

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N ° d'ordre :.....

Série :.....

**MEMOIRE**  
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE  
SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

**TITRE**

**THEORIES PARA QUANTIQUES CONFORMES  
ET SUPER INTEGRABLES**

**Par**

**MORCHEDI AMOR**

La soutenance aura lieu le : 09 / 06 / 2011

**Devant le jury :**

<u>Président :</u>	H. Aissaoui	M.C. A	Univ. Mentouri Constantine
<u>Rapporteur :</u>	N. Mebarki	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
<u>Examineurs :</u>	A. Benslama	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
	S. Zaim	M.C. A	Univ. Batna

## **Remerciements**

*Je tiens à remercier infiniment mon directeur de thèse : prof. Mebarki pour son aide que pour sa qualité humaine, il m'a toujours consacré le temps nécessaire pour être guidé efficacement, au-delà leur grande rigueur scientifique et de l'aide technique qu'il m'a apportée. « Vraiment il m'a enseigné comment être un physicien chercheur »*

*Je tiens à remercier aussi les membres du jury de me faire l'honneur de juger cette thèse, en particulier le Dr. Aissaoui pour leur aide et leurs conseils importants.*

## Summary

In this modest research work, we have tried to focus about some main ideas of quantum mechanics and symmetries, and how the symmetries serve to facilitate the solvability for many systems that are not solvable in the framework of Schrödinger's equation, basically this work is divided into several parts, and for the objectivity the first part contains some elementary ideas, concerning a kinds of the symmetries that are studied, in particular the conformal and the para quantization symmetry, the second part we have treated the SUSY and the para quantization theory, and we have clarified that both of them gives the same spectrum of energy in ( $N=1,2$  and  $D=1,2,3$ ).

In the third part we defined what so called the super integrability, and how this algebraic method could remove the problems of non-solvability of a several quantum mechanics systems, in particular the example of Smorodinsky-Winternitz systems, we have found that a spectrum of the energy is simply given by some constraints applied on the function structure. Finally in the fourth part, we have given an insight what so called the SUSY intertwining relations, and how the application of them in the case when the quantum partners' Hamiltonian of a system was constructed by super charges of second order derivatives could inspire super integrable and para quantum systems in a given choices of parameters.

**Keys words:** Para quantization, conformal symmetry, super integrable, super symmetry, intertwining relations.

## Résumé

Dans ce travail de recherche, on a essayé de mettre en évidence quelques idées importantes de la mécanique quantique et les symétries, et de voir comment les symétries servent à faciliter des grandes classes des systèmes quantique non-solubles par l'équation de Schrödinger, ce travail est divisé en quatre parties, pour l'objectivité la première partie contient quelques idées élémentaire concernant les types de symétries qu'on étudié, en particulier la symétrie conforme et la para quantification, la deuxième partie on a traité la SUSY conjointement avec la para quantification pour  $(N=1,2$  et en  $D=1,2,3)$ , et on a clarifié que le spectre d'énergie et le même pour les deux cas de symétrie.

En troisième partie et finalement on a défini se qu'on appelle la super intégrabilité et comment, cette méthode algébrique peut enlever la difficulté venant par des systèmes quantiques non-solubles, en particulier l'exemple du Smorodinsky-Winternitz, on a trouvé que le spectre d'énergie est simplement donné par des contraintes appliqués sur l'expression de la fonction de structure.

**Mots clé:** Para quantification, symétrie conforme, super intégrable, super symétrie, intertwining relations.

في هذا البحث المتواضع ، حاولنا التركيز على بعض الأفكار الرئيسية لميكانيكا الكم والتماثلات ، وكيف أن التماثلات تسهل في قابلية الحل للكثير من الأنظمة الفيزيائية التي لا يمكن حلها في إطار معادلة شرودنغر ، أساسا ينقسم هذا العمل إلى عدة أجزاء ، وللموضوعية كان الجزء الأول يحتوي على بعض الأفكار الأولية ، بشأن أنواع من التماثلات التي يتم دراستها ، ولا سيما التماثل شبه كمي والتماثل بالمطابقة ، وقد عالج الجزء الثاني التماثل السوبر (SUSY) ونظرية شبه الكمي و أوضحنا أن كلا منهما يعطي نفس طيف الطاقة في (N = 2,1 و D=1,2,3). في الجزء الثالث حددنا ما يسمى ب : القابلية العظمى للحل ، وكيف أن هذا الأسلوب الجبري بإمكانه إزالة مشاكل عدم قابلية الحل لعدد من أنظمة ميكانيكا الكم و على سبيل المثال نظم Smorodinsky - Winternitz ، لقد وجدنا أن طيف الطاقة يستنتج ببساطة من خلال تطبيق بعض القيود على ما يسمى « La fonction de structure ».

وأخيرا في الجزء الرابع ، قدمنا فكرة ما يسمى بعلاقات « Intertwining » ، وكيفية تطبيق كل منها في الحالات التي يكون فيها شركاء الهاميلتونيان مبنية ب : super charges ذات مشتقات من الدرجة الثانية حيث يمكن أن نستخرج بعض الأنظمة القابلة للحل نذكر منها في هذا البحث نظام super integrable ونظام شبه كمي « para quantum ».

**كلمات مفتاحيه :** تماثل شبه كمي، تماثل مطابق، super integrable ، علاقات Intertwining

## Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	4
<b>1 Notions préliminaires</b> .....	6
1.1 Symétrie conforme .....	6
1.1.1 Symétrie conforme a d dimensions .....	6
1.1.2 Groupe conforme.....	6
1.1.3 Algèbre de lie d'un groupe conforme.....	8
1.1.4 La symétrie conforme a 2 dimensions .....	9
1.1.5 Algèbre conforme à d=2 .....	10
1.2 Systèmes quantiques relativistes conformes .....	11
1.2.1 Équation de Klein Gordon .....	11
1.2.1.1 Équation de KG massive.....	11
1.2.1.2 Équation de KG non-massive.....	13
1.2.1.3. L'invariance de l'équation de Klein Gordon.....	15
1.2.2 Symétrie conforme de l'équation de Dirac .....	16
1.2.2.1 Équation de Dirac massive.....	17
1.2.2.2 Équation de Dirac non-massive.....	18
1.2.2.3 Symétrie maximale de l'équation de Dirac .....	20
1.3 Systèmes quantiques super intégrables.....	21
1.3.1 Intégrabilité .....	21
1.3.2 Systèmes classiques.....	21
1.3.3 Systèmes quantiques.....	22
1.3.4 Systèmes quantiques super intégrables à 2 dimensions.....	22
1.4 Théories para quantiques .....	22
1.4. 1 Para champs .....	23
1.4.2 Relations tri linéaires .....	23
1.5 Théories quantique généralisées.....	24
1.5.1 Para quantification.....	24
1.5.2 Théories quantiques anioniques .....	25
<b>2. La para quantification et la super symétrie</b> .....	27
2.1 Introduction.....	27
2.2 Formalisme.....	28
2.2.1 N=1, SUSYQM .....	30

2.2.1.1 D=1 .....	30
2.2.1.2 D=2 .....	32
2.2.1.3 D=3 .....	34
2.2.2 N=2, MQ SUSY .....	38
2.2.2.1 D=1 .....	40
2.2.2.2 D=2 .....	41
2.2.2.3 D=3 .....	43
2.3 Résultat et conclusion .....	45
<b>3 Système quantique super intégrable de Smorodinsky-Winternitz .....</b>	<b>47</b>
3.1 Introduction .....	47
3.2 La super intégrabilité .....	47
3.2.1 L'invariant F.....	48
3.2.2 Relations de commutations .....	49
3.3 Algèbre d'un oscillateur déformée .....	51
3.3.1 Formalisme.....	51
3.3.2 Oscillateur généralisée déformée et para fermionique .....	55
3.3.3 La fonction de structure de S.W .....	55
3.3.4 Le spectre d'énergie de S.W .....	56
3.4 Conclusion .....	58
<b>4 Les relations SUSY intertwining et les systèmes para quantiques et super intégrables</b>	<b>60</b>
4.1 Introduction.....	60
4.2 SUSY intertwining relations .....	60
4.3 La solution générale des relations d'intertwinig au second ordre dérivatives .....	61
4.3.1 Métrique hyperbolique déformée .....	62
4.3.1 Métrique de Lorentz .....	64
4.4 Système para quantique et relations SUSY intertwining.....	65
4.4.1 Partenaires hamiltoniens para quantiques .....	65
4.4.2 la vérification des relations d'intertwinig en système para quantique.....	66
4.5 Les relations d'intertwining et un système de Smorodinsky-Winternitz .....	69
4.5.1 Partenaires hamiltoniens de S.W.....	69
4.5.2 La vérification des relations d'intertwining en système de S.W.....	70
4.6 Conclusion .....	73
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>74</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>75</b>

**Bibliographie** ..... 94



## Introduction

La physique moderne se repose sur la notion de symétrie, en particulier la physique des hautes énergies, pour cette raison nous nous consacrons au cours de ce travail à étudier des différents types de symétrie, tel que la symétrie conforme, la super intégrabilité, la para quantification et la super symétrie, ou elles sont appliquées sur des systèmes physiques et servent à faciliter et de réduire les difficultés des calculs, dans la suite de notre travail nous allons voir l'utilité de ces différentes symétries en mécanique quantique.

La symétrie conforme joue un grand rôle en mécanique quantique, nous allons appliquer cette symétrie vis-à-vis une autre symétrie dite para quantique définissant par des relations tri linéaires dans un espace de Fock approprié, par conséquent un système mené par ces deux symétries dit para quantique conforme.

Dans le chapitre 01 nous allons rappeler quelques considérations nécessaires en basant sur la notion de symétrie conforme dans la mécanique quantique relativiste, la théorie de super intégrabilité et la para quantique. dans le chapitre 02, on va faire une étude détaillée d'un système défini par la super symétrie avec un autre dite para quantique conforme, ainsi par la comparaison entre eux, nous précisons la différence marquée.

Dans le chapitre 03 nous identifierons ce qu'on appelle un système super intégrable et on essayera de montrer que les systèmes para quantiques sont des systèmes intégrables en particulier super intégrables et on notera que l'étude des systèmes para quantique conformes est plus délicate.

Dans le chapitre 05 nous essaierons de faire une étude générale de ce qu'on appelle les relations d'intertwining définies par des hamiltoniens qui s'écrivent en fonction des super charges au second ordre de dérivées.

En fin on termine par une conclusion générale.

# Chapitre 01

## Notions préliminaires

Avant d'étudier les systèmes para-quantiques conformes et super intégrables il est très commode de rappeler quelques considérations nécessaires pour mieux comprendre ce genre de système, car tous les systèmes se basent sur des différentes symétries. On les présente systématiquement au cours de ce chapitre.

### 1.1 Symétrie conforme

### 1.1.1 Symétrie conforme ad dimensions

Nous considérons un espace-temps à  $d$  dimensions, une transformation conforme est définie comme un changement local des coordonnées en préservant les angles [18].

Soit  $g_{\mu\nu}$  une métrique plate de signature  $(p, q)$  et l'élément de longueur  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  le changement des coordonnées  $x \rightarrow x'$  donne un l'élément de longueur  $ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$  avec une métrique s'écrit par:

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (1.1)$$

D'autre façon une transformation qui laisse la métrique invariante à une fonction près des coordonnées, on la définit par la relation suivante :

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Et on dit dans ce cas la transformation est conforme, ou  $\Omega(x)$  est une fonction des coordonnées  $x^\mu$ .

### 1.1.2 Groupe conforme

L'ensemble des transformations de coordonnées satisfèrent la relation (1.2) constitue un groupe qu'on l'appelle : group conforme [11] qui est local et possède le groupe de transformations de Poincaré caractérisé par  $\Omega(x) = 1$  le groupe conforme est le sous-groupe des transformations de coordonnées qui laisse la métrique invariante avec un facteur d'échelle près [11], [19].

Le groupe conforme à  $d$  dimension décrivant par les transformations de coordonnées suivantes :

**a. Groupe de Poincaré :** translations, glissements (boosts) et rotations de l'espace-temps sont définis par :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.3)$$

**b. Dilatation :**

$$x'^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (1.4)$$

**c. Transformations conforme spéciales** (inversion  $\times$  translation  $\times$  inversion) :

$$\frac{x'^{\mu}}{x'^2} = \frac{x^{\mu}}{x^2} + c^{\mu} \quad (1.5)$$

Pour extraire ces trois cas de transformations, il suffit de faire un changement de coordonnées infinitésimales  $x'^{\mu} \rightarrow x^{\nu} + \varepsilon \xi^{\mu}$  avec  $\varepsilon \ll 1$  nous obtenons :

$$ds'^2 = ds^2 + \varepsilon (\partial_{\mu} \xi_{\nu} + \partial_{\nu} \xi_{\mu}) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.6)$$

Le fait que  $ds'^2$  doit être proportionnelle à la métrique, on résulte des contraintes sur  $\xi^{\mu}$  :

$$\partial_{\mu} \xi_{\nu} + \partial_{\nu} \xi_{\mu} = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \xi^{\alpha} \quad (1.7)$$

Dans un espace Euclidien une transformation est conforme si et seulement si l'équation (1.7) soit satisfaite, On peut extraire quelque résultats à partir de l'invariance conforme par:

- Translation et transformation de Lorentz mène a la conservation du tenseur énergie-impulsion
- Dilatation dans ce cas, la conservation du tenseur énergie-impulsion n'implique que la trace de ce dernier est nulle.
- Au cas de la mécanique statistique quantique l'invariance conforme permet de fixer explicitement la forme des fonctions de corrélations à deux et trois points

### 1.1.3 Algèbre de lie d'un groupe conforme

Le groupe conforme dans un espace-temps est représenté par une algèbre de Lie [14], [23] qui génère tous les transformations mentionnées avant est données par:

$$J_{\mu\nu} = i(x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}) \quad (1.8)$$

$$P_{\mu} = i \partial_{\mu} \quad (1.9) \quad D = i x_{\mu} \partial^{\mu} \quad (1.10)$$

$$K_{\mu} = i(2x_{\mu} x_{\nu} \partial^{\nu} - x^2 \partial_{\mu}) \quad (1.11)$$

Ou les  $J_{\mu\nu}$  sont des générateurs associés au groupe de Lorentz [14] et  $P_{\mu}$  génèrent les translations d'espace temps,  $D$  engendrent la transformation par dilatation et  $K_{\mu}$  engendrent les transformations spéciales et les relations de commutations [23], [26] de ces générateurs concernant un système quantique donnés par :

$$[D, D] = [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0 \quad (1.12)$$

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu (1.13) [D, K_\mu] = iK_\mu (1.14) [K_\mu, P_\nu] = 2i(g_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}) \quad (1.15)$$

$$[K_\mu, J_{\sigma\lambda}] = i(g_{\sigma\mu}K_\lambda - g_{\lambda\mu}K_\sigma) \quad (1.16)$$

L'algèbre de lie du groupe de Poincaré [20]:

$$[J_{\mu\nu}, P_\alpha] = ig_{\mu\alpha}P_\nu - ig_{\nu\alpha}P_\mu \quad (1.17)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (1.18)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}) \quad (1.19)$$

### 1.1.4 La symétrie conforme a 2 dimensions

La symétrie locale conforme à 2-dimensions ayant une importance particulière car son algèbre de symétrie a une dimension infinie [15], donc nous nous bornerons à étudier leurs caractéristiques particulières.

Dans un espace euclidien à 2-dimensions ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ), la relation (1.7) implique deux contraintes qui s'écrivent :

$$\partial_0\xi^1 + \partial_1\xi^0 = 0, \partial_0\xi^0 = \partial_1\xi^1 \quad (1.20)$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann [19] qui définissent une fonction holomorphe<sup>1</sup>

Sur le plan complexe on introduit les variables :

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2, \quad \xi = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{\xi} = \xi^1 - i\xi^2 \quad (1.21)$$

Donc les équations de Cauchy-Riemann [11,19] s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}(z, \bar{z})}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \xi(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

---

<sup>1</sup> Fonction holomorphe : c'est une fonction analytique

Donc la transformation conforme coïncide avec les transformations de coordonnées analytiques :

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z' = f(z); \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

On représente l'élément de longueur en fonction de ces variables indépendantes :

$$ds^2 = dzd\bar{z}ds'^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dzd\bar{z} \quad (1.24)$$

Cette symétrie locale pour laquelle la dimension est infinie

### 1.1.5 Algèbre conforme à d=2

L'algèbre conforme devient de dimension infinie et menant à des restrictions significatives dans les théories invariantes conformes à deux dimensions, et peuvent être donnés des classifications pour les phénomènes critiques à deux dimensions [11], elle fournit aussi la variable dynamique de la théorie des cordes.

Pour construire cette algèbre nous commençons par introduire ses générateurs, on suppose qu'on a des transformations infinitésimales:

$$z' = f(z) = z + \varepsilon(z)\bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \quad (1.25)$$

Ou :  $\varepsilon(z)$ ,  $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$  peuvent être prise infiniment petites dans un disque de rayon fixé, et on développe en série de Laurent autour de zéro de z et  $\bar{z}$  :

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}_n \bar{z}^{n+1} \quad (1.26)$$

Les générateurs correspondant ont la forme :

$$\begin{aligned} l_n &= -z^{n+1} \partial_z \\ \bar{l}_n &= -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Contrairement au cas où  $d = 2$ , le nombre de générateur à 2-dimensions est infini, les relations de commutations caractérisant ces générateurs sont donnés par l'algèbre de Witten [19] :

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m} \quad (1.28)$$

$$[l_n, \bar{l}_m] = 0 \quad (1.29)$$

$$[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m)\bar{l}_{n+m} \quad (1.30)$$

L'ensemble des transformations globales forment le groupe conforme  $SO(3,1)$  à 2-dimensions, dont les générateurs sont :  $\{l_{-1}, l_0, l_1\} \cup \{\bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1\}$ .

$l_{-1}$  et  $\bar{l}_{-1}$  sont les générateurs des translations,  $l_0 + \bar{l}_0$  et  $i(l_0 + \bar{l}_0)$  sont respectivement les générateurs des dilatations et rotations,  $l_1$  et  $\bar{l}_1$  les générateurs des transformations spéciales conformes les transformations qui restent ne sont pas globales mais (locales).

## 1.2 Systèmes quantiques relativistes conformes

### 1.2.1 Équation de Klein Gordon

L'équation de KG est la plus simple équation relativiste, ou il est très commode d'analyser de tel équation avec ce qu'on appelle la symétrie « conforme », sans oublier de dire que cette symétrie est du genre de Lie [24] (caractérisée par des opérateurs différentiels au premier ordre), et car la symétrie conforme peut être absente dans quelques cas, nous nous occuperons à préciser les cas d'absences et la présence de cette symétrie et les conséquences apportées sur les solutions de l'équation de Klein Gordon.

#### 1.2.1.1 Équation de KG massive

On considère l'équation de Klein Gordon pour N particule de masse  $m$  suivante :

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\psi = 0 \quad (1.31)$$

Tel que :  $p_\mu = i\partial_\mu$  et  $m^2$  est le carré de la masse au repos.

L'équation

(1.31) est relativiste et analogue à l'équation de Schrödinger [21] dans cette section nous étudions la symétrie conforme de l'équation (1.31) dans la classe  $M_1$  (la classe des opérateurs du premier ordre) et on prouve que l'équation de KG est invariante sous les 10-dimensions de l'algèbre de Lie ayant les générateurs suivants:

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad \mu = 0,1,2,3. \quad (1.32)$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = 0,1,2,3. \quad (1.33)$$

Pour argumenter ces résultats et en même temps faire une démonstration concrète concernant ce type de symétrie en travaillant dans le cas général ou cette symétrie contient seulement des opérateurs de classe  $M_1$ . On considère l'opérateur linéaire  $Q$  au premier ordre écrit comme:

$$Q = A^\mu p_\mu + B, \quad A \in F \quad (1.34)$$

Tel que  $F$  est un espace de solution de Klein Gordon, de telle sorte  $Q$  peut couvrir tous les cas de transformations possibles de la solution de l'équation de KG, si on considère un opérateur linéaire :  $L = p^\mu p_\mu - m^2$  on dit est un opérateur symétrique (S.O) de classe  $M_1$  si :

$$[Q, L] = QL - LQ = \delta_Q L, \quad \delta_Q \in F \quad (1.35)$$

Si on prend l'opérateur de symétrie d'autre façon comme :

$$Q = \frac{1}{2} [K^\mu, p_\mu] + C;$$

$$C = B + \frac{1}{2} [K^\mu, p_\mu] \quad (1.36)$$

L'application de la propriété de l'opérateur de transformation des formules (1.35), (1.36) avec l'opérateur  $L$  définissant l'équation de KG [21] donne :

$$\partial^\nu K^\mu + \partial^\mu K^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta_Q, \quad \partial^\mu C = \partial^\mu \delta_Q, \quad \delta_Q m^2 = 0 \quad (1.37)$$

A cause de  $m \neq 0$  on obtient à partir l'équation précédente :

$$\partial^\nu K^\mu + \partial^\mu K^\nu = 0, \quad \partial^\mu C = 0 \quad (1.38)$$

Ces équations sont facilement intégrées, on appelle la première équation « killing equation » et sa solution générale donnée par [21]:

$$K^\mu = c^{[\mu\sigma]} x_\sigma + b^\mu \quad (1.39)$$

Où  $c^{[\mu\sigma]} = -c^{[\sigma\mu]}$ ,  $b^\mu$  sont des nombres arbitraires et on peut aussi en déduire que  $C$  est Independent de  $x$ , et l'expression générale de  $Q$  peut s'écrire :

$$Q = c^{[\mu\sigma]} x_\mu p_\sigma + b^\mu p_\mu + C \quad (1.40)$$



Ou  $Q$  en combinaison linéaire des opérateurs (1.36) et l'opérateur unité, l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré  $AP$  (1.3) représente la symétrie maximale de l'équation (1.31).

Donc, on conclut que chaque système décrivant par des champs massif obéissant à l'équation de KG ne plus avoir une invariance conforme car l'invariance de tels systèmes se limite seulement à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré qui représente un cas particulier de l'invariance conforme.

### 1.2.1.2 Équation de KG non-massive

La symétrie locale de KG devient étendue dans ce cas, et l'invariance maximale de l'algèbre d'une équation d'Alembertienne:

$$p^\mu p_\mu \psi = 0 \quad (1.41)$$

Est 15-dimensions de l'algèbre de Lie du groupe conforme [21], [25] et les éléments de cette algèbre sont donnés par les formules (1.32), (1.33) concernant le groupe de Poincaré et les formules:

$$D = x^\mu p_\mu + 2i, K_\mu = 2x_\mu D - x_\sigma x^\sigma p_\mu \quad (1.42)$$

Pour le démontrer, il suffit de trouver un opérateur de symétrie de  $M_1$  qui satisfait bien la condition (1.41) et de même raisonnement on trouve les équations suivantes :

$$\partial^\nu K^\mu + \partial^\mu K^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\rho K^\rho, \lambda_Q = \frac{1}{2} \partial^\nu K^\nu \quad (1.43)$$

Les formules (1.43) définissent l'équation d'un Killing vecteur conforme sa solution générale :

$$K^\mu = 2x^\mu x_\nu f^\nu - f^\mu x_\nu x^\nu + c^{[\mu\sigma]} x_\sigma + dx^\mu + e^\mu \quad (1.44)$$

Ou  $f^\mu, c^{[\mu\sigma]}, d$  et  $e^\mu$  sont des constantes arbitraires.

les opérateurs :  $P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu$  forment la base de 15-dimensions d'algèbre de Lie et satisfont bien les relations de commutations (1.12) jusqu'à (1.19) mentionnées en §(1.1.3) ces relations caractérisent l'algèbre de Lie du groupe conforme  $C$  (1.3), de la relation (1.40) l'opérateur  $Q$  représente l'un des générateurs d'algèbre de Lie du groupe conforme caractérisé par les transformations du groupe de Poincaré et de dilatation et transformations conformes spéciales, ce qui implique que l'équation de KG non-massive (1.41) est invariante sous les 15-dimensions de l'algèbre de Lie du groupe conforme  $C$  (1.3) (appelée algèbre conforme).

- **Applications**

On veut maintenant voir les modifications possibles qui se produisent par l'application des propriétés d'algèbre de Lie du groupe sur l'équation de KG car l'invariance d'algèbre de Lie correspond à une transformation du groupe avec seul paramètre donné par :

$$x \rightarrow x' = g_\theta(x) \quad (1.45)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = T_{g_\theta}(\psi(x)) = \widehat{D}(\theta, x)\psi(x) \quad (1.46)$$

En général le paramètre de transformation  $\theta$  complexe (mais dans le cas de l'équation de kg tels paramètres sont réels),  $g_\theta, \widehat{D}(\theta, x)$  sont des fonctions analytiques en fonction de  $(\theta, x)$  et  $T_{g_\theta}$  est un opérateur linéaire appartient à l'espace des solutions de l'équation de KG, les opérateurs de transformations sont trouvées à partir les équations de Lie [21] :

$$\frac{dx'^\mu}{d\theta} = K^\mu(x'), \quad x'^\mu|_{\theta=0} = x^\mu \quad (1.47)$$

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = iB(x')\psi', \quad \psi'|_{\theta=0} = \psi \quad (1.48)$$

Où  $K^\mu$  et  $B$  sont des fonctions trouvées dans la relation (1.40), la résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles, qui accepte une solution unique et par l'intégration en comparant avec l'opérateur symétrie (1.44).

Après avoir l'invariance de l'équation de KG de manière complètement générale nous voulons maintenant mettre en valeur les propriétés pouvant s'extraire à cause de cette invariance nous choisissons deux types de transformation du groupe conforme.

#### a. Transformation de Poincaré

Pour n'importe opérateur  $P_\mu$  ou  $J_{\mu\nu}$  de tel sorte  $B \equiv \mathbf{0}$  et de l'équation (1.48) on obtient :

$$\psi'(x') = \psi(x), \quad \psi'(x) = \psi(g_\theta^{-1}(x)) \quad (1.49)$$

Qui s'appelle une transformation homogène elle se produit lorsque le système obéit à une symétrie de Poincaré.

La résolution de l'équation (1.49) donne :

$$K^\mu = \mathbf{1}, \quad \text{si } Q = P_\mu \quad (1.50)$$

$$A^\mu = x_\sigma g_\lambda^\mu - x_\lambda g_\sigma^\mu, \quad \text{si } Q = J_{\mu\sigma} \quad (1.51)$$

Ou :  $g_{\nu}^{\mu}$  est la métrique, on pose :  $\theta = b^{\mu}$  pour  $Q = P_{\mu}$  en substituant (1.50) dans (1.48) on trouve :

$$\frac{dx'^{\mu}}{db^{\mu}} = 1 , \quad x'^{\mu}|_{b^{\mu}=0} = x^{\mu} \quad (1.52)$$

Qui implique

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + b^{\mu} \quad (1.53)$$

De même façon on trouve les transformations générées par  $J_{\mu\sigma}$  on trouve :

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (1.54)$$

Tel que  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  est la matrice de transformation de Lorentz.

De tout ce qui précède l'équation de KG est invariante sous les transformations (1.49), (1.53), qui s'appelle transformation de Poincaré, ce genre de transformation laisse la métrique invariante. de plus l'invariance algébrique de l'équation de KG possède dans sa forme implicite l'information des lois principales de la cinématique relativiste.

## b. Transformation par dilatation

Les équations de Lie de (1.47), (1.48) deviennent comme suivant :

$$\frac{dx'^{\mu}}{d\theta} = x'^{\mu} , \quad x'^{\mu}|_{\theta=0} = x^{\mu} \quad (1.55)$$

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = -\psi' , \quad \psi'|_{\theta=0} = \psi \quad (1.56)$$

Et les solutions de la forme suivante:

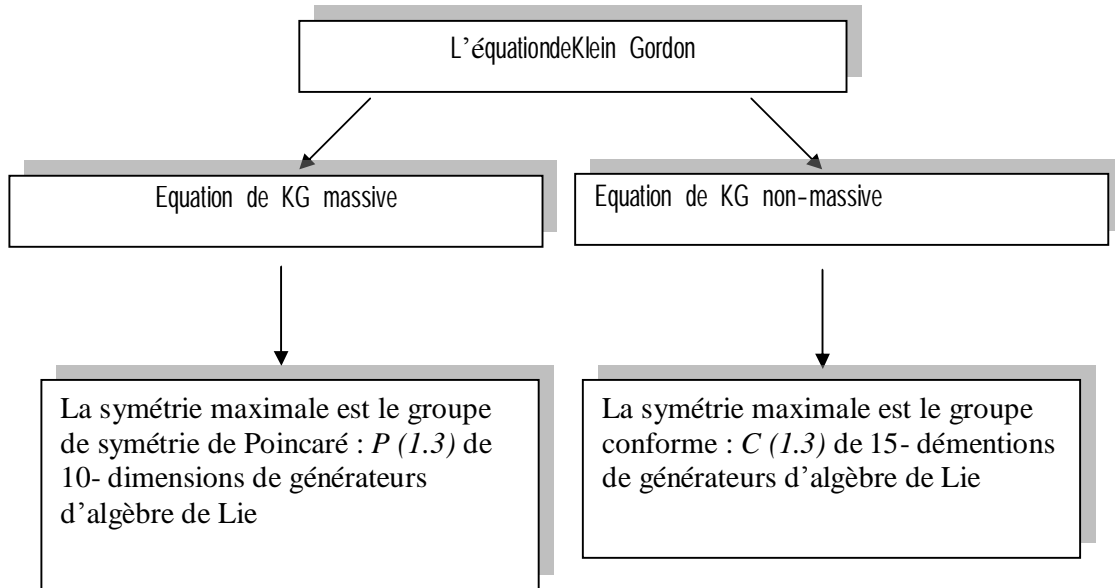
$$\psi' = e^{(-\theta)}\psi , \quad x' = e^{\theta}x \quad (1.57)$$

On a vu que l'équation de KG non-massive est invariante sous le groupe de Poincaré [21] la transformation de dilatation et de même pour les transformations conformes spéciales, donc elle est invariante sous l'algèbre de lie du groupe conforme.

On conclut alors que l'équation de KG est invariante sous le groupe de Poincaré dans le cas des champs massifs, mais cette invariance dans le cas non-massif s'étend à une invariance dite conforme.

### 1.2.1.3. L'invariance de l'équation de Klein Gordon

On précise deux cas pour la symétrie conforme de type de Lie de l'équation de KG, la première est celle pour les champs libre de masse non zéro et l'autre cas pour les champs libre de masse nulle et on en extrait le résultat suivant :



La symétrie conforme apparait dans des systèmes obéissant à l'équation de KG lorsque les champs manifestant dans de tel système ont une masse nulle.

### 1.2.2 Symétrie conforme de l'équation de Dirac

En 1928 Dirac [21] trouva l'équation relativiste pour un électron, qui s'écrit sous forme covariante :

$$L\psi \equiv (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi \quad (1.58)$$

Où  $\psi$  est une quadri-composante fonction d'onde

$\gamma^\mu$  Sont des matrices 4×4 satisfaisantes à l'algèbre de Clifford [16]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.59)$$

La représentation de quatre matrices de Dirac :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i); \quad (1.60)$$

Tel que :

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

Ou les matrices sont écrites sous forme de blocs  $2 \times 2$  des matrices de Pauli  $\sigma_i$ , ainsi l'équation de Dirac pour une particule libre :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha_i \nabla_i + \beta) \psi \quad (1.61)$$

Pour observer l'influence de la symétrie conforme sur le cas des champs de Dirac il suffit de vérifier si la condition générale de la symétrie locale (1.35) soit vérifiée, de telle sorte  $Q$  représente une combinaison linéaire des composantes du groupe conforme.

En fait l'équation de Dirac représente que une augmentation de degré de liberté de celle de KG, de telle façon la solution de Dirac devient un spineur de quatre composantes semblables à la fonction de KG alors le changement marqué sur la symétrie de l'équation de Dirac dépend seulement par l'extension subit par la solution de KG a une solution de Dirac.

### 1.2.2.1 Équation de Dirac massive

Avant de mettre en évidence l'invariance conforme il est très commode de vérifier si l'équation de Dirac subit à l'invariance relativiste (invariance sous le groupe de Poincaré) qui représente la cinématique relativiste.

L'équation de Dirac (1.61) est invariante sous les 10-dimensions algèbre de Lie qui est homéomorphique à l'algèbre de lie du groupe de Poincaré [21], [23],[25] ses éléments sont :

$$P_\mu = p_\mu \equiv i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu} \quad (1.62)$$

Et

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (1.63)$$

Cette algèbre de Lie définit par (1.62), (1.63), représente la symétrie maximale de l'équation de Dirac massive. Pour extraire l'invariance de Poincaré nous avons besoin d'introduire deux opérateurs de Casimir représentant respectivement les opérateurs de masse et spin et l'équation de Dirac aussi invariante sous lesquels, on les définit par :

$$C_1 = P_\mu P^\mu, \quad C_2 = W_\mu W^\mu \quad (1.64)$$

Ou  $W^\mu$  est le vecteur de Lubanski-Pauli :

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \quad (1.65)$$

Ou un opérateur de Casimir commute avec n'importe quel élément de cette algèbre.

Pour spécifier la représentation de l'algèbre du Poincaré qui soit réalisée dans l'ensemble de l'équation de Dirac, de on trouve :

$$C_1 \psi \equiv P_\mu P^\mu \psi = p_\mu p^\mu \psi = m^2 \psi \quad (1.66)$$

$$C_2 \psi \equiv W_\mu W^\mu \psi \equiv -\frac{1}{2} p_\mu p^\mu S_{ab} S_{ab} = -m^2 s(s+1) \psi, \quad s = \frac{1}{2} \quad (1.67)$$

En mécanique quantique relativiste l'espace des états d'une particule de masse  $m$  et le spin  $s$  est l'ensemble en correspondance avec l'espace de représentation de l'algèbre du Poincaré correspondante aux états propres  $m^2$  et  $-m^2 s(s+1)$  des opérateurs de Casimir  $C_1, C_2$ .

On a conclu dans cette section que l'invariance de l'équation de Dirac est isomorphe<sup>2</sup> avec l'invariance de l'équation de KG mentionné dans § (1.2.1), le point nouveau c'est la présence d'un terme du matrice dans l'opérateur de symétrie, qui implique un degré de liberté additionnel (le spin).

### 1.2.2.2 Équation de Dirac non- massive

L'équation de Dirac non-massive ( $m = 0$ ) a un sens physique plus précis par rapport au cas massif car elle décrit les champs non massifs avec l'hélicité  $\pm \frac{1}{2}$  et la symétrie de l'équation de dirac dans ce cas est étendue.

L'invariance maximale dans la classe  $M_1$  de l'équation :

$$\gamma^\mu p_\mu \psi = 0 \quad (1.68)$$

Est 16-dimensions d'algèbre de Lie ou ses éléments sont donnés par les formules (1.62), (1.63) et :

$$D = x^\mu p_\mu + iK, \quad \Sigma = i\gamma_4, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x^\nu x_\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.69)$$

Ou  $\sigma$  un opérateur additionnel de la forme matrice et  $k = \frac{3}{2}$  les opérateurs (1.63), (1.69) satisfèront les relations de commutations:

$$[J_{\mu\sigma}, K_\lambda] = i(g_{\sigma\lambda} K_\mu - g_{\mu\lambda} K_\sigma), \quad [P_\mu, K_\sigma] = 2i(g_{\mu\sigma} D + J_{\mu\sigma}), \quad [K_\mu, K_\sigma] = 0$$

<sup>2</sup> Isomorphe : des deux objets, s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \quad [D, J_{\mu\sigma}] = 0 \quad (1.70)$$

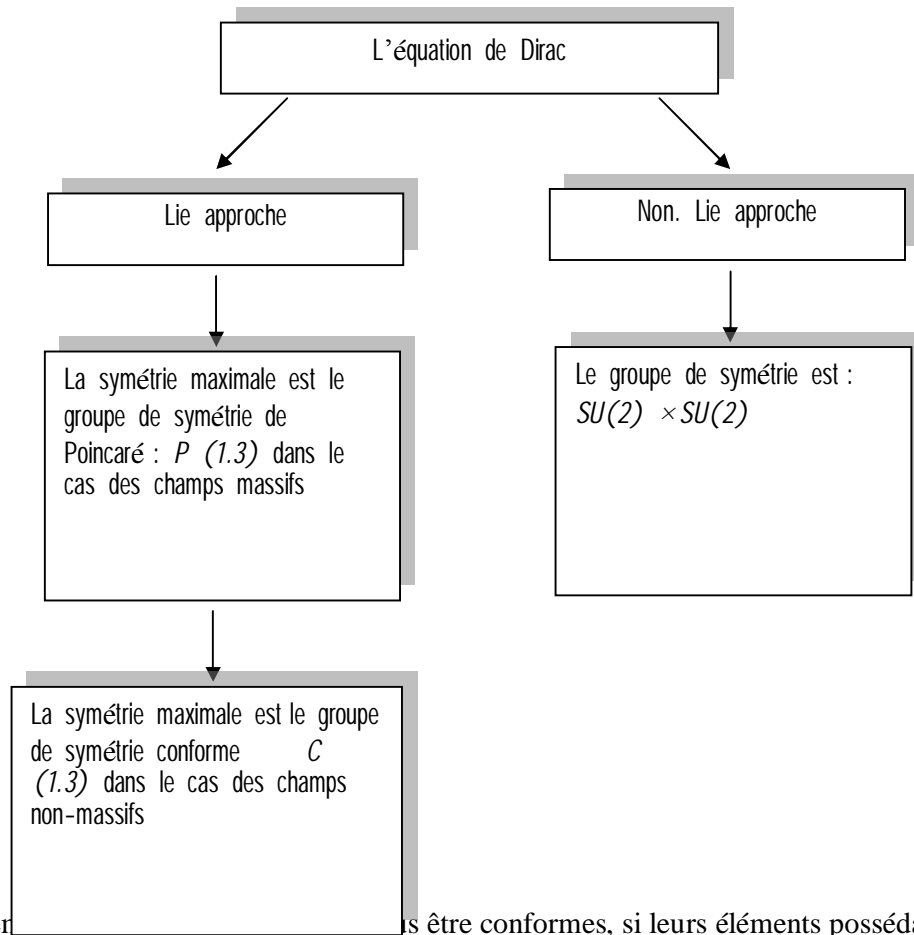
Ou  $\sigma$  : commute avec n'importe quel élément de base de l'algèbre de Lie du groupe conforme, donc ces relations déterminent l'algèbre de Lie du groupe conforme [21], [25].

L'équation de Dirac non massive est invariante sous 16-dimensions algèbre de Lie.

On conclut que l'équation de Dirac est invariante sous l'algèbre  $AP$  (1.3), mais pour ( $m = 0$ ) elle est invariante sous l'algèbre conforme  $C$  (1.3).

### 1.2.2.3 Symétrie maximale de l'équation de Dirac

Dans notre étude nous restreindrons au cas où la symétrie est de genre de lie approche donc on peut conclure que la symétrie maximale de Dirac [25] est seulement le groupe de Poincaré  $P$  (1.3). Donc la symétrie de l'équation de Dirac ne peut être conforme seulement pour (des champs non massifs  $m = 0$ )



Les systèmes peuvent être conformes, si leurs éléments possédant des masses non nulles, dans ce cas la symétrie maximale est celle de Poincaré, ce problème ne peut

être existant que dans le cas des systèmes a haute énergie car la masse des particules est presque a zéro.

### **1.3 Systèmes quantiques super intégrables**

#### **1.3.1 Intégrabilité**

La question d'intégrabilité d'un système classique (quantique), pose un problème sérieux car la réponse de cette question peut nous aider à une étude telle un système. Donc nous nous occupons dans cette section à donner des définitions concrètes concernant les cas ou les systèmes sont intégrables ou super intégrables en tenant en considération seulement les systèmes quantiques.

Dans la mécanique classique l'étude de l'intégrabilité est très claire, mais dans le cas quantique est sous l'investigation et nous nous occupons à la découvrir.

L'idée la plus dominante, dit que l'intégrabilité d'un système quantique est pareille à celle du système classique ou les résultats dans le cas quantique sont trouvés par la procédure de symétrisation [10].

#### **1.3.2 Systèmes classiques**

On considère un système classique dynamique dont  $N$  dimensions :

l'intégrabilité pour un système classique est dit complètement intégrable s'il existe  $N$  fonctions en involution vis-à-vis la structure de poisson mais dans le cas ou le système classique possédant un nombre maximum des constantes du mouvement, i.e.  $2N - 1$  intégrales de mouvement [9] c'est un système classique super intégrable.

#### **1.3.3 Systèmes quantiques**

Les systèmes quantiques intégrables sont définis de façon similaire en substituant aux crochets de poisson des commutateurs.

Ainsi de tels systèmes quantiques intégrables ayants un hamiltonien de  $N$ -dimensions contient un potentiel tel qu'ils admettent  $2N - 1$  fonctions constantes et indépendantes des



polynômes de mouvement au maximum possible [9], [12] dans ce cas la ce sont super intégrables.

### 1.3.4 Systèmes quantiques super intégrables à 2 dimensions

Les systèmes quantiques super-intégrables à 2-dimensions sont obtenus à partir de leurs homologues classiques, les intégrales de mouvement quantiques étant obtenus au moyen des intégrales de mouvement correspondantes par la procédure de symétrisation [10].

On considère un système quantique à 2-dimension est décrit par un hamiltonien  $H$ .

Si le système est intégrable, alors il y a un second opérateur  $I$  commutant avec l'hamiltonien tel que :

$$[H, I] = 0, \quad (1.71)$$

La commutativité de ces opérateurs implique que il y une famille des valeurs propres pour les deux opérateurs.

Un système est dit super intégrable, s'il y a un opérateur troisième  $J$ , et commutant avec  $H$  mais ne commute pas avec  $I$  :

$$[H, J] = 0, \quad [I, J] \neq 0 \quad (1.72)$$

## 1.4 Théories para-quantiques

La généralisation des relations de commutations ordinaires entre des variables dynamiques à des relations tri-linéaires mènent a une théorie quantique généralisée qui s'appelle «théorie para-quantique» [2] caractérisée par un ordre de paramètre  $p$ . La para-quantification a été proposée pour la première fois par green [8] sa théorie basée sur le fait que le commutateur de l'opérateur de nombre des particules avec les opérateurs de création et d'annihilation est le même pour les bosons et les fermions [7]

### 1.4. 1 Para-champs

Ce sont des champs obéissant aux relations de commutation de green [3] les para-champs sont classés comme des para Bose (para Fermi) champs.

La para-quantification est décrite en fonction de para Bose (para Fermi) variables.

### 1.4.2 Relations tri linéaires

Une théorie quantique généralisée définit par des relations de commutation tri-linéaire est celle qui construit ce qu'on appelle «algèbre de Green» [2],[4] de para Bose (resp. para Fermi) variables données par les relations :

$$\left[ [a_i^+, a_j]_{\pm}, a_k^+ \right] = 2\delta_{kj} a_i^+ \quad (1.73)$$

$$\left[ [a_i, a_j]_{\pm}, a_k \right] = 0 \quad i \neq j \quad (1.74)$$

Où les signes « + » (« - ») indiquent respectivement les para bosons (para fermion) et la condition de l'état du vide donnée par :

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (1.75)$$

Et la condition d'une particule singulière:

$$a_k a_i^+ |0\rangle = \delta_{ki} |0\rangle \quad (1.76)$$

Green [5] a trouvé deux solutions (séries infinies) de ces dernières relations.

Une série pour chaque nombre positif  $p$ :

$$a_k^+ = \sum_{\alpha=1}^p b_k^{(\alpha)+}, a_k = \sum_{\alpha=1}^p b_k^{(\alpha)} \quad (1.77)$$

Où les composantes  $b_k^{(\alpha)}$  et  $b_k^{(\beta)}$  sont bose (resp. Fermi) pour  $\alpha = \beta$  mais anti-commutent (commutent) pour  $\alpha \neq \beta$  le cas de para Bose (resp. para Fermi).

## 1.5 Théories quantique généralisées

Théoriquement, il ya deux différents types de généralisation des relations de commutations et la distinction entre eux, c'est assuré par un paramètre faisant la relation entre les opérateurs de créations et d'annihilation qui peut être continu ou discret.

La généralisation des relations de commutations est faite par une simple interpolation entre la statistique de Bose et celle de Fermi.

### 1.5.1 La para quantification

C'est la première généralisation consistante de la statistique de Bose et Fermi [8] elle est caractérisée par un paramètre discret  $p \in N$  (ordre de para quantification) elle est décrite par des relations tri-linéaires on les définit dans le cas général par :

$$[a_k, [a_l^+, a_m]_{\pm}] = \left(\frac{2}{p}\right) \delta_{kl} a_m \quad (1.78)$$

$$[a_k, [a_l^+, a_m^+]_{\pm}] = \left(\frac{2}{p}\right) (\delta_{kl} a_m^+ \pm 2\delta_{km} a_l^+) \quad (1.79)$$

$$[a_k, [a_l, a_m]_{\pm}] = 0 \quad (1.80)$$

Avec les conditions de l'état du vide : (1.75) et (1.76) ou :  $p \in NL$  l'espace de Fock correspondant n'a pas des états avec normes négatives.

### Cas particuliers

- $p = 1$  L'algèbre de para Bose (para Fermi) devient l'algèbre de Bose (Fermi)
- $p = \infty$  L'algèbre de para Bose (para Fermi) devient l'algèbre de Fermi (Bose)
- $p > 1$  para Bose ou para Fermi donnent grande violation de la statistique de Bose ou Fermi [5]

### 1.5.2 Théories quantiques anioniques

Un *anion* est un type de particule que l'on rencontre uniquement dans les systèmes à deux dimensions, c'est une généralisation du concept de bosons et de fermions [1] la théorie quantique anionique intervient lorsqu'on s'intéresse à des systèmes à deux dimensions, on peut simplement dire un *anion* est un cas particulier de para bosons (para fermions).

Dans l'espace à trois dimensions ou plus les particules sont limitées à être des bosons ou fermions, selon leurs comportements statistiques.

Comme nous avons dit lorsque la dimension de l'espace est basse on utilise la statistique fractionnelle (anionique) cette statistique est associée avec une algèbre qu'on l'appelle : « braid algèbre ».

Un type-anionique échange entre l'algèbre des opérateurs d'annihilation et celle des opérateurs de création anionique  $a_i, a_i^+$  ( $i \in I$ ) et sont caractérisés par un paramètre continu  $\lambda, \lambda \in [0,1]$ [8] :

$$a_i a_j^+ - e^{i\lambda\pi \text{sgn}(i-j)} a_j^+ a_i = 0 \quad i \neq j, \quad i, j \in I \quad (1.81)$$

$$a_i a_i^+ - \cos(\lambda\pi) a_i^+ a_i = 1 \quad (1.82)$$

$$a_i a_j - e^{-i\lambda\pi \text{sgn}(i-j)} a_j a_i = 0 \quad (1.89)$$

Et la condition du vide :  $a_i|0\rangle = 0, \forall i \in I$  l'ensemble  $\{I\}$  peut-être l'espace des coordonnées de position ou de moment, discrète ou continue.

L'algèbre anionique peut être obtenue à partir de l'algèbre de Bose par une simple « mapping », la théorie quantique anionique généralise le principe d'exclusion de Pauli [6]

# Chapitre 02

## La para quantification et la super symétrie

### 2.1 Introduction

L'un des objectifs principaux de la mécanique quantique (MQ) est de fournir une description consistante et unifiée de ce qu'on appelle la dualité onde-particule qui est une conséquence directe des équations de Heisenberg du mouvement. Maintenant, pour passer du classique à la théorie quantique, les variables dynamiques et leurs conjugués canoniques doivent satisfaire les

relations de commutation ordinaires, qui sont contribuées avec les équations de Heisenberg. Il s'avère que ces relations sont nécessaires mais pas suffisantes pour garantir les équations de Heisenberg [26] - [33].

La généralisation des relations de commutation canoniques ordinaires entre variables dynamiques aux relations tri-linéaires conduit à une théorie quantique généralisée appelée théorie para-quantique (M.P.Q.), caractérisée par un ordre paramètre  $q$  [28]-[33] et par conséquent un plus grand espace de Hilbert pour les observables para-quantiques, est nécessaire. En outre, en 1976, Nicolai [34] a introduit une mécanique quantique super symétrique (MQ SUSY) afin d'enquêter sur certaines applications possibles aux systèmes de spin. Indépendante, en 1981 Witten [35] a estimé la mécanique quantique SUSY comme un truc pour l'étude du mécanisme de la brisure SUSY en théorie quantique de champs et au cours de ces dernières années elle devient un outil important dans des diverses branches de la physique théorique. L'objectif de cette étude est de montrer que l'hamiltonien para-quantique d'une particule libre est super symétrique.

Dans la section 2 on présente le formalisme et la dimension d'espace dépendante et le type de SUSY, on construit les super charges correspondantes et dérive l'hamiltonien relié. Finalement en section 3 on désigne notre conclusion.

## 2.2 Formalisme

Un system para quantique d'ordre  $q$  est équivalent pour avoir les relations des commutations tri linéaires suivantes entre les operateurs d'annihilations et de créations  $b$  et  $b^+$  respectivement [28]- [33]:

$$[b_k, [b_l^+, b_n]_{\mp}]_- = 2\delta_{kl} \quad (2.1)$$

$$[b_k, [b_l^+, b_n^+]_{\mp}]_- = 2\delta_{kl}b_n^+ \mp 2\delta_{kn}b_l^+ \quad (2.2)$$

Et

$$[b_k, [b_l, b_n]_{\mp}]_- = 0 \quad (2.3)$$

Ainsi que la condition de l'état du vide :

$$b_k b_l^+ |0\rangle = q \delta_{kl} |0\rangle \quad (2.4)$$

Ici, le signe supérieur (resp. inférieur) dans les Eq. (2.1) - (2.3) est pour le système des fermions (resp. bosons).

Pour se faire une idée, et comme un exemple si  $q = 1$  (mécanique quantique ordinaire (MQ)), la réalisation de l'algèbre tri linéaire des eqs. (2.1) - (2.3) est donné par [28]:

$$[b_k, b_l^+]_{\pm} = \delta_{kl} \quad (2.5)$$

Et

$$[b_k, b_l]_{\pm} = 0 \quad (2.6)$$

Maintenant, si  $q = 2$ , on obtient:

$$\langle b_k, b_l, b_n^+ \rangle_{\mp} = 2 \delta_{nl} b_k \quad (2.7)$$

$$\langle b_k, b_l^+, b_n \rangle_{\mp} = 2 \delta_{kl} b_n \mp 2 \delta_{ln} b_k \quad (2.8)$$

$$\langle b_k, b_l, b_n \rangle_{\mp} = 0 \quad (2.9)$$

Ou :

$$\langle A, B, C \rangle_{\mp} \equiv ABC \mp CBA \quad (2.10)$$

Comme dans le cas ordinaire, on peut définir Les opérateurs para quantiques de coordonnées et de moments en termes de ces opérateurs de création et d'annihilation et il s'avère que, dans l'espace de configuration, l'opérateur para quantique du moment  $\vec{p}_{para}$  a comme une représentation [28] - [33]:

$$\vec{p}_{para} = i(-\vec{\nabla} + \vec{N}M) \quad (2.11)$$

Tandis que la forme de l'opérateur de coordonnées reste inchangée. Dans la base cartésienne orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , l'opérateur  $\vec{N}$  a l'expression:

$$\vec{N} = c \left( \frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k} \right) \quad (2.12)$$

Où le paramètre  $c$  est lié à l'ordre paramètre para quantique  $q$  donné par la relation [28] - [33]:

$$c = \frac{q - 1}{2} \quad (2.13)$$

L'opérateur de réflexion  $M$  qui est hermétique et unitaire est telle que [28] -[33]:

$$Mf(x, y, z) = f(-x, -y, -z) \quad (2.14)$$

( $f(x, y, z)$  est une fonction arbitraire). À la suite de Nicolai [34]; un système SUSY QM se caractérise par un auto-adjoint hamiltonien  $H$ , agissant sur certaines espace de Hilbert et où il existe au moins un opérateur de super charge  $Q$  obéissant à la relations d'anti-commutation suivantes:

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (2.15)$$

Et

$$\{Q, Q^\dagger\} = H \quad (2.16)$$

Une conséquence immédiate de ces relations est la conservation de la super charge et la non-négativité du hamiltonien,

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0, \quad H \geq 0 \quad (2.17)$$

## 2.2.1 N=1, SUSYQM

### 2.2.1.1 D=1

Il est facile de montrer que dans l'espace de configuration, l'hamiltonien para quantique de dimension un  $H_{para}^{D=1}$  d'une particule libre, prend la forme:

$$H_{para}^{D=1} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{c(c - M)}{x^2} \right] \quad (2.18)$$

Nous rappelons que l'opérateur  $M$  commute avec  $H_{para}^{D=1}$ .

Et ainsi, on peut avoir des fonctions propres communes, si nous désignons par  $\phi^+(x)$  et  $\phi^-(x)$  les fonctions propres paires et impaires respectivement avec conversion par rapport à



l'opérateur  $M$ , on peut définir dans la base  $(\phi^+(x), \phi^-(x))$  un hamiltonien classé comme suivant :

$$h^{D=1} \equiv h_+^{D=1} \oplus h_-^{D=1} = \begin{pmatrix} h_+^{D=1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_-^{D=1} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Ou :

$$h_\zeta^{D=1} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{c(c-\zeta)}{x^2} \right] \quad (2.20)$$

après le travail de Witten [35] nous définissons l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ , ( $L^2(\mathbb{R})$  est l'espace des Fonctions de carré intégrable et  $\mathbb{C}$  est le champ des nombres complexes), qui caractérise le spin libre

**1 / 2** Para quantique d'une para-particule déplaçant au long de la ligne euclidienne dimensionnelle  $\mathbb{R}$ . Pour montrer que l'Hamiltonien correspondant sur  $\mathcal{H}$  est super symétrique, laissez-nous premièrement introduire les opérateurs bosoniques et fermioniques  $A: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  et  $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  respectivement tel que:

$$A = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + \frac{c}{x} \right) \quad (2.21)$$

Et

$$F := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Apparemment, ces opérateurs obéissent aux relations de commutation et d'anti-commutation suivantes :

$$[A, A^\dagger] = \frac{dW(x)}{dx} \quad (2.23)$$

Et

$$\{F, F^\dagger\} = \mathbf{1} \quad (2.24)$$

Ou ici, le super potentiel  $W(x)$  a comme expression :

$$W(x) = \frac{c}{x} \quad (2.25)$$

Maintenant la super charge et  $Q$ leur conjugué hermétique  $Q^\dagger$  peuvent être construites comme :

$$Q = A \otimes F^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

$$Q^\dagger = A^\dagger \otimes F = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Bien sûr, ils obéissent aux relations de commutations classés dans les eqs. (2.15)-(2.16).

Notez que  $Q$  est une combinaison d'un opérateur généralisé bosonique d'annihilation

$A$  et un opérateur fermionique de création  $F$ .

Enfinement, on peut

construire le système quantique super symétrique  $D = 1, N = 1$  par définissant l'

hamiltonien  $H_{N=1}^{D=1}$  de telle manière que la deuxième relation de l'équation. (2.16) détient aussi.

En fait, on a:

$$H_{N=1}^{D=1} = \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} AA^\dagger & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^\dagger A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_- \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Et :

$$H_\pm = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W^2 \pm \frac{dW(x)}{dx} \right) \quad (2.28)$$

Il est clair maintenant, que l'Hamiltonien  $H_{N=1}^{D=1}$  de l'eq. (2.28) est exactement

$H^{D=1}$  donnée par éq. (2.20) en fonctions propres paires et impaires de base  $(\phi^+, \phi^-)$ .

### 2.2.1.2 D=2

En utilisant l'eq. (2.11), l'hamiltonien para quantique de deux dimensions  $H_{para}^{D=2}$  de particule libre, prend la forme :

$$H_{para}^{D=2} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + c(c-M) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \right] \quad (2.29)$$

Les fonctions propres de l'hamiltonien  $H_{para}^{D=2}$  sont notées par  $\psi^{++}, \psi^{+-}, \psi^{-+}$  et  $\psi^{--}$  :

$$\psi^{++} = \psi^{++}(x, y) \equiv \varphi_1^+(x) \varphi_2^+(y), \quad (2.30)$$

$$\psi^{+-} = \psi^{+-}(x, y) \equiv \varphi_1^+(x) \varphi_2^-(y), \quad (2.31)$$

$$\psi^{-+} = \psi^{-+}(x, y) \equiv \varphi_1^-(x) \varphi_2^+(y), \quad (2.32)$$

Et

$$\psi^{--} = \psi^{--}(x, y) \equiv \varphi_1^-(x) \varphi_2^-(y), \quad (2.33)$$

Ici, le signe + (resp. -) est synonyme fonction propre de paires (resp. Impaires) avec la considération de l'opérateur  $M$ . De même, on peut définir dans la base en deux dimensions l'hamiltonien  $h^{D=2}$  comme suivant:

$$h^{D=2} \equiv h_{++}^{D=2} \oplus h_{+-}^{D=2} \oplus h_{-+}^{D=2} \oplus h_{--}^{D=2} = \begin{pmatrix} h_{++}^{D=2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{+-}^{D=2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_{-+}^{D=2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_{--}^{D=2} D \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Ou

$$h_{\zeta_1 \zeta_2}^{D=2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + c \left( \frac{c - \zeta_1}{x^2} + \frac{c - \zeta_2}{y^2} \right) \right] \quad (2.35)$$

Et  $\zeta_1, \zeta_2 = \pm$ . Généralisant la construction de Witten pour  $N = 1$  (MQ SUSY), nous introduisons deux Opérateurs bosoniques (resp fermionique  $A_1, A_2: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$  (resp.  $F_1, F_2: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ) Tel que:

$$A_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + c \left( \frac{1}{x} + i \frac{1}{y} \right) \right); \quad (2.36)$$

$$A_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + c \left( -\frac{1}{x} + i \frac{1}{y} \right) \right) \quad (2.37)$$

$$F_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Et

$$F_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Maintenant, la super charge  $Q$  et son conjugué hermitien  $Q^\dagger$  peut être construites en tant que:

$$Q = A_1 \otimes F_1^\dagger + A_2 \otimes F_2^\dagger \quad (2.40)$$

Et

$$Q^\dagger = A_1^\dagger \otimes F_1 + A_2^\dagger \otimes F_2 \quad (2.41)$$

De même, comme dans le cas unidimensionnel, on peut construire l'hamiltonien SUSY bidimensionnel tel que :

$$H_{N=1}^{D=2} = \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} A_1 A_1^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^\dagger A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 A_2^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^\dagger A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{++} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{\mp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{\pm} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Avec

$$H_{\zeta_1 \zeta_2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + c \left( \frac{c - \zeta_1}{x^2} + \frac{c - \zeta_2}{y^2} \right) \right] \quad (2.43)$$

On note que l'hamiltonien  $H_{N=1}^{D=2}$  de l'éq. (2.42) est exactement  $h^{D=2}$  donnée par l'éq. (2.34) dans la base des fonctions propres paires et impaires  $(\psi^{++}, \psi^{+-}, \psi^{-+}, \psi^{--})$

### 2.2.1.3 D=3

L'hamiltonien para quantique de trois dimensions  $H_{para}^{D=3}$  d'une particule libre, peut être démontré et qu'elle a la forme:

$$H_{para}^{D=3} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dz^2} + c(c-M) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \right] \quad (2.44)$$

Si nous désignons les fonctions propres  $\phi^{+++}, \phi^{++-}, \phi^{+-+}, \phi^{+--}, \phi^{-++}, \phi^{-+-}, \phi^{-+ -}$  et  $\phi^{---}$  de l'hamiltonien  $H_{para}^{D=3}$  ou

$$\phi^{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3} = \phi^{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}(x, y, z) \equiv \varphi_1^{\zeta_1}(x) \varphi_2^{\zeta_2}(y) \varphi_3^{\zeta_3}(z) \quad (2.45)$$

Et  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = \pm$  Comme dans le cas  $D = 2$ , on peut définir dans la base tridimensionnel' hamiltonien  $h^{D=3}$  comme suit:

$$h^{D=3} \equiv \bigoplus_{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3}^{D=3} h_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{+++}^{D=3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{++-}^{D=3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{+-+}^{D=3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{+--}^{D=3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{-++}^{D=3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{-+-}^{D=3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{-+ -}^{D=3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{---}^{D=3} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Ou

$$H_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{D=3} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dz^2} + c \left( \frac{(c-\zeta_1)}{x^2} + \frac{(c-\zeta_2)}{y^2} + \frac{(c-\zeta_3)}{z^2} \right) \right] \quad (2.47)$$

En généralisant à nouveau la construction de Witten, on introduit les quatre opérateurs bosoniques (resp.fermioniques)  $A_1, A_2, A_3, A_4: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ , (resp.  $F_1, F_2, F_3, F_4: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ )

Tel que :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + j \frac{d}{dz} + c \left( \frac{1}{x} + i \frac{1}{y} + j \frac{1}{z} \right) \right); \\
A_2 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + j \frac{d}{dz} + c \left( -\frac{1}{x} + i \frac{1}{y} + j \frac{1}{z} \right) \right) \\
A_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + j \frac{d}{dz} + c \left( -\frac{1}{x} + i \frac{1}{y} - j \frac{1}{z} \right) \right); \\
A_4 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dy} + j \frac{d}{dz} + c \left( \frac{1}{x} + i \frac{1}{y} - j \frac{1}{z} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Et

$$F_i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \delta_{i1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_{i2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_{i3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_{i4} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Il est à noter que  $A_1$  sont des opérateurs hypercomplexe où  $i^2 = j^2 = -\mathbf{1}$  et  $i^* = -i, j^* = -j$  .(\* Pour le conjugué complexe). Maintenant, la super charge  $Q$  et son conjugué hermitien  $Q^\dagger$  peut être construit en tant que:

$$\begin{aligned}
Q &= A_1 \otimes F_1^\dagger + A_2 \otimes F_2^\dagger + A_3 \otimes F_3^\dagger + A_4 \otimes F_4^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Et

$$\begin{aligned}
Q^\dagger &= A_1^\dagger \otimes F_1 + A_2^\dagger \otimes F_2 + A_3^\dagger \otimes F_3 + A_4^\dagger \otimes F_4 \\
&= \begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
A_1^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_4^\dagger & \mathbf{0}
\end{pmatrix} \tag{2.51}
\end{aligned}$$

De même, comme dans le cas unidimensionnel, on construit l'hamiltonien SUSY tel que:

$$\begin{aligned}
H_{N=1}^{D=3} = \{Q, Q^\dagger\} &= \begin{pmatrix}
A_1 A_1^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & A_1^\dagger A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 A_2^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\dagger A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3 A_3^\dagger & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\dagger A_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_4 A_4^\dagger & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_4^\dagger A_4
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
H_{---} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & H_{+++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{+--} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{-++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{--+} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{++-} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{+-+} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{-+-}
\end{pmatrix} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Avec

$$H_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{D=3} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dz^2} + c \left( \frac{(c - \zeta_1)}{x^2} + \frac{(c - \zeta_2)}{y^2} + \frac{(c - \zeta_3)}{z^2} \right) \right] \tag{2.53}$$

On note que l'hamiltonien  $H_{N=1}^{D=3}$  de l'eq. (2.52) est exactement  $h^{D=3}$  figurant par l'eq. (2.46) dans la base  $\phi^{+++}, \phi^{++-}, \phi^{+-+}, \phi^{+--}, \phi^{-++}, \phi^{-+-}, \phi^{--+}$  et  $\phi^{---}$  des fonctions propres paires et impaires.

### 2.2.2 N=2, MQ SUSY

Dans ce cas, nous introduisons les matrices  $\Sigma_i$  de  $2D$ , ( $D + 1$  est la dimension d'espace-temps et  $i = \overline{1, 2D}$ ) satisfaisant l'algèbre de Clifford suivante :

$$\{\Sigma_i, \Sigma_j\} = 2g_{ij} \quad (2.54)$$

Où la métrique  $g_{ij}$  a la forme :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -I_{DxD} & \mathbf{0}_{DxD} \\ \mathbf{0}_{DxD} & I_{DxD} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Et  $I_{DxD}$  sont des matrices d'identité. La signature de la métrique  $g_{ij}$  est telle que le carré de  $\Sigma_i$  est égal à 1 ou -1, selon que  $i > D$  ou  $i < D$ , respectivement. En particulier,

$$\Sigma_{D+i}^2 = -\Sigma_i^2 = I_{DxD}, i = \overline{1, D}. \quad (2.56)$$

Dans ce qui suit, et afin de construire un hamiltonien hermitien, nous allons utiliser une représentation matricielle de l'algèbre de Clifford afin que les relations additionnelles suivantes soient satisfaites :

$$\Sigma_i^\dagger = -\Sigma_i. \quad (2.57)$$

$$\Sigma_{D+i}^\dagger = \Sigma_{D+i}, \quad i = \overline{1, D}. \quad (2.58)$$

En outre, nous introduisons un autre opérateur hermitien  $\Gamma^D$  tels que:

$$\Gamma^D = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \dots \Sigma_{2D-1} \Sigma_{2D}. \quad (2.59)$$

Qui anti commute avec toutes les matrices  $\Sigma_i$  et tel que:

$$(\Gamma^D)^2 = \mathbf{1} \quad (2.60)$$

A propos de super charges  $Q_1^D$  et  $Q_2^D$ , satisfaisantes la super algèbre de  $N = 2$  :

$$\{Q_\alpha^D, Q_\beta^{D\dagger}\} = 2\delta_{\alpha\beta} H^D \quad (2.61)$$

Et



$$[H^D, Q_\alpha^D] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.62)$$

Ils peuvent être démontrés qu'ils ont les expressions suivantes:

$$Q_1^D = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^D \left( -\Sigma_i \frac{d}{dx_i} + \Sigma_{D+i} \frac{c}{x_i} \right) \quad (2.63)$$

Et

$$Q_2^D = i\Gamma^D Q_1^D \quad (2.64)$$

Pour l'hamiltonien  $H^D$ , il est facile de montrer que:

$$H^D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \left( -\frac{d^2}{dx_i^2} + W_i^2 - \Sigma_i \Sigma_{D+i} \frac{dW_i}{dx_i} \right) \quad (2.65)$$

Où le super potentiel para quantique a la forme :

$$W_i = \frac{c}{x_i} \quad (2.66)$$

(Ici,  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ). On note que l'hamiltonien  $H^D$  est hermétique par construction, car il est donné par le carré de l'opérateur hermétique  $Q_1^D$  (ou  $Q_2^D$ ).

### 2.2.2.1 D=1

Pour construire l'hamiltonien super symétrique correspondant  $H_{N=2}^{D=1}$  et super charges  $Q_1^{D=1}$  et  $Q_2^{D=1}$ , on doit choisir pour l'algèbre de Clifford, l'élément  $\Sigma_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$  de l'éq. (2.54), les représentations suivantes satisfaisantes les eqs (2.57).et(2.58):

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= -i\sigma_1 ; \\ \Sigma_2 &= \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Et donc

$$\Gamma^{D=1} = -\sigma_3 \quad (2.68)$$

( $\sigma_i$  Sont les matrices de Pauli). Maintenant il est facile de prouver que :

$$Q_1^{D=1} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} - \frac{c}{x} \\ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{x} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Et

$$Q_2^{D=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{x} \\ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{x} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

A propos de l' hamiltonien susy  $H_{N=2}^{D=1}$  et en utilisant l'eq. (2.65), on obtient :

$$H_{N=2}^{D=1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + c(c+1)\frac{1}{x^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{d^2}{dx^2} + c(c-1)\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

L'hamiltonien résultant correspond exactement l'autre cas paraquantique  $h_\zeta^{D=1}$  .

### 2.2.2.2 D=2

Pour construire l'hamiltonien super symétrique correspondant  $H_{N=2}^{D=2}$  et super charges  $Q_1^{D=2}$  et  $Q_2^{D=2}$ , on doit choisir pour l'algèbre de Clifford, l'élément  $\Sigma_j$ ,  $j = \overline{1,2}$  de l'éq. (2.54), les représentations suivantes satisfaisantes les éqs (2.57).et (2.58):

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= i\sigma_1 \otimes \sigma_2 \\ \Sigma_2 &= i\sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ \Sigma_3 &= -\sigma_3 \otimes \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Et

$$\Sigma_4 = I \otimes \sigma_3$$

Par conséquent

$$\Gamma^{D=2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Il est facile de montrer que les expressions des super charges  $Q_1^{D=2}$  et  $Q_2^{D=2}$  prennent les forme suivantes :

$$Q_1^{D=2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \rho_2 & i\rho_1 & \mathbf{0} & \xi_1 \\ -i\rho_1 & -\rho_2 & -\xi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\xi_2 & \rho_2 & -i\rho_1 \\ \xi_2 & \mathbf{0} & i\rho_1 & -\rho_2 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Et

$$Q_2^{D=2} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\rho_1 & -\rho_2 & -\xi_1 & \mathbf{0} \\ \rho_2 & i\rho_1 & \mathbf{0} & \xi_1 \\ \xi_2 & \mathbf{0} & i\rho_1 & -\rho_2 \\ \mathbf{0} & -\xi_2 & \rho_2 & -i\rho_1 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Ou

$$\rho_1 = \frac{c}{x}$$

$$\rho_2 = \frac{c}{y} \quad (2.76)$$

$$\xi_1 = -\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

Et

$$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

Il est intéressant de mentionner que  $Q_1^{D=2}$  et  $Q_2^{D=2}$  anti commutent avec l'opérateur de parachiralité  $\Gamma^{D=2}$ . En ce qui concerne l'Hamiltonien susy et en utilisant l'eq. (2.65), on déduit que :

$$H_{N=2}^{D=2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{0} & -\Phi_1 & -\Phi_2 \\ \mathbf{0} & \Omega & -\Phi_2 & -\Phi_1 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Omega & \mathbf{0} \\ \Phi_2 & \Phi_1 & \mathbf{0} & \Omega \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Ou

$$\Omega = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + c^2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \quad (2.78)$$

$$\Phi_1 = -i \frac{c}{x^2}$$

Et

$$\Phi_2 = -i \frac{c}{y^2}$$

Les valeurs propres correspondantes :

$$\lambda_{\zeta_1 \zeta_2}^{D=2} = \frac{1}{2} (\Omega + i\zeta_1 \Phi_1 + i\zeta_2 \Phi_2)$$

On note que, le résultant Hamiltonien diagonalisé correspond exactement à l'autre cas para quantique  $h_{\zeta_1 \zeta_2}^{D=2}$ .

### 2.2.2.3 D=3

Dans ce cas, les matrices  $\Sigma_i$  sont choisis tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= i\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes I \\ \Sigma_2 &= i\sigma_1 \otimes \sigma_2 \\ \Sigma_3 &= i\sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_3 \\ \Sigma_4 &= \sigma_2 \otimes I \otimes \sigma_1 \\ \Sigma_5 &= I \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Et

$$\Sigma_6 = I \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2$$

Par conséquent

$$\Gamma^{D=3} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \eta_6 \\ \eta_6 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Le calcul direct, mène a les expressions suivantes des super charges  $Q_1^{D=3}$  et  $Q_2^{D=3}$  :

$$Q_1^{D=3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Et

$$Q_2^{D=3} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_6 \Omega_3 & \eta_6 \Omega_4 \\ -\eta_6 \Omega_1 & -\eta_6 \Omega_2 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Ou

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\eta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_4 W_y + \eta_5 W_z \\ \Omega_2 &= -\eta_1 \frac{\partial}{\partial y} - \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} + \eta_3 W_x \\ \Omega_3 &= -\eta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} - \eta_3 W_x \\ \Omega_4 &= \eta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_4 W_y + \eta_5 W_z \end{aligned} \quad (2.83)$$

Et

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \eta_2 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \eta_3 &= -i \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_1 \end{pmatrix} \\ \eta_4 &= \begin{pmatrix} \sigma_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_2 \end{pmatrix} \\ \eta_5 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\eta_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Là encore, il est facile de montrer que les super charges  $Q_1^{D=3}$  et  $Q_2^{D=3}$  anti-commutent avec  $\Gamma^{D=3}$ . A propos de l'hamiltonien SUSY  $H_{N=2}^{D=3}$  et en utilisant l'eq. (2.65), on obtient :

$$H_{N=2}^{D=3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_{\bar{+}\bar{+}} \\ \mathbf{0} & \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_{\bar{--}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_{\bar{+}\bar{+}\bar{+}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta & \Xi_{\bar{+}\bar{--}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_{\bar{--}\bar{+}} & \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_{\bar{--}\bar{+}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi_{\bar{+}\bar{+}\bar{--}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta & \mathbf{0} \\ \Xi_{\bar{+}\bar{--}\bar{+}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Ou

$$\Phi_3 = -i \frac{c}{z^2} \quad (2.87)$$

$$\Theta = \Omega - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c^2 \frac{1}{z^2} \quad (2.88)$$

Et

$$\Xi_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3} = ic \left( \zeta_1 \frac{1}{x^2} + \zeta_2 \frac{1}{y^2} + \zeta_3 \frac{1}{z^2} \right)$$

Et les valeurs propres correspondantes  $\lambda_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{D=3}$  :

$$\lambda_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{D=3} = \frac{1}{2} (\Omega + i\zeta_1 \Phi_1 + i\zeta_2 \Phi_2 + i\zeta_3 \Phi_3)$$

On note que l'hamiltonien diagonalisé résultant correspond exactement l'hamiltonien para quantique  $h_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}^{D=3}$ .

## 2.3 Résultat et conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons montré que l'hamiltonien para quantique d'une particule libre est super symétriques. Dépendant de la dimension spatiale et le type de la

super symétrie, nous avons construit explicitement les correspondant super charges et hamiltonien.

# Chapitre 03

## **Système quantique super intégrable de Smorodinsky-Winternitz**

### **3.1 Introduction**

Les systèmes quantiques super intégrables sont obtenus à partir de leurs homologues classiques, les intégrales quantiques du mouvement étant obtenues au moyen des intégrales classiques correspondantes par la procédure de symétrisation [10].

Pour chaque système quantique super intégrable il y a une algèbre généralisée d'oscillateur déformée, caractérisée par une fonction de structure spécifique pour chaque système, ou elle



est construite par les générateurs de l'algèbre étant en fonctions des intégrales du mouvement quantiques.

### 3.2 La super intégrabilité

On considère un système quantique à 2-dimensions, défini par l'hamiltonien suivant :

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{x^2} \quad (3.1)$$

Dans le cas classique, ce système a deux invariants de mouvement donc il possède trois invariants de mouvement si en comptant  $H$ , donc ce système est dit « super intégrable » et par analogie, on déduit les invariants quantiques et en tenant en considération le changement se fait par la procédure de symétrisation, ou les invariants quantiques de mouvement sont donnés par :

$$I = p_y^2 + y^2, \quad J = x^2 p_y^2 + y^2 p_x^2 - \{xy, p_x p_y\} + \frac{2y^2}{x^2} \quad (3.2)$$

Tel que  $I, J$  sont la version quantique des invariants dans le cas classique ou l'anti-commutateur apparaît dans l'expression de  $J$ .

Les crochés de Poisson des invariants classiques deviennent des commutateurs des invariants quantiques satisfont les relations de commutations suivantes :

$$[I, H] = 0; [J, H] = 0 \quad \text{et} \quad [I, J] = F \neq 0 \quad (3.3)$$

La super intégrabilité du système de S.W<sup>3</sup> implique qu'il ya trois invariants, de tel sorte les invariants  $I, J$  commutent avec  $H$  mais ne commutent pas avec eux.

#### 3.2.1 L'invariant F

Le 3ème invariant est simplement le commutateur formé par les autres invariants on le définit par :

$$F = [I, J] = \left[ p_y^2 + y^2, \left( x^2 p_y^2 + y^2 p_x^2 - \{xy, p_x p_y\} + \frac{2y^2}{x^2} \right) \right] \quad (3.4. a)$$

---

<sup>3</sup> C'est une abréviation des Noms : Smorodinsky-Winternitz

$$\begin{aligned}
&= [p_y^2 + y^2, x^2 p_y^2 + y^2 p_y^2] - \left[ p_y^2 + y^2, \{xy, p_x p_y\} - \frac{2y^2}{x^2} \right] \\
&= [p_y^2 + y^2, x^2 p_y^2 + y^2 p_y^2] + \frac{2}{x^2} [p_y^2 + y^2, y^2] - [p_y^2 + y^2, \{xy, p_x p_y\}] \\
&= (p_x^2 - x^2 + 2/x^2) [p_y^2, y^2] - [p_y^2 + y^2, x y p_x p_y + p_x p_y x y] \\
&= (p_x^2 - x^2 + 2/x^2) [p_y^2, y^2] - x p_x [p_y^2 + y^2, y p_y] - p_x x [p_y^2 + y^2, p_y y]
\end{aligned}$$

On utilise :

$$[p_y^2, y p_y] = [p_y^2, y p_y] = \frac{2}{i} p_y^2 \quad \text{Et} \quad [p_y^2, y p_y] = [p_y^2, y p_y] = -\frac{2}{i} y^2$$

Donc  $F$  peut s'écrire

$$F = (p_x^2 - x^2 + 2/x^2) [p_y^2, y^2] - \frac{2}{i} (x p_x + p_x x) (p_y^2 - y^2) \quad (3.4. b)$$

On simplifie  $F$  par l'égalité suivante :

$$(x p_x + p_x x) = \frac{i}{2} [p_x^2, x^2]$$

Par conséquent

$$F = (p_x^2 - x^2 + 2/x^2) [p_y^2, y^2] - [p_x^2, x^2] (p_y^2 - y^2) \neq 0 \quad (3.4. c)$$

**Note :** on peut aussi calculer l'invariant  $F$  par d'autre méthode (voir annexe)

### 3.2.2 Relations de commutations

Le calcul symbolique des relations de commutation entre les invariants du système de S.W donne des résultats dépendants par les même invariants :

- $[I, F]$

Time = 0.00 sec    Generated terms = 10

$[I, F]$     Terms in output = 10

Bytes used = 258

$$[I, F] = 8 - 16*(x)^{-2}*pj*pj + 8*x*x*pj*pj + 16*x*pi*i_ - 32*y*x*pj*pi + 16*y*y*(x)^{-2} - 8*y*y*x*x + 8*y*y*pi*pi + 16*y*pj*i_ - 8*pj*pj*pi*pi;$$

0.00 Sec out of 0.17 sec

Après la simplification on trouve :

$$[I, F] = 8(2J + I^2 - 2HI - 1) \quad (3.5)$$

• [J, F]

Time = 0.04 sec      Generated terms = 58

[J, F]      Terms in output = 32

Bytes used = 918

$$[J, F] = - 16*(x)^{-2} + 16*(x)^{-1)*pi*i_ - 16*x*x + 8*x*x*x*x*pj*pj + 8*x*x*pj*pj*pi*pi - 8*x*x*pj*pj*pj*pj - 40*x*pj*pj*pi*i_ + 16*y*(x)^{-2}*pj*i_ - 32*y*(x)^{-1}*pj*pi - 16*y*x*x*x*pj*pi + 40*y*x*x*pj*i_ - 16*y*x*pj*pi*pi*pi + 16*y*x*pj*pj*pj*pi + 32*y*y*(x)^{-2}*(x)^{-2} + 16*y*y*(x)^{-2}*pi*pi - 16*y*y*(x)^{-2}*pj*pj - 8*y*y*x*x*pj*pj + 16*y*y*y*x*pj*pi - 16*y*y*y*y*(x)^{-2} - 8*y*y*y*y*pi*pi - 8*y*y*y*pj*i_ - 8*y*y*pi*x*i_ + 16*y*y*pi*pi*(x)^{-2} + 8*y*y*pi*pi*x*x + 8*y*y*pi*pi*pi*pi - 8*y*y*pj*pj*pi*pi + 40*y*pj*pi*pi*i_ - 8*y*pj*pj*pj*i_ + 8*pi*x*x*x*i_ - 16*pi*pi + 8*pi*pi*pi*x*i_ - 24*pj*pj;$$

0.04 Sec out of 0.36 sec

La simplification donne :

$$[J, F] = 8(2JH - 2JI - F - 4H) \quad (3.6)$$

La même chose pour les relations (3.3) qui sont aussi symboliquement calculés.

- **[I, H]**

Time = 0.00 sec      Generated terms =      12

[I, H]      Terms in output =      0

Bytes used      =      2

[I, H] = 0;

0.01 Sec out of 0.06 sec

- **[J, H]**

Time =      0.01 sec      Generated terms =      95

[J, H]      Terms in output =      0

Bytes used      =      2

[J, H] = 0;

0.01 Sec out of 0.22 sec

### **3.3 Algèbre d'un oscillateur déformée:**

La super intégrabilité pour des systèmes quantiques, en particulier des systèmes ayant un spectre discret nécessitent d'avoir une nouvelle algèbre à introduire, se qu'on appelle « algèbre généralisée d'un oscillateur déformée», cette algèbre sert à combiner les résultats quantiques avec celles qui sont classiques.

#### **3.3.1 Formalisme**

Tous les différents types d'oscillateurs généralisés peuvent être combinés dans un cadre mathématique commun d'oscillateurs déformée généralisée, qui soit défini comme une algèbre générée par les opérateurs :  $\{1, A, A^+, N\}$  et la fonction de structure  $\Phi(x)$ , on construit cette algèbre par les relations [13] suivantes :

$$N = N(H, I, J) \quad (3.7)$$

$$[A, N] = -A, \quad [A^+, N] = A^+ \quad (3.8)$$

$$A^+ A = \Phi(H, N) \quad (3.9)$$

Et

$$AA^+ = \Phi(H, N + 1) \quad (4.10)$$

Où  $\Phi(x)$  est une fonction réelle positive définie pour  $x \geq 0$ , avec  $\Phi(E, 0) = 0$ , et  $N$  est l'opérateur nombre. et les relations suivantes sont aussi vraies :

$$[A, A^+] = \Phi(H, N + 1) - \Phi(H, N) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} [A^+ A, AA^+] &= \Phi(H, N)\Phi(H, N + 1) - \Phi(H, N)\Phi(H, N + 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

On note que l'espace de Fock est un cas particulier de l'algèbre déformée généralisée.

Maintenant si on considère une algèbre généralisée déformée possédantes un espace de Fock formé par l'algèbre :

$$H|E, n\rangle = E|E, n\rangle \quad (3.13)$$

Si la condition de l'état du vide est satisfaite :

$$A|E, 0\rangle = 0 \quad (3.14)$$

Les états propres sont donnés par la formule :

$$|E, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (A^+)^n |E, 0\rangle \quad (3.15)$$

Ou

$$[n]! = \prod_k^n \Phi(H, k) = \Phi(H, k)[n - 1]! \quad (3.16)$$

Avec la condition de l'espace de Fock donné par :

$$\Phi(E, N + 1) = 0 \quad (3.17)$$

Les conditions  $\Phi(E, x) > 0; \forall x > 0$ ,  $\Phi(H, 0) = 0$  et l'équation (3.17) sont suffisantes pour déterminer le spectre d'énergie d'un système quantique super intégrable.

### 3.3.2 Oscillateur généralisée déformée et para fermionique

Pour étudier la super intégrabilité d'un système caractérisé par le potentiel de S.W il faut bien classer le type de l'algèbre déformée qui le correspond, qu'on l'appelle oscillateur généralisée para fermionique qui a été prouvé en [13], que chaque algèbre généralisée déformée para fermionique avec ordre de para quantification  $p$ , elle peut s'écrire comme oscillateur généralisée avec la fonction de structure :

$$\Phi(x) = x(p + 1 - x)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4 + \dots) \quad (3.18)$$

Ou  $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$  sont des constantes réelles satisfaisantes les conditions

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4 + \dots > 0 \quad (3.19)$$

De [13] la formule générale de la fonction d'un oscillateur déformé généralisé c'est exactement la forme de la relation (3.18).

$$\Phi(N) = BN(p + 1 - N)(-p + (p - 1)N + N^2) \quad (3.20)$$

### 3.3.3 La fonction de structure de S.W

Le système de S.W est une généralisation d'un oscillateur harmonique à 2-dimensions, donc on utilise l'algèbre d'un oscillateur généralisé pour trouver la fonction de structure qui le corresponde.

On revient aux équations (3.7), (3.8), (3.9) de telle sorte l'opérateur nombre  $N$  est se défini par :

$$N = \frac{1}{4}(I - 3) \quad (3.21)$$

Et les opérateurs de créations et d'annihilations

$$A^+ = 2J + \frac{1}{2}F + I^2 - 2HI - 1; \quad (3.22)$$

$$A = 2J - \frac{1}{2}F + I^2 - 2HI - 1 \quad (3.23)$$

De (3.9) et par le billet d'un logiciel (qui facilite le calcul symbolique) on essaie de calculer les commutateurs des différents invariant, qui va permettre d'extraire la fonction de structure, mais avant d'entamer le calcul il faut qu'on sache :  $Ainv = A^+$  c'est l'opérateur de création,  $phi 1$  représente la fonction de structure on les prit convenablement pour le calcul symbolique.

- $phi 1 = A^+A$

Time = 0.00 sec      Generated terms =      21

$phi 1$       Terms in output =      12

Bytes used      =      182

$$phi1 = \Phi(H,I) = A^+A = -15 + 8I + 14I^2 - 8I^3 + I^4 - 4I^3H + 24I^2H + 4I^2H^2 - 44IH - 16IH^2 + 24H + 12H^2 \quad (3.24)$$

00.0 Sec out of 0.17 sec

Aussi on peut vérifier les relations :

- $phi 2 = AA^+$

Time = 0.00 sec      Generated terms =      24

$phi 2$       Terms in output =      13

Bytes used      =      198

$$phi2 = AA^+ = -15 - 8I + 14I^2 + 8I^3 + I^4 - 4I^3H - 24I^2H + 4I^2H^2 - 108IH - 24H + 64HI + 16IH^2 + 12H^2 \quad (3.25)$$

00.0 Sec out of 0.17 sec

- $[A, A^+]$

Time = 0.00 sec            Generated terms =    25

[A, Ainv]            Terms in output =    5

Bytes used    =    90

$$[A, Ainv] = 16I + 16I^3 - 48I^2H + 32IH^2 - 48H \quad (3.26)$$

0.00sec out of 0.02 sec

- [AA<sup>+</sup>, A<sup>+</sup>A]

Time = 0.00 sec            Generated terms =    69

[Ainv \* A, A \* Ainv]    Terms in output =    0

Bytes used    =    2

$$[Ainv * A, A * Ainv] = 0 \quad (3.27)$$

0.00 Sec out of 0.15 sec

Si on remplace (3.21) dans l'équation (3.24) ou la fonction de structure se donnera en fonction d'opérateur nombre :

Time = 0.00 sec            Generated terms =    31

Phi 1    Terms in output =    9

Bytes used    =    154

$$\begin{aligned} phi1 &= \Phi(H, N) \\ &= -64N - 32NH + 32NH^2 - 64N^2 - 192N^2H + 64N^2H^2 + 256N^3 \\ &\quad - 256N^3H + 256N^4 \end{aligned} \quad (3.28)$$

0.00 Sec out of 0.03 sec

### 3.3.4 Le spectre d'énergie de S.W



On utilise l'expression (3.28) et les conditions associant la fonction de structure et en changeant respectivement les variables  $N, H$  par  $x, E$ :

$$\begin{aligned} \text{phi1} &= \Phi(E, x) \\ &= -64x - 32xE + 32xE^2 - 64x^2 - 192x^2E + 64x^2E^2 + 256x^3 \\ &\quad - 256x^3E + 256x^4 \end{aligned} \quad (3.29)$$

On essaie de factoriser l'expression de la fonction de structure :

$$\Phi(E, x) = 256x \left[ x^3 + (1-E)x^2 + \frac{1}{4}(E^2 - 3E - 1)x + \frac{1}{8}E^2 - \frac{1}{8}E - \frac{1}{4} \right] \quad (3.29.a)$$

De même :

$$\begin{aligned} x^3 + (1-E)x^2 + \frac{1}{4}(E^2 - 3E - 1)x + \frac{1}{8}E^2 - \frac{1}{8}E - \frac{1}{4} &= \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) \end{aligned} \quad (3.29.b)$$

Où  $a, b, c$  des constantes à démontrer après le développement et la combinaison :

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2} - E, \quad c = \frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{4}E - \frac{1}{2}$$

En remplaçant les constantes  $a, b, c$  dans l'équation (3.29.b) on trouve:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \left(\frac{1}{2} - E\right)x + \frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{4}E - \frac{1}{2}\right) \quad (3.29.c)$$

On remarque aussi le deuxième facteur peut se factoriser :

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - E\right)x + \frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{4}E - \frac{1}{2} = \left[x - \left(\frac{E}{2} - 1\right)\right]\left[x - \left(\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.29.d)$$

Donc on peut donner l'expression factorisée de la fonction de structure par la forme:

$$\Phi(E, x) = 256x \left(x + \frac{1}{2}\right)\left[x - \left(\frac{E}{2} - 1\right)\right]\left[x - \left(\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.30)$$

Si on utilise les conditions  $\Phi(E, x) > 0; \forall x > 0$ ,  $\Phi(H, 0) = 0$  et l'équation (3.17) on obtient :

$$\Phi(E, N + 1) = 256(N + 1) \left(N + \frac{3}{2}\right) \left[N - \left(\frac{E}{2} - 2\right)\right] \left[N - \left(\frac{E}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.31)$$

Cette expression peut s'annuler seulement dans les cas ci-dessous :

$$E = 2N + 4 \quad (3.32. a)$$

$$E = 2N + 1 \quad (3.32. b)$$

Et les formules correspondantes de la fonction de structure respectivement sont :

$$\Phi(E, x) = 256x \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(N + \frac{5}{2} - x\right) (N + 1 - x), \quad \forall N = 1, 2, \dots \quad (3.31. a)$$

$$\Phi(E, x) = 256x \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(N - \frac{1}{2} - x\right) (N + 1 - x), \quad \forall N = 1, 2, \dots \quad (3.31. b)$$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a essayé de vérifier que la super intégrabilité d'un système para quantique en particulier para-fermionique est facilement soluble, on a pris comme un exemple le système de Smorodinsky-Winternitz à D=2, ou dans ce cas la résolution de ce système avec l'équation de Schrödinger est plus délicate, donc on a utilisé cette méthode algébrique basée sur la super intégrabilité qui apparait plus commode pour trouver le spectre d'énergie.

# Chapitre 04

## **Les relations SUSY intertwining et les systèmes para quantiques et super intégrables**

### **4.1 Introduction**

La méthode de la super symétrie elle-même inclut en mécanique quantique différentes variantes [17], et les relations de SUSY intertwining apparaissent comme les plus variant promettant, en mécanique quantique il ya des problèmes où la séparabilité des variables pose

un grand problème lorsque le système étudié a de dimension supérieur à 1, pour cette raison nous essaierons d'utiliser la SUSY intertwining pour enlever ce problème en prenant de titre d'exemple des systèmes quantiques à 2 dimensions.

Au cours de ce chapitre nous définirons les relations d'intertwining au second ordre, et dans la section 2 et 3 nous essaierons de voir si l'intertwining relations au second ordre peuvent prédire quelques systèmes physique, plus précisément des systèmes para quantiques ou super intégrables de Smorodinsky -Winternitz.

## 4.2 SUSY intertwining relations

On définit les relations d'intertwining SUSY entre paire des partenaires hamiltoniens  $H_{1,2}$  comme suivant :

$$H_1 Q^+ = Q^+ H_2 \quad (4.1)$$

$$Q^- H_1 = H_2 Q^- \quad (4.2)$$

Ou les operateurs intertwining sont mutuellement conjugués  $Q^\pm$  et sont appelés super charges et les partenaires hamiltoniens à 2-dimensions sont donnés par :

$$H_{1,2} = -\Delta + V_{1,2}(\vec{x}), \Delta = \partial_i \partial_i, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad i = 1,2 \quad (4.2)$$

La forme générale d'une super charge au second ordre de dérivatives est exprimée par :

$$Q^+ = g_{ik}(\vec{x}) \partial_i \partial_k + C_i(\vec{x}) \partial_i + B(\vec{x}) \quad (4.3)$$

$$Q^- = \partial_i \partial_k g_{ik}(\vec{x}) - \partial_i C_i(\vec{x}) + B(\vec{x}) \quad (4.4)$$

Ou :  $g_{ik}(\vec{x}), C_i(\vec{x}), B(\vec{x})$  sont des paramètres réels.

Et les fonctions propres sont donnés par :

$$\psi_n^{(1)}(\vec{x}) = Q^+ \psi_n^{(2)}(\vec{x}); \quad (4.5.a)$$

$$\psi_n^{(2)}(\vec{x}) = Q^- \psi_n^{(1)}(\vec{x}) \quad (4.5.b)$$

## 4.3 La solution générale des relations d'intertwining au second ordre dérivatives

On utilise l'équation (4.1) et en remplaçant le terme  $H_1, Q^+$  par ses valeurs on trouve :

$$\begin{aligned}
& [-\Delta + V_1(\vec{x})][g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})] \\
& = [g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i \\
& + B(\vec{x})][-\Delta + V_2(\vec{x})]
\end{aligned} \tag{4.6. a}$$

On a

$$\begin{aligned}
& -\Delta[g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})] \\
& = -(\Delta g_{ik}(\vec{x}))\partial_i\partial_k - (\Delta C_i(\vec{x}))\partial_i - (\Delta B(\vec{x})) - 2\partial_\alpha g_{ik}\partial_\alpha\partial_i\partial_k - 2\partial_\alpha C_i\partial_\alpha\partial_i \\
& - 2\partial_\alpha B(\vec{x})\partial_\alpha - [g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})]\Delta
\end{aligned}$$

Et

$$g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k V_2 = g_{ik}(\vec{x})(\partial_i\partial_k V_2) + 2g_{ik}(\vec{x})\partial_i V_2\partial_k + g_{ik}(\vec{x})V_2\partial_i\partial_k$$

On trouve

$$\begin{aligned}
& -(\Delta g_{ik}(\vec{x}))\partial_i\partial_k - (\Delta C_i(\vec{x}))\partial_i - (\Delta B(\vec{x})) - 2\partial_\alpha g_{ik}\partial_\alpha\partial_i\partial_k - 2\partial_\alpha C_i\partial_\alpha\partial_i - 2\partial_\alpha B(\vec{x})\partial_\alpha \\
& + V_1[g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})] - g_{ik}(\vec{x})(\partial_i\partial_k V_2) - 2g_{ik}(\vec{x})\partial_i V_2\partial_k \\
& - g_{ik}(\vec{x})V_2\partial_i\partial_k - [C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})]V_2 = \mathbf{0} \tag{4.6. b}
\end{aligned}$$

Aussi

$$C_i(\vec{x})\partial_i V_2 = C_i(\vec{x})(\partial_i V_2) + C_i(\vec{x})V_2\partial_i$$

Donc l'expression aura la forme :

$$\begin{aligned}
& -(\Delta g_{ik}(\vec{x}))\partial_i\partial_k - (\Delta C_i(\vec{x}))\partial_i - (\Delta B(\vec{x})) - 2\partial_\alpha g_{ik}\partial_\alpha\partial_i\partial_k - 2\partial_\alpha C_i\partial_\alpha\partial_i - 2\partial_\alpha B(\vec{x})\partial_\alpha + \\
& V_1[g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})] - g_{ik}(\vec{x})(\partial_i\partial_k V_2) - 2g_{ik}(\vec{x})\partial_i V_2\partial_k - g_{ik}(\vec{x})V_2\partial_i\partial_k - \\
& -C_i(\vec{x})(\partial_i V_2) - C_i(\vec{x})V_2\partial_i - B(\vec{x})V_2 = \mathbf{0} \tag{4.6. c}
\end{aligned}$$

On tient en considération que la base  $\{\partial_i\partial_k, \partial_i, \mathbf{1}\}$  est formée par ses trois éléments qui sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned}
& [-(\Delta g_{ik}(\vec{x})) - 2\partial_\alpha g_{ik}\partial_\alpha - (\partial_k C_i + \partial_i C_k) + (V_1 - V_2)g_{ik}(\vec{x})]\partial_i\partial_k - [(\Delta C_i(\vec{x})) - V_1 C_i(\vec{x}) \\
& + 2\partial_i B(\vec{x}) + 2g_{ik}(\vec{x})\partial_k V_2 + C_i(\vec{x})V_2]\partial_i - (\Delta B(\vec{x})) \\
& - g_{ik}(\vec{x})(\partial_i\partial_k V_2) - C_i(\vec{x})(\partial_i V_2) + (V_1 - V_2)B(\vec{x}) = \mathbf{0} \tag{4.6. c}
\end{aligned}$$

Donc les relations d'intertwining forment un système de six équations non linéaires définit par :

$$\Delta g_{ik} + 2\partial_\alpha g_{ik} \partial_\alpha + \partial_k C_i + \partial_i C_k - (V_1 - V_2) g_{ik} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

$$\Delta C_{i_1} + 2\partial_i B + 2g_{ik} \partial_k V_2 - (V_1 - V_2) C_i = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

$$\Delta B + g_{ik} \partial_i \partial_k V_2 + C_i \partial_i V_2 - (V_1 - V_2) B = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

### 4.3.1 Métrique hyperbolique déformée

Si on considère un cas particulier ou la métrique soit hyperbolique déformée [22], [36] et défini par  $g_{ik} = \text{diag}(\mathbf{1}, -a^2)$ ,  $a \neq \pm 1$  alors le système d'équations non linéaire devient :

$$\partial_k C_i + \partial_i C_k - (V_1 - V_2) g_{ik} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

$$\Delta C_{i_1} + 2\partial_i B + 2g_{ik} \partial_k V_2 - (V_1 - V_2) C_i = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

$$\Delta B + g_{ik} \partial_i \partial_k V_2 + C_i \partial_i V_2 - (V_1 - V_2) B = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

La résolution de ces six équations non linéaire rend assez difficile si en prenant des contraintes sur la métrique.

Dans cette section, nous nous

bornerons seulement aux cas ou les systèmes ayant une métrique hyperbolique déformée. De [36] et Pour  $g_{ik} = \text{diag}(\mathbf{1}, -a^2)$ ,  $a \neq \pm 1$  la solution de l'équation (4.10) est :

$$2\partial_1 C_1 = V \quad , 2\partial_2 C_2 = -a^2 V \quad (4.12)$$

$$\partial_1 C_2 + \partial_2 C_1 = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

On note que  $V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - V_2(\vec{x})$  et à partir de l'équation (4.12) on peut facilement trouver que  $C_1(\vec{x})$ ,  $C_2(\vec{x})$  et on les exprime en fonction d'une fonction unique arbitraire  $C(\vec{x})$  :

$$C_1(\vec{x}) = -\frac{1}{a^2} \partial_2 C(\vec{x}) C_2(\vec{x}) = \partial_1 C(\vec{x}) V(\vec{x}) = -\frac{2}{a^2} \partial_1 \partial_2 C(\vec{x}) \quad (4.14)$$

De l'équation (5.13) la fonction  $C(\vec{x})$  faut satisfaire l'équation :

$$(\partial_1^2 - \frac{1}{a^2} \partial_2^2) C(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

On fait le changement des variables :  $x_\pm = x_1 \pm ax_2$  et avec la satisfaction de (4.15) la forme générale de  $C(\vec{x})$  donnée par la superposition des variables  $x_\pm$  :

$$C(\vec{x}) = \int c_+(x_+) dx_+ + \int c_-(x_-) dx_- \quad (4.16)$$

Et nous obtenons :

$$C_1(\vec{x}) = -\frac{1}{a}(C_+(x_+) - C_-(x_-))C_2(\vec{x}) = C_+(x_+) + C_-(x_-) \quad (4.17)$$

$$V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - V_2(\vec{x}) = -\frac{2}{a}(C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) \quad (4.18)$$

La solution du système précédent concernant les six équations non linéaires peut nous donner la formule générale des potentiels partenaires en le cas où la métrique soit hyperbolique déformée et celle de Lorentz, la formule est donnée par réf [36] :

$$\begin{aligned} V_{1,2}(\vec{x}) = & \mp \frac{1}{a^2}(C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) + \frac{1}{a^2(1+a^2)}(C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) + \\ & + F_1(x_1) + F_2(x_2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où  $F_1(x_1), F_2(x_2)$  sont des fonctions arbitraires, et on représente les dérivées par  $\partial_{\pm}$ .

La transformation d'un système des coordonnées  $(x_1, x_2)$  au  $(x_+, x_-)$  fait un changement sur Laplacien, de telle sorte elle aura la forme :

$$\begin{aligned} \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = & \left( \partial_+ \frac{\partial x_+}{\partial x_1} + \partial_- \frac{\partial x_-}{\partial x_1} \right) \left( \partial_+ \frac{\partial x_+}{\partial x_1} + \partial_- \frac{\partial x_-}{\partial x_1} \right) \\ & + \left( \partial_+ \frac{\partial x_+}{\partial x_2} + \partial_- \frac{\partial x_-}{\partial x_2} \right) \left( \partial_+ \frac{\partial x_+}{\partial x_2} + \partial_- \frac{\partial x_-}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (4.20.a)$$

$$= \partial_+^2 + 2\partial_+\partial_- + \partial_-^2 + a^2\partial_+^2 - 2a^2\partial_+\partial_- + a^2\partial_-^2 \quad (4.20.b)$$

$$= (1+a^2)(\partial_+^2 + \partial_-^2) + 2(1-a^2)\partial_+\partial_- \quad (4.20.c)$$

Et par conséquent on déduit l'expression des partenaires hamiltoniens :

$$\begin{aligned} H_{1,2} = -\Delta + V_{1,2}(\vec{x}) = & -(1+a^2)(\partial_+^2 + \partial_-^2) - 2(1-a^2)\partial_+\partial_- \mp \frac{1}{a^2}(C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) + \\ & + \frac{1}{a^2(1+a^2)}(C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) + F_1(x_1) + F_2(x_2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

De réf [36] on obtient l'expression de  $B(\vec{x})$  :

$$B(\vec{x}) = -\frac{1}{a^2} C_+(x_+) C_-(x_-) - \frac{1-a^2}{2a} (C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) - \frac{1-a^2}{2a^2(1+a^2)} (C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) - (F_1(x_1) - a^2 F_2(x_2)) \quad (4.22)$$

### 4.3.1 Métrique de Lorentz

Dans ce cas la métrique est  $g_{ik} = \text{diag}(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$  est le système d'équations différentielles non linéaires définit dans la section précédente reste vraie, et tous Les résultats obtenus précédemment sont pareils, il suffit de remplacer dans tous expressions la valeur  $a = 1$ , donc on peut trouver :

ü Partenaires potentiels (hamiltoniens)

$$V_{1,2}(\vec{x}) = \mp (C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) + \frac{1}{2} (C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) + F_1(x_1) + F_2(x_2) \quad (4.23)$$

$$H_{1,2} = -\Delta + V_{1,2}(\vec{x}) = -2(\partial_+^2 + \partial_-^2) \mp (C'_+(x_+) - C'_-(x_-)) + \frac{1}{2} (C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) + F_1(x_1) + F_2(x_2) \quad (4.24)$$

ü Paramètre  $B(\vec{x})$

$$B(\vec{x}) = -C_+(x_+) C_-(x_-) - \frac{1}{4} (C_+^2(x_+) + C_-^2(x_-)) - (F_1(x_1) - F_2(x_2)) \quad (4.25)$$

## 4.4 Système para quantique et relations SUSY intertwining

### 4.4.1 Partenaires hamiltoniens para quantiques

Le choix  $C'_\pm(x_\pm) = c C_\pm^2(x_\pm)$  va nous donner la solution suivante :

$$C_\pm(x_\pm) = -\frac{1}{c x_\pm} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{a(1+a^2)} \quad (4.26)$$

Par conséquent on peut déduire l'expression de  $V_{1,2}(\vec{x})$  :

$$V_{1,2}(\vec{x}) = \frac{2(1+a^2)}{x_\pm^2} + F_1(x_1) + F_2(x_2) \quad (4.27)$$

Et l'expression de  $B(\vec{x})$  sera comme suivant :



$$B(\vec{x}) = -\frac{1}{a^2} C_+(x_+) C_-(x_-) - (F_1(x_1) - a^2 F_2(x_2)) \quad (4.28)$$

Cette forme est similaire à celle d'un potentiel para quantique qu'on a défini dans le chapitre 3, pour reconstruire la forme para quantique à partir des partenaires potentiels trouver par les relations d'intertwining qu'on montré ci-dessus, il suffit seulement à exiger deux circonstances:

ü La condition dépend de l'ordre de para quantification dit que :

$$2(1 + a^2) = \frac{4\alpha(\alpha \pm 1)}{2} ; \alpha = \frac{p-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad (4.29)$$

Où  $p$  est l'ordre de para quantification.

La valeur qui correspond à  $\alpha = 1$  dans la condition exigée sur tel système soit obligatoirement  $a = 1$ .

ü La deuxième condition stipule que:

$$F_1(x_1) = F_2(x_2) = 0 \quad (4.30)$$

De l'équation (4.26), et avec le résultat de la première condition on peut trouver que :

$$C_{\pm}(x_{\pm}) = -\frac{2}{x_{\pm}} \quad c = \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

Par conséquent :

$$\Delta_{\pm} = 2(\partial_+^2 + \partial_-^2) V_{1,2}(\vec{x}) = \frac{4}{x_{\pm}^2} \quad (4.32)$$

D'où

$$H_{1,2} = -2\Delta_{\pm} + \frac{4}{x_{\pm}^2} \quad (4.33)$$

La division de  $H_{1,2}$  donne exactement l'expression des partenaires hamiltoniens ayant la forme d'un hamiltonien para quantique :

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2}(\partial_+^2 + \partial_-^2) + \frac{1}{x_{\pm}^2} = -\frac{1}{2}\Delta_{\pm} + \frac{C_{\pm}^2(x_{\pm})}{4} \quad (4.34)$$

De l'équation (4.28) et l'application des conditions (4.29)-(4.30) la solution  $B(\vec{x})$  pour un système para quantique devient :

$$B(\vec{x}) = -C_+(x_+)C_-(x_-) \quad (4.35)$$

#### 4.4.2 La vérification des relations d'intertwinig en système para quantique

Dans le cas précédent on a montré que le système qui correspond le choix établi sur l'expression de partenaires potentiels a la forme similaire a celle du système para quantique, il reste dans cette section à voir est que ce système est invariant sous les relations d'intertwining SUSY, donc il suffit de vérifier l'une des équations (4.1) et l'autre sera forcément satisfaite.

On considère un système para quantique définit par les relations (4.34) et on applique les relations d'intertwining sur lui de telle sorte la relation  $H_1 Q^+ = Q^+ H_2$  sera vérifiée.

Avant de faire une investigation de l'équation il est nécessaire de calculer les super changes avec les nouvelles variables  $x_{\pm}$ .

$$Q^+ = g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x}) \quad (4.36.a)$$

$$= \partial_1^2 - \partial_2^2 + C_1\partial_1 + C_2\partial_2 - C_+(x_+)C_-(x_-) \quad (4.36.b)$$

On a

$$\partial_1^2 - \partial_2^2 = 4\partial_+\partial_-$$

Et

$$\begin{aligned} C_i\partial_i &= C_1\partial_1 + C_2\partial_2 \\ &= -(C_+(x_+) - C_-(x_-))(\partial_+ + \partial_-) + (C_+(x_+) + C_-(x_-))(\partial_+ - \partial_-) \\ &= 2(C_-\partial_+ - C_+\partial_-) \end{aligned}$$

D'où

$$Q^+ = [4\partial_+\partial_- + 2(C_-\partial_+ - C_+\partial_-) - C_+(x_+)C_-(x_-)] \quad (4.36.c)$$

Et par analogie on déduit :

$$Q^- = [4\partial_+\partial_- - 2(C_-\partial_+ - C_+\partial_-) - C_+(x_+)C_-(x_-)] \quad (4.37)$$

Si on fait le changeant respectivement  $\{x_-, x_+, C_-, C_+(\partial_-, \partial_+)\}$  par  $\{x, y, \Omega_x, \Omega_y(\partial_x, \partial_y)\}$  le système devient comme suivant :

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_{x,y})^2}{4} Q^\pm = [4\partial_x\partial_y \pm 2(\Omega_x\partial_y - \Omega_y\partial_x) - \Omega_x\Omega_y] \quad (4.38)$$

Et

$$B(\vec{x}) = -\Omega_x\Omega_y \quad (4.39)$$

Si on utilise  $H_1$  en l'équation (4.1):

$$H_1 Q^+ = \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} \right] [4\partial_x\partial_y + 2(\Omega_x\partial_y - \Omega_y\partial_x) - \Omega_x\Omega_y] \quad (4.40. a)$$

$$\begin{aligned} &= -2(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_x\partial_y) - (\partial_x^2 + \partial_y^2)(\Omega_x\partial_y - \Omega_y\partial_x) - \frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\Omega_x\Omega_y + (\Omega_x)^2\partial_x\partial_y \\ &\quad + \frac{(\Omega_x)^2}{2}(\Omega_x\partial_y - \Omega_y\partial_x) - \frac{(\Omega_x)^2}{4}\Omega_x\Omega_y \end{aligned} \quad (4.40. b)$$

$$\begin{aligned} &= 4(\partial_x\partial_y)\left(-\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\right) - (\partial_x^2\Omega_x)\partial_y - 2(\partial_x\Omega_x)\partial_x\partial_y - \Omega_x\partial_x^2\partial_y + \Omega_y\partial_x^3 - \Omega_x\partial_y^3 \\ &\quad + (\partial_y^2\Omega_y)\partial_x + 2(\partial_y\Omega_y)\partial_x\partial_y + \Omega_y\partial_y^2\partial_x + \frac{1}{2}\Omega_x\partial_y^2\Omega_y + \frac{1}{2}\Omega_y\partial_x^2\Omega_x \\ &\quad + (\Omega_x)^2\partial_x\partial_y + \frac{(\Omega_x)^3}{2}\partial_y - \frac{(\Omega_x)^2}{2}\Omega_y\partial_x - \frac{(\Omega_x)^3}{4}\Omega_y \end{aligned} \quad (4.40. c)$$

On ramène les facteurs qui ont le même facteur  $(\partial_x^2 + \partial_y^2)$  et le fait que :

$$\Omega_x = -\frac{2}{x} \quad , \quad \Omega_y = -\frac{2}{y}$$

Et

$$\partial_{x,y}\Omega_{x,y} = \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}(\Omega_{x,y})^2 \quad , \quad \partial_{x,y}^2\Omega_{x,y} = \frac{1}{2}(\Omega_{x,y})^2$$

D'où

$$\begin{aligned} H_1 Q^+ &= -\frac{1}{2}Q^+(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{4}\Omega_x(\Omega_y)^3 + \frac{1}{2}\Omega_x(\Omega_y)^2\partial_y + \frac{1}{4}\Omega_y(\Omega_x)^3 + \frac{1}{2}\Omega_y(\Omega_x)^2\partial_x \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Omega_x)^3\partial_y + \frac{1}{2}(\Omega_y)^3\partial_x - (\Omega_x)^2\partial_x\partial_y + (\Omega_y)^2\partial_x\partial_y + \frac{1}{2}(\Omega_y)^3\partial_y \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Omega_x)^2\Omega_y\partial_x - \frac{1}{4}(\Omega_x)^3\Omega_y \end{aligned} \quad (4.40. d)$$

$$= -\frac{1}{2}Q^+(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{4}\Omega_x(\Omega_y)^3 + \frac{1}{2}\Omega_x(\Omega_y)^2\partial_y + \frac{1}{2}(\Omega_y)^3\partial_x + (\Omega_y)^2\partial_x\partial_y \quad (4.40.e)$$

Mais

$$(\Omega_y)^2 = \partial_y(\Omega_y)^2 - (\Omega_y)^3$$

D'où

$$\begin{aligned} H_1Q^+ &= -\frac{1}{2}Q^+(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{2}\Omega_x\partial_y(\Omega_y)^2 - \frac{1}{4}\Omega_x(\Omega_y)^3 + \partial_x\partial_y(\Omega_y)^2 - \frac{1}{2}\partial_x(\Omega_y)^3 \\ &= -\frac{1}{2}Q^+(\partial_x^2 + \partial_y^2) + [4\partial_x\partial_y + 2(\Omega_x\partial_y - \Omega_y\partial_x) - \Omega_x\Omega_y] \frac{(\Omega_x)^2}{4} \\ &= Q^+ \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} \right] \\ &= Q^+H_2 \end{aligned} \quad (4.40.f)$$

De même façon on vérifie que :  $Q^-H_1 = H_2Q^-$ .

Donc on peut conclure que la solution déduite par un choix approprié par la méthode d'intertwining aux opérateurs de super charges de second ordre, cette solution représente qu'un système para quantique.

## 4.5 Les relations d'intertwining et un système de Smorodinsky-Winternitz

### 4.5.1 Partenaires hamiltoniens de S.W

On a trouvé dans la section précédente que la solution de l'équation non linéaire avec un choix bien défini, et la condition exigé sur les fonctions  $F_1(x_1) = F_2(x_2) = \mathbf{0}$ , donne exactement des partenaires hamiltoniens ont la forme para quantique, ça nous dit que on peut trouver des d'autre forme des systèmes, de cette idée nous consacrons maintenant à résoudre le même problème mais avec des différentes forme de fonctions arbitraire  $F_1(x_1), F_2(x_2)$  on les prend comme suivant :

$$F_1(x_1) = a_1x_1^2, \quad F_2(x_2) = a_2x_2^2, \quad a_1 = a_2 = 4 \quad (4.41)$$

D'où la forme générale des partenaires hamiltoniens trouvé ci-dessus :

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_{x,y})^2}{4} + \frac{1}{4}(F_1(x_1) + F_2(x_2)) \quad (4.42.a)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_{x,y})^2}{4} + x_1^2 + x_2^2 \quad (4.42.b)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_{x,y})^2}{4} + \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(y-x)^2 \quad (4.42.c)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_{x,y})^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (4.42.d)$$

Cette forme de partenaire représente l'hamiltonien de S.W à deux dimensions.

L'expression de B de telle sorte  $x = x_1 - x_2$ ,  $y = x_1 + x_2$  on obtient :

$$B(\vec{x}) = -\Omega_x \Omega_y - (F_1(x_1) - F_2(x_2)) \quad (4.43.a)$$

$$= -\Omega_x \Omega_y - 4(x_1^2 - x_2^2) \quad (4.43.b)$$

$$= -\Omega_x \Omega_y - [(x+y)^2 - (y-x)^2] \quad (4.43.c)$$

$$B(\vec{x}) = -\Omega_x \Omega_y - 4xy \quad (4.43.d)$$

## 4.5.2 La vérification des relations d'intertwining en système de Smorodinsky-Winternitz

Si on considère les partenaires hamiltoniens de (4.42.d) de ayant la forme de S.W, il est nécessaire de vérifier si ce système satisfait l'isospectralité des relations d'intertwining, il suffit de vérifier si l'une des relations (4.1) soit satisfaite, et l'autre se déduit par analogie. En premier lieu il faut définir les super charges au second ordre comme suivant :

$$Q^\pm = 4\partial_x \partial_y \pm 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y - 4xy \quad (4.44)$$

On utilise (4.1)-(4.42)-(4.44) on obtient :

$$H_1 Q^+ = \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y - 4xy] \quad (4.45. a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} \right] [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] (-4xy) \\ &+ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \end{aligned} \quad (4.45. b)$$

Si on suppose  $h_{1,2}, q^+, q^-$  représentent respectivement les hamiltoniens para quantiques et les super charges qui les correspondent, on les distingue comme suivant :

$$h_1 = \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} \right] \quad (4.46)$$

Et

$$q^+ = [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \quad (4.47)$$

On déjà vérifier au § (4.4.2) que :

$$\begin{aligned} h_1 q^+ &= \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} \right] [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \\ &= [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_y)^2}{4} \right] \\ &= q^+ h_2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ce qui implique

$$H_1 Q^+ = q^+ h_2 + \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_x)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] (-4xy) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \quad (4.49. a)$$

$$\begin{aligned} &= q^+ h_2 - 4xy \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] - xy(\Omega_x)^2 \\ &+ 2\partial_x \partial_y (x^2 + y^2) - \Omega_x \Omega_y \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \\ &+ 2\Omega_y x - 2\Omega_x y \end{aligned} \quad (4.49. b)$$

$$\begin{aligned}
&= q^+ h_2 - 4xy \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \\
&\quad + [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \left( \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) - xy(\Omega_x)^2 + 2\Omega_y x \\
&\quad - 2\Omega_x y \quad (4.49. c) \\
&= [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_y)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] - \\
&\quad xy(\Omega_x)^2 + 2\Omega_y x - 2\Omega_x - 4xy \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \quad (4.49. d)
\end{aligned}$$

Le fait que

$$-xy(\Omega_x)^2 + 2\Omega_y x - 2\Omega_x y = -\frac{4x}{y} = -4xy \frac{(\Omega_y)^2}{4}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
H_1 Q^+ &= [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y] \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_y)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \\
&\quad - 4xy \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_y)^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \\
&= [4\partial_x \partial_y + 2(\Omega_x \partial_y - \Omega_y \partial_x) - \Omega_x \Omega_y - 4xy] \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{(\Omega_y)^2}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \quad (4.49. e)
\end{aligned}$$

Et on déduit la relation :

$$H_1 Q^+ = Q^+ H_2 \quad (4.49. f)$$

De même manière on démontre que :  $Q^- H_1 = H_2 Q^-$ .

## 4.6 Conclusion

De ce résultat, on a conclu que la méthode SUSY d'intertwinig de super charge aux seconds ordres dérivatifs sert à inspirer quelques systèmes para-quantique ou super intégrables qu'on peut facilement déduire leurs spectres d'énergie.

## Conclusion générale

Dans ce travail de recherche, on a essayé de mettre en évidence quelques idées importantes de la mécanique quantique et les symétries, et de voir comment les symétries servent à faciliter des grandes classes des systèmes quantique non-solubles par l'équation de Schrödinger, ce travail est divisé en quatre parties, pour l'objectivité la première partie contient quelques idées élémentaire concernant les types de symétries qu'on étudié, en particulier la symétrie conforme et la para quantification, la deuxième partie on a traité la SUSY simultanément avec la para quantification pour ( $N=1,2$  et en  $D=1,2,3$ ), et on a clarifié que le spectre d'énergie et le même pour les deux cas de symétrie. En troisième partie et finalement on a défini se qu'on appelle la super intégrabilité et comment, cette méthode algébrique peut enlever la difficulté venant par des systèmes quantiques non-solubles, en particulier l'exemple du Smorodinsky-Winternitz, on a trouvé que le spectre d'énergie est simplement donné par des contraintes appliqués sur l'expression de la fonction de structure.



## Annexe

### Procédures symboliques pour calculer les commutateurs

Le calcul des commutateurs du chapitre 3 est fait par un logiciel désigné aux problèmes spécifiques en physique à haute énergie.

Nous essayons de joindre tous les programmes correspondants aux résultats trouvés au long du chapitre 3 et on les représente comme ci-dessous :

#### 1 [H, I]

Functions x, y, pi, pj, H, I;

L, [I, H] = I\*H-H\*I;

id I = pj^2+y^2 ;

id H = (pi^2+x^2)/2 + (pj^2+y^2)/2 + 1\*x^(-2);

print;

.sort

L, [I,H] = -(x)^(-2)\*y\*y - (x)^(-2)\*pj\*pj - 1/2\*x\*x\*y\*y - 1/2\*x\*x\*pj\*pj + y\*y\*(x)^(-2) +  
1/2\*y\*y\*x\*x + 1/2\*y\*y\*pi\*pi - 1/2\*pi\*pi\*y\*y - 1/2\*pi\*pi\*pj\*pj+ pj\*pj\*(x)^(-2) +  
1/2\*pj\*pj\*x\*x + 1/2\*pj\*pj\*pi\*pi;

repeat;

id x\*y = y\*x ;

id pi\*pj = pj\*pi;

id pi\*x = x\*pi-i\_;

id pj\*y = y\*pj-i\_;

id pi\*y = y\*pi;

id pj\*x = x\*pj;

id x^(-2)\*y = y\*x^(-2);

id pj\*x^(-2) = x^(-2)\*pj;

endrepeat;

print;

.end

## 2 [H, J]

Functions x, y, pi, pj, H, J;

L, [J,H]=J\*H-H\*J;

id H=(pi^2+x^2)/2 +(pj^2+y^2)/2 +1/x^2 ;

id J =x^2\*pj^2 +y^2\*pi^2-(x\*y\*pi\*pj+pi\*pj\*x\*y)+2\*y^2/x^2;

id pi\*pj = pj\*pi;

id x\*y = y\*x;

id pi\*x = x\*pi -i\_;

id pj\*y = y\*pj-i\_;

print;

.sort

L, [J, H] =

- (x)^(-2)\*x\*x\*pj\*pj + (x)^(-2)\*y\*x\*pj\*pi - 2\*(x)^(-2)\*y\*y\*(x)^(-2) - (x)^(-2)\*y\*y\*pi\*pi  
+ (x)^(-2)\*pj\*pi\*y\*x - 1/2\*x\*x\*x\*x\*pj\*pj + 1/2\*x\*x\*y\*x\*pj\*pi - 1/2\*x\*x\*pj\*y\*i\_ +  
1/2\*x\*x\*pj\*y\*pj\*y + 1/2\*x\*x\*pj\*pi\*y\*x + x\*x\*pj\*pj\*(x)^(-2) + 1/2\*x\*x\*pj\*pj\*x\*x +  
1/2\*x\*x\*pj\*pj\*pi\*pi + 1/2\*x\*x\*pj\*pj\*pj\*pj - x\*y\*x\*y\*(x)^(-2) - 1/2\*x\*y\*x\*y\*pi\*pi +  
1/2\*y\*x\*pj\*x\*i\_ - 1/2\*y\*x\*pj\*x\*pi\*x - y\*x\*pj\*pi\*(x)^(-2) - 1/2\*y\*x\*pj\*pi\*y\*y -  
1/2\*y\*x\*pj\*pi\*pi\*pi - 1/2\*y\*x\*pj\*pi\*pj\*pj + 2\*y\*y\*(x)^(-2)\*(x)^(-2) + y\*y\*(x)^(-2)\*x\*x  
+y\*y\*(x)^(-2)\*y\*y + y\*y\*(x)^(-2)\*pi\*pi + y\*y\*(x)^(-2)\*pj\*pj - 1/2\*y\*y\*x\*x\*pj\*pj +  
1/2\*y\*y\*y\*x\*pj\*pi - y\*y\*y\*y\*(x)^(-2) - 1/2\*y\*y\*y\*y\*pi\*pi - 1/2\*y\*y\*pi\*x\*i\_ +  
1/2\*y\*y\*pi\*x\*pi\*x + y\*y\*pi\*pi\*(x)^(-2) + 1/2\*y\*y\*pi\*pi\*y\*y + 1/2\*y\*y\*pi\*pi\*pi\*pi +  
1/2\*y\*y\*pi\*pj\*pi\*pj + 1/2\*y\*y\*pj\*pi\*y\*x - 1/2\*pi\*x\*pi\*x\*pj\*pj + 1/2\*pi\*x\*pj\*pj\*i\_ +  
1/2\*pi\*pi\*y\*x\*pj\*pi - pi\*pi\*y\*y\*(x)^(-2) - 1/2\*pi\*pi\*y\*y\*pi\*pi + 1/2\*pi\*pi\*pj\*pi\*y\*x -  
1/2\*pj\*x\*pj\*pi\*i\_ + pj\*y\*(x)^(-2)\*i\_ + 1/2\*pj\*y\*pi\*pi\*i\_ + 1/2\*pj\*y\*pj\*x\*pj\*pi -  
pj\*y\*pj\*y\*(x)^(-2) - 1/2\*pj\*y\*pj\*y\*pi\*pi - pj\*pi\*y\*x\*(x)^(-2) - 1/2\*pj\*pi\*y\*x\*x\*x -  
1/2\*pj\*pi\*y\*x\*y\*y - 1/2\*pj\*pi\*y\*x\*pi\*pi - 1/2\*pj\*pi\*y\*x\*pj\*pj - 1/2\*pj\*pj\*x\*x\*pj\*pj +  
1/2\*pj\*pj\*pj\*pi\*y\*x;

repeat;

```

id x^2*y^2 = y^2*x^2;
id pi^2*pj^2 = pj^2*pi^2;
id pi*x = x*pi-i_;
id pj*y = y*pj-i_;
id pi^2*y = y*pi^2;
id pj^2*x = x*pj^2;
id x^(-2)*y = y*x^(-2);
id pj*x^(-2) = x^(-2)*pj;
endrepeat;
print;
.sort

```

L, [J, H] =

$$\begin{aligned}
& 2*(x)^{(-2)} - (x)^{(-2)}*x*x*pj*pj + (x)^{(-2)}*pj*pi*y*x - x*x + x*x*(x)^{(-2)}*pj*pj + \\
& 1/2*x*x*y*x*pj*pi - 2*x*x*y*pj*i_ + 1/2*x*x*pj*pi*y*x - x*y*x*y*(x)^{(-2)} - \\
& 1/2*x*y*x*y*pi*pi + 2*x*pi*pj*pj*i_ + y*(x)^{(-2)}*x*pj*pi + 4*y*(x)^{(-2)}*pj*i_ + \\
& 1/2*y*x*pi*pi*pj*pi + y*x*pj*x*i_ - 1/2*y*x*pj*x*x*pi - y*x*pj*pi*(x)^{(-2)} - \\
& 1/2*y*x*pj*pi*y*y - 1/2*y*x*pj*pi*pi*pi - 1/2*y*x*pj*pi*pj*pj + 1/2*y*x*pj*pj*pj*pi - \\
& y*y + y*y*(x)^{(-2)}*x*x + 1/2*y*y*x*x*pi*pi - 2*y*y*x*pi*i_ + 1/2*y*y*y*x*pj*pi + \\
& 1/2*y*y*pi*pj*pi*pj + 1/2*y*y*pj*pi*y*x - 1/2*y*y*pj*pj*pi*pi - y*pi*pj*pi*i_ + \\
& 2*y*pj*pi*pi*i_ + pi*pi + 1/2*pi*pi*pj*pi*y*x - pj*x*pj*pi*i_ - pj*pi*y*x*(x)^{(-2)} - \\
& 1/2*pj*pi*y*x*x*x - 1/2*pj*pi*y*x*y*y - 1/2*pj*pi*y*x*pi*pi - 1/2*pj*pi*y*x*pj*pj + \\
& pj*pj + 1/2*pj*pj*pj*pi*y*x;
\end{aligned}$$

```

repeat;
id y*y*y*pi*pi*(x)^{(-2)}*pj*i_ = y*y*y*pj*pi*pi*(x)^{(-2)}*i_;
id x^(-1)*x = 1;
id x^(-2)*x = x^(-1);
id x^(-2)*x*x = 1;
id x*x*x^(-2) = 1;
id y*x*pj*pi*(x)^{(-2)} = y*x*pi*(x)^{(-2)}*pj;
id x*y = y*x ;
id pi*pj = pj*pi;
id pi*x = x*pi-i_;

```

```

id pj*y = y*pj-i_;
id pi*y = y*pi;
id pj*x = x*pj;
id x^(-2)*y = y*x^(-2);
id pj*x^(-2) = x^(-2)*pj;
id (pi)^2*x = x*(pi)^2 - 2*pi*i_;
id pi*(x)^(-1) = (x)^(-2)*i_+(x)^(-1)*pi;
id x*pi*(x)^(-2) = (x)^(-2)*i_+pi*(x)^(-1);
endrepeat;
print;
.end

```

### 3 F = [I, J]

Functions x, y, pi, pj, H, I, J;

L, [I, J] = I\*J - J\*I;

id I = pj^2+y^2;

id H = (pi^2+x^2)/2 +(pj^2+y^2)/2 + x^(-2) ;

id J =x^2\*pj^2 +y^2\*pi^2-(x\*y\*pi\*pj+pi\*pj\*x\*y)+2\*y^2\*x^(-2);

print;

.sort

L, [I, J] = - x\*x\*pj\*pj\*y\*y - x\*x\*pj\*pj\*pj\*pj + x\*y\*pi\*pj\*y\*y + x\*y\*pi\*pj\*pj\*pj -  
2\*y\*y\*(x)^(-2)\*y\*y - 2\*y\*y\*(x)^(-2)\*pj\*pj + y\*y\*x\*x\*pj\*pj - y\*y\*x\*y\*pi\*pj+  
2\*y\*y\*y\*y\*(x)^(-2) + y\*y\*y\*y\*pi\*pi - y\*y\*pi\*pi\*y\*y - y\*y\*pi\*pi\*pj\*pj- y\*y\*pi\*pj\*x\*y +  
pi\*pj\*x\*y\*y\*y + pi\*pj\*x\*y\*pj\*pj + pj\*pj\*x\*x\*pj\*pj -pj\*pj\*x\*y\*pi\*pj + 2\*pj\*pj\*y\*y\*(x)^(-  
2) + pj\*pj\*y\*y\*pi\*pi - pj\*pj\*pi\*pj\*x\*y;

repeat;

id x\*y = y\*x ;

id pi\*pj = pj\*pi;

id pi\*x = x\*pi-i\_;

```

id pj*y = y*pj-i_;
id pi*y = y*pi;
id pj*x = x*pj;
id x^(-2)*y = y*x^(-2);
id pj*x^(-2) = x^(-2)*pj;
id pi^2*x = x*pi^2 - 2*pi*i_;
endrepeat;
print;
.end

```

#### 4 [F, H]

Functions x, y, pi, pj, H, F;

L, [F, H] = F\*H - H\* F;

id H = (pi^2+x^2)/2 +(pj^2+y^2)/2 + x^(-2);

id F = - 4\*(x)^(-2) + 2\*x\*x + 4\*x\*pj\*pj\*pi\*i\_ - 8\*y\*(x)^(-2)\*pj\*i\_ + 4\*y\*x\*x\*pj\*i\_ - 2\*y\*y  
- 4\*y\*y\*x\*pi\*i\_ - 4\*y\*pj\*pi\*pi\*i\_ - 2\*pi\*pi + 2\*pj\*pj;

id pi\*pj = pj\*pi;

id x\*y = y\*x;

id x\*pi = pi\*x + i\_;

id pj\*y = y\*pj-i\_;

print;

.sort

L, [F, H] =

- 4\*(x)^(-2)\*x\*x - 4\*(x)^(-2)\*x\*pj\*pj\*pi\*i\_ + 8\*(x)^(-2)\*y\*(x)^(-2)\*pj\* i\_ - 4\*(x)^(-  
2)\*y\*x\*x\*pj\*i\_ - 4\*(x)^(-2)\*y\*y + 4\*(x)^(-2)\*y\*y\*pi\*x\*i\_ +4\*(x)^(-2)\*y\*pj\*pi\*pi\*i\_ -  
4\*(x)^(-2)\*pj\*pj + 4\*x\*x\*(x)^(-2) - 2\*x\*x\*x\*pj\*pj\*pi\*i\_ + 4\*x\*y\*x\*(x)^(-2)\*pj\*i\_ -  
2\*x\*y\*x\*x\*pj\*i\_ + 2\*x\*y\*x\*y\*pi\*x\*i\_ + 2\*x\*y\*x\*pj\*pi\*pi\*i\_ + 2\*x\*pi\*i\_ +  
2\*x\*pi\*x\*pi + 4\*x\*pj\*pj\*pi\*(x)^(-2)\*i\_ + 2\*x\*pj\*pj\*pi\*x\*x\*i\_ + 2\*x\*pj\*pj\*pi\*y\*y\*i\_ +  
2\*x\*pj\*pj\*pi\*pi\*  
pi\*i\_ + 2\*x\*pj\*pj\*pj\*pi\*pj\*i\_ - 4\*y\*(x)^(-2)\*y - 4\*y\*(x)^(-2)\*y\*pj\*y\*i\_  
- 8\*y\*(x)^(-2)\*pj\*(x)^(-2)\*i\_ - 4\*y\*(x)^(-2)\*pj\*x\*x\*i\_ - 4\*y\*(x)^(-2)\*

$$\begin{aligned}
& p_j \pi_i \pi_i - 4y(x)^{-2} p_j p_j p_j i + 2y x x y + 2y x x y p_j y i + \\
& 4y x x p_j (x)^{-2} i + 2y x x p_j x x i + 2y x x p_j \pi_i \pi_i + \\
& 2y x x p_j p_j p_j i + 4y y (x)^{-2} - 2y y x p_j \pi_i p_j i - 2y y x p_j p_j \pi_i + \\
& 4y y y (x)^{-2} p_j i - 2y y y x x p_j i + 2y y y y \pi_i x i + 2y y y p_j \pi_i \pi_i - \\
& 4y y \pi_i x (x)^{-2} i - 2y y \pi_i x x x i - 2y y \pi_i x y y i - 2y y \pi_i x \pi_i \pi_i + \\
& 2y y \pi_i \pi_i - 2y y p_j p_j - 4y * \\
& p_j \pi_i \pi_i (x)^{-2} i - 2y p_j \pi_i \pi_i x x i - 2y p_j \pi_i \pi_i y y i - 2y * \\
& p_j \pi_i \pi_i \pi_i \pi_i - 2y p_j \pi_i p_j \pi_i p_j i - 2\pi_i \pi_i x x - 2\pi_i \pi_i x p_j * \\
& p_j \pi_i i + 4\pi_i \pi_i y (x)^{-2} p_j i - 2\pi_i \pi_i y x x p_j i - 2\pi_i \pi_i y y \\
& + 2\pi_i \pi_i y y \pi_i x i + 2\pi_i \pi_i y p_j \pi_i \pi_i i - 2\pi_i p_j \pi_i p_j + 4p_j (x)^{-2} p_j - \\
& 2p_j x x p_j + 2p_j y \pi_i x + 4p_j y p_j (x)^{-2} p_j i - 2p_j y p_j x x p_j i + \\
& 2p_j y p_j y \pi_i x i + 2p_j y p_j p_j \pi_i \pi_i i + 4p_j p_j (x)^{-2} - 2p_j p_j x p_j p_j \pi_i i + \\
& 4p_j p_j \pi_i \pi_i;
\end{aligned}$$

repeat;

endrepeat;

print;

.sort

L, [F, H] =

$$\begin{aligned}
& - 4(x)^{-2} x x - 4(x)^{-2} x p_j p_j \pi_i i + 8(x)^{-2} p_j p_j + 4x x (x)^{-2} + \\
& 4x x p_j p_j + 4x y x (x)^{-2} p_j i - 2x y x x x p_j i + 2x y x y + \\
& 2x y x y x \pi_i i + 2x y x p_j \pi_i \pi_i i + 4x \pi_i i + 4x p_j p_j \pi_i (x)^{-2} i + \\
& 2x p_j p_j \pi_i y y i + 2x p_j p_j p_j \pi_i p_j i - 2x p_j p_j p_j p_j \pi_i i - 4y (x)^{-2} \\
& 2) x x p_j i - 4y (x)^{-2} p_j x x i + 4y * \\
& x x (x)^{-2} p_j i + 4y x x y - 2y x x \pi_i \pi_i p_j i + 2y x x p_j x x i + \\
& 2y x x p_j \pi_i \pi_i i - 8y x \pi_i p_j - 8y y (x)^{-2} + 4y y (x)^{-2} x \pi_i i - 6y y x x \\
& - 2y y x x x \pi_i i - 4y y x \pi_i (x)^{-2} i - 2y y x \pi_i y y i - 2y y x p_j \pi_i p_j i \\
& + 2y y y y x \pi_i i + 4y \pi_i \pi_i (x)^{-2} p_j i + 2y \pi_i \pi_i p_j \pi_i \pi_i i - \\
& 2y p_j x x \pi_i \pi_i i - 4y p_j \pi_i \pi_i (x)^{-2} i - 2y p_j \pi_i \pi_i \pi_i \pi_i i - \\
& 2y p_j \pi_i p_j \pi_i p_j i + 2y p_j p_j p_j \pi_i \pi_i i - 2\pi_i p_j \pi_i p_j - 4\pi_i p_j p_j \pi_i - \\
& 4p_j x x p_j + 6p_j p_j \pi_i \pi_i;
\end{aligned}$$

repeat;

```

id y*y*y*pi*pi*(x)^(-2)*pj*i_ = y*y*y*pj*pi*pi*(x)^(-2)*i_;
id x^(-1)*x = 1;
id x^(-2)*x = x^(-1);
id x^(-2)*x*x = 1;
id x*x*x^(-2) = 1;
id y*x*pj*pi*(x)^(-2) = y*x*pi*(x)^(-2)*pj;
id pi*pj = pj*pi;
id x*y = y*x;
id pi*x = x*pi-i_;
id pj*y = y*pj-i_;
id pi*y = y*pi;
id pj*x = x*pj;
id x^(-2)*y = y*x^(-2);
id pj*x^(-2) = x^(-2)*pj;
id (pi)^2*x = x*(pi)^2 - 2*pi*i_;
id pi*(x)^(-1) = (x)^(-2)*i_ + (x)^(-1)*pi;
id x*pi*(x)^(-2) = (x)^(-2)*i_ + pi*(x)^(-1);
endrepeat;
print;
.sort

L, [F, H] =
8*(x)^(-2)*pj*pj - 4*(x)^(-1)*pj*pj*pi*i_ + 4*x*pj*pj*pi*(x)^(-2)*i_ + 4
*y*pi*pi*(x)^(-2)*pj*i_ - 4*y*pj*pi*pi*(x)^(-2)*i_;

repeat;
id x*pj*pj*pi*(x)^(-2)*i_ = -pj*pj*(x)^(-2) + pj*pj*pi*(x)^(-1)*i_;
id x*(x)^(-2) = (x)^(-1);
id x*pi = pi*x + i_;
id pj*pj*(x)^(-2) = (x)^(-2)*pj*pj;
id y*pj*pi*pi*(x)^(-2)*i_ = y*pi*pi*(x)^(-2)*pj*i_;
id pi*(x)^(-1) = (x)^(-2)*i_ + (x)^(-1)*pi;
id (x)^(-1)*pj*pj = pj*pj*(x)^(-1);
endrepeat;

```

```
print;
.end
```

## 5 [I, F]

Functions x, y, pi, pj, H, I, J, F;

L, [I, F] = I \*F-F\* I;

id I = pj^2+y^2 ;

id H =(pi^2+x^2)/2 +(pj^2+y^2)/2 +1/x^2 ;

id J =x^2\*pj^2 +y^2\*pi^2-(x\*y\*pi\*pj+pi\*pj\*x\*y)+2\*y^2/x^2;

id F = - 4\*(x)^(-2) + 2\*x\*x + 4\*x\*pj\*pj\*pi\*i\_ - 8\*y\*(x)^(-2)\*pj\*i\_ + 4\*y\*x\*x\*pj\*i\_ - 2\*y\*y  
- 4\*y\*y\*x\*pi\*i\_ - 4\*y\*pj\*pi\*pi\*i\_ - 2\*pi\*pi + 2\*pj\*pj;

```
print;
```

```
.sort
```

$$L, [I, F] = 4*(x)^{-2}*y*y + 4*(x)^{-2}*pj*pj - 2*x*x*y*y - 2*x*x*pj*pj - 4*x*pj*pj*pi*y*y*i_ - 4*x*pj*pj*pi*pj*pj*i_ + 8*y*(x)^{-2}*pj*y*y*i_ + 8*y*(x)^{-2}*pj*pj*pj*i_ - 4*y*x*x*pj*y*y*i_ - 4*y*x*x*pj*pj*pj*i_ - 4*y*y*(x)^{-2} + 2*y*y*x*x + 4*y*y*x*pi*y*y*i_ + 4*y*y*x*pi*pj*pj*i_ + 4*y*y*x*pj*pj*pi*i_ - 8*y*y*y*(x)^{-2}*pj*i_ + 4*y*y*y*x*x*pj*i_ - 4*y*y*y*y*x*pi*i_ - 4*y*y*y*pj*pi*pi*i_ - 2*y*y*pi*pi + 4*y*y*pj*pj + 4*y*pj*pi*pi*y*y*i_ + 4*y*pj*pi*pi*pj*pj*i_ + 2*pi*pi*y*y + 2*pi*pi*pj*pj - 4*pj*pj*(x)^{-2} + 2*pj*pj*x*x + 4*pj*pj*x*pj*pj*pi*i_ - 8*pj*pj*y*(x)^{-2}*pj*i_ + 4*pj*pj*y*x*x*pj*i_ - 4*pj*pj*y*y - 4*pj*pj*y*y*x*pi*i_ - 4*pj*pj*y*pj*pi*pi*i_ - 2*pj*pj*pi*pi;$$

```
repeat;
```

id x\*y = y\*x ;

id pi\*pj = pj\*pi;

id pi\*x = x\*pi-i\_;

id pj\*y = y\*pj-i\_;

id pi\*y = y\*pi;

id pj\*x = x\*pj;

id x^(-2)\*y = y\*x^(-2);

id pj\*pj\*x^(-2) = x^(-2)\*pj\*pj;



```
id pi^2*x = x*pi^2 - 2*pi*i_;
```

```
endrepeat;
```

```
print;
```

```
.sort
```

```
L, [I,F] = 8 - 16*(x)^(-2)*pj*pj + 8*x*x*pj*pj + 16*x*pi*i_ - 32*y*x*pj*pi + 16*y*y*(x)^(-2) - 8*y*y*x*x + 8*y*y*pi*pi + 16*y*pj*i_ - 8*pj*pj*pi*pi;
```

```
repeat;
```

```
id pj^2*y*pj = y*pj^3 - 2*pj^2*i_;
```

```
id y^2*y*pj = y*pj*y^2 + 2*y^2*i_;
```

```
endrepeat;
```

```
print;
```

```
.end
```

## 6 [J, F]

Functions x, y, pi, pj, F, I, H, J;

```
L, [J, F] = J*F-F*J;
```

```
id I = pj^2+y^2;
```

```
id H = (pi^2+x^2)/2 + (pj^2+y^2)/2 + x^(-2) ;
```

```
id J = x^2*pj^2 + y^2*pi^2 - (x*y*pi*pj + pi*pj*x*y) + 2*y^2*x^(-2);
```

```
id F = - 4*(x)^(-2) + 2*x*x + 4*x*pj*pj*pi*i_ - 8*y*(x)^(-2) *pj*i_ + 4*y*x*x*pj*i_ - 2*y*y - 4*y*y*x*pi*i_ - 4 *y*pj*pi*pi*i_ - 2*pi*pi + 2*pj*pj;
```

```
print;
```

```
.sort
```

```
L, [J, F] = 4*(x)^(-2)*x*x*pj*pj - 4*(x)^(-2)*x*y*pi*pj + 8*(x)^(-2)*y*y*(x)^(-2) + 4*(x)^(-2)*y*y*pi*pi - 4*(x)^(-2)*pi*pj*x*y - 2*x*x*x*x*pj*pj + 2*x*x*x*y*pi*pj - 4*x*x*y*y*(x)^(-2) - 2*x*x*y*y*pi*pi + 2*x*x*pi*pj*x*y - 4*x*x*pj*pj*(x)^(-2) + 2*x*x*pj*pj*x*x + 4*x*x*pj*pj*x*pj*pi*i_ - 8*x*x*pj*pj*y*(x)^(-2)*pj*i_ + 4*x*x*pj*pj*y*x*pj*i_ - 2*x*x*pj*pj*y*y - 4*x*x*pj*pj*y*y*x*pi*i_ - 4*x*x*pj*pj*y*pj*pi*pi*i_ - 2*x*x*pj*pj*pi*pi + 2*x*x*pj*pj*pj + 4*x*y*pi*pj*(x)^(-2) - 2*x*y*pi*pj*x*x - 4*x*y*pi*pj*x*pj*pi*i_ + 8*x*y*pi*pj*y*(x)^(-2)*pj*i_ -
```

$$\begin{aligned}
& 4*x*y*pi*pj*y*x*x*pj*i_ + 2*x*y*pi*pj*y*y + 4*x*y*pi*pj*y*y*x*pi*i_ + \\
& 4*x*y*pi*pj*y*pj*pi*pi*i_ + 2*x*y*pi*pj*pi*pi - 2*x*y*pi*pj*pj*pj - \\
& 4*x*pj*pj*pi*x*x*pj*pj*i_ + 4*x*pj*pj*pi*x*y*pi*pj*i_ - 8*x*pj*pj*pi*y*y*(x)^(-2)*i_ - \\
& 4*x*pj*pj*pi*y*y*pi*pi*i_ + 4*x*pj*pj*pi*pi*pj*x*y*i_ + 8*y*(x)^(-2)*pj*x*x*pj*pj*i_ - \\
& 8*y*(x)^(-2)*pj*x*y*pi*pj*i_ + 16*y*(x)^(-2)*pj*y*y*(x)^(-2)*i_ + 8*y*(x)^(- \\
& 2)*pj*y*y*pi*pi*i_ - 8*y*(x)^(-2)*pj*pi*pj*x*y*i_ - 4*y*x*x*pj*x*x*pj*pj*i_ + \\
& 4*y*x*x*pj*x*y*pi*pj*i_ - 8*y*x*x*pj*y*y*(x)^(-2)*i_ - 4*y*x*x*pj*y*y*pi*pi*i_ + \\
& 4*y*x*x*pj*pi*pj*x*y*i_ - 8*y*y*(x)^(-2)*(x)^(-2) + 4*y*y*(x)^(-2)*x*x + 8*y*y*(x)^(- \\
& 2)*x*pj*pj*pi*i_ - 16*y*y*(x)^(-2)*y*(x)^(-2)*pj*i_ + 8*y*y*(x)^(-2)*y*x*x*pj*i_ - \\
& 4*y*y*(x)^(-2)*y*y - 8*y*y*(x)^(-2)*y*y*x*pi*i_ - 8*y*y*(x)^(-2)*y*pj*pi*pi*i_ - \\
& 4*y*y*(x)^(-2)*pi*pi + 4*y*y*(x)^(-2)*pj*pj + 2*y*y*x*x*pj*pj - 2*y*y*x*y*pi*pj + \\
& 4*y*y*x*pi*x*x*pj*pj*i_ - 4*y*y*x*pi*x*y*pi*pj*i_ + 8*y*y*x*pi*y*y*(x)^(-2)*i_ + \\
& 4*y*y*x*pi*y*y*pi*pi*i_ - 4*y*y*x*pi*pi*pj*x*y*i_ + 4*y*y*y*y*(x)^(-2) + \\
& 2*y*y*y*y*pi*pi - 4*y*y*pi*pi*(x)^(-2) + 2*y*y*pi*pi*x*x + 4*y*y*pi*pi*x*pj*pj*pi*i_ - \\
& 8*y*y*pi*pi*y*(x)^(-2)*pj*i_ + 4*y*y*pi*pi*y*x*x*pj*i_ - 2*y*y*pi*pi*y*y - \\
& 4*y*y*pi*pi*y*y*x*pi*i_ - 4*y*y*pi*pi*y*pj*pi*pi*i_ - 2*y*y*pi*pi*pi*pi + \\
& 2*y*y*pi*pi*pj*pj - 2*y*y*pi*pj*x*y + 4*y*pj*pi*pi*x*x*pj*pj*i_ - \\
& 4*y*pj*pi*pi*x*y*pi*pj*i_ + 8*y*pj*pi*pi*y*y*(x)^(-2)*i_ + 4*y*pj*pi*pi*y*y*pi*pi*i_ - \\
& 4*y*pj*pi*pi*pi*pj*x*y*i_ + 2*pi*pi*x*x*pj*pj - 2*pi*pi*x*y*pi*pj + 4*pi*pi*y*y*(x)^(- \\
& 2) + 2*pi*pi*y*y*pi*pi - 2*pi*pi*pi*pj*x*y + 4*pi*pj*x*y*(x)^(-2) - 2*pi*pj*x*y*x*x - \\
& 4*pi*pj*x*y*x*pj*pj*pi*i_ + 8*pi*pj*x*y*y*(x)^(-2)*pj*i_ - 4*pi*pj*x*y*y*x*x*pj*i_ + \\
& 2*pi*pj*x*y*y*y + 4*pi*pj*x*y*y*y*x*pi*i_ + 4*pi*pj*x*y*y*pj*pi*pi*i_ + \\
& 2*pi*pj*x*y*pi*pi - 2*pi*pj*x*y*pj*pj - 2*pj*pj*x*x*pj*pj + 2*pj*pj*x*y*pi*pj - \\
& 4*pj*pj*y*y*(x)^(-2) - 2*pj*pj*y*y*pi*pi + 2*pj*pj*pi*pj*x*y;
\end{aligned}$$

repeat;

$$\text{id } y*y*y*pi*pi*(x)^(-2)*pj*i_ = y*y*y*pj*pi*pi*(x)^(-2)*i_;$$

$$\text{id } x^{(-1)*x} = 1;$$

$$\text{id } x^{(-2)*x} = x^{(-1)};$$

$$\text{id } x^{(-2)*x*x} = 1;$$

$$\text{id } x*x*x^{(-2)} = 1;$$

$$\text{id } y*x*pj*pi*(x)^(-2) = y*x*pi*(x)^(-2)*pj;$$

$$\text{id } x*y = y*x ;$$

$$\text{id } pi*pj = pj*pi;$$

```

id pi*x = x*pi-i_;
id pj*y = y*pj-i_;
id pi*y = y*pi;
id pj*x = x*pj;
id x^(-2)*y = y*x^(-2);
id pj*x^(-2) = x^(-2)*pj;
id (pi)^2*x = x*(pi)^2 - 2*pi*i_;
id pi*(x)^(-1) = (x)^(-2)*i_+(x)^(-1)*pi;
endrepeat;
print;
.sort

L, [J, F] = 8*(x)^(-2) - 4*(x)^(-1)*y*pj*pi + 4*(x)^(-1)*pi*i_ + 8*x*x + 8*x*x*x*x*pj*pj +
8*x*x*x*pi*i_ + 8*x*x*pj*pj*pi*pi - 8*x*x*pj*pj*pj*pj + 12*x*pi*(x)^(-2)*i_ +
8*x*pi*pi*pi*i_ - 40*x*pj*pj*pi*i_ + 16*y*(x)^(-2)*pj*i_ - 28*y*(x)^(-1)*pj*pi -
16*y*x*x*x*pj*pi + 40*y*x*x*pj*i_ - 16*y*x*pj*pi*pi*pi + 16*y*x*pj*pj*pj*pi - 24*y*y
+ 32*y*y*(x)^(-2)*(x)^(-2) + 16*y*y*(x)^(-2)*pi*pi - 8*y*y*(x)^(-1)*pj*pj*pi*i_ +
8*y*y*x*x*pi*pi - 8*y*y*x*x*pj*pj - 40*y*y*x*pi*i_ + 16*y*y*x*pi*(x)^(-2)*pj*pj*i_ -
8*y*y*x*pj*pj*pi*(x)^(-2)*i_ + 16*y*y*y*x*pj*pi - 8*y*y*y*(x)^(-1)*pi*i_ +
8*y*y*y*y*x*pi*(x)^(-2)*i_ - 8*y*y*y*y*pi*pi - 8*y*y*y*pj*i_ + 16*y*y*pi*pi*(x)^(-2) +
8*y*y*pi*pi*pi*pi - 8*y*y*pj*pj*pi*pi + 40*y*pj*pi*pi*i_ - 8*y*pj*pj*pj*i_ + 8*pi*pi -
24*pj*pj;

repeat;
id pi*(x)^(-1) = (x)^(-2)*i_+(x)^(-1)*pi;
id x*pi = i_+pi*x;
id x*x^(-2) = x^(-1);
id x^(-1)*y*pj*pi = y*(x)^(-1)*pi*pj;
id y*(x)^(-1)*pi*pj = y*(x)^(-1)*pj*pi;
id y*y*x*pj*pj*pi*(x)^(-2)*i_ = (-2)*y*y*(x)^(-2)*pj*pj + 2*y*y*(x)^(-1)*pi*pj*pj*i_ -
y*y*(x)^(-1)*pj*pj*pi*i_;
endrepeat;
print;
.end

```

## 7 La fonction de structure $\text{phi1} = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{N})$

Functions Ainv, A, F, I, H, J, BETA;

L, phi1 = Ainv\*A;

id Ainv = 2\*J + I\*I - 2\*H\*I + (2)^(-1)\*F - 1;

id A = 2\*J + I\*I - 2\*H\*I - (2)^(-1)\*F - 1;

id H\*J = J\*H;

id F\*F = 16\*J\*J + 112\*J + 64\*H\*I + 16\*F\*I - 16\*F\*H - 48\*H\*H + 16\*J\*I - 32\*J\*I\*H;

id I\*H\*I = I\*I\*H;

id J\*I = I\*J - F;

print;

.sort

L, phi1 = - 31 + 4\*I + 30\*I\*I - 4\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H - 1/2\*I\*I\*I\*J + 16\*I\*I\*H +  
4\*I\*I\*H\*H - 2\*I\*I\*J + I\*I\*J\*I - 76\*I\*H - 16\*I\*H\*H + 8\*I\*J + 4\*I\*J\*I - 1/2\*I\*J\*I\*I + 24\*H  
+ 12\*H\*H + BETA - 2\*J\*I\*I;

repeat;

id F\*I = I\*F + 8\*(2\*H\*I - 2\*J - I\*I + 1);

id F = I\*J - J\*I;

id I\*H\*I = I\*I\*H;

id H\*I\*I = I\*I\*H;

id H\*J = J\*H;

id H\*I = I\*H;

id BETA = 2\*I\*I\*J - 4\*I\*J\*I + 2\*J\*I\*I - 16\*I\*I + 32\*H\*I + 16;

endrepeat;

print;

.sort

L, phi1 =

- 15 + 4\*I + 14\*I\*I - 4\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H - 1/2\*I\*I\*I\*J + 16\*  
I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H + I\*I\*J\*I - 44\*I\*H - 16\*I\*H\*H + 8\*I\*J - 1/2\*I\*J\*I\*I +

$$24*H + 12*H*H;$$

repeat;

$$\text{id } I*I*I*J = 2*I*I*J*I + 16*I*J - I*J*I*I + 8*I*I*I - 16*H*I*I - 8*I;$$

$$\text{id } H*I*I = I*I*H;$$

endrepeat;

print;

.end

BETA : C'est l'invariant "32\*J", est un truc pour réduire le calcul.

On essaie de calculer manuellement les termes qui portent l'invariant "J" et les remplace dans le calcul symbolique, tel que la relation soit vraie.

$$I*I*I*J = 2*I*I*J*I + 16*I*J - I*J*I*I + 8*I*I*I - 16*H*I*I - 8*I;$$

## 8 La fonction de structure $\text{phi2} = \Phi(E, N+1)$

Functions Ainv, A, F, I, H, J;

$$L, \text{phi2} = A*Ainv;$$

$$\text{id } Ainv = 2*J + I*I - 2*H*I + (2)^{-1}*F - 1;$$

$$\text{id } A = 2*J + I*I - 2*H*I - (2)^{-1}*F - 1;$$

$$\text{id } F*F = 16*J*J + 112*J + 64*H*I + 16*F*I - 16*F*H - 48*H*H + 16*J*I - 32*J*I*H;$$

$$\text{id } H*J = J*H;$$

$$\text{id } I*H*I = I*I*H;$$

print;

.sort

L, phi2 =

$$1 - 4*F*I - 1/2*F*I*I + 4*F*H + F*H*I - F*J - 2*I*I + 1/2*I*I*F + I*I*I*I - 2*I*I*I*H + 2*I*I*J - 12*H*I - H*I*F - 2*H*I*I*I + 4*H*I*I*H - 4*H*I*J + 12*H*H - 32*J + J*F - 2*J*I*I + 8*J*I*H - 4*J*H*I;$$

repeat;

$$\text{id } F*I = I*F + 8*(2*H*I - 2*J - I*I + 1);$$

```

id F = I*J-J*I;
id I*H*I = I*I*H;
id H*I*I = I*I*H;
id H*J = J*H;
id H*I = I*H;
endrepeat;
print;
.sort

```

L, phi2=

$$\begin{aligned}
& -47 - 4*I + 46*I*I + 4*I*I*I + I*I*I*I - 4*I*I*I*H + 1/2*I*I*I*J - 8*I*I*H + 4*I*I*H*H \\
& - 4*I*I*J - I*I*J*I - I*I*J*H - 108*I*H + 8*I*J*I + 1/2*I*J*I*I + 2*I*J*I*H - I*J*J + \\
& 12*H*H + 64*J + 8*J*I - 4*J*I*I - J*I*I*H + 2*J*I*J - J*J*I;
\end{aligned}$$

```
repeat;
```

```
id I*I*I*J = 2*I*I*J*I + 16*I*J - I*J*I*I + 8*I*I*I - 16*H*I*I - 8*I;
```

```
id H*I*I = I*I*H;
```

```
id I*I*J = 2*I*J*I - J*I*I + 16*J + 8*I*I - 16*H*I - 8;
```

```
endrepeat;
```

```
print;
```

```
.sort
```

L, phi2 =

$$\begin{aligned}
& -15 - 8*I + 14*I*I + 8*I*I*I + I*I*I*I - 4*I*I*I*H - 24*I*I*H + 4*I*I*H*H - 108*I*H + \\
& 8*I*J - I*J*J + 8*H + 64*H*I + 16*H*I*H + 12*H*H + 8*J*I + 2*J*I*J - 16*J*H - J*J*I;
\end{aligned}$$

```
repeat;
```

```
id I*J*J = 8*I*J + 8*J*I + 2*J*I*J - 16*J*H - J*J*I + 32*H;
```

```
endrepeat;
```

```
print;
```

```
.end
```

## 9 [Ainv\*A, A\*Ainv]

Functions X, Y, F, I, H, J;

L, [Ainv\*A,A\*Ainv] = X\*Y - Y\*X;

id X = - 15 + 8\*I + 14\*I\*I - 8\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H + 24\*I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H -  
44\*I\*H - 16\*I\*H\*H + 24\*H + 12\*H\*H;

id Y = - 15 - 8\*I + 14\*I\*I + 8\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H - 24\*I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H -  
108\*I\*H - 24\*H + 64\*H\*I + 16\*H\*I\*H + 12\*H\*H;

id H\*J = J\*H;

id F\*F = 16\*J\*J +112\*J+64\*H\*I+16\*F\*I-16\*F\*H-48\*H\*H+16 \*J\*I-I-32\*J\*I\*H;

id I\*H\*I = I\*I\*H;

id J\*I = I\*J - F;

print;

.sort

L, [Ainv\*A, A\*Ainv] =

16\*I\*I\*I\*I\*I\*H - 32\*I\*I\*I\*I\*I\*H\*H - 16\*I\*I\*I\*I\*H - 64\*I\*I\*I\*I\*H\*I  
+192\*I\*I\*I\*I\*H\*I\*H + 256\*I\*I\*I\*I\*H\*H - 64\*I\*I\*I\*I\*H\*H\*H + 672\*I\*I\*I\*H\*I+  
48\*I\*I\*I\*H\*I\*I - 192\*I\*I\*I\*H\*I\*H + 192\*I\*I\*I\*H\*I\*H\*H - 3136\*I\*I\*I  
\*H\*H - 256\*I\*I\*I\*H\*H\*I - 64\*I\*I\*I\*H\*H\*I\*H - 384\*I\*I\*I\*H\*H\*H - 160\*I\*I\*H+  
896\*I\*I\*H\*I - 1216\*I\*I\*H\*I\*I + 64\*I\*I\*H\*I\*I\*I - 256\*I\*I\*H\*I\*I\*H +3648\*I\*I\*H\*I\*H +  
256\*I\*I\*H\*I\*H\*H + 1472\*I\*I\*H\*H\*I + 64\*I\*I\*H\*H\*I\*I\*I -192\*I\*I\*H\*H\*I\*I\*H +  
128\*I\*I\*H\*H\*I\*H + 64\*I\*I\*H\*H\*I\*H\*H - 1344\*I\*I\*H\*H\*H  
+ 256\*I\*I\*H\*H\*H\*I + 64\*I\*I\*H\*H\*H\*I\*H + 3840\*I\*H\*H - 2688\*I\*H\*H\*I -  
224\*I\*H\*H\*I\*I - 128\*I\*H\*H\*I\*I\*I - 16\*I\*H\*H\*I\*I\*I\*I + 64\*I\*H\*H\*I\*I\*I\*H +  
384\*I\*H\*H\*I\*I\*H - 64\*I\*H\*H\*I\*I\*H\*H + 1024\*I\*H\*H\*I\*H + 1152\*I\*H\*H\*H - 1024\*I\*  
H\*H\*H\*I - 256\*I\*H\*H\*H\*I\*H - 192\*I\*H\*H\*H\*H + 160\*H\*I\*I - 896\*H\*I\*I\*I  
+560\*H\*I\*I\*I\*I - 64\*H\*I\*I\*I\*I\*I + 256\*H\*I\*I\*I\*I\*H - 1728\*H\*I\*I\*I\*H -  
256\*H\*I\*I\*I\*H\*H + 2688\*H\*I\*I\*H - 224\*H\*I\*I\*H\*I + 128\*H\*I\*I\*H\*I\*I -  
16\*H\*I\*I\*H\*I\*I\*I + 64\*H\*I\*I\*H\*I\*I\*H - 384\*H\*I\*I\*H\*I\*H - 64\*H\*I\*I\*H\*I\*H\*H +  
1920\*H\*I\*I\*H\*H + 256\*H\*I\*I\*H\*H\*H - 5184\*H\*I\*H - 1536\*H\*I\*H\*H -  
192\*H\*I\*H\*H\*H  
+ 1344\*H\*H\*I + 192\*H\*H\*I\*I\*I - 576\*H\*H\*I\*I\*H - 384\*H\*H\*I\*H + 192\*H\*H\*I\*H\*H +  
768\*H\*H\*H\*I + 192\*H\*H\*H\*I\*H;

repeat;

```

id F*I = I*F + 8*(2*H*I-2*J-I*I+1);
id F = I*J-J*I;
id I*H*I = I*I*H;
id H*I*I = I*I*H;
id H*J = J*H;
id H*I = I*H;
endrepeat;
print;
.end

```

## 10 [A,Ainv ]

Functions A, Ainv, I, H;

L, [A, Ainv] = A\*Ainv - Ainv\*A;

id Ainv\*A = - 15 + 8\*I + 14\*I\*I - 8\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H + 24\*I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H - 44\*I\*H - 16\*I\*H\*H + 24\*H + 12\*H\*H;

id A\*Ainv = - 15 - 8\*I + 14\*I\*I + 8\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H - 24\*I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H - 108\*I\*H - 24\*H + 64\*H\*I + 16\*H\*I\*H + 12\*H\*H;

id I\*H\*I = I\*I\*H;

id H\*I\*I = I\*I\*H;

id H\*I = I\*H;

print;

.end

## 10 La fonction de structure si $I = 4*N+3$

CFunctions I, H, N;

L, phi1 (N) = - 15 + 8\*I + 14\*I\*I - 8\*I\*I\*I + I\*I\*I\*I - 4\*I\*I\*I\*H + 24\*I\*I\*H + 4\*I\*I\*H\*H - 44\*I\*H - 16\*I\*H\*H + 24\*H + 12\*H\*H;

id I = 4\*N + 3;

print;

.end



### Les résultats du chapitre 03:

$$\checkmark [I, H] = 0;$$

$$\checkmark [J, H] = 0;$$

$$\checkmark [F, H] = 0;$$

$$\checkmark [I, J] = -4*(x)^{-2} + 2*x*x + 4*x*pj*pj*pi*i_ - 8*y*(x)^{-2}*pj*i_ + 4*y*x*x*pj*i_ - 2*y*y - 4*y*y*x*pi*i_ - 4*y*pj*pi*pi*i_ - 2*pi*pi + 2*pj*pj;$$

$$\checkmark [I, F] = 8 - 16*(x)^{-2}*pj*pj + 8*x*x*pj*pj + 16*x*pi*i_ - 32*y*x*pj*pi + 16*y*y*(x)^{-2} - 8*y*y*x*x + 8*y*y*pi*pi + 16*y*pj*i_ - 8*pj*pj*pi*pi;$$

$$\checkmark [J, F] = -16*(x)^{-2} + 16*(x)^{-1}*pi*i_ - 16*x*x + 8*x*x*x*x*pj*pj + 8*x*x*pj*pj*pi*pi - 8*x*x*pj*pj*pj*pj - 40*x*pj*pj*pi*i_ + 16*y*(x)^{-2}*pj*i_ - 32*y*(x)^{-1}*pj*pi - 16*y*x*x*x*pj*pi + 40*y*x*x*pj*i_ - 16*y*x*pj*pi*pi*pi + 16*y*x*pj*pj*pj*pi + 32*y*y*(x)^{-2}*(x)^{-2} + 16*y*y*(x)^{-2}*pi*pi - 16*y*y*(x)^{-2}*pj*pj - 8*y*y*x*x*pj*pj + 16*y*y*y*x*pj*pi - 16*y*y*y*y*(x)^{-2} - 8*y*y*y*y*pi*pi - 8*y*y*y*pj*i_ - 8*y*y*pi*x*i_ + 16*y*y*pi*pi*(x)^{-2} + 8*y*y*pi*pi*x*x + 8*y*y*pi*pi*pi*pi - 8*y*y*pj*pj*pi*pi + 40*y*pj*pi*pi*i_ - 8*y*pj*pj*pj*i_ + 8*pi*x*x*x*i_ - 16*pi*pi + 8*pi*pi*pi*x*i_ - 24*pj*pj;$$

$$\checkmark \text{Phi1} = \text{Ainv} * \text{A} = -15 + 8*I + 14*I*I - 8*I*I*I + I*I*I*I - 4*I*I*I*H + 24*I*I*H + 4*I*I*H*H - 44*I*H - 16*I*H*H + 24*H + 12*H*H;$$

$$\checkmark \text{Phi2} = \text{A} * \text{Ainv} = -15 - 8*I + 14*I*I + 8*I*I*I + I*I*I*I - 4*I*I*I*H - 24*I*I*H + 4*I*I*H*H - 108*I*H - 24*H + 64*H*I + 16*H*I*H + 12*H*H;$$

$$\checkmark [\text{Ainv} * \text{A}, \text{A} * \text{Ainv}] = 0;$$

$$\checkmark [A, A_{inv}] = -16*T + 16*T*T*T - 48*T*T*H + 32*T*H*H - 48*H;$$

$$\checkmark \Phi_1(E, N) = 32*H^2*N + 64*H^2*N^2 - 32*H*N - 192*H*N^2 - 256*H*N^3 - 64*N - 64*N^2 + 256*N^3 + 256*N^4;$$

## Bibliographie

- [1] Wikipedia, “anyon,” <http://en.wikipedia.org/wiki/Anyon>
- [2] N.Mebarki, N.Belaloui and M.Haouchine, “Modified Virazoro and super Virazoro algebra,” Czechoslovak journal of physics, vol.47, 12 March (1996)
- [3] A.J.Kalany, “Para statistics and Dirac brackets,” international journal of theoretical physics, vol.6, no.6, pp.415-424, (1972).
- [4] N.Mebarki, N.Belaloui and M.H.Traikia, “Para quantum best transformations,” Acta physica polonica B, vol.23, no.12, (1992).
- [5] O.W.Greenberg, “Generalization of quantum statistics,” arXiv: 0805.0285v1 [quant-ph] 2 May (2008).
- [6] S.Meljnnac and M.Milekovic, “Unified view of multimode algebras with Fock-like representation,” arXiv: q-alg/951005v1, 4 Oct (2008).
- [7] O.W.Greenberg, D.M.Greenberger and T.V.Greenbergest, “(Para) bosons, (Para) fermions, quons and other beasts in the menagerie of particle statistics,” arXiv: hep-ph/9306225v1, 4 Jun (1993).
- [8] S.Meljnnac, M.Milekovic and A.Perica, “Interpolation between para-bose and para-fermi statistics,” arXiv: q-alg/9603023v1, 24 Mar (2008).
- [9] C.Daskaloyannis and K.Ypsilantis, “Unified treatment and classification of super integrable systems with integrals quadratic in momenta on a tow dimensional manifold,” arXiv: math-ph/0412055v3, 9 Feb (2007).
- [10] B. Dennis, C. Daskaloyannis, et Kokkotas, Phys.Rev.A50, 3700, 24 Jan (1994).
- [11] P.Ginsparg, “Applied conformal field theory,” Les houches, session xlix, champs, codes et phénomènes critiques, e.brézin, jzinn-justin, eds, elsevier, New York, (1989)
- [12] A.P.Fordy, “Quantum super-integrable systems and exactly solvable models,” Sigma3, 025, 14 Feb (2007).
- [13] B. Dennis, C. Daskaloyannis, et Kokkotas, “Generalized deformed oscillators and algebras”, arXiv: hep-th/9512083v1 12 Dec (1995).
- [14] Wikipedia, “Symetrie conforme,” [http://fr.wikipedia.org/wiki/Sym%C3%A9trie\\_conforme](http://fr.wikipedia.org/wiki/Sym%C3%A9trie_conforme)

- [15] R.M. Gaberdiel, “An introduction to conformal field theory,” arXiv: hep-ph/991056v2, 1 Nov (1993).
- [16] F.Gross “Relativistic quantum mechanics,” Wiley science paperback edition, p. (1999).
- [17] F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, “Tow-dimensional Schrödinger hamiltoniens with effective masse in SUSY approach”, arXiv :solv-int/0712.4262v1 27 Dec (2007).
- [18] J.Zuber, “An introduction to conformal field theory,” phys.Rev12, vol.26, (1995)
- [19] G.Schieber, “L’algèbre des systèmes quantiques d’oceneanu et la classification des systèmes conformes à 2D,” arXiv : math-ph/0411077v1, (2004).
- [20] J. P. Derendingen, “Théorie quantiques des champs,” presses polytechniques et universitaire romandes, p. (2001).
- [21] W.I. Fushchich and A.G. Nikitin, “Symmetries of equations of quantum mechanics,”pp.480, (1994).
- [23] W.I. Fushchich and A.G. Nikitin, “On the Poincare-invariant equations for particles with variable spin and mass,” reports on mathematical physics, vol.8, no. 1, pp. 33-48, (1975).
- [22] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, “Classical integrables 2-dim inspired by SUSY quantum mechanics”, arXiv :solv-int/9810006v2 29 Apr (1999)
- [24] W.I. Fushchich and A.G. Nikitin, “On the new invariance algebras and super algebras of relativistic wave equations,” journal of physics a: mathematical and general, vol. 20, no. 3, pp. 537-549, (1987).
- [25] W.I. Fushchich and A.G. Nikitin, “Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles,” letters in mathematical physics, vol.2, no. 2, pp. 471-475, (1978).
- [26] E. P. Wigner, Phys.Rev.77, 711.(1950).
- [27] O. Klein, J.Phys.Radium9, 1. (1938).
- [28] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, Phys.Rev.170, 1279. (1968).
- [29] K. V. Kademova, M. M. Karaev, Phys.Lett.B34, 147. (1971).
- [30] M. Omote, Y. Ohnuki, et S. Kamefuchi, Prog.Theor.Phys.56, 1984. (1976).
- [31] Y. Ohnuki, T. Kashiwa, Prog.Theor.Phys.60, 548. (1978).
- [32] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, J.Math.Phys.21, 601. (1980).
- [33] K. V. Kademova, M. M. Karaev, Nucl.Phys.B26, 326. (1971).
- [34] H. Nicolai, J.Phys.A9,1497. (1976).
- [35] E. Witten, Nucl.Phys.B188,513. (1981).
- [36] M. V. Ioffe, J. Negro, L. M. Nieto, D. N. Nishnianidze, “New tow-dimensional integrable quantum models from SUSY intertwining”, arXiv :hep-th/0606103v1 12 Jun (2006).