

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR*

*ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

**UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE**

**FACULTE DES SCIENCES EXACTES**

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre:

Série:

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Physique

Spécialité: **physique énergétique**

Option : **photothermique**

**THEME**

*Influence de la conduction pariétale sur les transferts thermiques conjugués dans un conduit horizontal*

PAR

*Chahboub Kamel*

Soutenu le : ..../..../2011

**Devant le jury :**

<b>Président :</b>	L. BAHY	Prof.	Université Mentouri - Constantine
<b>Rapporteur :</b>	T. BOUFENDI	M.C.A	Université Mentouri - Constantine
<b>Examineurs:</b>	N. ATTAF	Prof.	Université Mentouri - Constantine
	A. MOKHNACHE	M.C.A	Université Mentouri - Constantine

## **REMERCIEMENTS**

*Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur T. BOUFENDI, Maître de Conférences à l'université Mentouri Constantine pour avoir assuré la direction de ce travail. J'ai eu la chance de bénéficier de son encadrement enrichissant et de ses compétences.*

*Je remercie également Monsieur L. BAHY, Professeur à l'université Mentouri Constantine qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.*

*Monsieur N. ATTAF, Professeur à l'université Mentouri Constantine, et Monsieur A. MOKHNACHE, Maître de Conférence à l'université Mentouri Constantine, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes meilleurs remerciements.*

*Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

**SOMMAIRE**

*REMERCIEMENTS*

*NOMENCLATURE*

*INTRODUCTION GENERALE* .....1

**CHAPITRE 1 : Etude Bibliographique**

Etude bibliographique .....4

**CHAPITRE 2 : Modélisation Mathématique**

2.1 Introduction .....20

2.2 Géométrie du modèle .....20

2.3 Equations de conservation .....21

2.4 Les conditions aux limites .....23

2.5 Le nombre de Nusselt .....26

2.6 Matériel utilise dans la simulation .....27

**CHAPITRE 3 : Résolution Numérique**

3.1 Introduction.....28

3.2 Le maillage.....28

3.3 Discrétisation des équations du modèle.....30

3.4 Définition .....31

    3.4.1 La discrétisation temporelle du second ordre.....31

    3.4.2 La discrétisation spatiale du second ordre.....32

3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale .....33

3.6 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement azimutale.....44

3.7 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement axiale .....53

3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie .....59

## *Sommaire*

---

3.9	Discrétisation de l'équation de la continuité .....	65
3.10	Discrétisation des conditions aux limites .....	65
3.10.1	A l'entrée du conduit .....	65
3.10.2	A la sortie du conduit .....	66
3.10.3	A la paroi .....	68
3.10.4	sur l'axe du conduit .....	68
3.11	Equation de la pression et de correction de la pression .....	71
3.12	Algorithme de calcul SIMPLER .....	75
3.13	Technique numérique de résolution d'un système d'équation de Discrétisation .....	76
3.14	Validation du code de calcul .....	76

### **CHAPITRE 4 : Résultats Et Discussion**

4.1	Introduction .....	78
4.2	L'écoulement secondaire .....	79
4.3	L'écoulement axial .....	83
4.4	Le champ des températures .....	86
4.5	Le nombre de Nusselt .....	90

### **CHAPITRE 5 : Conclusion Générale**

Conclusion générale .....	93
---------------------------	----

<i>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE</i> .....	95
---	----

*ABSTRACT*

*RESUME EN ARABE*

*RESUME EN FRANÇAIS*

***NOMENCLATURE***

A	coefficient de l'équation de discrétisation
$b^*$	terme de source adimensionnelle
D	diamètre du conduit [m]
g	accélération de la pesanteur [m/s <sup>2</sup> ]
G	source de chaleur volumique [W/m <sup>3</sup> ]
Gr	nombre de Grashof défini par $(g\beta G D^5 / K_s v^2)$
$h_{co}$	coefficient de transfert convectif (conduit-air ambiant) [W/m <sup>2</sup> K]
$h_{ra}$	coefficient de transfert radiatif (conduit-air ambiant) [W/m <sup>2</sup> K]
K	conductivité thermique du fluide [W/m K]
$K^*$	conductivité thermique du fluide adimensionnelle (K/K <sub>0</sub> )
$K_s^*$	conductivité thermique du solide adimensionnelle (K <sub>s</sub> /K <sub>0</sub> )
L	longueur du conduit [m]
$Nu(\theta, z^*)$	nombre de Nusselt local $(h(\theta, z)D/K_0)$
$Nu(z^*)$	nombre de Nusselt local axial $(h(z)D/K_0)$
P	pression [Pa]
$P^*$	pression adimensionnelle $((P - P_0)/(\rho_0 V_0^2))$
Pr	nombre de Prandtl $(\nu/\alpha)$
q	densité de flux de chaleur [W/m <sup>2</sup> ]

## ***NOMENCLATURE***

---

$r$	coordonnée radiale [m]
$r^*$	coordonnée radiale adimensionnelle ( $r/D_i$ )
$R$	rayon du conduit [m]
$Ra$	nombre de Rayleigh ( $g \beta [T(R_0, \theta, z) - T_\infty] D_0^3 / \alpha_{\text{air}} \nu_{\text{air}}$ )
$Re$	nombre de Reynolds
$S$	terme de source
$t$	temps [s]
$t^*$	temps adimensionnel ( $V_0 t / D_i$ )
$T$	température [ $^{\circ}\text{K}$ ]
$T^*$	température adimensionnel $(T - T_0) / (G D_i^2 / K_s)$
$T_b$	température moyenne de mélange [ $^{\circ}\text{K}$ ]
$T_b^*$	température moyenne adimensionnelle $(T_b - T_0) / (G D_i^2 / K_s)$
$V_0$	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit [m/s]
$V_r$	composante radiale de la vitesse [m/s]
$V_r^*$	composante radiale de la vitesse adimensionnelle ( $V_r / V_0$ )
$V_\theta$	composante azimutale de la vitesse [m/s]
$V_\theta^*$	composante azimutale de la vitesse adimensionnelle ( $V_\theta / V_0$ )
$V_z$	composante axiale de la vitesse [m/s]
$V_z^*$	composante axiale de la vitesse adimensionnelle ( $V_z / V_0$ )
$Z$	coordonnée axiale [m]

## ***NOMENCLATURE***

---

$Z^*$  coordonnée axiale adimensionnelle ( $z/D_i$ )

### **Symboles grecs**

$\alpha$  diffusivité thermique [ $m^2/s$ ]

$\beta$  coefficient volumique d'expansion thermique du fluide ( $K^{-1}$ )

$\Gamma$  coefficient de diffusion

$\nu$  viscosité cinématique ( $m^2.s^{-1}$ )

$\rho$  masse volumique du fluide ( $Kg.m^{-3}$ )

$\tau$  tenseur des contraintes visqueuses [ $N/m$ ]

$\tau^*$  tenseur des contraintes visqueuses adimensionnelle

$\mu$  viscosité dynamique [ $Kg.m/s$ ]

$\mu^*$  viscosité dynamique adimensionnelle ( $\mu/\mu_0$ )

$\theta$  coordonnée angulaire [rad]

$\varphi$  variable dépendante généralisée

### **Indices**

C relatif à la position de la face d'un volume fini typique

d désigne la paroi du conduit

i, o fait références aux surfaces interne et externe du conduit respectivement

m moyen

p fait référence au nœud P d'un volume fini typique

## *NOMENCLATURE*

---

n, s, e, w, t, b	fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E, W, T, B	fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
n, b	désigne les nœuds voisins à P
r, $\theta$ , z	référence aux directions radiale, tangentielle et axiale respectivement
$\infty$	fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	entrée du conduit

### **Exposants**

*	variable adimensionnelle
t	désigne l'instant t
t + $\Delta t$	désigne l'instant t + $\Delta t$
t - $\Delta t$	désigne l'instant t - $\Delta t$



# Introduction Générale

## 1.1 Rappel du mécanisme de la convection mixte

D'une manière générale, on appelle convection les mouvements de circulation présents au sein d'un fluide. Lorsque ces mouvements sont occasionnés par des forces internes aux fluides on parle de convection naturelle. Ces forces sont les plus souvent les forces de la poussée d'Archimède associée à la gravité. Les sources dominantes des mouvements convectifs sont alors issues de la thermo dépendance de certaines propriétés physiques du fluide (la masse volumique, la tension superficielle, la concentration des espèces...).

Souvent, la convection naturelle coexiste avec la convection forcée. Dans le cas de la convection forcée, le mouvement du fluide est induit par une source externe : une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide par exemple. Quand les mouvements ont pour origine à la fois des sources internes et externes, on parle de convection mixte. Nous pouvons citer comme exemples les écoulements lents dans les canalisations (comme dans les radiateurs à eau), les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumées), les écoulements atmosphériques et les courants marins. Un autre aspect apparaît, c'est-à-dire les deux mécanismes peuvent aller dans le même sens comme ils peuvent s'opposer selon la direction relative du mouvement forcée par rapport au mouvement gravitaire. Le transfert peut être fortement influencé par cet aspect. Ainsi, si l'effet de la pesanteur s'oppose au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique est diminué et dans ce cas la convection mixte est dite contrariée. Pour le cas contraire, on parlerait de convection mixte aidée. Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur et dans ce cas les échanges de chaleur sont améliorés. La convection mixte dans un canal horizontal correspond à la superposition d'un écoulement forcé (écoulement principale associé à une vitesse axiale du fluide) et à la convection naturelle transverse (appelée écoulement secondaire associé à des composantes transverse de la vitesse dans une section droite de la conduite). Ainsi, dans l'étude de cette convection mixte, des termes moteurs vont être apparus tel que le terme  $g\beta\Delta T$  qui traduit la mise en mouvement du fluide sous l'action de la gravité.

Dans notre étude, l'écoulement considéré à l'entrée de la conduite sera de type laminaire et hydrodynamiquement développé. Pour cela, nous rappelons que dans un conduit cylindrique, le régime laminaire est géré par les forces de cisaillement entre filets fluide

induisant, selon une section droite, un profil de vitesse de forme parabolique. L'écoulement est caractérisé ainsi par le nombre adimensionnel de Reynolds ( $Re$ ). Ce profil de vitesse peut être modifié dès que des gradients de température sont imposés selon une section. La convection à l'intérieur des conduites intervient dans plusieurs applications pratiques telles que les capteurs solaires, les échangeurs de chaleurs, le refroidissement des composantes électroniques et des procédés chimique et nucléaires.

### **1.2 Objectifs et organisation de ce mémoire**

Ce travail s'inscrit dans la continuité de l'étude menée par Boufendi et Afrid [1.2] au laboratoire de physique énergétique de l'université Mentouri Constantine. Cette étude concerne une simulation numérique tridimensionnelle et transitoire d'une convection mixte au sein d'un fluide newtonien (eau distillée), en écoulement laminaire, dans un conduit cylindrique dont l'épaisseur de sa paroi est le siège d'un chauffage uniforme par effet joule et par conséquent d'une conduction thermique de la chaleur à travers toute l'épaisseur solide. La conjugaison des deux modes de transfert thermique qui sont la convection mixte dans le fluide et la conduction dans le solide font qu'il s'agit d'un problème de transfert thermique conjuguée nécessitant un traitement simultané. Dans ce problème le fluide est caractérisé par des propriétés physiques variables et la prise en compte des pertes thermiques de nature radiatives et convectives vers le milieu ambiant.

Ainsi, dans un souci d'une ample compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et leur interaction simultanée, ce travail consiste en une simulation numérique du modèle conjugué, mais cette fois pour différents matériaux. Nous avons choisi pour diverses raisons de nature physiques les matériaux suivants : l'Inconel, le Tantale, l'Acier, et l'Aluminium. Notre mémoire est scindé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la compréhension du mécanisme de transfert thermique conjuguée- la convection mixte dans le fluide combinée à la conduction dans le solide- dans une conduite cylindrique et à la présentation d'une synthèse d'étude bibliographique récente apportée sur ce sujet.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du modèle physique considéré. Ensuite, écrites sous leurs formes adimensionnelles, les équations modélisantes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et leurs conditions aux limites spatiotemporelles appropriées sont présentées sous une forme conservative. Dans ces

équations, la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide sont thermodépendantes.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode numérique utilisée qui est celle des volumes finis, le maillage dans sa globalité ainsi que dans des espaces de projection sera présenté. Puis, tous les termes obtenus dans les équations modélisantes seront discrétisés un par un jusqu'à l'obtention finale des équations algébriques linéarisées pour toutes les variables dépendantes de ce problème. Enfin, les algorithmes de calcul utilisés, tels l'algorithme SIMPLER et l'algorithme de Thomas, seront présentés.

Nous rassemblons dans le quatrième chapitre les principaux résultats numériques de cette étude. Ces résultats porteront sur les variations polaires et les variations axiales des champs dynamiques et thermiques des composantes de vitesse et de température dans les milieux fluide et solide. La quantification du transfert thermique sera obtenue à l'aide de la détermination des nombres de Nusselt local et moyen le long du conduit. Les comparaisons et les interprétations des divers résultats seront présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

# Chapitre 1

## Etude bibliographique

Les écoulements de fluide combinés aux transferts thermiques dans les conduits cylindriques ont fait l'objet de très nombreuses investigations théoriques, numériques et expérimentales. Une large part de ces études s'intéressent aux problèmes liés aux diverses conditions aux limites en particulier celles relatives à une température pariétale imposée ou à un flux de chaleur pariétal imposé ainsi qu'aux problèmes liés à l'influence de la conduction thermique qui existe dans le milieu solide sur la convection mixte qui se développe dans le fluide et par conséquent sur les transferts thermiques à l'interface paroi-fluide. Parmi cette synthèse nous nous sommes limités à la géométrie cylindrique avec une épaisseur finie en faisant ressortir les effets de la conductivité thermique du matériau solide.

**Boufendi et Afrid [1]** ont fait une simulation numérique tridimensionnelle sur la convection forcée et la convection mixte dans un conduit horizontal par la méthode des volumes finis. Un long conduit ayant un ratio d'aspect  $A = 100$  est uniformément chauffé par un flux de chaleur constant, Figure 1. A l'entrée se présente un écoulement d'un fluide Newtonien (eau distillée) de Poiseuille et une température constante. A la sortie le conduit est considéré de grande longueur de telle sorte que le gradient de vitesse nulle et que le flux de chaleur axial est constant donc la dérivée seconde de la température est nulle. Les propriétés physiques du fluide sont supposés constantes. Les paramètres de contrôles fixes dans cette étude sont le nombre de Prandtl ( $Pr=3,02$ ) et le nombre de Reynolds ( $Re =1000$ ). Trois nombres de Grashof ou de Richardson sont considérés :  $Gr^*=0$  ( $Ri=0$ ) correspondant à une convection forcée et  $Gr^*=10^6$  ( $Ri=1$ ) et  $Gr^*=10^7$  ( $Ri=10$ ) correspondant à l'effet accru de la convection mixte. Le développement l'écoulement secondaire augmente le transfert thermique convectif. Le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) local axial diminue le long de la zone d'entrée puis, à l'aval du conduit, il subit une croissance en se détachant du  $Nu$  correspondant à celui de la convection forcée cette croissance est d'autant plus importante pour des nombres de Grashof ou de Richardson élevés.

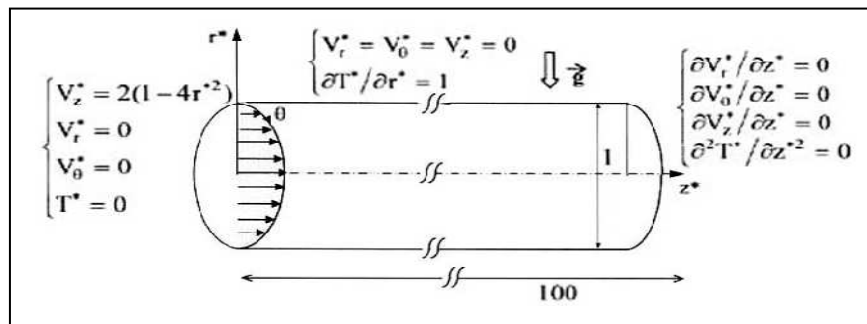


Figure 1. Géométrie et conditions aux limites

Dans un autre travail, **Boufendi et Afrid [2]** ont traité une simulation numérique du transfert de chaleur et de dynamique des fluides (eau distillée) dans un conduit horizontal de d'épaisseur finie. Le conduit en Inconel d'une longueur ( $L=1\text{m}$ ), d'un diamètre intérieur ( $D_i=0,96\text{cm}$ ) et un diamètre externe ( $D_o=1\text{cm}$ ) possède une conductivité thermique égal a  $K_s=15\text{W/m}^\circ\text{K}$ , Figure 2. La génération interne de la chaleur uniformément produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi est égale à  $410^7\text{W/m}^3$  sert à chauffer un fluide Newtonien et incompressible en écoulement laminaire. A l'entrée le fluide se présente avec un profil de Poiseuille de vitesse moyenne égale à  $1,7 \cdot 10^{-2}\text{m/s}$  et une température uniforme égale à  $15^\circ\text{C}$ . La viscosité du fluide et la conductivité thermique sont des fonctions connues de la température. La densité est une fonction linéaire de la température et l'approximation de Boussinesq est appliquée tandis que les pertes thermiques entre la surface extérieure du conduit et le milieu ambiant sont prises en compte. Les équations modélisantes de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie sont numériquement résolues par la méthode des volumes finis. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds ( $Re=142,17$ ) et un nombre de prandtl ( $Pr=8,082$ ) et un nombre de Graschof modifié: ( $Gr^*=10^5$ ). Ils montrent que les champs thermiques et dynamiques sont tridimensionnels, que la non-uniformité du flux thermique à l'interface paroi-fluide est significative et que le nombre de Nusselt moyen dans le tube augmente considérablement. Les résultats numériques de cette étude sont en bon accord avec les résultats expérimentaux publiés.

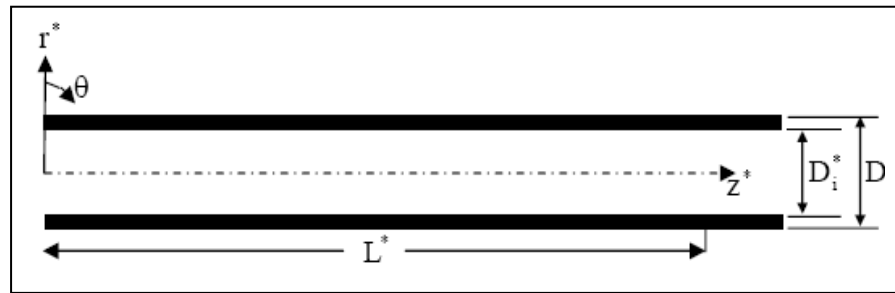


Figure 2. Géométrie et dimensions :  $D_i^* = 1$ ,  $D_o^* = 1.04$ ,  $L^* = 104.17$

**Boufendi [3]** a fait une étude numérique de la convection mixte tridimensionnelle sur un conduit cylindrique horizontale chauffé uniformément. Il a considéré deux modèles: un modèle de base définie par un conduit à épaisseur nulle et des propriétés du fluide constantes excepté la densité, et un modèle conjugué où on tient compte de l'épaisseur du conduit et la variation des propriétés du fluide avec la température. Les résultats numériques ont été obtenus avec un code à 3-D basé sur le schéma numérique d'ordre un et l'algorithme de SIMPLER.

**Petukhov et Polyakov [4]** ont présenté des résultats d'une étude expérimentale sur la convection mixte à l'intérieur d'un conduit horizontal et vertical soumis à un flux de chaleur uniforme. Les tubes utilisés sont en acier inoxydable, pour le tube horizontal le diamètre intérieur est de 8.84 mm, l'épaisseur est de 0.36 mm et la longueur du conduit est 99 fois le diamètre interne. Les résultats obtenus permis d'établir des corrélations empiriques donnant le nombre de Nusselt moyen en fonction de la distance axiale

$$\frac{N_{uz}}{N_{uas}} \left[ 1 + \left( \frac{R_a}{B} \right)^4 \right]^{0.045} \text{ tels que } \begin{cases} B = 5 \cdot 10^3 Z^{-1} \text{ pour } Z < 1.710^{-3} \\ B = 1.8 \cdot 10^4 Z^{-1} + 55Z^{-1.5} \text{ pour } Z > 1.710^{-3} \end{cases}$$

$N_{U_{as}}$  est le nombre de Nusselt moyen asymptotique pour un écoulement développé.

La précision de l'approximation de la correction est de 5%.

**Siegwarth et al. [5]** Ont publié un travail portant sur l'effet de l'écoulement secondaire sur le champ de température et le champ de vitesse primaire. Ils considèrent un long tube horizontal chauffé électriquement présentant une paroi épaisse de conductivité élevée tels que les nombres de Grashof et Prandtl sont élevés ( $Pr=70.7$  et  $(Gr.Pr)^{1/4} = 51.3$ ). Les groupes de dimension définissant le flux entièrement développé d'un fluide de viscosité

constante dans une conduite sont le nombre de Reynolds( $Re$ ), le nombre de Grashof( $Gr$ ), le nombre de Prandtl( $Pr$ ) le nombre de Nusselt( $Nu$ ) et le coefficient de frottement Fanning( $f$ ) où  $Re$ ,  $Gr$  et  $Nu$  utilisent le tube de rayon  $a$  et  $Gr$  utilise la différence de température ( $\Delta T$ ). L'effet du champ de température sur le débit dépend fortement de la valeur de  $Pr$  et par conséquent, deux conditions seront considérées, ( $Pr=1$ ) et ( $Pr=\infty$ ), pour lequel il existe près de la paroi une couche limite thermique mince. Pour le nombre de Prandtl  $Pr=1$ , l'écoulement primaire montre aussi un comportement de couche limite tandis que pour  $Pr \rightarrow \infty$  l'écoulement primaire est indépendant de l'écoulement secondaire. Ils ont trouvé aussi pour une viscosité constante et un nombre de Prandtl infini, le nombre de Nusselt est directement proportionnel à la racine quatrième du produit des nombres de Grashof et de Prandtl :  $Nu=C_1 (Gr \cdot Pr)^{1/4}$ . Les auteurs montrent que le coefficient  $C_1=0.471$  est calculé par les méthodes intégrales. Un bon accord est obtenu entre les calculs basés sur le modèle proposé et l'expérience.

**Bergles et Simonds [6]** ont fait une étude concernant les effets de la convection naturelle sur l'écoulement laminaire d'eau, dans des tubes horizontaux à section circulaire ayant un flux thermique pariétal constant. Ils ont fait une étude quantitative par visualisation à l'aide de tube

en verre chauffé électriquement. Ces mesures combinées avec d'autres résultats et corrélations ont montré l'influence de la convection naturelle sur le nombre de Nusselt.

**Morcos et Bergles [7]** ont étudié expérimentalement l'effet de la conduction circumférentielle de chaleur dans la paroi de la conduite sur le transfert thermique en convection mixte. Il a considéré deux tubes horizontaux de matériaux différents, l'un en verre et l'autre en acier inoxydable. Le chauffage du fluide est assuré par un fil électrique enroulé sur la paroi extérieure et parcourue par un courant alternatif, l'ensemble tube-fils électrique est isolé thermiquement avec la fibre de verre permettant ainsi d'approximer la condition de flux uniforme. L'eau et le glycol d'éthylène ont été utilisés comme fluides caloporteurs. Il a été constaté que le nombre de Nusselt( $Nu$ ) moyen ne dépend pas uniquement des nombres de Grashof( $Gr$ ) et Prandtl( $Pr$ ) mais aussi des matériaux et de l'épaisseur du conduit. Les effets de la paroi et du nombre de Prandtl deviennent importants pour des taux de chauffage élevés.

**Choi et al. [8]** simulent numériquement la convection mixte pour un écoulement en développement dans un conduit horizontal soumis à un flux de chaleur uniforme sur la moitié inférieure de l'interface et isolé sur l'autre moitié. Les calculs ont été effectués pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0,7$  et  $5$ , un nombre de Reynolds  $Re=250$  et un nombre de Grashof  $Gr$

entre  $10^6$  et  $10^7$ . Ils se sont principalement intéressés aux phénomènes de bifurcation pour des nombres de Grashof élevés.

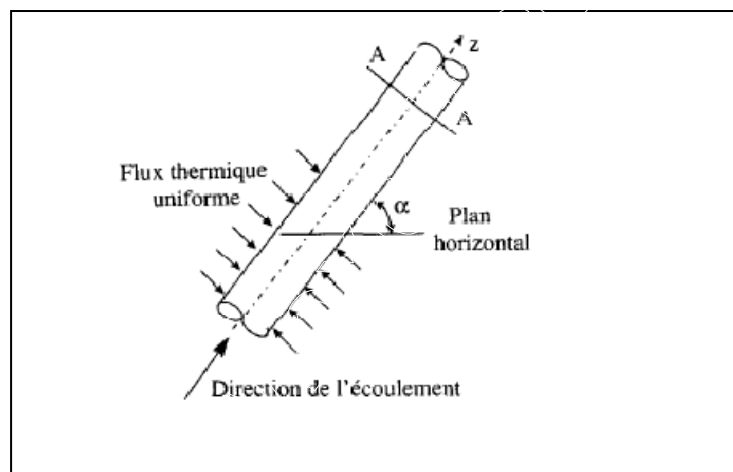
**Hwang et Lai [9]** ont présenté des résultats d'une étude numérique sur la convection mixte à l'intérieur d'un conduit cylindrique, horizontal isotherme pour de grands nombres de Rayleigh ( $Ra \gg 10^5$ ), avec un écoulement laminaire, incompressible et sans dissipation visqueuse ; les propriétés thermophysiques sont constantes et l'approximation de Boussinesque est utilisée. Le nombre de Grashof (Gr) est grand mais par contre les nombres de Prandtl et de Péclet (Pe) sont faibles ; les résultats obtenus ont permis d'établir une corrélation donnant le nombre de Nusselt (Nu) en fonction du nombre de Rayleigh, avec une erreur de l'ordre 1.4% :  $Nu = 0.626 \cdot Ra^{0.269}$  pour  $Ra \gg 10^5$

**Shome et Jensen [10]** conduisent une étude paramétrique pour une convection mixte thermiquement développée et une convection mixte en développement simultanée dans un conduit soumis à une condition du premier type. La viscosité est exprimée suivant une loi log-polynomial  $\nu(T) = \ln \left[ \ln \left( \frac{\nu}{10^{-6}} - c \right) \right] - a \ln T + b$  pour les liquides, obtenue par un "fitting" dans le domaine :  $12 \leq Pr \leq 1250$ . Les constantes a, b et c sont calculées pour l'eau, glycol et de l'huile parathérme-NF pour différentes température d'entrée du fluide. Les auteurs trouvent que pour des nombres de Grashof :  $Gr = 10^5, 10^6$  et  $10^7$ , les effets de la viscosité sont significatifs et qu'ils sont d'autant plus prononcés sur le coefficient de frottement que sur le nombre de Nusselt (Nu).

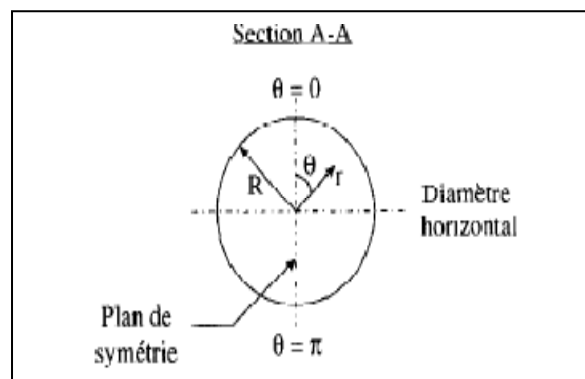
Une étude numérique de transfert chaleur en régime de convection mixte est traitée par **Orfi et al. [11]** d'un écoulement d'eau laminaire et incompressible en développement simultané à l'intérieur d'un tuyau incliné par rapport à l'horizontale et soumis à un flux de chaleur constant et uniforme sur sa circonférence et sur sa longueur, Figure s 3a et 3b. Les équations adimensionnelles de conservation écrites sous une forme parabolique dans la direction axiale et elliptique dans les directions radiale et circonférentielle ont été résolues par la méthode des volumes finis. Les auteurs s'intéressent particulièrement à l'influence de l'inclinaison du conduit et celle du nombre de Grashof (Gr) sur les champs thermique et hydrodynamique ainsi que sur la distribution axiale des valeurs moyennes de l'échange de chaleur et de la contrainte de cisaillement. Les résultats sont obtenus à partir des situations ou



le tuyau est horizontale, vertical, incliné à  $30^\circ$  et  $60^\circ$  et le chauffage pariétal imposé correspondant à différents nombres de Grachof ( $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ ) et un nombre de Reynolds ( $Re=500$ ) donnant un nombre de Richardson ( $Gr/Re^2$ ) compris entre 0.04 et 4. Le fluide caloporteur est de l'eau ( $Pr=7$ ). Ils concluent que pour un tuyau incliné à  $30^\circ$  les courants secondaires associés à la convection naturelle naissent tout près de l'entrée et se développent très rapidement. Ils induisent des déformations considérables sur les profils de vitesse axiale. Ils trouvent aussi que l'écoulement en régime de convection mixte se compose de trois régions le long de la conduite : une zone où l'écoulement est forcé pur, puis une zone où la convection naturelle est importante et enfin une zone où la convection mixte s'établit. Finalement ils montrent une amélioration du transfert de chaleur moyen et une augmentation de la contrainte de cisaillement pariétale par rapport à un écoulement forcé avec un comportement asymptotique à la sortie du tube.



**Figure 3a.** Configuration géométrique du problème considéré



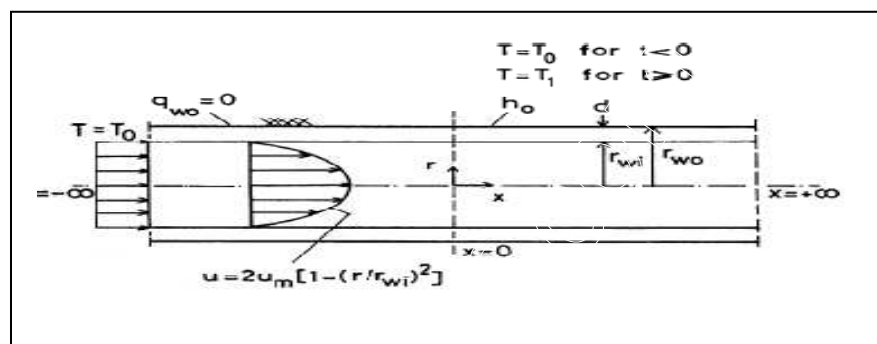
**Figure 3b.** Géométrie du problème étudié.

**Ouzzane et Galanis [12]** ont étudié l'effet de la conduction pariétale et la répartition du flux thermique sur quatre configurations différentes : un flux thermique uniforme sur toute la circonférence ou seulement sur la moitié supérieure de celle-ci et un flux thermique appliqué sur l'interface ou sur sa moitié supérieure, l'autre moitié est isolé. Leurs objectif est de démontrer l'existence des limites et la possibilité de négliger la conduction thermique dans la paroi de la conduite notamment quand une condition de flux non uniforme est appliquée. Ils ont utilisé un maillage non uniforme dont la direction radiale et axiale plus serré dans les régions où les variations de température et de vitesses sont relativement importantes à l'entrée de tube et à l'interface fluide-solide. Ils aboutissent à une conclusion, est que la modélisation des écoulements dans une conduite chauffée doit être réalisée avec beaucoup de soin en ce qui concerne la condition du flux thermique. Bien qu'il soit facile de négliger la conduction dans la paroi en appliquant le flux thermique directement à l'interface fluide-solide, ceci peut conduire à des résultats erronés notamment quand le nombre de Grashof( $Gr$ ) est élevé. Ces erreurs se produisent tant au niveau des paramètres moyen( $Nu$ ) qu'à celui des valeurs locales (distribution circonférentielle de la température à l'interface fluide-solide, profil de vitesse axiale et intensité de l'écoulement secondaire).

Le travail **d'Ouzzane [13]** se rapporte au transfert thermique dans les écoulements en développement à l'intérieur des conduits avec et sans ailette. L'auteur a étudié l'effet de la conduction pariétale sur les évolutions des champs thermique et hydrodynamique. Il ressort de cette étude, que dans le cas où les matériaux présente une bonne conductivité thermique, la température de l'interface solide-fluide à tendance à s'uniformiser. Cependant un écart de température relativement important a été observé entre les deux positions extrêmes (le haut et le bas), dans le cas d'un matériau à faible conductivité thermique. Dans le cas d'un conduit horizontal ou incliné, pour l'amélioration de l'échange thermique, l'auteur recommande de placer plus d'ailettes sur la partie supérieure de la section dans le cas de refroidissement et sur la partie inférieure dans le cas du chauffage.

**Sefik et Ali [14]** présentent une analyse d'un problème transitoire de chaleur conjugué de transfert de flux laminaire pour la région d'entrée thermique d'un tube horizontal à paroi épaisse et de considérer les effets de la conduction bidimensionnel et la conduction axiale du liquide à faible nombre de Péclet ( $Pe$ ). Les flux ont été considérés avec une condition aux limites de convection. Le problème est résolu par une méthode numérique aux différences finies. Ils ont utilisé un tube découlement deux régionale la température du fluide et ( $T_0$ ) et uniforme, Figure 4. Pour laquelle la partie amont de la paroi externe est isolé et en aval de la

région est confrontée à un changement radical de la température d'un fluide ambiant. Le tube reçoit de la chaleur par convection du fluide ambiant avec un coefficient de transfert thermique ( $h_0$ ), qui est constante le long de la surface du mur extérieur de la région en aval. Les propriétés physiques du fluide sont supposés être constant et visqueux dissipation est négligée. Le problème résolu dépend de cinq paramètres, le rapport épaisseur de la paroi, ( $d'$ ), le rapport de conductivité ( $k_{wf}$ ) mur à fluide, le rapport de mur à fluide de la diffusivité thermique ( $\alpha_{wf}$ ), le nombre de Péclet ( $Pe$ ) et le nombre de Biot ( $Bi$ ). Les solutions sont faites pour différentes combinaisons de ces paramètres:  $d'= 0.02, 0.1$  et  $0.3$ ;  $k_{wf}= 0.1, 1, 10, 100$ , et  $1000$ ;  $\alpha_{wf}= 0.1, 1, 10, 100$  et  $1000$ ;  $Pe= 0.5, 1, 5$ , et  $20$  et  $Bi= 0.1, 1, 10, 100, 1000$ , et  $10\ 000$ .



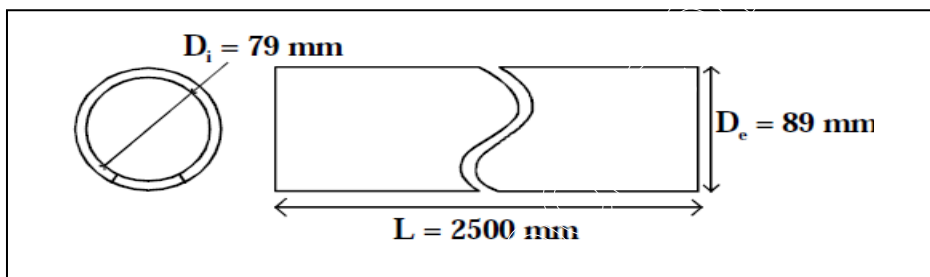
**Figure 4.** Représentation schématique du problème et système de coordonnées.

**Maxime et al. [15]** simulent numériquement l'influence de la convection mixte d'un écoulement d'air sur l'échange de chaleur entre un flux d'air en régime laminaire et la paroi d'un tube cylindrique horizontal chauffé de section constante dans lequel circule un flux d'air sous pression à 3 bar. Les domaines de variation des nombres adimensionnels sont :  $800 \leq Re \leq 2500$  ;  $7.34 \cdot 10^5 \leq Gr \leq 1.27 \cdot 10^6$  et  $1.65 \cdot 10^{-1} \leq Ri \leq 9.59 \cdot 10^{-1}$ . Ce tube de 2,5 m de long a un diamètre interne de 79 mm et une épaisseur de paroi de 5 mm, Figure 5a. L'échangeur est chauffé par un flux solaire concentré absorbé par la paroi externe du tube. Ce flux solaire concentré provient d'un miroir cylindro-parabolique qui réfléchit et concentre le rayonnement solaire sur une bande focale large d'environ 30 mm située sur la partie basse du tube, Figure 5b. Le flux de chauffe n'est donc pas uniformément réparti sur la circonférence du tube. . Ils ont conclu que :

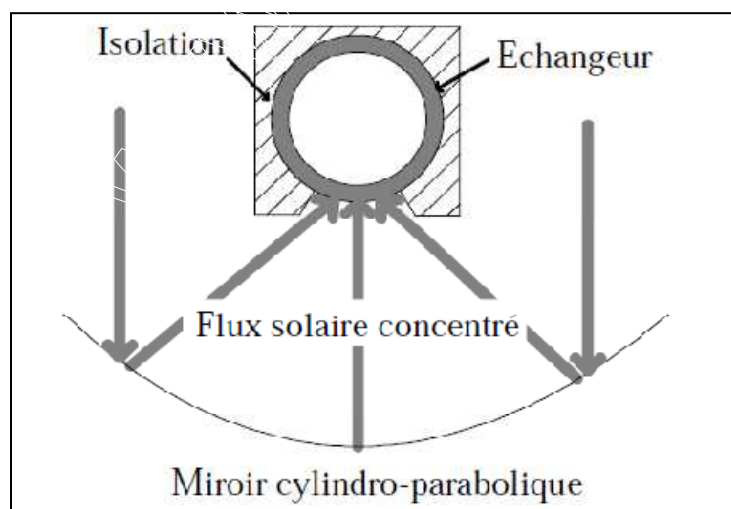
- Dans les conditions de l'étude l'établissement d'un écoulement convectif interne mixte augmente considérablement l'échange thermique entre le fluide et la paroi par rapport à un écoulement en convection forcée.

- Malgré des flux de chauffe élevés qui ont permis la génération de forts mouvements de convection mixte, l'échange thermique reste faible comparé à ceux générés par des écoulements turbulents, mixtes ou forcés.
- L'échange thermique en convection mixte est meilleur dans les conditions de l'étude lorsque le flux de chaleur échangé entre la paroi et le fluide est le plus uniformément réparti sur le périmètre du cylindre.

Dans les conditions étudiées, la convection mixte permet de réduire l'écart de température entre le flux d'air et la paroi grâce à l'augmentation de l'échange thermique. Ceci permettra, dans les conditions réelles de fonctionnement de l'échangeur de limiter la température de la paroi et donc contribuera à réduire les pertes thermiques de cette dernière.

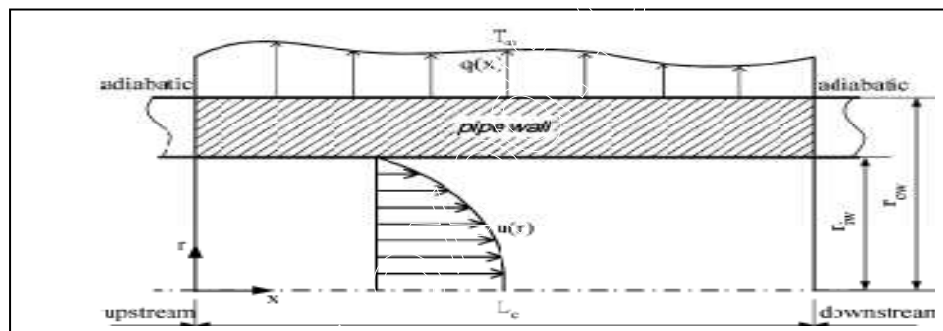


**Figure 5a.** Dimensions géométriques de l'échangeur



**Figure 5b.** Représentation schématique du dispositif solaire

**Chen et al. [16]** s'intéressent à un problème de transfert thermique conjugué d'un écoulement Newtonien turbulent en régime de convection forcée hydro dynamiquement développé et en développement thermique dans un conduit circulaire d'épaisseur finie et de conductivité thermique constante ( $k_s$ ). A l'entrée du conduit la température du fluide est constante, égale à ( $T_{in}$ ) et que l'air ambiant autour de la conduite est à une température ( $T_\infty$ ), Figure 6. Comme le fluide passe à travers le tuyau, une partie de sa chaleur est évacuée par la paroi par conduction, et est ensuite rejetée dans l'environnement. Une méthode inverse est utilisée pour estimer le flux de chaleur inconnue sur la surface externe du tuyau circulaire en procédant à une réorganisation des formes matricielles des équations différentielles qui régissent le problème. Cette méthode a été satisfaisante en nécessitant seulement environ 9s de temps CPU par calcul. Les temps CPU correspond à un Intel Pentium 1 GHz, avec 512 MB de RAM, fonctionnant sous le Power Station Microsoft Fortran 4.0 plate-forme. Les erreurs de mesure de la température dans le fluide ne dépassent pas 30%.



**Figure 6.** Système considéré avec un profil des vitesses complètement développé et une température d'entrée constante. ( $q(x)$  est le flux sur la paroi externe)

Une étude numérique traitée par **Guimarães et Menon [17]** sur la convection mixte dans un canal incliné rectangulaire incliné avec trois sources de chaleur sur la paroi inférieure est effectuée. Les positions verticales et horizontales sont également considérées. Les effets sur le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) le long des sources de chaleur ainsi que les vecteurs de vitesse sont vérifiées pour les différents paramètres de contrôles dans cette étude sont: Angle d'inclinaison  $\gamma$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ), un nombre de Reynolds  $Re$  (1, 10, 50, 100, 1000), et le nombre de Grashof  $Gr$  ( $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ). Ils ont utilisé la méthode des éléments finis et la technique de Petrov-Galerkin. La méthode des éléments finis (FEM) et d'un maillage structuré avec iso paramétrique rectangulaires éléments à quatre nœuds dans lequel  $\Delta x=0.1$  et  $\Delta y=0.05$ . Une comparaison avec les résultats expérimentaux et numérique est présentée. Un bon accord est trouvé. Ils montrent que l'inclinaison a une plus forte influence sur l'écoulement et de

transfert de chaleur pour les faibles nombres de Reynolds. En général, les cas qui montrent les distributions les plus bas de la température sur les modules sont ceux où les angles d'inclinaison:  $\gamma=45^0$  et  $\gamma=90^0$ .

**Omara et Aboudi [18]** ont étudié une approche numérique, par volumes finis, est présentée pour prédire l'influence de la conduction axiale dans la paroi sur le transfert de chaleur transitoire par convection mixte contrariée dans une conduite cylindrique verticale. La surface externe de la conduite est soumise à un flux de chaleur constant et uniforme, appliqué sur une section centrale de longueur égale à dix fois le diamètre hydraulique. A chaque position axiale atteinte par la cellule, ils ont constaté que la distribution radiale de température présente des maximums au voisinage de la paroi. Par ailleurs, la redistribution du flux de chaleur pariétal dans la section de préchauffage accélère avec l'augmentation des rapports  $\Delta = (Re-Ri)/D$  (rapport de l'épaisseur de la paroi au diamètre hydraulique) et  $K=k_w/k_f$  (rapport des conductivités thermique). L'effet des forces exercées par l'écoulement principal se traduit par un ralentissement de l'étendue de la cellule de recirculation.

Dans ce travail **Kholai et al. [19]** présentent une étude numérique tridimensionnelle sur la convection mixte dans un tube cylindrique incliné par rapport à un plan horizontal uniformément chauffé par un flux de chaleur constant sur toute sa surface circonférentielle. L'écoulement, supposé laminaire pour un fluide Newtonien et incompressible, entre dans le tube avec un profil de vitesse axial parabolique et une température uniforme. Les propriétés physiques du fluide sont constantes à l'exception de la densité dans le terme des forces de volume, où l'approximation de Boussinesq est valable. Les équations différentielles elliptiques régissant sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis dans un maillage de  $30 \times 70 \times 28$ , uniforme dans les directions circonférentielle et axial et non uniforme dans la direction radiale. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds ( $Re=500$ ) et différentes valeurs du nombre de Grashof sont considérées: ( $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ ) ainsi que plusieurs angle d'inclinaison ( $0^0$ ,  $30^0$ ,  $60^0$  et  $90^0$ ). Ils concluent que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation du nombre de Grashof et la diminution de l'angle d'inclinaison du tube.

**Voicu et al. [20]**, ont fait une étude sur la simulation numérique de transfert de chaleur par convection mixte pour un simple échangeur de chaleur en parallèle d'écoulement vertical composé de deux tubes en cuivre coaxial. Le fluide newtonien est une solution à 50% de glycol aqueuse avec une viscosité dépendant de la température et la densité. Alors que toutes

les autres propriétés thermo physiques sont constantes, les champs d'écoulement sont modélisés avec les formes elliptiques des équations de conservation. Les résultats présentés dans ce document ont été calculés pour une géométrie fixe ( $d_2/d_1 = 1.25$ ,  $d_3/d_1 = 2.5$ ,  $d_4/d_1 = 2.75$ ), ou des températures d'entrée fixées (313 K pour le cylindre intérieur et 283 K pour l'espace annulaire), un seul numéro de Reynolds ( $Re = 110$ ) pour l'anneau et trois différents nombres de Reynolds ( $Re = 400$ ,  $Re = 880$  et  $Re = 1500$ ) pour le cylindre. Sur la base de ces valeurs les numéros correspondants Grashof ( $Gr = 7,76 \cdot 10^5$  et  $Gr = 1,22 \cdot 10^4$ ) pour le fluide dans le cylindre et l'anneau respectivement, tandis que un nombre de Richardson ( $Ri = 1$ ) pour l'espace annulaire et trois nombres de Richardson ( $Ri = 4.85$ ,  $Ri = 1$  et  $Ri = 0.34$ ) pour le cylindre sont considérés. Donc les résultats notamment la vitesse et profils de température ainsi que l'évolution axiale de la température en vrac, la température de la paroi, le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et les coefficients de frottement.

**Hussein et Yasin [21]** ont fait une étude expérimentale locale et moyenne de transfert de chaleur par convection mixte pour le développement de flux d'air laminaire circulaire dans un cylindre incliné. Le dispositif expérimental est constitué de cylindre en aluminium de section d'essai de 30 mm de diamètre intérieur et 900 mm de longueur chauffée ( $L/D = 30$ ) qui est soumis à un flux de chaleur constante, le nombre de Reynolds ( $Re$ ) varie de 400 à 1600, et le flux de chaleur varie de  $70 \text{ W/m}^2$  à  $400 \text{ W/m}^2$  et les angles d'inclinaison sont:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ . Ils ont présenté la distribution de la température le long de surface de cylindre, la distribution de Nusselt ( $Nu_x$ ) local et moyenne en fonction de la distance axiale  $Z^+$ , ou  $Z^+ = x / D \cdot Re \cdot Pr$ . Ils ont conclu que :

- la température de surface augmente si le flux de chaleur augmente pour le même nombre de Reynolds, et la température à la surface pour les faibles nombres de Reynolds est supérieure à celui à nombre de Reynolds élevé pour le même flux de chaleur, à cause de la domination de la convection libre.
- La température de surface de la conduite est réduite lorsque l'orientation passe de cylindre à cylindre horizontal lorsque la convection libre est dominante, mais la température de surface augmente quand l'orientation passe de cylindre incliné à cylindre horizontal lorsque la convection forcée est dominante.
- Pour le même flux de chaleur et des nombres de Reynolds élevés le  $Nu_x$  se déplace vers la gauche de  $Nu_x$  prévu pour TPF, parce que la convection forcée est dominante, mais pour le même flux de chaleur et le faible nombre de Reynolds,  $Nu_x$

se déplace vers la droite de  $Nu_x$  prévu pour TPF, parce que la convection naturelle est dominante.

- Pour le même flux de chaleur et de haute nombre de  $Re$ , la valeur de  $Nu_x$  augmente à mesure que le cylindre se déplace d'un angle d'inclinaison vers un cylindre horizontal ; la valeur minimal de  $Nu_x$  se produit pour  $\theta = 60^\circ$ , et la valeur la plus élevée se produit pour le cas ou  $\theta = 0^\circ$  (horizontal) lorsque la convection libre est le facteur dominant sur le processus de transfert de chaleur.

- des corrélations empiriques, ont été calculées afin d'évaluer le nombre de Nusselt moyen en termes de nombre de Rayleigh( $Ra$ ) sur la base des flux de chaleur d'entrée et des nombres de Reynolds basé sur le débit avec une précision globale de l'ordre de  $\pm 7\%$ .

$$\overline{N_u} = 3.25( \overline{Ra}/\overline{Re} )^{0.187} \quad \text{Pour } \theta = 30^\circ$$

$$\overline{N_u} = 3.37( \overline{Ra}/\overline{Re} )^{0.152} \quad \text{Pour } \theta = 45^\circ$$

$$\overline{N_u} = 3.55( \overline{Ra}/\overline{Re} )^{0.134} \quad \text{Pour } \theta = 60^\circ$$

- Le régime de convection mixte a été délimitée par le choix approprié de la gamme  $Re$  nombre et la gamme de flux de chaleur. Les chiffres obtenus Richardson ( $Ri$ ) est variés de 0,31 à 7,125.

Cette étude est traitée par **Chang [22]** L'objectif de cette étude est d'analyser numériquement. les flux et les caractéristiques de transfert de chaleur de la convection naturelle le cas d'un écoulement de fluide Newtonien micropolaire passé un mince cylindre vertical creux circulaire de longueur (  $L$  ) ayant un rayon extérieure (  $r_o$  ) avec effet de conduction de chaleur dans le mur est unidimensionnel. La température du fluide micropolaire égale à ( $T_\infty$ ) tandis que la température de la surface intérieure du cylindre est maintenue à une température constante ( $T_0$ ) et que la variation de la densité, le liquide restant à propriétés constantes, Figure 7. La formulation non linéaire des équations qui régissent et de leurs conditions aux limites associées sont d'abord exprimés dans des formes sans dimension par une transformation locale non similaires. Ces équations sont ensuite résolues en utilisant la méthode spline cubique de colocalisation et le schéma aux différences. par conséquent, les calculs numériques ont été réalisées avec  $B=1 \times 10^4$ ,  $\lambda=5.0$  et un nombre de Grashof ( $G_r=1.25 \times 10^5$ ). Les autres paramètres ont été spécifiés comme suit : micropolaire paramètre ( $\Delta$ ) vari entre 0 et 10.0, et un nombre de Prandtl ( $Pr$ ) vari entre 0.7 et 20.0, et aussi un paramètre de transfert de chaleur conjugué ( $P$ ) vari entre 0.0 et 0.2. Variation de la distribution de la température interfaciale liquide-solide, le coefficient de frottement et le taux



de transfert de chaleur local arepres seule entité pour mettre en évidence l'influence de la conduction mur. En outre, les résultats actuels sont comparés avec les résultats précédents numériques pour la convection libre conjuguée des fluides newtoniens longs d'un mince cylindre creux vertical circulaire, et sont jugées en bon accord.

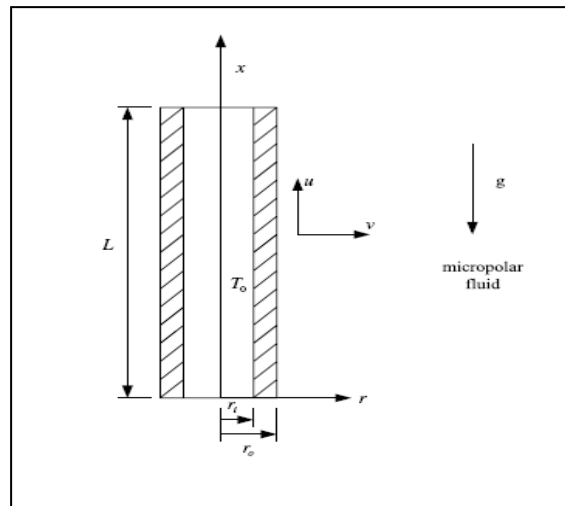


Figure 7. Modèle physique et système de coordonnées.

**Marušić et al. [23]** ont fait une étude sur l'effet de la convection forte sur le processus de refroidissement d'un tube long ou mince. Ils considèrent la conduction thermique dans tube mince de longueur ( $L$ ) et d'épaisseur ( $\varepsilon$ ). Le processus est gouverné par une équation de convection-diffusion linéaire. Le tube est entouré par un milieu ayant une température donnée ( $G$ ). Le fluide dans le tube est refroidi par le milieu environnement et le processus est régi par une loi linéaire de type Newton. Par soucis de simplicité, ils montrent que la partie hydrodynamique est connue et que la vitesse du fluide est de la forme Poiseuille (unidirectionnel avec profil parabolique). Suivant le rapport entre l'épaisseur du tube ( $\varepsilon$ ) et le nombre de Reynolds ( $Re^\varepsilon$ ), les auteurs trouvent, via une analyse asymptotique rigoureuse, trois modèles différents. Pour  $Re^\varepsilon$  grand, le fluide n'est pas du tout refroidi, c'est-à-dire la température extérieure  $G$  domine le processus. A la limite, la température du fluide dans tube est égale à  $G$ . les effets de la température  $h_0$  du fluide entrant dans le tube ne sont présents que dans une couche limite au voisinage de l'entrée du tube. Pour  $Re^\varepsilon$  assez petit, le fluide est parfaitement refroidi, c'est-à-dire qu'il prend la température du milieu extérieur au tube donc la convection est dominant. Les effets de la température extérieure  $G$  sont négligeables et la température limite est égale à  $h_0$ . (Le fluide s'écoule trop vite pour pouvoir être refroidi). Entre ce deux cas existe un cas critique où le modèle macroscopique est donné par une EDO

où cohabitent les effets du milieu extérieur au tube ainsi que ceux de la température à l'entrée de celui-ci.

Un travail a été expérimentalement étudié par **Hussein [24]** sur les effets de différentes géométries placées à l'entrée d'un cylindre sur le flux d'air laminaire combinés de transfert de chaleur par convection mixte. Le cylindre de chauffage a été un tube orienté horizontalement en aluminium d'un diamètre intérieur de 30 mm et un diamètre extérieur de 35 mm. Et 900 mm de longueur chauffée ( $L / D = 30$ ). Avec des géométries différentes : calming section entrance, Bell mouth entrance and sharp edged entrance, à l'entrée et un flux de chaleur constant sur la paroi. Dans le présent travail, La majeure partie locale du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) a été modifiée, passant d'environ 0,68 à 0,72, le flux de chaleur a été varié de 78  $W/m^2$  à 430  $W/m^2$ , qui donnent une gamme de nombre de Grashof ( $Gr$ ) varié  $3.12.10^5$  à  $1.72.10^6$ , et le débit d'air a varié de  $1.5.10^{-4} m^3/s$  à  $6.0.10^{-4} m^3/s$ , ce qui donne d'entrée des nombres de Reynolds ( $Re$ ) d'environ 400 à 16, Les numéros de Richardson ( $Ri$ ) étaient d'environ variaient de 0,13 à 10,8. Il a constaté que :

- Les valeurs de la température de surface de la conduite suivant la distance axiale ont été plus élevées pour les faibles nombres de Reynolds que pour les nombres de Reynolds élevés, en raison de la domination de la convection libre sur le processus de transfert de chaleur.
- Pour le même nombre de Grashof, la température de surface pour le cas (calming section entrance) avec  $L / D = 80$ , a été plus élevée que d'autres géométries d'entrée, en raison de la résistance à l'écoulement, et la baisse du débit massique.
- Les valeurs de  $Nu$  seraient plus élevées pour (Bell mouth entrance) que pour d'autres géométries d'entrée en raison de différences dans la température moyenne et la densité de l'air. Une corrélation empirique:  $\overline{Nu} = 3.2284(\overline{Gr Pr / Re})^{0.368}$  a été calculée afin d'évaluer le nombre de Nusselt moyen en termes de Grashof, Prandtl et du nombre de Reynolds, avec une précision globale de l'ordre de 10% .

Une étude numérique a été réalisée par **Dehkordi et Memari [25]** sur le comportement transitoire du transfert forcé de chaleur par convection à power-law fluides dans la région d'entrée thermique des conduits horizontaux circulaires avec prise en compte des effets de dissipation visqueuse, la conduction axiale, et les variations de viscosité avec la température. Par conséquent les auteurs examinent :1) le profil hydrodynamique laminaire complètement développé vitesse d'une fluide power-law de à travers un conduit ayant un

rayon ( $r_0$ ) circulaire de l'amont vers l'aval, 2) le profil de température non uniforme d'un écoulement de fluide power-law adiabatique tout au long de l'amont d'un conduit circulaire, Figure 8. Aussi que l'énergie instable à l'état thermique et la dynamique des équations à l'initial de certaines conditions aux limites ont été résolues numériquement par la méthode aux différences finies. La procédure numérique utilisée dans le présent travail a été validée avec une solution analytique pour le cas particulier des fluides newtoniens. Les effets de l'indice de power-law, de la conduction axiale, le flux de chaleur du mur, et les variations de la viscosité du fluide sur le nombre de Nusselt local et de la longueur d'entrée thermique ont été étudiés. En outre, Ils considérant un nombre de Péclet(Pe) supérieur à 100 et les valeurs locales du nombre Nusselt l'état d'équilibre ont été corrélées en fonction de la dimension de la coordonnée axiale et d'indice de Power-Law.

$$\frac{1}{Nu} - \frac{1}{Nu_{\infty}} = \frac{a \exp(b \xi^{0.75}) + c \exp(d \xi^{0.75})}{15 n^2 + 8n + 1}$$

Les coefficients déterminés de la corrélation ci-dessus en fonction de l'indice de power-law

Pourrait être donnée par :

$$\begin{cases} a = -1.0952n^2 - 0.3501n - 0.0449 \\ b = 2.0738n^3 - 11.5739n^2 + 25.5849n - 114.6476 \\ c = -2.7953n^2 - 1.1547n - 0.0803 \\ d = 0.1089n^3 - 0.5646n^2 + 1.3208n - 10.2483 \end{cases}$$

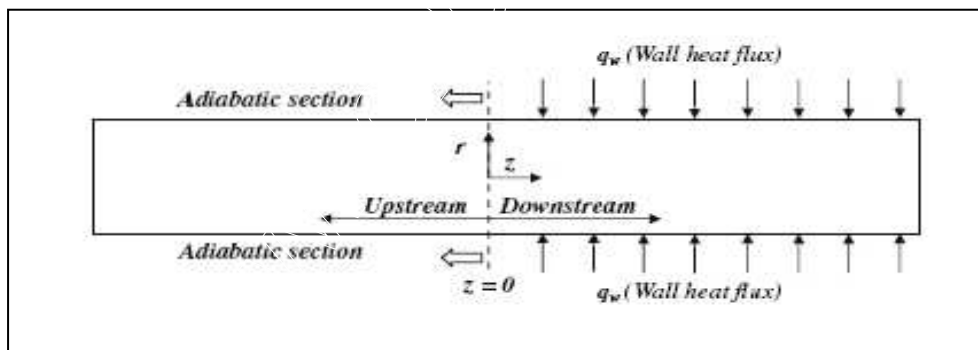


Figure 8. Schéma du conduit et ses conditions aux limites.

A la fin de cette modeste synthèse bibliographique on peut voir d'après la multitude des situations traitées, l'intérêt porté par les chercheurs pour développer beaucoup d'aspects liés à cette forme d'écoulement et de transfert conjugué dans les conduits. Dans ce vaste domaine nous nous intéressons à étudier l'interaction du milieu solide et du milieu fluide sur le transfert thermique et l'écoulement. Cette interaction sera basée sur l'effet de la conductivité thermique du matériau solide constituant la paroi sur le transfert thermique conjugué à l'interface paroi-fluide. Pour cela des matériaux de conductivités thermiques différentes seront étudiées, en l'occurrence l'Inconel, l'Acier, le Tantale et l'Aluminium.

## Chapitre 2

# Modélisation mathématique

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la géométrie et le système d'équations de conservation du problème, sous leur forme adimensionnelle régissant les transferts thermo convectifs au sein d'un fluide dans un conduit cylindrique horizontal à section circulaire constante. Ces équations seront accompagnés par les conditions initiales et aux limites dynamiques et thermiques appropriées.

La particularité de cette modélisation réside dans la thermo dépendance des propriétés physiques du fluide ainsi que la prise en compte simultanée de deux milieux (solide et fluide) d'un point de vue transfert thermique et écoulement de fluide permettant de classer ce problème dans celle des problèmes de transfert conjugué. Ainsi, ce sont les mêmes équations qui seront appliquées simultanément aux domaines fluide et solide. Par ailleurs le milieu solide sera le siège d'une source de chaleur volumétrique uniforme à travers toute l'épaisseur de la paroi du conduit.

### 2.2 La géométrie du modèle

La figure 2.1 illustre la géométrie du problème étudié. Il s'agit d'un long conduit horizontal de faible épaisseur. Le conduit de longueur  $L=1\text{m}$ , d'un diamètre intérieur  $D_i=0.96\text{cm}$  et extérieur  $D_o=1\text{cm}$  possède une conductivité thermique (l'épaisseur est de  $0.02\text{cm}$ ). Ce conduit peut être constitué en différents matériaux tels que l'Inconel (Inconel), le Tantale (Tantalum), l'Acier (Steel) et l'Aluminium (Aluminum) de conductivités thermiques ( $K_I=15\text{W/m}^\circ\text{K}$ ), ( $K_T= 57.5\text{W/m}^\circ\text{K}$ ), ( $K_A= 48.5\text{W/m}^\circ\text{K}$ ), ( $K_{Al}= 237\text{W/m}^\circ\text{K}$ ).

La génération interne de la chaleur est uniformément produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi le passage d'un courant électrique d'intensité égale à  $40\text{Ampères}$ . Les résistances électriques des matériaux sont pour l'inconel ( $R_I= 0.16\Omega$ ), pour le tantale ( $R_T=2.13610^{-2}\Omega$ ), pour l'acier ( $R_A=1.78010^{-2}\Omega$ ) et l'aluminium ( $R_{Al}=0.454710^{-2}\Omega$ ).

Le conduit est utilisé pour le chauffage d'un écoulement laminaire, incompressible, d'eau distillée dont l'écoulement à l'entrée est de type Poiseuille, avec une vitesse moyenne égale à  $1.7 \cdot 10^{-2}$  m/s et une température constante de  $15^\circ\text{C}$ .

La viscosité du fluide et la conductivité thermique sont des fonctions connues de la température. La masse volumique est une fonction linéaire de la température et l'approximation de Boussinesq est appliquée tandis que les pertes thermiques entre la surface extérieure du conduit et le milieu ambiant sont prises en compte.

Il s'agit donc d'un problème de transfert conjugué modélisé par les équations de conservation adimensionnelles avec leurs conditions aux limites :

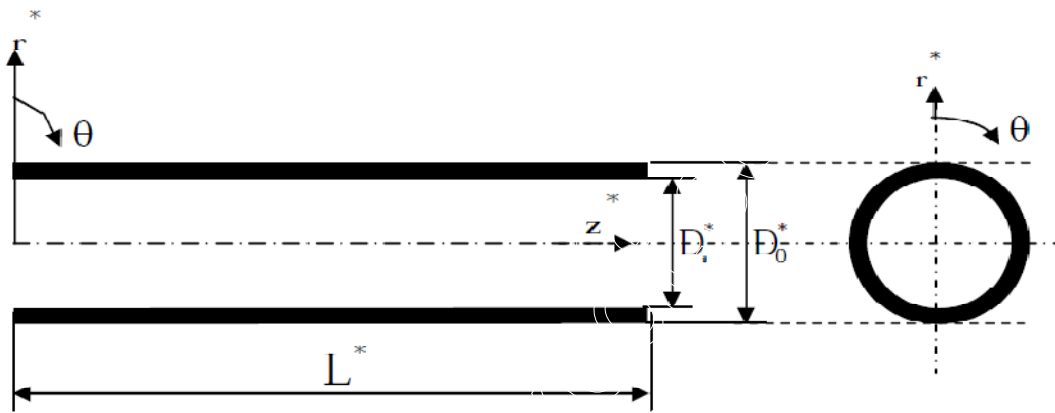


Figure 2. 1: Géométrie et dimensions:  $D_i^*=1$ ,  $D_0^*=1.04$ ,  $L^*=104.17$ .

### 2.3 Equations de conservation

Ecrites en termes de contraintes et de flux, les équations de conservation adimensionnelles modélisant les principes physiques qui régissent ce problème sont:

$$\text{A } t^* = 0$$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \tag{2.1}$$

$$\text{Pour } t^* > 0$$

Equation de conservation de la masse:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \tag{2.2}$$

**Equation de conservation de quantité de mouvement radiale:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_r^*) - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_r^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_\theta^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_\theta^*) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \\ \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta T^* + \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Equation de conservation de quantité de mouvement axiale:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \\ \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Equation de conservation de l'énergie:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* T^*) = G^* - \\ \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{avec } G^* = \begin{cases} K_s^*/(Re_0 Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses sont

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \qquad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[ \left( r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta}^* &= 2\mu^* \left[ \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \right] & \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* &= \mu^* \left[ \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \right] \\ \tau_{zz}^* &= 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} & \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* &= \mu^* \left[ \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Et les densités de flux thermiques sont:

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (2.8)$$

Les nombres adimensionnels qui caractérisent ce problème de convection mixte sont évalués à la température du fluide à l'entrée. Cette dernière est la température de référence utilisée dans l'évaluation des propriétés physiques du fluide servant à calculer les groupements adimensionnels du problème :

Le nombre de **Prandtl** :  $Pr_0 = \frac{v_0}{a_0}$

Le nombre de **Reynolds** basé sur le diamètre interne de la conduite  $Re_0 = \frac{V_0 D_i}{v_0}$

Le nombre de **Grashof** basé sur le flux pariétal ( $\Delta T$ )  $Gr_0^* = \frac{g \beta D_i^3 \Delta T}{v_0^2} = \frac{g \beta D_i^3 (G D_i^2 / K_s)}{v_0^2}$

Le nombre de **Richardson** :  $Ri_0 = \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}$  qui mesure, relativement, les deux modes de convection, forcée et naturelle.

## 2.4 Les conditions aux limites:

**A l'entrée du tube:  $z^* = 0$**

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi: \quad V_r^* = V_\theta^* = T^* = 0, \quad V_z^* = 2(1 - 4r^{*2}) \quad (2.9)$$

Domaine solide :

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \quad (2.10)$$

**A la sortie du tube :  $z^* = 104.17$**

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Domaine solide:

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.12)$$

**Sur l'axe du conduit :  $r^* = 0$**

Les conditions dynamiques sont considérées et les variables dépendantes sont correctement interpolées au voisinage de l'axe. Cette interpolation permet de lever la singularité en ce point:

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 100 \quad \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = 0 \quad (2.13)$$

**Sur la paroi extérieure**, la condition de non-glissement est imposée tandis que la condition aux limites thermiques est de troisième type (condition de Fourier).

$$r^* = 0.5208 \text{ pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \begin{cases} V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \\ -K_s \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{(h_{ro} + h_{co}) D_i}{K_0} T^* \end{cases} \quad (2.14)$$

avec

$$h_{ro} = \varepsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty) \quad (2.15)$$

L'émissivité de la surface extérieure est  $\varepsilon = 0.9$  et  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stéphan-Boltzman.  $h_c$  est donnée par la corrélation de Churchill et Chu [26] valable pour tous les nombres de Pr et de Rayleigh dans l'intervalle  $10^{-6} \leq Ra \leq 10^9$  :



$$Nu_0 = [h_{co} Di / K_{air}] = \left[ 0.6 + (0.387 Ra^{1/6} / (1 + (0.559 / Pr_{air})^{1/6})^{4/9}) \right]^2 \quad (2.16)$$

Bien que cette corrélation exprime un Nu moyen, elle peut être approximativement utilisée pour déterminer localement le nombre de Nusselt.

Les nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl sont définis par:

$$Ra = \frac{g \beta [T(R_0, \theta, z) - T_\infty] D_0^3}{\alpha_{air} v_{air}}, \quad Pr_{air} = v_{air} / \alpha_{air} \quad (2.17)$$

Les propriétés thermophysiques de l'air sont évaluées à la température locale du film:

$$T_{film} = [T(R_0, \theta, z) + T_\infty] / 2 \quad (2.18)$$

Suivant la direction angulaire les conditions périodiques sont imposées pour l'ensemble du domaine radial et axial.

$$\text{Pour } 0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq z^* \leq 100 \quad \begin{cases} V_r^*(r^*, 0, z^*, t^*) = V_r^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ V_\theta^*(r^*, 0, z^*, t^*) = V_\theta^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ V_z^*(r^*, 0, z^*, t^*) = V_z^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ T(r^*, 0, z^*, t^*) = T(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \end{cases} \quad (2.19)$$

Les nombres de Reynolds  $Re_0 = 143.2836$  et Prandtl  $Pr = 8.0820$  sont calculés avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température de référence ( $T_0 = 288 K$ , à l'entrée du tube).

Les fonctions  $\mu^*(T^*)$  et  $K^*(T^*)$  ont été obtenues par un ajustement ("fitting") précis des valeurs tabulées citées dans Baehr and Stephan [27]. Ces fonctions sont :

$$\mu^*(T^*) = 0.23087 + 0.78727 \exp(-T^*/0.11386) \quad (2.20)$$

$$K^*(T^*) = 1.00111 + 0.80477 T^* - 1.06002 T^{*2} \quad (2.21)$$

Ces ajustements représentent de bonnes approximations dans le domaine des températures relatif à cette étude. La conductivité thermique adimensionnelle du solide est finie et constante dans l'intervalle des températures de cette étude:

Matériaux	La conductivité thermique $K_s$ ( $W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ )	La conductivité thermique adimensionnelle $K_s^*(T^*) = K_s/K_0$
Inconel	15	25.45
Tantale	57.5	97.57
Acier	48.5	82.30
Aluminium	237	402.17

Avec  $K_0 = 0.5893 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$

## 2.5 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par:

$$Nu(\theta, z^*) = \frac{h(\theta, Z)Di}{K_0} = \left[ \frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] \quad (2.22)$$

La température moyenne de mélange adimensionnelle dans une section  $T_m^*(z^*)$  étant définie

par :

$$T_m^*(z^*) = \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta} \quad (2.23)$$

Le nombre de Nusselt local axial et moyen circonférentiel est:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)} \right] d\theta \quad (2.24)$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide fluide:

$$\text{Nu} = \frac{1}{(2\pi)(104.17)} \int_0^{2\pi} \int_0^{104.17} \text{Nu}(\theta, z^*) dz^* d\theta \quad (2.25)$$

## 2.6 Matériel utilisé dans la simulation

Nos simulations numériques ont été accomplies grâce aux exécutions faites par un code de calcul sur un micro ordinateur personnel Dual-Core QL-64 de fréquence 2.10 GHz, et de capacité de mémoire égale à 4.00Go.

## Chapitre 3

# Résolution numérique

### 3.1 Introduction

Les problèmes physiques rencontrés dans notre quotidien (les problèmes de convection, les écoulements dans les conduits, la modélisation de l'écoulement à propriétés physique constantes ou variables, l'influence de la conduction pariétale,...) sont décrits par des équations à dérivées partielles fortement couplées et non linéaires. En général, ces équations n'admettent pas de solutions analytiques sauf dans des cas très simplifiés. C'est pourquoi un recours aux méthodes de résolution numériques s'avère nécessaire.

Il existe plusieurs méthodes numériques :

- Méthode des différences finies
- Méthode des volumes finis
- Méthode des éléments finis
- Méthodes spectrales,...

Chaque méthode de résolution numérique d'un problème continu comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

- La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits volumes appelés volumes de contrôle.
- La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes.

### 3.2 Le maillage

Dans ce chapitre nous avons choisi la méthode de volumes finis pour solutionner le problème. La méthode des volumes finis bien expliquée par Patankar [28] ont été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires.

Elles ont permis une prise en compte complète des effets de non linéarité et de compressibilité ainsi que les effets de viscosité à l'aide des équations de Navier-Stokes.

Les méthodes aux volumes finis ont supplanté les méthodes classiques basées sur les différences finies dans le traitement des problèmes complexes notamment tridimensionnels. La technique comprend deux étapes importantes :

- le maillage : il consiste à diviser le domaine en plusieurs intervalles réguliers appelés volumes de contrôle.
- la discrétisation : lors de cette étape les équations sont intégrées dans les volumes de contrôle.

Le domaine physique compris entre  $0 \leq r^* \leq R_0/D_i$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $0 \leq z^* \leq L/D_i$  est transformé en un domaine discret constitué d'un nombre fini de volumes de contrôle élémentaires cylindriques, contigus et sans discontinuité d'interface, de dimensions  $\Delta r^*$ ,  $r^* \Delta \theta$  et  $\Delta z^*$  suivant les directions respectives  $r^*$ ,  $\theta$  et  $z^*$ . A l'intérieur et au centre de chaque volume sera défini un point (ou un nœud) représentatif de l'ensemble du volume. Les figures (3.2.1), (3.2.2) schématisent successivement le domaine numérique et un volume de contrôle typique ( $\Delta v^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*$ ) dont le centre géométrique est associé au nœud **P** et limité par ses six faces : les faces Nord et Sud dans la direction radiale dont leurs centres sont (**n**) et (**s**), Est et Ouest dans la direction angulaire dont leurs centres sont (**e**) et (**w**) et Frontale et Dorsale dans la direction axiale dont leurs centres sont (**t**) et (**b**). Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes, dans la direction radiale deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction angulaire deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et en fin dans la direction axiale les deux volumes adjacents aux faces Frontale et Dorsale contenant en leurs centres les nœuds **T** et **B**.

Dans le maillage les différentes dimensions sont importantes à connaître et elles seront bien explicitées dans les figures qui suivent et qui présentent différents plans de vue du volume considéré. Les angles et les distances entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **T** et **B** sont  $d\theta_e$ ,  $d\theta_w$ ,  $dr_n^*$ ,  $dr_s^*$ ,  $dz_t^*$  et  $dz_b^*$ , respectivement tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement  $\Delta r_N^*$ ,  $\Delta r_S^*$ ,  $\Delta \theta_E$ ,  $\Delta \theta_W$ ,  $\Delta z_T^*$  et  $\Delta z_B^*$ .

Les fonctions scalaires, température et pression, sont stockées dans le nœud  $\mathbf{P}$  du volume typique tandis que les fonctions vectorielles telles les composantes de vitesse, sont situées au centre et perpendiculairement à travers les six faces de chaque volume entourant  $\mathbf{P}$ .

Ainsi, les équations de Navier-Stokes sont intégrées dans des volumes finis décalés, Patankar [28] tandis que les équations de continuité et de l'énergie seront discrétisées dans un volume typique. Cette localisation faciale des composantes de vitesses entraînera un décalage de leur volume correspondant par rapport au volume de contrôle principal. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour l'obtention de solutions physiquement acceptables, [28]. Ainsi, c'est à travers la totalité de ce domaine numérique maillé que seront intégrées sur chaque volume de contrôle les équations modélisantes écrites sous la forme conservative.

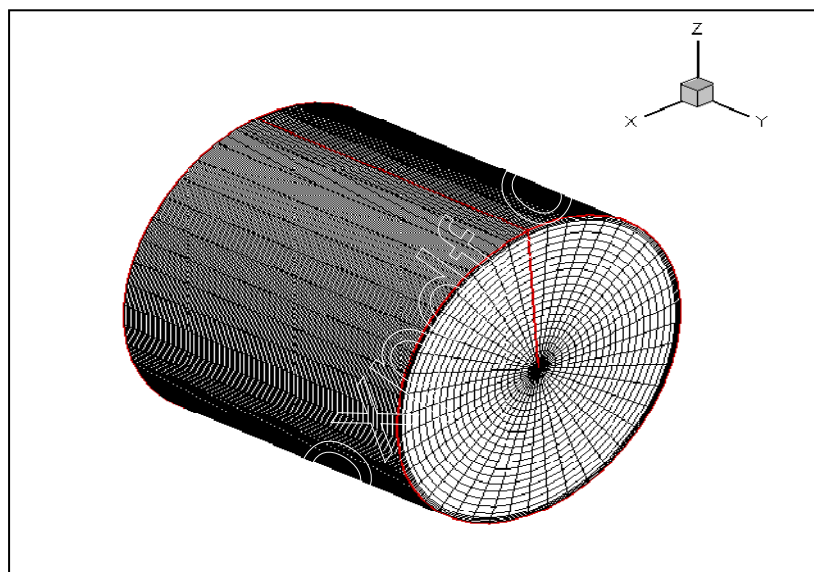


Figure 3.2.1 Le maillage du domaine physique en 3D.

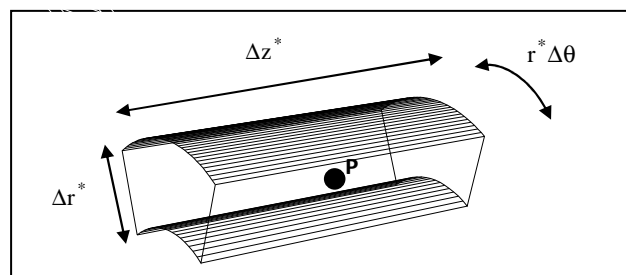


Figure 3.2.2 Le volume typique.

### 3.3 Discrétisation des équations du modèle

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques. C'est dans cette voie que nous

avons fait le choix d'une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. On rappelle que les équations de conservation peuvent être écrites sous sa forme générale conservative suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* \phi) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* \phi) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* \phi) = \\ \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \Gamma_\phi r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_\phi \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \right] + S_\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où  $\phi$  est la variable généralisée,  $S_\phi$  est le terme de source,  $\Gamma_\phi$  est le coefficient de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur dans notre cas).

L'équation de discrétisation d'une variable  $\phi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans son volume fini typique ou décalé selon le cas.

### 3.4 Définitions

#### 3.4.1 La discrétisation temporelle au second ordre :

Elle est obtenue à partir de manipulations mathématiques dans les développements en séries de Taylor d'une variable  $\phi$  par rapport au temps :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.3)$$

Si l'équation (3.3) est diminuée de l'équation (3.2) multipliée par 4, on peut montrer que :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre deux,  $(\Delta t)^2$  est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.5)$$

Aussi, si on multiplie l'équation (3.2) par 2 et retranche du produit l'équation (3.3), on peut montrer que :

$$\phi^{t+\Delta t} \approx 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} + (\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

Et donc, une approximation, avec une erreur de troncature d'ordre deux,  $(\Delta t)^2$  d'une variable

$\phi^{t+\Delta t}$  est :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} \quad (3.7)$$

Cette discrétisation est celle d'**Adam-Bashforth**.

### 3.4.2 La discrétisation spatiale au second ordre

Les discrétisations spatiales se feront selon le schéma des différences centrées qui est un schéma d'une précision du second ordre.

Considérons, dans la direction axiale, les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_P = \phi_t - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \dots \quad (3.8)$$

$$\phi_T = \phi_t - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \dots \quad (3.9)$$

En soustrayant l'équation (3.9) de (3.8), on trouve :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t \approx \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t (dz_t)^2 \quad (3.10)$$

Et donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t = \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dz_t)^2 \quad (3.11)$$

Dans tous les cas on utilise des discrétisations du second ordre : une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre  $(\Delta t)^2$  et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta r)^2$ ,  $(\Delta z)^2$  et  $(\Delta \theta)^2$ .

La forme d'Euler retardée du second ordre donnée par l'équation (3.5) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation d'Adam-Bashforth, équation (3.7) sera appliquée d'une part à tout les termes non linéaires tels les termes advectifs et d'autre part à tous les termes hybrides et les termes de force de poussée thermique qui se retrouvent dans les différents sources. Enfin la discrétisation selon un schéma



totalelement implicite au temps  $(t + \Delta t)$  sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression. Quant à la discrétisation dans l'espace, il lui sera appliqué le schéma des différences centrées qui est d'ordre deux (comme on l'a vu précédemment).

### 3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale :

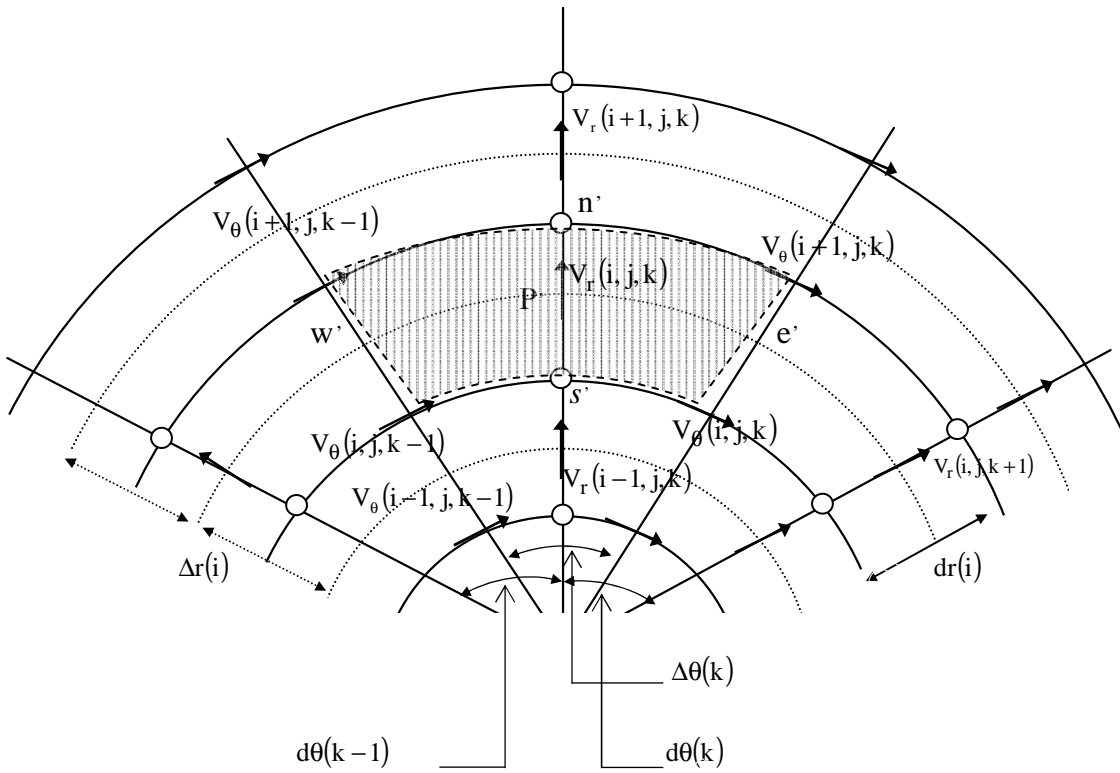
On rappelle que cette équation vue dans le chapitre 2, est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_r^*) - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned}$$

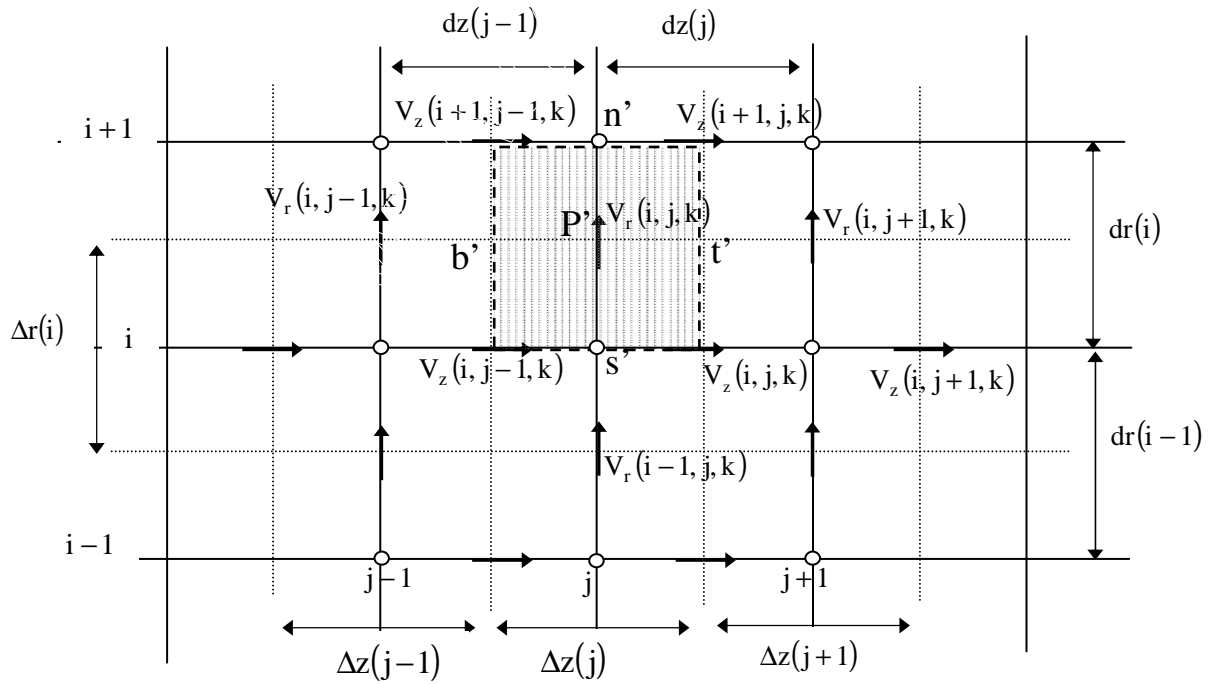
Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \quad , \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^* \left[ \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right] \quad , \quad \tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^* \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta^*} + \frac{V_r^*}{r^*} \right] \end{aligned}$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé  $r_n^* dr_n^* \Delta \theta \Delta z_p^*$  suivant la direction radiale (voir les figures **(3.2.a)** et **(3.2.b)**)



**Figure 3.2(a)** Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale dans le plan  $(r, \theta)$



**Figure 3.2(b)** Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale dans le plan  $(r, z)$

- Terme transitoire :

$$\int \int \int_{w s b} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{rp}^{*t^*} + V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* d\theta_p dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(r_n^* V_{rn}^{*t^*} V_{rn}^{*t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*} V_{rs}^{*t^*}) - (r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta V_r^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(V_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*}) - (V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{re}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rw}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] dr_n^* \Delta z_p^*$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z V_r^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(V_{zt}^{*t^*} V_{rt}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*}) - (V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rb}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left( 2[V_{\theta p}^{*t^*}]^2 - [V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}]^2 \right) dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2 \left[ \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[ \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

- **Terme de pression :**

$$\int \int \int_{w s b}^e \frac{\partial P^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

- **Termes diffusifs :**

\* **Le terme**  $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*)$

$$\int \int \int_{w s b}^e \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int \int \int_{w s b}^e \frac{\partial}{\partial r^*} \left( 2r^* \mu^{*t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b}^e \frac{\partial}{\partial r^*} \left( 2r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left( 4r^* \mu^{*t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_s^n \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \left( 2r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_s^n \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}) \left( r_n^* \frac{V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^* - 2(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}) \left( r_s^* \frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Avec

$$\mu_n^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_s^* = \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$r_n^* = r_p^*(i+1) \quad , \quad r_s^* = r_p^*(i)$$

$$dr_n^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad dr_s^* = \Delta r_p^* = \Delta r^*(i)$$

$$V_{rN}^* = V_r^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k) \quad \text{et} \quad V_{rS}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

**\* le terme**  $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*)$

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*t^*} \left[ \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^t + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* - \\ & \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left[ \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t-\Delta t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* = \\ & \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^t + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right]_{w}^e dr_n^* \Delta z_p^* - \left[ \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t-\Delta t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right]_{w}^e dr_n^* \Delta z_p^* = \\ & \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^t + \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t-\Delta t^*} \right]_{w}^e dr_n^* \Delta z_p^* + \left[ (2\mu^{*t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*}) \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right]_{w}^e dr_n^* \Delta z_p^* = \\ & \left[ \left( 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^t \Big|_e - 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^t \Big|_w + \right. \\ & \left. \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t-\Delta t^*} \Big|_w - \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t-\Delta t^*} \Big|_e \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \left[ (2\mu^{*t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*}) \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t^*} \right]_{w}^e dr_n^* \Delta z_p^* = \\ & \left[ \left( 2 \left( \mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \\ & \left. \left( \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\ & \left[ \left( 2 \left( \mu_w^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{2} \right) + \right. \\ & \left. \left( \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\ & (2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*}) \left( \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) dr_n^* \Delta z_p^* - (2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}) \left( \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) dr_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NE}}{\mu_{NE}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}}, \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NW}}{\mu_{NW}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k), \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k), \quad \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1), \quad \mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$\mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1), \quad \mu_{NW}^* = \mu^*(i+1, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k), \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k), \quad \Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1), \quad \Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$r_n^* = r_p^*(i+1), \quad dr_n^* = \Delta r_n^* = \Delta r^*(i+1)$$

$$V_{\theta_{ne}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k), \quad V_{\theta_{nw}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k-1), \quad V_{\theta_{se}}^* = V_\theta^*(i, j, k), \quad V_{\theta_{sw}}^* = V_\theta^*(i, j, k-1)$$

$$V_{rE}^* = V_r^*(i, j, k+1), \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k), \quad V_{rW}^* = V_r^*(i, j, k-1)$$

\* le terme  $\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*}$

$$\iiint_{w s b}^{e n t} \left. \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} \right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n t} \tau_{\theta\theta}^* \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \iiint_{w s b}^{e n t} \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{t^*} + \left( \frac{V_r^*}{r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* -$$

$$\iiint_{w s b}^{e n t} \left[ 2\mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{V_r^*}{r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right]_P + \left[ 2(2\mu^{*t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*}) \left( \frac{V_r^*}{r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_P \right\} dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2 \left[ \left( 2\mu_P^{*t^*} \right) \frac{1}{2r_n^*} \left( \frac{V_{\theta_{ne}}^{*t^*} - V_{\theta_{nw}}^{*t^*}}{\Delta\theta_P} + \frac{V_{\theta_{se}}^{*t^*} - V_{\theta_{sw}}^{*t^*}}{\Delta\theta_P} \right) - \left( \mu_P^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{1}{2r_n^*} \left( \frac{V_{\theta_{ne}}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta_{nw}}^{*t^*-\Delta t^*}}{\Delta\theta_P} + \frac{V_{\theta_{se}}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta_{sw}}^{*t^*-\Delta t^*}}{\Delta\theta_P} \right) \right] dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$2(2\mu_P^{*t^*} - \mu_P^{*t^*-\Delta t^*}) \left[ \frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_n^*} \right] dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2 \left[ \frac{(\mu_p^{*t})}{r_n^*} \left( V_{\theta_{ne}}^{*t} - V_{\theta_{nw}}^{*t} + V_{\theta_{se}}^{*t} - V_{\theta_{sw}}^{*t} \right) - \frac{(\mu_p^{*t-\Delta t^*})}{2r_n^*} \left( V_{\theta_{ne}}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta_{nw}}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta_{se}}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta_{sw}}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$2 \left( 2\mu_p^{*t} - \mu_p^{*t-\Delta t^*} \right) \left[ \frac{V_{rP}^{*t+\Delta t^*}}{r_n^*} \right] dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_p^* = \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}}$$

$$\Delta \theta_p = d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad r_n^* = r_c^*(i)$$

$$V_{\theta_{ne}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k), \quad V_{\theta_{nw}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k-1), \quad V_{\theta_{se}}^* = V_\theta^*(i, j, k), \quad V_{\theta_{sw}}^* = V_\theta^*(i, j, k-1)$$

$$V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k)$$

$$\mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

**\* le terme**  $\frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*)$

$$\int \int \int_{w_s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w_s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^{*t} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} - \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \left[ \mu^{*t} \left( \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_b^t r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p - \left[ \mu^{*t-\Delta t^*} \left( \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_b^t r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p =$$

$$\left[ 2\mu^{*t} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*} - \mu^{*t-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right]_b^t r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p + \left[ (2\mu^{*t} - \mu^{*t-\Delta t^*}) \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) \right]_b^t r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p =$$

$$\left[ \left( 2 \left( \mu_t^{*t} \frac{V_{znt}^{*t} - V_{zst}^{*t}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t} \frac{V_{znb}^{*t} - V_{zsb}^{*t}}{dr_n^*} \right) + \left( \mu_b^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znb}^{*t-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znt}^{*t-\Delta t^*} - V_{zst}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p +$$

$$(2\mu_t^{*t} - \mu_t^{*t-\Delta t^*}) \left( \frac{V_{rT}^{*t+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t+\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p - (2\mu_b^{*t} - \mu_b^{*t-\Delta t^*}) \left( \frac{V_{rP}^{*t+\Delta t^*} - V_{rB}^{*t+\Delta t^*}}{dz_b^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p$$

Avec :

$$\mu_t^* = \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NT}^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}}, \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NB}^*}{\mu_{NB}^*}} + \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\begin{aligned} \mu_n^* &= \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) & , & \quad \mu_s^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k) \\ \mu_{NT}^* &= \mu^*(i+1, j+1, k) & , & \quad \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \\ \mu_{NB}^* &= \mu^*(i+1, j-1, k) & , & \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k) \\ dr_n^* &= dr^*(i) & , & \quad dz_t^* = dz^*(j) \quad , \quad r_n^* = r_c^*(i) \\ V_{znt}^* &= V(i+1, j, k) \quad , \quad V_{zst}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{znb}^* = V_z^*(i+1, j-1, k) \quad , \quad V_{zsb}^* = V_z^*(i, j-1, k) \\ V_{rT}^* &= V_r^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k) \quad , \quad V_{rB}^* = V_r^*(i, j-1, k) \end{aligned}$$

**\* le terme**  $\left( \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^*$

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{wsb} \left( \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int \int \int_{wsb} \left( \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{wsb} \left( \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta \left\{ \left[ 2(T^*)_{|P} \Big|_{t^*} - (T^*)_{|P} \Big|_{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ & \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr_b^*}{Re_0^2} \cos \theta \left( \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + S_r^{t^*+\Delta t^*} \quad (3.12)$$



Avec :

$$A_N = dn = \frac{2}{Re_0} \left( 2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{2}{Re_0} \left( 2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^*}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^*}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{\Delta t^*} + \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_p^{*t^*} - \mu_p^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{r_n^*} \quad (3.13)$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[ \left( V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 - 2 \left( V_{rn}^{*t^*} \right)^2 \right] r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[ 2 \left( V_{rs}^{*t^*} \right)^2 - \left( V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 \right] r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[ \left( V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{re}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left( V_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \left[ 2 \left( V_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*} \right) - \left( V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rw}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\left[ \left( V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rt}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left( V_{zt}^{*t^*} V_{rt}^{*t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p + \left[ 2 \left( V_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*} \right) - \left( V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rb}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ 2 \left( \mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \left( \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \begin{array}{l} 2 \left( \mu_w^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^*} - V_{\theta s e}^{*t^*}}{2} \right) + \\ \left( \mu_e^{*t^* - \Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{\theta s e}^{*t^* - \Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^* - \Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{\theta s w}^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \right) \end{array} \right] dr_n^* \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{\mu_p^{*t^*}}{r_n^*} \right) (V_{\theta n e}^{*t^*} - V_{\theta n w}^{*t^*} + V_{\theta s e}^{*t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*}) - \\ \left( \frac{\mu_p^{*t^* - \Delta t^*}}{r_n^*} \right) (V_{\theta n e}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{\theta n w}^{*t^* - \Delta t^*} + V_{\theta s e}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{\theta s w}^{*t^* - \Delta t^*}) \end{array} \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \begin{array}{l} 2 \left( \mu_t^{*t^*} \frac{V_{z n t}^{*t^*} - V_{z s t}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t^*} \frac{V_{z n b}^{*t^*} - V_{z s b}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \\ \left( \mu_b^{*t^* - \Delta t^*} \frac{V_{z n b}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{z s b}^{*t^* - \Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t^* - \Delta t^*} \frac{V_{z n t}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{z s t}^{*t^* - \Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \end{array} \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* +$$

$$2 \left[ \frac{V_{\theta n e}^{*t^*} + V_{\theta n w}^{*t^*} + V_{\theta s e}^{*t^*} + V_{\theta s w}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* -$$

$$\left[ \frac{V_{\theta n e}^{*t^* - \Delta t^*} + V_{\theta n w}^{*t^* - \Delta t^*} + V_{\theta s e}^{*t^* - \Delta t^*} + V_{\theta s w}^{*t^* - \Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{\text{Gr}_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* - \frac{\text{Gr}_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta \left( \frac{T_N^{*t^* - \Delta t^*} + T_P^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* +$$

$$(P_p^{*t^* + \Delta t^*} - P_N^{*t^* + \Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*}] + [fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*}] + [fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*}] + [fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*}] + [ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*}] + [fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*}] +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ 2 \left( \mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \left( \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ 2 \left( \mu_w^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{2} \right) + \left( \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ 2 \frac{(\mu_p^{*t^*})}{r_n^*} (V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}) - \frac{(\mu_p^{*t^*-\Delta t^*})}{r_n^*} (V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ 2 \left( \mu_t^{*t^*} \frac{V_{znt}^{*t^*} - V_{zst}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t^*} \frac{V_{znb}^{*t^*} - V_{zsb}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \left( \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{znb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{znt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zst}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p +$$

$$2 \left[ \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[ \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \left( \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

On peut écrire aussi

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = b_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_p V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.14)$$

Comme  $V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}$  correspond à la vitesse  $V_r^*$  à l'interface n du volume typique ( $V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*}$ ), on peut écrire l'équation donnant la vitesse  $V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*}$  :

$$A_p V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.15)$$

### 3.6 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit :

$$\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_\theta^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_\theta^*) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^* \left[ \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \right] \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[ \left( r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[ \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (voir les figures (3.3.a) et (3.3.b)).

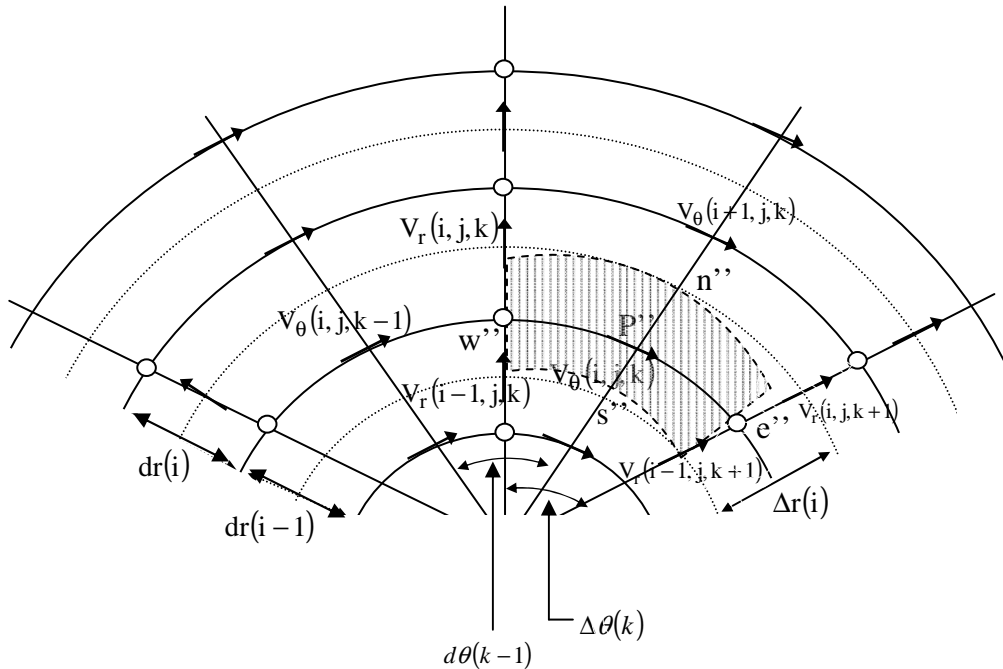


Figure 3.3. (a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction angulaire dans le plan  $(r, \theta)$

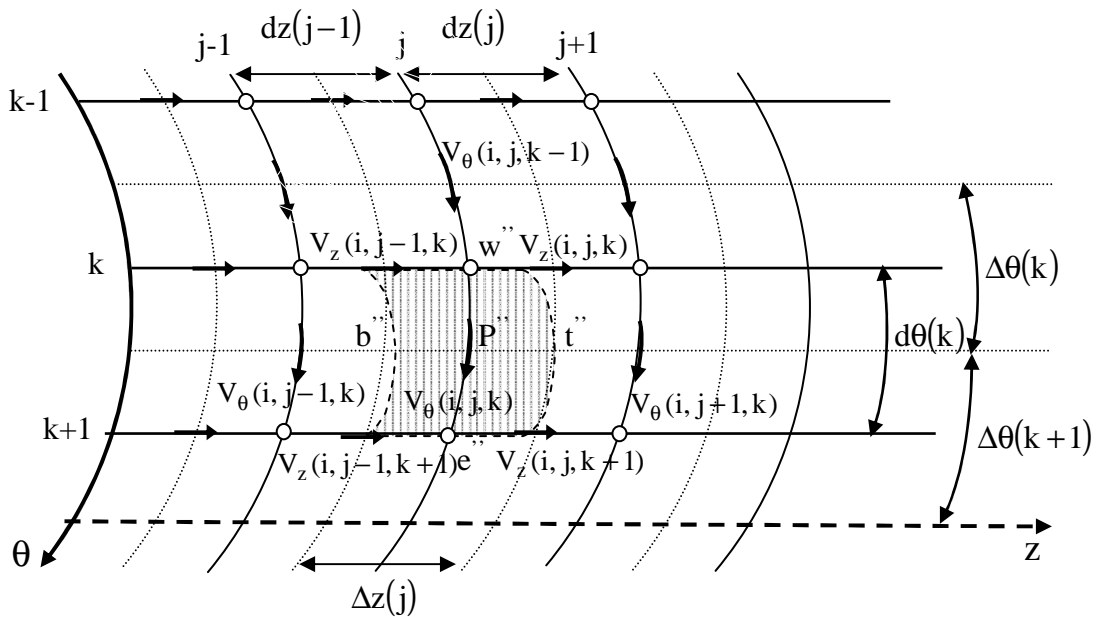


Figure 3.3. (b) : les faces dans le plan  $\theta - z$ , des volumes finis décalés suivant la direction azimutale

-Terme transitoire :

$$\int \int \int_{w s b} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial t^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{\theta P}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial t^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b} \left[ \frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(r_n^* V_{rn}^* V_{\theta n}^* - r_s^* V_{rs}^* V_{\theta s}^*) - (r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta n}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta s}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] d\theta_e \Delta z_p^*$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b} \left[ \frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(V_{\theta e}^{*t^*} V_{\theta e}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{\theta w}^{*t^*}) - (V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(V_{zt}^{*t^*} V_{\theta t}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*} V_{\theta b}^{*t^*}) - (V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta t}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta b}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int \int \int_{w s b}^e \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b}^e \left[ 2 \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} \Big|^{t^*} - \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$(2V_{rp}^{*t^*} V_{\theta p}^{*t^*} - V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\left( \frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rnw}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{2} V_{\theta p}^{*t^*} - \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

**Termes diffusifs :**

**Le terme**  $\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*)$

$$\int \int \int_{w s b}^e \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b}^e \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$\int \int \int_{w s b}^e \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^{*2} \mu^* \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{V_\theta^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* =$$

$$\frac{2}{r_p^*} \left[ r^{*2} \mu^{*t^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[ r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[ 2r^{*2} \mu^{*t^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*} \right)^{t^*} + r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[ 2r^{*2} \mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} - r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{aligned}
 & 2\mu_n^* \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^* - V_{rnw}^*}{d\theta_e} - 2\mu_s^* \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^* - V_{rsw}^*}{d\theta_e} - \\
 & \mu_n^* \frac{r_n^*}{r_p^*} (V_{\theta N}^* + V_{\theta P}^*) + \mu_s^* \frac{r_s^*}{r_p^*} (V_{\theta S}^* + V_{\theta P}^*) + \\
 & \mu_s^{*t-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_n^{*t-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t-\Delta t^*} - V_{rnw}^{*t-\Delta t^*}}{d\theta_e} + \\
 & \mu_n^{*t-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta N}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t-\Delta t^*}}{2} - \mu_s^{*t-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta S}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t-\Delta t^*}}{2}
 \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p^* + \\
 & (2\mu_n^* - \mu_n^{*t-\Delta t^*}) \left[ \frac{r_n^{*2}}{r_p^*} \left( \frac{V_{\theta N}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*t+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^* - \\
 & (2\mu_s^* - \mu_s^{*t-\Delta t^*}) \left[ \frac{r_s^{*2}}{r_p^*} \left( \frac{V_{\theta P}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta S}^{*t+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_n^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_e^*} + \frac{1}{\mu_{NE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P^*} + \frac{1}{\mu_N^*}} \quad , \quad \mu_s^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_e^*} + \frac{1}{\mu_{SE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P^*} + \frac{1}{\mu_S^*}}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) & \quad , & \mu_P^* = \mu^*(i, j, k) \\
 \mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1) & \quad , & \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \\
 \mu_{SE}^* = \mu^*(i-1, j, k+1) & \quad , & \mu_S^* = \mu^*(i-1, j, k) \\
 r_n^* = r_c^*(i) & \quad , & r_s^* = r_c^*(i) \\
 dr_n^* = dr^*(i-1) & \quad , & dr_s^* = dr^*(i)
 \end{aligned}$$



**\* le terme**  $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*)$

$$\iiint_{w s b}^{e n t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{t+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$\iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( 2\mu^* \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \left[ 2\mu^* \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \Big|^{t+\Delta t^*} \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* =$$

$$2 \left[ 2\mu_e^{*t^*} \left( \left( \frac{V_r^*}{r^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \left[ 2\mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \left( \left( \frac{V_r^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* =$$

$$2\mu_e^{*t^*} \left( \frac{V_{rne}^{*t^*} - V_{rse}^{*t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* - 2\mu_w^{*t^*} \left( \frac{V_{rnw}^{*t^*} - V_{rsw}^{*t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* -$$

$$\mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$2 \left[ \left( 2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{\theta E}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \left[ \left( 2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta W}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) \quad , \quad \mu_w^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$d\theta_e = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad d\theta_w = \Delta\theta(k) \quad , \quad r_p^* = r_p^*(i)$$

$$V_{rne}^* = V_r^*(i, j, k+1), \quad V_r^* = V_{rse}^*(i-1, j, k+1) \quad , \quad V_{rnw}^* = V_r^*(i, j, k), \quad V_{rsw}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

$$V_{\theta E}^* = V_{\theta}^*(i, j, k+1) \quad , \quad V_{\theta P}^* = V_{\theta}^*(i, j, k) \quad , \quad V_{\theta W}^* = V_{\theta}^*(i, j, k-1)$$

**\* le terme**  $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*)$

$$\iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*) \Big|_{t^*+\Delta^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \right) \Big|_{t^*+\Delta^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ \mu^{*t} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^t + \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta^*} \right) \right]_b - \left[ \mu^{*t-\Delta^*} \left( \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^{t^*-\Delta^*} + \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta^*} \right) \right]_b \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p =$$

$$\left[ 2\mu_t^{*t} \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zet}^{*t} - V_{zwt}^{*t}}{d\theta_e} \right) - 2\mu_b^{*t} \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zeb}^{*t} - V_{zwb}^{*t}}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e -$$

$$\left[ \mu_t^{*t-\Delta^*} \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zet}^{*t-\Delta^*} - V_{zwt}^{*t-\Delta^*}}{d\theta_e} \right) - \mu_b^{*t-\Delta^*} \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zeb}^{*t-\Delta^*} - V_{zwb}^{*t-\Delta^*}}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e +$$

$$\left[ (2\mu_t^{*t} - \mu_t^{*t-\Delta^*}) \left( \frac{V_{\theta T}^{*t+\Delta^*} - V_{\theta P}^{*t+\Delta^*}}{dz_t^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e - \left[ (2\mu_b^{*t} - \mu_b^{*t-\Delta^*}) \left( \frac{V_{\theta P}^{*t+\Delta^*} - V_{\theta B}^{*t+\Delta^*}}{dz_b^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e$$

Avec :

$$\mu_t^* = \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_{TE}^*}} + \frac{dz_t^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}}, \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \frac{\Delta z_T^*}{\mu_{BE}^*}} + \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\begin{aligned} \mu_e^* &= \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) & , & \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k) \\ \mu_{TE}^* &= \mu^*(i, j+1, k+1) & , & \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k) \\ \mu_{BE}^* &= \mu^*(i, j-1, k+1) & , & \quad \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \\ dz_t^* &= dz(j) & , & \quad dz_b^* = dz^*(j-1) \quad , \quad d\theta_e = d\theta(k) \\ V_{zet}^* &= V_z^*(i, j, k+1) \quad , \quad V_{zeb}^* = V_z^*(i, j-1, k+1) \quad , \quad V_{zwt}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zwb}^* = V_z^*(i, j-1, k) \\ V_{\theta T}^* &= V_{\theta}^*(i, j+1, k) & , & \quad V_{\theta P}^* = V_{\theta}^*(i, j, k) \quad , \quad V_{\theta B}^* = V_{\theta}^*(i, j-1, k) \end{aligned}$$

**\* le terme**  $\left( \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^*$

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{w s b}^{e n t} \left( \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int \int \int_{w s b}^{e n t} \left( \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b}^{e n t} \left( \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{t^* - \Delta t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \left\{ \left[ 2(T^*)_{|p} \Big|_{t^*} - (T^*)_{|p} \Big|_{t^* - \Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* = \\ & \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \left( \frac{T_E^{*t^* - \Delta t^*} + T_P^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \end{aligned}$$

L'ensemble des termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_p V_{\theta p}^{*t^* + \Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*t^* + \Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*t^* + \Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*t^* + \Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*t^* + \Delta t^*} + A_T V_{\theta T}^{*t^* + \Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*t^* + \Delta t^*} + S_{\theta}^{*t^* + \Delta t^*} \quad (3.16)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_n^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_s^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0} \left( 2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{2}{Re_0} \left( 2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0} \left( 2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^* - \Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_e}{dz_b^*}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \quad (3.17)$$

$$S_{\theta}^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{\theta p}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*}] + [fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*}] + [fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*}] + [fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*}] + [ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*}] + [fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*}] +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ \begin{array}{l} 2\mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*} - V_{rnw}^{*t^*}}{d\theta_e} - 2\mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*} - V_{rsw}^{*t^*}}{d\theta_e} - \\ \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \end{array} \right] d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ \begin{array}{l} \mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} (V_{\theta N}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} (V_{\theta S}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \\ \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta N}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta S}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{array} \right] d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ \begin{array}{l} 2\mu_e^{*t^*} \left( \frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - 2\mu_w^{*t^*} \left( \frac{V_{rnw}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - \\ \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \end{array} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[ \begin{array}{l} 2 \left( \mu_t^{*t^*} \frac{V_{zet}^{*t^*} - V_{zwt}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*} \frac{V_{zeb}^{*t^*} - V_{zwb}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) + \\ \left( \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{zet}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zwt}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{zeb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zwb}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \end{array} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e +$$

$$\left( \frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rnw}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{2} V_{\theta p}^{*t^*} - \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$- \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \left( \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

La source peut s'écrire :

$$S_{\theta}^{t^*+\Delta t^*} = b_{\theta}^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_p V_{\theta p}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{\theta T}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*t^*+\Delta t^*} + b_{\theta}^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.18)$$

Comme  $V_{\theta_p}^{*t+\Delta t^*}$  correspond à la vitesse  $V_{\theta}^*$  à l'interface  $e$  du volume typique ( $V_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*}$ ), on peut écrire l'équation donnant la vitesse  $V_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*}$  :

$$A_P V_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{\theta_N}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{\theta_S}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{\theta_E}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{\theta_W}^{*t+\Delta t^*} + A_T V_{\theta_T}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{\theta_B}^{*t+\Delta t^*} + b_{\theta}^* + \left( P_p^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.19)$$

### 3.7 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit :

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_z^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{zr}^* = \tau_{rz}^* = \mu^* \left[ \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[ \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right], \quad \tau_{zz}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (voir les figures (3.4.a) et (3.4.b)).

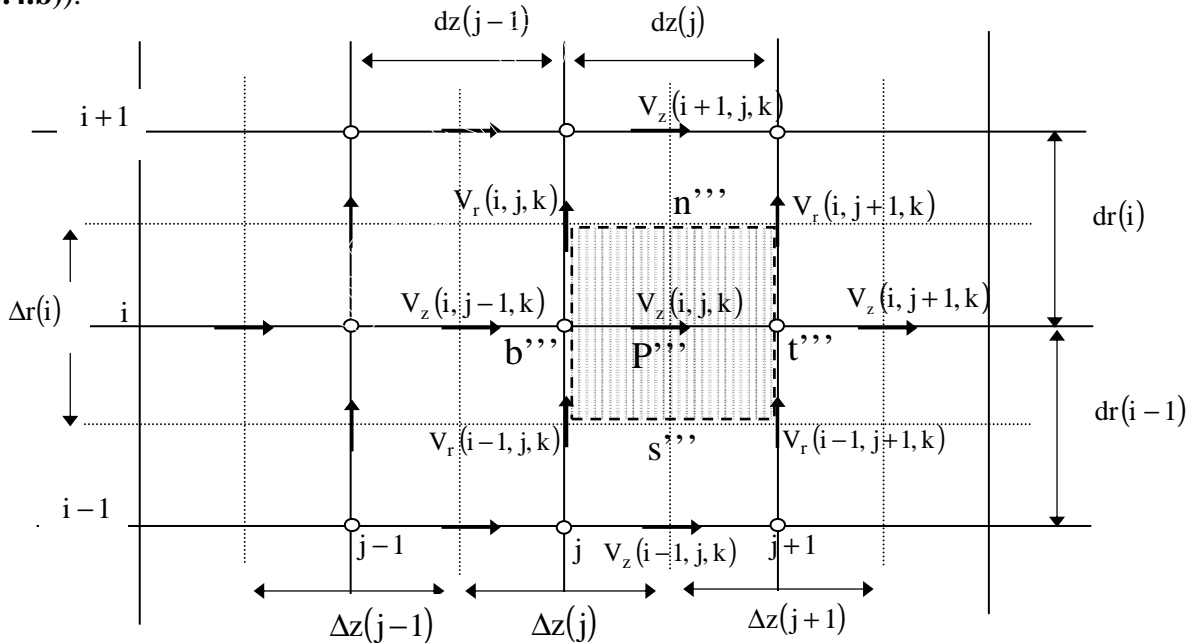


Figure 3.4.a : les faces, dans le plan  $r-z$ , des volumes finis décalés suivant la direction axiale

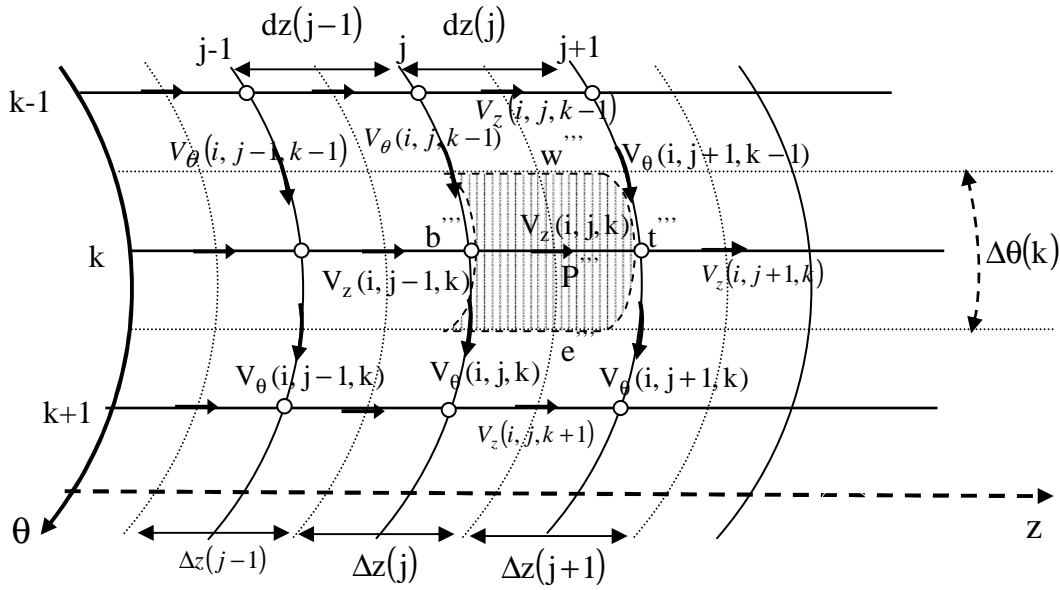


Figure 3.4.b : les faces, dans le plan  $\theta - z$ , des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

- Terme transitoire :

$$\int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} \Big|_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{zP}^{*t^* + \Delta t^*} - 4V_{zP}^{*t^*} + V_{zP}^{*t^* - \Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - 2 \int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|_{t^* - \Delta t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$\left[ 2(r_n^* V_{rn}^{*t^*} V_{zn}^{*t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*} V_{zs}^{*t^*}) - (r_n^* V_{rn}^{*t^* - \Delta t^*} V_{zn}^{*t^* - \Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^* - \Delta t^*} V_{zs}^{*t^* - \Delta t^*}) \right] \Delta \theta_p dz_t^*$$

$$\int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_w^e \int_s^b \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|_{t^* - \Delta t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2(V_{\theta e}^{*t^*} V_{ze}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{zw}^{*t^*}) - (V_{\theta e}^{*t^* - \Delta t^*} V_{ze}^{*t^* - \Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^* - \Delta t^*} V_{zw}^{*t^* - \Delta t^*}) \right] \Delta r_p^* dz_t^*$$

$$\int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* V_z^* \right) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* V_z^* \right) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* V_z^* \right) \Big|^{t-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[ 2 \left( V_{zt}^{*t} V_{zt}^{*t} - V_{zb}^{*t} V_{zb}^{*t} \right) - \left( V_{zt}^{*t-\Delta t^*} V_{zt}^{*t-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t-\Delta t^*} V_{zb}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

- **Terme de pression :**

$$\int \int \int_{w s b}^{e n t} - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left( P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

- **Termes diffusifs :**

\* **Le terme**  $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \tau_{rz}^* \right)$

$$\int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|^{t+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ r^* \mu^{*t} \left( \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* -$$

$$\int \int \int_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ r^* \mu^{*t-\Delta t^*} \left( \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t-\Delta t^*} + \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ r^* \mu^{*t} \left( \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right]_s^n - \left[ r^* \mu^{*t-\Delta t^*} \left( \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t-\Delta t^*} + \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right]_s^n \right\} \Delta \theta_p dz_t^* =$$

$$\left[ 2 \mu_n^{*t} r_n^* \left( \frac{V_{rnt}^{*t} - V_{rnb}^{*t}}{dz_t^*} \right) - 2 \mu_s^{*t} r_s^* \left( \frac{V_{rst}^{*t} - V_{rsb}^{*t}}{dz_t^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t^* -$$

$$\left[ \mu_n^{*t-\Delta t^*} r_n^* \left( \frac{V_{rnt}^{*t-\Delta t^*} - V_{rnb}^{*t-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) - \mu_s^{*t-\Delta t^*} r_s^* \left( \frac{V_{rst}^{*t-\Delta t^*} - V_{rsb}^{*t-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t^* +$$

$$\left( 2 \mu_n^{*t} - \mu_n^{*t-\Delta t^*} \right) \left( r_n^* \frac{V_{zN}^{*t+\Delta t^*} - V_{zP}^{*t+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \Delta \theta_p dz_t^* - \left( 2 \mu_s^{*t} - \mu_s^{*t-\Delta t^*} \right) \left( r_s^* \frac{V_{zP}^{*t+\Delta t^*} - V_{zS}^{*t+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p dz_t^*$$

**Avec**

$$\mu_n^* = \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_t^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}}, \quad \mu_s^* = \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_t^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_{ST}^*}} + \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_S^*}}$$

$$\begin{aligned} \mu_t^* &= \mu_r^* = \mu^*(i, j+1, k) & , & & \mu_p^* &= \mu^*(i, j, k) \\ \mu_{NT}^* &= \mu^*(i+1, j+1, k) & , & & \mu_N^* &= \mu^*(i+1, j, k) \\ \mu_{ST}^* &= \mu^*(i-1, j+1, k) & , & & \mu_S^* &= \mu^*(i-1, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{rnt}^* &= V_r^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{rst}^* = V_r^*(i-1, j+1, k) \quad , \quad V_{rnb}^* = V_r^*(i, j, k) \quad , \quad V_{rsb}^* = V_r^*(i-1, j, k) \\ V_{zN}^* &= V_z^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zS}^* = V_z^*(i-1, j, k) \\ r_n^* &= r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1) \quad , \quad dr_n^* = dr^*(i) \\ \Delta r_N^* &= \Delta r^*(i+1) \quad , \quad \Delta r_P^* = \Delta r^*(i) \quad , \quad \Delta r_S^* = \Delta r^*(i-1) \end{aligned}$$

**\* le terme**  $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*)$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|_{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\ 2 \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*t^*} \left[ \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* &- \\ \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left[ \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* &= \\ \left\{ \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e - \left[ \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \right\} \Delta r_p^* dz_t^* &= \\ \left[ \left( 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_p^* dz_t^* + \left[ \left( 2\mu^{*t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right]_w^e \Delta r_p^* dz_t^* &= \\ \left[ 2\mu_e^{*t^*} \left( \frac{V_{\theta et}^{*t^*} - V_{\theta p}^{*t^*}}{dz_t^*} \right) - 2\mu_w^{*t^*} \left( \frac{V_{\theta wt}^{*t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*}}{dz_t^*} \right) \right] \Delta r_p^* dz_t^* - & \\ \left[ \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{\theta et}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{V_{\theta wt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) \right] \Delta r_p^* dz_t^* + & \\ \left( 2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \Delta r_p^* dz_t^* - \left( 2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_w} \right) \Delta r_p^* dz_t^* & \end{aligned}$$

Avec :



$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_p}{\mu_t^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_{ET}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_p}{\mu_p^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}} \quad , \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_p}{\mu_t^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_{WT}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_p}{\mu_p^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_t^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{ET}^* = \mu^*(i, j+1, k+1) \quad , \quad \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1)$$

$$\mu_{WT}^* = \mu^*(i, j+1, k-1) \quad , \quad \mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \quad , \quad r_p^* = r_p^*(i)$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_p = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$V_{\theta et}^* = V_\theta^*(i, j+1, k), \quad V_{\theta wt}^* = V_\theta^*(i, j+1, k-1), \quad V_{\theta wb}^* = V_\theta^*(i, j, k-1), \quad V_{\theta p}^* = V_\theta^*(i, j, k)$$

$$V_{zE}^* = V_z^*(i, j, k+1) \quad , \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zW}^* = V_z^*(i, j, k-1)$$

**\* le terme**  $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*)$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b}^{e n t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[ 2\mu^{*t^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_b^t - \left[ 2\mu^{*t^*-\Delta t^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_b^t \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\ & \left[ 2 \left( 2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_T^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p - \left[ 2 \left( 2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_P^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_t^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_b^* = \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1) \quad , \quad \Delta z_P^* = \Delta z^*(j)$$

$$V_{zT}^* = V_z^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zB}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*} + S_z^{t^*+\Delta t^*}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
A_N &= dn = \frac{1}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta\theta_p dz_t^*}{dr_n^*} \\
A_S &= ds = \frac{1}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta\theta_p dz_t^*}{dr_s^*} \\
A_E &= de = \frac{1}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* dz_t^*}{r_p^* d\theta_e} \\
A_W &= dw = \frac{1}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* dz_t^*}{r_p^* d\theta_w} \\
A_T &= dt = \frac{2}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p}{\Delta z_T^*} \\
A_B &= db = \frac{2}{\text{Re}_0} \left( 2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p}{\Delta z_p^*} \\
A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_t^*}{\Delta t^*} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4V_{zp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_t^* - \frac{V_{zp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_t^* + \\
&\quad \left[ fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*} \right] + \left[ fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*} \right] + \left[ fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*} \right] + \left[ fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*} \right] + \\
&\quad \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \begin{aligned} &2\mu_n^{*t^*} r_n^* \frac{V_{rnt}^{*t^*} - V_{rnb}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_s^{*t^*} r_s^* \frac{V_{rst}^{*t^*} - V_{rsb}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ &\mu_n^{*t^*-\Delta t^*} r_n^* \frac{V_{rnt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} r_s^* \frac{V_{rst}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{aligned} \right] \Delta\theta_p dz_t^* + \\
&\quad \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \begin{aligned} &2\mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta et}^{*t^*} - V_{\theta p}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta wt}^{*t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ &\mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta wt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta et}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{aligned} \right] \Delta r_p^* dz_t^* + \\
&\quad \left( P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = b_z^* + \left( P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P V_{zP}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t+\Delta t^*} + A_T V_{zT}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t+\Delta t^*} + b_z^* + \left( P_P^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \quad (3.21)$$

Comme  $V_{zP}^{*t+\Delta t^*}$  correspond à la vitesse  $V_z^*$  à l'interface  $t$  du volume typique ( $V_{zt}^{*t+\Delta t^*}$ ),

on peut écrire l'équation donnant la vitesse  $V_{zt}^{*t+\Delta t^*}$  :

$$A_P V_{zt}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t+\Delta t^*} + A_T V_{zT}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t+\Delta t^*} + b_z^* + \left( P_P^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \quad (3.22)$$

### 3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie

Cette équation exprimée en termes de flux thermiques s'écrit :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* T^*) = G^* - \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right]$$

$$\text{Avec } G^* = \begin{cases} K_s^* / (Re_0 Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Et les densités de flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation de l'énergie est discrétisée dans un volume de contrôle typique, donc :

- **Terme transitoire :**

$$\int_w^e \int_s^t \int_b^t \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \Big|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3T_P^{*t+\Delta t^*} - 4T_P^{*t} + T_P^{*t-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* v_r^* T^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* v_r^* T^* \right) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* v_r^* T^* \right) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ \left( r^* v_r^* T^* \right)_{r_n}^{t^*} - \left( r^* v_r^* T^* \right)_{r_s}^{t^*} \right] - \left[ \left( r^* v_r^* T^* \right)_{r_n}^{t^*-\Delta t^*} - \left( r^* v_r^* T^* \right)_{r_s}^{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ \left( r_n^* v_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left( r_s^* v_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{t^*} - \left[ \left( r_n^* v_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left( r_s^* v_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{t^*-\Delta t^*} \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\left\{ \left[ r_n^* v_{rn}^* \left( T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] - \left[ r_s^* v_{rs}^* \left( T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*} \right) \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[ \left( r_n^* v_{rn}^* \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left( r_s^* v_{rs}^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right]$$

Avec :

$$T_N^* = T^*(i+1, j, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_S^* = T^*(i-1, j, K)$$

$$v_{rn}^* = v_r^*(i, j, K) \quad , \quad v_{rs}^* = v_r^*(i-1, j, K)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\theta^* T^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\theta^* T^* \right) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v_\theta^* T^* \right) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left\{ 2 \left[ \left( v_{\theta_e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left( v_{\theta_w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{t^*} - \left[ \left( v_{\theta_e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left( v_{\theta_w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{t^*-\Delta t^*} \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* =$$

$$\left\{ \left[ v_{\theta_e}^* \left( T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) \right] - \left[ v_{\theta_w}^* \left( T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*} \right) \right] \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* -$$

$$\left[ \left( v_{\theta_e}^* \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left( v_{\theta_w}^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Avec :

$$T_E^* = T^*(i, j, K+1) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_W^* = T^*(i, j, K-1)$$

$$v_{\theta_e}^* = v_\theta^*(i, j, K) \quad , \quad v_{\theta_w}^* = v_\theta^*(i, j, K-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z^*} \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[ \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*} - \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*} \right] - \left[ \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} - \left( V_z^* T^* \right) \Big|_{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\
& \left\{ 2 \left[ \left( V_{z_t}^* \frac{T_P^* + T_P^*}{2} \right) - \left( V_{z_b}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right] - \left[ \left( V_{z_t}^* \frac{T_P^* + T_P^*}{2} \right) - \left( V_{z_b}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right] \Big|_{t^*-\Delta t^*} \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\
& \left\{ \left[ V_{z_t}^* (T_P^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] - \left[ V_{z_b}^* (T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*}) \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p - \\
& \left[ \left( V_{z_t}^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left( V_{z_b}^* \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
T_T^* &= T^*(i, j+1, K) & , & & T_P^* &= T^*(i, j, K) & , & & T_B^* &= T^*(i, j-1, K) \\
V_{z_t}^* &= V_z^*(i, j, K) & , & & V_{z_b}^* &= V_z^*(i, j-1, K)
\end{aligned}$$

- **Termes diffusifs :**

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) dr^* d\theta dz^* = \\
& \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial r^*} \left( 2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\
& \left( 2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* - \left( r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* = \left[ \left( 2K^{*t^*} - K^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{t^*+\Delta t^*} \right) \right] \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* = \\
& \left\{ \left( 2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( r_n^* \frac{T_N^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) - \left( 2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( r_s^* \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_S^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
K_n^* &= \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_N^*}{K_N^*}} & , & & K_s^* &= \frac{2dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_S^*}{K_S^*}} \\
K_N^* &= K^*(i+1, j, K) & , & & K_P^* &= K^*(i, j, K) & , & & K_S^* &= K^*(i-1, j, K) \\
dr_n^* &= dr^*(i) & , & & dr_s^* &= dr^*(i-1) \\
\Delta r_N^* &= \Delta r^*(i+1) & , & & \Delta r_P^* &= \Delta r^*(i) & , & & \Delta r_S^* &= \Delta r^*(i-1) \\
r_n^* &= r_c^*(i) & , & & r_s^* &= r_c^*(i-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) dr^* d\theta dz^* = \\
 & \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( 2K^{*t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\
 & \left( 2K^{*t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \left( K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \left[ \left( 2K^{*t^*} - K^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\
 & \left\{ \left( 2K_e^{*t^*} - K_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{T_E^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) - \left( 2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{1}{r_p^*} \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_W^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

Avec :

$$K_e^* = \frac{2d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p^*} + \frac{\Delta\theta_E}{K_E^*}} \quad , \quad K_w^* = \frac{2d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p^*} + \frac{\Delta\theta_W}{K_W^*}}$$

$$K_E^* = K^*(i, j, k+1) \quad , \quad K_W^* = K^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \quad \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1)$$

$$\Delta\theta_p = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w \ s \ b}^{e \ n \ t} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \\
 & \left( 2K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_b^t r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p - \left( K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \Big|_b^t r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = \left[ \left( 2K^{*t^*} - K^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] \Big|_b^t r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = \\
 & \left\{ \left( 2K_t^{*t^*} - K_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{T_T^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_t^*} \right) - \left( 2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left( \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_B^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_b^*} \right) \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p
 \end{aligned}$$

Avec :

$$K_t^* = \frac{2dz_t^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_T^*}{K_T^*}} \quad , \quad K_b^* = \frac{2dz_b^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_B^*}{K_B^*}}$$

$$K_T^* = K^*(i, j+1, k) \quad , \quad K_p^* = K^*(i, j, k) \quad , \quad K_B^* = K^*(i, j-1, k)$$

$$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1) \quad , \quad \Delta z_p^* = \Delta z^*(j) \quad , \quad \Delta z_B^* = \Delta z^*(j-1)$$

$$dz_t^* = dz^*(j) \quad , \quad dz_b^* = dz^*(j-1)$$

Termes de production d'énergie :

$$\int_{w s b}^{\text{e n t}} G^* r^* dr^* d\theta dz^* = G^* \int_{w s b}^{\text{e n t}} r^* dr^* d\theta dz^* = G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

La production  $G^*$  est constante  $\left( G^* = \frac{K_s^*}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \right)$ .

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_p T_p^{*t+\Delta t^*} = A_N T_N^{*t+\Delta t^*} + A_S T_S^{*t+\Delta t^*} + A_E T_E^{*t+\Delta t^*} + A_W T_W^{*t+\Delta t^*} + A_T T_T^{*t+\Delta t^*} + A_B T_B^{*t+\Delta t^*} + S^{*t+\Delta t^*} \quad (3.23)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_N = dn &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*} & A_S = ds &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\ A_E = de &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_e^{*t^*} - K_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e} & A_W = dw &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w} \\ A_T = dt &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_t^{*t^*} - K_t^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_t^*} \\ A_B = db &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left( 2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_b^*} \\ A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B + \frac{3 r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_t^*}{2 \Delta t^*} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
 S^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\
 &\left[ \left( V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{rn}^{*t^*} (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 &\left[ V_{rs}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*}) - \left( V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
 &\left[ \left( V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{\theta e}^{*t^*} (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
 &\left[ V_{\theta w}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*}) - \left( V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\
 &\left[ \left( V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_T^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{zt}^{*t^*} (T_T^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p + \\
 &\left[ V_{zb}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*}) - \left( V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
 \end{aligned}$$

$$S^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$(f_n^{t^*-\Delta t^*} - f_n^{t^*}) + (f_s^{t^*} - f_s^{t^*-\Delta t^*}) + (f_e^{t^*-\Delta t^*} - f_e^{t^*}) + (f_w^{t^*} - f_w^{t^*-\Delta t^*}) + (f_t^{t^*-\Delta t^*} - f_t^{t^*}) + (f_b^{t^*} - f_b^{t^*-\Delta t^*})$$

Où:

$$f_n^{*t^*} = V_{rn}^{*t^*} (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad f_n^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$f_s^{*t^*} = V_{rs}^{*t^*} (T_S^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad f_s^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_S^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$f_e^{*t^*} = V_{\theta e}^{*t^*} (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad f_e^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$f_w^{*t^*} = V_{\theta w}^{*t^*} (T_W^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad f_w^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_W^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$f_t^{*t^*} = V_{zt}^{*t^*} (T_T^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad , \quad f_t^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_T^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$f_b^{*t^*} = V_{zb}^{*t^*} (T_B^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad , \quad f_b^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_B^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$



### 3.9 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est discrétisée dans un volume fini typique, donc :

$$\int_s^n \int_b^e \int_t^t \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = 0$$

$$\int_s^n \int_b^e \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (r_n^* V_{rn}^{*t+\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t+\Delta t^*}) \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int_s^n \int_b^e \int_t^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_s^n \int_b^e \int_t^t \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (V_{zt}^{*t+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

Et on obtient l'équation de continuité discrétisée :

$$(r_n^* V_{rn}^{*t+\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t+\Delta t^*}) \Delta\theta_p \Delta z_p^* + (V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (V_{zt}^{*t+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = 0 \quad (3.25)$$

### 3.10 Discrétisation des conditions aux limites

Toutes les conditions sur les champs de vitesses et de température et sur les flux seront chacune transformées en une forme discrète, conformément au maillage. Il s'agira toujours d'identifier pour chaque condition aux limites les coefficients des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants. Etant donné que la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques, tandis que les autres conditions seront directement données. Le domaine numérique est défini par:  $i = 1, IL$  ;  $j = 1, JL$  et  $k = 1, KL$  balayant les directions radiales, axiales et angulaires.

#### 3.10.1 A l'entrée du conduit :

$$A z^* = 0 \text{ et } t^* > 0 \text{ pour } \begin{cases} 0 \leq r^* \leq \frac{1}{2} & V_r^*(r^*, \theta, 0, t^*) = V_\theta^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 0 \\ & \text{on a : } V_z^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 2(1 - 4r^{*2}) \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi & T^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 0 \end{cases}$$

Le domaine numérique correspondant est :  $j=1$  ,  $1 \leq i \leq IL$  ,  $1 \leq k \leq KL$

Domaine fluide :

a) pour la composante axiale, par exemple,  $V_z^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 2(1 - 4r^{*2})$  elle doit vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zp}^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k) &= A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*}(i+1, j, k) + A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*}(i-1, j, k) + \\ &A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k+1) + A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*}(i, j, k-1) + \\ &A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*}(i, j+1, k) + A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k)V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*}(i, j-1, k) + \\ &S_z^{t^*+\Delta t^*}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Qui devra donc s'écrire :

$$1.V_{zp}^{*t^*+\Delta t^*} = 0.V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*} + 2[1 - 4r_p^{*2}(i)]$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont :

$$\begin{aligned} A_p^{t^*+\Delta t^*} &= 1 \\ A_N^{t^*+\Delta t^*} &= A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\ S_z^{t^*+\Delta t^*} &= 2[1 - 4r_p^{*2}(i)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

b) de même pour les autres variables  $V_r^*$ ,  $V_\theta^*$  et la température  $T^*$ , qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned} A_p^{t^*+\Delta t^*} &= 1 \\ A_N^{t^*+\Delta t^*} &= A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\ S_r^{t^*+\Delta t^*} &= 0 \text{ (pour } V_r^*), \quad S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = 0 \text{ (pour } V_\theta^*), \quad S^{t^*+\Delta t^*} = 0 \text{ (pour } T^*) \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.10.2 A la sortie du conduit : $z^* = 104.17$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0$$

Ces conditions sont discrétisées par des différences régressives. On présente cette discrétisation pour la vitesse radiale qui est similaire à celles des autres composantes de la vitesse:

$$\frac{(V_r^*(i, JL, k) - V_r^*(i, JL - 1, k))}{dz^*(JL - 1)} = 0$$

$$V_r^*(i, JL, k) = V_r^*(i, JL - 1, k)$$

Si la dernière équation est identifiée à la forme standard de l'équation de discrétisation,

Les coefficients sont :

$$A_p^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

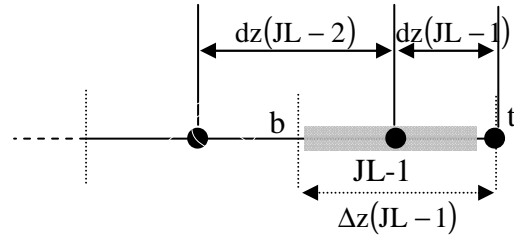
$$A_N^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_T^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0 \quad (3.29)$$

$$S_r^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

La condition sur la température :  $\frac{\partial}{\partial z^*} \left( K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \Big|_{z^*=L/Di} = 0$  se discrétise autour de **JL-1**

selon les différences centrées à l'ordre 2 :

$$K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_t - K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_b = 0 \Rightarrow$$



$$K_t^* \frac{T^*(i, JL, k) - T^*(i, JL-1, k)}{dz^*(JL-1)} - K_b^* \frac{T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)}{dz^*(JL-2)} = 0$$

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{K_b^* dz^*(JL-1)}{K_t^* dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

Sachant que dans la partie solide la conductivité est constante  $K_n^* = K_s^* = K_t^* = K_b^*$  donc

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approché par l'approximation d'Adam-Bashforth et on déduit les différents coefficients :

$$A_p^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_T^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 2 \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k)] - \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k)] \quad (3.30)$$

Dans la partie fluide la conductivité en **t** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 2 \frac{K_b^{*t^*}}{K_t^{*t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[ T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k) \right] -$$

$$\frac{K_b^{*t^*-\Delta t^*}}{K_t^{*t^*-\Delta t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} \left[ T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k) \right]$$

### 3.10.3 A la paroi

La condition thermique à la paroi est :

$$-K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=R_o/D_i} = \frac{(h_{ra} + h_{co})D_i}{K_o} T^* \Big|_{r^*=R_o/D_i}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(iL, J, K) = 1 + \frac{(h_{ra} + h_{co})D_i}{K_o} \frac{dr^*(iL-1)}{\text{cof}}$$

$$\text{cof} = 2K^*(iL-1, j, k) \Big|^{t^*} - K^*(iL-1, j, k) \Big|^{t^*-\Delta t^*}$$

$$A_S^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = 1 \tag{3.31}$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(iL, j, k) = 0$$

### 3.10.4 Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

$$\left( i=1 \quad , \quad 1 \leq j \leq JL \quad , \quad 1 \leq k \leq KL \right)$$

Le problème traité n'est pas axisymétrique, Il est caractérisé par des gradients de vitesse et de température finis (non nuls) à travers l'axe du conduit traduisant une dynamique du champ d'écoulement du fluide. On exploite plutôt, pour cela, les conditions dynamiques à l'axe du conduit.

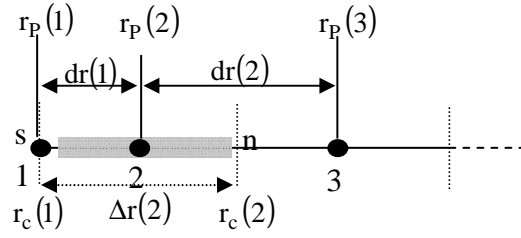
$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = 0$$

$$\text{a) La condition sur la température est : } \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \Big|_{r^*=0} = 0$$

Une première intégration autour du nœud 2 donne :

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_n - \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_s = 0$$

$$\frac{T^*(3, j, k) - T^*(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{T^*(2, j, k) - T^*(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$



Ou  $dr(2) = r_p^*(3) - r_p^*(2)$  et  $dr(1) = r_p^*(2) - r_p^*(1)$

On peut donc en déduire la température au nœud 1 (sur l'axe) sous la forme :

$$T^*(1, j, k) = (1 + F^*)T^*(2, j, k) - F^*T^*(3, j, k)$$

$$F^* = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)} \tag{3.32}$$

Cette approximation est utilisée pour l'interpolation des températures à l'axe. Les températures interpolées seront imposées comme conditions aux limites à l'axe, mais avec la discrétisation d'Adam-Bashforth pour les termes à droite de l'équation (3.32). Les coefficients de l'équation de discrétisation de la condition à l'axe sont :

$$A_p^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t^*}(1, j, k) =$$

$$A_W^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = 0 \tag{3.33}$$

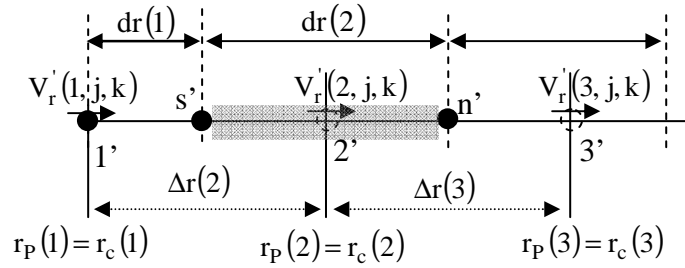
Le terme de source contiendrait alors:

$$S^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[ (1 + F^*)T^{*t^*}(2, j, k) - F^*T^{*t^*}(3, j, k) \right] - \left[ (1 + F^*)T^{*t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - F^*T^{*t^*-\Delta t^*}(3, j, k) \right] \tag{3.34}$$

b) La condition sur la composante  $V_r^*$  est :  $\left. \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) \right|_{r^*=0} = 0$

Le maillage étant décalé suivant la direction radiale, l'intégration se fait entre les faces s et n du le volume de contrôle décalé :

$$\left. \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right|_n - \left. \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right|_s = 0$$



$$\frac{V_r^*(3, j, k) - V_r^*(2, j, k)}{\Delta r^*(3)} - \frac{V_r^*(2, j, k) - V_r^*(1, j, k)}{\Delta r^*(2)} = 0$$

Ou  $\Delta r^*(3) = r_c^*(3) - r_c^*(2)$  et  $\Delta r^*(2) = r_c^*(2) - r_c^*(1)$

On obtient :

$$V_r^*(1, j, k) = (1 + F_r^*)V_r^*(2, j, k) - F_r^*V_r^*(3, j, k) \quad \text{avec} \quad F_r^* = \frac{r_c^*(2) - r_c^*(1)}{r_c^*(3) - r_c^*(2)} \quad (3.35)$$

Les coefficients de discrétisation sont :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t^*}(1, j, k) &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t^*}(1, j, k) &= A_S^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = \\ A_W^{t+\Delta t^*}(1, j, k) &= A_T^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Le terme de source contiendrait alors:

$$S_r^{t+\Delta t^*}(1, j, k) = 2 \left[ (1 + F_r^*)V_r^{*t^*}(2, j, k) - F_r^*V_r^{*t^*}(3, j, k) \right] - \left[ (1 + F_r^*)V_r^{*t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - F_r^*V_r^{*t^*-\Delta t^*}(3, j, k) \right]$$

c) La condition sur la composante  $V_\theta^*$  est :  $\left. \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right) \right|_{r^*=0} = 0$

Par rapport à  $r^*$  l'intégration de cette condition se fait sans savoir à utiliser le maillage décalé donc entre les faces n et s:

$$\left. \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right|_n - \left. \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} \right|_s = 0 \Rightarrow \frac{V_\theta^*(3, j, k) - V_\theta^*(2, j, k)}{dr^*(2)} - \frac{V_\theta^*(2, j, k) - V_\theta^*(1, j, k)}{dr^*(1)} = 0$$

On déduit, donc :

$$V_{\theta}^*(1, j, k) = (1 + F_{\theta}^*)V_{\theta}^*(2, j, k) - F_{\theta}^*V_{\theta}^*(3, j, k)$$

$$F_{\theta}^* = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)} \quad (3.37)$$

Par rapport au nœud 1, les coefficients et la source sont identifiés par:

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) =$$

$$A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0 \quad (3.38)$$

$$S_{\theta}^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 2\left[(1 + F_{\theta}^*)V_{\theta}^{*t^*}(2, j, k) - F_{\theta}^*V_{\theta}^{*t^*}(3, j, k)\right] - \left[(1 + F_{\theta}^*)V_{\theta}^{*t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - F_{\theta}^*V_{\theta}^{*t^*-\Delta t^*}(3, j, k)\right]$$

**d)** la condition sur la composante  $V_z^*$  est :  $\left. \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \right|_{r^*=0} = 0$

De la même manière que précédemment on obtient:

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) =$$

$$A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0 \quad (3.39)$$

$$S_z^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 2\left[(1 + F_z^*)V_z^{*t^*}(2, j, k) - F_z^*V_z^{*t^*}(3, j, k)\right] - \left[(1 + F_z^*)V_z^{*t^*-\Delta t^*}(2, j, k) - F_z^*V_z^{*t^*-\Delta t^*}(3, j, k)\right]$$

### 3.11 Equations de la pression et de correction de la pression

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.14), (3.16) et (3.18) nécessite la connaissance du champ de pression qui apparaît dans les termes sources. Malheureusement, ce champ est généralement inconnu. Une équation de discrétisation de la pression, à chaque point du calcul, est nécessaire pour une estimation de la pression. Cette estimation doit être corrigée. L'utilisation des équations de discrétisation des vitesses (3.14), (3.16) et (3.18) dans l'équation de discrétisation de continuité permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la pression. On réécrit les équations de discrétisation des quantités de mouvement sous la forme suivant :

$$V_{rn}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{rnb}^{*t+\Delta t^*} + b_r^*(i, j, k)}{A_p} + d_{rn} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right] \quad \text{avec} \quad d_{rn} = \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{A_p} \quad (3.40)$$

$$V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{\theta nb}^{*t+\Delta t^*} + b_\theta^*(i, j, k)}{A_p} + d_{\theta e} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right] \quad \text{avec} \quad d_{\theta e} = \frac{\Delta r_p \Delta z_p^*}{A_p} \quad (3.41)$$

$$V_{zt}^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{znb}^{*t+\Delta t^*} + b_z^*(i, j, k)}{A_p} + d_{zt} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right] \quad \text{avec} \quad d_{zt} = \frac{r_p^* \Delta r_p \Delta \theta_p}{A_p} \quad (3.42)$$

On définit à ce niveau des **pseudos vitesses**  $\hat{V}_r^*, \hat{V}_\theta^*, \hat{V}_z^*$ , sans les termes de pression, telles que :

$$\hat{V}_r^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{rnb}^{*t+\Delta t^*} + b_r^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.43)$$

$$\hat{V}_\theta^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{\theta nb}^{*t+\Delta t^*} + b_\theta^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.44)$$

$$\hat{V}_z^{*t+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{znb}^{*t+\Delta t^*} + b_z^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.45)$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudos vitesses sous la forme suivante :

$$V_r^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_r^{*t+\Delta t^*} + d_{rn} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.46)$$

$$V_\theta^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_\theta^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta e} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.47)$$

$$V_z^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_z^{*t+\Delta t^*} + d_{zt} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.48)$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que :

$$V_{rn}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{rn}^{*t+\Delta t^*} + d_{rn} \left[ P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{rs}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{rs}^{*t+\Delta t^*} + d_{rs} \left[ P_S^{*t+\Delta t^*} - P_p^{*t+\Delta t^*} \right]$$



$$V_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta_e} \left[ P_P^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{\theta_w}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta_w}^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta_w} \left[ P_W^{*t+\Delta t^*} - P_P^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{z_t}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{z_t}^{*t+\Delta t^*} + d_{z_t} \left[ P_P^{*t+\Delta t^*} - P_T^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{z_b}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{z_b}^{*t+\Delta t^*} + d_{z_b} \left[ P_B^{*t+\Delta t^*} - P_P^{*t+\Delta t^*} \right]$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est :

$$\left( V_{r_n}^{*t+\Delta t^*} r_n^* - V_{r_s}^{*t+\Delta t^*} r_s^* \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left( V_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta_w}^{*t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p \Delta z_p^* + \left( V_{z_t}^{*t+\Delta t^*} - V_{z_b}^{*t+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = 0 \quad (3.49)$$

Et en remplaçant les vitesses par leurs expressions précédentes qui introduisent le champ de pression entre les faces du volume de contrôle, on obtient l'équation de pression discrétisée au nœud typique P, qui s'écrit dans sa forme final :

$$A_P P_P^{*t+\Delta t^*} = A_N P_N^{*t+\Delta t^*} + A_S P_S^{*t+\Delta t^*} + A_E P_E^{*t+\Delta t^*} + A_W P_W^{*t+\Delta t^*} + A_T P_T^{*t+\Delta t^*} + A_B P_B^{*t+\Delta t^*} + S_p \quad (3.50)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = r_s^* dr_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.51)$$

$$A_E = d\theta_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d\theta_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.52)$$

$$A_T = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_t^* \quad , \quad A_B = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_b^* \quad (3.53)$$

$$S_p^{*t+\Delta t^*} = \left[ r_s^* \hat{V}_{r_s}^{*t+\Delta t^*} - r_n^* \hat{V}_{r_n}^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[ \hat{V}_{\theta_w}^{*t+\Delta t^*} - \hat{V}_{\theta_e}^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta r_p \Delta z_p^* + \left[ \hat{V}_{z_b}^{*t+\Delta t^*} - \hat{V}_{z_t}^{*t+\Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad (3.54)$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. On peut comprendre qu'il faudrait des séquences successives d'estimation et de correction de la vitesse et de la pression pour aboutir à un champ de vitesses corrects.

Supposons que :

$$P^* = P^{**} + P'^* \quad , \quad V_r^* = V_r^{**} + V_r'^* \quad , \quad V_\theta^* = V_\theta^{**} + V_\theta'^* \quad , \quad V_z^* = V_z^{**} + V_z'^*$$

$V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$  sont les vitesses estimées associées à la pression estimée  $P^{**}$

$V_r'^*, V_\theta'^*, V_z'^*$  sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression corrigée.  $P'^*$ .

Les estimations des vitesses sont corrigées comme suit :

$$V_m^{*t+\Delta t^*} = V_m^{**t+\Delta t^*} + d_m \left[ P_P'^{*t+\Delta t^*} - P_N'^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.55)$$

$$V_{rs}^{*t+\Delta t^*} = V_{rs}^{**t+\Delta t^*} + d_{rs} \left[ P_S'^{*t+\Delta t^*} - P_P'^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} = V_{\theta e}^{**t+\Delta t^*} + d_{\theta e} \left[ P_P'^{*t+\Delta t^*} - P_E'^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.56)$$

$$V_{\theta w}^{*t+\Delta t^*} = V_{\theta w}^{**t+\Delta t^*} + d_{\theta w} \left[ P_W'^{*t+\Delta t^*} - P_P'^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{zt}^{*t+\Delta t^*} = V_{zt}^{**t+\Delta t^*} + d_{zt} \left[ P_P'^{*t+\Delta t^*} - P_T'^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{zb}^{*t+\Delta t^*} = V_{zb}^{**t+\Delta t^*} + d_{zb} \left[ P_B'^{*t+\Delta t^*} - P_P'^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.57)$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront d'une équation de discrétisation de la correction de pression  $P'^*$  avec des vitesses estimées :  $V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$

$$A_P P_P'^{*t+\Delta t^*} = A_N P_N'^{*t+\Delta t^*} + A_S P_S'^{*t+\Delta t^*} + A_E P_E'^{*t+\Delta t^*} + A_W P_W'^{*t+\Delta t^*} + A_T P_T'^{*t+\Delta t^*} + A_B P_B'^{*t+\Delta t^*} + S_p'^{*t+\Delta t^*} \quad (3.58)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = d_m r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = d_{rs} r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.59)$$

$$A_E = d_{\theta e} \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d_{\theta w} \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.60)$$

$$A_T = d_{zt} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad , \quad A_B = d_{zb} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad (3.61)$$

$$S_p'^{*t+\Delta t^*} = \left[ r_s^* V_{rs}^{**t+\Delta t^*} - r_n^* V_m^{**t+\Delta t^*} \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[ V_{\theta w}^{**t+\Delta t^*} - V_{\theta e}^{**t+\Delta t^*} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \left[ V_{zb}^{**t+\Delta t^*} - V_{zt}^{**t+\Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad (3.62)$$

### 3.12 Algorithme de calcul SIMPLER

La résolution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation des champs de vitesse, de la pression, de la correction de pression et de la température suit l'algorithme SIMPLER. Donc voici l'organigramme :

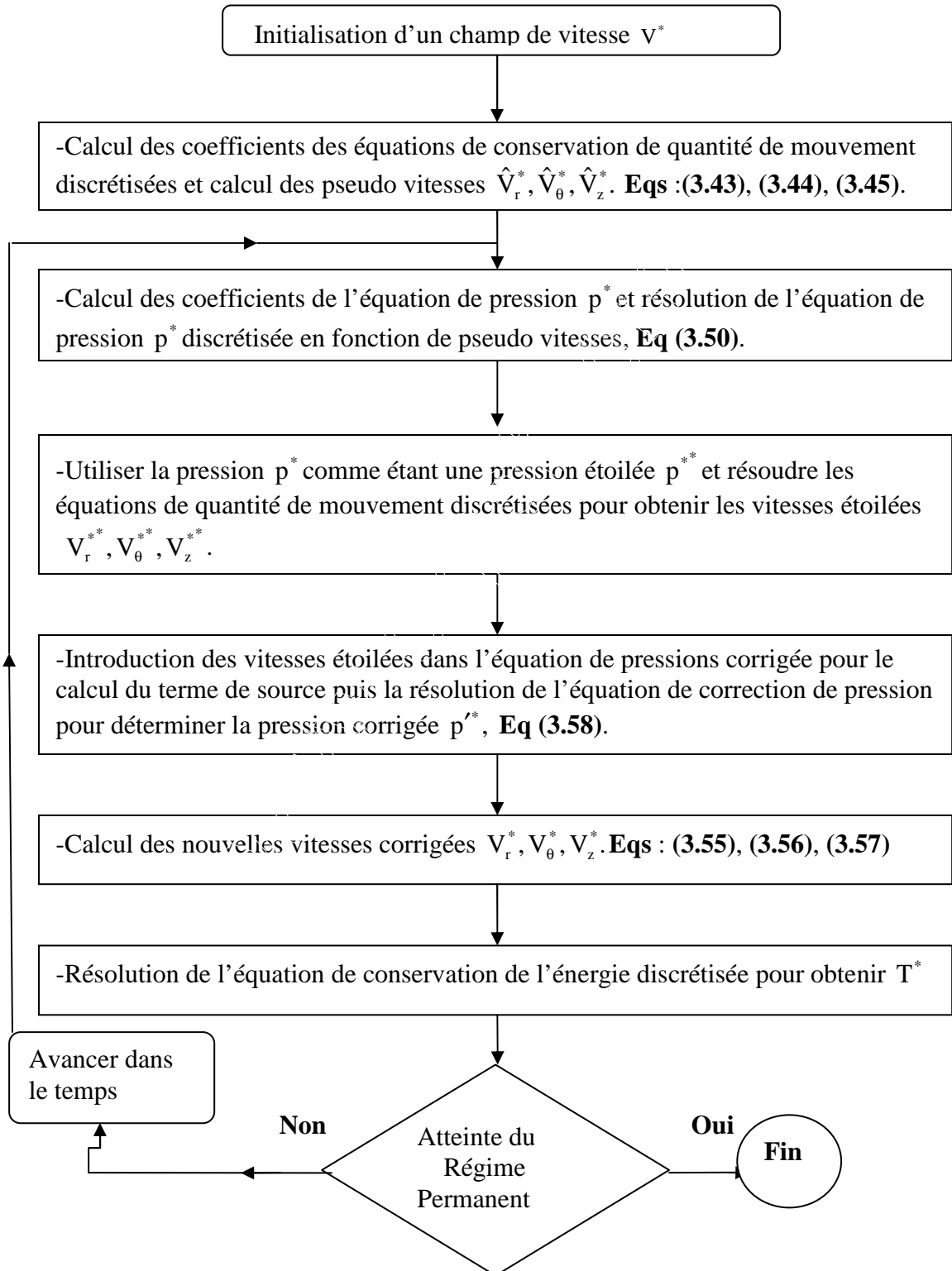


Figure 3.5 : Algorithme SIMPLER

### 3.13 Technique numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative.

Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k)\phi_{i,j,k} = & A_N(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + A_S(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\
 & A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\
 & A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable  $\phi$  le long des deux autres directions  $z$  et  $\theta$  sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.63) est réécrite :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \tag{3.64}$$

$$a_i = A_p(i, j, k)$$

$$b_i = A_N(i, j, k) \tag{3.65}$$

$$c_i = A_S(i, j, k)$$

$$d_i = A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k)$$

Le système d'équation (3.64) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA.

Le balayage suivant la direction  $z$  est similaire à celui de balayage suivant la direction radiale ; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique.

### 3.14 Validation du code de calcul

Afin de s'assurer de la fiabilité du code développé, et la précision des résultats qu'il fournit, ce dernier a été longuement testés pour différents maillages et parfaitement validés par comparaison avec des travaux numériques et expérimentales publiés dans la bibliographie spécialisée. Par ailleurs des détails plus complets sur ces tests et ces validations sont reportés dans les références [1, 2]. Cela révèle que la grille adoptée dans cette étude est 26x44x162 nœuds en fonction de chaque direction, respectivement, y compris cinq nœuds dans la direction radiale représentant de la petite partie solide. Parmi les validations qui ont été faites, on peut apporter comme exemple, la Fig. 3.6 qui montre un bon accord entre les résultats et les résultats numériques d'Ouzzane et Galanis [12]. Une parfaite comparaison avec les résultats expérimentaux d'Abid et al. [29] est reporté dans les références [2, 3].

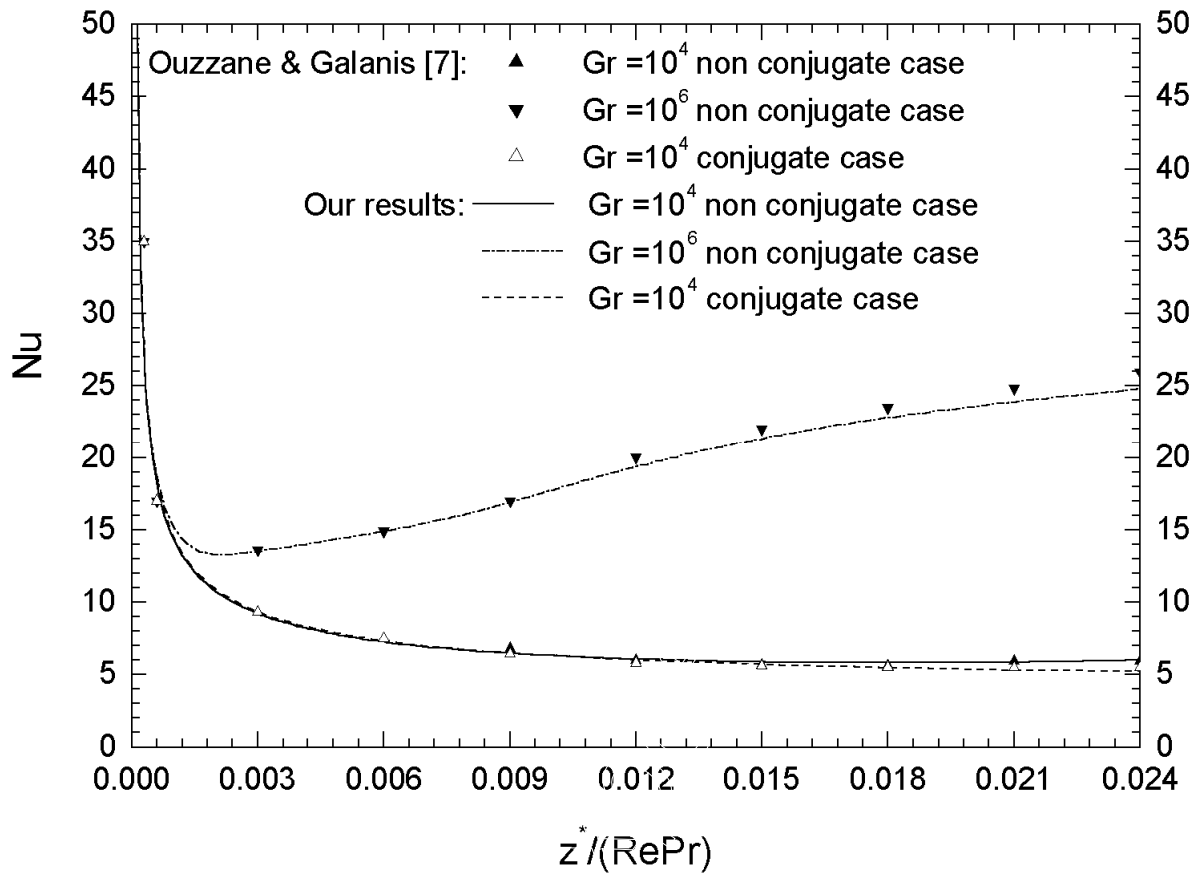


Figure 3.6 Comparaison entre nos résultats du nombre de Nusselt moyen circonférentiel local axial et ceux obtenus par Ouzzane et Galanis [12].

## Chapitre 4

### Résultats et discussions

#### 4.1 Introduction

L'ensemble des résultats de cette étude sont produits pour quatre matériaux différents caractérisés essentiellement par leur conductivité thermique et les nombres de Grashof correspondants. Le tableau 1 regroupe ces matériaux avec leurs données :

TABLEAU 1  
VALEURS DES CONDUCTIVITES THERMIQUES ADIMENSIONNELLES DES MATERIAUX UTILISES  
ET NOMBRES DE GRASHOF ASSOCIES ( $K_0=0.5893$ )

Matériels	Conductivité thermique adimensionnelle	Nombre de Grashof
Inconel	25.45	$2.57 \cdot 10^5$
Acier inoxydable	82.30	$9.37 \cdot 10^3$
Tantale	97.57	$8.97 \cdot 10^3$
Aluminium	402.17	$4.63 \cdot 10^2$

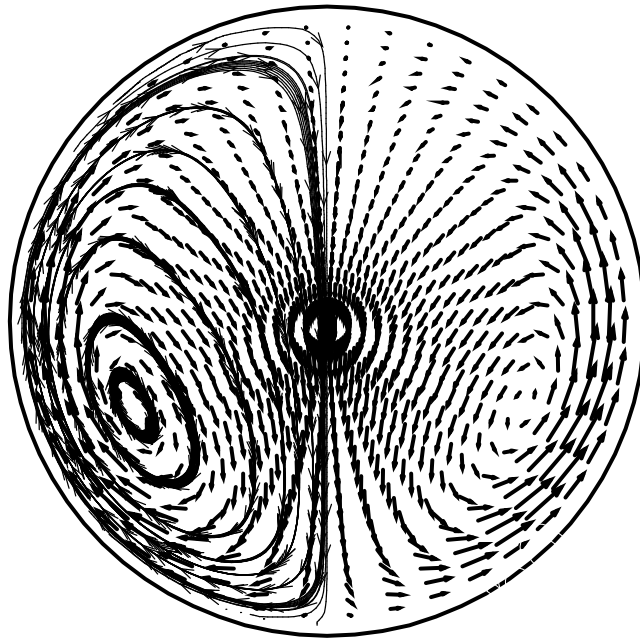
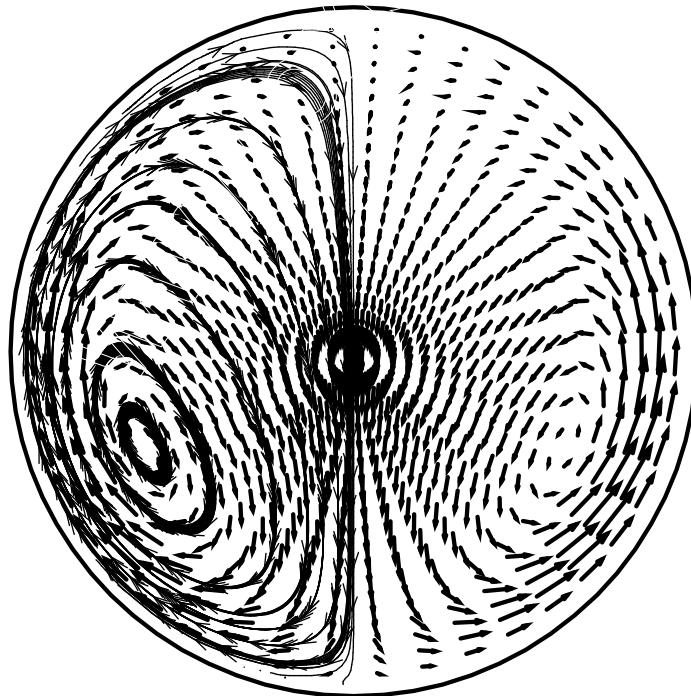
Leur exploitation devrait permettre de faire ressortir l'influence de la conductivité thermique du solide sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que leurs effets sur l'évolution du nombre de Nusselt. Aussi l'effet sur la variation de la viscosité et la conductivité thermique du fluide doivent être mis en évidence.

## 4.2 L'écoulement secondaire

Dans les Figures.3.1-3.3 nous représentons les évolutions de l'écoulement secondaire dans le plan transversal dans deux stations axiales judicieusement choisies pour les trois matériaux : l'inconel, le tantale et l'acier. Les stations axiales choisies représentent respectivement lorsque l'écoulement secondaire est plus intense comme celle à la sortie du conduit. Dans tous les cas la structure de l'écoulement secondaire présente une symétrie par rapport au diamètre vertical et une formation de deux cellules contrarotatives et symétriques par rapport à ce diamètre vertical. En raison de cette symétrie des lignes de courant sont tracées sur une seule moitié de la section considérée du tube. Comparé au tantale et à l'acier, ces figures montrent que l'écoulement secondaire intensifie plus rapidement pour l'inconel. Le fluide traverse une distance de deux à trois fois plus grande dans le cas de tantale et l'acier pour atteindre une intensification maximale.

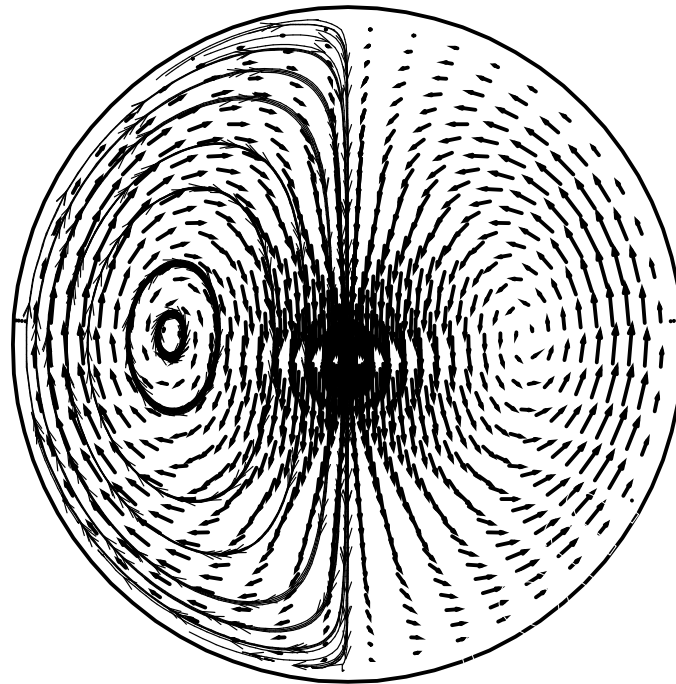
Ces stations sont celles pour lesquelles les maximums des vitesses angulaires sont atteints. Ces derniers sont différents pour chaque cas avec des écarts de vortex aux centres de tourbillons. Pour l'inconel la composante angulaire de la vitesse atteint une valeur maximale  $V_{\theta}^* = 0.12712$  à  $r^* = 0.4375$  et  $\theta = 1.428$  alors que pour le tantale la vitesse maximale composante angulaire est  $V_{\theta}^* = 0.06884$  à  $r^* = 0.4375$  et  $\theta = 1.428$ , et pour l'acier  $V_{\theta}^* = 0.05789$  à  $r^* = 0.4375$  et  $\theta = 1.57$ .

A la sortie  $z^* = 104.17$  ces maximums de vitesse sont égaux à :  $V_{\theta}^* = 0.09034$  à  $r^* = 0.4625$  et  $\theta = 1.991$  pour l'inconel, et  $V_{\theta}^* = 0.06344$  à  $r^* = 0.4375$  et  $\theta = 4.569$  pour le tantale tandis que pour l'acier  $V_{\theta}^* = 0.04987$  à  $r^* = 0.4375$  et  $\theta = 1.856$ . Il doit être précisé que dans le cas de l'aluminium il ya presque aucune forme de l'écoulement secondaire de l'entrée jusqu'à la sortie. Le profile initial de poiseuille est maintenu à la sortie sans être perturbé par n'importe quel gradient de la vitesse dans la direction azimutal. Les lignes de courant sont circulaires avec une vitesse maximale au centre de l'axe du conduit.

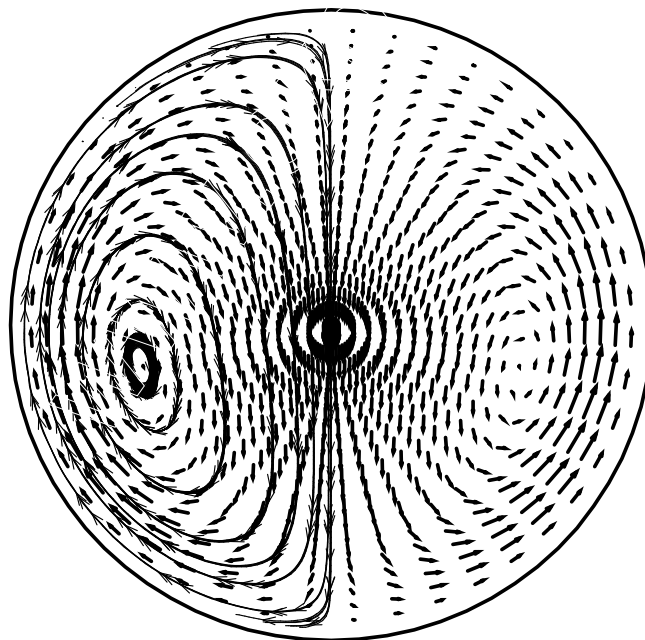
a)  $z^* = 5.53025$ b)  $z^* = 104.17$ 

Figs. 3.1 Lignes de courant et écoulement secondaire : cas inconel





a)  $z^* = 13.99$



b)  $z^* = 104.17$

Fig. 3.2 Lignes de courant et écoulement secondaire : cas tantale

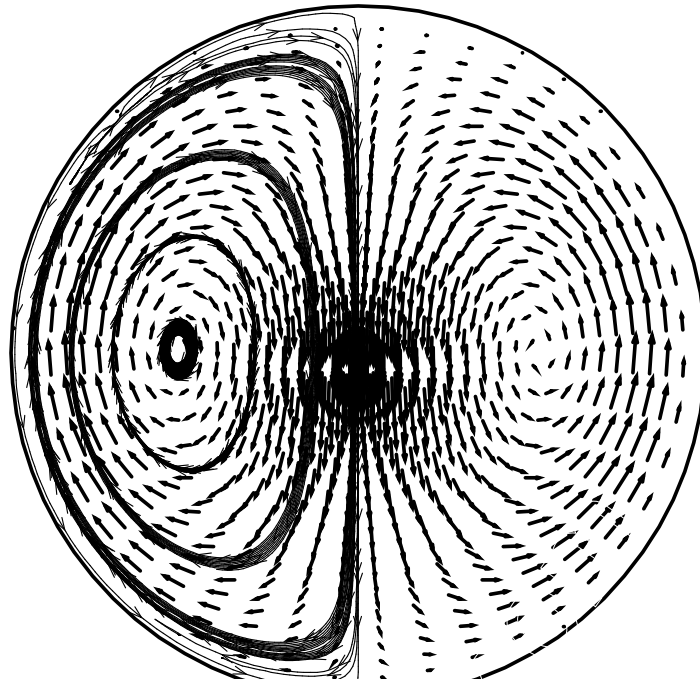
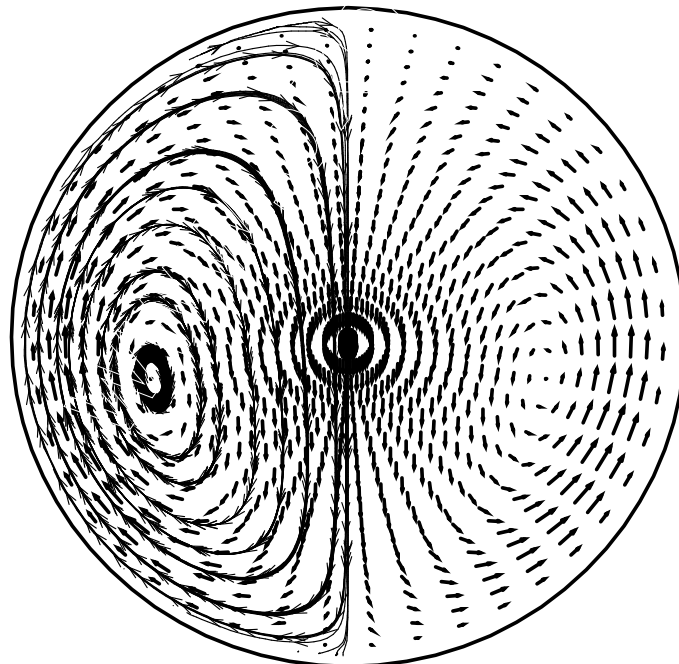
a)  $z^*=15.2996$ b)  $z^*=104.17$ 

Fig. 3.3 Lignes de courant et écoulement secondaire : cas Acier inox

### 4.3 L'écoulement axial

Pour les positions axiales précédemment sélectionnées dans la représentation de l'écoulement secondaire, nous étudions l'évolution axiale de l'écoulement du fluide. La Figure 4a)-d) illustre la distribution de l'écoulement axiale à  $z^* = 5.534$  et à la sortie du tuyau d'inconel. Pour tous les cas, il est clair que l'écoulement axial a été fortement influencé par le l'écoulement secondaire, car à l'entrée du conduit le champ de vitesse est parabolique, caractérisé par un profil circulaire et une vitesse axiale maximale au niveau l'axe du conduit. Le l'écoulement secondaire déforme le profil de vitesse axiale : il augmente le niveau de la vitesse maximale pour toute section transversale du conduit et déplace la position de cette vitesse maximale vers le bas, le long du plan vertical de symétrie. Pour les différents cas étudiés les vitesses axiales maximales sont  $V_{z_{\max}}^* = 1.9024$  à  $(r^*, \theta) \Big|_{\max} = (0.4375, 1.428)$  pour l'inconel à la même position précédente comme l'inconel pour l'acier et  $V_{z_{\max}}^* = 1.7776$  à  $(r^*, \theta) \Big|_{\max} = (0.4375, 1.856)$  pour le tantale. Idem, nous représentons dans la figure. 4d) la vitesse axiale à la sortie pour le cas inconel et le niveau de la vitesse maximale atteinte est  $V_{z_{\max}}^* = 1.96027$  et la position de cette vitesse maximale est égale à  $r^* = 0.1875$ .

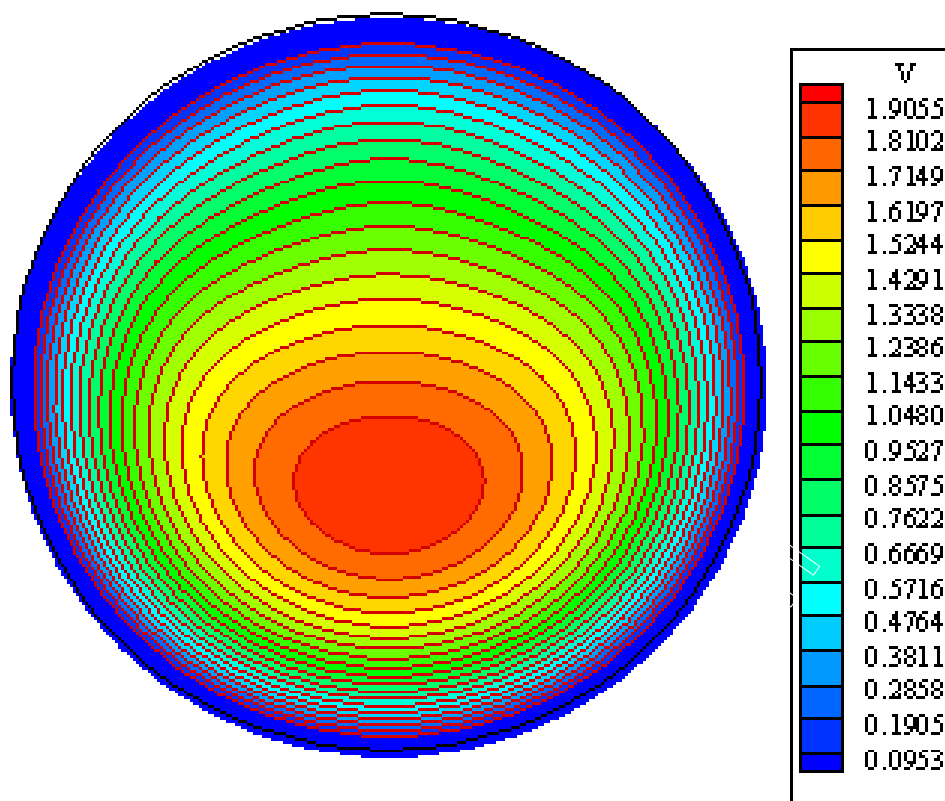


Fig. 4a. Profil axial de l'écoulement à  $z^*=5.534$  pour le tube en Inconel.

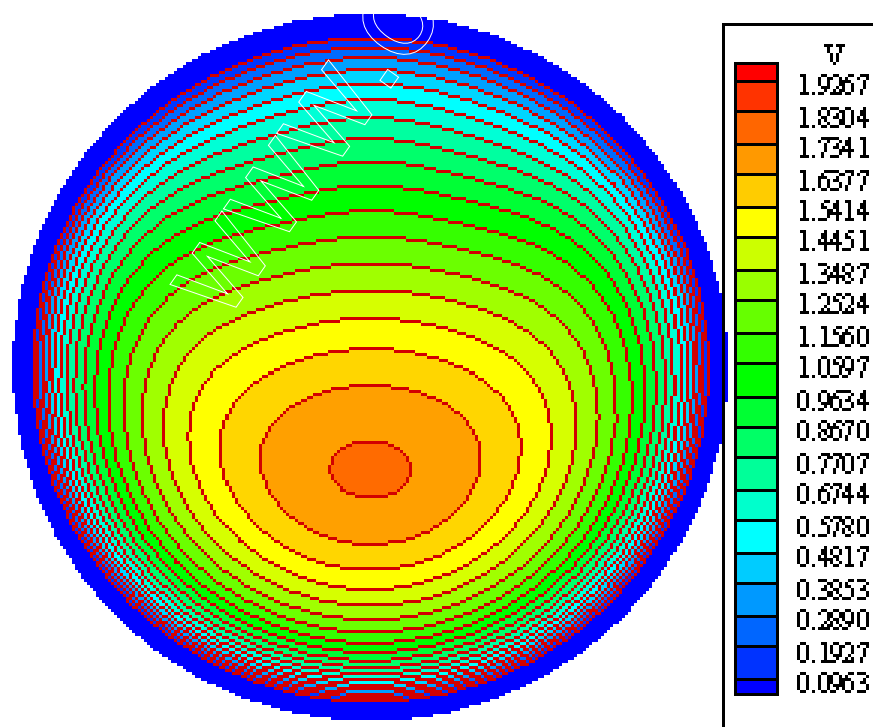


Fig. 4b. Profil axial de l'écoulement à  $z^*=5.534$  pour le tube en Tantale.

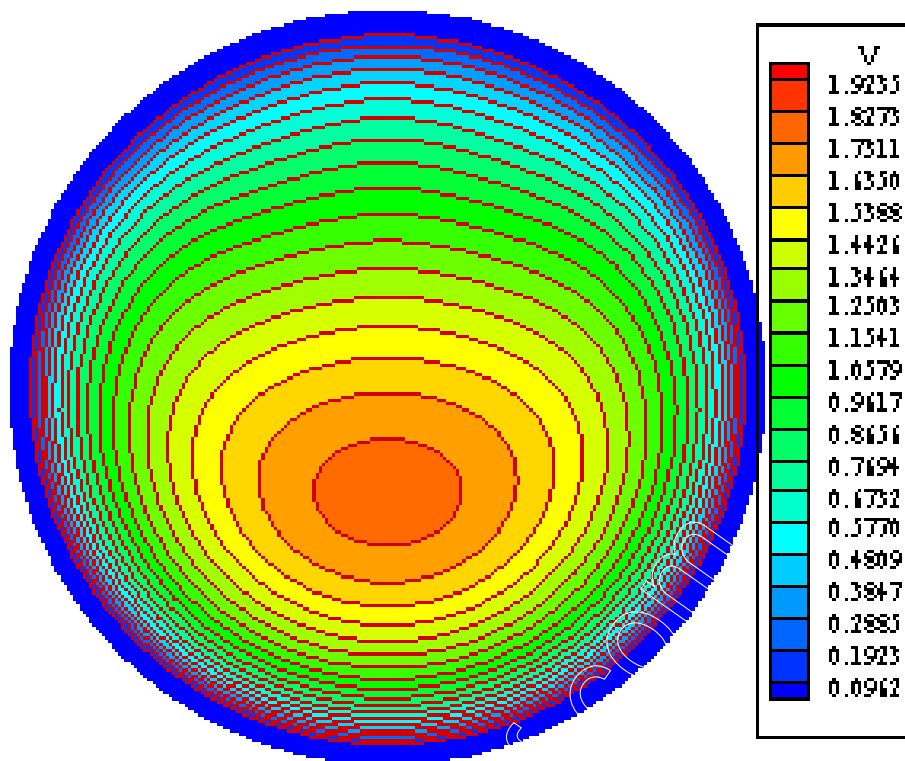


Fig. 4c. Profil axial de l'écoulement à  $z^* = 5.534$  pour le tube en Acier inox.

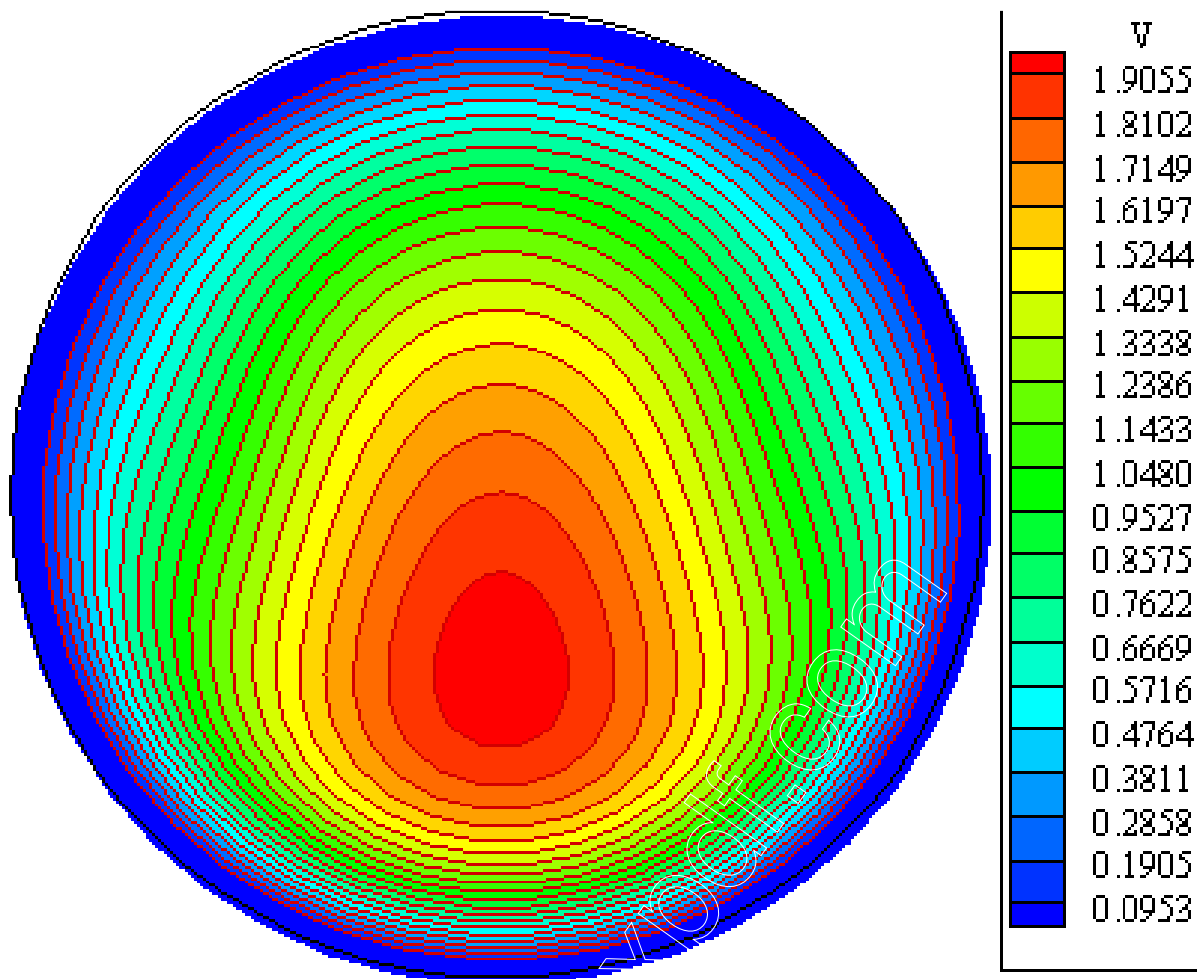
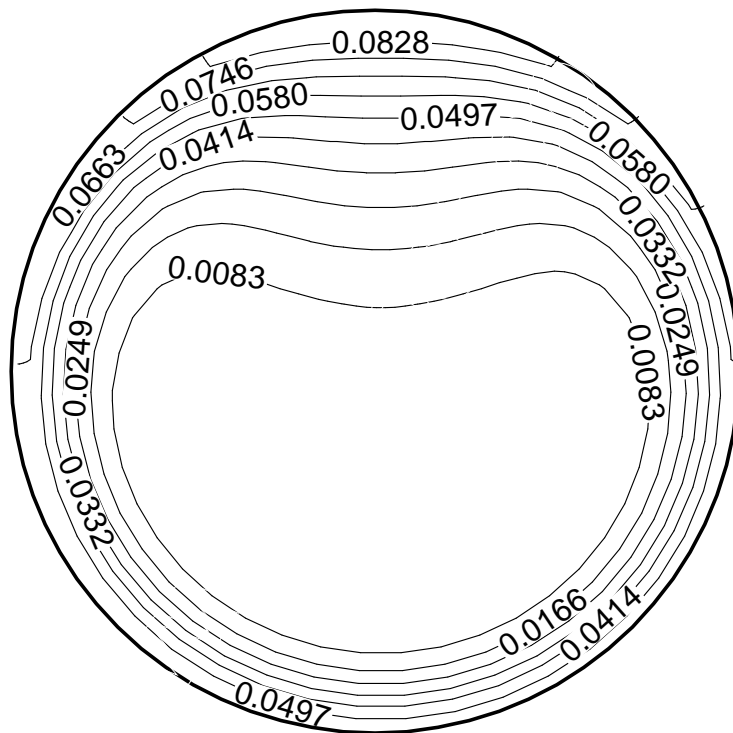


Fig. 4d. Profil axial de l'écoulement à la sortie pour le tube en Inconel.

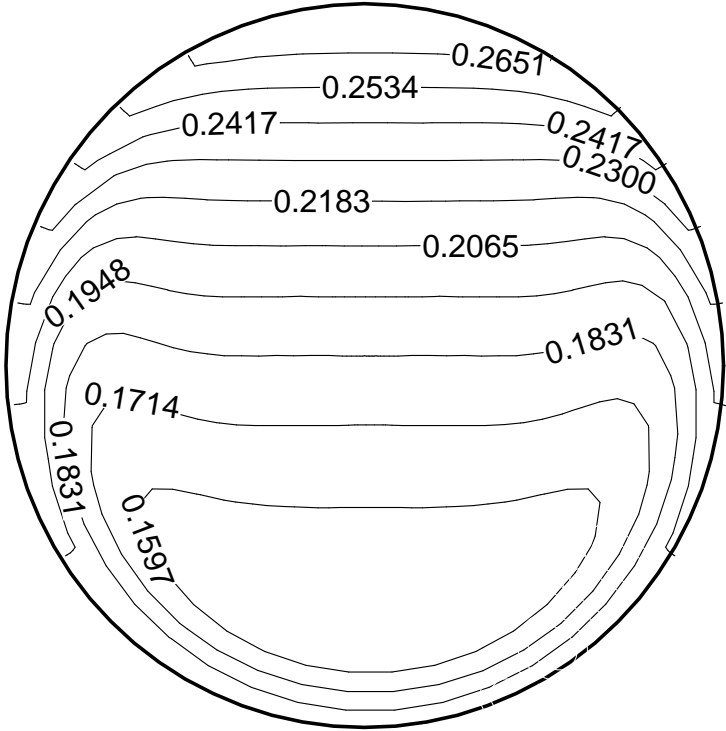
#### 4.4 Le champ des températures

Pour les mêmes stations axiales sélectionnées pour l'étude de l'écoulement secondaire, on porte sur les figures. 4.1-4.3 les distributions des températures dans ces stations. Dans tous les cas, ces figures montrent d'importantes variations angulaires et axiales de la température du fluide et de solide système à travers chaque section ainsi que d'une augmentation monotone d'une station à l'autre. La stratification instable dans le voisinage de la paroi et en bas implique une circulation du fluide chauffé vers le haut de conduit. Dans le haut du conduit c'est l'inverse qui se passe ce qui crée ainsi une stratification stable des températures. Le maximum des températures est toujours en haut du conduit tandis que le minimum des températures est dans la partie inférieure du conduit. Pour le cas du tantale la température minimale se déplace de  $r^* = 0.2375$  à  $r^* = 0.3375$  et pour l'acier, elle se déplace de  $r^* = 0.2375$  à  $r^* = 0.3125$  tandis que pour l'inconel, la température minimale se déplace à

partir  $r^* = 0.2625$  à  $r^* = 0.3625$  comme pour le l'écoulement secondaire, le cas de l'aluminium n'a pas été représenté : on a constaté que la convection mixte n'est pas créée dans le fluide et que la distribution des températures dans toute section transversale entre l'entrée et la sortie est radiale de la surface du tube (le plus chaud) vers l'axe du conduit (plus froid).il est donc une convection forcée. Dans notre interprétation, on présente dans la figure.5 les évolutions axiale de la température au sommet ( $\theta=0$ ) et le bas ( $\theta=\pi$ ) de la conduit pour les matériaux étudiée. Les augmentations monotones dans les températures au-delà de certains sont compatibles avec le chauffage constant sur toute la longueur du tube.

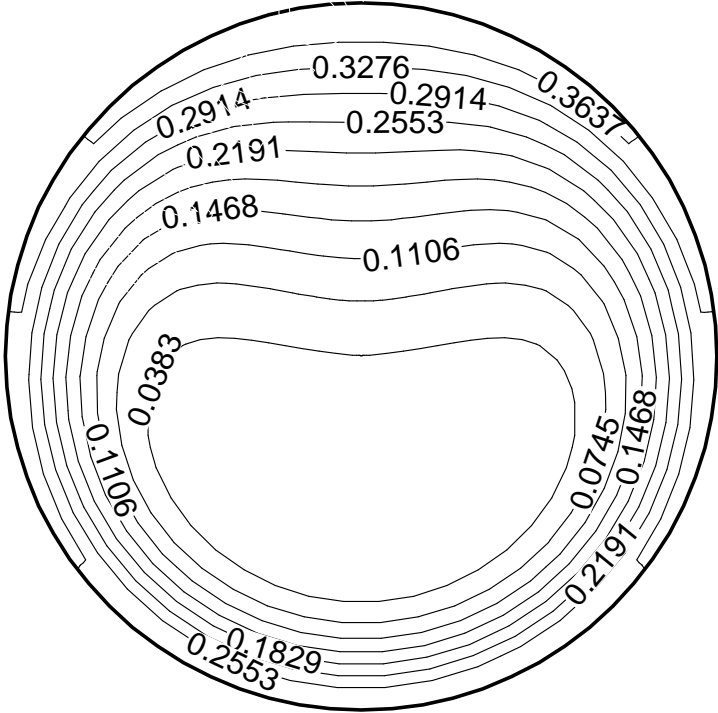


a)  $z^*=5.53025$



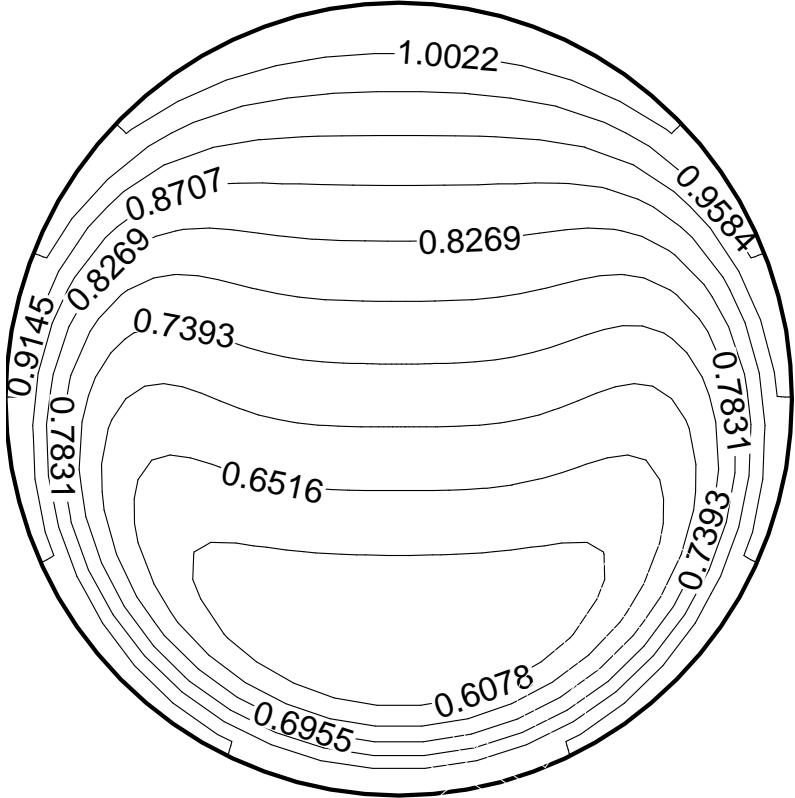
b)  $z^*=104.17$

Figure 4.1 : Champ des isothermes: Cas Inconel



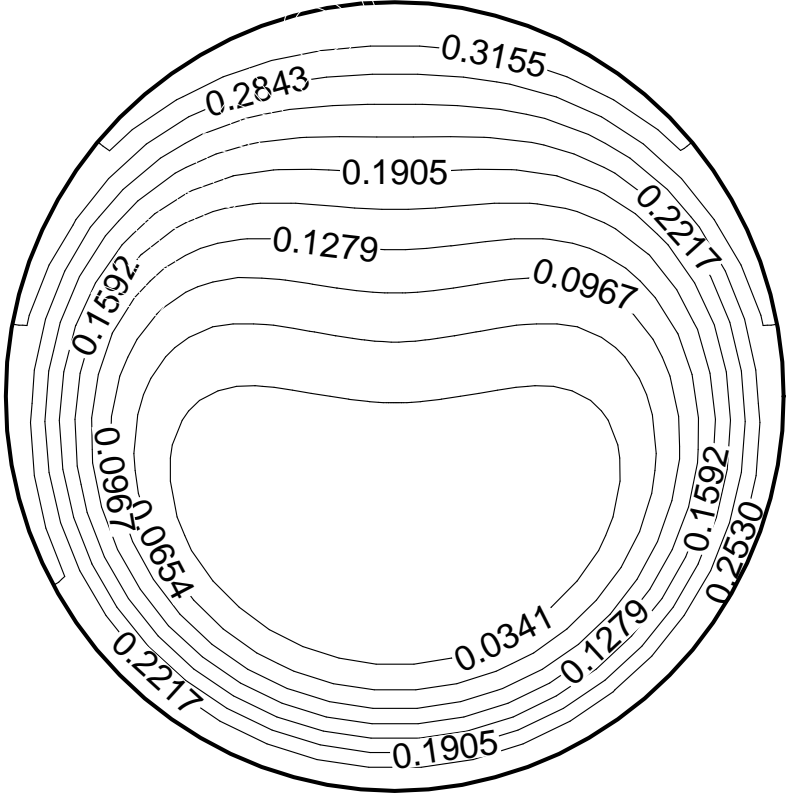
a)  $z^*=13.99$



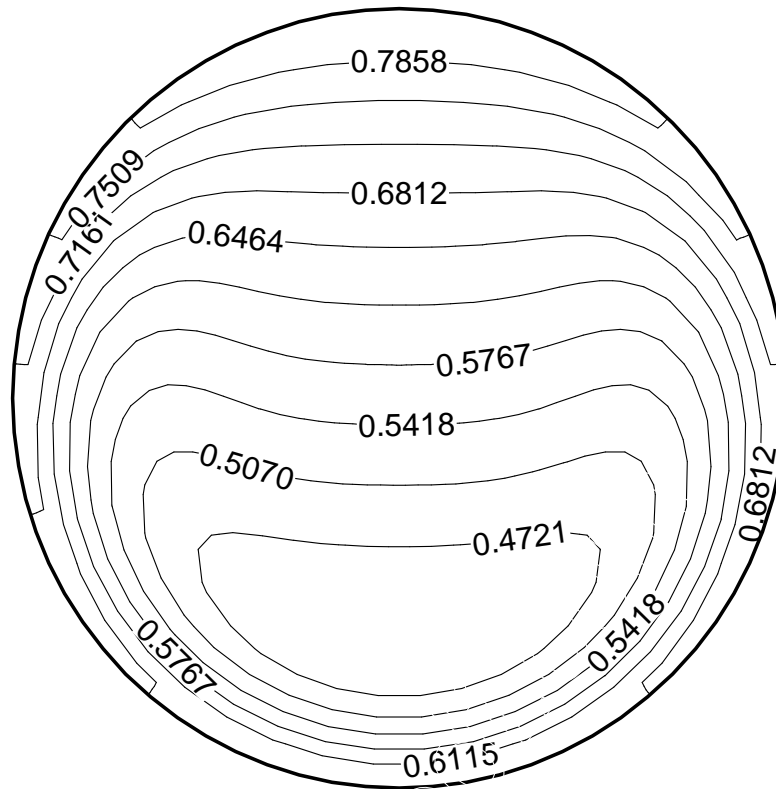


b)  $z^*=104.17$

Figure 4.2 : Champ des isothermes: Cas Tantale



a)  $z^*=15.2996$



b)  $z^*=104.17$

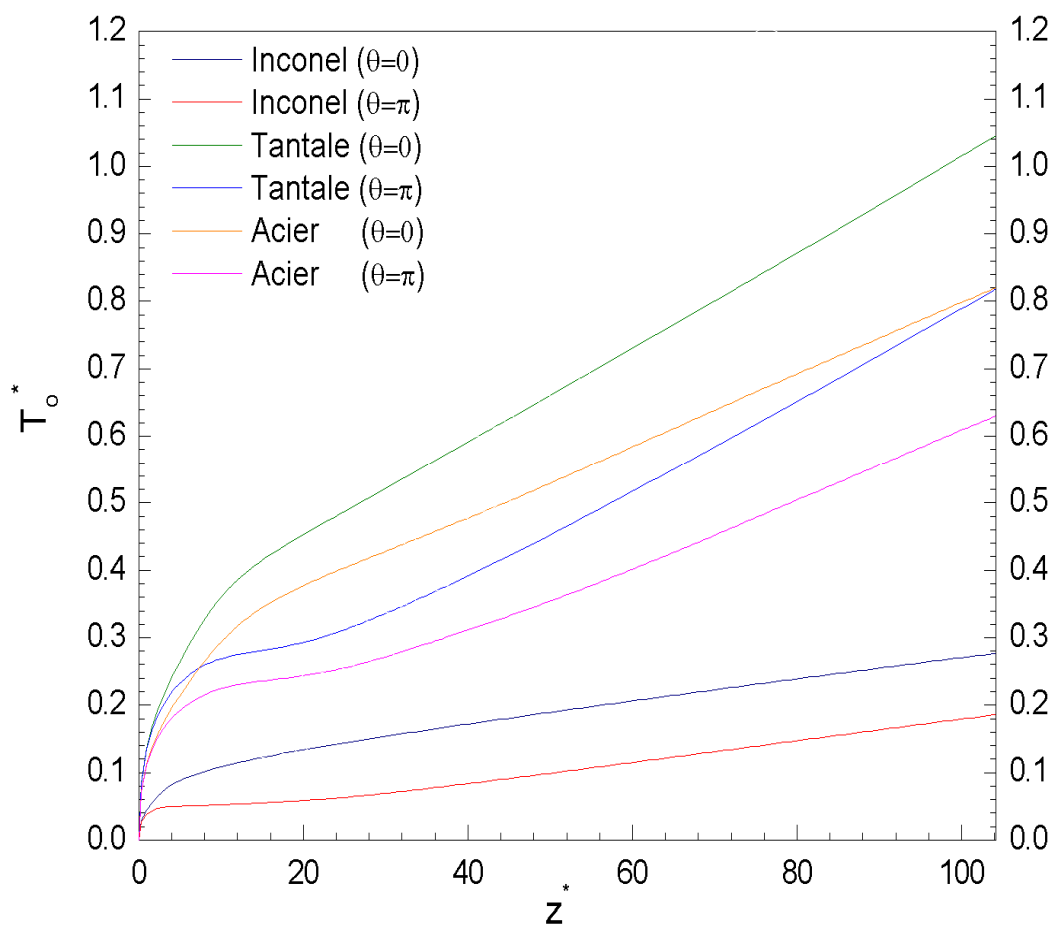
**Figs. 4.3: Champ des isothermes: Cas Acier inox**

L'effet de la conductibilité des matériaux est clairement distingué de puis le niveau des températures atteintes varient d'un matériau à l'autre ainsi que le gradient de la température entre le haut et le bas du conduit pour chaque cas étudié.

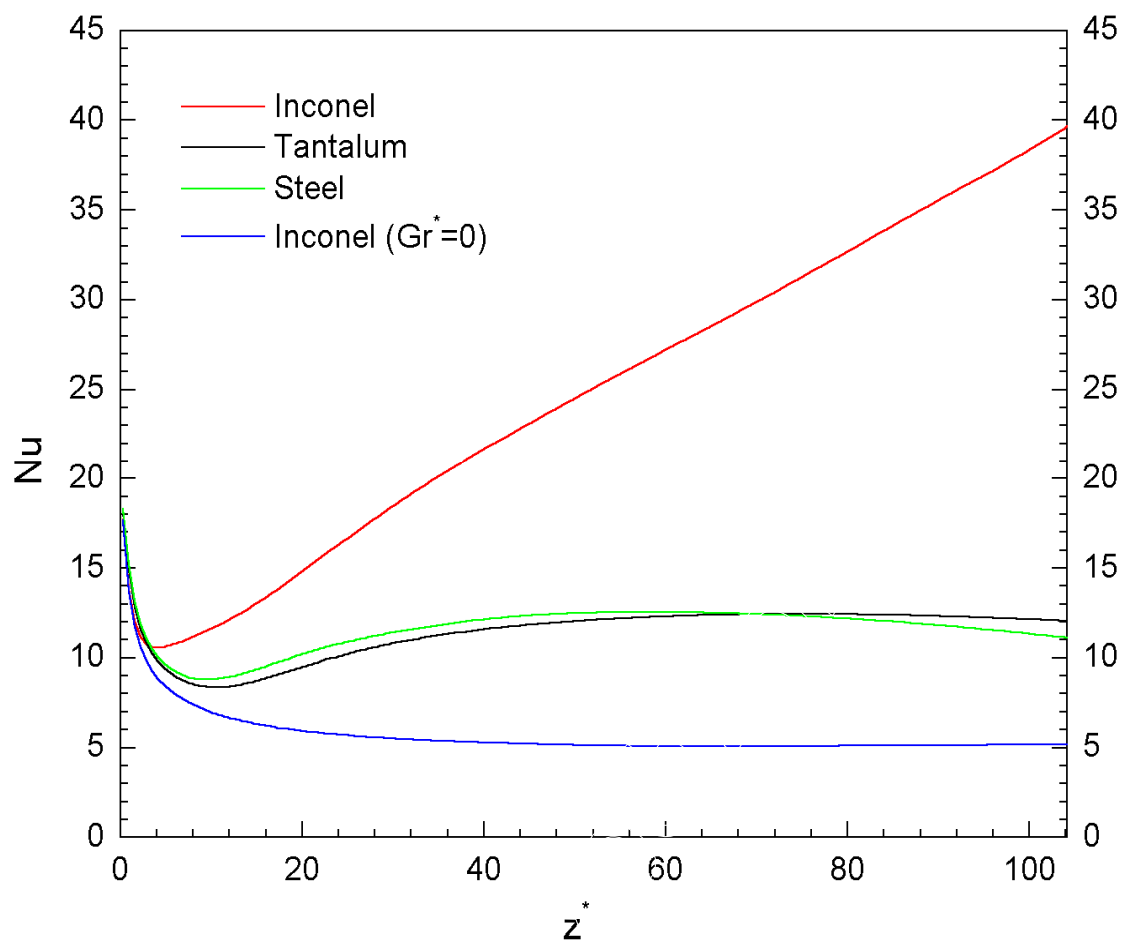
#### 4.5 Le nombre de Nusselt

Le transfert de chaleur par convection entre l'interface fluide-solide est quantifié par le axial local et circonférentiel nombre de Nusselt moyenne,  $Nu$ , (Eq. 2.22). Cette variation axiale de  $Nu$  pour les matériaux étudiés est représentée dans la figure.6. Nous avons également ajouté plus de cette figure le cas de convection forcée pures ( $Gr^*=0$ ) pour l'inconel. Globalement, le profil qualitatif est similaire pour les trois matériaux. Sur une courte distance axiale près de l'entrée du tube, Le  $Nu$  présente une réduction rapide pour

atteindre un minimum puis, au-delà de cela, le Nu commence avec une augmentation importante jusqu'à la sortie. Dans cette zone le comportement des trois matériaux est différent. Pour l'inconel le nombre de Nusselt augmente d'une manière monotone jusqu'à la valeur 39.69 tandis que pour l'acier et le tantale le nombre de Nusselt présente un comportement asymptotique à la sortie du conduit ou les valeurs sont respectivement 12.07 et 11.12. Alors que pour aluminium le Nu moyenne est très faible en présentant une réduction brutale dans une zone courte près de l'entrée et un comportement asymptotique sur presque l'ensemble du tube. En outre, la figure.6 montre que les nombres de Nusselt sont très élevés comparativement à celui obtenu par la convection forcée.



**Fig. 5: Profils axiaux des températures au sommet ( $\theta=0$ ) et au bas du conduit ( $\theta=\pi$ ) et la surface extérieure du tube.**



**Fig. 6: Evolution et comparaison du nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial pour les matériaux étudiés.**

## Chapitre 5

### Conclusion Générale

L'étude numérique présentée dans ce mémoire porte sur l'influence de la conduction thermique pariétale de la paroi de faible épaisseur d'un conduit cylindrique horizontal sur les transferts thermiques conjugués. La paroi cylindrique de faible épaisseur est le siège d'un chauffage volumétrique uniforme produit par effet Joule servant à chauffer un écoulement laminaire d'un fluide Newtonien et incompressible (eau distillée). Les propriétés thermophysiques du fluide sont thermodépendantes et les pertes thermiques radiatives et convectives avec le milieu ambiant sont prises en compte. Quatre matériaux différents, de conductivités thermiques différentes ont été utilisés pour étudier cette influence de la conduction thermique de la paroi. Il s'agit de l'Inconel, du Tantale, de l'Acier et de l'Aluminium.

Ce problème physique est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse, des quantités de mouvement radial, angulaire et axial, et de l'équation de conservation de l'énergie. Ils sont accompagnés de leurs conditions spatiotemporelles. La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations de Navier-stokes et de l'énergie dans un maillage uniforme de  $51 \times 44 \times 162$  nœuds dans les directions radiale, azimutale et axiale, respectivement. La solution de ce système d'équation de discrétisation suit l'algorithme SIMPLER et fait appel aux algorithmes de Thomas TDMA et l'algorithme de Thomas cyclique.

Dans ce problème les paramètres de contrôle sont le rapport des conductivités du solide et du fluide, le rapport d'aspect géométrique du conduit et les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Grashof. Les paramètres fixés sont le rapport d'aspect géométrique du conduit,  $A=104.17$ , et les nombres de Reynolds,  $Re=143,283648$  de Prandtl,  $Pr=8.082$  tandis que ceux variables sont le rapport des conductivités du solide et du fluide et le nombre de Grashof. Les rapports de conductivité sont successivement égaux à 25.45, 97.57, 82.30 et 402.17 tandis que les nombres de Grashof correspondants sont  $2.57 \cdot 10^5$ ,  $9.37 \cdot 10^3$ ,  $8.97 \cdot 10^3$  et  $4.63 \cdot 10^2$ .

Ce mode de transfert conjugué avec une convection mixte dans le fluide et une conduction thermique dans la paroi, et qui sont prises en compte simultanément, a permis l'obtention d'un champ d'écoulement tri directionnel avec trois composantes de vitesse et d'autre part tridimensionnel c'est-à-dire dépendant des trois coordonnées cylindriques. Dans la recherche de l'influence de la conductivité thermique du matériau solide sur les transferts thermiques, il est également démontré que l'augmentation de la conductivité entraîne une intensification de l'écoulement secondaire et réduit le niveau des températures du fluide et la paroi externe. Cette réduction appauvrit le transfert thermique à l'interface fluide-paroi avec comme résultat un comportement asymptotique à la sortie se rapprochant plutôt d'une convection forcée.

On peut conclure que parmi les matériaux étudiés, l'inconel est celui qui permet d'obtenir les effets d'écoulement secondaire significatifs qui sont caractéristiques de la convection mixte dans le fluide et un gain de 58% en transfert thermique.

Les résultats obtenus à travers cette étude ont fait l'objet d'une publication [30].

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] T. Boufendi, M. Afrid, The physical aspect of three-dimensional mixed convection in a uniformly heated horizontal pipe, *Sciences & Technologie*, A, 22, pp. 39-52, (2004).
- [2] T. Boufendi, M. Afrid, Three-dimensional conjugate conduction-mixed convection with variable fluid properties in a heated horizontal pipe, *Rev. Energ. Ren*, 8, pp.1-18, (2005).
- [3] T. Boufendi, Contribution à l'étude théorique des transferts de chaleur dans les conduits cylindriques horizontaux soumis à un phénomène de convection mixte, *Thèse de Doctorat d'Etat en Physique Energétique, Départ. De Physique, Fac. Sciences, Université Mentouri Constantine*, Septembre 2005.
- [4] B. S. Petukhov, A. F. Polyakov, Experimental investigation Of viscogravitational fluid flow in a horizontal tube *Scientific Research Inst. of High Temperatures, traduit du teplofisica visokhych temperature*, 5, n°1, pp. 87-95, (1967).
- [5] D. P. Siegwarth, R. D. Miicesell, T. C. Rbadals, T. J. Hanratty, Effect of secondary flow on the temperature field and primary flow in a heated horizontal tube *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12, pp. 1535-1552, (1969).
- [6] A. E. Bergles, R. R. Simonds, Combined and free convection for laminar flow in horizontal tubes with uniform heat flux *Int. J. Heat Mass Transfer*, 14, pp. 1989-2000, (1971).
- [7] S. M. Morcos, A. E. Bergles, Experimental investigation of combined forced and free laminar convection in horizontal tubes *ASME. J. Heat Mass Transfer*, 97, pp. 212-219, (1975).
- [8] D. K. Choi, D. H. Choi, Developing mixed convection flow in a horizontal tube under Circumferentially non-uniform heating *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, pp. 1899-1913, (1994).
- [9] G. J. Hwang, H. C. Lai, Laminar convective heat transfer in a horizontal isothermal tube for high Rayleigh numbers *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, pp. 1631-1640, (1994).

- [10] B. Shome, M. K. Jensen, Mixed convection laminar flow and heat transfer of liquids in isothermal horizontal circular ducts *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38, pp. 1945-1956, (1995).
- [11] J. Orfi, N. Galanis et C. T. Nguyen, Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans tube incliné en régime de convection mixte *Rev. Gén. Therm.*, (1997), Paris.
- [12] M. Ouzzane, N. Galanis, Effets de la conduction pariétale et de la répartition du flux thermique sur la convection mixte près de l'entrée d'une conduite inclinée *Int. J. Thermal Sciences*, 38, pp. 622-633, (1999).
- [13] M. Ouzzane, Développement simultané en convection mixte laminaire dans une conduite avec un flux de chaleur non uniforme sur sa surface externe : cas avec et sans ailettes, *Thèse de Doctorat, Sherbrook* (2000).
- [14] B. Sefik, A. Ali, Transient conjugated heat transfer in thick walled pipes with convective boundary conditions *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, pp. 2701-2709, (2003).
- [15] P. M. Maxime, A. Muriel, B. Serge, S. Pascal, Etude numérique du transfert thermique en convection mixte pour un échangeur de chaleur air/solaire, *Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés IFR*, rue Jules Ferry, BP 7511 – 64075 PAU Cedex
- [16] C. K. Chen, L. W. Wu, Y. T. Yang, Estimation of unknown outer wall heat flux in turbulent circular pipe flow with conduction in the pipe wall, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, pp. 3971-3981, (2005).
- [17] P. M. Guimarães, G. J. Menon, Combined free and forced convection in an inclined channel with discrete heat sources, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35, pp. 1267-1274, (2008).
- [18] A. Omara, S. Abboudi, Effet de la conduction axiale sur le transfert de chaleur Conjugue par convection mixte défavorable, *3èmes Journées Internationales de Thermique*
- [19] O. Kholai, A. Bellaouar et M. Kadja, Etude numérique de la convection mixte dans un tube incliné, *JITH 2007*, Albi, France.



- [20] I. Voicu, T. Maré, N. Galanis, J. Miriel, I. Colda, Mixed convection in a vertical double pipe heat exchanger *International Journal of Thermal Sciences*, 46, pp. 540-550, (2007).
- [21] M. A. Hussein, S. k. Yasin, Combined convection heat transfer for thermally developing aiding flow in an inclined circular cylinder with constant heat flux *Applied Thermal Engineering*, 27, pp. 1236-1247, (2007).
- [22] C. L. Chang, Numerical simulation for natural convection of micropolar fluids flow along slender hollow circular cylinder with wall conduction effect, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, pp. 624-636, (2008).
- [23] S. Marušić, E. Marušić-Paloka, I. Pažanin, Effects of strong convection on the cooling process for a long or thin pipe, *C. R. Mecanique*, 336, pp. 493-499, (2008).
- [24] M. A. Hussein, The effect of different inlet geometries on laminar flow combined convection heat transfer inside a horizontal circular pipe, *Applied Thermal Engineering*, 29, pp. 581-590, (2009).
- [25] A. M. Dehkordi, M. Memari, Transient and steady-state forced convection to power-law fluids in the thermal entrance region of circular ducts: Effects of viscous dissipation, variable viscosity, and axial conduction, *Energy conversion and Management*, 51, pp. 1065-1074, (2010).
- [26] S. W. Churchill, H. S. Chu, Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18, pp. 1049-1053, (1975).
- [27] H. D. Baehr, K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- [28] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (McGraw-Hill, New-York, 1980).
- [29] C. Abid, F. Papini, D. Veyret, Etude de la convection mixte dans un conduit cylindrique. Approche analytique / numérique et détermination expérimentale de la température de paroi par thermographie infrarouge *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, pp. 91-101, (1994).

[30] K. Chahboub, T. Boufendi, Computational Study of the Conjugate Heat Transfer and the Wall Conduction Effects in a Horizontal Pipe with Temperature Dependent Properties, *Int. Rev. Mech Eng.*, 5, N°2, pp. 361-368, (2011).

# **Influence of the Wall Conduction on the Conjugate**

## **Heat Transfer in a Horizontal Duct**

### **Abstrac.**

The objective of this work is to study a three-dimensional numerical simulation of conjugate heat transfer by the influence of the thermal conductivity of a low thickness solid wall of a horizontal cylindrical pipe subjected entirely to a uniformly volumetric heating on an internal distilled water flow. The mixed convection in the fluid domain is combined with heat conduction in the thickness of the solid duct. The fluid physical properties are temperature dependent and the heat losses from the outer surface of the duct to the ambient are taken into account. At the entrance of the duct, the fluid comes with a parabolic profile and a constant temperature. The model equations of conservation of mass, momentum and energy are solved by the finite volume. The SIMPLER algorithm is used for a sequential solution of algebraic systems equations and each system is solved by the iterative sweeping method with the Thomas and Thomas cyclic algorithms. The results of this study are produced for four different materials: Inconel, Stainless steel, Tantalum and Aluminum which correspond to Grashof numbers:  $2.57 \cdot 10^5$ ,  $9.37 \cdot 10^3$ ,  $8.97 \cdot 10^3$ ,  $4.63 \cdot 10^2$ , respectively. The heating duct is produced by passing an electric current of intensity equal to 40 Ampères in the wall. The other control parameters such Reynolds and Prandtl numbers are constant and fixed to:  $Re=143.2836$ ,  $Pr = 8.0820$ . The results have been conducted so as to show the influence of the thermal conductivity of the solid on the dynamic and thermal fields and their effects on the evolution of Nusselt number and the heat transfer. The results showed that the increase of the conductivity reduces the intensification of the secondary flow and reduces the level of the temperatures of the fluid and the external wall. This reduction impoverishes the thermal transfer to the interface fluid-wall. Also, the comparison of the results showed that the duct inconel provides better heat transfer between the wall and the fluid, compared to steel, tantalum and aluminum.

**Keywords:** Thermal Conductivity, Cylinder Duct, Conjugate Heat Transfer, Finite Volume Method, Mixed Convection

## تأثير التوصيل الجداري على التحولات الحرارية المترافقة في أنبوب أسطوانى أفقى

### ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة معمقة للمحاكاة العددية الثلاثية الأبعاد بالنسبة لتبادل الحرارى المترافق بتأثير التوصيل الحرارى فى سمك جدار رقيق للأنبوب أسطوانى أفقى يخضع لتسخين منتظم حجمى. الحمل المختلط فى المائع مرافق للتوصيل الحرارى فى سمك جدار القناة. الخصائص الفيزيائية للمائع متعلقة بدرجة الحرارة و الضياع الحرارى للجدار الخارجى للقناة باتجاه الوسط الخارجى غير مهم. عند مدخل القناة، المائع يكون موجود على شكل قطع مكافئ ودرجة حرارة ثابتة. معادلات الإنحفاظ النموجية للكتلة ، كمية الحركة و الطاقة تحل بطريقة الحجم المنتهية . نتائج هذا العمل مستخرجة من أربع مواد مختلفة:

(Inconel, Acier inoxytable, Tantale, Aluminium) موافقة للأعداد غراشوف (Gr) : 257000، 9370 ، 8970 ، 463 على الترتيب. يتم تسخين الأنبوب عن طريق تمرير تيار كهربائى شدته تساوى :  $I = 40$  أمبير. عناصر المراقبة الأخرى المثبتة هى عدد رينولدس (Re) عند 143.2836 و عدد برونل (Pr) عند 8.082. النتائج المتحصل عليها أنجزت و ذلك من أجل إظهار تأثير التوصيل الحرارى الجدارى على الحقول الديناميكية و الحرارية و أيضا تأثيره على تطور عدد نوسالت (Nu). أظهرت النتائج أن الزيادة فى التوصيل يؤدي إلى تكثيف تدفق الثانوى يقلل من مستوى درجة حرارة السائل و الجدار الخارجى. هذا التخفيض يفقر نقل الحرارة فى واجهة سائل-جدار. كما أظهرت المقارنة بين النتائج أن الأنبوب (Inconel) مقارنة مع الأنابيب (Acier inoxytable, Tantale, Aluminium) يوفر قدرا أكبر من نقل الحرارة بين الجدار و السائل.

### الكلمات الدالة

التوصيل الحرارى ، أنبوب أسطوانى ، التحويل الحرارى المترافق ، الحجم المتناهية ، الحمل المختلط

## **Résumé.**

Le but de ce travail est d'étudier une simulation numérique tridimensionnelle du transfert de chaleur conjugué par l'influence de la conductivité thermique d'une paroi solide de faible épaisseur d'un conduit cylindrique horizontal soumis entièrement à un chauffage uniforme volumétrique sur un écoulement d'eau distillée interne. La convection mixte dans le domaine fluide est conjuguée à la conduction dans l'épaisseur du solide. Les propriétés physiques du fluide sont thermo dépendantes et les pertes thermiques, de la surface extérieure du conduit vers le milieu ambiant, sont prises en considération. A l'entrée du conduit, le fluide se présente avec un profil parabolique et une température constante. Les équations modélisantes de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie sont résolues par la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour une solution séquentielle des systèmes d'équations algébriques et chaque système est résolu par la méthode itérative de balayage par le biais des algorithmes de Thomas et Thomas cyclique. Les résultats de cette étude sont produits pour quatre matériaux différents (Inconel, Acier inoxydable, Tantale, Aluminium) qui correspondent aux nombres de Grashof:  $2.57 \cdot 10^5$ ,  $9.37 \cdot 10^3$ ,  $8.97 \cdot 10^3$ ,  $4.63 \cdot 10^2$  respectivement. Le chauffage du conduit est produit par le passage d'un courant électrique d'une intensité égale à 40 Ampères dans la paroi. Les paramètres de contrôle tels que le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl sont fixés respectivement à :  $Re=143.2836$  et  $Pr = 8.0820$ . Les résultats produits ont été conduits de telle sorte à faire apparaître l'influence de la conductivité thermique du solide sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que leurs effets sur l'évolution du nombre de Nusselt. Les résultats obtenus ont montré que l'augmentation de la conductivité entraîne une intensification de l'écoulement secondaire et réduit le niveau des températures du fluide et la paroi externe. Cette réduction appauvrit le transfert thermique à l'interface fluide-paroi. Aussi, la comparaison des résultats a montré que le conduit en Inconel fournit un meilleur transfert de chaleur entre la paroi et le fluide, par rapport à l'acier, le tantale et l'aluminium.

**Mots clés** : Conductivité Thermique, Conduit Cylindrique Horizontal, Transfert Thermique Conjugué, Volume Fini, Convection Mixte, Simulation Numérique.