

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
N °de série :

Mémoire
Présenté Pour Obtenir le Diplôme de Magister
Spécialité : Physique Energétique

Option :Photothermique

Thème

Etude de la convection naturelle
thermique et massique
dans la couche limite le long d'une plaque
verticale avec une force de flottabilité opposée

PAR
SAADI ABDELHALIM

Soutenu Le : 22 /11 / 2011

Devant le Jury :

Président :	A. Chaker :	Prof.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	Si A. Mayouf :	M. C. A	Université de M'sila
Examineurs :	Ch. Bougriou :	Prof.	Université de Batna
	T. Boufendi :	M. C. A	Université Mentouri Constantine

NOMENCLATURE	
INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
I.1 Introduction	03
I.2 La convection naturelle	04
I.2.1 Définition	04
I.3 Travaux bibliographiques relatifs au domaine	04
CHAPITRE II : MODELE MATHEMATIQUE	
II.1 Présentation du problème	09
II.1.1 Hypothèses simplificatrices	10
II.2 Formulation du problème	10
II.2.1 Equations de conservations	11
II.2.2 Condition aux limites	11
II.3 Formulation à Dimensionnelle	11
II.3.1 Principales grandeurs physiques et variables adimensionnelles	12
II.3.2 Equations adimensionnelles	12
II.3.3 Condition aux limites	13
II.3.4 Grandeurs physiques caractérisant le mouvement	13
II.4 Transformation des coordonnées	14
II.4.1 Transformation des équations de transfert	16
CHAPITRE III : MODELISATION NUMERIQUE	
III.1 Introduction	18
III.2 Méthode des volumes finis	18
III.3 Equation générale de transfert	19
III.4 Maillage	20
III.5 Discrétisation des équations de conservation	21
III.6. Discrétisation de l'équation de continuité	22
III.7 Application d'un schéma numérique	24
III.7.1 Méthode itérative de résolution	25
III.7.2 Critère de convergence	28

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 Description des objectifs de notre étude	31
IV.2 Effet du maillage sur la solution numérique	31
IV.3 Validation du code de calcul	31
IV.4 Résultats de la convection naturelle	33
IV.4.1 Champ des vitesses	33
IV.4.2 Champs des températures et des concentrations	36
VI.4.3 Nombre adimensionnelles	39
VI.4.4 Structure de l'écoulement	42

CONCLUSION GENERALE 44**REFERENCE** 46**ANNEXES**

Annexe A :

A.1 Convection naturelle thermique	49
A.2 Convection naturelle massique	49
A.3 Equations générales de la convection naturelle	49
A.4 Equations de la couche limite en convection naturelle	52
A.5 Epaisseur de la couche limite thermique	54

Annexe B :

B.1 Détermination des termes S et b	60
B.2 Détermination de la composante du vitesse	61
B.3 Discrétisation des conditions aux limites	62
B.4 Les étapes d'algorithme de calcul	62

Remerciement

Avant tout nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour qu'on puisse accomplir ce travail.

A notre encadreur Si Abdallah Mayouf Maître de conférence à l'université de M'Sila , pour son aide très précieux qu'elle nous a apporté tout au long de notre préparation de ce mémoire. Qui a bien voulu diriger ce travail.

Je remercie vivement madame Abba Chaker Professeur à L'université Mentouri, Constantine pour L'honneur qu'elle ma fait d'avoir accepter d'examiner mon travail et de présider le jury. Je remercie également mon enseignant Boufandi Toufik Maître de conférence à L'université Mentouri de Constantine et Monsieur Bougriou Cherif Professeur à L'université de Batna, qui ont acceptés d'examiner mon travail.

Je dois par conséquent la totale confiance et la reconnaissance à mes Parents et mon ami pour leur apport moral, leurs conseils et leurs soutiens, qui m'ont toujours réanimé l'envie et le courage de continuer.

Nous tenons aussi à remercie tous ce qui nos ont aidé de pré ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Nomenclature

A : Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées
 b : Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées
 c : Concentration (g.mole.l^{-1})
 C : Concentration adimensionnelle
 c_w : Concentration du fluide à la paroi
 c_∞ : Concentration du fluide à l'extérieur
 C_f : Coefficient de frottement
 C_p : Capacité calorifique du fluide ($\text{J.Kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)
 D : Coefficient de diffusion massique (m^2s^{-1})
 $d\xi_e, d\xi_w, d\eta_n, d\eta_s$: Sont respectivement les distances entre le nœud considéré P et les nœuds E, W, N, S.
 F : Terme de convection dans le système d'équations algébriques discrétisées
 g : Accélération de la gravité (m.s^{-2})
 Gr : Nombre de Grashof
 Gr_t : Nombre de Grashof thermique
 Gr_c : Nombre de Grashof massique
 h : Coefficient d'échange convectif
 h_D : Coefficient d'échange convectif
 k : Conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$)
 L : Longueur caractéristique (m)
 N : Nombre de flottabilité
 Nu : Nombre de Nusselt
 P : Pression (N.m^{-2})
 Pr : Nombre de Prandtl
 Sc : Nombre de Schmidt
 Sh : Nombre de Sherwood
 T : Température (K)
 T_w : Température du fluide à la paroi (K)
 T_∞ : Température du fluide à l'extérieur (K)
 U, V : Composantes des vitesses adimensionnelles
 u, v : Composantes des vitesses dans la direction x et y (ms^{-1})

X, Y : Coordonnées sans dimensions

x, y : Coordonnées cartésiennes (m)

SYMBOLES GRECOUES

β_T : Coefficient de dilatation thermique (compressibilité thermique du fluide) (K^{-1})

β_c : Coefficient de dilatation massique (compressibilité massique du fluide) (K^{-1})

μ : Viscosité dynamique ($Kg.m^{-1}.s^{-1}$)

ν : Viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)

ρ : Masse volumique ($Kg.m^{-3}$)

θ : Température sans dimensions

Φ : Fonction de dissipation ($N.m^{-1}.s^{-2}$)

Γ : Coefficient de diffusion générale

ξ, η : Coordonnées sans dimension dans le domaine dans le repère (ξ, η)

$\Delta\xi, \Delta\eta$: Dimension du volume de contrôle considéré

INDICES INFÉRIEURS

E : Nœud considéré du côté Est du nœud P

e : La face Est du volume de contrôle considéré

N : Nœud considéré du côté Nord du nœud P

n : La face Nord du volume de contrôle considéré

P : Nœud considéré du maillage

S : Nœud considéré du côté Sud du nœud P

s : La face Sud du volume de contrôle considéré

W : Nœud considéré du côté Ouest du nœud P

w : La face Ouest du volume de contrôle considéré

∞ : Position à l'infinie

0 : Etat de référence

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE :

L'écoulement d'un fluide par convection libre ou naturelle est causé par la différence de sa masse volumique. Celles-ci peuvent résulter de gradients de température, de concentration ou de la présence de plusieurs phases. Les écoulements de la convection libre due aux différences de températures peuvent être divisés en deux classes principales :

La première concerne des gradients de température dans la direction horizontale qui résultent d'un chauffage ou d'un refroidissement par le bas ou par le haut ; ce sont les écoulements de Rayleigh-Bénard.

- La deuxième, à la quelle fait l'objet de notre travail, concerne des gradients de température dans la direction verticale provoquée par un chauffage ou un refroidissement par les cotés latéraux.

Le but de ce travail est de présenter une étude numérique de la convection naturelle thermique et massique laminaire et permanente dans la couche limite le long d'une surface verticale avec une force de flottabilité opposée.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, dans le but de situer notre travail, on présente le phénomène de la convection ainsi que quelques rappels bibliographiques en rapport avec le problème posé.

Le seconde chapitre est consacré à la formulation du problème, aux hypothèses simplificatrices et à l'établissement des équations de transfert de chaleur et de masse et des conditions aux limites qui leurs sont associées. Enfin, nous définissons les grandeurs adimensionnelles caractérisant le modèle de ce travail.

L'objet du troisième chapitre, nous présentons la méthode numérique adoptée. Nous avons opté pour la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations aux dérivées partielles. Une transformation homotypique est employée pour transformer la surface non plane en surface plane. L'algorithme de Gauss Seidel [29-35] avec relaxation a été proposé pour résoudre ces équations de transfert.

Le quatrième chapitre est consacré à la confrontation entre les résultats obtenus analytiquement avec ceux obtenus numériquement ainsi qu'à la discussion de ces derniers.

Les résultats numériques obtenus sont présentés sous formes des profils de vitesses, de température et de concentration, ainsi que des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood.

L'effet de la force de flottabilité, des nombres de Prandtl et de Sherwood sur les transferts thermiques et massiques sont également étudiés.

Pour ne pas alourdir le texte, nous présentons, les annexes A et B

Chapitre I

Chapitre I

Etude Bibliographique

Etude Bibliographique

I.1 Introduction

La convection est un mode de transfert d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite, les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte, simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte [1-6]

- **Convection forcée**

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur,...) au système [1-6]

- **Convection naturelle**

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravifique,...) [1-6]

- **Convection mixte**

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur [1-6]

I.2 La convection naturelle

I.2.1 Définition

La convection libre ou naturelle est la forme d'échange convectif la plus couramment observée : au contact d'un corps chaud, la température de l'air augmente, donc sa masse volumique diminue, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse d'air chaud s'élève en enlevant de la chaleur au corps, elle est remplacée par une masse d'air froid qui, au contact au corps, s'échauffe et ainsi de suite.

Le même phénomène peut s'observer pour des corps froids, le mouvement se faisant alors en sens inverse.

I.3 Travaux bibliographiques relatifs au domaine

Le transfert de chaleur et de masse le long d'une surface ont suscité une attention considérable dans ces dernières années en raison de leur importance dans le domaine scientifique tel que la biologie, l'océanographie, l'astrophysique, la géologie et les processus chimiques en tant que ceux rapportées par Fournier 1990 [7] ; Rudes et al [8] ; Marcoux et al 1999 [9] ; Mamou 2003 [10]; Markus 2004). [11]

Dans la nature, les courants libres de convection provoqués par des différences de la température, l'écoulement est également affecté par les différences dans la constitution matérielle, par exemple, dans des écoulements atmosphériques là existent des différences de concentration de H_2O et par conséquent l'écoulement est affecté par une telle différence de concentration. Dans beaucoup d'applications de technologie, les gaz étrangers (H_2O , CO_2 , etc) sont injectés. Ceci cause une réduction de la contrainte de cisaillement, de la conductibilité de transfert de masse ou du taux de transfert thermique.

La convection naturelle sur une plaque a fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales. Parmi lesquelles nous présentons quelques unes que nous avons jugé proches de notre cas.

Somers 1956 ; Mather et al 1957 [12]; Gill et al 1965 [13] ont analysé le même problème du transfert thermique simultané et de la double diffusion sur une surface verticale avec différentes des

conditions ou différents des méthodes numériques. Adams et Fadden 1966 [14] a étudié expérimentalement la convection libre avec une force de flottabilité opposée. Les résultats obtenues

montrent que les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood dépendent de la nature du fluide et de nombre de Schmidt ($Pr < Sc$ et $Pr > Sc$).

Mayouf Si.A . et Zeghamati B. [15] ont analysé numériquement l'effet de la force de flottabilité opposée sur la convection naturelle thermique et massique le long d'un cylindre verticale. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de transfert de chaleur et de masse est les différences finies avec l'algorithme de Gauss Sidel. Les résultats obtenues montrent que l'épaisseur de la couche limite thermique et massique dépend essentiellement de la valeur N ($N = Gr_c / Gr_t$) et de la valeur de Pr et Sc .

Javier L. Lara et al [16], ont étudié numériquement l'effet d'ondulation sur une plaque et un canal verticale. L'étude consiste la validation du modèle numérique à partir de mesures disponibles dans la littérature d'agitation au voisinage de la plaque pour différentes hauteurs d'eau et des conditions des ondulations. La concordance obtenue entre données numériques et expérimentales est bonne. Le modèle simule avec précision les grandeurs essentielles au dimensionnement de la plaque : réflexion, transmission, efforts induits par les ondulations.

Cheng 2005 [17] a utilisé la méthode intégrale pour étudier le problème de la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique transversal. Il a été supposé que la température et la concentration le long de la plaque augmente avec une loi en puissance. Dans ses résultats numériques, il a montré qu'en augmentant la loi de la puissance, on augmente aussi les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood alors qu'en augmentant le champ magnétique, ces derniers diminuent. Le rapport de l'épaisseur de la couche limite thermique et de l'épaisseur de la couche limite massique augmente avec le nombre de Lewis. Il augmente également avec le rapport de force de volume tant que le nombre de Lewis est différent de l'unité.

L'étude entreprise par Guo T. et al. [18] a porté sur l'influence de la convection naturelle sur la convection forcée au-dessus d'une surface plane verticale soumise à un flux de rayonnement thermique. Ils ont considérés un plan vertical semi-infini dont une face est soumise au rayonnement

tandis que l'autre est plongé dans un fluide en écoulement parallèlement à sa surface. L'échauffement du plan par le rayonnement, donne naissance à une convection naturelle dans le fluide qui perturbe l'écoulement forcé. Ces auteurs présents dans le calcul, en régime laminaire et permanent, des distributions des vitesses et de la température, dans la couche limite qui se développe sur le plan à partir de son bord d'attaque.

Vachon M et al [19] ont étudié l'écoulement laminaire permanent en convection naturelle engendré par les effets combinés de chaleur et de masse au voisinage d'une surface verticale humide chauffée par un flux constante q (flux de chauffage pariétal). Deux méthodes numériques sont présentées: la première, approchée, utilise les solutions affines qui décrivent les phénomènes en termes d'une variable de similitude et de quatre paramètres; la seconde est une méthode implicite de différences finies. Une comparaison des deux méthodes est présentée afin de tester les approximations des solutions affines. Cette étude montre l'influence du rapport N (rapport des

forces de pesanteur défini par $N = \frac{\beta^* (C_p - C_c)}{\beta (T_p - T_c)} = \frac{\alpha \beta^*}{\beta}$ ou α : diffusivité thermique) des effets

d'Archimède et fait apparaître un nombre de Grashof combiné qui prend en compte les deux variétés de flux (flux de chaleur latente et flux de chaleur sensible). L'intérêt de tels résultats est de fournir des solutions approchées et des relations de transferts concernant l'évolution de la couche limite dynamique, thermique et massique et de permettre de résoudre simplement les problèmes d'évaporation en convection naturelle.

Mohmed Ali et Al-yousef [20,21] ont étudié l'écoulement d'une couche limite laminaire, en convection mixte, sur une surface verticale présentant une perméabilité linéaire en mouvement. L'investigation traite les cas d'une poussée thermique qui aide ou s'oppose à l'écoulement. Les solutions locales de similitude sont obtenues par les équations de la couche limite. Comme conditions aux limites, ces auteurs ont supposés que les variations de la température et de la vitesse suivent une loi en puissance. L'étude a porté sur l'effet de divers paramètres régissant l'écoulement, tels que le nombre de Prandtl Pr , le paramètre d'injection ou aspiration d et le nombre de Richardson sur les distributions de vitesse, de température et du coefficient de transfert thermique. Des valeurs critiques ont été trouvées et qui sont vérifiées par la solution analytique de l'équation d'énergie.

Mahesh Kumari et al. [22] se sont intéressé au sujet de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien en convection mixte sur une plaque plane mobile et chauffée à une température constante. Le système des équations partielles thermiques et dynamiques régissant l'écoulement est résolu numériquement par la méthode des différences finie, avec un schéma implicite. Ils ont étudié l'effet de divers paramètres entrant dans le transfert thermique pariétale, comme le nombre de Prandtl, le nombre de Peclet et la poussé thermique.

Boulekrune N., Boudebous S. et Zermane S. [23] ont présentés une étude numérique du phénomène de la convection naturelle laminaire dans un canal vertical présentant un élargissement rude, dont les parois latérales sont soumises à une température constante, tandis que la paroi constituant l'élargissement rude est considérée comme adiabatique. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant le phénomène de la convection naturelle ont été discrétises suivant la méthode des différences finies. Ils ont développés un code de calcul pour résoudre le système des équations obtenues par cette discrétisation. Les résultats sont présentés sous formes des champs hydrodynamique et thermique pour différentes valeurs des nombres de Grashof, et différentes valeurs du seuil de l'élargissement rude.

Laroche Lambert [24] a présenté une étude expérimentale et numérique des transferts de chaleur en convection naturelle le long d'une plaque conductrice rayonnante fortement chauffée par un flux de chaleur uniforme (1000 à 8000W.m⁻²) sont obtenus par la méthode thermo anémométrique et pyrométrie. Divers modèles physiques résolus au moyen d'un code de calcul commercial (FLUENT) montre une déstabilisation rapide de la couche limite, attribuée au rayonnement et à la redistribution des flux conductifs dans la plaque, abaissant le nombre de Grashof critique et augmentant l'échange convectif en haut de la plaque.

Mai Ton Hoang et al. [25] ont étudié, en régime transitoire, la couche limite laminaire sur une plaque verticale en convection mixte. Le système d'équations est résolu à l'aide de la méthode numérique aux différences finies, avec un schéma implicite. Ils ont montré que la nature de la plaque influe sur les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique ainsi que sur la vitesse de l'écoulement. Ils ont observé qu'une faible perturbation de vitesse engendre une instabilité de l'écoulement.

Ben Nasrallah S. et al [26] ont étudié l'évaporation en convection naturelle laminaire sur une plaque verticale humide chauffée à densité de flux variable suivant la hauteur. Cette étude faite sous des hypothèses restrictives est conduite par des méthodes semi-analytiques pour la recherche de solution affines et de solutions quasi-affines, moins restrictives que les premières, d'une part, et une méthode de différences finies d'autre part. Des comparaisons entre les différentes méthodes et des résultats dans le cas de l'évaporation de l'eau dans l'air pour différentes valeurs du rapport N des Poussées d'Archimède ($N = Gr_c / Gr_T$) à la paroi sont obtenues. Des résultats sont présentés dans le cas de l'évaporation de l'eau dans l'air pour différentes valeurs de N . L'exploitation de ces résultats a permis d'avoir des expressions approchées pratique de la température et de concentration pariétale et des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux. Une méthode approchée rapide de détermination de N est ensuite présentée.

Mahajan R.L. et Angirasa D., 1993 [27] ont présenté une étude numérique pour la production combinée de convection naturelle thermique et massique sur une surface verticale avec la partie adverse des effets de flottabilité. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de transfert de chaleur et de masse est les différences finies. Une comparaison avec les solutions de similitude montre que l'analyse de la couche limite ne convient que lorsque les deux forces de flottabilité l'une aide l'autre. Pour les flux de s'opposer à l'analyse de couche limite ne prévu pas l'exactitude des taux de transfert. Une comparaison détaillée avec les données expérimentales avec flottabilités adverse montre un bon accord entre les données et les solutions numériques. La chaleur et le taux de transfert de masse des flux de tendances complexes en fonction du rapport de la flottabilité, de nombre de Prandtl, de nombre de Schmidt, nombre de Nusselt global et le nombre de Sherwood sont présentés pour une large gamme de nombre de Grashof thermique, le nombre de la flottabilité et le nombre de Prandtl et Schmidt. Les résultats obtenues montrent que les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood dépendent de la nature du fluide et de nombre de Schmidt ($Pr < Sc$ et $Pr > Sc$).

Chapitre I

Chapitre I

Modèle

Mathématique

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. Nous formulons le problème physique régissant le phénomène de convection naturelle le long d'une plaque verticale avec une force de flottabilité opposée. Nous exprimons les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle et nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

II.1 Présentation du problème

On considère comme il est représenté sur la figure (II.1) une plaque verticale, de longueur semi-finie. Cette dernière est immergée dans un fluide Newtonien. On suppose que le système est initialement en équilibre thermodynamique et soit T_w et C_w est la température et la concentration de la paroi du plaque, T_∞ et C_∞ est la température et la concentration à l'infinie du fluide sont différentes de T_w et C_w . Une convection naturelle thermique et massique prend alors naissance.

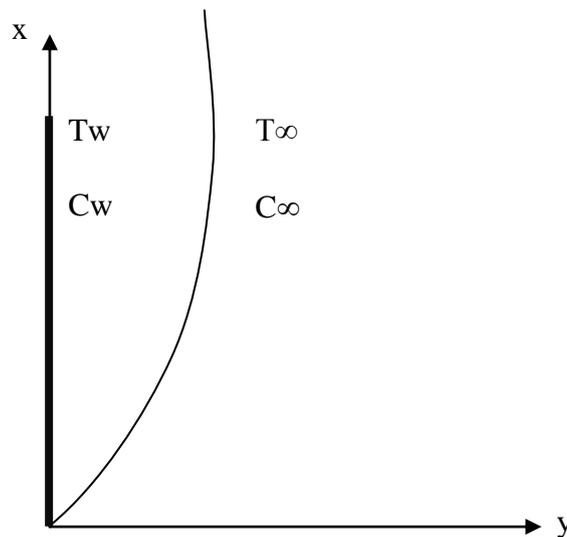


Figure II.1: Représentation schématique du modèle

II.1.1 Hypothèses simplificatrices

La modélisation du système étudié est basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

- 1- L'écoulement du fluide et le transfert de chaleur sont permanents et le régime est laminaire.
- 2- Le fluide est newtonien et incompressible.
- 3- Les propriétés thermo physiques du fluide (μ, C_p, K) sont constantes.
- 4- L'approximation de Boussinesq est valide, celle-ci consiste à considérer les variations de masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantités de mouvement ($\rho = \rho_\infty$), sauf au niveau du terme de gravité.

La variation de la masse volumique en fonction de la température est donnée par Bejan A. et al [1]

$$\rho = \rho_\infty (1 - \beta(T - T_\infty)) \quad (\text{II.1})$$

ρ_∞ : la masse volumique du fluide à la température de référence T_∞

β : le coefficient de dilatation

II.2 Formulation du problème

II.2.1 Equation de conservations

Le système d'équation qui gouverne l'écoulement laminaire en convection naturelle thermique et massique **dans la couche limite** en coordonnées cartésiennes après simplifications s'écrivent comme suit:

- Equation de Continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.2})$$

- Equations de quantités du Mouvement:

✓ Selon (ox)

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta_T (T - T_\infty) + \rho g \beta_c (c - c_\infty) \quad (\text{II.3})$$

- Equation de chaleur :

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.4})$$

- Equation de diffusion :

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (\text{II.5})$$

II.2.2 Condition aux limites

- en $y = 0$

$$u(x, 0) = 0$$

$$v(x, 0) = 0$$

$$T(x, 0) = T_w \quad (\text{Température imposée}) \quad (\text{II.6})$$

$$c(x, 0) = c_w$$

- en $y \rightarrow \infty$

$$u(x, \infty) = 0$$

$$T(x, \infty) = T_\infty \quad (\text{II.7})$$

$$c(x, \infty) = c_\infty$$

II.3 Formulation adimensionnelle

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physique indépendamment des systèmes de mesures, pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un coté et d'un autre coté déduire le nombre de paramètres d'un problème.

En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

II.3.1 Principales grandeurs physiques et variables adimensionnelles

Les variables adimensionnelles choisis sont :

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{L}; & Y &= \frac{y}{L}; & U &= \frac{\rho L}{\mu Gr^{1/2}} u; & P &= \frac{\rho L^2}{\mu^2 Gr} p \\
 V &= \frac{\rho L}{\mu Gr^{1/4}} v; & Gr &= \frac{g \beta_T (T_w - T_\infty)}{v^2} L^3 \\
 \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}; & C &= \frac{c - c_\infty}{c_w - c_\infty}; & N &= \frac{Gr_c}{Gr_t}
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

II.3.2 Equations adimensionnelles

Les équations adimensionnelles de continuité, de quantités du mouvement, d'énergie et de diffusion qui gouvernent le phénomène de la convection naturelle s'écrivent alors :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{II.9}$$

- Equation de quantité de mouvement

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta + NC \tag{II.10}$$

- Equation de la chaleur

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \tag{II.11}$$

Avec $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$ (nombre de Prandtl)

- Equation de diffusion

$$U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \quad (\text{II.12})$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{\nu}{D} \quad (\text{Nombre de Schmidt})$$

II.3.3 Condition aux limites

Les conditions aux limites après adimensionnalisation s'écrivent alors :

-en $Y=0$

$$U(X,0) = 0$$

$$V(X,0) = 0$$

$$\theta(X,0) = 1$$

$$C(X,0) = 1$$

(II.13)

-en $Y \rightarrow \infty$

$$U(X, \infty) = 0$$

$$\theta(X, \infty) = 0$$

$$C(X, \infty) = 0$$

(II.14)

II.3.4 Grandeurs physiques caractérisant le mouvement

A fin de caractériser les transferts de chaleur et d'impulsion nous définissons le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood par les expressions suivants :

- **Nombre de Nusselt**

Ce nombre est une quantité adimensionnelle. Le nombre de Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)$.

En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue

Le nombre de Nusselt local est défini par :

$$\text{Nu}_x = \frac{hx}{k} = -\left(\frac{\text{Gr}}{4X}\right)^{1/4} \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \quad (\text{II.15})$$

Avec :

h : Coefficient d'échange de chaleur par convection.

k : Conductivité thermique de fluide

- **Nombre de Sherwood**

Le nombre de Sherwood est défini par :

$$\text{Sh}_x = \frac{h_D x}{D} = -\left(\frac{\text{Gr}}{4X}\right)^{1/4} \left(\frac{\partial C}{\partial Y}\right)_{Y=0} \quad (\text{II.16})$$

Avec h_D coefficient d'échange de chaleur

II.4 Transformation des coordonnées

Pour pallier la non –uniformité de la surface de calcul, nous utilisons une transformation homotopique qui permet de ramener la surface non plane au une surface plane

Considérons les transformations homotopique définies par :

$$\begin{aligned} \xi &= X \\ \eta &= \frac{Y}{(4X)^{1/4}} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Dans ce qui suit, nous faisons une série de transformation mathématique rendant possible leur résolution numérique dans le domaine rectangulaire de calcul.

$$F(X; Y) \rightarrow F(\xi, \eta)$$

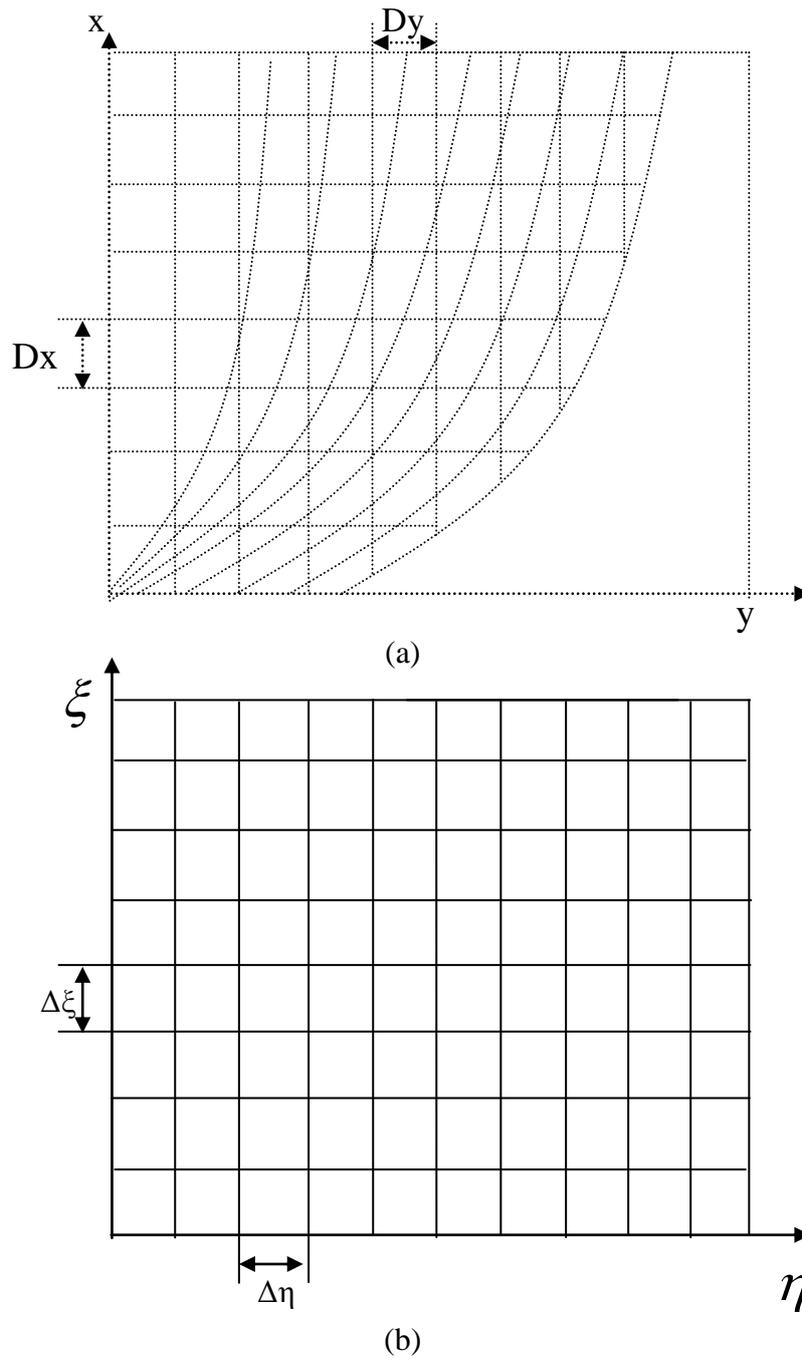


Figure II.2 : (a)- Domaine physique. (b)- Domaine de calcul

Nous exprimons les dérivées par rapport aux coordonnées X et Y en fonction des nouvelles coordonnées (ξ, η)

Pour ce faire, nous faisons appel aux règles de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{-\eta}{(4X)^{1/2}} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{(4X)^{1/4}} \quad (\text{II.19})$$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{(4X)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{(4X)^{1/4}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{II.21})$$

II.4.1 Transformation des équations de transfert

Nous employons les équations de (II.18-II.22) dans les équations (II.9-II.12), nous obtenons les équations de transfert dans le nouveau système suivantes :

- L'équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\eta}{(4\xi)^{1/2}} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.22})$$

- L'équation du mouvement

$$U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{4\xi}} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \theta + \text{NC} \quad (\text{II.23})$$

- L'équation de la chaleur

$$U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{4\xi}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.24})$$

- L'équation de diffusion

$$U \frac{\partial C}{\partial \xi} + \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right) \frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{1}{Sc \sqrt{4\xi}} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.25})$$

en défini $B = \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right)$

et $B_1 = \frac{1}{\sqrt{4\xi}}$

Les équations précédentes deviennent :

- L'équation du mouvement

$$U \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial \eta} = B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \theta + NC \quad (\text{II.26})$$

- L'équation de la chaleur

$$U \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + B \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{B_1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.27})$$

- L'équation de diffusion

$$U \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{B_1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.28})$$

Chapitre II

Chapitre II

Modélisation

Numérique

Dans ce chapitre, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulée dans le Chapitre II.

III.1 Introduction

La discrétisation des équations présentées dans le chapitre précédent traduit le phénomène de convection naturelle et de transfert, ces équations en un système d'équations algébriques.

Plusieurs méthodes de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles sont utilisées actuellement telles que: la méthode des volumes finis, des différences finies et des éléments finis,... etc. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode des volumes finis.

Pour notre problème, le système d'équation est résolu par l'algorithme de Gauss-Seidel [28-34] aux dérivées partielles est discrétisé numériquement par la méthode des volumes finis. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de volume de contrôle ou mailles. Le maillage est non uniforme, les équations de base sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Pour éviter la divergence de la solution, le schéma en loi puissance est utilisé pour évaluer les flux aux interfaces des volumes de contrôle.

III.2 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est caractérisée par son avantage à satisfaire la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans les volumes finis ainsi dans tout le domaine de calcul. Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation tel que le terme source par exemple. La méthode consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes, ou chaque volume entourant un nœud. En utilisant différents schémas d'approximations et on peut intégrer les termes des équations différentielles modélisantes sur chaque volume de contrôle, ou les valeurs et les quantités sont stockées aux nœuds du volume de contrôle.

Ces équations algébriques produites expriment la conservation des quantités pour le volume de contrôle et pour tout le domaine de calcul.

III.3 Equation générale de transfert

Si nous prenons une fonction Φ pouvant, désigner U, θ, C ; alors les équations président (II.26-II.28) peuvent être réunies en une seule équation.

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \Gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + S_0 \quad (\text{III.1})$$

$$\text{Avec } B = \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right)$$

S_0 : Représente le terme de source.

Dans le tableau suivant, nous donnons la définition de Φ, Γ et S_0 pour les équations qui gouvernent notre problème général.

Equation	Γ	Φ	S_0
Quantité de mouvement	$B_1 = \frac{1}{\sqrt{4\xi}}$	U	$\theta + NC$
Energie	$\frac{B1}{Pr}$	θ	0
Concentration	$\frac{B1}{Sc}$	C	0

Tableaux (III.1) Les variables et les coefficients des équations de transfert adimensionnelle.

$$\text{Avec ; } B_1 = \frac{1}{\sqrt{4\xi}}$$

III.4 Maillage

La méthode de discrétisation des équations différentielles partielles nécessite le choix d'un maillage de la géométrie (domaine physique).

Nous avons opté un maillage uniforme dans les deux directions de l'écoulement comme le montre la figure (III.1).

Ce schéma du maillage adopté, est proposé par Patankar [35]

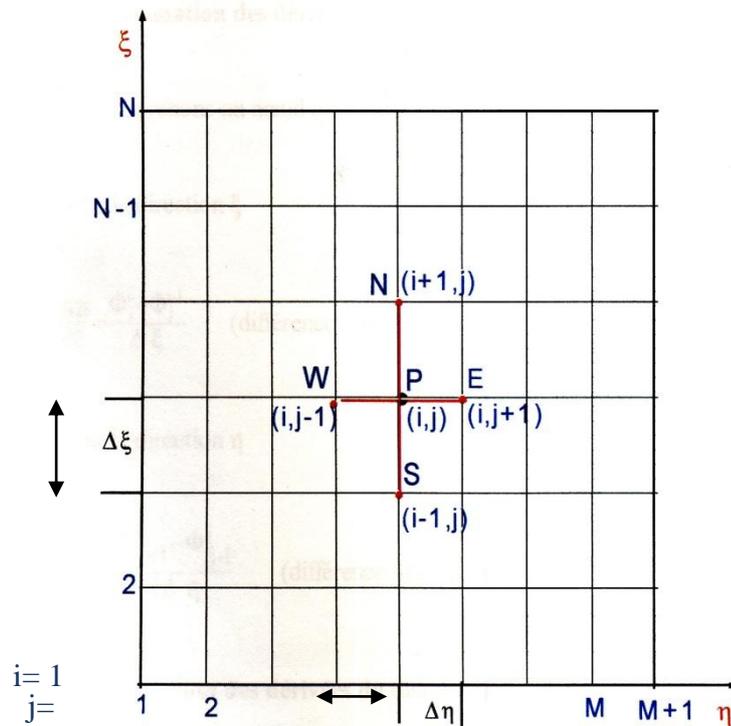


Figure III.1 : Schéma du Maillage

III.5 Discrétisation des équations de conservation

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \Gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + S_0$$

On peut écrire les termes de l'équation (III.1) sous la forme suivante :

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (U \cdot \Phi) - \Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (\text{III.2})$$

$$B \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (B \cdot \Phi) - \Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} \quad (\text{III.3})$$

$$\Gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \quad (\text{III.4})$$

Nous remplaçons les équations (III.2-III.4) dans l'équation (III.1) il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (U \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (B \cdot \Phi) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} + S_0 \quad (\text{III.5})$$

Ou

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (U \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[B \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = S_0 + S_1 \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$S_0 = \theta + \text{NC}$$

$$S_1 = \Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} \quad (\text{III.7})$$

Pour faciliter l'intégration de l'équation (III.6), posons :

$$J_\xi = U \Phi$$

$$J_\eta = B \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

Nous remplaçons ces termes dans l'équation (III.6) il vient :

$$\frac{\partial J_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} = S_0 + S_1 \quad (\text{III.8})$$

On intègre l'équation (III.8) sur un volume de contrôle dv , tel que ($dv=d\xi.d\eta.1$).

$$\oint_V \left(\frac{\partial J_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \oint_V (S_0 + S_1) d\xi d\eta \quad (III.9)$$

$$\int_{s_w}^{n_e} \int \frac{\partial J_\xi}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_{s_w}^{n_e} \int \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} d\xi d\eta = \int_{s_w}^{n_e} \int (S_0 + S_1) d\xi d\eta \quad (III.10)$$

Le résultat de l'intégration de l'équation (III.10) donne :

$$(J_n - J_s)\Delta\eta + (J_e - J_w)\Delta\xi = S \quad (III.11)$$

S est l'intégration de $(S_0 + S_1)$ est calculé dans les annexes

Posons :

$$j_n = J_n \Delta\eta$$

$$j_s = J_s \Delta\eta$$

$$j_e = J_e \Delta\xi$$

$$j_w = J_w \Delta\xi$$

et réécrivons l'équation (III.11), il vient :

$$(j_n - j_s) + (j_e - j_w) = S \Delta\xi \Delta\eta \quad (III.12)$$

III.6 Discrétisation de l'équation de continuité

Nous rappelons l'équation de continuité écrit dans le chapitre II, tel que :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (III.13)$$

On peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right] + U \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} \right) - V \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{(4\xi)^{1/4}} \right) = 0 \quad (III.13)$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right] = -\frac{U}{\sqrt{4\xi}} \quad (III.14)$$

On intègre l'équation précédente sur le volume dv , on a :

$$\iint_{s_w}^n \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi d\eta + \iint_{s_w}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right] d\xi d\eta = \iint_{s_w}^n \frac{U}{\sqrt{4\xi}} d\xi d\eta \quad (\text{III.15})$$

L'intégrale de l'équation précédente donne :

$$(U_n - U_s)\Delta\eta + \left(-\frac{\eta}{4\xi} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_e - \left(-\frac{\eta}{4\xi} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_w = S_2 \quad (\text{III.16})$$

Le terme S_2 se calcule en prenant $S_2 = (S_2)_p = \text{constante}$ pour tout le volume élémentaire dv ; soit :

$$S_2 = \iint_{s_w}^n \frac{U}{\sqrt{4\xi}} d\xi d\eta = \frac{U_p}{\sqrt{4\xi_p}} \Delta\xi \Delta\eta \quad (\text{III.17})$$

Posons :

$$F_n = U_n \Delta\eta$$

$$F_s = U_s \Delta\eta$$

$$F_e = \left(-\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_e \Delta\xi \quad (\text{III.18})$$

$$F_w = \left(-\frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_w \Delta\xi$$

Nous remplaçons ces termes dans l'équation (III.16), il vient :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = S_2 \quad (\text{III.19})$$

On multiplie l'équation (III.19) par Φ_p et on fait la soustraction de l'équation (III.12) , il vient

$$(j_n - F_n \Phi_p) - (j_s - F_s \Phi_p) + (j_e - F_e \Phi_p) - (j_w - F_w \Phi_p) = (S - S_2 \Phi_p) \quad (\text{III.20})$$

Selon Patankar [35], les termes de la partie gauche de l'équation (III.20) peuvent s'exprimer par :

$$\begin{aligned} j_n - F_n \Phi_p &= a_N (\Phi_p - \Phi_N) \\ j_s - F_s \Phi_p &= a_S (\Phi_p - \Phi_S) \\ j_e - F_e \Phi_p &= a_E (\Phi_p - \Phi_E) \\ j_w - F_w \Phi_p &= a_W (\Phi_p - \Phi_W) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Les quantités J_e , J_w , J_n et J_s sont les flux aux interfaces (e, w, n, s). le terme S calculé dans l'annexe B.

Pour évaluer la fonction Φ qui représente U , θ ou C aux interfaces des volumes de contrôle, on utilise le schéma de discrétisation upwind Patankar [35]. Ce schéma est choisi par la façon avec laquelle, on prend en compte les termes de convection et de diffusion. Pour les flux aux interfaces des volumes de contrôle on choisit une interpolation entre les nœuds voisins. Pour simplifier l'équation (III.21) nous appliquons un schéma centré d'ordre deux pour remplacer les dérivés premières sur les facettes du volume de contrôle.

Dans notre étude, on utilise le schéma numérique upwind.

L'importance d'utiliser ce schéma est d'obtenir une meilleure stabilité de la solution numérique.

III.7 Application d'un schéma numérique

La discrétisation des équations précédentes permet d'obtenir un système d'équation dont la forme algébrique générale est :

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (III.22)$$

Tel que:

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_S \quad (III.23)$$

Où

$$a_P \Phi_P = \sum (a_{nb} \Phi_{nb}) + b \quad (III.24)$$

Avec :

Φ est le variable dans l'équation concernée.

Les indices (nb) représentent les nœuds voisins du nœud principal désigné par la lettre P.

a_E, a_W, a_N, a_S et a_P : sont les coefficients correspondants, respectivement aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et le centre du volume de contrôle P.

b : est un terme de source tel que :

$$b = S - S_2 \cdot \Phi_P$$

Où b est bien déterminer dans la relation (B.5), Annexe B

Dans notre problème, les coefficients a_P et a_{nb} sont calculés avec la méthode upwind, tel que :

$$a_E = D_e + \|\text{Fe}, 0\| \quad (\text{III.25})$$

$$a_W = D_w + \|\text{Fw}, 0\| \quad (\text{III.26})$$

$$a_S = D_s + \|\text{Fs}, 0\| \quad (\text{III.27})$$

$$a_N = D_n + \|\text{Fe}, 0\| \quad (\text{III.28})$$

Le symbole $\|\text{F}, 0\|$ signifie que la valeur de l'expression est égale à F, si $F > 0$, et égale 0 dans tous les autres cas et il est équivalent à $\text{AMAX1} \|\text{F}, 0\|$ dans le langage Fortran.

Les coefficients des équations (III.25-III.28) contiennent une combinaison du flux convectif F et de la conductance de diffusion D.

F_e, F_w, F_n et F_s sont les terme convectifs correspondants, respectivement, aux faces Est, Ouest, Nord, Sud.

La valeur de D pour chaque interface w, e, s et n du volume sont données par les relations suivantes :

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta \xi}{\Delta \eta}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (\text{III.29})$$

Dans notre problème,

$$\Gamma_n = 0 \longrightarrow D_n = 0$$

$$\Gamma_s = 0 \longrightarrow D_s = 0$$

D_e, D_w, D_n et D_s sont les terme diffusifs correspondants, respectivement, aux faces Est, Ouest, Nord, Sud.

III.7.1 Méthode itérative de résolution

Il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques, essentiellement les méthodes directes (par exemple Gauss-jordan) et les méthodes itératives (par exemple Gauss-seidel).

La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée, pour cela, on utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative. Elle consiste à déterminer les valeurs de la variable Φ sur chaque ligne du domaine d'étude indépendamment des autres lignes, donc le système unidimensionnel, en ajoutant à la source de la dimension choisie des termes des autres dimensions. Pour résoudre le système d'équation linéaire, nous utilisons l'algorithme de calcul proposé par Nogotov [32] et peut être résolu par une méthode itérative (**Gauss Seidel**) avec coefficient de relaxation Cr.

La fonction Φ_p est déterminé de l'équation générale (III.21) et s'écrit donc sous la forme :

$$\cdot \Phi_p^{k+1} = (1 - Cr) \Phi_p^k + \frac{Cr}{a_p} [a_E \Phi_E^k + a_W \Phi_W^k + a_S \Phi_S^k + a_n \Phi_n^k + b_{i,j}] \quad (III.30)$$

Où k représente le nombre d'itérations et Cr le coefficient de relaxation pouvant être différent d'une équation à une autre.

- **Détermination de la composante de la vitesse U**

Pour déterminer la composante de la vitesse U, il suffit de remplacer Φ dans la relation (III.30) par U, il vient :

$$\cdot U_p^{k+1} = (1 - Cr_1) U_p + \frac{Cr_1}{a_p} [a_E U_E^k + a_W U_W^k + a_S U_S^k + a_n U_n^k + b_j^i] \quad (III.31)$$

Avec ;

$$\begin{aligned} a_E &= D_e + [-F_e | 0] \\ a_W &= D_w + [F_w | 0] \\ a_S &= D_s + [F_s | 0] \\ a_N &= D_n + [-F_n | 0] \end{aligned} \quad (III.32)$$

et

$$a_p = a_w + a_E + a_N + a_S \quad (III.33)$$

Les flux convectifs:

Le terme B est défini par :
$$B = \left(-\frac{\eta}{4\sqrt{\xi}} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)$$

Nous employons l'équation (III.18), on a :

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} [B(i, j+1) + B(i, j)] \cdot \Delta\xi \\ F_w &= \frac{1}{2} [B(i, j-1) + B(i, j)] \cdot \Delta\xi \\ F_n &= \frac{1}{2} [U(i+1, j) + U(i, j)] \cdot \Delta\eta \\ F_s &= \frac{1}{2} [U(i-1, j) + U(i, j)] \cdot \Delta\eta \end{aligned} \tag{III.34}$$

Les flux diffusifs:

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \\ D_w &= \frac{1}{\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \end{aligned} \tag{III.35}$$

• **Détermination de la composante de température θ**

Pour ce là, il suffit de remplacer Φ dans la relation (III.30) par θ et $S_0=0$, il vient :

$$\theta_p^{k+1} = (1 - Cr_2) \theta_p + \frac{Cr_2}{A_p} [a_E \theta_E^k + a_W \theta_W^k + a_S \theta_S^k + a_N \theta_N^k + b_j^i] \tag{III.36}$$

$$a_E = D_e + [-F_e |, 0]$$

$$a_W = D_w + [F_w |, 0] \tag{III.37}$$

$$a_S = [F_s |, 0]$$

$$a_N = [-F_n |, 0]$$

Les flux convectifs sont semblables que les termes de l'équation (III.37)

Les flux diffusifs:

$$D_e = \frac{1}{Pr\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}$$

$$D_w = \frac{1}{Pr\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \quad (\text{III.38})$$

- **Détermination de la composante C**

Pour déterminer C, il suffit de remplacer Φ par C dans la relation (III .30) et $S_0=0$, avec :

$$D_e = \frac{1}{Sc\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}$$

$$D_w = \frac{1}{Sc\sqrt{4\xi_p}} \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \quad (\text{III.39})$$

III.7.2 Critère de convergence

Le critère de la convergence mentionné à l'algorithme de Gauss-Seidel pour l'équation Φ est donné par :

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\Phi_p)^{K+1} - \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\Phi_p)^K}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\Phi_p)^K} \right| \leq 10^{-5}$$

Ou K représente le nombre d'itération.

III.8 Algorithme de calcul

Pour résoudre le problème de la présente étude, nous avons élaboré un programme de calcul écrit en langage Fortran, on suite les étapes de l'algorithme sont déterminés en détail dans le figure (III.3) :

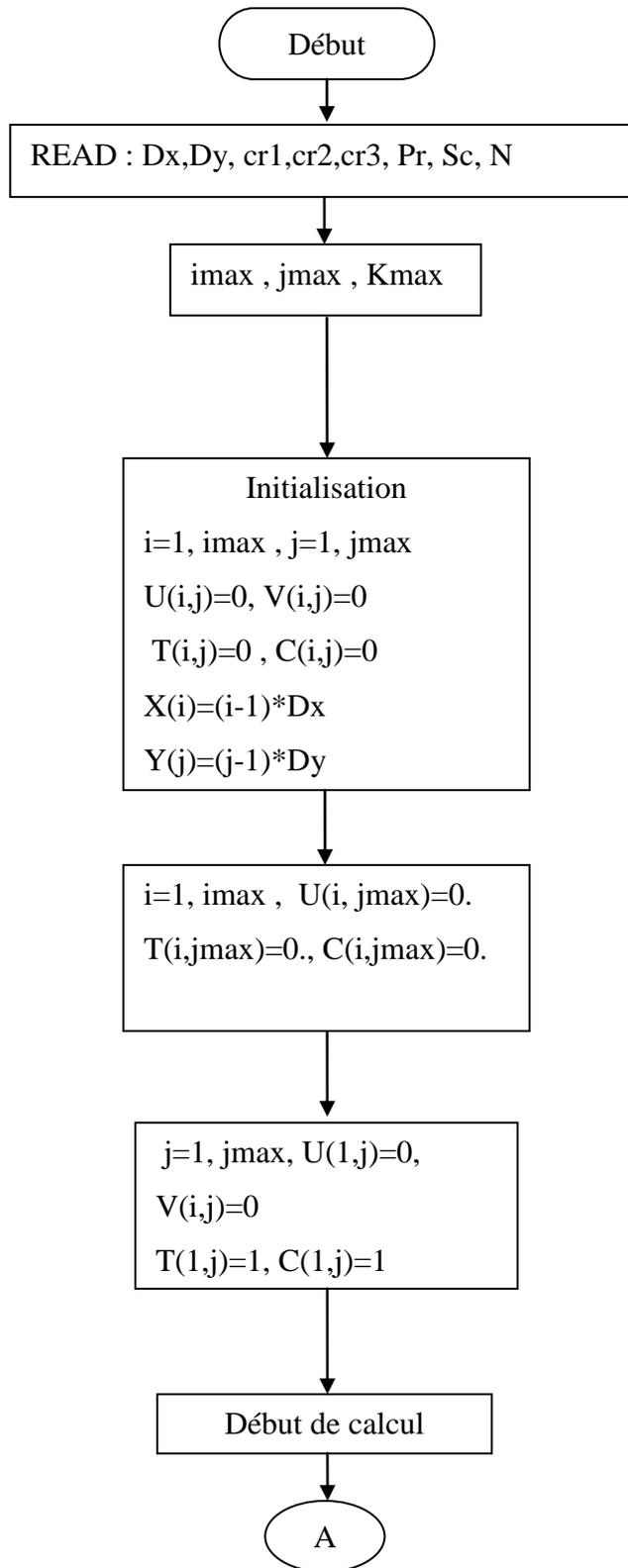
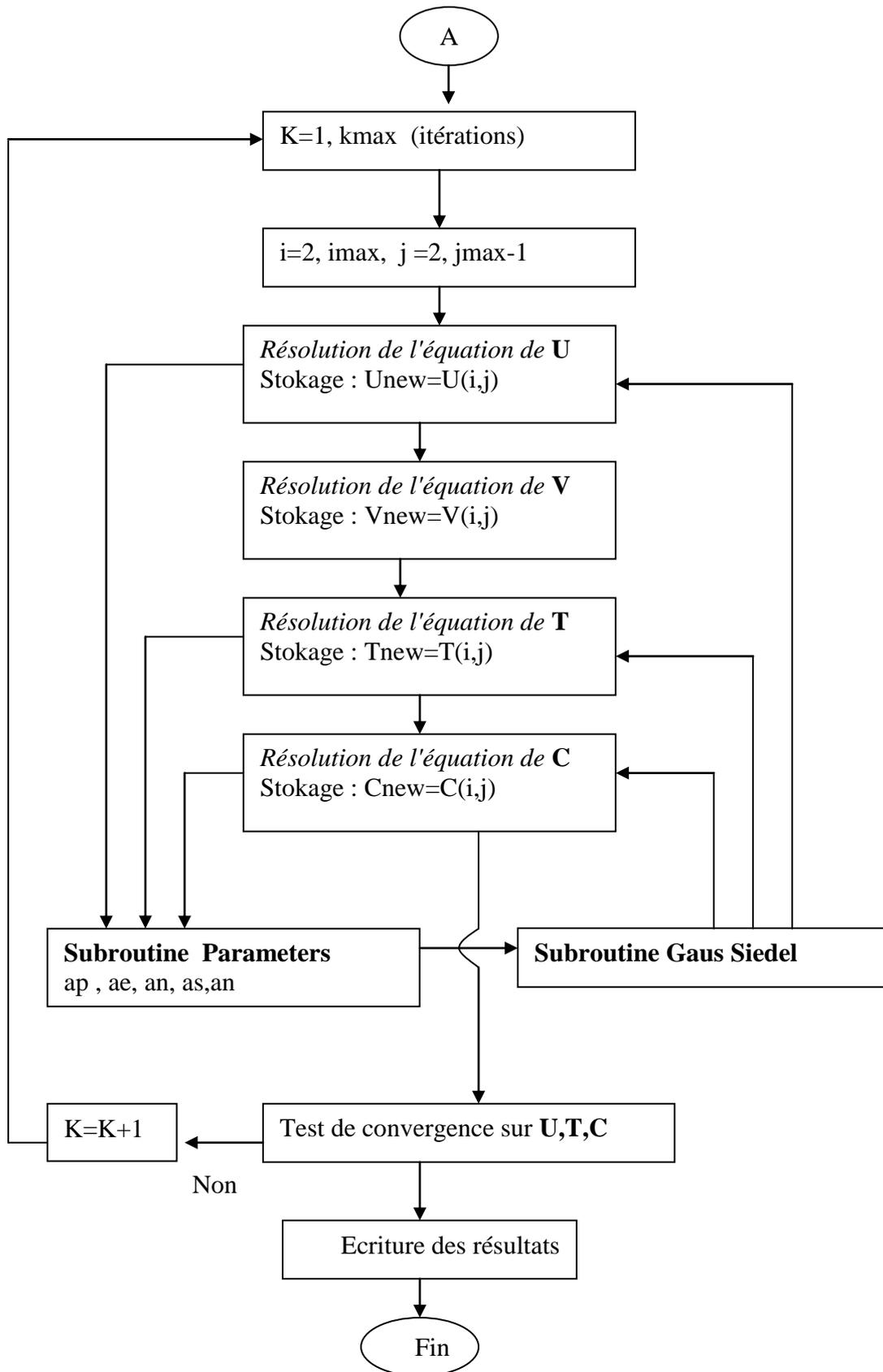


Figure (III.3) : Organigramme de calcul (partie A)



Figure(III.3) : Organigramme de calcul (partie B)

Chapitre 12

Chapitre 12

Résultats

Et Discussions

IV.1 Description des objectifs de notre étude

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'étude numérique de la convection naturelle, stationnaire et bidimensionnelle d'un écoulement du fluide sur une plaque verticale semi infini . L'étude est basée, d'une part, sur les influences du nombre de flottabilité (N) et d'autre part sur les nombres de Prandtl Pr et de Schmidt.

Pour avoir une idée globale du comportement des différents fluides, nous avons choisi comme référence, l'air ($Pr=0.72$) et l'eau ($Pr=7.0$) qui traduisent respectivement le comportement général des gaz et des liquides. Nos calculs ont été effectués pour des valeurs du nombre de Grashof comprises entre 10^4 et 10^7 pour que le régime soit laminaire.

Le phénomène de la convection naturelle est étudié par la variation du nombre de flottabilité (N) entre les valeurs -5 à 5 pour les deux fluides.

Dans notre problème, nous allons étudier deux cas :

- 1) cas d'un nombre de Prandtl est inférieure de nombre de Schmidt $Pr < Sc$
- 2) cas d'un nombre de Prandtl est supérieure de nombre de Schmidt $Pr > Sc$

IV.2 Effet du maillage sur la solution numérique

La valeur des pas du maillage est un facteur important qui dépend directement de la précision des résultats numériques. Dans le but de minimiser l'influence de ce maillage sur la solution, nous avons réalisé plusieurs simulations de teste en comparant les valeurs des nombres de Nusselt et nombres de Sherwood pour tous les cas étudiés.

IV.3 Validation du code de calcul

Pour démontrer la validation et la précision de notre model et de son code numérique, nous avons fait une comparaison avec les résultats obtenus par les auteurs Adams et Mc.Fadden [14] et Mahajan [27]. Ces résultats sont comparés par le nombre de Nusselt et les nombres de Sherwood pour $Pr < Sc$ et $Pr > Sc$.

Pour l'obtention de ces résultats, nous avons fait un test sur le pas de discrétisation suivant les axes (ξ, η) .

Un calcul préliminaire du champ des vitesses en utilisant trois maillages différents a donné des résultats quasi identiques (figIV.1).

Les maillages testés sont :

- 1) $N \times M = 161 \times 190$
- 2) $N \times M = 101 \times 141$
- 3) $N \times M = 91 \times 130$

Pour nos calculs, nous retenons la grille n° 2.

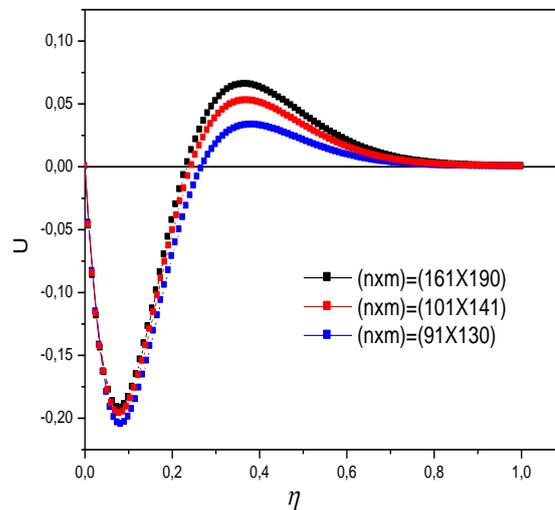


Figure VI.1 : Profile des vitesses U pour certains nombres des maillages ($N=-2$, $Pr < sc$).

Nous comparons d'abord nos résultats numériques pour les nombres de Nusselt Nu et de Sherwood Sh aux données expérimentales ($Pr=0.7$, $Sc=2.23$) pour une écoulement de flottabilité opposée qui ont été obtenues pour une surface verticale par (Adams et McFadden [14]) aussi bien qu'avec les résultats numériques obtenus par (Mahajan et Angirasa [27]). Cette comparaison est présentée dans le Tableau (IV1), nous observons que l'accord entre nos résultats numériques et ceux obtenus par les auteurs est très bon.

	Nu	Erreur (%)	Sh	Erreur (%)
Nos résultats	25.24		41.30	
(Adams and Mc.Fadden 1966) [14]	24.38	3.4	42.10	1.9
(Mahajan and Angirasa 1993) [27]	23.03	8.75	41.44	0.33

Tableau IV.1 : Comparaison du nombre de Nu et de nombre de Sh

L'erreur en (%) est calculée par la relation suivante:

$$\text{Erreur} = 100 \cdot \left| \frac{N_r - N_a}{N_r} \right|$$

Où :

N_r représente Notre résultat et N_a représente les Résultats obtenues par les auteurs

IV.4 Résultats de la convection naturelle

Dans ce paragraphe, Nous avons employé les équations de transfert de chaleur et de masse, les paramètres physiques qui caractérisent l'écoulement ici sont les nombres de Prantl Pr , de Sherwood Sc et le nombre du force de flottabilité N qui est définie par le rapport entre le nombre de Grashof massique et le nombre de Grashof thermique ($N = Gr_c / Gr_t$).

IV.4.1 Champ des vitesses

La figure (IV.2) présente l'effet du nombre de force de flottabilité sur le champ des vitesses et la figure (IV.2.a) présente la variation du profil de la vitesse longitudinale adimensionnelle en fonction du coordonnée adimensionnelle η pour différentes valeurs du nombre de flottabilité N dans le cas de l'air où $Pr < Sc$.

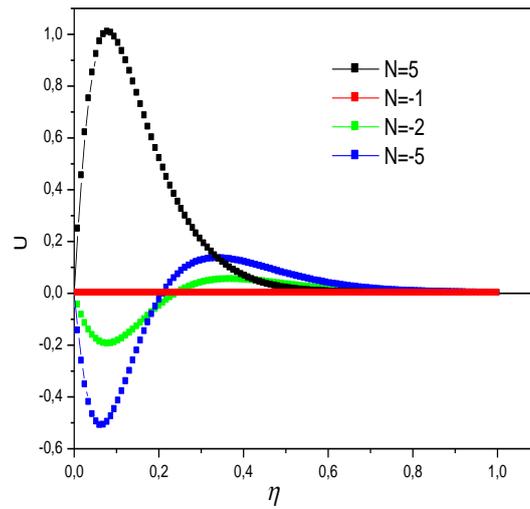
On remarque que l'augmentation du nombre de flottabilité N accélère l'écoulement au voisinage de la paroi. Ce résultat s'explique par le fait que la convection naturelle, apparaissant dans ce cas, augmente la vitesse des particules fluides au voisinage de la paroi. Cette accélération conduit à une diminution de l'épaisseur de la couche limite dynamique.

Comme il est indiqué dans l'équation du mouvement, la partie $N.C$ représente une source de force pour l'écoulement qui est due à la différence de concentration entre la paroi et le fluide. Il est très clair dans la figure (IV.2.a) que la vitesse augmente avec l'augmentation de ce paramètre N .

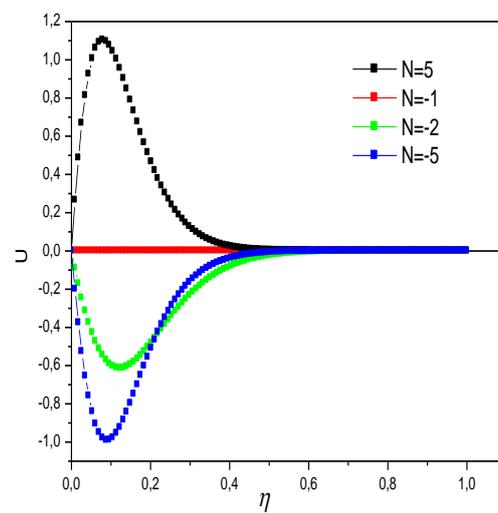
La figure (IV.2.b) présente la variation du profil de la vitesse longitudinale adimensionnelle en fonction du coordonnée adimensionnelle η pour différentes valeurs du nombre de flottabilité N dans le cas de l'eau et $Pr > Sc$.

On remarque que quelque soit le type de fluide air ou eau l'augmentation du nombre de flottabilité N accélère l'écoulement au voisinage de la paroi.

Dans le cas particulier où $N = -1$, on remarque dans les figures (IV.2.a) et (IV.2.b) que le fluide est en état de repos ce qui traduit que les deux forces thermique et massique l'un s'oppose l'autre.



(a)



(b)

Figure IV.2 : Profile de vitesse pour différents nombres de flottabilité N :

(a) : pour $Pr=0.7$, $Sc=5$; ($Pr < Sc$).

(b) : pour $Pr=7$, $Sc=0.22$; ($Pr > Sc$).

IV.4.2 Champs des températures et des concentrations

La variation de la vitesse de l'écoulement dans la convection naturelle est due à la variation de la température et de la concentration.

Les figures (VI.3) et (VI.4) représentent les profils des températures et des concentrations dans la couche limite pour différentes valeurs du rapport de force de flottabilité N pour le cas $Pr < Sc$. On remarque dans ces figures que l'épaisseur de la couche limite thermique et massique diminue quand le rapport N augmente. En effet, l'accroissement du rapport N engendre une augmentation de la convection naturelle massique qui provoque une diminution de la température et de la concentration du fluide dans la couche limite.

Les figures (VI.5) et (VI.6) représentent la variation des températures et des concentrations en fonction du nombre de force de flottabilité N pour le cas $Pr > Sc$. On remarque que quelque soit le type de fluide air ou eau l'augmentation du nombre de force de flottabilité accélère l'écoulement qui conduit à une diminution dans l'épaisseur de la couche limite thermique et massique provoquant ainsi une diminution dans la température et la concentration du fluide.

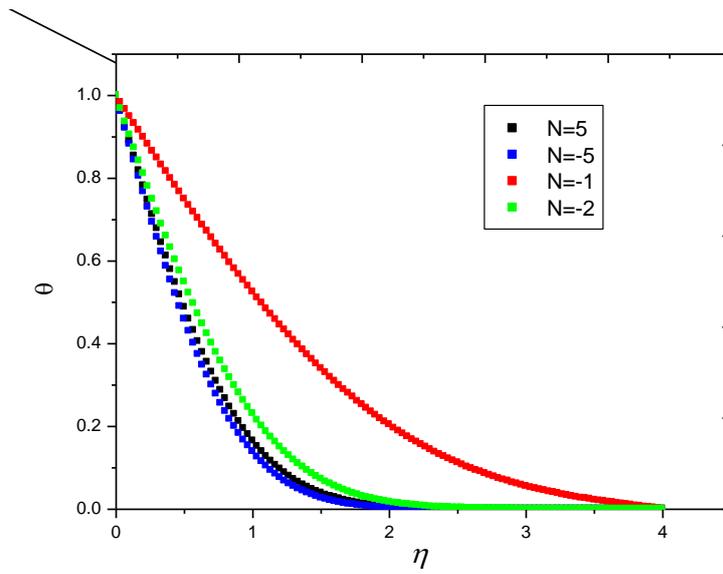


Figure VI.3 : Profile de température pour différents nombres de flottabilité N ($Pr=0.7, Sc=5$)

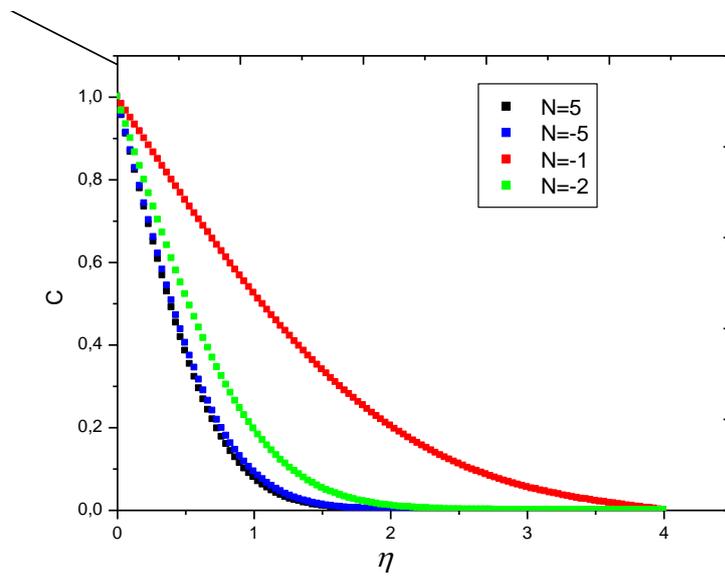


Figure VI.4 : Profile de concentration pour différents nombres de flottabilité N ($Pr=0.7, Sc=5$)

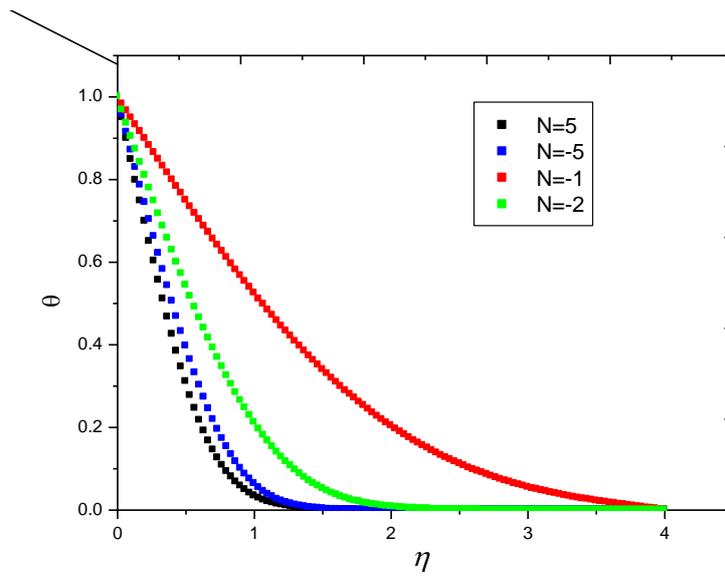


Figure VI.5 : Profile de température pour différents nombres de flottabilité N ($Pr=7, Sc=0.22$).

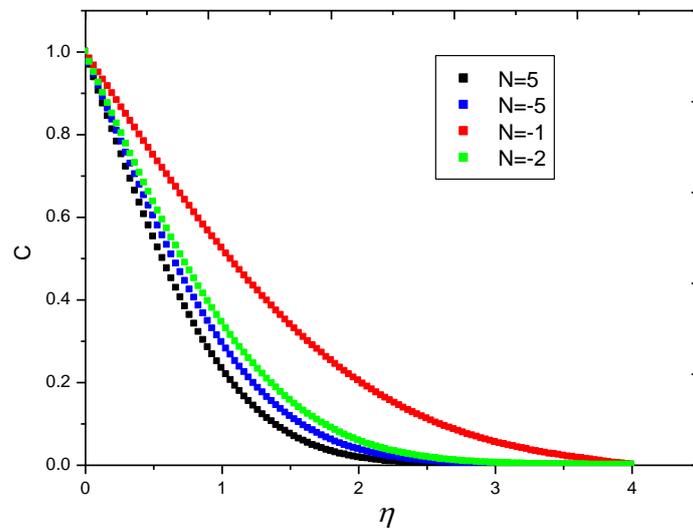


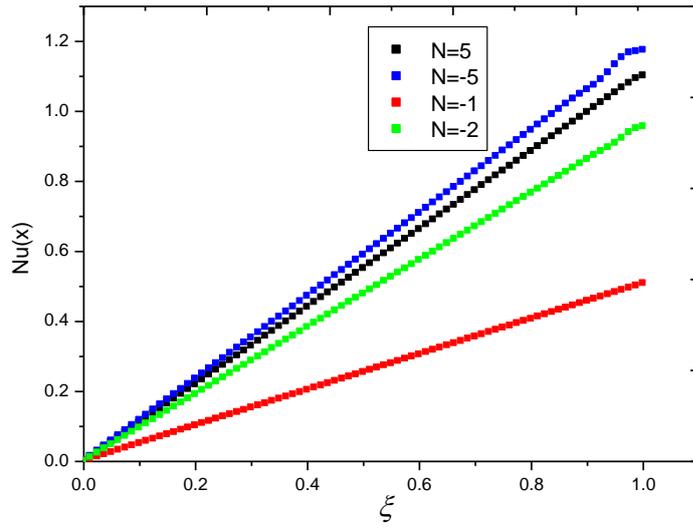
Figure VI.6: Profile de concentration pour différents nombres de flottabilité N ($Pr=7, Sc=0.22$).

VI.4.3 Nombre adimensionnelles

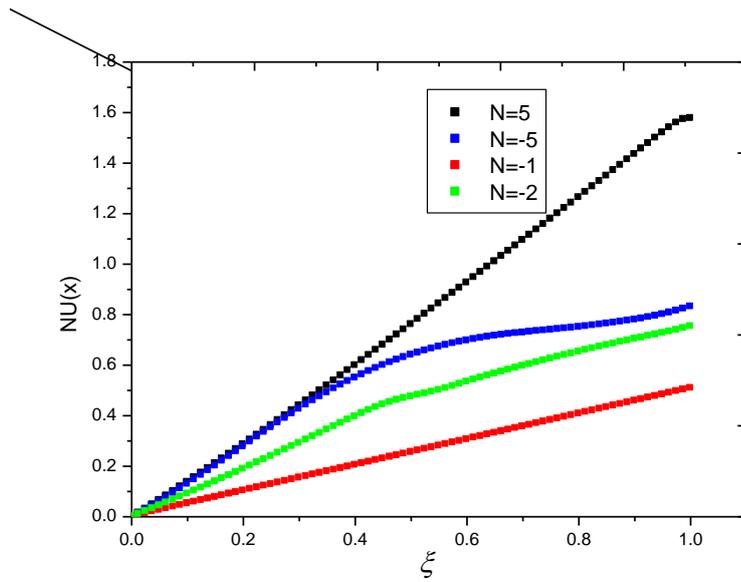
Les figures (VI.7) et (VI.8) illustrent la variation des nombres locaux de Nusselt et de Sherwood pour différents nombres de flottabilités N . Les nombres adimensionnels de Nusselt et de Sherwood sont dépendants des champs des températures et de concentration successivement.

On remarque que Les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood augmentent avec le rapport entre les forces volumiques d'origine massique et celles d'origine thermique.

En effet, les grandeurs de transferts de chaleur et de masse dans la couche limite développée le long de la plaque sont proportionnelles à la différence entre les températures et les concentrations de la paroi du milieu ambiant.



(a)

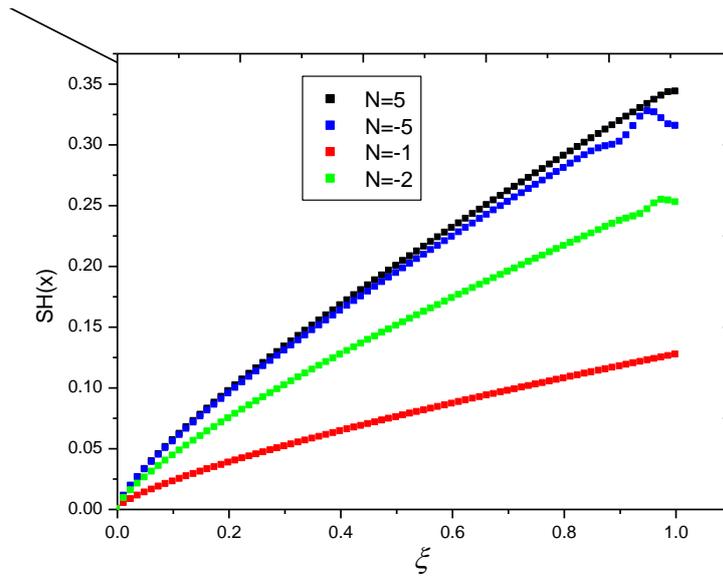


(b)

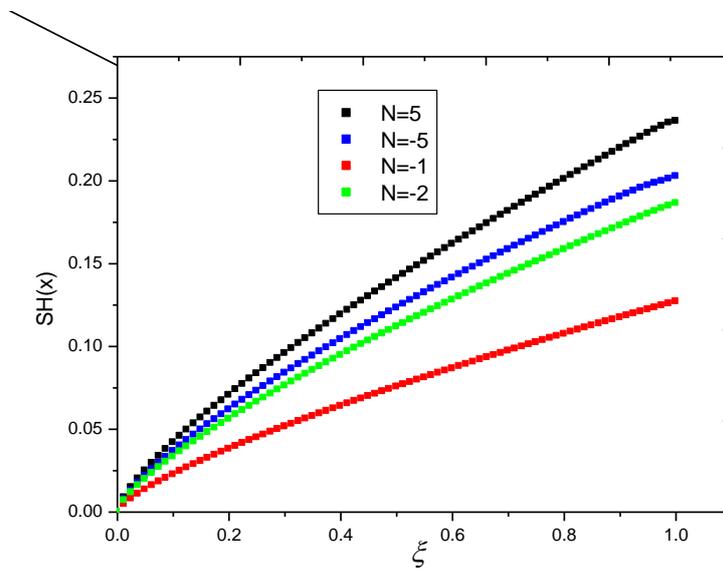
Figure IV.7 : Profil de nombre de Nusselt pour différents nombres de flottabilité N

(a) : pour ($Pr=0.7, Sc=5$)

(b) : pour ($Pr=7, Sc=0.22$)



(a)



(b)

Figure IV.8 : Profile de nombre de Scherwood pour différents nombres de flottabilité N

(a) : pour (Pr=0.7,Sc=5)

(b) : pour (Pr=7,Sc=0.22)

VI.4.4 Structure de l'écoulement

La structure de l'écoulement pour $N=-2$ et pour différentes cas des nombres de Prandtl Pr et de Schmidt Sc est présenté dans les figures IV.9 et IV.10.

On remarque pour $Pr < Sc$ (Fig. IV.9) que l'écoulement descende près de la paroi de la plaque (vitesse négative) parce que dans ce cas la force massique est plus important que la force thermique tandis que l'écoulement et reverse loin de la paroi (vitesse positive) où la force thermique est supérieur que la force massique.

Dans le cas contraire où $Pr > Sc$ (Fig. IV.10), on observe que l'écoulement est absolument descende de haut vers le bas (vitesse négative) ce qu'explique que la force massique est supérieur que la force thermique.

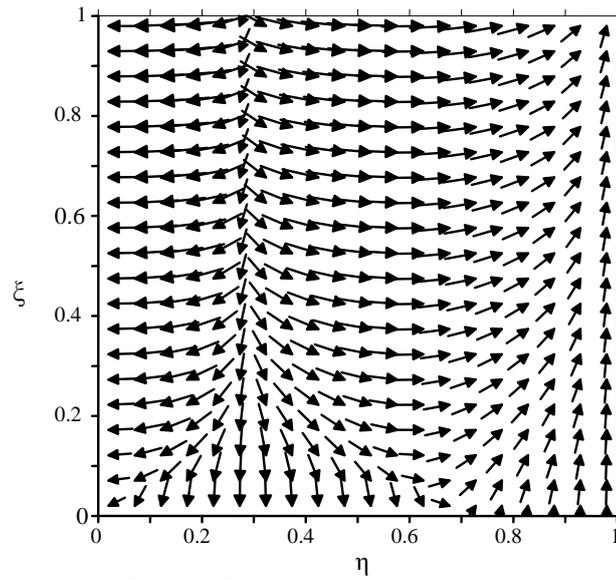


Figure IV.9 : Contours pour $N=-2$, $Pr=0.7$, $Sc=5$; ($Pr < Sc$).

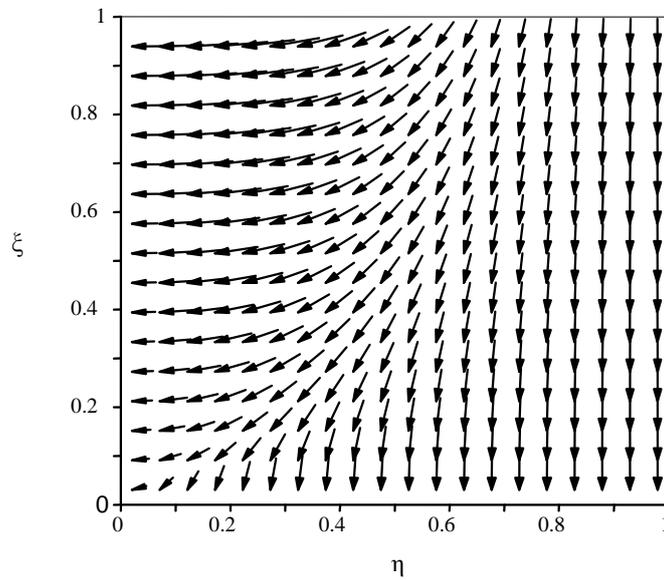


Figure IV.10: Contours pour $N=-2$, $Pr=7$, $Sc=0.22$; ($Pr > Sc$)

Conclusion

Générale

L'étude présentée dans ce mémoire a porté sur l'étude de la convection naturelle thermique et massique le long d'une plaque verticale avec une force de flottabilité opposée est soumise à une température et une concentration constante différente à celle du milieu ambiant.

Nous avons cherché à déterminer plus particulièrement les champs hydrodynamiques, thermique et massique compris la variation du transfert thermique et massique. Les simulations ont été faites avec des nombres de Grashof thermique et massique variant entre 10^4 et 10^7 pour que le régime soit laminaire dans ce domaine de calcul.

Le domaine physique est transformé en un domaine rectangulaire en utilisant les transformations homotypiques. Les équations de transfert de la couche limite et les conditions aux limites ont été discrétisées avec une méthode de volume fini et ont été résolues par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Le modèle mathématique et le programme de calcul qui ont été élaborés dans notre travail ont été testés pour les cas $Pr < Sc$ et $Pr > Sc$. Les résultats obtenus concernant les champs des vitesses, des températures et des concentrations ainsi que le nombre de Nusselt et nombre de Sherwood sont en conformité avec les résultats obtenus de la littérature [14,27] pour la validation de notre code de calcul.

Nous rappelons que nous avons donné essentiellement les résultats des calculs pour l'air et l'eau, car ce sont les fluides les plus utilisés. Cependant, les hypothèses sur lesquelles est basé notre modèle mathématique le rendent applicable à d'autres fluides newtoniens.

Les équations gouvernantes régissant le phénomène sont résolues numériquement avec un code de calcul basé sur la méthode de volume fini. Le test de validation de notre programme de calcul est justifié grâce à la bonne concordance trouvée entre nos résultats et ceux de la littérature.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du nombre de force de flottabilité N conduit à une augmentation de ces nombres adimensionnels.

La synthèse des résultats nous permet de tirer les points suivants :

- Nos calculs sont appropriés très bien pour le nombre de Nusselt avec les résultats obtenus par les auteurs.
- Les nombres de Nusselt et de Sherwood augmentent avec l'augmentation de la valeur absolue du nombre de flottabilité N . Cela implique que le transfert thermique et massique augmente avec le taux de la force de flottabilité
- La solution de la couche limite ne rapporte pas les solutions exactes pour des écoulements libres avec une force de flottabilité opposée pour $Pr < Sc$. Dans ce cas, l'écoulement est inversé près de la surface et exagère l'importance des vitesses ascendantes.

Références

- [1] Bejan A., Allan D., Kraus., " Heat transfer handbook", TJ250.B35, (2003).
- [2] Robert S.B., Harry C.H., "Transport phenomena", International Edition, (2003).
- [3] Lieni IqrI J. II. , "A heat transfer textbook", Third Edition, (2003).
- [4] Jean T., "Transferts couples dans les fluides", Editions DUNOD, paris, (2003).
- [5] Jean T., Jean P., "Transferts thermiques et massique", Editions DUNOD, paris, (2004).
- [6] Ismail T., "Modelling in transport phenomena", Elsevier Science B.v, (2002).
- [7] Fournier R.O., "Double-diffusive convection in geothermal systems: the salton sea", California, Geothermal system as a likely candidate Geothermics, Vol.19, No. 6, pp. 481–496, (1990).
- [8] Rudels B., Björk G., Muench R.D. and Schauer U., "Double-diffusive layering in the eurasian basin of the arctic ocean", Journal of Marine Systems, Vol. 21,pp. 3–27, (1999).
- [9] Marcoux M., Charrier-Mojtabi, M.C. and Azaiez M., "Double diffusive convection in an annular vertical porous layer ", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 42, No. 13, pp. 2313–2325, (1999).
- [10] Mamou M., "Stability analysis of the perturbed rest state and of the finite amplitude steady double-diffusion convection in a shallow porous enclosures", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, No.12, 2263–2277, (2003).
- [11] Markus M., "Double-diffusive convection:A simple demonstration", Journal of Chemical Education., Vol. 81, No. 4, pp. 526–529, (2004).
- [12] Some E.V., "Theoretical considerations of combined heat and masse transfer from a vertical Flat Plate ", Aeme journal of Applled Mechanics.Vol.23, pp.295-301, (1956).
- [13] Gill E.D. Casal et D.H. zeh,Int.J.Heat Mass Transfer 8,1135, (1965).
- [14] Adams J.A., McFadden P.W., "Simultaneous heat and mass transfer in free convection with opposing body forces ", AICHE, Journal, Vol. 12, pp. 642-647, (1966).
- [15] Mayouf Si.A., Zeghmati B., "Numerical study of laminar natural convection in the boundary layer around a vertical cylinder with opposing buoyancies", Int.Comm. In Heat Transfer (ICHT-08), Marrakach, Maroc, 11-16 Mai, (2008).
- [16] Javier L. Lara., "Analyse numérique de l'interaction de la houle avec une plaque verticale", Xème Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil, Sophia Antipolis, 14-16 octobre, (2008).
- [17] Cheng C-Y. "An integral approach for hydromagnetic natural convection heat and mass transfer from vertical surfaces with power-law variation in wall temperature and concentration in porous media", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 32,204-213, (2005).

- [18] Guo T., Bachrunr., Dagenet M., "Influence de la convection naturelle sur la convection force au-dessus d'une surface plane verticale soumise a un flux de rayonnement", *Int.j.Heat Masse Transfer*. Vol.25,No. 7,pp.1061-1065, (1982).
- [19] Vachon M., Arnaud G et Peube J.L., " Evaporation en convection naturelle", *Revue Phys, Appl.*15. 424-431, mars (1980).
- [20] Mohmed Ali., Fahd Al-Yousef., "Laminar mixed convection boundary layers induced by a linearly stretching permeable surface", *Int. J. Heat and Mass Transfer* 45, 4241-4250, (2002).
- [21] Mohmed Ali., Fahd Al-Yousef, "Laminar mixed convection from a continuously moving vertical surface with suction or injection boundary", *Int. J. Heat and Mass Transfer* 33, 301-306, (1998).
- [22] Mahesh Kumari., Girishwar Nath, "Conjugate mixed convection transport from a moving vertical plate in a non-Newtonian fluid", *International Journal of Thermal Sciences* 45, 607-614, (2006).
- [23] Boulekrune N., Boudebous S et Zermane S., "Etude numérique de la convection naturelle laminaire dans un canal vertical comportant un élargissement brusque", *Sciences Technologie B-N°24*, pp. 37-46, décembre, (2005).
- [24] Laroche Lambert., "Etude expérimentale et numérique des transferts de chaleur en convection naturelle le long de paroi verticale épaisses rayonnantes fortement chauffées", *Congrès français de Thermique, SFT 2000*, Lyon, 15-17 mai, (2000).
- [25] Mai Ton Hoang., Zebiri R., Lorenzo T., "Convection mixte en régime transitoire de couche limite laminaire sur une plaque verticale", *C.R. Acad. Sci. Paris, t.329.Série II b*, p. 627-631, (2001).
- [26] Ben Nasrallah S., Arnaud G. et Trad A. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* Vol. 36, January, (1985).
- [27] Mahajan R.L., Angirasa D., "Combined heat and mass transfer by natural convection with opposing buoyancies", Vol.115, *AUGUST*, (1993).
- [28] Anderson., Tannehill., Pletcher., "Computational fluid mechanics and heat transfer", Hemisphere Publishing Corporation, (1984).
- [29] Patankar S.V., "Computation of conduction and duct flow heat transfer", Innovative research.
- [30] Patankar S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere publishing corporation, MACGRAW Hill book company, (1980).
- [31] Wincowycz., Sparrow, Schneider and Pletcher, "Handbook and numerical heat transfer", Willy Inte. Science, (1988).
- [32] Nogotov, E.F., "Application of numerical heat transfer", Mc Graw Hill book company, New York, (1978).

- [33] Cebici T., Bradshaw P., "Physical computational aspects of convective heat transfer", Springer Verlag, New York, (1984).
- [34] Gordan A., Boumahrat M., "Méthodes numériques appliqués", Office des publications Universitaires" ALGERIE, octobre, (1991).
- [35] Patankar S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", series in computational methods in mechanics and thermal sciences, (1980).
- [36] Saccadura J.F., " Initiation au transfert thermique", Technique et documentation, Lavoisier, (1982).

Annexes

A.1 Convection naturelle thermique

La convection naturelle ou libre est la forme d'échange convective le plus couramment observé. Au contact d'un corps chaud, la température du fluide augmente et sa masse volumique décroît. Le fluide ambiant, de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse du fluide chaud s'élève en enlevant de la chaleur au corps. Le même phénomène peut s'observer pour des corps froids, le mouvement s'effectue en sens inverse.

A.2 Convection naturelle massique

Les fluides peuvent être des mélanges de plusieurs espèces. Par exemple :

- réacteur chimique : plusieurs espèces réagissent chimiquement ; il s'agit principalement de la convection massique forcée.
- moteur à combustion : un mélange réactif air - carburant.
- chaudière : eau en ébullition, soit un mélange eau - gaz.
- fumée industrielle : mélange de polluants (gaz, gouttes ou particules).

A.3 Equations générales de la convection naturelle

En convection naturelle, le transfert d'impulsion est couplé au transfert de chaleur ou de matière. En d'autres termes, l'équation du mouvement ne peut pas être résolue indépendamment de l'équation de la chaleur ou de la matière.

Ecrivons les équations fondamentales de conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie et de la matière d'un fluide en supposant, comme, dans de notre travail, la convection résulte soit d'une variation de la masse volumique produite par une différence de température du fluide ou d'un gradient de la concentration des constituants de ce fluide.

- Equation de Continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

- Equation du mouvement

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right\} = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left(\mu \vec{\nabla} \vec{V} \right) + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \quad (\text{A.2})$$

- E Equation de l'énergie

$$\rho \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) E \right] = \vec{\nabla} \left(\underset{\downarrow 1}{k} \vec{\nabla} T \right) + \underset{\downarrow 2}{Q} - \underset{\downarrow 3}{\rho} \underset{\downarrow 4}{\vec{\nabla}} \underset{\downarrow 5}{\vec{v}} + \Phi \quad (\text{A.3})$$

Les termes (1) à (5) désignent respectivement la variation de l'énergie interne, la densité du chaleur par conduction, la densité du flux de chaleur générée par les sources de chaleur, l'effet de la pression et les pertes de chaleur par effet visqueux.

- Equation de transfert de masse

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) c = \vec{\nabla} \left(D \vec{\nabla} c \right) \quad (\text{A.4})$$

Dans la plupart des cas usuels. Les propriétés physiques μ, k, D peuvent être considérées comme constantes. En outre, les équations (A.1-A.4) peuvent faire l'objet de simplifications lorsque le fluide est compressible, c'est-à-dire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq [36]. Sous ces simplifications, les équations précédentes deviennent :

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right) \right] = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) E \right] = k \Delta T + Q - p \vec{\nabla} \vec{v} + \Phi \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) \mathbf{c} = D \Delta \mathbf{c} \quad (\text{A.8})$$

Etant donné que :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) \mathbf{E} \right] = \rho \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (\text{A.9})$$

L'équation de l'énergie devient alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{E}}{dt} = k \Delta T + Q - \rho \vec{\nabla} \vec{v} + \Phi \quad (\text{A.10})$$

Introduisons l'enthalpie par unité de masse du fluide :

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} + \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.11})$$

$$\rho \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{A.12})$$

L'enthalpie étant fonction de p et T, on a :

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

En introduisant, les relations thermodynamiques suivantes :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \right)_p = C_p \quad ; \quad \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \right)_p = \frac{1}{\rho} (1 - T \beta_T) \quad ; \quad \beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.14})$$

Et en remplaçant, les expressions (A.14) dans l'équation (A.13), on obtient :

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (1 - T \beta_T) \frac{dp}{dt} \quad (\text{A.15})$$

A l'aide de l'expression (A.14), l'équation (A.12) se réduit à :

$$\rho \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - T \beta_T \frac{dp}{dt} \quad (\text{A.16})$$

La forme de l'équation de l'énergie est donc :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(k \vec{\nabla} T \right) + Q + \beta_T T \frac{dp}{dt} + \Phi \quad (\text{A.17})$$

Nous pouvons faire d'autres approximations sur l'équation du mouvement (A.6) et de la chaleur (A.17). On considère que l'écoulement est permanent, l'absence de source de chaleur dans le fluide, les termes de dissipation visqueuse et de travail de la pression sont négligeables. Les équations de transfert se réduisent à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{A.19})$$

$$\rho C_p \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) T = k \Delta T \quad (\text{A.20})$$

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) c = D \Delta c \quad (\text{A.21})$$

A.4 Equations de la couche limite en convection naturelle

Dans le cadre des hypothèses de couche limites, les équations de la convection naturelle bidimensionnelle pour un écoulement laminaire externe sur une surface de géométrie à symétrie axiale sont exprimées par les équations de la couche limite. A savoir, l'équation de continuité, la projection de l'équation du mouvement suivant (ox), l'équation de la chaleur et l'équation de diffusion convective de l'espèce diffusante.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g_x \quad (\text{A.23})$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho C \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (\text{A.25})$$

Le système de coordonnées (oxy) est représenté sur la figure (II.1). Les composantes de la vitesse u et v sont dirigées respectivement suivant les axes x et y . L'origine du repère est située au sommet du cône. Pour une couche limite en convection naturelle, le gradient de pression suivant y est nul, la pression totale p est égale à la pression du fluide au repos, c'est-à-dire à la pression statique p_s . La dérivation par rapport à x de la pression est exprimée par :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_x}{dx} = \rho_e g_x \quad (\text{A.26})$$

L'équation du mouvement devient :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\rho - \rho_e) g_x \quad (\text{A.27})$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation traduit la différence entre la densité volumique locale et celle de l'écoulement potentiel et peut être calculée à l'aide de l'approximation de Boussinesq :

$$(\rho - \rho_e) = -\rho_e \beta_t (T - T_e) - \rho_e \beta_c (c - c_e) \quad (\text{A.28})$$

Ainsi, l'équation du mouvement suivant ox , se transforme à :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho_e \beta_T (T - T_e) g_x - \rho_e \beta_c (c - c_e) g_x \quad (\text{A.29})$$

A.5 Epaisseur de la couche limite thermique

A.5.1 Hypothèses et mise en équation

Dans ce paragraphe, nous allons analyser l'effet de quelques grandeurs physiques sur l'épaisseur de la couche limite dans le cas d'un transfert thermique le long d'une plaque plane verticale chauffée, placée dans un fluide newtonien. Au voisinage de la plaque, deux couches limites dynamique et thermique se développent. Elles ont respectivement pour épaisseur $\delta(x)$ et $\delta_t(x)$, supposées très petites devant la longueur L de la plaque.

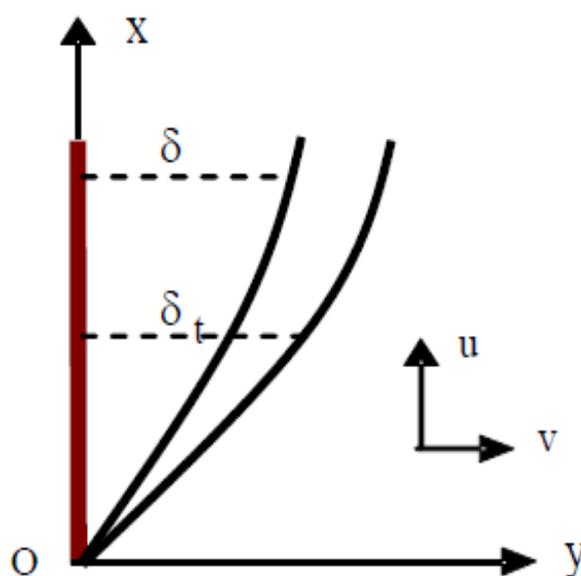


Figure A.1 Couche limite thermique et dynamique

Soit oxy un repère cartésien dont l'origine est situé au bord d'attaque de la plaque. En posant $\Delta = \delta/L$, $\Delta_t = \delta_t/L$ les études théoriques et les observations expérimentales ont montré que pour une couche limite Δ et Δ_t sont très petites devant l'unité.

A.5. 2 Quelques ordres de grandeurs

On considère une convection naturelle thermique se développant le long d'une paroi verticale.

Sous l'approximation de Boussinesq, les équations de transfert s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{A.31})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A.32})$$

Les champs dynamiques et thermiques sont déduits de la résolution des équations (A.30-A.32).

Nous avons trois grandeurs à évaluer u , v et T . Posons δ_t est l'épaisseur de la zone non isotherme où le fluide est soumis aux forces de poussée d'Archimède ; u_c et v_c les ordres de grandeur des composantes longitudinale et transversale de la vitesse dans la couche limite.

En remplaçant ces ordres de grandeurs de vitesses dans l'équation de continuité (A.30), on obtient :

$$\frac{v_s}{\delta_t} \approx \frac{u_s}{L} \quad (\text{A.33})$$

L'égalité ci-dessus montre que les deux termes du premier membre de l'équation de l'énergie (A.32) sont du même ordre :

$$\frac{v_s}{\delta_t} \Delta T \approx \frac{u_s}{L} \Delta T \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \quad (\text{A.34})$$

Cette dernière égalité permet d'établir deux relations entre u_c , v_c et δ_t :

$$u_s \delta_t^2 \approx \alpha L \quad \text{et} \quad v_s \delta_t \approx \alpha \quad (\text{A.35})$$

Maintenant, il nous reste à trouver les expressions des ordres de grandeurs des composantes de la vitesse et de l'épaisseur de la couche limite, en se basant sur l'équation du mouvement (A.31), soit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{A.36})$$

↓ ↓ ↓ ↓

$$u_c^2/L \quad \nu u_c/\delta_t \quad \nu u_c/\delta_t^2 \quad g\beta\Delta T$$

En divisant les deux membres de cette équation par $\nu u_c/\delta_t^2$ et en tenant compte des relations (A.35), on obtient :

$$\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr} \approx 1 + \frac{g\beta\Delta T^2}{\nu u_c} \quad (\text{A.37})$$

Trois cas distincts se présentent et peuvent être envisagés selon la valeur du nombre de Prandtl du fluide.

A.5. 2.1 Fluides aux très petits nombres de Prandtl

Cette situation concerne les fluides très peu visqueux ou bon conducteurs de la chaleur, par exemple, cas des métaux liquides. Les forces d'inertie sont très grandes comparées aux forces de viscosité. Ce sont donc les forces d'inertie qui équilibrent les forces de poussées d'Archimède. Par conséquent, nous pouvons déduire de l'équation (A.36) :

$$\frac{u_c^2}{L} = g\beta\Delta T \quad (\text{A.38})$$

Soit :

$$u_c^2 \approx \frac{g\beta\Delta T}{\alpha l} \frac{\nu}{L} \frac{\alpha^2}{L} \quad (\text{A.39})$$

On obtient donc l'ordre de grandeur des trois inconnues principales, à savoir :

$$u_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/2}$$

$$\nu_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \quad (\text{A.40})$$

$$\delta_t = L(\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{-1/4}$$

On déduit aussi que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme [36] :

$$\text{Nu} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \quad (\text{A.41})$$

Notons qu'il existe une grande différence entre la convection naturelle et la convection forcée. En convection naturelle, les forces de poussée d'Archimède existent tant qu'il y a un gradient de température. C'est-à-dire, l'épaisseur de la couche limite dynamique δ est au moins égale à celle de couche limite thermique. Or, les effets visqueux étant négligeables, on ne peut pas s'attendre à une extension supplémentaire de la couche limite dynamique, par conséquent $\delta = \delta_t$.

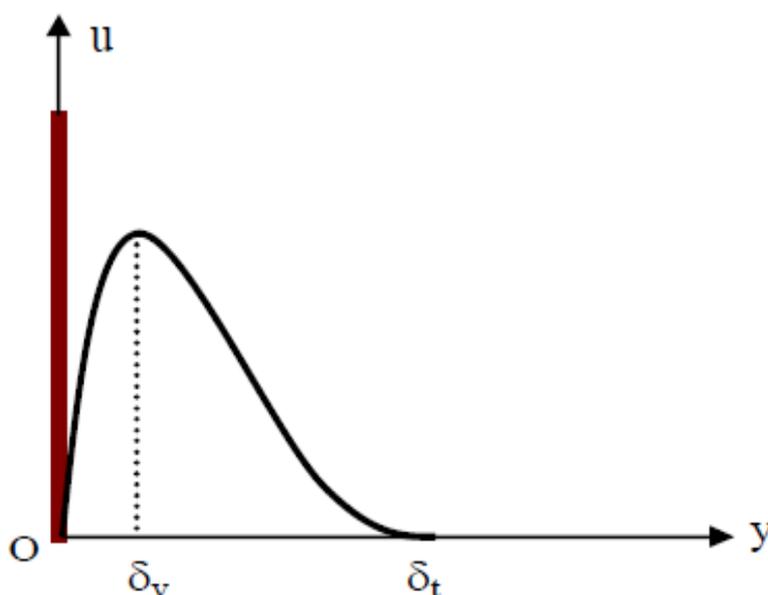


Figure A.2 Variation de la vitesse longitudinale dans la couche limite dynamique

Par contre, au voisinage de la paroi, les effets de la viscosité ne peuvent plus être négligés. On peut admettre alors l'existence d'une sous couche visqueuse, dont l'épaisseur δ_v , correspond approximativement à la zone comprise entre la paroi et le maximum de vitesse. Dans cette région, où l'on a équilibre entre les forces volumiques de viscosité et de poussée d'Archimède, on écrit :

$$\frac{v u_c}{\delta_v} \approx g \beta \Delta T \quad (\text{A.42})$$

Et avec l'ordre de grandeur de u_c , donné en (A40), on obtient :

$$\delta_v^2 = L \text{Pr}^{1/4} \text{Gr}^{-1/4} \quad (\text{A.43})$$

Ainsi,

$$\delta = \delta_t \text{Pr}^{1/2} \quad (\text{A.44})$$

Cette abscisse δ_v fixe l'ordre de grandeur de la distance du point de vitesse maximale par rapport à la paroi.

A.5. 2.2 Fluides aux nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité

Dans ce cas, les couches limites thermiques et dynamiques sont des mêmes ordres de grandeur. Ni les effets d'inertie, ni les effets de viscosité dominant les phénomènes, il en résulte que :

$$u_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/2}$$

$$v_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \quad (\text{A.45})$$

$$\delta_c = L (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{-1/4}$$

Le nombre de Nusselt a pour ordre de Grandeur :

$$\text{Nu} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \quad (\text{A.46})$$

A.5. 2.3 Fluides aux grands nombres de Prandtl

Ce cas concerne les fluides très visqueux. Pour de tels fluides, le bilan de quantité de mouvement indique que les forces d'inertie qui sont inversement proportionnelle au nombre de Prandtl Pr deviennent négligeables. Donc, il y'a équilibre entre les forces volumiques dues à la poussée d'Archimède et celles engendrées par la viscosité du fluide.

$$v_c \frac{u_c}{\delta_t^2} \approx g \beta \Delta T \quad (\text{A.47})$$

Dans ces conditions et en tenant compte des relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/2} \\ v_c &= \frac{\alpha}{L} (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \\ \delta_t &= L(\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{-1/4} \end{aligned} \tag{A.48}$$

Pour les fluides caractérisés par de grands nombres de Prandtl, l'épaisseur de la couche limite dynamique (δ) est supérieure à celle de la couche limite thermique (δ_t) en raison de l'importance des effets de la viscosité. Le mouvement qui se déroulerait dans la zone externe à la couche limite thermique (zone isotherme), ne peut être régi que par l'équilibre entre les forces d'inertie et de viscosité. Ainsi, on :

$$\begin{aligned} \frac{u_c^2}{L} &\approx \nu \frac{u_c}{\delta^2} \\ \delta^2 &= \frac{\nu}{\alpha} L^2 (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{-1/2} \\ \delta &= \delta_t \text{Pr}^{1/2} \end{aligned} \tag{A.49}$$

Notons que dans le cas d'un transfert thermique et massique, on peut déduire avec le même raisonnement décrit dans les étapes précédentes que les grandeurs caractérisant la couche limite massique dépendent du nombre de Schmidt et du nombre de Grashof massique, étant donné que les équations de l'énergie et du transfert de masse sont similaires.

B.1. Détermination des termes S et b

Le terme S de l'équation (III.10) est donné par la relation (III.7). Pour l'équation de mouvement $S = S_0 + S_1$ et pour l'équation de la chaleur et de diffusion $S_0 = 0$.

On procède de calcul de l'intégral de S_0 . Pour ce faire, nous prenons $S_0 = S_{0p} = \text{constante}$ pour tout le volume élémentaire dv , on a :

$$\int_V S_0 d\xi d\eta = \int_V (\theta + NC) d\xi \cdot d\eta = \theta_p + NC_p \quad (\text{B.1})$$

$$S_1 = \Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial B}{\partial \eta}$$

$$\text{avec : } B = \left(\frac{V}{(4\xi)^{1/4}} - \frac{\eta}{\sqrt{4\xi}} U \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\int_V S_1 d\xi d\eta = \int_V \left(\Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) d\xi \cdot d\eta = \left[\Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right]_s \Delta\eta + \left[\Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} \right]_w \Delta\xi$$

$$\left[\Phi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right]_s \Delta\eta = \Phi_N \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_N - U_P) - \Phi_S \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_P - U_S)$$

$$\left[\Phi \frac{\partial B}{\partial \eta} \right]_w \Delta\xi = \Phi_E \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_E - B_P) - \Phi_S \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_P - B_W)$$

$$\int_V S_1 d\xi d\eta = \Phi_N \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_N - U_P) - \Phi_S \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_P - U_S) + \Phi_E \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_E - B_P) - \Phi_S \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_P - B_W) \quad (\text{B.3})$$

$$S = \int_V S_0 d\xi d\eta + \int_V S_1 d\xi d\eta$$

$$S = \int_V (S_0 + S_1) d\xi d\eta$$

$$= \Phi_N \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_N - U_P) - \Phi_S \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_P - U_S) + \Phi_E \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_E - B_P) - \Phi_S \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_P - B_W) + \theta_p + NC_p \quad (\text{B.4})$$

les termes B_p, B_E, B_S, B_N, B_W sont déterminer à partir de la relation (B.2)

Le terme \mathbf{b} est définie dans la relation (III.17) par :

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} - \mathbf{S}_2 \cdot \Phi_P$$

et \mathbf{S}_2 est déterminé a partir de l'équation (III.17), où

$$S_2 = \int_s^e \int_w^n \frac{U}{\sqrt{4\xi}} d\xi d\eta = \frac{U_p}{\sqrt{4\xi_p}} \Delta\xi \Delta\eta$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & \Phi_N \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_N - U_P) - \Phi_S \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (U_P - U_S) + \Phi_E \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_E - B_P) - \Phi_S \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} (B_P - B_W) + \theta_p + NC_p + \\ & \frac{U_p}{\sqrt{4\xi_p}} \Delta\xi \Delta\eta \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dans les équations de la chaleur et de diffusion il suffit d'éliminer le terme : $\theta_p + NC_p$

B.2. Détermination de la composante du vitesse

Nous récrivons l'équation de continuité qui est déterminé dans l'équation (III.16), on a :

$$(U_n - U_s)\Delta\eta + \left(-\frac{\eta}{4\xi} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_e - \left(-\frac{\eta}{4\xi} U + \frac{1}{(4\xi)^{1/4}} V \right)_w = S_2 \quad (\text{B.6})$$

$$[U(i+1, j) - U(i-1, j)]\Delta\eta + \left(-\frac{\eta_e}{4\xi_e} U(i, j+1) + \frac{1}{(4\xi_e)^{1/4}} V(i, j+1) \right) - \left(-\frac{\eta_w}{4\xi_w} U(i, j-1) + \frac{1}{(4\xi_w)^{1/4}} V(i, j-1) \right) = S_2 \quad (\text{B.7})$$

Nous remplaçons les faces e, w, n, s dans la relation (B.7) par les points de la maille (i,j) , il vient :

$$\begin{aligned} V(i, j+1) = & -(4\xi_e)^{1/4} [U(i+1, j) - U(i-1, j)]\Delta\eta - (4\xi_e)^{1/4} \left(-\frac{\eta_e}{4\xi_e} U(i, j+1) \right) + \\ & (4\xi_e)^{1/4} \left(-\frac{\eta_w}{4\xi_w} U(i, j-1) + \frac{1}{(4\xi_w)^{1/4}} V(i, j-1) \right) + S_2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Avec :

$$\xi_e = \xi(i) \quad , \quad \xi_w = \xi(i) \quad , \quad \eta_e = \eta(j+1) \quad , \quad \eta_w = \eta(j-1)$$

B.3 Discrétisation des Condition aux limites

Nous discrétisons les conditions aux limites écrits dans la relation (III.13), tel que :

-en $Y=0$

$$U(i,1)=0 \quad , \quad V(i,1)=0$$

$$\theta(i,1)=1 \quad , \quad C(i,1)=1$$

Avec

$i=1, n$ et $n=n_{\max}$

$$i=1 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \rightarrow \frac{U(1, j) - U(1, j-1)}{\Delta \eta} = 0$$

$$i=n \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \rightarrow \frac{U(n, j) - U(n, j-1)}{\Delta \eta} = 0$$

-en $Y \rightarrow \infty$

$$U(i, m) = 0$$

$$\theta(i, m) = 0$$

$$C(i, m) = 0$$

Avec

$j=1, m$ et $m=m_{\max}$

$$j=m \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \rightarrow \frac{U(i, m) - U(i, m-1)}{\Delta \xi} = 0$$

B.4 Les étapes d'Algorithme de calcul

La résolution des équations du modèle physique exprimées dans le système de coordonnées de calcul et régissant l'écoulement de convection naturelle thermique et massique de type couche limite le long d'une plaque verticale est réalisée conformément à l'organigramme de calcul présenté dans les figure III.3 (partie A et B).

La procédure de résolution comporte les principales étapes suivantes :

Etape 1 : choix des pas d'espaces $\Delta \xi$ et $\Delta \eta$

Etape 2 : choix du nombre de la force de flottabilité N .

Etape 3 : choix d'un coefficient de relaxation Cr adapté aux équations du mouvement, de la Chaleur et de transfert de masse.

- Etape 4 : choix d'un type de fluide caractérisé par le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Schmidt Sc en cas d'un transfert couplé par convection thermique et massique.
- Etape 5 : initialisation des valeurs des composantes U , V de la vitesse, de la température θ et la concentration C dans le cas d'un transfert massique.
- Etape 6 : résolution de l'équation de continuité (III.16) pour obtenir directement la composante $V(i, j)$ de la vitesse.
- Etape 7 : calcul des coefficients a_p, a_E, a_w, a_s, a_n donnés par les équations (III.25-III.28) et le terme b donné par l'équation (III.28)- (III.29)
- Etape 8 : connaissant les valeurs des conditions aux limites de la fonction Φ , on détermine :
- la fonction U_p en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (III.30). (Φ_p est remplacé par U_p) avec la condition écrite dans le tableaux(III.1).
 - la fonction θ_p en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (III.30). (Φ_p est remplacé par θ_p) avec la condition écrite dans le tableaux(III.1).
 - la fonction C_p en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (III.30). (Φ_p est remplacé par C_p) avec la condition écrite dans le tableaux(III.1) dans le cas de la convection massique.

Etape 10 : satisfaction du test de convergence représenté par :

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\varphi_p)^{K+1} - \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\varphi_p)^K}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} (\varphi_p)^K} \right| \leq 10^{-5}$$

Si le test de convergence suivant est vérifié : Les profils de vitesse, de température et de concentration sont alors déterminés. Nous calculons les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyen ainsi que le coefficient de frottement. Sinon, les calculs sont repris à partir de l'étape 6.

Résumé

Dans ce travail, on étudie numériquement la convection naturelle thermique et massique laminaire et permanente dans la couche limite le long d'une plaque verticale semi infini avec flottabilité opposée. Nous supposons que la surface de cette plaque est soumise à une température et une concentration constante. Le domaine physique est transformé en un domaine rectangulaire en utilisant une transformation homotypique.

Concernant la simulation numérique, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie de type couche limite et les conditions aux limites sont discrétisé avec la méthode numérique des volumes finis. Le système des équations algébriques ainsi obtenues a été résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Les résultats sont présentés sous forme des profils des vitesses, profils des températures, profils des concentrations ainsi que les nombres de Nusselts et de Sherwood locaux en fonction des paramètres effectives qui sont le nombre de force de flottabilité N , le nombre de Prandtl et le nombre de Schmidt.

Les résultats obtenus montre que l'augmentation de la valeur absolu du nombre de rapport de force de flottabilité N conduit à une augmentation pour les paramètres de transfert thermique et massique (nombre de Nusselt Nu et de Sherwood Sh).

La solution de la couche limite ne rapporte pas les solutions exactes pour des écoulements libres avec une force de flottabilité opposée ($N < 0$) pour $Pr < Sc$. Dans ce cas, l'écoulement inversé près de la surface et exagère l'importance des vitesses ascendantes.

Mots clés : Convection naturelle, Couche limite, Plaque verticale, Transfert thermique et massique, Nombre de Nusselt, Nombre de Sherwood, Force de flottabilité.

ABSTRACT

In this work, a numerical study of laminar natural convection heat and mass in the boundary layer along a semi-infinite vertical plate with opposing buoyancy is presented. The surface is maintained a constant temperature and concentration different than the ambient one. The physical domain is transformed into a rectangular domain using a homotypic transformation. In numerical simulation, The finite volume is employed to discretize the momentum equations, energy equation, diffusion equation as well as the boundary conditions. The system of algebraic equations obtained was solved using the iterative Gauss-Seidel with relaxation.

The effective parameters of this problem are the buoyancy ration N , the Prandtl number and the Schmidt number.

A comparison between our results and those obtained by some authors are checked.

The results are presented as velocities profiles, temperatures profiles, concentrations profiles and the Nusselt and Sherwood numbers with the effect of the buoyancy ration N , the Prandtl number and the Schmidt number.

The results obtained show that, increasing of the absolute buoyancy ratio N leads to increase the heat and mass transfer (number of Nusselt and Sherwood).

The boundary layer solution is suitable only when the two buoyant forces help themselves ($N > 0$, $Pr < Sc$). Consequently, when the two buoyancies oppose each others ($N < 0$), the transfer rate is not a boundary layer type flow.

Key words: free convection, boundary layer, vertical plate, heat and mass transfer, Sherwood number, Nusselt number, buoyancy force.

ملخص

من خلال هذا العمل نهتم بدراسة الانسياب الحرو المستقر داخل الطبقة الحدية على طول صفيحة عمودية لمائع درجة حرارتها ثابتة وتركيز المائع على سطحها ثابت مع قوى الطفو العكسية . إن هذا السطح الفيزيائي قد تم تحويله الى مساحة مسطحة الشكل بواسطة التحويلات الهوموتوبية. النموذج الرياضي يتكون من معادلات إن حفاظ كمية الحركة , الطاقة و المادة (التركيز). لحل نظام معادلات الطبقة الحدية ومعادلات الشروط الابتدائية نستعمل طريقة الحجوم المنتهية و خوارزم غوص سايدل.

ان حل هذه المعادلات يؤدي الى الحصول على حقل سرعات المائع , درجة حرارته وتركيزه داخل الطبقة الحدية اضافة الى عدد نيويسالت وشاروود بدلالة كل من المؤثرات نسبة قوى الطفو الحراري والمادي N , عدد براندل Pr و عدد شميدت Sc .

تدل النتائج على أن الزيادة في القيمة المطلقة للعدد N يؤدي إلى زيادة إرتفاع في التحول الحراري والمادي (عدد نيويسالت و شاروود) في أن واحد.

إن النتائج المتحصل عليها تبين أن شكل تدفق المائع يكون حلا للطبقة الحدية في حالة ما إذا كانت قوى الطفو الحراري والمادي في نفس الاتجاه و نحو الأعلى ($N > 0, Pr < Sc$) ; أما في حالة ما إذا كانت هاتين القوتين متعاكستين تماما فإن الانسياب لا يكون حلا للطبقة الحدية .

الكلمات الدالة : الانسياب الحر، الطبقة الحدية، الصفيحة العمودية، الانتقال الحراري والمادي ، عدد نيويسالت ، عدد شاروود، قوى الطفو.