

أعضاء اللجنة:

جامعة قسنطينة
جامعة قسنطينة
جامعة قسنطينة
جامعة جيجل

البروفيسور بن سلامة عاشور،
البروفيسور مبارك نور الدين،
الدكتور عيسى أوى حبيب،
الدكتور أحريش أمين،

رئيس اللجنة:
المشرف:
الممتحن:
الممتحن:

إهداء

إلى

أمي وأبي

هما أُملي في الحياة.....

وإلى كل أفراد عائلتي فهم قارب النجاة.....

وإلى كل صديق قريب و بعيد فهم عوني في الحياة.....

أهدي هذا العمل المتواضع لهم جميعا و أسأل الله أن ينفعنا به في المحيا والممات....

تشكر

أحمد الله تعالى على كل شيء

أحمدك ربي حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت

وهو الذي شق لي سمعي وأثار لي بصري وهدى فؤادي...

وهو الذي سخر لنا هذا الكون البديع لنمتع عقولنا و أبصارنا فيه.....

وعلى أن وفقني لإنجاز هذا البحث المتواضع.

و أسأله أن يوفقنا لما يحبه ويرضاه و يجعل هذا العمل لوجهه الكريم خالصا.

وعملا بقول الرسول الحبيب (صلى الله عليه وسلم) من لا يشكر الناس لا يشكره الله.....

يسرني أن أتقدم بجزيل الشكر و العرفان إلى أستاذي الفاضل الأستاذ نور الدين مباركى على تفضله

بالإشراف على هذا البحث و حرصه التام على إتمامه وتوفيره لنا جو المنافسة في ميدان

البحث العلمي...

وأتقدم أيضا بالشكر و الامتنان إلى أستاذي جمال ميموني

و هو الذي كان دوما معطاء في جميع المجالات وفي كل الأحوال

ولن أنسى أيضا الشكر الجزيل للأستاذ الفاضل عاشور بن سلامة

على تشريفه لنا برئاسة لجنة المناقشة.....

و كما لا يفوتوني أيضا أن أتقدم بأسمى عبارات التقدير

والاحترام والشكر إلى الأستاذين الفاضلين

حبيب عيساوى و الأستاذ أمين أحريش على تشريفهما

لنا بمناقشة هذا البحث المتواضع.

والشكر الجميل للجميع.....

الفهرس

1.....	المقدمة العامة
3.....	الفصل الأول: النسبية العامة و علم الكون
18.....	الفصل الثاني: هندسة فينسلر و طور الصورة
39.....	الفصل الثالث: دراسة النماذج الكونية المقترحة
63.....	الخاتمة العامة
64.....	المراجع
66.....	الملحقات

المقدمة العامة

قمنا في هذا البحث بعرض نظرية- $f(R)$ من خلال تقديم نموذجين مختلفين ودراستهما دراسة ديناميكية. إذ تُعتبر هذه النظرية كبديل وتعديل لنظرية النسبية العامة القائمة على هندسة ريمان. وذلك بتعميم هندسة ريمان بهندسة فينسلر وتعميم فعل هيلبيرت-أينشتاين (*Hilbert-Einstein Action*)، بفعل معمم آخر في الفضاء الزمكان اللامتناهي (هندسة فينسلر)، لمعالجة بعض المسائل ذات الأهمية العلمية و الحالية في ميدان علم الكون وكبرى الألغاز الفلكية التي عجزت النسبية العامة عن الإجابة عنها كالتوسع المتسارع للكون والطاقة المظلمة...إلخ.

فجعلنا الفصل الأول تمهيد للبحث المطروح في هذه الرسالة، بتقديم لمحة تاريخية عن نظرية النسبية العامة ونشأتها والفكرة التي إستوحاها ألبرت أينشتاين لبناء هذه النظرية ومعرفة مبادئها ومعادلة الحقل المشهورة فيها. مع إبراز أهم العلاقات الفيزياء الفلكية والنتائج التي قدمتها في ميدان علم الكون. ثم عرض سريع لعلم الكون وأهم تطبيقات النسبية العامة، ثم تليها إحدى حلول معادلة الحقل، ألا وهو نموذج - فيردمان - روبرسن - ولكر- لنموذج الكون المعياري. و أيضا الأسس العلمية والعلاقات الرياضية التطبيقية المستخلصة من نظرية النسبية والذي يقوم عليه علم الكون المشاهد (المرصود).

في الفصل الثاني عرض سريع وملخص لأهم الخصائص المميزة للإطار الرياضي - هندسة فينسلر- والتي تعتبر الأساس القاعدي لبناء النماذج الجديدة المقترحة في هذه الدراسة و هي تعميم لهندسة ريمان. وأيضا ملخص لطور الصورة (*Phase Portrait*)، هذا الإطار الرياضي أداة فعالة لحل مثل هذه المسائل المعقدة. وتعتبر من بين أهم الطرق التحليلية للدراسات النوعية للنظام الديناميكي. انطلاقا من كيفية تقريب الجمل اللا خطية و تحويلها إلى جمل خطية و فهم السلوكيات الفيزيائية مهما كان تعقيدها. و البحث عن النقاط الثابتة من أجل الحصول على الحلول المستقرة عند النقاط الحرجة أو في جوارها والتنبؤ بكيفية تطور النظام الفيزيائي خلال كل لحظة من الزمن، وكل هذا بفضل الرسومات البيانية لنظرية النظام الديناميكي لطور الصورة (*Phase Portrait*).

أما الفصل الثالث فقد خصصناه للنماذج المقترحة. بدأنا بعرض المسائل الكونية المطروحة في الساحة العلمية (توسع وتسارع الكون، الطاقة المظلمة، ومشكلة الثابت الكوني Λ ... وغيرها) على غرار ما قدمته البيانات الرصدية لعلم الكون عن طريق الأقمار الصناعية (*WMAP*) والأجهزة الإلكترونية الخاصة بالرصد الفلكي الحديث للإشعاعات الكونية (*CMB*)، حيث أثبت بأن الكون غير متجانس (متباين) (*Anisotropy*) ولا متماثل المناحي (*non homogeneous*). والبحث عن الإجابات الدقيقة والتفسيرات الصحيحة لظواهر الكونية. و التي عجزت نظرية النسبية العامة وعلم الكون آنذاك من الإجابة وفق النماذج المبنية عليها التي تملك خصائص معينة (التجانس، التماثل، التناظر...) عكس الوقائع الفيزيائية الكونية المثبتة بالرصد والمشاهدة الفلكية. من هذا المنطلق كانت فكرة تعديل النسبية العامة وتعميمها انطلاقاً من الإطار الهندسي أو طبيعة المائع وغيرها من التساؤلات القائمة، فكانت الإجابة لكل هذه التساؤلات اقتراح هذان النموذجان. إذ قدمنا الدراسة الكاملة للنموذجيين الأول و الثاني في الإطار الرياضي لهندسة فينسلر. مع التفصيل و التدقيق في النتائج وإبراز الأجزاء المهمة فيها. و تطبيق نظرية النظام الديناميكي للبحث عن الحلول لمعادلات الحقول. ورسم المنحنيات وإيجاد النقاط الحرجة وتحليلها. كما استعنا من أجل رسم المنحنيات البيانات والحسابات المعقدة للنقاط الثابتة بالبرمجة الرياضية (*mathematica7*). وقد قمنا بتحليل الرسومات والبيانات ومختلف الحلول الفيزيائية لمختلف النماذج و تقديم الحلول الواقعية بالإجابة عن الأسئلة التي قد طرحت في بداية البحث كما قمنا باستخلاص النتائج لكل نموذج واختتام البحث بملخص عامة.

الفصل الأول:

النسبية العامة وعلم الكون

النسبية العامة

1.1 نظرية النسبية العامة

النظرية النسبية: هي نظرية نشرها ألبرت أينشتاين في عام 1915. وهي تمثل الوصف الحالي للجاذبية في الفيزياء الحديثة. كما أنها تعميم للنظرية النسبية الخاصة حيث توحد بين النسبية الخاصة وقانون نيوتن للجاذبية، وتصف الجاذبية كخاصة لهندسة المكان والزمان، أو ما يعرف بالزمكان. وأضافت النظرية النسبية العامة فكرة تقعر الفراغ بوجود المادة، وهو الأمر الذي يعني أن الخطوط المستقيمة تنشوه بوجود الكتلة، وأثبتت النظرية النسبية العامة عندما تحقق تنبؤ أينشتاين بالتباعد الظاهري لنجمين في فترة كسوف الشمس وذلك يعود إلى تشوه مسار الضوء القادم من النجمين بسبب مرورهما قرب الشمس ذات الكتلة العالية نسبياً وبالتالي تقوس خط سير الضوء القادم من النجمين. [5,1]

1.1.1 تاريخ النسبية العامة

بعد وقت قصير من نشره للنظرية النسبية الخاصة في عام 1905، بدأ أينشتاين التفكير في كيفية دمج الجاذبية بالنسبية في إطار جديد. في عام 1907، بدأ في تجربة فكرية بسيطة تشمل مراقبة سقوط حر واستمر البحث لمدة ثماني سنوات للوصول إلى نظرية نسبية بالجاذبية. بعد العديد من الطرق الالتفافية وبدائيات خاطئة، بلغ عمله ذروته في عام 1915 حيث عرض في الأكاديمية البروسية للعلوم ما يعرف الآن باسم معادلات أينشتاين للمجال. هذه المعادلات تحدد تأثير هندسة المكان والزمن على أي مادة، وتشكل هذه المعادلات جوهر نظرية أينشتاين في النسبية العامة.

إن معادلات أينشتاين للمجال هي معادلات غير خطية ومن الصعب حلها. وقد استخدم أينشتاين طريقة تقريبية للخروج بالنتيجة التي تنبأ فيها. في بداية عام 1916 وجد عالم الفلك كارل شوارزشيلد الحل التام لمعادلات أينشتاين ودعيت مترية شوارزشيلد. وهذه الحلول وضعت الحل لوصف المراحل الأخيرة من انهيار الجاذبية، والأجسام التي تعرف اليوم ثقوب سوداء. وكانت الخطوة الأولى في تعميم شوارزشيلد

في حلول الأجسام المشحونة كهربائياً وفي النهاية أسفرت عن مترية ريسنر نوردستورم. وهي حالياً مرتبطة بشحنة الثقب الأسود. طبق أينشتاين في سنة 1917 نظريته على الكون ككل، والشروع في النسبية الكونية. وكان قد فرض تماشياً مع الفكر السائد أن الكون ساكن وأضاف حد أو معامل جديد إلى معادلات المجال (الحقل) وهو الثابت الكوني Λ . [6]

أدت حلول ألكسندر فيردمان إلى فكرة تمدد الكون سنة 1922 عن طريق الاستغناء عن الثابت الكوني Λ والتي أيدت فيما بعد بواسطة مراقبات إدوين هابل وآخرين. واستخدم جورج جيبوس ليمرت هذه الحلول ليصنع أول شكل من نظرية الانفجار العظيم من أن الكون تطور من حالة بدائية مفرطة في السخونة والكثافة. اعترف أينشتاين فيما بعد بأن اعتباره بأن الكون ثابت كان أكبر خطأ ارتكبه في حياته. خلال تلك الفترة بقيت النظرية النسبية العامة كنوع من الفضول في مواضيع النظريات فيزيائية، وبقي واضحاً تفوق قانون الجذب العام لنيوتن، والتي بدت منسجمة مع النسبية الخاصة إلي استخدم في العديد من الحالات التي يمكن شرحها من خلال قانون نيوتن.

2.1.1 هندسة الجاذبية النيوتونية

حسب قواعد الميكانيك الكلاسيكي فإن حركة الجسم توصف بدرجات الحرية و بأنها مكونة من حركة حرة (أو حركة مقصورة) أو (العطالة)، ومقدار انحرافه عن هذه الحركة الحرة. فعلى سبيل المثال القوى الخارجية المطبقة على جسم متحرك وفق قانون نيوتن الثاني والذي ينص على أن مجموع القوى الخارجية بشكل شعاعي المطبقة على جسم يساوي إلى جداء كتلة (العطالة) الجسم بالقيمة الشعاعية للتسارع. ترتبط الحركة المقصورة بهندسة الزمان و المكان، ففي الإطار المرجعي التقليدي للميكانيك الكلاسيكي فإن الجسم ذو الحركة الحرة يتحرك على طول خط مستقيم وفق سرعة ثابتة. أما وفق المصطلح الجديد فإن المسار هو مسار جيوديزي فهو خطوط مستقيمة ضمن فضاء منحنى. [7]

3.1.1 مبدأ التكافؤ في النسبية العامة

نميز في الفيزياء بين مراجع عطالية (جمل مرجعية عطالية) (*inertial reference systems*) ومراجع غير عطالية (*non-inertial*)، حيث يمكن لأي جسم أن يحافظ على حركته المنتظمة في الجمل العطالية ما لم يخضع لقوة ما أو يتأثر بجسم آخر ضمن نفس الجملة، في حين تكتسب الأجسام في الجمل غير العطالية تسارعا ناتجا عن حركة الجملة نفسها وتسارعها وليس نتيجة تأثير جسم داخلي ضمن الجملة. تتم تفسير مقاومة هذا التسارع بقوى افتراضية ندعوها قوى العطالة (*inertial forces*) في حالة الحركة المستقيمة للجمل المرجعية أو قوى العطالة النابذة في حالة الحركة الدورانية (*rotational movement*) للجمل المرجعية. هذه القوى تعتبر قوى افتراضية غير فيزيائية في الميكانيك الكلاسيكي النيوتني لكن في النسبية العامة ليس هناك مجالا لمثل هذا التمييز حسب مبدأ التكافؤ. وليس هناك من قوة ثقالية ضمن المعلم المرجعي في حالة السقوط الحر (الحركة المتسارعة) عدا القوى المدية للثقالة التي تشوه الأجسام دون التأثير على حركتها وسرعتها (دون تسارع). وحتى محاولات الكشف عن الأمواج الثقالية تعتمد على هذه القوى المدية (*tidal forces*). [7,9]

و قد استند اينشتاين في الواقع على حقيقة معروفة منذ غاليليو ألا وهي تماثل الكتلتين الثقالية والعطالية للأجسام، مما يؤكد أن التسارع الحركي والثقالة (*gravity*) هي مظاهر لأمر واحد. ويفترض أنه لا وجود لأي تجربة يمكن أن تميز بين حقل ثقالي- جاذبية - و تسارع منتظم. وسرعان ما وسع اينشتاين مبدأ التكافؤ في نظريته ليشمل مفهوما إضافيا هو استحالة تحديد حالة الحركة لجملة مرجعية غير متسارعة عن طريق أي قياس فيزيائي. وعلى هذا فلا يمكن إيجاد أي تغير في الثوابت الفيزيائية الأساسية مثل كتلة السكون (في حالة السكون) أو الشحنة الكهربائية للجسيمات الأولية، وإلا فان أي تغير في هذه الثوابت يطعن في صحة النسبية العامة.

4.1.1 النتائج الهندسية

بالرغم من الاهتمام الأساسي في الهندسة كان منصبا لفترة طويلة على القواعد في الفضاء الإقليدي فيما يعرف بالهندسة الإقليدية فقد قام عدد من علماء الرياضيات بصياغة هندسات لا إقليدية مثل لوباتشو و فسكيو و ريمانو و غاوس وغيرهم. لكن التصور الأساسي للفضاء بقي إقليديا طيلة قرون لتوافقه مع معظم النظريات الفيزيائية بخاصة ميكانيك نيوتن. لكن ظهور النسبية العامة فتح الباب للاعتقاد حول لا إقليدية الزمكان (الزمان + المكان = الزمكان) وقد أكدت الكثير من التجارب هذه الحقيقة. [6]

5.1.1 معادلات أينشتاين للمجال (الحقول)

معادلات أينشتاين للمجال (*EFE*) أو معادلات أينشتاين هي مجموعة عشر معادلات في نظرية ألبرت أينشتاين للنسبية العامة والتي تصف التأثير الأساسي في الثقالة جراء تقوس الزمكان مع كل من المادة والطاقة. نشرت بداية بواسطة أينشتاين في 1915 على أنها معادلة مؤثر، تعادل معادلات أينشتاين للمجال انحناء الزمكان (يعبر عنها بمؤثر أينشتاين) مع الطاقة وكمية الحركة ضمن ذلك الزمكان (المعبر عنها بمؤثر الإجهاد-الطاقة). وبشكل مشابه لكيفية إيجاد المجالات الكهرومغناطيسية باستعمال الشحنات التيارات من خلال معادلات ماكسويل، تستعمل معادلات أينشتاين للمجال لإيجاد الهندسة الفضائية للزمكان من وجود الكتلة والطاقة وكمية التحرك الخطي، أي أنها تعطي المؤثر المتري للزمكان بدلالة ترتيب من الإجهاد-والطاقة في الزمكان. [7]

تسمح العلاقة بين المؤثر المتري وموتر أينشتاين بكتابة معادلات أينشتاين كمجموعة من معادلات تفاضلية لا خطية عند استخدامها بهذه الطريقة فحلول معادلات أينشتاين للمجال تمثل مركبات المؤثر المتري. المقذوفات العطالية للجسيمات وجيوديسيا الإشعاع في الهندسة التحليلية الناتجة تحسب بعد ذلك باستعمال المعادلة الجيوديسية. إضافة لامنتالها لقوانين إنحفاظ كمية الحركة-والطاقة، تؤول معادلات أينشتاين للمجال إلى قانون نيوتن إذا كان المجال الثقالي ضعيفا والسرعات أقل بكثير من سرعة الضوء.

[4] تتضمن الحلول التقنية لمعادلات أينشتاين للمجال تبسيط الفرضيات مثل التماثل (*homogeneity*). يمكن الحصول على تبسيطات أفضل بتقريب الزمكان الفعلي كزمكان مسطح $K=0$.

6.1.1 العلاقات الرياضية

يمكن كتابة معادلات أينشتاين للحقل (*Einstein Field Equation (EFE)*) على الشكل التالي:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

حيث:

$R_{\mu\nu}$: تمثل انحناء ريشي (*Ricci*) ، R انحناء سلمي، $g_{\mu\nu}$ موتر المترية، Λ يمثل ثابت كوني، G ثابت الجذب العام ، C هي سرعة الضوء و $T_{\mu\nu}$ موتر الإجهاد- الطاقة.

معادلات أينشتاين للحقل هي معادلة تربط بين مجموعة من موترات 4×4 تماثلية. لكل موتر توجد 10 مركبات مستقلة. بإمكانية حرية الاختيار لإحداثيات الزمكان الأربعة، تؤول المعادلات المستقلة إلى 6 عدديا بالرغم من أن معادلات أينشتاين للمجال تمت صياغتها في السياق بداية من نظرية رباعية الأبعاد، فقد قام بعض النظريين بتوسيع نتائجها إلى n من الأبعاد. المعادلات في السياق خارج النسبية العامة لا زال يشار إليها بمعادلات أينشتاين للمجال. بالرغم من المنظر البسيط الذي تبدو عليه المعادلات، إلا أنها معقدة في الواقع. إذا علم توزيع معين للمادة والطاقة على هيئة موتر إجهاد - طاقة فإن معادلات أينشتاين للحقل تفهم على أنها معادلتان للموتر المترية $g_{\mu\nu}$ ، لما كانت كليهما موتر ريشي والانحناء السلمي معتمدة على المترية بطريقة لا خطية معقدة، في الحقيقة، عند كتابتها كليا، فإن معادلات أينشتاين للحقل تمثل جملة من 10 معادلات تفاضلية جزئية، مرتبطة لا خطية.

يمكن للمرء كتابة معادلات أينشتاين للحقل بصورة أكثر اندماجية بتعريف موتر أينشتاين: [8]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

وهو مؤثر من الرتبة الثانية بشكل دالة في المترية. يمكن حينئذ كتابة معادلات أينشتاين للحقل على الشكل:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda \quad (1.3)$$

باستعمال وحدات هندسية حيث $c = G = 1$ ، يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda \quad (1.4)$$

الحد الأيسر يمثل تقوس الفضاء والزمان (الزمكان) الذي يتم إيجاده من المترية بينما الحد على الطرف الأيمن يمثل محتوى الطاقة/المادة من الزمكان. بالتالي يمكن تفسير معادلات أينشتاين للحقل كمجموعة من المعادلات تملي علينا كيفية ارتباط تقوس الزمكان بمحتوى المادة\الطاقة في الكون. هذه المعادلات مع المعادلة الجيوديسية، تشكل نواة الصيغ الرياضية في النسبية العامة. [9] (أنظر الملحق A)

7.1.1 اصطلاح الإشارة

يمثل الشكل السابق من معادلات أينشتاين للحقل المعيار الذي تما تأسيسه في كتاب مسنر و ثورن و ويلر. قام المؤلفون بتحليل جميع الاصطلاحات الموجودة وصنفها وفقا للإشارات الثلاثة التالية S1، S2، S3 :

$$\eta_{\mu\nu} = [S1] \times \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (1.5)$$

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = [S2] \times (\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}) \quad (1.6)$$

$$G_{\mu\nu} = [S3] \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

الإشارة الثالثة أعلاه تتعلق باختيار الاصطلاح لموتر ريشي:

$$R_{\mu\nu} = [S2] \times [S3] \times R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (1.8)$$

استخدم الباحثون بما فيهم أينشتاين إشارة مختلفة في تعريفهم لمؤثر ريشي والذي نتج عنه أن أصبحت إشارة الثابت على الطرف الأيمن سالبة:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = -\frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

إذا نستعمل هنا اصطلاحا الإشارة المترية $\{-, +, +, +\}$

8.1.1 صيغ مكافئة

يمكن كتابة معادلات أينشتاين للمجال بالشكل المكافئ التالي:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda = -\frac{8\pi G}{C^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (1.10)$$

والتي يمكن أن تكون أكثر ملائمة في بعض الأحيان.

9.1.1 الثابت الكوني

قام أينشتاين بتعديل معادلاته الأصلية للمجال كي تتضمن حدا كونيا متناسبا مع المترية:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

الثابت Λ يعد ثابت كوني و لأن Λ ثابتا فلن يتأثر مبدأ إنحفاظ الطاقة. فقد قدم أينشتاين ثابت الحد الكوني أصلا لوصف كون الديناميكي. هناك تقنيات فلكية متطورة حديثة قد وجدت أن القيمة الموجبة لـ Λ ضرورية لتفسير بعض المشاهد الكونية التي هي جوهر البحوث العلمية المعاصرة. كان أينشتاين يعتقد بأن الثابت الكوني وسيط مستقل، لكن حده في المعادلة يمكن أن ينتقل إلى الطرف الآخر جبريا، المكتوب كجزء من مؤثر الإجهاد والطاقة.

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

تعتبر طاقة الفراغ ثابتة بالعلاقة

$$\rho_{vac} = -\frac{c^2}{8\pi G} \Lambda \quad (1.13)$$

بالتالي فإن وجود ثابت كوني ذات طاقة فراغ غير معدومة (لا تساوي صفر). اليوم تستعمل الحدود في النسبية العامة بشكل تبادلية.

ملاحظة:

لدينا مبدأ انحفاظ الطاقة وكمية الحركة محفوظ في النسبية العامة والمعبر عنهما بالعلاقة التالية :

$$D_b T^{ab} = T^{ab}_{;b} = 0 \quad (1.14)$$

10.1.1 معادلات أينشتاين اللاخطية

إن لا خطية معادلات أينشتاين للمجال يميز النسبية العامة عن نظريات فيزيائية أخرى عديدة. على سبيل المثال، ماكسويل الكهرومغناطيسية تكون خطية في توزيعات المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي والشحنة والتيار (أي أن مجموع الحلين هو حل أيضا)، مثال آخر هو معادلة شرودنجر في ميكانيكا الكم والتي هي خطية في دالة الموجة. [8]

11.1.1 مبدأ التوافق بين النسبية وقانون الجذب العام لنيوتن

تؤول معادلات أينشتاين للحقل إلى قانون الجذب العام لنيوتن باستعمال كل من تقريب المجال الضعيف وتقريب الحركة البطيئة (السرعات ضعيفة أمام سرعة الضوء). في الواقع، الثابت الذي يظهر في معادلات أينشتاين للحقل نحصل عليه بفعل هذين التقريبيين.

علم الكون

2.1 علم الكون

الكون أو الكوسمولوجيا (*cosmologia*) هو العلم الذي يدرس الكون بمجمله بكل ما فيه من مادة وطاقة كمكان يعيش به الإنسان ويتفاعل معه [1]. وتأتي كلمة كوسمولوجيا من الكلمة الإغريقية (*cosmos*) وتعني الكون والإضافة (*logia*) بمعنى خطبة أو محاضرة وهي تلحق بمعظم الكلمات لتشير إلى العلم الذي يدرس هذا الموضوع. ورغم حداثة هذا العلم من حيث تداخله مع الفيزياء الحديثة فإن جذوره تمتد إلى العصور القديمة بمعالجاتها الفلسفية والدينية الغيبية (ميتا فيزيقية) لموضوع أصل الكون والوجود [2]. الكون هو مفهوم كلامي تم تأويله بطرق شتى ووفقاً لنظريات مختلفة ومتعددة. وأحد الاتفاقات القليلة حول ماهية الكون من بين النظريات العدة المتبناة من قبل الفلاسفة وغيرهم هو أن "مفهوم" الكون يدل على الحجم النسبي لمساحة الفضاء الزمكاني (الزماني والمكاني) الذي تتواجد فيه المخلوقات العاقلة وغير العاقلة؛ وهذا كالنجوم والمجرات والكائنات الحية. في تحديد طبيعة هذا الكون تختلف الآراء. فمن هنا تصور الفلاسفة المختلفة والعقائد قديماً الكون بصورة معينة، ومن هنالك تظهر الفلسفات والعقائد الجديدة لتأويل مفهوم الكون بصورة أخرى مختلفة. وهذا على مراحل عدة، من ناحية النشوء والتطور وكذلك من ناحية هل للكون نهاية أم لا وإلى آخره. ويقال أن النجوم في الكون عددها أكبر من عدد حبات الرمال على الأرض [3].

الفرق بين الكون (*Cosmos*) والفضاء الكوني (*Universe*) أن التسمية الأولى تُعبر عن الكون المرئي لنا، أما الثانية فهي مُجمل الزمكان في كوننا سواءً أكان مرئياً لها [1]. كلمة (*Cosmos*) كانت تستعمل في الفلسفة، وهي مشتقة من أصل إغريقي بمعنى "النظام"، على عكس الفوضى.. ثم أصبحت تطلق على الكون ككل (الكون المعروف) نظراً لانتظامه. أما (*Universe*) فقد كانت منذ البداية تعبر عن كل الوجود المادي: الأرض والكواكب والشمس والقمر.... الخ. [5] في الحقيقة كلمة "كون" باللغة العربية هي تقريباً مرادف لـ (*Universe*)، أما (*Cosmos*) فلا يوجد لها مرادف قريب أو بعيد في اللغة العربية [6].

ومن العجائب أننا لا نعلم من الكون إلا 4% فقط والباقي من الكون 96% مجهول لا نعلم عنه أي شيء.

[7]

1.2.1 الكون الرصدي (*observational cosmology*)

الكون المشاهد أو المرصود هو الكون الذي نستطيع مشاهدته من الأرض يوميا من مجرات ومادة عن طريق ما يصل إلينا من ضوء أو إشارات صادرة من مرحلة الانتفاخ الكوني التي حدثت بعد الانفجار العظيم باستعمال الأجهزة الفلكية والأقمار الصناعية [8]. ولدراسة الكون المشاهد و المرصود دراسة فيزيائية كان لزاما علينا استعمال وسائط وحسابات فلكية وكونية مستخلصة من النظريات الفيزيائية أهمها (أنظر الملحق B)

- معامل السلم (*factor scale*)
- الانزياح نحو الأحمر (*Red shift*).
- معامل التباطؤ (*Deceleration parameter*).
- ثابت هابل (*Hubble constant*).
- مسافة اللمعان (*luminosity distance*).

2.2.1 نموذج فريدمان و روبرسن و ولكر

معادلات فريدمان هي مجموعة من المعادلات في علم الكون الفيزيائي تحكم توسع الفضاء في نماذج متجانسة و متحدة الخواص للكون ضمن سياق النظرية النسبية . أنشأت على يد ألكسندر فريدمان في عام 1922 مترية فريدمان- لومتر- روبرسن- و ولكر هي حل بالضبط لمعادلات أينشتاين الحقلية في النسبية العامة و هذا النموذج يصف كون متصل بسهولة متجانس متحد الخواص متوسع أو متقلص و أيضا مفتوح أو مغلق أو مسطح حسب قيم الوسائط. استنتج فريدمان من فرضيته نموذجا واحدا يتحدث عن كون يتوسع كالبالون بحيث أن جميع البقع على سطح البالون تبتعد عن بعضها البعض. لا يوجد في

هذا النموذج أي مركز للكون فلا يوجد أي شيء داخل البالون والكون لا يمثل أكثر من هذا السطح المتوسع. [7,8] (أنظر الملحق B)

عام 1935 أوجد الأمريكي روبرسن والبريطاني و ولكر نموذجان إضافيان انطلاقاً من فرضيتي فريدمان نفسهما، في هذين النموذجين: يبدأ الكون بالتوسع من حالة كثيفة جداً بمعدل توسع عال جداً لدرجة أن التثاقل لا يمكنه إيقاف هذا التوسع فيستمر التوسع إلى ما لا نهاية (استمرار زيادة المسافات بين المجرات)، في الحالة الأخرى يبدأ الكون بالتوسع بمعدل متوسط إلى أن يصل لمرحلة يتوازن بها التوسع مع التقلص الثقالي فيصبح في حالة ثابتة لا تتوسع ولا تتقلص (تصل المسافات بين المجرات إلى قيمة ثابتة لا تتغير بعدها).

3.2.1 الانفجار الأعظم (Big bang)

الانفجار الأعظم نظرية في علم الكون، التي ترى بأن الكون قد نشأ من وضعية حارة شديدة الكثافة، تقريبا قبل حوالي 13.7 مليار سنة. نشأت نظرية الانفجار العظيم نتيجة لملاحظات ألفريد هيل حول تباعد المجرات عن بعضها، مما يعني عندما يؤخذ بعين الاعتبار مع المبدأ الكوني أن الفضاء المترى يتمدد وفق نموذج فريدمان للنسبية العامة (Friedmann-Lemaître model). هذه الملاحظات تشير إلى أن الكون بكل ما فيه من مادة وطاقة انبثق من حالة بدائية ذات كثافة وحرارة عاليتين شبيهة بالمتفردات الثقالية التي تتنبأ بها النسبية العامة. ولهذا توصف تلك المرحلة بالحقبة المتفردة.

فإذا كان الكون يتمدد فما من شك أن حجمه في الماضي كان أصغر من حجمه اليوم أي كان الكون قبل الانفجار العظيم بحجم رأس المسمار، وأن حجمه في المستقبل سيكون أكبر منهما. وإذا تمكنا من حساب سرعة التمدد يمكننا التنبؤ بالزمن الذي احتاجه الكون حتى وصل إلى الحجم الراهن، وبالتالي يمكننا تقدير عمر الكون وهو نحو 13.7 مليار سنة تقريبا. تتحدث نظرية الانفجار العظيم عن نشوء وأصل الكون إضافة لتركيب المادة الأولى (primordial matter) من خلال عملية التخليق النووي (synthesis nucleo) كما تتنبأ بها نظرية ألفر - بيتا - جامو (Alpher-Bethe-Gamow theory).

فعندما كان الكون صغيرا جدا وقبل تكون النجوم والمجرات كان شديد الحرارة جدا وكان يملأه دخان ساخن جدا موزعا توزيعا متساويا في جميع أنحاءه، ومكونات هذا الدخان كانت بلازما الهيدروجين، أي بروتونات وإلكترونات حرة من شدة الحرارة وعظم الطاقة التي تحملها. وبدأ الكون يتمدد ويتسع فبدأت بالتالي درجة حرارة البلازما تنخفض، إلى الحد الذي تستطيع فيه البروتونات الاتحاد مع الإلكترونات مكونة ذرات الهيدروجين. وبدأ الكون أن يكون شفافا وانتهت فترة تعتمه، وكانت الفوتونات الموجودة تنتشر في جميع الأرجاء إلا أن طاقتها بدأت تضعف حيث يملأ نفس عدد الفوتونات الحجم المتزايد بسرعة للكون. وهذه الفوتونات هي التي تشكل اليوم إشعاع الخلفية الميكروويفي الكوني (*cosmic microwave background radiation*). وانخفضت درجة حرارتها عبر نحو 13.7 مليار من السنين هي العمر المقدر فلكيا للكون إلى أن وصلت إلى درجة الحرارة الخلفية في الوقت الحالي والتي تصل إلى 2.7 كلفن في جميع أنحاء السماء. [4]

4.2.1 إشعاع الخلفية الميكروويفي الكوني (CMB)

في شركة بل بنيجرسي كان أرنو بينزياس وويلسون يختبران كاشفا للأمواج السنتمترية (أمواج كهروطيسية تواترها عشرة مليارات في الثانية (ميكروويف))، وكانت المشكلة أن جهازهما كان يستقبل إشعاعات مشوشة أكثر مما ينبغي. كانت الإشعاعات المشوشة أشد عندما يكون الجهاز في وضع شاقولي منها عندما تكون في وضع أفقي. أما فرق الشدة بين الوضع الشاقولي وجميع الاتجاهات الأفقية فكان ثابتا. كان هذا يعني أن مصدر هذا الإشعاع من خارج الأرض، [4] وأنه لا يتأثر بحالات الليل والنهار ولا اختلاف الفصول مما يعني أيضا أنه من خارج المجموعة الشمسية، وحتى خارج مجرتنا، وإلا فإن حركة الأرض تغير جهة الجهاز ومن المفروض أن تغير شدة الإشعاع المشوش. كان هذا الإشعاع غريبا في تماثله في جميع نقاط العالم المرصود فهو لا يتغير من جهة رصد لأخرى ولا من نقطة لأخرى. كان ديك وبيبلز من جهة أخرى يدرسان اقتراح غاموف (تلميذ فريدمان) والذي يقول أن العالم بما أنه كان عبارة عن جسم ساخن وكثيف جدا ومشع في بداية أمره فإن إشعاعه لا

بد أنه باق إلى الآن. كما أن توسع الكون لا بد أن ينزاح نحو الأحمر (مفعول دوبلر) وان يصبح بشكل إشعاع سنتيميتري. عندئذ أدرك بنزياس وويلسون أن ما رصده ما هو إلا بقايا إشعاع الكون البدائي الذي أطلق عليه لاحقا اسم: إشعاع الخلفية الكونية الميكروويفي *CMB*. إشعاع الخلفية الميكروويفي الكوني (*radiation cosmic microwave background*) هي أشعة كهريطيسية توجد في جميع أركان الكون بنفس الشدة والتوزيع وهي تعادل درجة حرارة 2.72 كلفن. [4]

عندما نشاهد السماء بالمقراب نرى مسافات واسعة بين النجوم والمجرات يغلبها السواد، وهذا ما نسميه الخلفية الكونية. ولكن عندما نترك المنظار الذي نرصد به الضوء المرئي، ونمسك بمقراب يستطيع رؤية الموجات الراديوية، يصور لنا ضوءا خافتا يملأ تلك الخلفية، وهو لا يتغير من مكان إلى مكان وإنما منتشر بالتساوي في جميع أركان الكون. وتوجد قمة هذا الإشعاع في حيز طول موجة 9.1 ملليمتر وتعادل 160 مليار هرتز (160 GHz). اكتشف تلك الأشعة الباحثان أرنو بينزياس وزميله روبرت ويلسون وكان ذلك في عام 1964. وحصل العالمان على جائزة نوبل للفيزياء عام 1978. [1]

5.2.1 توسع الكون

تبين المشاهدة أن الكون يتمدد باستمرار، ولا يحدد التمدد مالا نهائي انحناء الكون، فقد يكون كونا مفتوحا (ذو معامل انحناء سالب) أو يكون مسطحا أو مغلقا (ذو معامل انحناء موجب)، مع استمرار تواجد الطاقة المظلمة فيه (حالة مغلقة)، ستعمل على مقاومة قوى الجاذبية للمادة وأي قوى أخرى تكون من خصائصها العمل على انكماش الكون. وفي حالتي الكون المنبسط والمفتوح فإن الكون في تلك الحالتين سيستمر التمدد والانتساع حتى في حالة غياب الطاقة المظلمة.

وتستتبط مشاهدات إشعاع الخلفية الكونية التي تجريها تجربة ويلكنسون الميكرونية أن الكون منبسط، إنه توجد فيه قدرا كبيرا من الطاقة المظلمة. وفي هذه لحالة فسوف يستمر تمدد الكون مع زيادة معدل تسريعه. وتؤيد مشاهدات المستعرات العظمى البعيدة زيادة سرعة تمدد الكون. فإذا كان طبقا لنموذج لامدا - سي - دي - إم (*Lambda-CDM model*) لعلم الكون الفيزيائي أن الطاقة المظلمة هي نوع من

الثابت الكوني، فقد يزداد تمدد الكون بمعدل دالة أسية طبيعية بحيث يتضاعف حجم الكون بمعدل

ثابت. [6]

الفصل الثاني:

هندسة فينسلر و طور الصورة

هندسة فينسلر *Finsler geometry*

1.2 هندسة فينسلر (*Finsler geometry*)

هندسة فينسلر هي هندسة رياضية شاملة في بنيتها تحتوي على الانحناءات و الإلتواءات فهي تعد تعميم لهندسة ريمان والتي يمكن اعتبارها الهندسة الفيزيائية التي تصف المادة الديناميكية بينما هندسة ريمان هي هندسة الجاذبية. ربط بنية المترية لريمان الزمكان (*space-time*) إلى حقول الأشعة الفيزيائية (والذي يعتمد على الموضع والاتجاه (السرعة)) لأصل الكوني (*cosmological origin*) (يخرج من مصادر مادية للكون حيث تم دمجها في الهندسة مما تسبب في بنية (*structure*) متباينة الخواص (*anisotropic*)، الاختلاف في التباين يعبر عليه بحدود الموتر الرياضي للالتواء كارتن (*Cartan torsion tensor*) الخاص بهندسة فينسلر المتعددة (*Finslerian manifold*) إذا تباين الخواص الهندسية سببها المتغيرات الداخلية هذه الخواص يعبر عليها بدالة حقيقية: $F(x, Y)$ حيث تعرف بطاولة $F(x, Y)$ (على الظل- المماس للحزمة بدلا من تحديد حاصل البنية الداخلي لذلك) الطويلة هي تابع حقيقي :- $F(x, Y)$ لفاصلة أو النقطة الزمكان x ومماس الشعاع Y المنتمي إلى T_M أين يلعب دور المتغير الداخلي Y تعتمد على خصائص حقول فينسلر بضمها إلى مفهوم لا تجانس -التباين- المتسببة في تغيير هندسة ريمان.

الهدف الرئيسي من دراسة هندسة فينسلر هو متعددة فينسلر (*Finsler manifold*) ومنه نجد متعددة الاشتقاق مع مترية فينسلر، (معيار باناخ (*Banach norm*) معرف على كل مساحة الظل). نجد مترية فينسلر هي البنية الأكثر عموم بالنسبة لمترية ريمان. [14,10]

فبنية فينسلر معرفة كالتالي :

$$F : TM \rightarrow [0, \infty[\text{ حيث } M \text{ هي دالة متعددة في } M$$

خصائص هندسة فينسلر:

$$(1) \text{ الانتظام (Regularity): } F \text{ هي دالة قابلة للاشتقاق إلى ما لا نهاية } C^\infty$$

$$(2) \text{ إيجابية التجانس (Positive homogeneity): } F(x, \lambda Y) = \lambda F(x, Y) \Rightarrow \forall \lambda > 0$$

$$(3) \text{ التحدب القوي: (strong convexity 4x4): } H_{\mu\nu} = \hat{g} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^\mu \partial Y^\nu} F^2 > 0$$

من أجل وصف الجملة الديناميكية و الحصول على المعادلات الجيوديزية رباعية الأبعاد، نقوم

بإدخال L لغرانجيان الجملة الخاصة بنموذج راندرز (Randers-type) علما بأن: $L = F(x, Y)$ و

$$L = F(x, Y) \quad \text{تعريفه موجب}$$

بحيث يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$F(x, Y) = \sigma + U_\alpha Y^\alpha \quad (2.1)$$

$$Y^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{مع}$$

$$U_\alpha(x) = \hat{K}_\alpha \Phi(x) \quad \sigma = (g_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu)^{1/2} \quad (2.2)$$

ومتريّة فريدمان روبرسن ولكر:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(1, -\frac{a^2}{1-Kr^2}, -a^2 r^2, -a^2 r^2 \sin^2 \theta\right) \quad (2.3)$$

حيث s الزمن الذاتي و $a = a(t)$ وعامل السلم (Factor Scale)، المعلومات الهامة الخاصة بالتباين يتم

ترميزها بالمركبة $U_\alpha(x)$ أو الشعاع $\hat{K}_\alpha(x)$ تحت افتراض المجال الضعيف: يمكننا تقريب متريّة

فينسلر (Finsler) على أنها اضطراب لمتريّة فريدمان روبرسن ولكر. (FRW) $g_{\mu\nu}$.

من خلال النسبية العامة شعاع الحقول الضعيفة في الفضاء (على سبيل المثال المجال المغناطيسي) يمكن أن يعامل على أنه اضطراب من الرتبة الأول للمؤثر لمتريّة ريمان. يمكن لنا استنتاج متريّة فينسلر ($\hat{g}_{\mu\nu}(x, Y)$) (*metric Finsler*) في فضاء فينسلر وتسمى التلامس لمتريّة ريمان (*osculating Riemannian metric*) يمكن أن تحسب مباشرة من المعادلة المتريّة F مثل:

$$\hat{g}(x, Y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial Y^\mu \partial Y^\nu}$$

$$\hat{g}(x, Y) = \frac{F}{\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{1}{4\sigma} (U_\mu Y_\nu + U_\nu Y_\mu) - \frac{\beta(x, Y)}{\sigma^3} Y_\mu Y_\nu + U_\mu U_\nu \quad (2.4)$$

$$\beta(x, Y) = U_\alpha(x) Y^\alpha$$

ملاحظة:

في إطار هندسة فينسلر، يتم التعامل مع أشعة السرعة الأربعة كمتغيرات مستقلة $A_{\lambda\mu}^\kappa(x)$ تلامس الروابط الأفنية (*Osculating affine connection*) بحيث الأفينية هي تحول خطي قابل للإرجاع أو يحفظ الخطوط المتوازية. [15]

$$A_{\lambda\mu}^\kappa(x) = (\hat{\Gamma}^\kappa_{\lambda\mu} - C^\kappa_{\rho\mu} G_{\lambda}^\rho - C^\kappa_{\lambda\rho} G_{\mu}^\rho + \frac{F}{\sigma} g^{\kappa\sigma} C_{\lambda\mu\rho} G_{\sigma}^\rho)(x, Y(x))$$

$$G^\mu = \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^\mu_{\rho\sigma} Y^\rho Y^\sigma \quad (2.5)$$

$$\hat{\Gamma}^{i}_{kj}(x, Y(x)) = \frac{1}{2} \hat{g}^{ir} (\partial_k \hat{g}_{rj} + \partial_j \hat{g}_{rk} - \partial_r \hat{g}_{jk})$$

حيث $C_{\mu\nu\lambda}$ موتر كارتن (*Cartan*) الالتواء:

$$C_{\mu\nu\lambda}(x, Y(x)) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma} S_{(\mu\nu\lambda)}(g_{\mu\nu} U_\lambda) - \frac{1}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(Y_\mu Y_\nu U_\lambda) - \frac{\beta}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(g_{\mu\nu} Y_\lambda) \right] \quad (2.6)$$

$S_{(\mu\nu\lambda)}$ يمثل مؤثر التناظر مع احترام الترتيب μ, ν نفس الشيء إذا عرفنا الانحناء \hat{R} و $\hat{R}_{\mu\nu}$

ملاحظة: فضاء فينسلر هو فضاء ريمان إذا فقط إذا

$$(2.7)$$

$$C_{ijk} = 0$$

1.1.2 الانحناءات (*Curvatures*)

نتحصل على الانحناءات كما في هندسة ريمان ولكن هذه المرة في هندسة فينسلر تبرز حدود

جديد التي تغيير مضمون العلاقات في الروابط الأفينية بظهور الفتل وغيرها من الحدود التي تعبر على

التباين :

$$(2.8)$$

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad \hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}$$

$$\hat{R}_{\lambda\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} A_{\lambda\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} A_{\lambda\mu}^{\alpha} + A_{\nu\lambda}^{\rho} A_{\rho\mu}^{\alpha} - A_{\lambda\mu}^{\rho} A_{\rho\nu}^{\alpha}$$

طور الصورة (The Phase Portrait)

2.2 طور الصورة

هو تمثيل هندسي لمسارات النظام الديناميكي في الفضاء التمثيلي (الطوري) بحيث كل مجموعة من الشروط الأولية تمثل بمنحنى مختلف عن الآخر أو بنقاط مختلفة وهي أداة لا تقدر بثمن في دراسة الأنظمة الديناميكية. إن أول من استعمال طور الصورة (*Phase Portrait*) في الرياضيات و الفيزياء هو العالم وليارد جيبس (*Willard Gibbs*) سنة 1901م، والذي يمكننا من تمثيل كل الحالات الممكنة للنظام الفيزيائي في الفضاء الطوري وذلك بتعيين كل حالة ممكنة للنظام الفيزيائي بنقطة واحدة في هذا الفضاء. في الفضاء الطوري عادة ما يتألف النظام الميكانيكي من كل القيم الممكنة للموضع وكميات الحركة والتي هي بحد ذاتها المتغيرات الديناميكية لهذا الفضاء.

النظام الديناميكي يمثل بالمتغيرات الديناميكية للموضع و كميات الحركة بدالة تابعة للزمن وترسم في المعالم الرياضية وتسمى بالبيان الطوري (*Phase diagram*) والذي يبين لنا من خلال هذه المنحنيات مختلف مناطق الاستقرار و لا استقرار للنظام الديناميكي والمتكونة من المتغيرات الفيزيائية كالضغط والقوة والحرارة.... الخ. في الفضاء الطوري كل درجات الحرية (*degree of freedom*) أو الوسائط للنظام الفيزيائي تمثل بمحور، محورين، ثلاث محاور أو عدة محاور في المعلم الرياضي وتسمى على التوالي: بالمحور الطوري أو المستوي الطوري أو الفضاء الطوري (ثلاث أبعاد) لتمثيل كل الحالات الممكنة للنظام الديناميكي .

نستطيع أن نقول أن طور الصورة يتيح لنا معرفة أشمل و أوضح لتطور النظام الديناميكي بسهولة لحل المسائل المعقدة والتي لا تكون واضحة و لا نستطيع أن ندرسها بطرق تحليلية أخرى. النظام الديناميكي هو مفهوم رياضي يصف تطور النقاط المكونة للجملة الفيزيائية بالنسبة للزمن في الفضاء الهندسي المختار للدراسة. النظام اللا خطي (*Nonlinear system*): يكون النظام أو الجملة الفيزيائية لا

خطيا إذا كانت لا تحقق مبدأ التراكب (*superposition principle*)، أو بالأحرى متغيرات الدخول لا تتناسب مباشرة مع متغيرات الخروج. فيزيائيا نعتبر النظام لا خطي إذا كان غير متماثل (*anisotropy*) أو غير متجانس (*non homogeneous*).... الخ.

ورياضيا لانستطيع كتابة أي جملة فيزيائية على شكل تركيب خطي للحدود المستقلة لأنها في الواقع جمل لا خطية (تتناسب مع الوسط الذي نعيش فيه ويحيط بنا لأنه غير معزول عن بعضه البعض). أما من أجل الدراسة الفيزيائية فنعزل الظاهرة التي نريد دراستها، حيث يمكن تحويلها إلى أنظمة خطية لتسهيل الحسابات وذلك بإضافة متغيرات إضافية وتطبيق نظرية الاضطرابات و التقريبات لفصل الجزء الخطي من الجزء الغير خطي وفي الأخير ندرس الجملة بكاملها ونعممها باستعمال الوسائل الرياضية المتاحة لذلك.... الخ. أما فيما يخص علم الكون فمن الصعب عزل الظواهر الكونية عن بعضها البعض لأنه أكبر مما نتصور ومعارفنا ضئيلة لا تزال في بدايتها فندرسها كما هي فنختار وسائل رياضية تتماشى معها ومن بين هذه الوسائل نظرية طور الصورة (*Phase Portrait*) التي تتيح لنا معرفة مسار تغيير النظام الديناميكي وتعطينا معرفة عما يحدث وحتى وإن كنا لا نملك الدقة المطلوبة ولكن نعرف أين تتجه الحلول وأين تستقر فنستطيع أن نتنبأ بأشياء أخرى.... [35]

1.2.2 النظام الديناميكي

يوجد هنا كإطار موحد من أجل كتابة الجملة الغير خطية (*nonlinear*) ألا وهي نظرية النظام الديناميكي هذا الأخير هو مهم لفهم سلوك الفيزياء، حيث هناك ترابط متداخل بين الفيزياء والرياضيات التطبيقية والتي ساهمت بإقامة ثورة في مفاهيمنا للمعاني الفيزيائية مثلما قامت بها بعض النظريات كالميكانيك النسبي وغيرها.... الخ. نسمي نظام ديناميكي أي نظام يتطور مع الزمن أو في تطوره يعتمد على الزمن ويمكن كتابة معادلاته على الشكل التالي :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ أو } \dot{\vec{X}} = f(\vec{X}) \quad (2.12)$$

لو نعرف الشروط الابتدائية للجملة الفيزيائية، يمكن لنا التنبأ و معرفة كيفية تطور النظام الفيزيائي خلال كل لحظة من الزمن، إذا حالة الجملة معروفة تماما خلال التطور.

2.2.2 تصنيف الأنظمة

هناك عدة نماذج مختلفة تميز نظام الفيزياء و التي تعتمد على عدد المتغيرات المشكلة له. في

غالب الأحوال كلما كانت هناك متغيرات كثيرة كان النظام أكثر تعقيدا. نبين في هذا الجدول رقم (1)

بعض الظواهر الفيزيائية وتصنيفها حسب عدد درجة الحرية n :

	$n = 1$ <i>croissance, décroissance ou équilibre</i>	$n = 2$ <i>oscillations</i>	$n \geq 3$	$n \gg 1$ <i>phénomènes collectifs</i>	$n = \infty$ <i>ondes et structures</i>
linéaire	circuit RC, décroissance radioactive	circuit RLC, pendule simple, système Terre-Lune		oscillateurs couplés, dynamique moléculaire, mécanique statistique	élasticité, électromagnétisme, acoustique, chaleur, diffusion
non-linéaire	bifurcations, relaxations	pendule, cycles limite, cycles prédateur-proie, oscillateur de van der Pol	<i>chaos</i> attracteur étranges, problèmes à plusieurs corps (Soleil-Terre-Lune), cinétique chimique, fractales	<i>complexité spatio-temporelle</i> oscillateurs non-linéaires couplés, lasers, optique non-linéaire, écosystèmes, économie, réseaux de neurones	ondes non-linéaires (solitons), turbulence, plasmas, tremblements de terre, relativité générale, épilepsie

الجدول رقم (1)

3.2.2 أحادية الحلول

في الجمل الخطية تعطي لنا دوما حلول والتي هي وحيدة وهذا ليس بالضرورة الحال بالنسبة للجمل الغير خطية حيث يمكن أن تكون حلول لانتهائية إلا إذا كانت هناك قيود و شروط ابتدائية على الحلول تجعلها أحادية وهذا حسب الجمل الفيزيائية التي هي قيد الدراسة.

4.2.2 معادلات بلا أبعاد

الخطوة الأولى لدراسة نموذج هي وضع معادلات بلا أبعاد، وتتشكل باختزال عدد وسائط النموذج للقيام بالدراسة التحليلية و العددية، ويمكن القيام بها بعدة طرق رياضية، والهدف هو التبسيط إلى أقصى حد المعادلات.

مثال: معادلة لا أبعاد عن طريق تبسيط الوسائط:

$$m\ddot{\theta} + \mu l\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \quad (2.13)$$

لدينا أربعة وسائط (m, l, g, μ) نستطيع كتابتها على الشكل التالي:

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (2.14)$$

نرى وجود حدين مستقلين a و b المعادلة تصبح من الشكل التالي:

$$\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b\sin\theta = 0 \quad (2.15)$$

5.2.2 الجمل (الأنظمة) الخطية

من أجل إنشاء النماذج الخاصة بالظواهر الفيزيائية، نبحث دوما عن النماذج التي تملك إمكانية معرفة ودراسة الحلول $x(t)$ نقول أن هذا النموذج خطي وكل مضاعفات لهذه الدالة هي أيضا حل و أيضا كل تركيب خطي هو حل (مبدأ التراكب). $x(t)$ هي حل $\lambda x(t)$ هي أيضا حل مهما تكون قيمة

١ . من أجل ذلك نقوم بتقريب الجمل لا خطية إلى جمل خطية لسهولة الدراسة (تقريبات رياضية- طبعاً) وإمكانية معرفة الحلول. أما في حالة لا نستطيع تقريبها (جمل معقدة ومتشابكة) فندرسها كما هي باستعمال طور الصورة والدراسة النوعية للنظام الديناميكي. وتعود لا خطية الجمل إلى عدة مصادر من بينها (خصائص الهندسة ،طبيعة الجملة الفيزيائية، تشابك الظواهر الفيزيائية... الخ)

6.2.1 النقاط الثابتة

هي نقاط توازن النظام بحيث (الاشتقاق معدوم $\dot{x}=0$) x^* هي نقطة ثابتة للمعادلة $\dot{x}=f(x)$ ومنه نجد $\dot{x}^*=f(x^*)=0$. النقاط الثابتة تلعب دوراً مهماً في الدراسة للنظام الديناميكي. بين هنري بوانكاري (Henri Poincaré) (1854-1919) من أجل دراسة النظام الديناميكي لعدة متغيرات ليس بالضرورة حساب الحلول بالتفصيل، يكفي فقط معرفة النقاط الثابتة و استقرارها لوصف هذا النظام، هذه النتيجة تبسط بطريقة معتبرة دراسة الأنظمة لا خطية .

7.2.2 استقرار النقاط الثابتة

من أجل توضيح استقرار النقطة الثابتة ينبغي دراسة سلوك مسارات المدارات في الجوار الصغير لهذه النقطة. نفرض بأن x^* النقطة الثابتة للجملة $\dot{x}=f(x)$ من أجل الدالة $f(x)$ هي مشتقة باستمرار. نعتبر

الفارق ضعيفاً:

$$\dot{\varepsilon}(t) = x(t) - x^* \quad (2.16)$$

من أجل نقطة ثابتة إذا لدينا:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{x} \\ &= f(x^* + \varepsilon) \\ &= f(x^*) + \varepsilon f'(x^*) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon f'(x^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

إذا كانت $f'(x^*) \neq 0$ وإذا كان الحد $O(\varepsilon^2)$ مهملاً، إذا نستطيع كتابتها على الشكل التالي:

$$\dot{\varepsilon}(t) = f'(x^*) \varepsilon(t) \quad (2.18)$$

من أجل الحل يتزايد أسياً إذا كان لدينا $f'(x^*) > 0$ و يتناقص من أجل $f'(x^*) < 0$ إذا نجعل النظام خطياً في جوار النقطة الثابتة. يكفي فقط معرفة الاشتقاق للدالة $f(x)$ عند هذه النقطة من أجل الوقوف عند حالة الاستقرار. من أجل الحالة الخاصة $f'(x^*) = 0$ يجب دفع النشر المحدود إلى غاية الحد ذو الرتبة الثانية. ثم نقوم بنفس التحليل

8.2.2 نظام ذو متغيرين

الانتقال من 1 إلى 2 أبعاد يحمل معه الكثير من المعلومات الجديدة. الديناميكية تكون غنية بالمعلوماتية ولاسيما تسمح لنا بملاحظة الاهتزازات. و مفهوم الاستقرار يكون أكثر حساسية. في الأخير إدخال تمثيلات بيانية جديدة لمسارات الأفلاك الجمل الذاتية لمتغيرين التي غالباً ما تكون في النماذج و التي تملك الاشتقاق من الرتبة الثانية. نستطيع كتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

9.2.2 الاشتقاق ذو الرتب العليا

توجد تحويلات بسيطة تتيح لنا من إعادة تركيب أي نظام يملك اشتقاق من الرتبة $n > 1$ إلى مجموعة معادلات لا تحتوي إلا على اشتقاق من الرتب الأولى. مثال على ذلك: حالة النواس يهتز بتخامد، يكتب على شكل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية:

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2.19)$$

نعرف متغيرين جديدين: x_1 و x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} = \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

يعاد تركيب المعادلات التفاضلية إلى معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 - \omega_0^2 \sin x_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

المتغيرين x_1 و x_2 هما على التوالي الزاوية و سرعة الزاوية. بمأن لدينا معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى لا بد أن يكون لنا شرطين ابتدائيين. بصفة عامة كل جملة معادلات تفاضلية عادية نستطيع كتابتها على الشكل التالي:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

إذا من أجل معادلات تفاضلية من الرتبة n يمكن رفع لها n وسيط متغير و الذي من أجل كل وسيط نرفع معادلة تفاضلية من الرتبة. هذه النتيجة تلعب دورا مهما في المحاكاة الرقمية للأنظمة الرقمية لأن خوارزمية حساب التكاملات الرقمية تبتدأ حساباتها من حلول المعادلات ذات الرتبة الأولى. نفس النتيجة تطبق على الأنظمة الغير ذاتية (*non-autonomous system*)، أين يدخل الزمن كمتغير أساسي وضمنيا.

10.2.2 إيجاد النقاط الثابتة

على سبيل المثال: هزاز لا متخامد النقاط الثابتة: باستعمال التعريف السابق للنقاط الثابتة لدينا $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

نقاط ثابتة إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

في هذا المثال هزاز غير متخامد:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

نجد النقاط الثابتة التالية :

$$\begin{cases} x_1 = \theta = k\pi & \forall k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

نجد النقاط أين يكون النواس عمودي و متحرك. من بين هذه النقاط هناك المستقرة (لما يكون النواس في الأسفل) و الأخرى غير مستقرة (لما يكون النواس في الأعلى). إذا نقوم بدراسة تحليلية للاستقرار انطلاقاً من المنحنيات (الأفلاك).

11.2.2 طور الصورة

الانتقال من نظام ذو متغير واحد إلى نظام ذو متغيران يطرح إشكالية عند تمثيل المنحنيات في الفضاء الطوري رباعي الأبعاد $(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t))$. أي بمعنى لا نستطيع تمثيل أكثر من متغيرين في مستوي. بطريقة سهلة يمكن احتواء هذه المشكلة، وذلك عن طريق طور الصورة، مجموعة إسقاطات للمنحنيات في المستوي الطوري تعطي حلول للجملة الديناميكية. هو تمثيل هندسي للمسارات التي تعطي معلومات أساسية حول خصائص الأنظمة الذاتية.

مثال: هزاز توافقي بدون تخامد

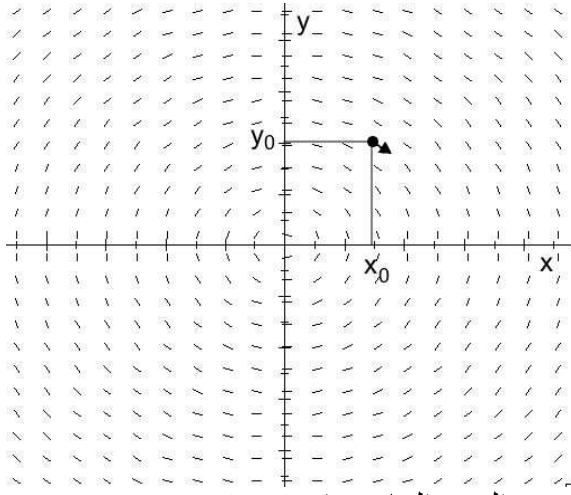
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (2.26)$$

طور الصورة لهذه الجملة هو المستوي الذي يملك المحورين $x(t)$ و $y(t)$ كل نقطة في هذا المستوي تمثل حالة ديناميكية ممكنة للهاز التوافقي. نأخذ الزمن t_0 والذي من أجله يمر المسار بالنقطة $(x(t_0), y(t_0))$ في الزمن $t_0 + \delta t$. الجملة تتواجد في الإحداثيات التالية:

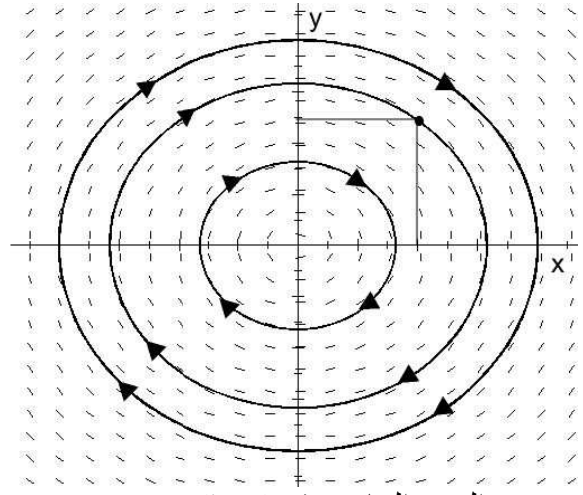
$$\begin{pmatrix} x(t_0 + \delta t) \\ y(t_0 + \delta t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(t_0) + \delta t \dot{x}(t_0) \\ y(t_0) + \delta t \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \delta t \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

المسار يتباعد عن نقطة البداية $(x(t_0), y(t_0))$ في اتجاه النقطة التي تعطيه السرعة $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$. في أي نقطة من طور الصورة نستطيع أن نرفق له شعاع السرعة (\dot{x}, \dot{y}) ، علما اشعاع السرعات مماسي مع هذه المسارات. بفضل مجموعة الأشعة للسرعات نستطيع إنشاء مسارات الواحدة قرب الأخرى. في الرسم البياني رقم (1. a) يمثل حقل الأشعة مرافق لشبكة النقاط مقارنة للمستوي (x, y) . عند الشروط الابتدائية (x_0, y_0) نرفق لها شعاع خاص و الذي يبين لنا كيف يبتعد المسار عن هذه النقطة.

مختلف المسارات المرافقة للشروط الابتدائية مبينة في الرسم البياني رقم (1. b):



الرسم البياني رقم (1. a)



الرسم البياني رقم (1. b)

يجب معرفة بعض الخصائص العامة :

- يوجد عدد لا حصر لها من المسارات أو المدارات في طور الصورة، ولكن لا نرسم إلا المسارات

الممثلة أو المعبرة. مجموعة هذه المدارات تعرف بالتدفق (*The flow or The stream*)

- كل المدارات أو المسارات الخاصة بالهزاز التوافقي مدارات مغلقة الرسم البياني رقم (1. ب). هذا الذي

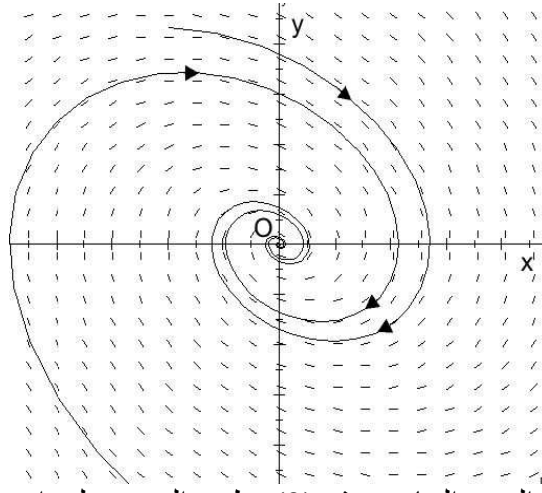
يفسر مرور الجملة بنفس الحالة الديناميكية دوريا. نستطيع القول بأن المدارات المغلقة تمثل الأنظمة

الدورية (*regime periodic*).

- لا يمكن أبدا أن اثنين من المدارات التقاطع، إلا في حالة واحدة فقط عند النقاط الثابتة وهذا يعني أن

التقاطع معناه الجملة في نفس النقطة (x_0, y_0) تملك سرعتين (\dot{x}, \dot{y}) مختلفتين ..؟ وهو أمر

مستحيل!!



الرسم البياني رقم (2): طور الصورة لهزاز متخامد

يبين التدفق الموافق لهزاز التوافقي متخامد عكس المثال السابق أين المدارات كانت مغلقة، المدارات هنا في هذا المثال مفتوحة و هذا الذي يترجم بأن الحركة غير دورية مع تطور التخامد تدريجيا نحو النقطة الثابتة $(x, y) = (0, 0)$.

12.2.2 كيفية رسم طور الصورة

تمثيل طور الصورة كثيرا ما تكون صعبة، إلا إذا كنا حريصين على إتباع بعض القواعد البسيطة

من بينها:

1. أولا تحديد مجال التي تأخذها قيم المتغيران (x, y) و التحقق بصفة خاصة إذا كانت بعض

المتغيرات لا تأخذ إلا قيم موجبة.

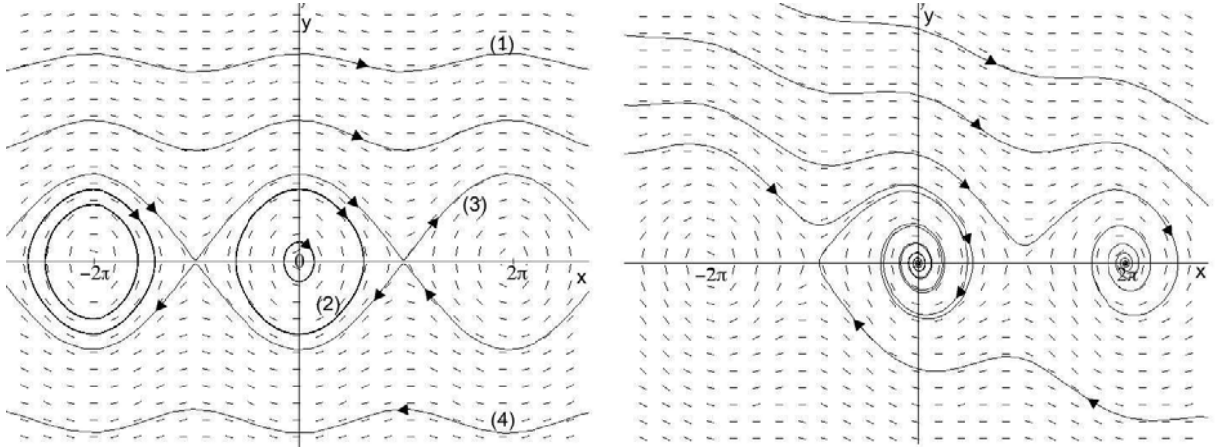
2. تمثيل جميع النقاط الثابتة و استقرارها، بالطبع سيسهل بصفة كبيرة رسم المدارات أو المسارات.

3. تمثيل كل الخطوط المتماثلة الميل (سلسلة من الخطوط التي تملك نفس الميل).

4. ثم إكمال باقي الخطوط من خلال تحديد الشبكة المنتظمة (نموذج متكرر)، وحساب الميل في كل

نقطة و من المستحسن الابتعاد تدريجيا عن النقاط الثابتة.

مثال على ذلك: لدينا الرسم البياني التالي لنواس متخامد و هزاز توافقي



الرسم البياني رقم (3): طور الصورة لنواس غير متخامد (الجهة اليسرى) ونواس يتخامد ببطيء (الجهة اليمنى).

في هذا الرسم البياني يمثل التدفق المرافق لنواس المعبر عليه بالمعادلة $\dot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ ، علي التوالي $\lambda = 0$ و $\lambda = 0.2$ يتخامد. عكس ذلك بالنسبة لهزاز توافقي، يشبه ذلك للمتغير θ الذي يجعله النواس دورياً، لأن الطاولة تعرف بـ 2π . وهذا ما يفسر بأن حقل الأشعة صامد بالنسبة لتحويلات الانزياح (الانتقال) بـ 2π في جهة الزاوية θ (في الرسم البياني X) نلاحظ عدة نماذج للمدارات في الرسم البياني:

1. المدارات المفتوحة : النواس يدور دوماً في نفس الجهة، دون انقطاع.
2. المدارات المغلقة: توافق الحركة الاهتزازية الطبيعية للنواس. كلما كان السعة أو المطال (*amplitude*) صغير، كلما كانت المدارات إهليجية (*ellipse*)، مثل الهزاز التوافقي.
3. لدينا مدار خاص يسمى الفاصل (*separator*) الذي يمثل الحدود بين الاهتزاز و الدوران المدارات المفتوحة توافق الدوران المستمر. لاحظ أن المدارات لا تتقاطع أبداً إلا في نقطة واحدة خاصة، الفواصل تتقاطع عند الفاصلة $(x=(2k+1)\pi, y=0)$ ، $k \in Z$. وهذه النقاط عبارة عن نقاط التوازن الثابتة وهي تمثل حالة النواس يهتز في القمة (القيمة الأعظمية للهزاز)، إذا هي نقاط

التوازن الغير مستقرة. عكس ذلك في النقاط الثابتة المعرفة بـ $(x=2\pi k, y=0)$ ، $k \in Z$ التي هي مستقرة.

13.2.2 استقرار النقاط الثابتة

تحليل الاستقرار ندرس بنفس الكيفية التي تعالج الجملة ذات المتغير الواحد. في الجوار القريب من النقاط الثابتة نفرض:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

والذي يؤدي إلى جعل الجملة خطية:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

مع أخذ بعين الاعتبار أن:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}_{x^*, y^*} \quad (2.30)$$

مصفوفة جاكوبي معروفة في هذه الجملة بالنسبة للنقطة الثابتة المعينة (x^*, y^*)

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

الشعاعين الذاتيين للمصفوفة جاكوبي هما بالتعريف:

$$J \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \& \quad J \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

أو في حالة الأشعة الذاتية مختلفة، فهي تشكل قاعدة تامة ونستطيع كتابة الحلول على شكل تركيب خطي:

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + \beta(t) \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

نقوم بتعويض المعادلة (22) في المعادلة (18) وبحساب جاكوبي الجملة نتحصل على

$$\dot{\alpha}(t) = \lambda_1 \alpha(t) \quad \& \quad \dot{\beta}(t) = \lambda_2 \beta(t) \quad (2.34)$$

و التي في النهاية نتحصل على:

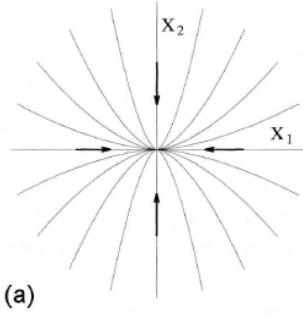
$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + \beta_0 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

حيث α_0, β_0 ثابتين التكامل.

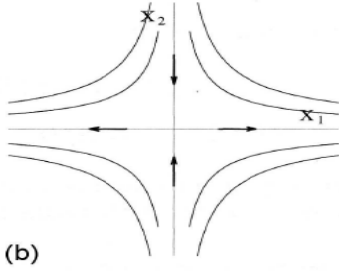
إذا القيم الذاتية تعرفنا بنوعية نقاط التوازن (الاستقرار أو لا استقرار)، بينما الأشعة الذاتية تبين لنا اتجاه المدارات في جوار النقاط الثابتة. القيم الذاتية الحقيقية والموجبة (على التوالي الحقيقية السالبة) توافق الحلول التي تتباعد (على التوالي تتقارب) أسياً (نسبة للدالة الأسية) بسرعة بالنسبة للنقطة الثابتة. باعتبار مختلف الحالات:

1. قيمتين ذاتيتين حقيقيتين مختلفتين: الحلول الخطية تعطى انطلاقاً من المعادلة رقم (24) نميز

حالتين مختلفتين:



أ. إذا كانت القيمتين الذاتيتين (λ_k) حيث $k=\{1,2\}$ لهما نفس الإشارة، المدارات قطوع مكافئة والتي تتقارب نحو النقطة الثابتة. والتي تسمى نقطة عقدة المقاربة (Nodal Sink) الشكل (a) هاتين القيمتين الذاتيتين إذا كانتا موجبتان فهي مستقرة $\lambda_k > 0$ حيث $k=\{1,2\}$ هاتين القيمتين الذاتيتين إذا كانتا سالبتان فهي غير مستقرة $\lambda_k < 0$ حيث $k=\{1,2\}$.

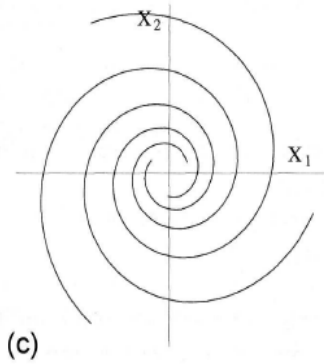


ب. إذا كانت القيمتين الذاتيتين (λ_k) حيث $k=\{1,2\}$ لهما إشارتين مختلفتين، المدارات قطوع مكافئة والتي تتقارب نحو النقطة الثابتة والتي تسمى نقطة السرج (saddle point) الشكل: (b) القيمة السالبة تعطي توازن مستقر بينما القيمة الموجبة تعطي توازن غير مستقر.

2. قيمتين ذاتيتين مركبتين (عدد حقيقي + عدد تخيلي) والمرافق له (complex conjugate): القيم

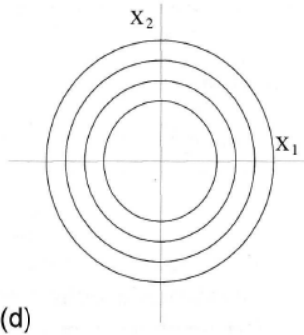
الذاتية تكتب على الشكل التالي $\lambda = \sigma + i\omega$ و الحلول الخطية تكتب كالتالي:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ a \cos \omega t - b \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (2.34)$$



(c)

حيث a و b تأخذ قيم حقيقية. المدارات تدور دوران حلزوني حول النقطة الثابتة والتي تسمى المحرق ($focus$). وهذه النقطة تسمى المصدر الحلزوني ($spiral source$) الشكل: (c) هذه الأخيرة تكون مستقرة إذا كانت σ سالبة فهي مستقرة. و إذا كانت σ موجبة فهي غير مستقرة في حالة القيم الذاتية خيالية $\sigma=0$ ، المحرق يتحول إلى المركز (مركز الدائرة) الشكل: (d)



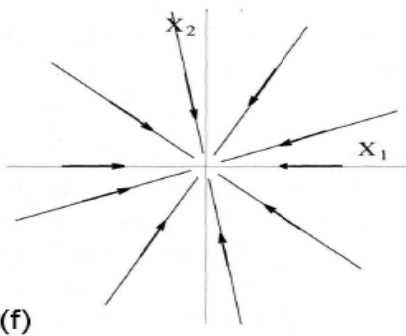
(d)

3. قيمتين ذاتيتين حقيقيتين متساويتان:

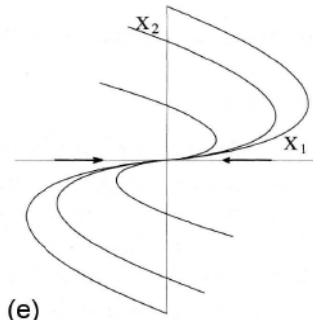
هذه الحالة خاصة، حيث نجد قيم ذاتية منحنة أي متكررة. نستطيع أن نبين بأن هناك اتجاهات حسب العلاقة $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ و الأخرى حسب العلاقة $v(t) = (v_0 + v_1 t) e^{\lambda t}$ حيث يظهر حد v_1 يسمى الحد الإضافي. فنجد عقدة غير ذاتية ($improper node$) والتي هي مستقرة إذا كانت $\lambda < 0$ وغير مستقرة كانت

$$\lambda > 0$$

الشكل: (e) عقدة غير مؤهلة والشكل: (f) عقدة غير مؤهلة مع الحد الغريب معدوم $v_1 = 0$



(f)



(e)

ملاحظة: وكل هذه الحلول نستطيع الحصول عليها باستعمال البرامج الحاسوبية مثل البرنامج الرياضي الشهير (*mathematica7*)، والذي يمكننا من إيجاد الحلول المعقدة والصعبة ورسم المنحنيات المتشابكة وإعطاء لنا صور واضحة لكل واحد منها. فقد خصصنا ملحق خاص بهذه المسائل من أجل التحقق من النتائج ورسم كل المدارات المعقدة ثلاثية الأبعاد وملونة وجميع الإسقاطات الممكنة لها.

الفصل الثالث:

دراسة النماذج الكونية المقترحة

مقدمة

لحل المسائل المتعلقة بالكون أقترحت عدة نماذج معيارية لنظرية الجاذبية كبديل لنظرية اينشتاين (النسبية العامة). [14,10] ومن أجل الدراسة النوعية، لا توجد نمط أو فكرة مفضلة لإنشاء أو بناء لغرانجيان الجاذبية كدالة خطية لدالة ريشي السلمية R (a linear function of R the Ricci scalar) المقترنة أصغريا مع المادة (minimally coupled with matter) [18,15]. في الحقيقة، تعد المحفزات الفيزيائية الأساسية (fundamental physics motivations) الحالية (توسع الكون، الطاقة الظلماء،...) الدافع الأساسي لكل التقريبات (all approaches) والنماذج النظرية المعروفة باسم نظرية $f(R)$ أو $f(R)$ (Theory) والتي هي محل بحث المواضيع الكونية الناشئة عن الحقائق الفيزيائية للانفخاخ (inflationary) المتسببة بمشاكل النماذج المعيارية للكون. زيادة على ذلك، السيناريوهات الناجمة على نظرية $f(R)$ تبدو واقعية و قابلة للتطبيق وبفضلها نستطيع استنتاج ملاحظات الإشعاعات الميكروويفية الخلفية للكون CMB. [19]

و من الناحية الأخرى خلال السنوات القليلة الماضية قد تم التحقيق من الخواص المتباينة للكون (anisotropies of the universe) و التي هي مرتبطة بالحالة البدائية للكون حيث لوحظ بواسطة الأقمار الاصطناعية (تقديرات WMAP) لحالة الإشعاعات الميكروويفية لخلفية الكون CMB. [24,20] و أيضا إدماج الضغط P في الفضاء الزمكان المتباين الخواص مثل حقل الأشعة البدائية (حقل الأشعة المغناطيسية) إلى هندسة مترية المكان للكون. تستند هذه الدوافع الرئيسية على حقيقة علمية بأنه لوحظ تباين الأشعة الميكروويفية الكونية من نوع ثنائي القطب. [33,24] ومن الجدير بالملاحظة، أنه على الرغم من هذا التباين يمكن تفسيرها باستعمال مترية (روبرسن ولكر) وأخذ في الحسبان حركة مجرتنا مع مراعاة المجرات البعيدة في الكون. و لا يزال من المتوقع أيضا مساهمة توزيع المجرات في فضائنا ولو بشيء ضئيل لخلق التباين في الكون.

وعلاوة على ذلك، في إطار هندسة فينسلر يمكن استخلاص الدوران للمنحنيات السطحية للمجارات الحلزونية بشكل طبيعي دون أشراك المادة المظلمة. وقد أدى ذلك إلى اهتمام بالنظرية أكثر لاسيما فيما يسمى بفضاء راندر- فينسلر (a Rander - Finsler Space) لنموذج بيوالد (Bewald) التقريبي حيث تم اقتراح تعديل نموذج فيردمان ، [34,31] حيث يتبين أن تسارع الكون مضمون (*guaranteed*) بالتقيد بالإطار الرياضي لراندرز- فينسلر (*Randers-Finsler*) دون استدعاء الطاقة المظلمة و إضافة حد إلى معادلات الجيوديزية حيث يكون تأثيره كتأثير قوة نابضة ضد الجاذبية.

أما الهدف الثاني من هذه الدراسة فهو النظر في بعض النماذج المعممة كتعميم FRW مع تعميم المائع شابلجين في هندسة فينسلر و دراسة بعض الوسائط الكونية ومناقشة معايير الاستقرار للحلول العامة باستخدام طور الصورة (*Phase Portait*) وتعيين النقاط الحرجة (*Point Critique*) .

النموذج الأول: نظرية- $f(R)$ -Theory

في هذا النموذج نبين تأثير الهندسة على الظواهر الكونية (توسع متسارع للكون...) ومن خلال دراستها في الإطار الرياضي لبلاتيني، وبحساب المعاملات الفيزيائية (معامل السلم، معامل هابل، مسافة اللمعان.. إلخ). أيضا من أجل حالة المترية $f(R)$. يعطى قانون الأس لمعامل السلم مع وجود القيود لمختلف المعاملات، ونقوم أيضا بدراستها دراسة ديناميكية و رسم البيانات المرافقة لها في طور الصورة واستخلاص النقاط الحرجة ومناطق الاستقرار والبحث أين تكمن الحلول الفيزيائية.

1.3 الجاذبية $f(R)$ والإطار الرياضي لبلاتيني (*Palatini*) وهندسة فينسلر:

في الإطار الرياضي لبلاتيني الخاص بجاذبية $f(R)$ كلا من المترية $g_{\mu\nu}$ و الروابط الأفينية $A_{\mu\nu}^{\alpha}$ ينظر إليهما على أساس متغيرات مستقلة.

لدينا فعل بلاتيني (*The Palatini action*) من الشكل التالي. [36]

$$S = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} [f(\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu}, A_{\mu\nu}^{\alpha})) + L_m] \quad (3.1)$$

أين L_m يمثل لغرا نجيان كثافة المادة.

بحساب التغيير للفعل (3.1) نحصل على معادلات الحقل التالية:

$$f'(\hat{R}) \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\hat{R}) = T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

$$f'(\hat{R}) = \frac{\partial f(\hat{R})}{\partial \hat{R}}$$

وحسب مبدأ إنحفاظ الطاقة وكمية الحركة نجد:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) + 3\mu(3p + 2\rho) = 0 \quad (3.3)$$

الآن لو نأخذ الفضاء مسطح (حسب الأبحاث حاليا) $K=0$ و الدالة f من الشكل التالي:

$$f = \hat{R}^n \quad (3.4)$$

وأيضاً نأخذ المائع مثالي و معادلة الحالة من الشكل التالي :

$$p = \omega \rho \quad (3.5)$$

وباستعمال الحسابات والحلول الواضحة للمعادلة الحقل (3.2) و إنحفاظ الطاقة وكمية الحركة (3.3)

نحصل في الأخير على عبارات كثافة الطاقة ρ و معامل هابل H :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \exp \left[- \left(1 + \frac{3}{2} w \right) \frac{\mu}{H_0} x \right] \quad (3.6)$$

$$H = \frac{1}{1+\beta} \left\{ - (1+\beta) \delta + \frac{3}{8} \mu \pm \left[\gamma - \delta^2 + \left(\delta - \frac{3}{8} \frac{\mu}{1+\beta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.7)$$

أين $x = H_0(t-t_0)$ (حيث H_0 يمثل معامل هابل عند الزمن الحاضر t_0)

و $a(t)$ يمثل معامل السلم. μ يمثل معامل التباين لفنسلر أو (لا تماثل) (*the Finsler anisotropy*)

و (*parameter*) γ, β و δ معادلات الخاصة n و \hat{R} .

$$\gamma = \frac{(n-3)}{6n} \hat{R}, \quad \rho = (n-2) \hat{R}^n, \quad \beta = -\frac{3}{2} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}, \quad \delta = -\frac{1}{2} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \mu$$

و من أجل الحصول على دقة أكثر ووضوح أكبر. نأخذ المادة في حالة غبار وهذا من أجل

$$\omega = 0 \quad (3.8)$$

ومنه بسهولة نحصل على:

$$\hat{R} = \left(\frac{\rho_0}{(n-2)} \right)^{1/n} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3/n} \exp \left[- \frac{\mu}{H_0} x \right] \quad (3.9)$$

لو نأخذ كحالة خاصة: $(1+\beta)\delta = 3\mu/8$ ، نجد $n \approx -0.32$

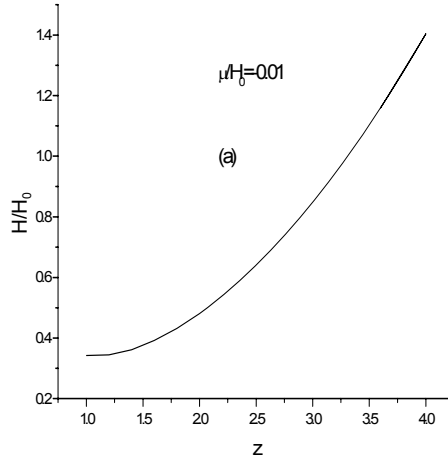
و الحلول التحليلية التالية الخاصة بمعامل السلم $a(t)$ بدلالة الزمن

$$a(t)/a_0 \approx \left[-3\left(\frac{H_0}{\mu}\right) \left[\exp\left(\frac{\mu}{0.64H_0} x\right) - 1 \right] + 1 \right]^{-0.21} \quad (3.10)$$

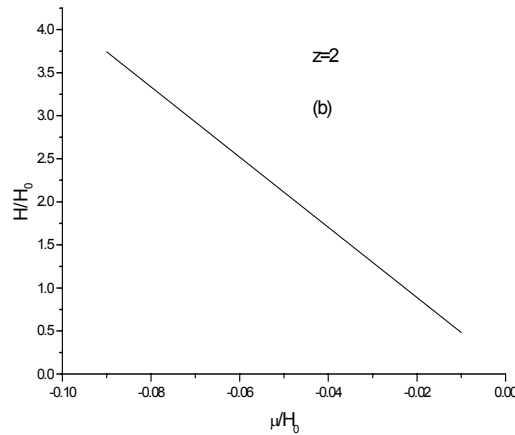
و معامل هابل هو دالة للانزياح نحو الأحمر z

$$H(z)/H_0 \approx \frac{1 + 3\frac{\mu}{H_0} [1 - (1+z)^{4.76}]}{(1+z)^{2.38}} \quad (3.11)$$

يبين الرسم البياني (5.a) و الرسم البياني (5.b) على التوالي عامل السلم هابل - انظر أسفل :-



الرسم البياني (5.a): يمثل عامل هابل السلمي بدلالة الانزياح نحو الأحمر -



الرسم البياني (5.b): يمثل عامل هابل بدلالة عامل التباين السلمي

2.3 متريّة فينسلر $f(R)$

في الإطار الرياضي لمتريّة فينسلر $f(R)$ لدينا المتريّة $g_{\mu\nu}$ هي دالة متعلّقة بالروابط الأفينية $A_{\mu\nu}^\alpha$

أي بمعنى كليهما متغيرات غير مستقلة عن بعضهما البعض. إذا لدينا لغرانجيان من الشكل التالي: [36]

$$S = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} f((\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu})) + L_m \quad (3.12)$$

لو نعتبر الفضاء مسطح $k = 0$ و المائع مثالي له معادلة الحالة من الشكل التالي $\omega = 0$

و $f = \hat{R}^n$ كما في المثال السابق و باعتبار قانون الأس عامل السلم:

$$a(t) = a_0 (t/t_0)^\alpha \quad (3.13)$$

و في الأخير نحصل على العبارة التحليلية التالية:

$$\hat{R} / H_0^2 = -\frac{3}{2} \alpha \left[7 \frac{\mu}{H_0 x} + \frac{1}{x^2} \left[(8 - 7 \frac{\mu}{H_0} x) \alpha - (4 - 3 \frac{\mu}{H_0} x) \right] \right] \quad (3.14)$$

أين نجد: $x = H_0 t$

الآن بالتوافق مع حلول معادلات الحقول نحصل على $(\alpha = 0)$ (على التوالي $(\alpha = 1/2)$ $\forall n$)

$$n\alpha(3\alpha - 2) + (n - 1)[3\alpha(2\alpha - 1) + 2n(3 - 2\alpha) + 4n(n - 2)] = 0 \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

$$12(n - 1)(2\alpha - 1)(2\alpha - 1) \left(-\frac{15}{4} \alpha^2 + \frac{33}{2} \alpha + 2n(2n - 2\alpha - 1) + 3(10 - 7\alpha)(6n - 3n\alpha - 4) \right)$$

$$- n(-14\alpha^2 + 37\alpha - 15) = 0$$

حيث لديها الحلول التالية:

$$(\alpha = 1.206, n = 0.564), (\alpha = -0.019, n = 0.98) \text{ و } (\alpha = 0.5, n = 1.25) (\alpha = 0.5, n = 0.75)$$

مما يؤدي إلى كون متباطئ و متسارع على التوالي.

3.3 الدراسة الديناميكية

لتطبيق نظرية النظام الديناميكي ودراسة صورة المرحلة ، نأخذ المتغيرات الديناميكية التالية:

$$v = \mu / H, z = K / a^2 H^2 \text{ و } y = -R(n-1)/(6nH^2) \text{ و } x = \dot{R}(n-1)/RH \quad (3.17)$$

باستعمال معادلات الحقول و إلى جانب القيد:

$$1 + z + v + x - y = 0 \quad (3.18)$$

نحصل على مجموعة المعادلات التفاضلية المستقلة:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{2}v + \left[\frac{-y}{n-1} - x + \frac{3}{4}v \right] (x+2) + 2y - x^2 \\ y' &= y \left[\frac{(3-2n)}{n-1}x - \frac{2y}{n-1} + \frac{3}{2}v + 2 \right] \\ v' &= v \left[1 - x + \frac{3}{4}v - \frac{1}{n-1}y \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

نحصل إذا على سبع نقاط حرجة من الشكل التالي: $j = \overline{1,7}, M_j(x_j, y_j, v_j)$

$$x_1 = -2,7, y_1 = 0, v_1 = -4.9,$$

$$x_2 = 0.7, y_2 = 0, v_2 = -0.3,$$

$$x_3 = -0.7, y_3 = 0, v_3 = 0,$$

$$x_4 = 0.7, y_4 = 0, v_4 = 0,$$

(3.20)

$$x_5 = 0, y_5 = (n-1)/(2-n), v_5 = 4(n-1)/[3(2-n)],$$

$$x_6 = \Omega^-, y_6 = \Sigma^-, v_6 = 0$$

$$x_7 = \Omega^+, y_7 = \Sigma^+, v_7 = 0$$

حيث:

$$\Sigma^\mp = \{2(n-1) + [A \mp 2(3-2n)B]/(2n-1)\}/2$$

$$\Omega^\mp = (C \mp B)/[2(2n-1)], A = 4n^3 - 16n^2 + 22n - 10.5, \quad (3.21)$$

$$C = -4n^2 + 10n - 7$$

$$B = \sqrt{(1.185 - 2.152n + n^2)(1.740 - 0.847n + n^2)}$$

و مصفوفات الاستقرار الموافقة هي كالتالي:

$$\begin{aligned}
 M_1 &\approx \begin{bmatrix} 7.196 & \frac{2n-0.268}{n-1} & -2.799 \\ 0 & \frac{-8.19}{n-1} & 0 \\ 4.976 & \frac{4.976}{n-1} & -3.732 \end{bmatrix} \\
 M_2 &\approx \begin{bmatrix} -3.196 & \frac{2n-3.732}{n-1} & -0.2 \\ 0 & \frac{2.196}{n-1} & 0 \\ 0.357 & \frac{0.357}{n-1} & -0.267 \end{bmatrix} \\
 M_3 &\approx \begin{bmatrix} 2.828 & \frac{2n-2.292}{n-1} & -1.28 \\ 0 & \frac{2n-4.121}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1.707 \end{bmatrix}, \\
 M_4 &\approx \begin{bmatrix} -2.828 & \frac{2n-3.707}{n-1} & -0.219 \\ 0 & \frac{2n-0.121}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0.292 \end{bmatrix} \\
 M_5 &\approx \begin{bmatrix} \frac{n}{2-n} & \frac{2n-3}{n-1} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3-2n}{3-2n} & \frac{2}{2} & \frac{3(n-1)}{3(n-1)} \\ \frac{2-n}{4(1-n)} & \frac{2-n}{4} & \frac{2-n}{n-1} \\ \frac{3(2-n)}{3(2-n)} & \frac{2-n}{2-n} & \frac{2-n}{2-n} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$M_6 \approx \begin{bmatrix} \delta_{11}^+ & \delta_{12}^+ & \delta_{13}^+ \\ \delta_{21}^+ & \delta_{22}^+ & \delta_{23}^+ \\ \delta_{31}^+ & \delta_{32}^+ & \delta_{33}^+ \end{bmatrix}, \quad M_7 \approx \begin{bmatrix} \delta_{11}^- & \delta_{12}^- & \delta_{13}^- \\ \delta_{21}^- & \delta_{22}^- & \delta_{23}^- \\ \delta_{31}^- & \delta_{32}^- & \delta_{33}^- \end{bmatrix}$$

حيث:

$$\delta_{11}^{\pm} = \frac{2(6n-5)B - 4(n-1)C - A + 2(n-1)(1-2n)}{2(2n-1)(n-1)},$$

$$\delta_{12}^{\pm} = \frac{8(n-1)^2(C-4B)}{2(2n-1)(n-1)},$$

$$\delta_{13}^{\pm} = \frac{3[-2(2n-1) - (C-4B)]}{4(2n-1)},$$

$$\delta_{21}^{\pm} = \frac{(3-2n)}{2(n-1)(1-2n)}[-2(1-2n) - A + 2(3-2n)B], \quad (3.23)$$

$$\delta_{31}^{\pm} = \delta_{32}^{\pm} = 0,$$

$$\delta_{22}^{\pm} = \frac{4(n-1) + 4A + (3-2n)C - 12(3-2n)B}{2(n-1)(2n-1)},$$

$$\delta_{23}^{\pm} = \frac{3[2(n-1)(1-2n) + A - 2(3-2n)B]}{2n-1},$$

$$\delta_{33}^{\pm} = \frac{4(n-1)(1-2n) - (n-1)C + 2B - A}{2(n-1)(2n-1)}$$

تحليل الرسوم البيانية

- الرسم البياني رقم (6): يبين الرسم البياني لصورة المرحلة في المستوي (x, y) من أجل:

$$v = 0 \text{ و } x \in [-4, +4], y = 0, n = \pm 2, \text{ على التوالي } (a, b)$$

نلاحظ أنه في المجال $[-4, +4]$ الخاص بمحور الفواصل x بالإضافة إلى النقطة السرج (*the saddle*

points)، لدينا عقدة واحدة وهي عقدة المقاربة المستقرة (*stable nodal sink*)، و أخرى غير مستقرة

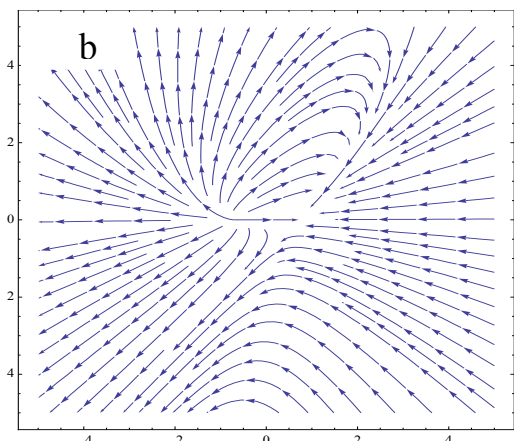
النقاط الحرجة لعقدة المصدر (*unstable nodal source critical points*).

- الرسم البياني رقم (7): بنفس الكيفية ولكن هذه المرة نأخذ المستوي (x, v) وذلك

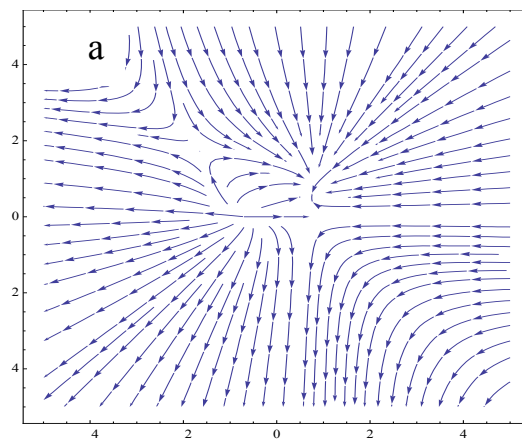
$$\text{من أجل } n = -2 \text{ (a) ، و من أجل } n = 2 \text{ (b).}$$

- الرسم البياني رقم (8): يبين صورة المرحلة (x, y) مع نقطة العقد السرج (*a saddle node point*)

باستعمال فصل المعادلات $y = 0$ (المزيد من الدراسات تحت التحقيق)

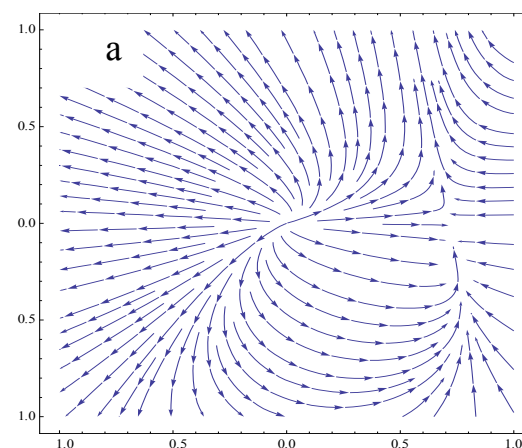
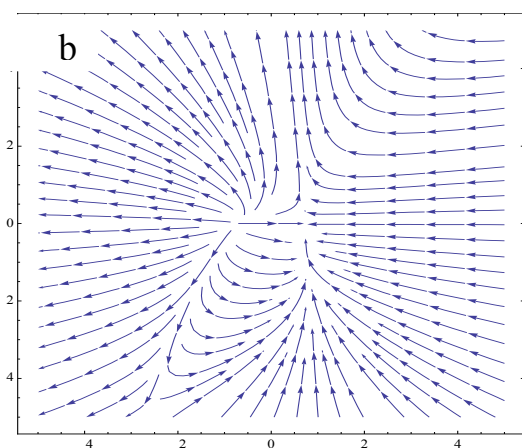


من أجل $n = 2$ و $v = 0$ (b)



من أجل $n = -2$ و $v = 0$ (a)

الرسم البياني 6: صورة المرحلة في المستوي (x, y)



ومن أجل $n = 2$ ، $y = (-4 + 6x - 3v)/4$ (b)

من أجل (a) ، $n = -2$ ، $y = 0$

الرسم البياني 7: يمثل صورة المرحلة في المستوي (x, v)

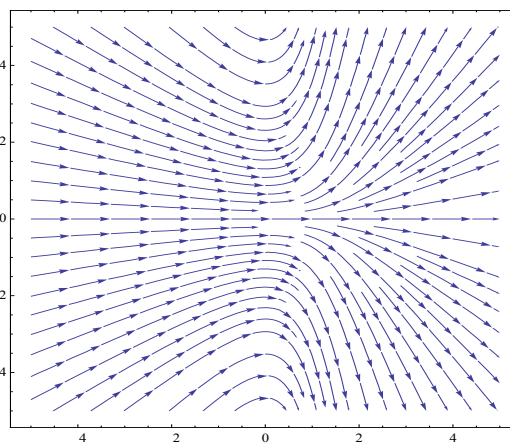
الرسم البياني 8:

صورة المرحلة في المستوي (x, y)

من أجل $v = 4(-1 + x + y)/3$

(باستعمال البرنامج الرياضي

mathematica7)



4.3 الاستنتاج

من الدراسة النوعية، حيث نعتبر أننا في فضاء فينسلر مسطح والمادة في حالة غبار. وبعد إجراء الدراسة الديناميكية و استخراج النقاط الحرجة بالحساب أو من الرسم البياني الممثلة (النقاط) في منحنيات طور الصورة، هذا من أجل مجموعة النقاط الخاصة لمختلف قيم n المرافقة لعدة إسقاطات ثلاثية الأبعاد.

فإننا نستنتج كخطوة أولى نحو فهم تأثير الهندسة على ديناميكية الكون، واختبار إمكانية الحصول على نماذج أكثر واقعية وقابل للتطبيق:

أولاً، وباستخدام الإطار الرياضي لبلايني حصلنا على حلول لمعامل السلم $a(t)$ معتمدة على القيمة الصحيحة للزمن وكذلك معامل هابل دالة تابعة للانزياح أو بوصفها دالة للانزياح نحو الأحمر الأمر الذي سيتيح تحديد لمعان المسافة D_L ومقارنتها مع البيانات المتحصل عليها عن طريق الأقمار الاصطناعية الموجودة.....

ثانياً، من أجل المترية لنظرية $f(R)$ اتخذنا قانون الأس لمعامل السلم $a(t)$ ثم أظهرنا أن توافق الحلول المتحصل عليها والقيود لمختلف المعاملات....

وأخيراً، لدينا أفضل فهم و استيعاب للحلول والسلوكيات النظام الديناميكي (الاستقرار و لا استقرار للنقاط... الخ) لنظرية $f(R)$ في هندسة فينسلر.

النموذج الثاني: نموذج التباين الكوني (Cosmological Anisotropic)

في هذا النموذج تُعتبر المادة هي المسئولة على الظواهر الكونية مثل تعميم لمائع شابلجين وإدخال الطاقة المظلمة وهذا بوجود القرينة أو الإمضاء لتعليل ذلك، ألا وهو الضغط السالب والذي لا يفسر إلا بوجود هذه الطاقة الغريبة. وأيضا الحصول على الحلول الفيزيائية. وتقديم عدة سيناريوهات تفسر الكثير من الظواهر الكونية مثل وجود الثابت الكوني وتعلقه بالزمن. طبعا كل هذه الدراسة في ظل هندسة فينسلر.

5.3 الدراسة الديناميكية

بنفس الحسابات السابقة و بحساب الفعل الأصغري للمعادلة رقم (3.12) وبوجود التباين الخطي الضعيف (*a Weak linearized anisotropy*)، نأخذ الاضطراب من الرتبة الأولى لحد التباين. نحصل على تعميم لمعادلات الحقول *FRW* التالية: [25]

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2K}{a^2} + \frac{11}{4}\mu\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2}(\rho - P) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4}\mu\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{6}(\rho + 3P) = 0 \quad (3.25)$$

وباستعمال معادلات ريشودوير (3.24) و (3.25) (*The Rychaudhuri equation*) نحصل على خطوط الكون المادية في هندسة فينسلر من المعادلة (3.25) الممثلة في:

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{3}{4}H\mu - \frac{1}{6}(\rho + 3P) = S(\rho, H) \quad (3.26)$$

وبإضافة شرط إنحفاظ مؤثر الطاقة-كمية الحركة (*energy-momentum tensor*) نحصل على:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) - \frac{\mu}{2}(2\rho + 3P) = Q(\rho, H) \quad (3.27)$$

ملاحظة: نأخذ هنا $8\pi G = 1$.

من المعادلة رقم (3.26) و (3.27) نحصل على نظام فيزيائي ديناميكي والممثل بالطور المتغير (ρ, H) ، من أجل الدراسة النوعية لنظرية النظام الديناميكي، فإن تطور الجملة الفيزيائية في التمثيل البياني (الرسم البياني رقم 6 و 7) تمثل بخطوط و مسارات في الفضاء الطوري (ρ, H) فقط يجب تعيين الشروط الابتدائية (ρ_{init}, H_{init}) . و بدلا من إيجاد الحلول والتحليل الفردية للمتغيرات الديناميكية في الفضاء الطوري لهذه النماذج. نقوم بدراسة كل الحلول الممكنة لهذه المتغيرات و التحقق منها برفض الحلول أو قبولها حسب ما تمليه علينا نظرية النظام الديناميكي. و نعتقد هذه الخاصية (دراسة كل الحلول الممكنة و التحقق منها) لكي تعزى بالقبول في كل فروع النماذج يجب أن تحقق الاستقرار أو بعض من الاستقرار في الحلول المتحصل عليها من خلال التحليل البياني لطور الصورة.

الآن نختار من أجل الدراسة نوع المائع.

حيث معادلة الحالة لتعميم للمائع شابلجين (*Chaplygin gas equation*) هي:

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (3.28)$$

علما أن سرعة الصوت:

$$C_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\alpha A}{\rho^{\alpha+1}} \quad (3.29)$$

وحيث أنها لا تتجاوز سرعة الضوء و يجب أن تحقق:

$$A > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.30)$$

وحسب مبدأ إنحفاظ الطاقة وكمية الحركة نجد

$$\dot{\rho}_{chap} = -(-3H + \mu) \rho_{chap} + 3A \left(H + \frac{1}{2} \mu \right) \rho_{chap}^{-\alpha} \quad (3.31)$$

تستطيع بسهولة معرفة حل المعادلة (3.31) أنظر الملحق (D)

$$\rho = \rho(\tilde{a}, t) = \left[A + \frac{\mu}{2} (1+\alpha) A \tilde{a}^{-3(\alpha+1)} \int^{\tilde{a}} d\tilde{a}' \frac{\tilde{a}'^{3\alpha+2}}{\tilde{H}'} + C \tilde{a}^{-3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.32)$$

حيث أن

$$\tilde{a} = a e^{\frac{\mu}{3} t} \quad (3.33)$$

و C دالة التكامل , وأيضا أين نجد في الفضاء المسطح, ثابت هابل دالة بدلالة الإنزياح نحو الأحمر \tilde{z}

$$H = H(\tilde{a}, t) = -\frac{\mu}{2} + \left\{ \frac{\mu^2}{4} - K \tilde{a}^{-2} e^{\frac{2\mu}{3} t} + \frac{1}{3} \left[A + \frac{\mu}{2} (1+\alpha) A \tilde{a}^{-3(\alpha+1)} \int^{\tilde{a}} d\tilde{a}' \frac{\tilde{a}'^{3\alpha+2}}{\tilde{H}'} + C \tilde{a}^{-3(\alpha+1)} \right] \right\}^{1/(1+\alpha)} \quad (3.34)$$

ومن أجل $K=0$ (فضاء مسطح) نجد القيمة المقربة التالية للمعادلة (3.34)

$$\tilde{H} = \frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} = H + \frac{\mu}{3} \quad \text{بوضع} \quad \text{نجد التالية}$$

$$\frac{\tilde{H}(\tilde{z})}{\tilde{H}_0} \approx \left\{ \Omega_\mu + \Omega_{chap} \left[\hat{A} + (1+\tilde{z})^{3(1+\alpha)} \left((1-\hat{A}) + \frac{\hat{\mu}}{2} (1+\alpha) \sqrt{\frac{1}{\Omega_{chap}}} \hat{A} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \frac{(1+\tilde{z}')^{-3\alpha}}{(\hat{A} + (1-\hat{A})(1+\tilde{z}')^{3(1+\alpha)})^{1/2(1+\alpha)}} \right) \right] \right\}^{1/(1+\alpha)} \quad (3.35)$$

حيث أن:

$$\sigma(\tilde{z}) = \frac{1(1+\tilde{z})^{2\delta}}{6\delta(\chi+2)} \quad \text{و} \quad I = \sigma(\tilde{z})(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$$

$$\phi_2 = \frac{-2\nu {}_2F_1(-\delta+1; \chi+3, -\nu)}{(\chi+2)}, \phi_1 = {}_2F_1(\chi+3, -\delta; \chi+2, -\nu) \quad \text{و} \quad (3.36.a)$$

$$\phi_3 = \frac{-\delta(\delta-1)\nu^2 {}_2F_1(\chi+4, -\delta+2, -\delta; \chi+4, -\nu)}{[(\chi+2)(\chi+3)]}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha+1)}, \chi = -\frac{(2+6a+3a^2)}{(1+\alpha)}, \nu = \frac{A(1+\tilde{z})^{6\delta}}{(1-A)}$$

و أيضا:

$$\tilde{A} = \frac{A}{\rho_0^{1+\alpha}}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\tilde{H}_0} \quad (3.37.b)$$

حيث ${}_2F_1(b, d; f, w)$ معادلة الهندسة الفائقة (The hypergeometric function)

$$\text{حيث: } \rho_0 \text{ و } H_0 \text{ كثافة الطاقة وثابت هابل على التوالي في } \Omega_\mu = -\frac{\mu}{2\tilde{H}_0}; \Omega_{chap} = \frac{\rho_0}{3\tilde{H}_0}; \frac{\tilde{a}_0}{\tilde{a}} = 1 + \tilde{z}$$

الزمن الحاضر ($t = t_0$)

يمكن بسهولة أن نجد نقاط التوازن (ρ_c, H_c) التي تحقق المعادلات (3.26) و (3.27) و (3.28) الغير

خطية التالية:

$$H_c^{1+\alpha} (4H_c + 3\mu)^\alpha (2H_c + \mu)^\alpha (H_c + \mu)(8H_c + 3\mu) = \frac{2^{\alpha-1}}{3^\alpha} A(4H_c + \mu)^{1+\alpha} \quad (3.38)$$

من معادلات المعممة FRW تمثل المسارات في الفضاء المسطح ($K=0$) (the flat space) لدينا :

$$\rho = 3H^2 + 3\mu H \quad (3.39)$$

طور الصورة التحليلية في المستوي - ثنائية الأبعاد - (The phase plane analysis) هي أداة

مهمة في الدراسة النوعية لسلوك المعادلات لا خطية، حيث في غالب الأحيان لا تكون هناك حلول تحليلية

(no analytical solution) لمعادلات لا خطية . نستعمل برامج رياضية بالحاسوب (the mathematic

program) من أجل الحصول على الحلول و رسم للمنحنيات و المسارات لهذه المعادلات لا خطية بدقة

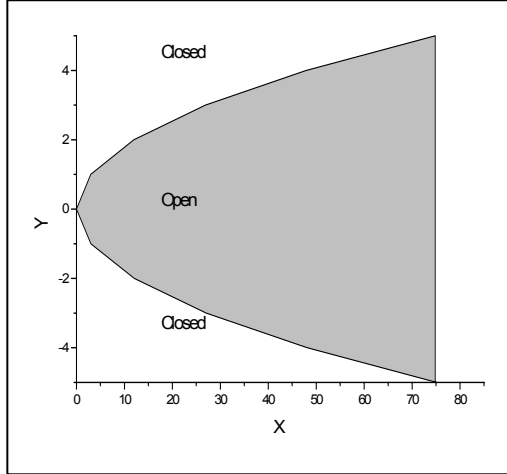
كبيرة ثنائية أو ثلاثية الأبعاد. نأخذ حالة كون فضاء إقليدس (Euclidean space universe) ونحصل

على معادلات القطع المكافئ للمعادلة (3.39) باستعمال تغير متغير (3.40):

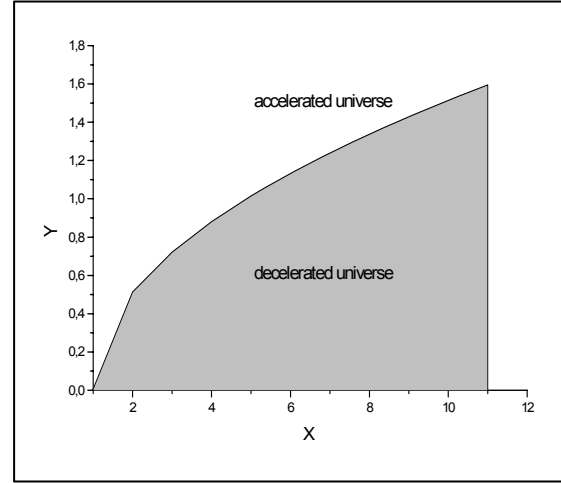
$$y = \frac{H}{H_{present}} ; H_{present} = H_{t=0} = H_0 , x = \frac{\rho}{\rho_{present}} ; \rho_{present} = \rho_{t=0} = \rho_0 \quad (3.40)$$

ثم نأخذ :

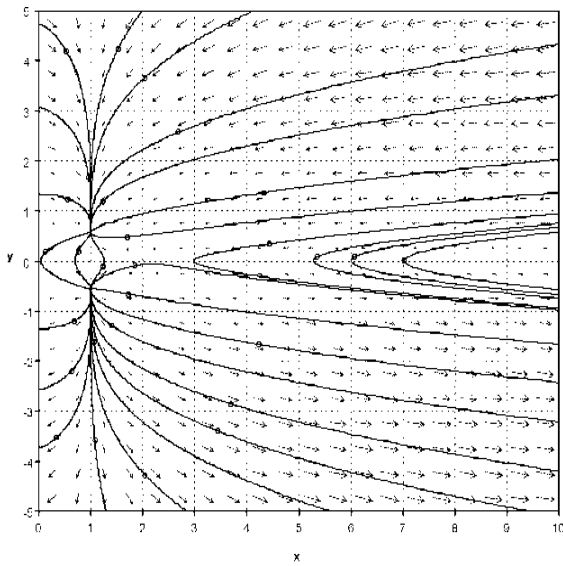
$$\frac{\rho_{present}}{H_{present}^2} = 1, \quad \frac{A}{\rho_{present}^{\alpha+1}} = 1 \quad (3.41)$$



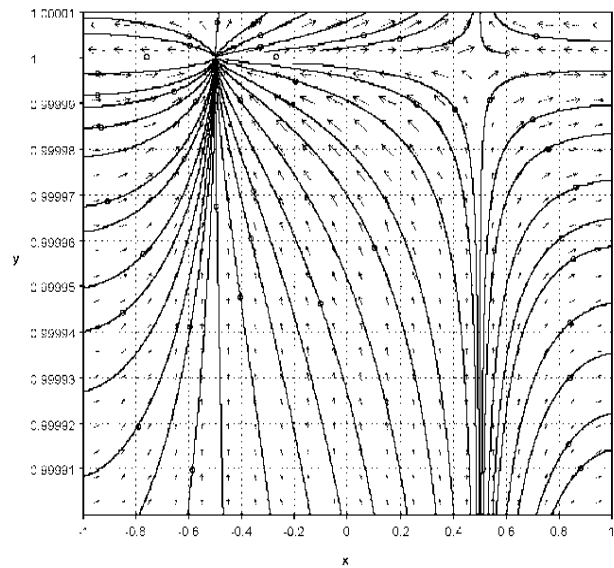
الرسم البياني 10



الرسم البياني 9



الرسم البياني رقم (12):



الرسم البياني رقم (11):

نحصل على التوازن التالي (النقاط الحرجة) من خلال حل المعادلة (3.26) و(3.27) أو من خلال

$$\alpha \approx 0.4, \mu \approx -0.01 \text{ ذلك من أجل}$$

حيث القيم الذاتية هي	مصفوفة الاستقرار	$B(1.002, -0.57)$
$\lambda_{B_1} \approx 2.42, \lambda_{B_2} \approx 1.15$		عقدة المصدر
والأشعة الذاتية هي	$M_B = \begin{pmatrix} 2.42 & -0.008 \\ -0.37 & 1.15 \end{pmatrix}$	(Nodal Source)
$\vec{V}_{\lambda_{B_1}} (0.96, -0.28), \vec{V}_{\lambda_{B_2}} (0.007, 0.999)$		

حيث القيم الذاتية هي	مصفوفة الاستقرار	$C(2.19, 0.002)$
$\lambda_{C_1} \approx 1.014, \lambda_{C_2} \approx -1.008$		عقدة نقطة السرج
والأشعة الذاتية هي	$M_C = \begin{pmatrix} 0.0035 & -4.38 \\ -0.233 & 0.0025 \end{pmatrix}$	(Saddle Point)
$\vec{V}_{\lambda_{C_1}} (0.97, -0.22), \vec{V}_{\lambda_{C_2}} (0.97, 0.22)$		

حيث القيم الذاتية هي	مصفوفة الاستقرار	$A(0.99, 0.57)$
$\lambda_{A_1} \approx -1.16, \lambda_{A_2} \approx -2.43$		عقدة المقاربة
والأشعة الذاتية هي	$M_A = \begin{pmatrix} -2.43 & 0.008 \\ -0.37 & -1.15 \end{pmatrix}$	(Nodal Sink)
$\vec{V}_{\lambda_{A_1}} (0.007, 0.999), \vec{V}_{\lambda_{A_2}} (0.96, 0.28)$		

نلاحظ في منطقة الفضاء الطوري و حسب هذه الاعتبارات التي نعمل عليها لا توجد نقاط حرجة ثابتة.

و نلاحظ أيضا على التوالي الشروط القوية (3.42) والشروط الضعيفة (3.43) الآتية من هندسة فينسلر:

$$(1 + \mu/3H)\rho + (1 + \mu/2H)P > 0 \quad (3.42)$$

$$\rho + 3P \leq -\frac{9}{2}H\mu \quad (3.43)$$

في الجدول رقم (2) نبين مختلف المناطق للقيم المسموح بها لقيمة ρ وإظهار صحة الشروط القوية

والشروط الضعيفة والتي نرمز لها $C.S$ و $C.W$ على التوالي و $\Delta = -\frac{\mu(3p+2\rho)}{6(p+\rho)}$:

ρ	0	$A^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$(1.5A)^{\frac{1}{1+\alpha}}$	$(3A)^{\frac{1}{1+\alpha}}$
W.C	نعم $H < 0$ لو	نعم $H < 0$ لو	نعم $H < 0$ لو	نعم $H > 0$ لو
	لا $H > 0$ لو	لا $H > 0$ لو	لا $H > 0$ لو	لا $H < 0$ لو
S.C	نعم $H > \Delta > 0$ لو	لا $H > \Delta > 0$ لو	لا $\Delta < H < 0$ لو أو $H > 0$	لا $\Delta < H < 0$ لو أو $H > 0$
	لا $H < \Delta < 0$ لو	نعم $H < \Delta < 0$ لو	نعم $0 < H < \Delta$ لو أو $H < 0$	نعم $0 < H < \Delta$ لو أو $H < 0$

الجدول رقم (2)

6.3 دراسة و تحليل الجدول

نحصل على مجموعة متتالية من المسارات:

1. تبدأ المسارات من الخط الممثل $\rho=0$ و P الضغط السالب مالا نهائي يوافق توسع متباطئ

للكون المفتوح (*open decelerated expanding universe*) ثم $|p|$ يتناقص و ρ يتزايد إلى (

ρ_c الجاذب العام (*global attractor*) لعقدة المقاربة المستقرة (*stable nodal sink*) حيث

بالقرب من هذه النقطة الحرجة عامل التباطؤ (*the deceleration*) q و K شكل الهندسة

(type of geometry) تتناقص وتغيير من إشاراتها للحصول في النهاية على توسع متسارع

مغلق للكون (closed accelerated-expanding universe).

2. المسارات التي تبتدأ من النقاط الشاذة (singularity) عند النقطة $\rho \rightarrow \infty$ و الضغط يؤول إلى

الصفري، ثم ρ يتزايد إلى ρ_c (الجاذب العام لعقدة المقاربة المستقرة) (global attractor

stable nodal sink). معامل التباطؤ (the deceleration) q يتزايد من دون تغيير

الإشارة. هذه النماذج توافق مع التوسع المتسارع للكون المفتوح (an open accelerated

expanding universe).

3. المسارات التي تبتدأ من ρ_c (النافر العام لعقدة المصدر الغير مستقرة) (global repulsor

unstable nodal source) حيث تتطور إلى $\rho = 0$ و الضغط السالب ما لانهاضي P أين نجد

معامل التباطؤ (the deceleration) q و K شكل الهندسة (type of geometry) لا تغييران

من إشارتهما إذا نتحصل في النهاية على نموذج (collapsing universe) الكون المنهار.

4. المسارات التي تبتدأ من ρ_c (النافر العام لعقدة المصدر الغير مستقرة) (global repulsor

unstable nodal source) والتي تتطور إلى النقاط الحرجة عند $\rho \rightarrow \infty$ أين نجد معامل

التباطؤ q يتناقص من غير تغيير الإشارة في نهاية المطاف يؤدي إلى نموذج الكون المنهار

بتسارع (an accelerated collapsing universe).

5. المسارات التي تبتدأ من ρ_c (النافر العام لعقدة المصدر الغير مستقرة) (global repulsor

unstable nodal source) والتي تتجه نحو ρ_c (الجذب العام لعقدة المقاربة المستقرة) (global

attractor stable nodal sink) بعد الارتداد (نقصان ثم زيادة في قيمة ρ) أين نجد K تغيير

من إشارتها. وهذا يوافق نموذج تسارع الكون المنهار.

6. المسارات التي تبدأ من ρ_c (النافر العام لعقدة المصدر الغير مستقرة) (*global repulsor*)

(*unstable nodal source*) وتوافقا مع الكون المنهار المتسارع والمتجهة نحو ρ_c (الجاذب

العام لعقدة المقاربة المستقرة) (*global attractor stable nodal sink*) بعد الارتداد (نقصان ثم

زيادة في قيمة ρ) أين نجد K و معامل هابل H يغير الإشارة هذا يوافق الكون المتوسع

بتسارع (*an accelerated expanding universe*).

7. المسارات التي تبدأ من ρ_c (النافر العام لعقدة المصدر الغير مستقرة) والتي تتطور إلى

نقطة عقدة السرج الغير مستقرة ρ_c (*unstable saddle point*) أين تكون q تتزايد مع

تغيير الإشارة والتي توافق تسارع الكون المنهار (*an accelerated collapsing universe*). ثم

$\rho \rightarrow \infty$ (ضغط شابلجين ينعدم) ثم بعد ذلك معامل التباطؤ q يغير الإشارة ونحصل في

الأخير تسارع للكون المغلق و المنهار (*a closed accelerated collapsing universe*).

8. المسارات التي تبدأ من النقطة الشاذة $\rho \rightarrow \infty$ (ضغط شابلجين المنتهي إلى الصفر

Chaplygin pressure vanishing) ثم ρ تتناقص إلى غاية القيمة الأصغرية ρ_{\min} و يوافق

نموذج تسارع توسع الكون (*an accelerated expanding universe*) وهذا بعد ذلك ρ تتزايد

مرة أخرى إلى أن تجد القيمة الشاذة عند القيمة $\rho \rightarrow \infty$ وهذا يوافق نموذج تسارع الكون

المنهار (*an accelerated collapsing universe*).

7.3 الهدف من دراسة الاستقرار أو عدم الاستقرار (*Stabilities and Instabilities*)

الهدف هو تحسين فهمنا للنظرية بالوصول إلى النتائج المطلوبة والتحقق منها. ويكمن هذا بتطبيق منهج النظام الديناميكي و دراسة طور الصورة و النقاط الحرجة و تقديم معلومات إضافية حول الحلول على الرغم من صعوبة الحصول عليها بالضبط و بالقيمة الدقيقة.

ملاحظة: الفواصل (*A separatrix*) هي أي خط في طور الصورة في المستوي (ثنائية الأبعاد) والتي لا يمكن لأي مسار أن يتقاطع معها.

في المجال الفيزيائي النموذج الذي هو قيد الدراسة من الناحية الهيكلية أو البنية مستقر وذلك بسبب عدم وجود أي فواصل متصلة بنقطة السرج (*separatrices connecting saddle point*)، كل النقاط الحرجة هي قطع مكافئ، غير منحطة وعددها محدود، في حالتنا هذه أو في هذه الحالة نحصل على الفواصل فقط

$$(separatrix) \text{ حسب للمعادلات التالية: } y \approx 0 \quad x \approx 1 \quad \text{و} \quad y \approx 114x^2 - 343x + 297$$

8.3 الاستقرار في مالا نهائية (*Stability at infinity*)

لقد قمنا بنفس الدراسة السابقة ولكن هذه المرة في جوار مالا نهائية (حدود المقاربة) وبمأن طور الصورة (*the phase portrait*) غير مضغوط أو متراص ، فمن الممكن أن يملك النظام الديناميكي بنية مقاربات (جوار مالا نهائية) ذات قيمة فيزيائية، وهذا ما يعزز وجود نقاط ثابتة في مالا نهائية. فيزيائيا هذه النقاط تمثل الأنظمة أين يصبح حد أو أكثر في معادلات فريدمان المعممة هو المهيمن.

على سبيل المثال، إذا أخذنا $x \rightarrow \infty$ فإننا الحد الحركي لمنحنى كثافة الطاقة يطغى على الحد

الكموني. يمكننا أن نقوم بالتحليل التقاربي عن طريق رص صورة الطور الفضائي إلى (\tilde{r}, v) باستعمال

طريقة بوانكاري (*Poincaré*). الرسم البياني رقم (11)

إذا أخذنا $r = \tilde{r}/1 - \tilde{r}$ و $v = \cos \theta$ أين v و r هما الإحداثيات القطبية، ونعوضهما في المعادلات رقم

(3.26) و (3.27) نتحصل على المعادلات التفاضلية التالية :

$$\dot{\tilde{r}} = v \left\{ -3v\sqrt{1-v^2}\Sigma_1 - \frac{v(1-\tilde{r})}{2}\Sigma_3 \right\} - \sqrt{1-v^2} \left\{ (1-v^2) + \frac{3}{4}(1-\tilde{r})\sqrt{1-v^2} + \frac{v(1-\tilde{r})}{6}\Sigma_2 \right\}$$

$$\dot{v} = (1-v^2) \left\{ \frac{1-v^2}{1-\tilde{r}} + \frac{3}{4}\sqrt{1-v^2} + \frac{v}{6}\Sigma_2 \right\} - v\sqrt{1-v^2} \left\{ \frac{3v\sqrt{1-v^2}}{1-\tilde{r}}\Sigma_1 + v\Sigma_3 \right\} \quad (3.44)$$

حيث لدينا:

$$\Sigma_2 = -2 + 3\Sigma_1, \Sigma_3 = 1 + \Sigma_2, \Sigma_1 = 1 - \left(\frac{1-\tilde{r}}{v} \right)^{\alpha+1} \quad (3.45.a)$$

من خلال الرسم البياني رقم (11). لدينا معادلات الفصل (*separatrices of equations*) التالية $x \approx 0.5$ و

$y \approx 1$ معادلات من أجل النقاط الحرجة، لدينا نقطة السرج غير مستقرة عند النقطة $x \approx 0.5$ و تقريبا

عقدة مستقرة عند النقطة $x \approx -0.5$ و $y \approx 1$

9.3 بعض النماذج التي تملك حلول الصحيحة

من أجل فهم نموذج التباين الكوني في هندسة فينسلر، نأخذ هنا حالة نموذجيين بسيطين نيين من

خلالهما تأثير الهندسة فقط علي التوسع الكوني والتوجه إلى سيناريوهات الطاقة المظلمة.

1.9.3 النموذج الأول:

تعميم فريدمان ونعتبر لدينا النموذج الذي يملك معادلة الحالة التالية:

$$\rho_{tot} + 3P_{tot} = 0 \quad (3.46)$$

أين لدينا على التوالي ρ_m و ρ_m كثافة المادة و الضغط المادي.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{tot} = \rho_m + \rho_{chap} \\ P_{tot} = P_m + P_{chap} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} P_m = w\rho_m \\ P_{chap} = -\frac{A}{\rho_{chap}^\alpha} \end{array} \right. \quad (3.47)$$

و باستعمال تعميم لعلاقات فريدمان (3.24) و(3.25) نجد:

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{3}{4} H\mu \quad (3.48)$$

$$H^2 + H\mu + \frac{K}{a^2} = \frac{\rho_{tot}}{3} \quad (3.49)$$

حيث نجد الحلول الصحيح أو الدقيقة لمختلف المعاملات الكونية:

معامل هابل :

$$H(t) = -\frac{3}{4} \mu H_0 \frac{\exp(\theta - \theta_0)}{H_0(\exp(\theta - \theta_0) - 1) - \frac{3}{4} \mu}, \quad \theta = -\frac{3}{4} \mu t \quad (3.50)$$

ومعامل السلم : الرسم البياني رقم (13.a)

$$a(t) = -\frac{4}{3} \frac{a_0}{\mu} (H_0(\exp(\theta - \theta_0) - 1) - \frac{3}{4} \mu) \quad (3.51)$$

التسارع:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{9}{16} \mu^2 H_0 \frac{\exp(\theta - \theta_0)}{H_0(\exp(\theta - \theta_0) - 1) - \frac{3}{4} \mu} > 0 \quad (3.52)$$

معامل التباطؤ: الرسم البياني رقم (13.c)

$$q(t) = -\frac{1}{H_0} \exp(-(\theta - \theta_0)) (H_0(\exp(\theta - \theta_0) - 1) - \frac{3}{4} \mu) < 0 \quad (3.53)$$

حيث: $\theta = -\frac{3}{4}\mu t$ ونعلم ان معامل التباطؤ سالب و معامل هابل موجب هذا يوافق الكون في حالة إتساع

و متسارع (الطاقة المظلمة) لو نأخذ المادة في حالة غبار بمعنى $P_m = 0$ أي $\omega = 0$:

$$P_{chap} = -A \rho_{chap}^{-\alpha} ; P_m = \omega \rho_m , \omega = 0 \quad (3.54)$$

نحصل على الحل الصحيح أو الدقيق : الرسم البياني رقم (13.b)

$$\rho_{chap} = \left(\frac{3A}{g(\theta)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} , \rho_m = g(\theta) - \left(\frac{3A}{g(\theta)} \right) \quad (3.55)$$

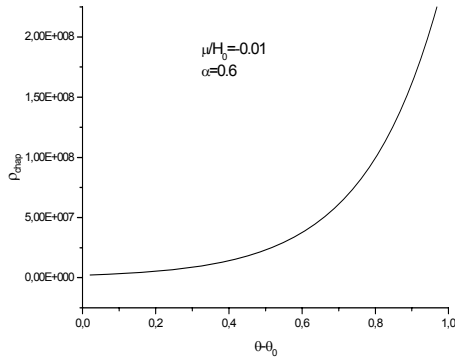
حيث:

$$g(\theta) = \frac{3}{4} \mu^2 H_0 \frac{\exp(\theta - \theta_0) \left[-\frac{1}{4} H_0 \exp(\theta - \theta_0) + H_0 + \frac{3}{4} \mu \right]}{\left[H_0 (\exp(\theta - \theta_0) - 1) + \frac{3}{4} \mu \right]^2} \quad (3.56)$$

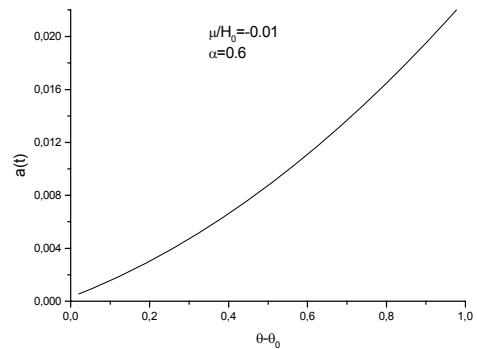
نلاحظ أن المعاملات الكونية في فضاء فينسلر كلها دوال متزايدة ومتعلقة بالزمن أي دالة للزمن، بإستثناء

الثابت الكوني المستحث $Induced \Lambda$ (induced cosmological constant) و الذي يتناقص مع الزمن

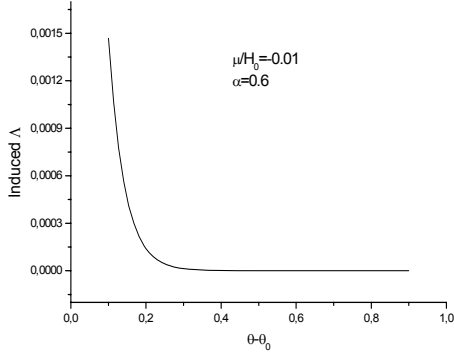
إلى أن ينعدم من أجل القيم الكبرى للزمن الرسم البياني رقم (13.d)



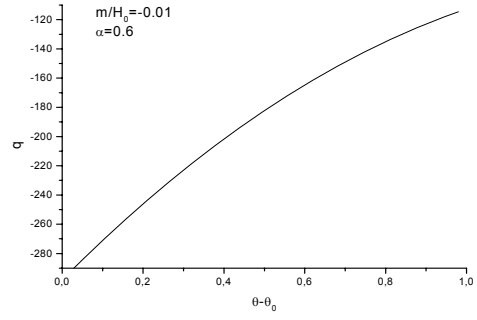
الرسم البياني رقم (13.b)



الرسم البياني رقم (13.a)



الرسم البياني رقم (13.d)



الرسم البياني رقم (13.c)

الرسم البياني رقم (13) مختلف المنحنيات لمختلف قيم المعاملات الكونية بدلالة الزمن

لو أخذنا

$$\begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{2}{3} g(\theta) & \rho_{tot} &= \rho_m + \Lambda(t) \\
 P_m &= 0 & \Lambda(t) &= \frac{1}{3} g(\theta) & P_{tot} &= P_m - \Lambda(t)
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$A \left\langle \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} H_0^2 \left(1 + \frac{\mu}{H_0} \right) \right]^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right\rangle \rho_m > 0 \tag{3.57}$$

ملاحظة:

في الحقيقة هذه نتيجة خاصة و مستخلصة من هندسة فينسلر. حيث في هندسة ريمان وبنفس الدراسة للمائع نحصل على كون ساكن عوضا من كون متوسع.

2.9.3 النموذج الثاني:

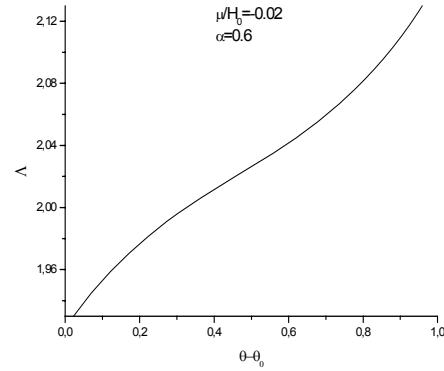
باستعمال مائع الذي يملك معادلة الحالة من الشكل التالي :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right) \quad ; \quad \begin{cases} \tilde{P} = P - \Lambda \\ P = -A/P^\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \tilde{\rho} + 3\tilde{P} = 0 \\ \tilde{\rho} = \rho + \Lambda \end{cases}, \Lambda \neq 0 \quad (3.58)$$

الرسم البياني رقم (15):

رسم بياني يبين الثابت الكوني Λ

(الكسولوجي) تابع للزمن



ملاحظة:

وأيضاً في الفضاء الزمكان لفينسلر من غير إدخال المائع شابلجين في الدراسة. نحصل على الثابت

$$\Lambda(t) = \frac{1}{3} g(t) \quad \text{الكوني } \Lambda \text{ معتمد على الزمن في العبارة التالية:}$$

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{3}{8} \mu t + \frac{B}{2} \\ B &= \frac{3}{4} \mu t_0 + \ln \left(\frac{H_0}{H_0 + \frac{3}{4} \mu} \right) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{H} &= -H^2 - \frac{3}{4} H \mu \\ H(t) &= -\frac{3}{8} \mu \frac{\exp(\theta)}{\sinh(\theta)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{9}{32} \mu^2 \frac{\exp(\theta)}{\sinh(\theta)} \quad a(t) = -\frac{4a_0}{3\mu} \left(H_0 + \frac{3}{4} \mu \right) (\exp(2\theta) - 1) \quad (3.60)$$

إنحفاظ الطاقة وكمية الحركة بوجود الثابت الكوني مع التوافق مع متساويات بيانكي (*the Bianchi identities*) نحصل على:

$$\dot{\rho} + \dot{\Lambda} = -(3H + \mu)\rho + 3\frac{A}{\rho^\alpha}\left(H + \frac{1}{2}\mu\right) + \frac{\mu}{2}\Lambda \quad (3.61)$$

ويمكن أيضا كتابتها على الشكل:

$$\Omega_2 = A(3H(1 - \alpha) + \mu\alpha) \quad \Omega_1 = -3H - \mu \quad \dot{\rho} = \frac{2}{3}\rho\left(\Omega_1 + \frac{\Omega_2}{\alpha A + \rho^{\alpha+1}}\right) \quad (3.62)$$

يبدو واضحا من المعادلة (3.60) و (3.59) و حسب تعريف معامل التباطؤ الملحق (B.10). أن معامل التباطؤ سالب (التوسع متسارع للكون) وأيضا متناسب مع μ معامل التباين (*anisotropy*). هذه أيضا نتائج مستخلصة من هندسة فينسلر فقط. بينما في هندسة ريمان الكون ساكن. إذا الرسم البياني رقم (15) يبين تغيير الثابت الكوني Λ بدلالة الزمن.

نلاحظ أنه دالة متزايدة وكأنه محسوب على الطاقة المظلمة.

10.3 النتائج

من خلال الدراسة النوعية لهذا النموذج نبين التأثير الهندسي أولا و التأثير المادي على المتغيرات الديناميكية أو المعايير الكونية (كمعامل السلم، الانزياح نحو الأحمر، مسافة الإضاءة و معامل التباطؤ). وهذا بدراسة سلوك المائع شابلجين (الاستقرار و لا استقرار ، النقاط الحرجة) في هندسة فنسلر و الحصول على عبارات صحيحة و دقيقة للمعاملات الكونية q ، H ، a ... إلخ. و هي توابع ضمنيا للانزياح نحو الأحمر المماثل \tilde{Z} (redshift-like) المعادلات من (3.32) إلى (3.42).

وزيادة على ذلك، لقد رأينا في النموذجين - سابقا - كيفية استخلاص نتائج خاصة و بحتة من هندسة فنسلر فقط. و هذا ما يزيد اهتمامنا أكثر بالنظرية وأيضا بالهندسة وتأثيراتها على المتغيرات الديناميكية. حيث رأينا في هندسة ريمان أن الكون ساكن أو متباطؤ والذي هو في هندسة فنسلر في حالة توسع متسارع (حسب الملاحظات الكونية المعاصرة - الآن -)

بإضافة إلى ذلك، لقد اقتراحنا كحل لبعض المسائل الكونية بعض نماذج فيرديمان روبرسن ولكر المعممة مع مائع شابلجين في هندسة فنسلر ومع مناقشة مدى إمكانية معرفة الحلول من خلال معايير الاستقرار في الحلول العامة.

وأخيرا يمكننا أن نقول أن هذه الدراسة هي دراسة نظرية بحتة وتعد مجرد نقطة انطلاق للمقارنات مستقبلية مع بيانات الملاحظات المقدمة من طرف الأقمار الصناعية و التلسكوبات. و نأمل أن تكون هذه النماذج أكثر واقعية وتمثيلية لوصف و شرح بعض الظواهر الكونية الغامضة التي تحدث في هذا الكون الفسيح .

الخاتمة العامة

أردنا من خلال هذه الدراسة لعلم الكون الديناميكي في الفضاء -الزمكان- غير ريماني والطاقة المظلمة. أن نجيب على الأسئلة الكونية المطروحة في الساحة العلمية وذلك من خلال نظرية $f(R)$ بإدخال مفاهيم وتعديلات في النظرية النسبية وإبراز الجزء الغامض في مواضيعها التي لا تملك الإجابة الصحيحة: من أين أتت... وكيف وضعت ... وغيرها من الأسئلة مثل الثابت Λ الذي كان جدل كبير في أوساط الباحثين خلال تلك الحقبة و أيضا تسارع توسع الكون و الطاقة الظلماء وغيرها من الأغاز الكونية المحيرة... الخ.

حيث بنيت النظرية (النسبية) أنداك تحت إطار رياضي يتماشى مع متطلبات البحث العلمي في ذلك الوقت بالميل إلى فكرة التبسيط من أجل بناء النظريات الأكثر أناقة و البسيطة في مضمونها (تجانس الكون وتماثله... و التناظر الهندسي وغيرها من التقريب الرياضي المعروف...). ولكن الوسط الفيزيائي عكس ذلك فهو غير متجانس ولا متماثل المناحي ولا حتى متناظر من الناحية الهندسية... ففكرة التفضيل عند الإنسان منذ القدم نابعة من طبعه وفطرته، فليس هناك قانون يجعل موقعنا في الكون هو المحوري و المفضل لكل شيء.....

فبفضل هذه المفارقات العلمية كان الغموض في بعض المسائل و الظواهر الكونية... وكان العجز عن تفسيرها... لكن لكي نكون منصفين لجهود العلماء و الباحثين الذين لهم الفضل في كل شيء، فالعلم يبني بعضه البعض...

فالخطوة الأولى هي التبسيط وذلك لحل المسائل محليا التي لا بد منها في البداية لكل بحث وبناء نظرية جديدة. والخطوة الثانية هي التعميم لها و معرفة مدى حدودها (النظرية).

وكحتمية علمية كانت نظرية $f(R)$ لكشف الغموض وإدراك للعجز مع إظهار الحقائق العلمية وتكملة لبناء الصرح العلمي العتيق لفهم كبرى أغاز الكون.

المراجع:

1. دافيد برجاميني, الكون, مكتبة لايف العلمية, بيروت, 1971م.
2. كولين رونان, الكون, الأهلية للنشر والتوزيع, بيروت, 1980 م.
3. د. عبد الرحيم بدر, الكون الأحذب, بيروت, لبنان, 1980 م.
4. جي, أس, ترجمة عبد الكريم علي. الكون الراديوي, بغداد, 1991م.
5. مجلة العلوم الأمريكية, قراءة مخططات نشوء الكون, عدد أبريل, 2004م.
6. مجلة العلوم الأمريكية, توسع الكون من تباطؤ إلى تسارع, عدد مايو, 2004م.
7. تأليف د. طالب ناهي الخفاجي, النسبية بين نيوتن وأينشتاين, دار القلم, بيروت, 1978م.
8. د. محمد عبد الرحمن مرحبا, آينشتاين والنظرية النسبية, دار القلم, بيروت, 1981م.
9. F. Levin, *Calibrating the Cosmos, Chapter7*. Springer, (2006)
10. N. Mebarki, “Dark Dynamical Cosmology in a Noncommutative Geometry” in. *4th International Workshop on the Dark Side of the Universe, edited by S.Khalil, AIP Conference Proceedings 1115, American Institute of Physics, Cairo, Egypt, 2008, pp. 248-253.*
11. N. Mebarki and F. Khelili, *Electron.J.Theor.Phys.5, 65-68 (2008).*
12. N. Mebarki, S. Zaim, L. Khodja and H.Aissaoui, *Phys.Scripta 78, 045101 (2008).*
13. F. Khelili, J. Mimouni and N. Mebarki, *J.Math.Phys..42, 3615-3627 (2007).*
14. N. Mebarki, F. Khelili, S.Kalli and M.Haouchine *Chin.J.Phys.44, 180-188 (2008).*
15. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys. 82, 451-497 (2010),*
16. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115-146 (2007)*
17. L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev.D 75, 083504 (2007)*
18. N.J. Poplawski, *Phys. Rev. D 74, 084032 (2006).*
19. G. F. Smoot, *NuovoCim. B122, 1339-1351 (2007).*

20. T. Sounadeep, R. Saha and P. Jain, *New Astron. Rev.* 50,854-860 (2006).
- 21..C. L. Bennett et al. , *Astrophys. Jour.* 583, 1-23 (2003).
- 22..G. F. Ellis, C. Hellaby and D. R. Matravers, *Astrphys. Jour.* 364, 400-404 (1990).
23. R. Bielewicz et al. , *Astrophys. Jour.* 653, 750-760 (2005).
24. C. J. Copi et al. , *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 367, 79-102 (2005).
25. D. R. Matravers and C. G. Tsagas, *Phys. Rev. D.* 62, 103519 (2000).
26. C. G. Tsagas and R. Maartens, *Phys. Rev. D.* 61, 083519 (2000) .
27. E. Ellis and R. Maartens, *Class. Quant. Grav.* 21, 223-232 (2004).
- 28..P. C. Stavrinos, *Jour. Phys. Conf.* 849 (2006).
- 29..P. C. Stavrinos, *Int. Jour. Theor. Phys.* 44, 245-254 (2005).
30. R. G. Beil, *Int. Jour. Theor. Phys.* 26, 189-197 (1987).
31. G. W. Gibbons, J. Gimis and C. N. Pope, *Phys. Rev. D.* 76, 081701 (2007).
- 32..A. P. Kouretsis, M. stathakopoulos and P. C. Stavrinos, *Phys. Rev. D.* 79, 104011 (2009).
33. Z. Chang and X. Li, *Phys. Lett. B.* 676, 173-176 (2009).
34. P. C. Stavrinos, A. P. Kourelsis and M. stathakopoulos, *Gen. Rel. Grav.* 40, 1403-1425 (2008)
35. T. D. de Wit, *Physique non-linéaire*, Université d'Orléans, (2010)
36. S. Capozziello, M. De Laurentis, V. Faraoni, *arXiv.0909.4672v2*(2009)

الملحقات

الملحق: A

النسبية العامة

الإطار الرياضي هندسة ريمان

الخصائص

التناظر (الكروي) التجانس والتماثل

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (\text{A.1})$$

لا يوجد فتل (No torsion)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} \quad (\text{A.2})$$

شرط المترية (metricity condition)

$$D_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.3})$$

فعل هليبرت انشتاين

$$S = S_G + S_M \quad (\text{A.4})$$

حيث:

$$S_G = \frac{1}{2k} \int L |g_{\mu\nu}| \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.5})$$

$$S_M = \frac{1}{2k} \int L_M \sqrt{-g} d^4x$$

حل المعادلة الفعل (A.4) بحساب الفعل الأصغري

$$\delta\mathcal{S} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$L|g_{\mu\nu}| = R - 4\Lambda \quad ; k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial[(\sqrt{-g})L_M]}{\partial g_{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g})L_M}{\partial g^{\mu\nu};\lambda} \right\}_{;\lambda} \right) \quad (\text{A.6})$$

مبدأ إنحفاظ الطاقة وكمية الحركة محقق

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (\text{A.7})$$

نتحصل على معدلات الحقول لأنشتاين:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

الملحق: B

انطلاقاً من معادلة أينشتاين

معادلات الحقول (Field equations)

$$\hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \hat{T}_{\alpha\beta} \quad (B.1)$$

حل معادلة الحقول لأينشتاين

نموذج فريدمان لومنتير روبرسون وولكر (FLRW)

النموذج المعياري للكون المعياري (Standard Model of Standard Cosmology)

مترية تملك تناظر كروي (فضاء متجانس و متماثل) وباستعمال الخطوط الجيوديزية الصامدة نتحصل على المترية.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (B.2)$$

نتحصل على:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d^2 \varphi) \right] \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (B.3)$$

حيث: a معامل السلم, K ثابت يميز شكل الإنحناء الخاص بالفضاء المكاني

$$\Sigma = \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d^2 \varphi) \right] \quad (B.4)$$

نجد الحالات التالية:

$$K = \begin{cases} -1 & \text{Open Univers} \\ 0 & \text{flat Univers} \\ 1 & \text{Closed Univers} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

بضم العلاقات التالية (B.1) و (B.3) نتحصل على معادلات فريدمان

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K c^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K c^2}{a^2} - \Lambda c^2 &= -\frac{8\pi G}{c^2} p \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ف نجد ثلاث حالات للكون: توسع إلى الأبد أو إنهيار أو شبه ساكن

وبضم المعادلتين (B.6) نجد:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G(3p + \rho) \quad (\text{B.7})$$

إذا كان لنا معادلة الحالة للمائع الميثالي

$$p = \omega\rho \quad (\text{B.7})$$

المادة في حالة الغبار $p = 0$ بمعنى $\omega = 0$ و $k = \Lambda = 0$ المادة في حالة الغبار المسيطرة على الكون

(الحاضر)

$$pR^3 = cts \quad (\text{B.8})$$

المادة في حالة إشعاع $p = \frac{1}{3}\rho$ بمعنى $\omega = \frac{1}{3}$ و $k = \Lambda = 0$ الإشعاع المسيطرة على الكون (بداية الكون)

$$pR^4 = cts \quad (B.9)$$

معامل التباطىء q

$$H^2(2q-1) = \frac{k}{R^2}$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_{crit}} = -\frac{\ddot{R}}{RH^2} \quad (B.10)$$

معامل هابل H , المسافة r بين المشاهد و المجرة, سرعة إبتعاد المجرات v , معامل إنحناء الكون R

$$v = H r$$

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad (B.11)$$

معامل الإنزياح نحو الأحمر z

λ_o طول الموجة المشاهدة λ_e طول الموجة المنبعثة

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{R(t)} - 1 \quad (B.12)$$

مناقشة مختلف الحالات $\rho_{crit} = \frac{3H}{4\pi G}$ و q و k

الحالة الاولى: كون مغلق (إنحناء موجب)

$$k > 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho > \rho_{crit} \\ q > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (B.13)$$

الحالة الثانية: فضاء إقليدس لا يوجد إنحناء, توسع ليس له نهاية

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_{crit} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (B.15)$$

الحالة الثالثة: كون مفتوح, إنحناء سالب, توسع إلى الأبد

$$k < 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho < \rho_{crit} \\ q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (B.16)$$

المادة المشكلة للكون حيث Ω تسمى كثافة الطاقة

$$\sum_{j=0}^4 \Omega_j = 1 \quad ; j = \{D, M, K, \Lambda\}$$

$$\begin{aligned} \Omega_D + \Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda &= 1 \\ \Omega_D + \frac{8\pi G}{c^4} \frac{\rho}{H^2} - \frac{K}{H^2 R^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} &= 1 \end{aligned} \quad (B.17)$$

$$\Omega_M \approx 4\%, \quad \Omega_K \approx 0, \quad \Omega_D \approx 21\%, \quad \Omega_\Lambda \approx 75\% \quad \text{حيث:}$$

الملحق: C

طور الصورة الحل العام

لدينا الجملة الخطية في جوار النقاط الثابتة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

إذا القيم الذاتية هي حلول لكثير الحدود الخاصة بالمصفوفة A

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A) = 0 \quad (\text{C.2})$$

حيث:

$$\begin{aligned} Det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ Tr(A) &= a_{11} + a_{22} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

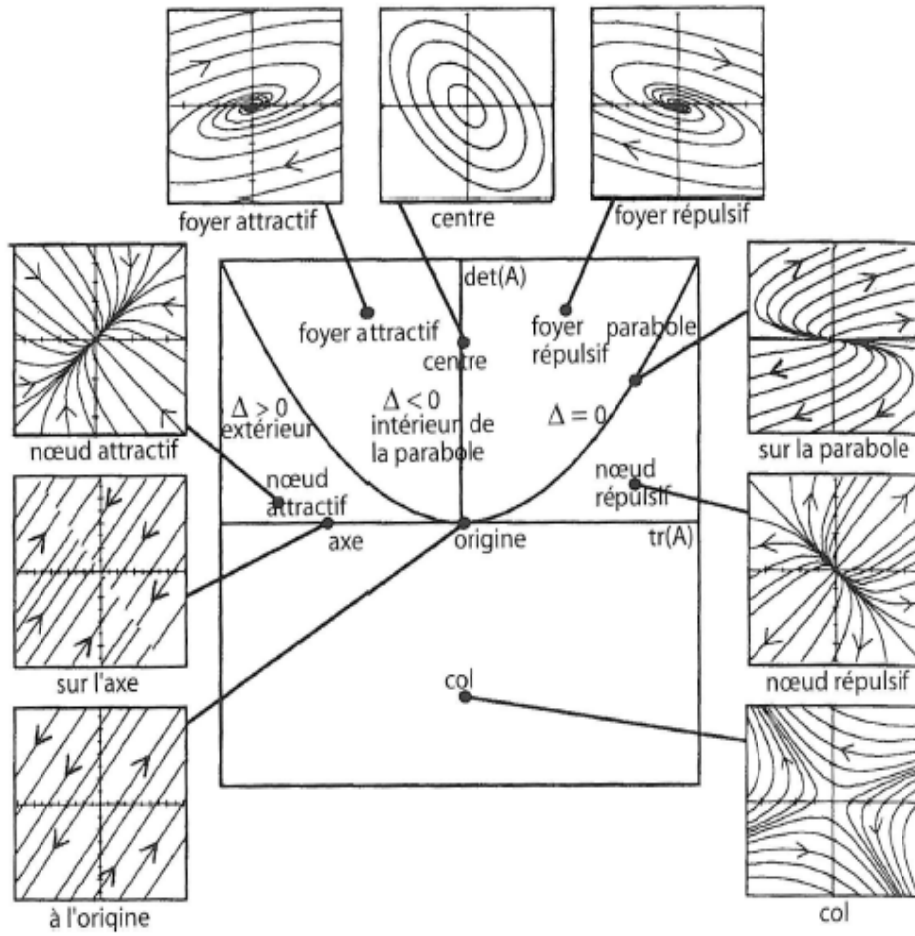
في حالة $Det(A) = 0$ و $Tr(A) = 0$ المستوي $(Det(A), Tr(A))$ منطبق على (x, y)

في حالة المميز $\Delta = (Tr(A))^2 - 4Det(A) = 0$ نتحصل على قطع مكافئ

مختلف المنحنيات تحدد المناطق أين المسارات لها نفس السلوك, على حدود هذه المناطق الحل هو

حلول خاصة, فوق القطع المكافئ $\Delta = 0$ على سبيل المثال القيم الذاتية منحطة أي متكررة.

أنظر الرسم البياني: يوضح مختلف الحالات للنقاط الإستقرار والمسارات



الرسم البياني: رسم مركز ومتراص يوضح مختلف الحلول في المستوي $(\text{Tr}(A), \text{Det}(A))$ الحالات

لنقاط الاستقرار والمسارات رسم نشر من طرف (B. West & J. Hubbard)

الملحق D :

حلالمعادلة من الشكل التالي :

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \quad (D.1)$$

يكون كالتالي:

$$y(x) = \frac{\int dxg(x) \exp(\int dx f(x)) + C}{\exp(\int dx f(x))} \quad (D.2)$$

إذا كانت من الشكل

$$z(x) = y^{1-n}(x) \quad (D.3)$$

فتصبح كالتالي:

$$z'(x) + (1-n)P(x)z(x) = (1-n)Q(x) \quad (D.4)$$

الملحق: E

الحسابات الرياضية باستعمال (mathematica 7)

ملاحظة: نعرض في هذا الملحق أمثلة لبعض الحسابات فقط وهذا لكونها طويلة جدا.

حل المعادلة رقم (3.15) و (3.16) باستعمال (math.7)

$$f(R) = R^n; a^\circ = a^\circ (t/t^\circ)^\alpha;$$

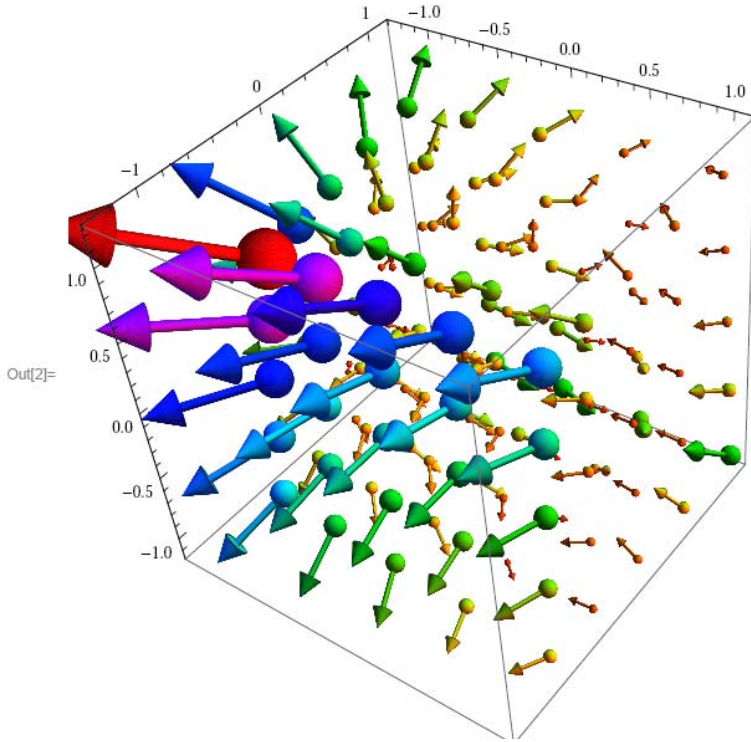
$$\begin{aligned} \text{eqns} = \{ & n\alpha(3\alpha - 2) + (n-1)(3\alpha(2\alpha - 1) + 2n(3 - 2\alpha) + 4n(n-2)) = 0, \\ & 12(n-1)((2\alpha - 1)^2)((-15/4)(\alpha^2) + (33/2)\alpha + 2n(2n - 2\alpha - 1) + \\ & 3(10 - 7\alpha)(6n - 3n\alpha - 4)) - n(-14(\alpha^2) + 37\alpha - 15) = 0\}; \end{aligned}$$

NSolve[eqns, {n, \alpha}]

$$\begin{aligned} \{ & \{n \rightarrow 0.734655 + 2.34084 i, \alpha \rightarrow 1.89974 + 0.442815 i\}, \\ & \{n \rightarrow 0.734655 - 2.34084 i, \alpha \rightarrow 1.89974 - 0.442815 i\}, \\ & \{n \rightarrow 1.29017 + 1.37646 i, \alpha \rightarrow 1.43033 - 0.0793099 i\}, \\ & \{n \rightarrow 1.29017 - 1.37646 i, \alpha \rightarrow 1.43033 + 0.0793099 i\}, \{n \rightarrow 0.980377, \alpha \rightarrow -0.0196585\}, \\ & \{n \rightarrow 1.25, \alpha \rightarrow 0.5\}, \{n \rightarrow 1.19327 + 0.0301648 i, \alpha \rightarrow 0.598076 - 0.0282137 i\}, \\ & \{n \rightarrow 1.19327 - 0.0301648 i, \alpha \rightarrow 0.598076 + 0.0282137 i\}, \\ & \{n \rightarrow 0.674765 - 0.0901174 i, \alpha \rightarrow 0.0577172 - 0.302074 i\}, \\ & \{n \rightarrow 0.674765 + 0.0901174 i, \alpha \rightarrow 0.0577172 + 0.302074 i\}, \{n \rightarrow 0.75, \alpha \rightarrow 0.5\}, \\ & \{n \rightarrow 0., \alpha \rightarrow 0.5\}, \{n \rightarrow 0., \alpha \rightarrow 0.5\}, \{n \rightarrow 0.751231 - 0.0899457 i, \alpha \rightarrow 0.585501 - 0.14608 i\}, \\ & \{n \rightarrow 0.751231 + 0.0899457 i, \alpha \rightarrow 0.585501 + 0.14608 i\}, \{n \rightarrow 0.564787, \alpha \rightarrow 1.20675\} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

حل المعادلة رقم (3.17) رسم طور الصورة ثلاثية الأبعاد من أجل (n = 2):

```
In[2]= VectorPlot3D[{- (3 / 2) z + ((-1 / (2 - 1)) y - x + (3 / 4) z + 1) (x + 1) + 2 y - x^2,
  y ((3 - 4) / (2 - 1)) x - (2 / (2 - 1)) y + (3 / 2) z + 2), z (1 - x + (3 / 4) z - (1 / (2 - 1)) y)},
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, VectorPoints -> 5,
PlotRange -> All, PlotRange -> All, VectorStyle ->
{{Graphics3D[Sphere[{0, 0, 0}, 0.5]], Graphics3D[Cone[{0, 0, 0}, {1, 0, 0}], 0.5]}}},
VectorScale -> {Automatic, Scaled[0.5]}, VectorColorFunction -> Hue]
```



(E.2)

حل المعادلة من رقم (3.19) إلى (3.23) ومثال عن كيفية حساب مصفوفات الاستقرار والقيم الذاتية و الاشعة الذاتية ورسم مختلف أطوار الصورة لها :

Les solution des equations differentielles $x' = y' = z' = 0$;

NSolve[{0 == -(3/2) z + ((-1/(n-1)) y - x + (3/4) z + 1) (x+1) + 2 y - x^2,

0 == y ((3-2n)/(n-1) x - (2/(n-1)) y + (3/2) z + 2),

0 == z (1 - x + (3/4) z - (1/(n-1)) y)}, {x, y, z}]

{y → 0., z → -4.97607, x → -2.73205},

{y → 0., z → -0.357266, x → 0.732051}, {y → 0., z → 0., x → -0.707107},

{y → 0., z → 0., x → 0.707107}, {y → $\frac{0.25(-12. + 12.n)}{6. - 3.n}$, z → $\frac{4. - 4.n}{-6. + 3.n}$, x → 0.},

{y → 0.5 $\left(-2. + \frac{10.5}{1. - 2.n} + 2.n - \frac{22.n}{1. - 2.n} + \frac{16.n^2}{1. - 2.n} - \right.$

$\frac{4.n^3}{1. - 2.n} + \frac{6.\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2}}{1. - 2.n} -$

$\left. \frac{4.n\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2}}{1. - 2.n} \right)$, z → 0., x →

$\frac{1}{-1. + 2.n} 0.5 \left(-7. + 10.n - 4.n^2 - 4.\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2} \right)$ },

(E.3)

{y → 0.5 $\left(-2. + \frac{10.5}{1. - 2.n} + 2.n - \frac{22.n}{1. - 2.n} + \frac{16.n^2}{1. - 2.n} - \frac{4.n^3}{1. - 2.n} - \right.$

$\frac{6.\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2}}{1. - 2.n} +$

$\left. \frac{4.n\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2}}{1. - 2.n} \right)$, z → 0., x →

$\frac{1}{-1. + 2.n} 0.5 \left(-7. + 10.n - 4.n^2 + 4.\sqrt{1.18525 - 2.15222n + n^2} \sqrt{1.74014 - 0.84778n + n^2} \right)$ }}

Construire les matrices de stabilité

$$D[-(3/2)z + ((-1/(n-1))y - x + (3/4)z + 1)(x+1) + 2y - x^2, x]$$

$$-4x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{4}$$

$$D[-(3/2)z + ((-1/(n-1))y - x + (3/4)z + 1)(x+1) + 2y - x^2, y]$$

$$2 - \frac{1+x}{-1+n}$$

$$D[-(3/2)z + ((-1/(n-1))y - x + (3/4)z + 1)(x+1) + 2y - x^2, z]$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{3(1+x)}{4}$$

$$D[y(((3-2n)/(n-1))x - (2/(n-1))y + (3/2)z + 2), x]$$

$$\frac{(3-2n)y}{-1+n}$$

$$D[y(((3-2n)/(n-1))x - (2/(n-1))y + (3/2)z + 2), y] \tag{E.4}$$

$$2 + \frac{(3-2n)x}{-1+n} - \frac{4y}{-1+n} + \frac{3z}{2}$$

$$D[y(((3-2n)/(n-1))x - (2/(n-1))y + (3/2)z + 2), z]$$

$$\frac{3y}{2}$$

$$D[z(1-x + (3/4)z - (1/(n-1))y), x]$$

$$-z$$

$$D[z(1-x + (3/4)z - (1/(n-1))y), y]$$

$$-\frac{z}{-1+n}$$

$$D[z(1-x + (3/4)z - (1/(n-1))y), z]$$

$$1 - x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{2}$$

LES VALEURS PROPERES ;

$$\text{Eigenvalues} \left[\left\{ \left\{ 7.196152422706631, 2 + \frac{1.7320508075688772}{-1+n}, -2.799038105676658 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 0, -5.464101615137755 - \frac{2.732050807568877 (3-2n)}{-1+n}, 0 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 4.97606774342517, \frac{4.97606774342517}{-1+n}, -3.732050807568878 \right\} \right\} \right] \\ \left\{ 5.72307, -2.25896, -5.4641 - \frac{2.73205 (3-2n)}{-1+n} \right\}$$

LA TRACE DE MATRICE;

$$\text{Tr} \left[\left\{ \left\{ 7.196152422706631, 2 + \frac{1.7320508075688772}{-1+n}, -2.799038105676658 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 0, -5.464101615137755 - \frac{2.732050807568877 (3-2n)}{-1+n}, 0 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 4.97606774342517, \frac{4.97606774342517}{-1+n}, -3.732050807568878 \right\} \right\} \right] \\ -2. - \frac{2.73205 (3-2n)}{-1+n}$$

LE DETERMINANT ;

$$\text{Det} \left[\left\{ \left\{ 7.196152422706631, 2 + \frac{1.7320508075688772}{-1+n}, -2.799038105676658 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 0, -5.464101615137755 - \frac{2.732050807568877 (3-2n)}{-1+n}, 0 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 4.97606774342517, \frac{4.97606774342517}{-1+n}, -3.732050807568878 \right\} \right\} \right] \\ 70.641 + \frac{105.962}{-1+n} - \frac{70.641n}{-1+n}$$

L' ORDER DE MATRICE;

$$\text{MatrixRank} \left[\left\{ \left\{ 7.196152422706631, 2 + \frac{1.7320508075688772}{-1+n}, -2.799038105676658 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 0, -5.464101615137755 - \frac{2.732050807568877 (3-2n)}{-1+n}, 0 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 4.97606774342517, \frac{4.97606774342517}{-1+n}, -3.732050807568878 \right\} \right\} \right]$$

3

$$\text{Matrix} = \left\{ \left\{ -4x + \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{4}, 2 - \frac{1+x}{-1+n}, -\frac{3}{2} + \frac{3(1+x)}{4} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{(3-2n)y}{-1+n}, 2 + \frac{(3-2n)x}{-1+n} - \frac{4y}{-1+n} + \frac{3z}{2}, \frac{3y}{2} \right\}, \left\{ -z, -\frac{z}{-1+n}, 1-x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{2} \right\} \right\} \\ \left\{ \left\{ -4x + \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{4}, 2 - \frac{1+x}{-1+n}, -\frac{3}{2} + \frac{3(1+x)}{4} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{(3-2n)y}{-1+n}, 2 + \frac{(3-2n)x}{-1+n} - \frac{4y}{-1+n} + \frac{3z}{2}, \frac{3y}{2} \right\}, \left\{ -z, -\frac{z}{-1+n}, 1-x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{2} \right\} \right\}$$

MATRICE DE STABILITE GENERALE;

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -4x + \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{4} & 2 - \frac{1+x}{-1+n} & -\frac{3}{2} + \frac{3(1+x)}{4} \\ \frac{(3-2n)y}{-1+n} & 2 + \frac{(3-2n)x}{-1+n} - \frac{4y}{-1+n} + \frac{3z}{2} & \frac{3y}{2} \\ -z & -\frac{z}{-1+n} & 1-x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{F}[x_, y_, z_, n] := \left\{ \left(-4x + \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{4} \right), \left(2 - \frac{1+x}{-1+n} \right), \left(-\frac{3}{2} + \frac{3(1+x)}{4} \right) \right\}, \\ \left\{ \left(\frac{(3-2n)y}{-1+n} \right), \left(2 + \frac{(3-2n)x}{-1+n} - \frac{4y}{-1+n} + \frac{3z}{2} \right), \left(\frac{3y}{2} \right) \right\}, \left\{ (-z), \left(-\frac{z}{-1+n} \right), \left(1-x - \frac{y}{-1+n} + \frac{3z}{2} \right) \right\}$$

(E.5)

طور الصورة لمختلف القيم (x,y,z,n) لجمل المعادلات رقم (3.19)

```

x'[x_, y_, z_, n_] := -(3/2) z + ((-1/(n-1)) y - x + (3/4) z + 1) (x+1) + 2 y - x^2;
y'[x_, y_, z_, n_] := y ((3-2n)/(n-1)) x - (2/(n-1)) y + (3/2) z + 2;
z'[x_, y_, z_, n_] := z (1 - x + (3/4) z - (1/(n-1)) y);

FIRST CASE PHASE PORTRAIT {x', y'} for z' = 0 & {z1, z2}; & n1 = 0, n2 = -2, n3 = 2;
{{z1, n1}, {z1, n2}, {z1, n3}},
{{z2, n1}, {z2, n2}, {z2, n3}};

SECOND CASE PHASE PORTRAIT {x', z'} for y' = 0 & {y1, y2} & n1 = 0, n2 = -2, n3 = 2;
{{y1, n1}, {y1, n2}, {y1, n3}},
{{y2, n1}, {y2, n2}, {y2, n3}};

THIRD CASE PHASE PORTRAIT {y', z'} for x' = 0 & {x1, x2} & n1 = 0, n2 = -2, n3 = 2;
{{x1, n1}, {x1, n2}, {x1, n3}},
{{x2, n1}, {x2, n2}, {x2, n3}};

FIRST CASE "PHASE PORTRAIT {x', y'}, where , z'==0; Z'(z1,z2)=0 ,n=0 ;n=-2 ;n=2";

```

(E.6)

```

FIRST CASE "PHASE PORTRAIT {x', y'}, where , z'==0; Z'(z1,z2)=0 ,n=0 ;n=-2 ;n=2";

```

```

Roots[z (1 - x + (3/4) z - (1/(n-1)) y) == 0, z]

```

$$z = \frac{4}{3} \left(-1 + x + \frac{y}{-1+n} \right) \quad || \quad z = 0$$

(E.7)

```

n = 0; z = 0;

```

```

x'[x_, y_, z_, n_] := -(3/2) z + ((-1/(n-1)) y - x + (3/4) z + 1) (x+1) + 2 y - x^2

```

*

```

x'[x, y, 0, 0]

```

```

-x^2 + 2 y + (1+x) (1 - x + y)

```

```

y'[x_, y_, z_, n_] := y ((3-2n)/(n-1)) x - (2/(n-1)) y + (3/2) z + 2

```

```

y'[x, y, 0, 0]

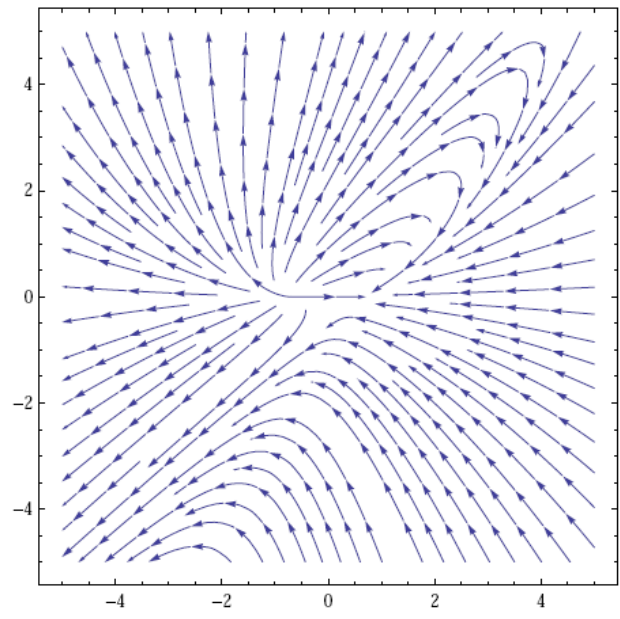
```

```

y (2 - 3 x + 2 y)

```

`StreamPlot[{-x2 + 2 y + (1 + x) (1 - x + y), y (2 - 3 x + 2 y)}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]`



(E.8)

$$\mathbf{n} = 0; \mathbf{z} = \frac{4}{3} (-1 + \mathbf{x} - \mathbf{y});$$

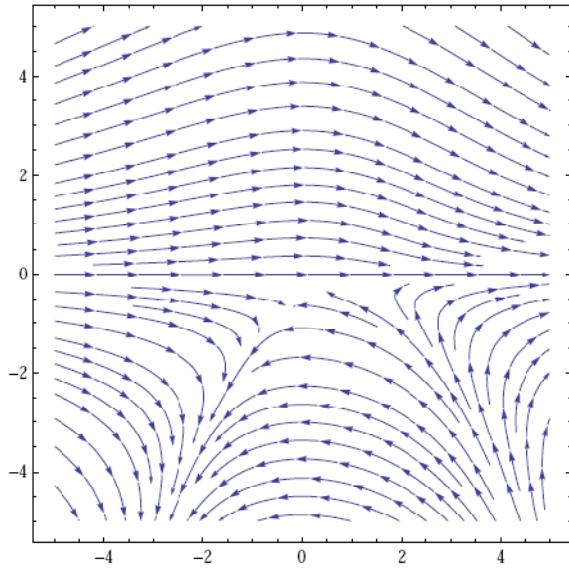
$$\mathbf{x}' \left[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{4}{3} \left(-1 + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{-1 + 0} \right), 0 \right]$$

$$-\mathbf{x}^2 - 2 (-1 + \mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2 \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}' \left[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{4}{3} (-1 + \mathbf{x} - \mathbf{y}), 0 \right]$$

$$\mathbf{y} (2 - 3 \mathbf{x} + 2 (-1 + \mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2 \mathbf{y})$$

`StreamPlot[{x^2 - 2 (-1 + x - y) + 2 y, y (2 - 3 x + 2 (-1 + x - y) + 2 y)}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]`



(E.9)

$z = 0; n = 2;$

$x'[x, y, 0, 2]$

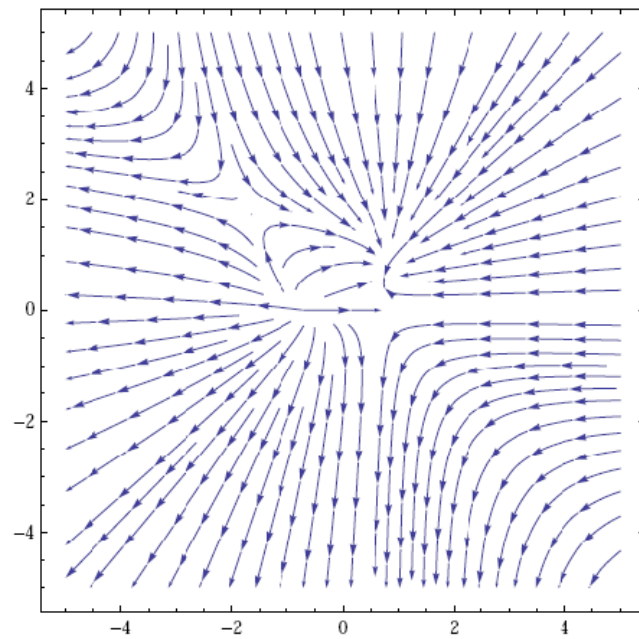
$-x^2 + (1+x)(1-x-y) + 2y$

$y'[x, y, 0, 2]$

$(2-x-2y)y$

$\text{StreamPlot}[\{-x^2 + (1+x)(1-x-y) + 2y, (2-x-2y)y\}, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}]$

(E.10)



حل المعادلة رقم (3,26) و (3,26) و رسم طور الصورة اثنائية لأبعاد:

PHASE PORTRAIT (ρ' , H');

$$\rho' = -3H(\rho + p) + 1/2 \mu (2\rho + 3p);$$

$$H' = -H^2 + \frac{3H}{4} \mu - \frac{1}{6} (\rho + 3p);$$

$$\{\rho, 0, 10\}, \{H, -5, 5\};$$

$$\left(p = \frac{-A}{\rho^\alpha}\right); \left(x = \frac{\rho}{\rho_0}, Y = \frac{H}{H_0}\right), \{\alpha = 0.4, H_0 = 1, \rho_0 = 1, \mu = -0.01, A = 1\};$$

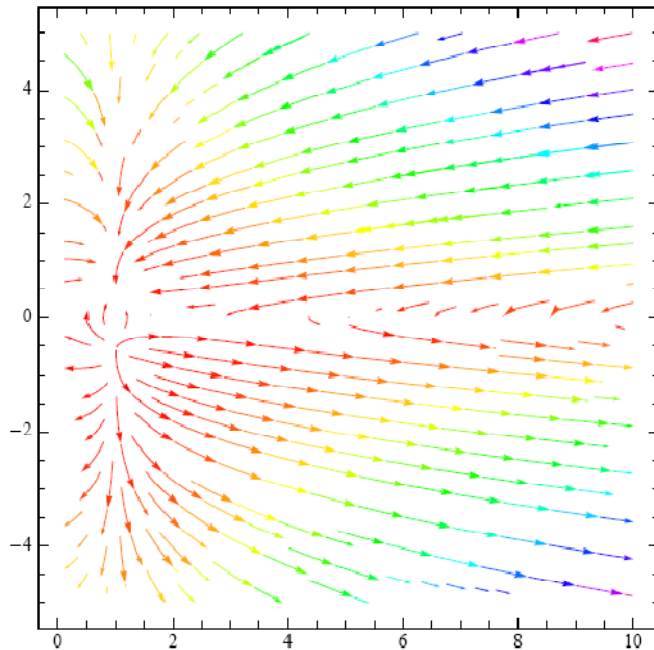
$$\rho' = -3H(\rho - \rho^{-0.4}) + 0.005(2\rho - 3\rho^{-0.4});$$

$$H' = -H^2 + \frac{3H}{4} 0.01 - \frac{1}{6} \left(\rho - \frac{3}{\rho^{0.4}}\right);$$

$$\text{StreamPlot}\left[\left\{-3H(\rho - \rho^{-0.4}) + 0.005(2\rho - 3\rho^{-0.4}), -H^2 + \frac{3H}{4} 0.01 - \frac{1}{6} \left(\rho - \frac{3}{\rho^{0.4}}\right)\right\},\right.$$

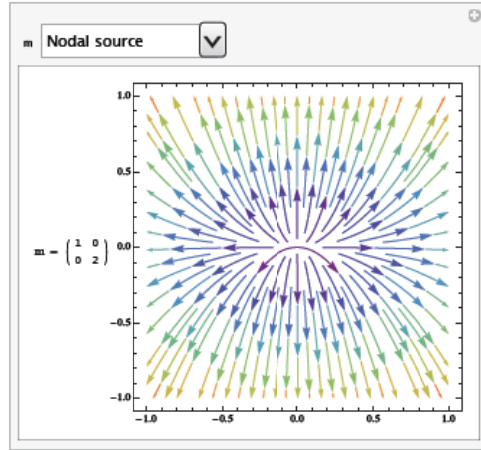
$$\left.\{\rho, 0.1, 10\}, \{H, -5, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\rho, H\}, \text{StreamColorFunction} \rightarrow \text{Hue}\right]$$

(E.11)

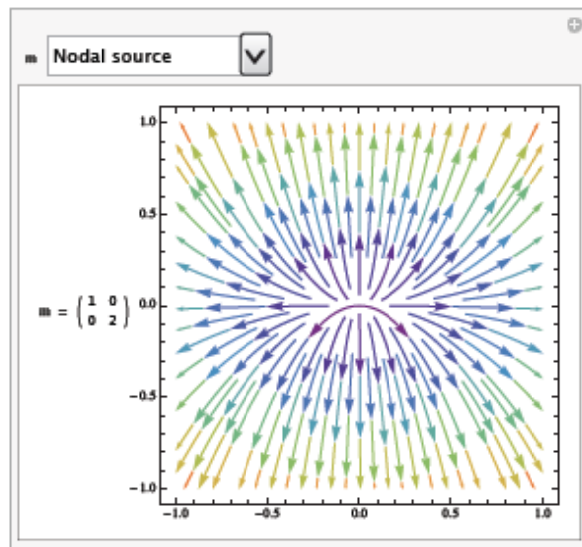


رسم لمختلف النقاط الحرجة عن طريق (*math7*) (تكملة للملحق C)

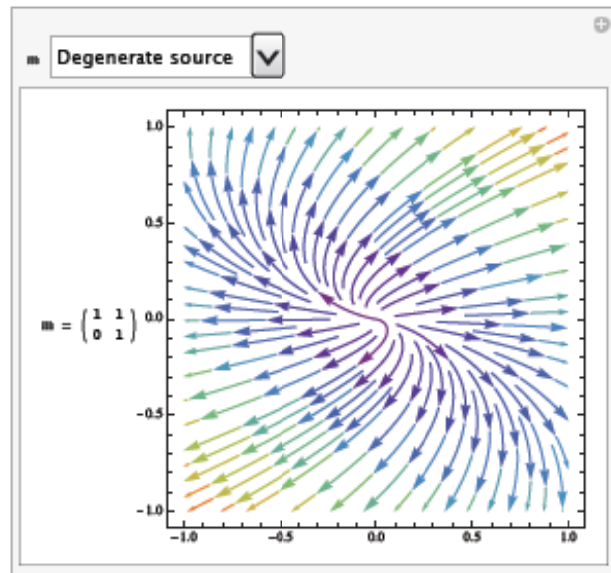
```
Manipulate[Row[{Text["m"] == MatrixForm[m], StreamPlot[Evaluate[m, {x, y}],
  {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, StreamScale -> Large, StreamColorFunction -> "Rainbow"
  ]}], {{m,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ }, {{ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  -> "Nodal source",  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  -> "Degenerate source",
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  -> "Spiral source",  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  -> "Nodal sink",  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  -> "Degenerate sink",
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  -> "Spiral sink",  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  -> "Center",  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  -> "Saddle"}}}]
```



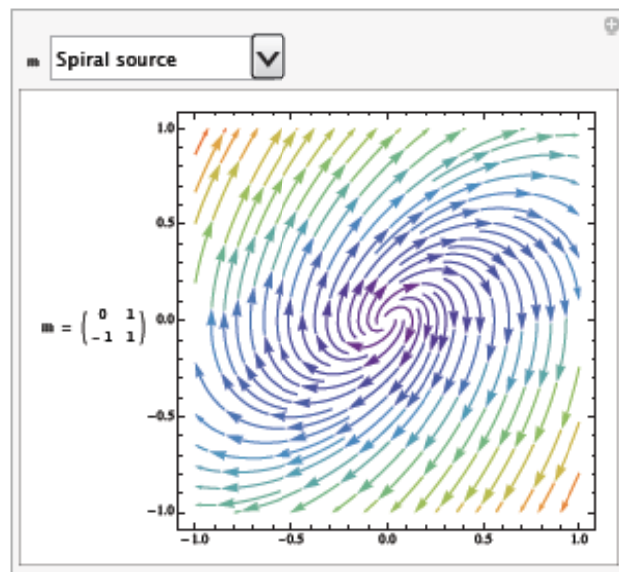
(E.12)



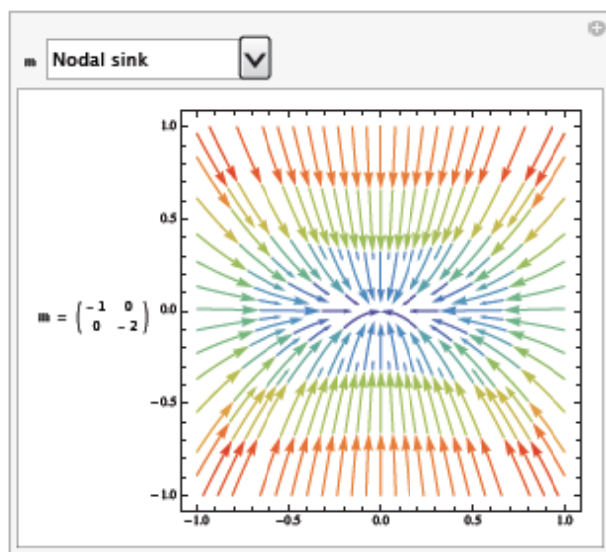
(E.13)



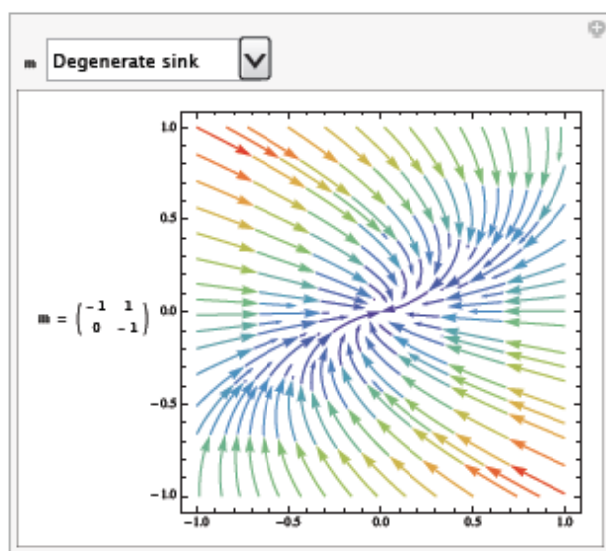
(E.14)



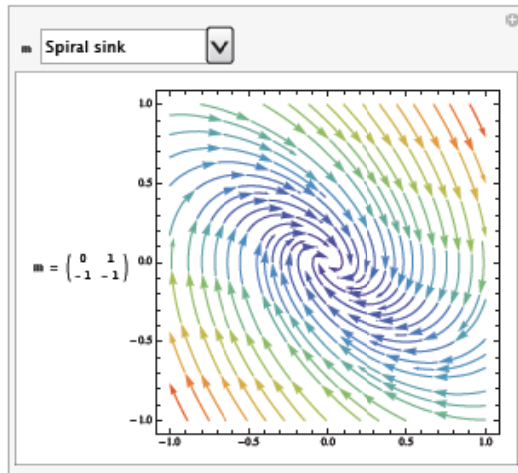
(E.15)



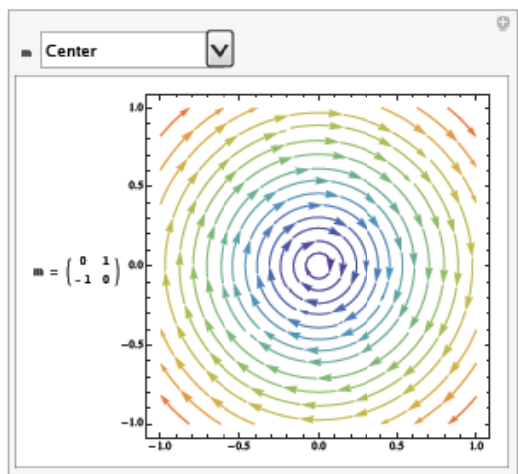
(E.16)



(E.17)



(E.18)



(E.19)

F: الملحق

أنظر إلى خلف الورقة المنشورة المرفقة

Cosmological Implications of $F(R)$ Theories in Finsler Geometry

A.Malki^a and N.Mebarki^{a,b}

^a*Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique*

Physics Department, Mentouri University, Constantine, Algeria.

^b*Egyptian Center for Theoretical Physics, MTI Modern University, Cairo, Egypt.*

Abstract. Using Palatini formalism an exact time dependence solutions of the scale factor and the Hubble parameter as functions of the redshift are obtained. For the metric case, assuming a power law formula for the scale factor constraints the various parameters. Moreover, a dynamical study with phase portraits diagrams was also made and the corresponding critical points are determined.

Keywords: Cosmology, Finsler geometry.

PACS: 96. 10. +i, 04. 50. kd, 95. 36. +x

INTRODUCTION

To cure the problem of the standard cosmological model Theories of gravity alternative to Einstein's general relativity have been proposed [1]-[5]. From a conceptual point of view, there is no a priori reason to restrict the gravitational Lagrangian to a linear function of the Ricci scalar R minimally coupled with matter [6]-[9]. Besides fundamental physics motivations, all the approaches denoted by $F(R)$ theories, have been the subject of enormous attention in cosmology due to the fact that they naturally exhibit an inflationary behavior which overcome the problems of the standard cosmological models. Moreover, the cosmological scenarios arising from $F(R)$ theories seem to be realistic and capable of reproducing observations of the cosmic microwave background (CMB) [10]. On the other hand, during the last few years, considerable studies concerning observable anisotropies of the universe have been investigated. These are connected to the very early state of the universe and related to the WMAP estimations of CMB [11]-[15], the anisotropic pressure or the incorporation of a primordial vector field (e. g. magnetic field) to the metrical spatial structure of the universe. The main motivations are based on the fact that the observed anisotropy of the microwave cosmic radiation is of a dipole type [16]- [21]. It is to be noted that although this anisotropy can be explained using the Robertson-walker metric and taking into account the motion of our galaxy with respect to distant galaxies of the universe, still a small contribution is expected, due to the anisotropic distribution of galaxies in our space. Furthermore, in the framework of Finsler geometry, the flat rotation curves of spiral galaxies can be deduced naturally without

involving dark matter. This has led to a theoretical interest especially in the so called a Randers-Finsler space of approximate Bewald type, where a modified Friedmann model is proposed [22]-[25]. It is shown that the accelerated expanding universe is guaranteed by a constrained Randers-Finsler structure without invoking dark energy and the additional term in the geodesic equation acts as a repulsive force against the gravity.

BASIC FORMALISM

Finsler geometry may be considered as a generalized Riemannian geometry. It is a physical geometry on which matter dynamic takes place while Riemannian geometry is the gravitational geometry. It connects the Riemannian metric structure of the space-time to a physical vector field (which is dependent on the position and direction (velocity)) of cosmological origin (emerges out by a physical source of the universe where it is incorporated into the geometry causing an anisotropic structure). The geometrical anisotropies are caused by internal variables and their variations are expressed in terms of the Cartan torsion tensor of the Finslerian manifold. A Finsler space is also a metric space defined by a norm $F(x, Y)$ (on a tangent bundle instead of defining an inner product structure on it) which is a real function of a space-time point x and a tangent vector Y^μ belonging to the tangent bundle T_M of a manifold M which plays the role of an internal variable. The Y dependence characterizes the Finslerian field and when it is combined with the concept of the anisotropy, it causes a deviation from the Riemannian geometry. A Finsler structure $F(x, Y)$ of M is a function $F : T_M \rightarrow [0, \infty[$ with the properties of regularity, positive homogeneity with respect to Y and strong convexity where the Hessian $H_{\mu\nu} = \partial^2 F^2 / (2\partial Y^\mu \partial Y^\nu)$ is positive definite. To describe the dynamics, one has to introduce a Lagrangian L of Randers-type which has the form:

$$L = F(x, Y) = \sigma + U_\alpha Y^\alpha \quad (1)$$

such that

$$\sigma = (g_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu)^{1/2}, \quad U_\alpha(x) = \hat{K}_\alpha \Phi(x), \quad Y^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2)$$

Here $g_{\mu\nu}$ is the ordinary FRW metric, $\Phi(x)$ a scalar function of x and s is the proper time. It is important to mention that the information about the space-time is encoded into the components U_α or the vector \hat{K}_α . Since in general relativity, a weak vector field (e.g. a magnetic field) can be treated as a first order perturbation of the Riemann metric tensor, then under the weak field assumption, we can approximate the Finslerian metric as a perturbation of the FRW metric. Therefore, one can have an induced metric $\hat{g}_{\mu\nu}(x, Y)$ of this Finsler space (called osculating Riemannian metric) and can be directly calculated from the metric function F as [19],[20],[25]:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, Y) = H_{\mu\nu} = \frac{F}{\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{1}{4\sigma} (U_\mu Y_\nu + U_\nu Y_\mu) - \frac{U_\alpha Y^\alpha}{\sigma^3} Y_\mu Y_\nu + U_\mu U_\nu \quad (3)$$

It is to be noted that in the framework of the Finsler geometry, the four velocity vector Y^μ is treated as an independent variable. Once, we have the metric, one can define an osculating affine connection $A_{\lambda\mu}^\kappa$ such that:

$$A_{\lambda\mu}^\kappa(x) = (\hat{\Gamma}^{\kappa}_{\lambda\mu} - C^{\kappa}_{\rho\mu} G_{\lambda}^{\rho} - C^{\kappa}_{\lambda\rho} G_{\mu}^{\rho} + \frac{F}{\sigma} g^{\kappa\sigma} C_{\lambda\mu\rho} G_{\sigma}^{\rho})(x, Y(x)) \quad (4)$$

where

$$G_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial G^{\mu}}{\partial Y^{\nu}}, \quad G^{\mu} = \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} Y^{\rho} Y^{\sigma} \quad (5)$$

with

$$\hat{\Gamma}^i_{kj}(x, Y(x)) = \frac{1}{2} \hat{g}^{ir} (\partial_k \hat{g}_{rj} + \partial_j \hat{g}_{rk} - \partial_r \hat{g}_{jk}) \quad (6)$$

and

$$C_{\mu\nu\lambda}(x, Y(x)) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma} S_{(\mu\nu\lambda)}(g_{\mu\nu} U_{\lambda}) - \frac{1}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(Y_{\mu} Y_{\nu} U_{\lambda}) - \frac{\beta}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(g_{\mu\nu} Y_{\lambda}) \right] \quad (7)$$

Here $C_{\mu\nu\lambda}$ represents the Cartan torsion tensor ($C_{\mu\nu\lambda} = 0$ for a Riemannian space) and $S_{(\mu\nu\lambda)}$ denotes the symmetrization with respect to μ , ν and λ respectively. Similarly, one can define the curvatures \hat{R} and $\hat{R}_{\mu\nu}^\alpha$ such that:

$$\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}, \quad \hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\alpha\nu}^\alpha \quad (8)$$

where

$$\hat{R}_{\lambda\mu\nu}^\alpha = \partial_{\mu} A_{\lambda\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} A_{\lambda\mu}^{\alpha} + A_{\nu\lambda}^{\rho} A_{\rho\mu}^{\alpha} - A_{\lambda\mu}^{\rho} A_{\rho\nu}^{\alpha} \quad (9)$$

F(R) THEORIES

Finsler F(R) Gravity in Palatini Formalism

The Lagrangian has the form:

$$S = \int d^4 x \sqrt{\hat{g}} [F(\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu}, A_{\mu\nu}^{\alpha})) + L_m] \quad (10)$$

where L_m is the matter Lagrangian density. Now, if we take a flat space with $F(\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu}, A_{\mu\nu}^\alpha)) = \hat{R}^n$ and a perfect fluid with an equation of state of the form $P = w\rho$, straightforward calculations using the Einstein's field equations give the following exact expressions of the energy density ρ and the Hubble parameter H :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \exp \left[- \left(1 + \frac{3}{2} w \right) \frac{\mu}{H_0} x \right] \quad (11)$$

and

$$H = \frac{1}{1+\beta} \left\{ - (1+\beta)\delta + \frac{3}{8}\mu \pm \left[\gamma - \delta^2 + \left(\delta - \frac{3}{8} \frac{\mu}{1+\beta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (12)$$

where $x = H_0(t - t_0)$ (H_0 is the Hubble parameter at the present time t_0) $a(t)$ the scale factor, μ the Finsler anisotropy parameter and β, γ and δ are some functions of n and \hat{R} . To be more specific and to keep our results more transparent, let us take the dust matter case where $w = 0$. Then, it is easy to show that :

$$\rho = (n-2)\hat{R}^n, \quad \beta = -\frac{3}{2} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}, \quad \delta = -\frac{1}{2} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \mu, \quad \gamma = \frac{(n-3)}{6n} \hat{R} \quad (13)$$

where

$$\hat{R} = \left(\frac{\rho_0}{(n-2)} \right)^{1/n} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3/n} \exp \left[- \frac{\mu}{H_0} x \right] \quad (14)$$

As a special case, if $(1+\beta)\delta = 3\mu/8$, on gets $n \approx -0.32$ and the following analytical solutions of the scale factor $a(t)$ in terms of the time t and the Hubble parameter as a function of the redshift z :

$$a(t)/a_0 \approx \left[-3 \left(\frac{H_0}{\mu} \right) \left[\exp \left(\frac{\mu}{0.64 H_0} x \right) - 1 \right] + 1 \right]^{-0.21} \quad (15)$$

$$H(z)/H_0 \approx \frac{1 + 3 \frac{\mu}{H_0} \left[1 - (1+z)^{4.76} \right]}{(1+z)^{2.38}} \quad (16)$$

Figure 1-a (resp. figure 1-b) displays the scaled Hubble parameter as a function of the redshift (ratio μ / H_0) for a fixed value of $\mu / H_0 = -0.01$ ($z = 2$).

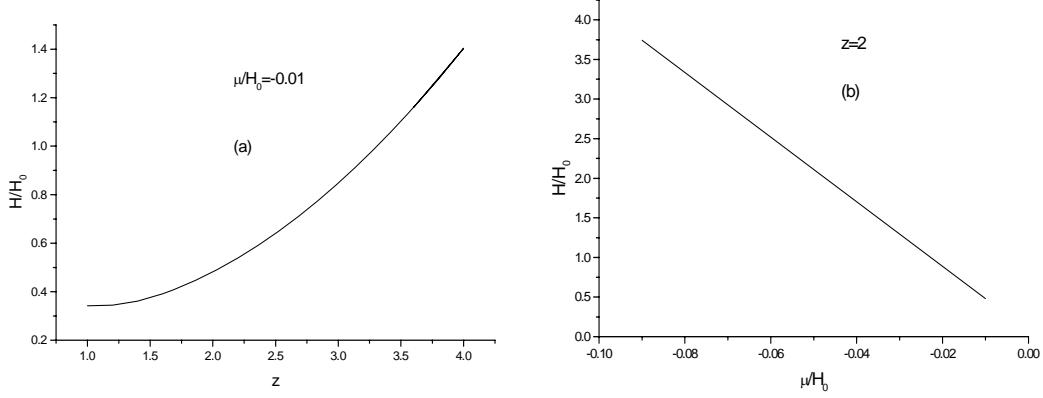


FIGURE 1. Scaled Hubble parameter as a function of the : (a) redshift.(b) scaled anisotropy parameter.

Finsler Metric $F(\mathbf{R})$ Theory

The pure gravitational Lagrangian has the form:

$$S = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} F(\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu})) + L_m \quad (17)$$

If we consider a flat space with an equation of state of a perfect fluid with $w = 0$ and $F(\hat{R}(\hat{g}_{\mu\nu})) = \hat{R}^n$ as in the previous case as well as a power law formula for the scale factor $a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha$ then one gets the following analytical expression:

$$\hat{R} / H_0^2 = -\frac{3}{2}\alpha \left[7 \frac{\mu}{H_0 x} + \frac{1}{x^2} \left[(8 - 7 \frac{\mu}{H_0} x)\alpha - (4 - 3 \frac{\mu}{H_0} x) \right] \right] \quad (18)$$

where $x = H_0 t$. Now, the compatibility of the field equations solutions leads to $\alpha = 0$ (resp. $\alpha = 1/2 \forall n$) leading to a static (resp. decelerated) universe or a system of two non linear equations:

$$n\alpha(3\alpha - 2) + (n - 1)[3\alpha(2\alpha - 1) + 2n(3 - 2\alpha) + 4n(n - 2)] = 0 \quad (19)$$

$$12(n - 1)(2\alpha - 1)(2\alpha - 1) \left(-\frac{15}{4}\alpha^2 + \frac{33}{2}\alpha + 2n(2n - 2\alpha - 1) + 3(10 - 7\alpha)(6n - 3n\alpha - 4) \right) - n(-14\alpha^2 + 37\alpha - 15) = 0$$

which has as solutions: $(\alpha = 0.5, n = 1.25)$, $(\alpha = 0.5, n = 0.75)$ and $(\alpha = -0.019, n = 0.98)$, $(\alpha = 1.206, n = 0.564)$ leading to a decelerated and accelerated universes respectively.

Dynamical Study

To test the viability of the theory, the study of stabilities and instabilities provide additional informations about the solutions even if we cannot find the exact ones, and improve our understanding of the theory. For this, we apply the dynamical system approach and study phase portrait and some of the critical points. We take as dynamical variables $x = \dot{R}(n-1)/RH$, $y = -R(n-1)/(6nH^2)$, $z = K/a^2H^2$, $v = \mu/H$. The Einstein's field equations together with the constraint $1+z+v+x-y=0$ lead to the following autonomous set of non linear differential equations:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{2}v + \left[\frac{-y}{n-1} - x + \frac{3}{4}v \right] (x+2) + 2y - x^2 \\ y' &= y \left[\frac{(3-2n)}{n-1}x - \frac{2y}{n-1} + \frac{3}{2}v + 2 \right] \end{aligned}$$

and

$$v' = v \left[1 - x + \frac{3}{4}v - \frac{1}{n-1}y \right] \quad (20)$$

The theoretical analysis shows that we have seven critical points of the form $M_j(x_j, y_j, v_j)$ $j = \overline{1,7}$, where:

$$x_1 = -2,7, y_1 = 0, v_1 = -4.9, \quad x_2 = 0.7, y_2 = 0, v_2 = -0.3,$$

$$x_3 = -0.7, y_3 = 0, v_3 = 0, \quad x_4 = 0.7, y_4 = 0, v_4 = 0, \quad x_7 = \Omega^+, y_7 = \Sigma^+, v_7 = 0$$

$$x_5 = 0, y_5 = (n-1)/(2-n), v_5 = 4(n-1)/[3(2-n)], \quad x_6 = \Omega^-, y_6 = \Sigma^-, v_6 = 0 \quad (21-a)$$

with

$$\Sigma^\mp = \{2(n-1) + [A \mp 2(3-2n)B]/(2n-1)\}/2, \quad \Omega^\mp = (C \mp B)/[2(2n-1)],$$

$$A = 4n^3 - 16n^2 + 22n - 10.5, \quad B = \sqrt{(1.185 - 2.152n + n^2)(1.740 - 0.847n + n^2)}$$

and

$$C = -4n^2 + 10n - 7 \quad (21-b)$$

The corresponding stability matrices S_{M_i} are:

$$\begin{aligned}
S_{M_1} &\approx \begin{bmatrix} 7.196 & \frac{2n-0.268}{n-1} & -2.799 \\ 0 & \frac{-8.19}{n-1} & 0 \\ 4.976 & \frac{4.976}{n-1} & -3.732 \end{bmatrix}, & S_{M_2} &\approx \begin{bmatrix} -3.196 & \frac{2n-3.732}{n-1} & -0.2 \\ 0 & \frac{2.196}{n-1} & 0 \\ 0.357 & \frac{0.357}{n-1} & -0.267 \end{bmatrix} \\
S_{M_3} &\approx \begin{bmatrix} 2.828 & \frac{2n-2.292}{n-1} & -1.28 \\ 0 & \frac{2n-4.121}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1.707 \end{bmatrix}, & S_{M_4} &\approx \begin{bmatrix} -2.828 & \frac{2n-3.707}{n-1} & -0.219 \\ 0 & \frac{2n-0.121}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0.292 \end{bmatrix} \quad (22) \\
S_{M_5} &\approx \begin{bmatrix} \frac{n}{2-n} & \frac{2n-3}{n-1} & \frac{-3}{4} \\ \frac{3-2n}{3-2n} & \frac{2}{2} & \frac{3(n-1)}{3(n-1)} \\ \frac{2-n}{4(1-n)} & \frac{2-n}{4} & \frac{2-n}{n-1} \\ \frac{3(2-n)}{3(2-n)} & \frac{2-n}{2-n} & \frac{2-n}{2-n} \end{bmatrix}, & S_{M_6} &\approx \begin{bmatrix} \delta_{11}^+ & \delta_{12}^+ & \delta_{13}^+ \\ \delta_{21}^+ & \delta_{22}^+ & \delta_{23}^+ \\ \delta_{31}^+ & \delta_{32}^+ & \delta_{33}^+ \end{bmatrix}, & S_{M_7} &\approx \begin{bmatrix} \delta_{11}^- & \delta_{12}^- & \delta_{13}^- \\ \delta_{21}^- & \delta_{22}^- & \delta_{23}^- \\ \delta_{31}^- & \delta_{32}^- & \delta_{33}^- \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Where

$$\begin{aligned}
\delta_{11}^\pm &= \frac{2(6n-5)B-4(n-1)C-A+2(n-1)(1-2n)}{2(2n-1)(n-1)}, & \delta_{12}^\pm &= \frac{8(n-1)^2(C-4B)}{2(2n-1)(n-1)}, \\
\delta_{13}^\pm &= \frac{3[-2(2n-1)-(C-4B)]}{4(2n-1)}, & \delta_{21}^\pm &= \frac{(3-2n)}{2(n-1)(1-2n)}[-2(1-2n)-A+2(3-2n)B], \\
\delta_{31}^\pm &= \delta_{32}^\pm = 0, & \delta_{22}^\pm &= \frac{4(n-1)+4A+(3-2n)C-12(3-2n)B}{2(n-1)(2n-1)}, \quad (23) \\
\delta_{23}^\pm &= \frac{3[2(n-1)(1-2n)+A-2(3-2n)B]}{2n-1}, & \delta_{33}^\pm &= \frac{4(n-1)(1-2n)-(n-1)C+2B-A}{2(n-1)(2n-1)}
\end{aligned}$$

Figure 2 displays the phase portrait diagrams in the (x, y) plane for $v = 0$ and (a) $n = -2$, (b) $n = 2$. Notice that in the interval $[-4, +4]$ of x , in addition to the saddle points, we have one stable nodal sink and one unstable nodal source critical points. Similar behavior in figure 3 but with a phase portrait in the (x, v) plane for (a) $y = 0$, $n = -2$, $x \in [-4, +4]$ (b) $y = (-4 + 6x - 3v)/4$, $n = 2$, $x \in [-1, +1]$. Figure 4 shows the (x, y) phase portrait space with a saddle node point and a separatrix of equation $y = 0$ (more studies are under investigation).

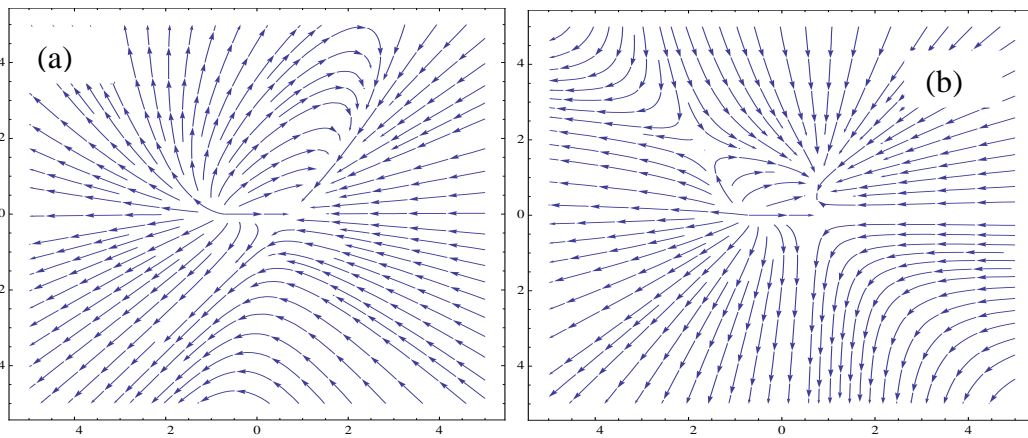


FIGURE 2. Phase portrait in the (x, y) plane for $\nu = 0$ and (a) $n = -2$, (b) $n = 2$

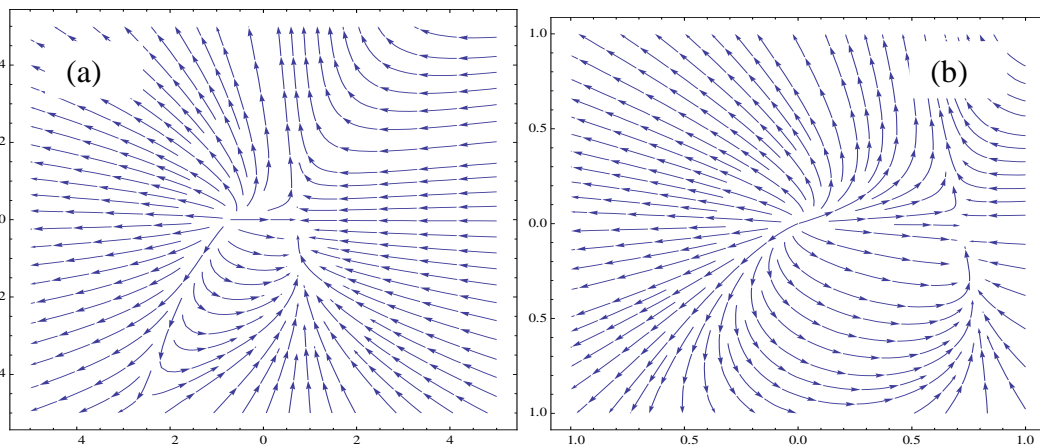


FIGURE 3. Phase portrait in the (x, ν) plane for (a) $y = 0$, $n = -2$ (b) $y = (-4 + 6x - 3\nu)/4$, $n = 2$

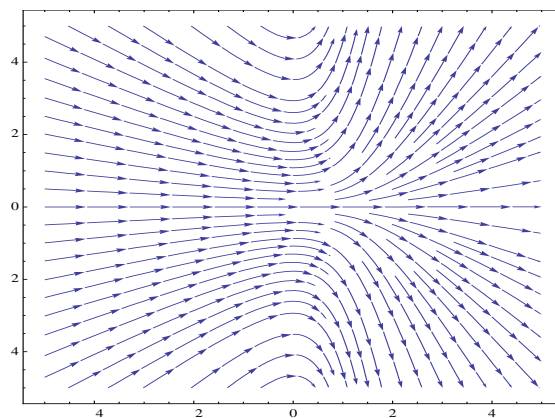


FIGURE 4. Phase portrait in the (x, y) plane for $\nu = 4(-1 + x + y)/3$

CONCLUSION

From our a qualitative study, we conclude that as a first step towards an understanding of the geometry effect on the cosmology dynamics and testing the possibility to get more realistic and viable models, we have considered in a flat Finsler space and dust matter case an $F(\hat{R})$ theory : First, by using Palatini formalism we have obtained exact time dependence relation of the scale factor and the Hubble parameter as a function of the redshift which will allow the determination of the distance luminosity D_L and comparison with existing data.. Second, for the metric $F(\hat{R})$ theory, we have taken a power law formula for the scale factor $a(t)$, then we have shown that the compatibility of the obtained solutions constraints the various parameters. Finally, to have a better understanding of the solutions and general behaviors (stabilities, instabilities etc...) of an $F(\hat{R})$ theory in a Finsler geometry, a dynamical study was made and the critical points are determined and represented in phase portraits diagrams for some specific values of n and various projections.

ACKNOWLEDGMENTS

We are very grateful to the Algerian Ministry of higher education and research for the financial support and one of us (N.M.) would like to thank the ICTP, third world academy of science (TWAS) and UNESCO for the associateship award.

REFERENCES

1. N. Mebarki, "Dark Dynamical Cosmology in a Noncommutative Geometry" in *4th International Workshop on the Dark Side of the Universe*, edited by S.Khalil, AIP Conference Proceedings 1115, American Institute of Physics, Cairo, Egypt, 2008, pp. 248-253.
2. N. Mebarki and F. Khelili, *Electron.J.Theor.Phys.* **5**, 65-68 (2008).
3. N. Mebarki, S. Zaim, L. Khodja and H.Aissaoui, *Phys.Scripta* **78**, 045101 (2008).
4. F. Khelili, J. Mimouni and N. Mebarki,, *J.Math.Phys.* **42**, 3615-3627 (2007).
5. N. Mebarki, F. Khelili, S.Kalli and M.Haouchine *Chin.J.Phys.* **44**, 180-188 (2008).
6. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451-497 (2010).
7. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115-146 (2007).
8. L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev.D* **75**, 083504 (2007).
9. N.J. Poplawski, *Phys. Rev. D* **74**, 084032 (2006).
10. G. F. Smoot, *NuovoCim. B* **122**, 1339-1351 (2007).
11. T. Sounadeep, R. Saha and P. Jain, *New Astron. Rev.* **50**, 854-860 (2006).
12. C. L. Bennett et al. , *Astrophys. Jour.* **583**, 1-23 (2003).
13. G. F. Ellis, C. Hellaby and D. R. Matravers, *Astrphys. Jour.* **364**, 400-404 (1990).
14. R. Bielewicz et al. , *Astrophys. Jour.* **653**, 750-760 (2005).
15. C. J. Copi et al. , *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **367**, 79-102 (2005).
16. D. R. Matravers and C. G. Tsagas, *Phys. Rev. D* **62**, 103519 (2000).
17. C. G. Tsagas and R. Maartens, *Phys. Rev. D* **61**, 083519 (2000). .
18. E. Ellis and R. Maartens, *Class. Quant. Grav.* **21**, 223-232 (2004).
19. P. C. Stavrinos and A.P. Kouretsis, *J. Phys. Conf. Ser.* **68**:012023 (2007).
20. P. C. Stavrinos, *Int. Jour. Theor. Phys.* **44**, 245-254 (2005).
21. R. G. Beil, *Int. Jour. Theor. Phys.* **26**, 189-197 (1987).
22. G. W. Gibbons, J. Gimis and C. N. Pope, *Phys. Rev. D* **76**, 081701 (2007).
23. A. P. Kouretsis, M. Stathakopoulos and P. C. Stavrinos, *Phys. Rev. D* **79**, 104011 (2009).

24. Z. Chang and X. Li, *Phys. Lett. B* **676**, 173-176 (2009).
25. P. C. Stavrinos, A. P. Kourelsis and M. Stathakopoulos, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 1403-1425 (2008).

RESUME

Dans ce mémoire, nous avons étudié deux modèles différents du phénomène de l'expansion accélérée de l'univers. Dans le premier modèle, on a considéré que la géométrie est responsable de cette expansion accélérée de l'univers sans introduire l'énergie noire. Ce modèle est celui de la théorie $f(R)$ dans le cadre de la géométrie de Finsler. Le deuxième modèle consiste à introduire le fluide de Chaplygin. Ce genre de matière a des propriétés un peu étranges telles qu'une pression négative qui peut être une signature de l'énergie noire. Cette énergie n'interagit pas avec la matière ordinaire mais agit sur la gravitation. En plus, il ne faut pas oublier que cette étude est basée sur une géométrie non Riemannienne qui est la géométrie de Finsler qui est une généralisation de la géométrie de l'espace-temps. L'interprétation de ces modèles représente des solutions cosmologiques proposées viables et la stabilité au voisinage des points critiques dans l'étude dynamique.

Mots clés :

Cosmologie, Fluide de Chaplygin, Géométrie de Finsler.

ABSTRACT

In this thesis, we have studied two different models of the accelerated expansion of the universe phenomenon. In the first model, we have found that the geometry is responsible for this accelerated expansion of the universe without introducing a dark energy. This model is the $f(R)$ theory in the context of Finsler geometry. The second model consists of introducing a Chaplygin fluid. This kind of matter has somewhat strange properties such that a negative pressure which may be a signature of dark energy. This energy does not interact with ordinary matter, but acts on gravitation. In addition, we must not forget that this study is based on a non-Riemannian geometry which is the Finsler geometry considered as a generalization of the space-time geometry. The interpretation of these cosmological models suggests viable solutions and stability near the vicinity of some critical points in the dynamical study.

Key Words:

Cosmology, Chaplygin gas, Finsler geometry.

المخلص

في هذا البحث قد قمنا بدراسة نموذجيين مختلفين لظاهرة تسارع توسع الكون. ففي النموذج الأول نعتبر الهندسة هي المسؤولة عن هذا التأثير لتسارع التوسع الكوني وذلك دون إشراك الطاقة المظلمة و يعرف هذا النموذج باسم نظرية- $f(R)$ $f(R)$ -Theory والموصوفة في إطار هندسة فينسلر (*Geometry of Finsler*). أما النموذج الثاني فهو في حالة وجود مادة من نوع خاص مسؤولة عن توسع الكون، فباختيار المائع شابلجين يمكن لنا وصف هذه المادة. فهذا المائع يملك خصائص غريبة عن ما عُرف عن الضغط سابقا حيث يمكن أن يكون له قيمة سالبة ($-P$) بل في الحقيقة هو يمثل إمضاء و قرينة لوجود المادة الظلماء (*Dark-Energy*). هذه الطاقة لا تتأثر مع المادة المعروفة و لكن تتفاعل مع الجاذبية! ... بإضافة إلي ذلك، لا يمكننا أن ننسى أن كل هذه الدراسات قائمة على الهندسة اللا ريمانية ألا وهي هندسة فينسلر، فهي تعميم لها في الفضاء الزمكان، فتفسير هذه النماذج يمثل نوع من الحلول الكونية المقترحة والتي تعتمد على الواقعية و الحلول المستقرة في جوار النقاط الحرجة في الدراسة الديناميكية.

الكلمات الدالة:

علم الكون، مائع شابلجين، هندسة فينسلر.