

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de série :.....

N° d'ordre :.....

**MEMOIRE**

**Présenté pour obtenir le diplôme de**

**MAGISTER EN PHYSIQUE**

**Spécialité : ENERGETIQUE**

**Option : PHOTOTHERMIQUE**

**Thème :**

**ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN MILIEU POREUX  
SATURATION DE FLUIDE DANS UNE CAVITE CARREE A ORIENTATION VARIABLE.**

**Par**

**LATRECHE ABDELKRIM**

**Soutenu le : /12/2010**

**Devant le jury :**

<b>Présidente</b>	<b>:</b>	<b>A. CHAKER</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>:</b>	<b>M. DJEZZAR</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
<b>Examineurs</b>	<b>:</b>	<b>N. BELLEL</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
		<b>A. OMARA</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>

# Remerciements

Je désire tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux à Monsieur DJEZZAR Mahfoud, Maître de conférences à l'université Mentouri Constantine pour son aide appréciable, pour ses conseils précieux, pour ses idées originales qui ont enrichi cette thèse, pour sa disponibilité permanente et pour m'avoir fait profiter de son expérience.

Je tiens à remercier sincèrement Madame CHAKER Abla, professeur à l'université Mentouri Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen malgré ces nombreuses occupations.

Monsieur BELLEL Nadir, Maître de conférences à l'université Mentouri Constantine, et Monsieur OMARA Abdeslam, Maître de conférences à l'université Mentouri Constantine, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

# Nomenclature

## Lettres latines

$a$	Diffusivité thermique. ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
$C_p$	Chaleur massique à pression constante. ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
Da	Nombre de darcy
$g$	Accélération de la pesanteur. ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
Gr	Nombre de Grashof.
H	Hauteur de la cavité. (m)
$k$	Perméabilité du milieu poreux. ( $\text{m}^2$ )
L	Largeur de la cavité. (m)
$\overline{Nu}_c$	Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude
$Nu_c$	Nombre de Nusselt local sur la paroi chaude
$\overline{Nu}_f$	Nombre de Nusselt moyen sur la paroi froide
$Nu_f$	Nombre de Nusselt local sur la paroi froide
P	Pression. (at)
Pr	Nombre de Prandtl.
Ra	Nombre de Rayleigh.
$Ra^*$	Nombre de Darcy-Rayleigh modifié
T	température du fluide en un point donné du système. (K)
$t$	Temps. (s)
$T_0$	température de référence. (K)
$T_c$	Température de la paroi chaude. (K)
$T_f$	Température de la paroi froide. (K)
u et v	Composantes de la vitesse suivant x et y. ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\vec{V}$	Vecteur vitesse. ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
x, y et z	Coordonnées cartésiennes. (m)

### **Lettres grecques**

$\alpha$	Angle d'inclinaison. ( $^{\circ}$ )
$\beta$	Coefficient d'expansion volumique thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\lambda$	Conductivité thermique du fluide. ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )
$\mu$	Viscosité dynamique. ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique. ( $m^2.s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique du fluide. ( $kg.m^{-3}$ )
$\rho_c$	Masse volumique du fluide à la température de référence. ( $kg.m^{-3}$ )
$\sigma_T$	Facteur de la capacité thermique.
$\psi$	Fonction de courant. ( $m^2.s^{-1}$ )
$\varphi$	Fonction générale.

### **Exposant**

+	Paramètres adimensionnels
---	---------------------------

### **Indices**

$c$	Chaude
$f$	Froide
$f$	Fluide
$p$	Milieu poreux

### **Autres symboles**

$\nabla$	Gradient
$\nabla^2$	Laplacien

# Sommaire

<b>INTRODUCTION</b>	1
<b>CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	3
<b>CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE</b>	10
2.1 Description du problème	10
2.2 Hypothèses simplificatrices	11
2-3 Formulation des équations gouvernantes	12
2.4 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement	14
2.5 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles	14
2.6 Adimensionalisation	16
2.7 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles	16
2.8 Coefficients d'échange de la chaleur	16
2.8.1 Nombre de Nusselt local	16
2.8.2 Nombre de Nusselt moyen	16
<b>CHAPITRE 3 - FORMULATION NUMERIQUE</b>	17
3.1 Introduction	17
3.2 Principe de la méthode des volumes finis	17
3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le volume de contrôle	19
3.4 Discrétisation des conditions aux limites	28
3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	29
3.6 Discrétisation des conditions aux limites	30
3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse	30
3.8 Processus du calcul	31
<b>CHAPITRE 4 -RESULTATS NUMERIQUE</b>	34
4.1 Introduction	34

4.2	Etude du maillage	34
4.3	Validation du code de calcul	34
4.4	Influence du nombre de Darcy-Rayleigh modifié	39
4.4.1	Isothermes et lignes de courant	39
4.4.2	Nombre de Nusselt local	44
4.4.3	Nombre de Nusselt moyen	46
4.5	Influence du facteur de forme	46
4.5.1	Isothermes et lignes de courant	46
4.5.2	Nombre de Nusselt moyen	48
4.6	Influence de l'angle d'inclinaison	49
4.6.1	Isothermes et lignes de courant	49
4.6.2	Nombre de Nusselt local	56
4.6.3	Nombre de Nusselt moyen	58
	<b>Conclusion</b>	59
	<b>Annexe A : Milieu Poreux</b>	60
	<b>Annexe B : Méthodes Itératives</b>	66
	<b>Références Bibliographiques</b>	69

# Introduction

L'apparition au sein d'un milieu fluide de gradients de température entraîne l'existence de différences de masse volumique. De telles différences peuvent avoir, dans certains cas, par action de la pesanteur, une influence sur la distribution des vitesses du fluide au sein du milieu. On dit alors qu'il y a convection naturelle.

Au cours de ces dernières années un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert de chaleur induit par convection naturelle au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide. L'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle est dû aux nombreuses applications potentielles en ingénierie. Parmi ces applications on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, la dispersion des polluants dans les aquifères, les problèmes de sécurité dans le cœur des réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments...etc.

L'objet du présent travail est une contribution à l'étude des mouvements de convection naturelle se développant dans une cavité rectangulaire inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Les paramètres dont dépendent la structure de l'écoulement sont : le nombre de Darcy-Rayleigh modifié qui varie entre 100 et 450, le facteur de forme de la cavité  $A$  ( $L/H$ ) entre 1 et 5 et l'angle d'inclinaison  $\alpha$  entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

La présentation de cette thèse est articulée de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection thermique en cavité poreuse, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Le modèle physique choisi, les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développés. L'équation de la chaleur étant parabolique est discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis tandis que l'équation de mouvement après transformation étant elliptique, elle l'est à l'aide des différences centrées, les équations ainsi obtenues sont résolues par une méthode itérative de sous-relaxations successives (Successive Under Relaxation).

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus, et pour ne pas alourdir le texte, nous présentons en annexes une caractérisation d'un milieu poreux et quelques compléments d'analyse numérique.

# Chapitre 1

## Recherche bibliographique

Dans cette partie nous présentons une revue de la littérature portant sur le transfert de chaleur par convection naturelle en cavités poreuses saturées par un fluide pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites. Les études effectuées dans le passé sur ce sujet peuvent se classer en deux catégories. Dans la première, les écoulements sont induits par des gradients de température appliqués perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité. Dans la deuxième catégorie ces gradients sont appliqués dans la même direction que la gravité. Le problème considéré dans cette thèse appartient à la seconde catégorie. Une revue exhaustive des travaux disponibles sur ce sujet à été faite par Nield et Bejan [1] et Ingham et Pop[2].

Bahloul [3] a fait une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide dans une cavité poreuse verticale. Une différence de température uniforme est appliquée à travers les parois verticales tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Les paramètres dont dépend la structure de l'écoulement sont le nombre de Rayleigh  $Ra$ , qui varie entre 10 et 10000 et le facteur de forme de la cavité  $A$  qui varie entre 1 et 20. Pour un grand nombre de Rayleigh, et sur la base des résultats numériques il a obtenu un modèle approximatif du régime de couche limite. Pour un chauffage élevé, il a donné un modèle simplifié pour le paramètre de stratification  $\gamma=1.22A^{-0.47}Ra^{0.46}$ . Il a montré aussi que le coefficient de stratification thermique  $\tau$  dépend essentiellement du rapport de forme de l'enceinte  $A$ , et devient presque indépendant du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , dans le régime de la couche limite,  $\tau= (3/2)A$ . Il a utilisé la théorie de la stabilité linéaire du flux parallèle pour obtenir le nombre de Rayleigh critique pour une cavité longue ( $A \gg 1$ ). Il a constaté que l'écoulement est stable, indépendant du coefficient de stratification  $\tau$ .

Baytas [4] a fait une analyse sur la production d'entropie dans une cavité poreuse saturée et inclinée pour un transfert de chaleur par convection naturelle laminaire en résolvant

numériquement les équations de masse, de mouvement et d'énergie, il a utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq incompressible. Comme conditions aux limites de la cavité, deux parois opposées sont maintenues à températures constantes mais différentes, et les deux autres sont isolées thermiquement. Les paramètres considérés sont l'angle d'inclinaison et le nombre de Darcy-Rayleigh. Il a comparé ses solutions avec les résultats des recherches précédentes connues. Il a obtenu un excellent accord entre les résultats qui valident le code de calcul utilisé. Il a montré que la distribution d'entropie locale est faisable et peut fournir des informations utiles pour le choix d'un angle approprié d'inclinaison.

Kalla et al [5] ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une couche poreuse allongée dans la direction horizontale. Toutes les faces de la cavité rectangulaire sont exposées à des flux de chaleur uniformes, le chauffage et le refroidissement étant appliqués sur les parois opposées. Le problème est formulé en termes du modèle de Darcy. Ils ont montré qu'il est possible d'utiliser l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour obtenir une solution analytique décrivant les champs de fonction de courant et de température dans la région centrale de la cavité. Il a démontré aussi que des solutions multiples sont possibles, certaines d'entre elles étant instables. Il a employé une méthode aux différences finies pour obtenir des solutions numériques à partir des équations gouvernantes complètes. Ils ont analysé les effets des différents paramètres, notamment celui du nombre de Rayleigh  $Ra$ , et d'une constante  $a$  donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontaux et verticaux.

Nawaf et al [6] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux en régime transitoire. Ils ont utilisé le modèle de Darcy et le fluide est supposé un fluide standard de Boussinesq. La température de la paroi chaude (la paroi gauche) oscille dans le temps autour d'une valeur constante, tandis que la paroi froide (la paroi droite) est maintenue à une température constante, les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont présenté des résultats pour démontrer la variation temporelle des lignes de courant, des isothermes et du nombre de Nusselt. Lorsque la température de la paroi chaude oscille avec une forte amplitude et une forte fréquence, ils ont trouvé que le nombre de Nusselt devient négatif sur une partie de la période du nombre de Rayleigh  $10^3$ . Les valeurs négatives du nombre de Nusselt ont été trouvées parce qu'il n'y aura pas assez de temps pour transférer la chaleur de la

paroi chaude vers la paroi froide. La valeur maximum du nombre moyen de Nusselt est observée pour une fréquence adimensionnelle de 450 dans la gamme considérée (1-2000) pour un nombre de Rayleigh  $10^3$ .

Varol et al [7] ont fait une étude numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé de fluide dans une enceinte rectangulaire avec une variation sinusoïdale du profil de température sur la paroi inférieure. Toutes les parois de l'enceinte sont isolées, sauf la paroi inférieure qui est partiellement chauffée et refroidie. Le milieu poreux est modélisé à partir des équations classiques de Darcy. Ensuite ils ont résolu numériquement ces équations en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont analysé le problème pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  dans la gamme  $10 \leq Ra \leq 1000$ , et pour différentes valeurs du facteur de forme  $AR$ , avec  $0,25 \leq AR \leq 1,0$  et aussi pour différentes valeurs de l'amplitude de la fonction sinusoïdale de la température  $\lambda$  dans la gamme  $0,25 \leq \lambda \leq 1,0$ . Ils ont trouvé que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude  $\lambda$  et diminue quand la valeur du facteur de forme  $AR$  augmente. Ils ont observé Plusieurs cellules dans la cavité pour toutes les valeurs des paramètres considérés.

Barletta et al [8] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée verticale remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont utilisé le logiciel Femlab 3.1i (c COMSOL, Inc.). La cavité est chauffée par une paroi interne concentrique circulaire soumise à un flux de chaleur uniforme. Les parois de la cavité sont isothermes et l'écoulement est supposé être à deux dimensions, stationnaire et laminaire. Ils ont négligé l'effet de la dissipation visqueuse et aucune production d'énergie interne n'est considérée. Le milieu poreux satisfait à la loi de Darcy et la validité de l'approximation de Boussinesq est réalisée. Ils ont trouvé que la fonction de courant et la température dépendent du nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$  ; qui est le produit du nombre de Rayleigh  $Ra$  et du nombre de Darcy  $Da$ . Ils ont évalué les valeurs moyennes du nombre de Nusselt et de l'énergie cinétique. Ils ont fait des essais pour vérifier que la solution est indépendante du maillage et que Femlab produit généralement des résultats précis à quatre chiffres pour toutes les quantités testées.

Bouhadeb [9] a fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffée par une température constante et uniforme  $T_p$ , les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante  $T_a$ . Les paramètres dont dépend la structure de la convection naturelle sont : le nombre de Rayleigh qui varie entre  $10^3$  et  $5.10^5$ , le rapport d'aspect de la cavité  $As=8$ , le facteur de forme  $A$  (entre 0.10 et 0.20) et le nombre de Prandtl (celui de l'eau). Il a discrétisé les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique dans la cavité en utilisant une méthode implicite aux différences finies et la méthode des volumes de contrôle. Il a réalisé l'adéquation entre les champs des vitesses et de pression à l'aide de l'algorithme SIMPLE. L'influence des paramètres caractéristiques de la topographie de la surface d'échange (fond sinusoïdal), notamment de l'amplitude d'ondulation  $b$  et le facteur de forme de la cavité  $A$ , sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement, sont mises en évidence la variation du nombre de Rayleigh a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. Il a trouvé que les nombres de Nusselt locaux passent par des maximums aux sommets et aux creux et par des minimums entre eux.

Varol et al [10] Ont utilisé une technique de programmation *Support Vector Machines* (SVM), pour estimer la distribution de la température et le débit des champs dans une enceinte carrée poreuse dont la paroi verticale gauche est chauffée par trois appareils de chauffage isotherme, la paroi verticale droite est isotherme mais elle a une température plus froide que les appareils de chauffage alors que les deux autres parois sont restées adiabatiques. Ils ont établi une base de données par la résolution des équations régissant l'écoulement qui ont été écrites en utilisant le modèle de Darcy. Avec l'utilisation de la méthode des différences finies, ils ont écrit un code : *Dynamique des Fluides Computationnelle* (CFD). Ils ont établi une corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh. Par l'utilisation de la base de données obtenue, d'autres valeurs de température et de vitesses ont été estimées par la technique SVM pour différents nombres de Rayleigh et différentes positions de chauffage. Ils ont montré que SVM est une technique utile sur l'estimation des lignes de courant et les isothermes. Ainsi, SVM réduit le temps de calcul et aide à résoudre certains cas, lorsque CFD ne parvient pas à résoudre en raison de l'instabilité numérique.

Baez et al [11] Ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée inclinée remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont supposé que la température de la surface supérieure est constante et égale à  $\theta_c$ , la température de la surface inférieure est constante aussi et égale à  $\theta_h$ , avec  $\theta_h > \theta_c$ . les surfaces verticales étant adiabatiques. L'écoulement du fluide est considéré bidimensionnel, non stationnaire, et dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. L'étude dépend du nombre de Rayleigh  $Ra$ , de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , et du facteur de forme de la cavité  $A$ . Ils ont supposé que les résultats présentés sont de nouveaux résultats, soit pour des angles d'inclinaison pas signalés avant ou pour des nombres de Rayleigh élevés avec des facteurs de forme très importants. Ils ont trouvé plusieurs cellules dans les cavités rectangulaires poreuses avec un nombre de Rayleigh  $Ra \geq 10^2$  et pour certains angles. Pour un fluide homogène, un nombre de Rayleigh de l'ordre de  $10^5 - 10^6$ , et un facteur de forme  $A \gg 1$ , des cellules secondaires apparaissent pour certains angles et l'écoulement devient plus complexe.

Basak et al [12] Ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'une matrice poreuse. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis pour un chauffage uniforme et non uniforme de la paroi inférieure, la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales sont maintenues à une température froide constante. Le milieu poreux est modélisé en utilisant les équations de Darcy-Forchheimer. Ils ont adopté la procédure numérique pour obtenir une performance constante sur une large gamme de paramètres (nombre de Rayleigh  $Ra$ ,  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ , nombre de Darcy  $Da$ ,  $10^{-5} \leq Da \leq 10^{-3}$ , et le nombre de Prandtl  $Pr$ ,  $0,71 \leq Pr \leq 10$ ) à l'égard de la continuation et la discontinuation des conditions thermiques aux limites. Ils ont présenté les résultats numériques en termes des fonctions de courant, des isothermes et des nombres de Nusselt. Ils ont trouvé que le chauffage non uniforme de la paroi inférieure produit un plus grand taux de transfert de chaleur au centre de la paroi inférieure que le cas de chauffage uniforme pour tous les nombres de Rayleigh, mais le nombre moyen de Nusselt montre globalement un plus faible taux de transfert de chaleur pour le cas de chauffage non-uniforme. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction quand  $Da \leq 10^{-5}$  indépendamment de  $Ra$  et  $Pr$ . Ils ont trouvé aussi que le transfert de chaleur par conduction est une fonction de  $Ra$  pour  $Da \geq 10^{-4}$ . Ils ont donné les nombres de Rayleigh critiques pour que la conduction domine le transfert de chaleur et ils ont présenté les corrélations

du Power Law entre le nombre moyen de Nusselt et les nombres de Rayleigh quand la convection domine le transfert.

Saeid et al [13] Ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité poreuse. La paroi inférieure est chauffée et la paroi supérieure est refroidie tandis que les parois verticales sont adiabatiques. La paroi chaude est supposée avoir une température à variation spatiale et sinusoïdale sur une valeur moyenne constante, qui est supérieure à la température de la paroi supérieure froide. Les équations gouvernantes non-dimensionnelles sont dérivées sur la base du modèle de Darcy. Ils ont étudié les effets de l'amplitude de la variation de la température de la paroi inférieure et la longueur de la source de la chaleur sur la convection naturelle dans la cavité pour la gamme 20-500 du nombre de Rayleigh. Ils ont constaté que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent lorsque la longueur de la source de chaleur ou de l'amplitude de la variation de la température augmente. Ils ont constaté aussi que le transfert de chaleur par unité de la surface de la source de la chaleur diminue quand la longueur du segment chauffée augmente.

Moya et al [14] Ont analysé un écoulement bidimensionnel de la convection naturelle dans une cavité poreuse, rectangulaire, inclinée et saturée d'un fluide newtonien par une résolution numérique des équations de masse, de mouvement et d'énergie. Ils ont utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites isothermes sont considérées, pour les deux parois verticales opposées, ils sont conservés à des températures constantes, mais différentes (la température de la paroi inférieure est supérieure à la température de la paroi supérieure) et les deux autres parois sont isolées thermiquement. Les paramètres externes considérés sont : l'angle d'inclinaison, le facteur de forme de la cavité et le nombre de Darcy-Rayleigh. Ils ont trouvé trois modes de convection principaux: la conduction, la convection unicellulaire et multicellulaire. Ils ont présenté les nombres de Nusselt locaux et globaux en fonction des paramètres externes. Ils ont exploré la multiplicité des solutions pour un rapport de forme égal à l'unité. L'existence de plus d'une solution est trouvée lorsque la paroi inférieure est à une température plus élevée et à une position horizontale ou proche de l'horizontale.

Pour notre cas à nous, nous présentons une étude des mouvements de convection naturelle se développant dans une cavité rectangulaire inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Les paramètres dont dépendent la structure de l'écoulement sont : le nombre de Darcy-Rayleigh modifié qui varie entre 100 et 450, le facteur de forme de la cavité  $A$  ( $L/H$ ) entre 1 et 5 et l'angle d'inclinaison  $\alpha$  entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Ceci à l'aide d'un code de calcul en langage fortran que nous avons mis au point et qui se base sur la formulation vorticité-fonction de courant, la méthode des volumes finis pour l'équation de type parabolique et une méthode aux différences centrées pour l'équation de type elliptique.

## Chapitre 2

### Analyse théorique

#### 2.1 Description du problème :

Considérons une cavité rectangulaire imperméable de largeur  $L$  et de hauteur  $H$ , remplie d'un milieu poreux saturé de fluide -figure 1- . On suppose que la température de la surface supérieure est constante et égale à  $T_f$ , la température de la surface inférieure est constante aussi et égale à  $T_c$ , avec  $T_c > T_f$ . les surfaces verticales étant adiabatiques, et que la cavité est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal.

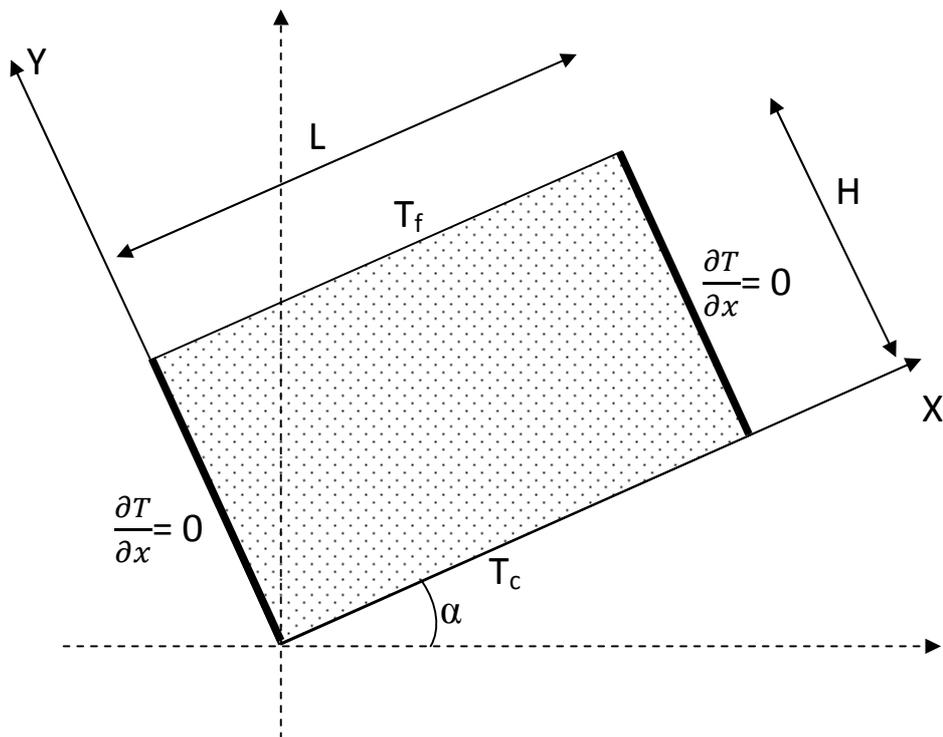


Figure 2.1: Définition du modèle physique : cavité rectangulaire inclinée d'un angle  $\alpha$

Il se produit donc dans la cavité une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

## 2.2 Hypothèses simplificatrices :

De façon à obtenir un modèle mathématique simple, les approximations classiques suivantes sont faites :

- 1- La profondeur de la cavité est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions pour que l'on puisse supposer un écoulement bidimensionnel.
- 2- Le fluide est newtonien et incompressible.
- 3- L'écoulement engendré est laminaire.
- 4- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
- 5- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- 6- La masse volumique du fluide varie linéairement avec la température. Cette variation est donnée par la relation :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

Où

T : représente la température du fluide en un point donné du système.

$T_0$  : la température de référence qui correspond généralement à la valeur moyenne de la température dans le système.

$\rho_0$  : la masse volumique du fluide à la température de référence.

$\beta$  : le coefficient d'expansion volumique thermique du fluide :

$$\beta = - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.2)$$

On utilise donc une hypothèse simplificatrice (l'hypothèse de Boussinesq) « la masse volumique  $\rho$  du fluide est supposée constante dans les équations hydrodynamiques, sauf dans le terme générateur de la convection naturelle  $\rho.g$  ou ses variations induisent directement des forces de poussée d'Archimède. Toutes les autres caractéristiques thermo-physiques du fluide (la viscosité dynamique  $\mu$ , la conductivité thermique  $\lambda$  et la chaleur massique à pression constante  $C_p$ ) sont considérées comme constantes et définies à la température de référence  $T_0$  ».

### 2.3 Formulation des équations gouvernantes:

La résolution d'un problème de convection naturelle consiste en la détermination des champs de vitesse et de température en chaque point du domaine occupé par le fluide dans la cavité. Dans ce but nous allons établir les équations de base régissant la convection naturelle dans la cavité rectangulaire. Le mouvement du fluide ainsi que la répartition de température dans un milieu poreux saturé par un fluide sont régis par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie suivantes :

#### 2.3.1 Formulation vectorielle:

- **équation de continuité :**

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.3)$$

- **équation de mouvement :**

Comme la majorité des études concernant la convection dans les milieux poreux, nous utilisons la formulation classique de Darcy où la vitesse moyenne de filtration (vitesse de Darcy)  $\vec{V}$  est proportionnelle à la somme du gradient de pression  $\nabla P$  et de la force gravitationnelle  $\vec{g}$ , l'effet de l'inertie étant négligé.

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \quad (2.4a)$$

Introduisant l'approximation de Boussinesq (2.1), l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} (\nabla P - \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \vec{g}) \quad (2.4b)$$

- **équation de la chaleur :**

Le principe de conservation de l'énergie conduit à l'équation suivante :

$$(\rho C_p)_p \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = \lambda_p \nabla^2 T \quad (2.5)$$

Où :

$k$  : la perméabilité du milieu poreux.

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide.

$\rho$  : la masse volumique du fluide.

$(\rho C_p)_f$  : capacité thermique du fluide.

$(\rho C_p)_p$  : capacité thermique du milieu poreux.

$\lambda_p$  : conductivité thermique du milieu poreux saturé.

### 2.3.2 Formulation en coordonnées cartésiennes:

Introduisons les coordonnées cartésiennes définies sur la figure 2.1.

Le problème étant bidimensionnel donc les équations (2.3), (2.4b) et (2.5) s'écrivent :

- **équation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

- **équation de mouvement :**

$$u = - \frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 g(1 - \beta(T - T_0)) \sin \alpha \right) \quad (2.7a)$$

$$v = - \frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g(1 - \beta(T - T_0)) \cos \alpha \right) \quad (2.7b)$$

- **équation de la chaleur :**

$$\sigma_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

Où :

$$a = \frac{\lambda_p}{(\rho C)_f} : \text{diffusivité thermique.}$$

$$\sigma_T = \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} : \text{facteur de la capacité thermique.}$$

## 2.4 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement

En dérivant les équations du mouvement (2.7a) et (2.7b) respectivement par rapport à y et à x. Il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \rho_c g \beta \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \rho_c g \beta \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.9b)$$

Donc:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Kg\beta}{\nu} \left( \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.9c)$$

En introduisant la fonction de courant  $\psi$  telle que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = \frac{Kg\beta}{\nu} \left( \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

## 2.5 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles :

Les conditions initiales dimensionnelles sont :

$$\underline{\forall x, \text{ à } y = 0} \quad T = T_c \quad \psi = 0 \quad (2.12a)$$

$$\underline{\forall x, \text{ à } y = H} \quad T = T_f \quad \psi = 0 \quad (2.12b)$$

$$\underline{\forall y, \text{ à } x = 0 \text{ et } x = L} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \psi = 0 \quad (2.12c)$$

## 2.6 Adimensionalisation :

Pour simplifier les équations et généraliser les résultats. Nous posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad y^+ = \frac{y}{L} \quad (2.13a)$$

$$u^+ = \frac{u}{a/L} \quad v^+ = \frac{v}{a/L} \quad (2.13b)$$

$$\psi^+ = \frac{\psi}{a} \quad T^+ = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \quad (2.13c)$$

$$t^+ = \sigma_T \frac{a}{L^2} t \quad (2.13d)$$

- **équation de continuité :**

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.14)$$

- **équation du mouvement :**

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{+2}} \right) \psi^+ = \frac{K}{L^2} \frac{g\beta L^3 \Delta T}{v^2} \frac{v}{a} \left( \cos \alpha \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin \alpha \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (2.15a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{+2}} \right) \psi^+ = Da \cdot Gr \cdot Pr \left( \cos \alpha \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin \alpha \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (2.15b)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{+2}} \right) \psi^+ = Ra^* \left( \cos \alpha \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin \alpha \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (2.16)$$

Avec :

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{v^2} \quad \text{nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{v}{a} \quad \text{nombre de Prandtl}$$

$$Da = \frac{K}{L^2} \quad \text{nombre de Darcy}$$

$$Ra^* = Da \cdot Ra \quad \text{nombre de Darcy-Rayleigh modifié}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad \text{nombre de Rayleigh}$$

- **équation de la chaleur:**

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (2.17)$$

## 2.7 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles :

$$\forall x, \text{ à } y = 0 \quad T^+ = 1 \quad \psi^+ = 0 \quad (2.18a)$$

$$\forall x, \text{ à } y = H \quad T^+ = 0 \quad \psi^+ = 0 \quad (2.18b)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 0 \text{ et } x = L \quad \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = 0 \quad \psi^+ = 0 \quad (2.18c)$$

## 2.8 Coefficients d'échange de la chaleur

### 2.8.1 Le nombre de Nusselt local:

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité, nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt. Les valeurs de ce dernier sur les parois horizontales, sont définies comme suit :

- Sur la paroi chaude :

$$Nu_c = - \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} \quad (2.19a)$$

- Sur la paroi froide :

$$Nu_f = - \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=1} \quad (2.19b)$$

### 2.8.2 Le nombre de Nusselt moyen :

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt le long de ces parois sont calculées par les intégrales suivantes :

- Sur la paroi chaude :

$$\overline{Nu}_c = - \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_0 dx^+ \quad (2.20a)$$

- Sur la paroi froide :

$$\overline{Nu}_f = - \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_1 dx^+ \quad (2.20b)$$

# Chapitre 3

## Formulation Numérique

### 3.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent nous avons développé les équations de base régissant la convection naturelle, en milieu poreux. Les équations résultantes forment un système d'équations différentielles partielles non-linaires couplées. Ce sont par conséquent des équations difficiles à résoudre analytiquement et en général, on ne peut obtenir une solution de ces dernières que par le biais de méthodes numériques. Pour la résolution du système d'équations couplées, obtenu, et les conditions aux limites associées, nous considérons pour l'équation (2.16), qui est une équation du type elliptique, une solution numérique par la méthode des différences centrées. Alors que pour l'équation (2.17), qui est une équation du type parabolique, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts, et sont bien exposées par S.V. Patankar [15] et E.F. Nogotov [16].

### 3.2 Principe de la méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Les équations algébriques sont obtenues par l'intégration des équations de conservation à travers ces derniers dont les centres constituent les nœuds.

La figure 3.1 représente le domaine de calcul.

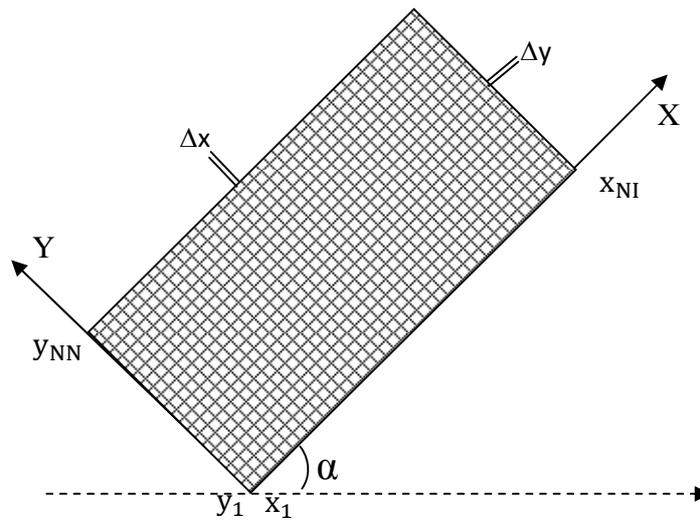


Figure 3.1 : le domaine de calcul

Nous utilisons des pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$  constants et plus précisément, nous posons :

$$\Delta x = \frac{x_{NI} - x_1}{NI - 1}$$

$$\Delta y = \frac{y_{NN} - y_1}{NN - 1}$$

$$A = \frac{x_{NI} - x_1}{y_{NN} - y_1} \quad (\text{facteur de forme})$$

Avec:

NI : le nombre de points suivant x.

NN : le nombre de points suivant y.

### Volume élémentaire d'intégration :

On découpe l'espace annulaire selon les directions x et y en un ensemble de volumes élémentaires ou « volume de contrôle » égaux à « $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$  ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction z comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres e, w, n et s. Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N et S. Les variables scalaires (température, vorticité,...) sont stockées aux

points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds E et N sont pris dans les directions des coordonnées positives de x et y respectivement et les nœuds W et S dans les sens contraires.

La figure 3.2 représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.

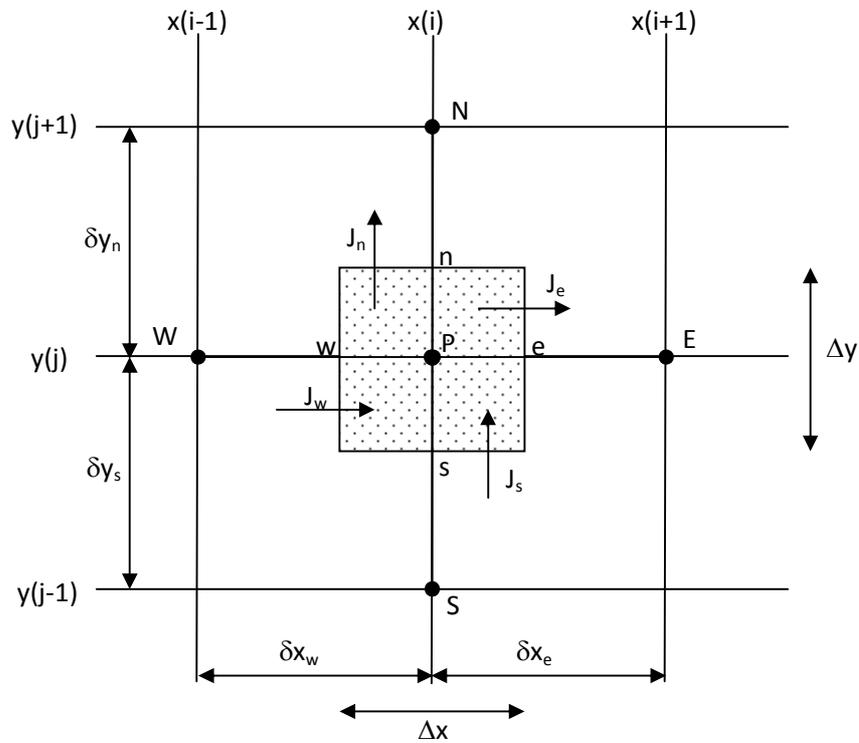


Figure 3.2 : Volume de contrôle

### 3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur dans le volume de contrôle :

Nous considérons l'équation de la chaleur (2.17), elle s'écrit :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( u^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( v^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Cette équation est de la forme générale :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( u^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( v^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+} \right) = S_\varphi \quad (3.2)$$

Le terme de source et le coefficient de diffusion sont spécifiés dans le tableau 3.1

Equation	$\varphi$	$\Gamma_\varphi$	$S_\varphi$
(3.1)	$T^+$	1	0

Tableau 3.1 : Terme de source et coefficient de diffusion

L'équation de discrétisation d'une variable  $\varphi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} dx^+ dy^+ dt^+ + \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \frac{\partial}{\partial x^+} \left( u^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+} \right) dx^+ dy^+ dt^+ \\ & + \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \frac{\partial}{\partial y^+} \left( v^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+} \right) dx^+ dy^+ dt^+ = \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} S_\varphi dx^+ dy^+ dt^+. \end{aligned}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} dx^+ dy^+ dt^+ + \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \left[ \frac{\partial (u^+ \varphi)}{\partial x^+} + \frac{\partial (v^+ \varphi)}{\partial y^+} \right] dx^+ dy^+ dt^+ \\ & = \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} \left[ \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+} \right) \right] dx^+ dy^+ dt^+ \\ & \quad + \int_w^e \int_s^n \int_{t^+}^{t^++\Delta t^+} S_\varphi dx^+ dy^+ dt^+ \end{aligned}$$

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour approcher les variations de  $\varphi$  entre les points du maillage [15]. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

Posons :

$$J_x = \left( u^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+} \right) \quad (3.3a)$$

$$J_y = \left( v^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+} \right) \quad (3.3b)$$

Où  $J_x$  et  $J_y$  sont les flux totaux (convection plus diffusion)

En portons ces valeurs dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^+} + \frac{\partial J_x}{\partial x^+} + \frac{\partial J_y}{\partial y^+} = S_\varphi \quad (3.4)$$

L'intégration de l'équation (3.4) dans le volume de contrôle de la figure 3.2 donne :

$$\frac{(\varphi_P^{t^+} - \varphi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + J_e - J_w + J_n - J_s = \overline{S_\varphi} \cdot \Delta V \quad (3.5)$$

$J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.  $\overline{S_\varphi}$  est la valeur moyenne de  $S_\varphi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\varphi_p$  (au nœud P) et se mettre sous la forme :

$$\overline{S_\varphi} = S_0 + S_p \cdot \varphi_p \quad (3.6)$$

Avec :  $S_p < 0$ .

Par suite l'équation (3.5) devient :

$$\frac{(\varphi_P^{t^+} - \varphi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_0 + S_p \cdot \varphi_p) \cdot \Delta V \quad (3.7)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (2.14) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.8)$$

Où  $F_e$ ,  $F_w$ ,  $F_n$ , et  $F_s$  sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= (u^+)_e \cdot \Delta y^+ \\ F_w &= (u^+)_w \cdot \Delta y^+ \\ F_n &= (v^+)_n \cdot \Delta x^+ \\ F_s &= (v^+)_s \cdot \Delta x^+ \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Nous poserons dans ce qui suit  $\varphi_P^{t^+} = \varphi_P$

En multipliant l'équation (3.8) par  $\varphi_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.7), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{(\varphi_P - \varphi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + (J_e - F_e \cdot \varphi_P) - (J_w - F_w \cdot \varphi_P) + (J_n - F_n \cdot \varphi_P) \\ - (J_s - F_s \cdot \varphi_P) = (S_0 + S_p \cdot \varphi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'après le schéma numérique du POWER LAW de S.V.PATANKAR [15] on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (3.10) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} J_e - F_e \cdot \varphi_P &= a_E(\varphi_P - \varphi_E) \\ J_w - F_w \cdot \varphi_P &= a_W(\varphi_W - \varphi_P) \\ J_n - F_n \cdot \varphi_P &= a_N(\varphi_P - \varphi_N) \\ J_s - F_s \cdot \varphi_P &= a_S(\varphi_S - \varphi_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(\varphi_P - \varphi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + a_E(\varphi_P - \varphi_E) - a_W(\varphi_W - \varphi_P) + a_N(\varphi_P - \varphi_N) \\ - a_S(\varphi_S - \varphi_P) = (S_0 + S_p \cdot \varphi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ce qui nous amène enfin a l'équation de discrétisation :

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b \quad (3.13)$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (3.14)$$

$$a_p^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} \quad (3.15)$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V + a_p^0 \varphi_p^0 \quad (3.16)$$

On introduit maintenant la fonction  $A(|P|)$  du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law), d'après S.V.PATANKAR, [15] elle est donné par :

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$$

Le symbole  $\max(A, B)$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de l'équation algébrique (3.13) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Les grandeurs  $D_e, D_w, D_n$  et  $D_s$  sont les termes diffusifs, et  $P_e, P_w, P_n$  et  $P_s$  sont les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\ D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta x}{(\delta y)_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration  $(\delta x)_e$ ,  $(\delta x)_w$ ,  $(\delta y)_n$  et  $(\delta y)_s$  peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta x$  et  $\Delta y$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Considérons que les interfaces n, s, e et w sont les milieux des (P, N), (P, S), (P, E) et (P, W).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta y}{\Delta x} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta y}{\Delta x} \\ D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta x}{\Delta y} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que tous les coefficients dans l'équation (3.13) doivent être positifs.  $S_p$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$ , doit être égal à la somme des autres coefficients et  $S_p \Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique à l'équation d'énergie. En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_p T_p^+ = a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + S_T \quad (3.21)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} \quad (3.22)$$

Le terme de source de cette équation est :

$$S_T = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} T_P^{+0}$$

En introduisant la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^+$  dans le système (3.9), il vient :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \Delta y^+ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} \right)_e \\ F_w &= \Delta y^+ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} \right)_w \\ F_n &= \Delta x^+ \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} \right)_n \\ F_s &= \Delta x^+ \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\left. \begin{aligned} \psi_e^+ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface "e" est établi d'après la démarche de E.F. NOGOTOV [16], comme suit : (figure 3.3).

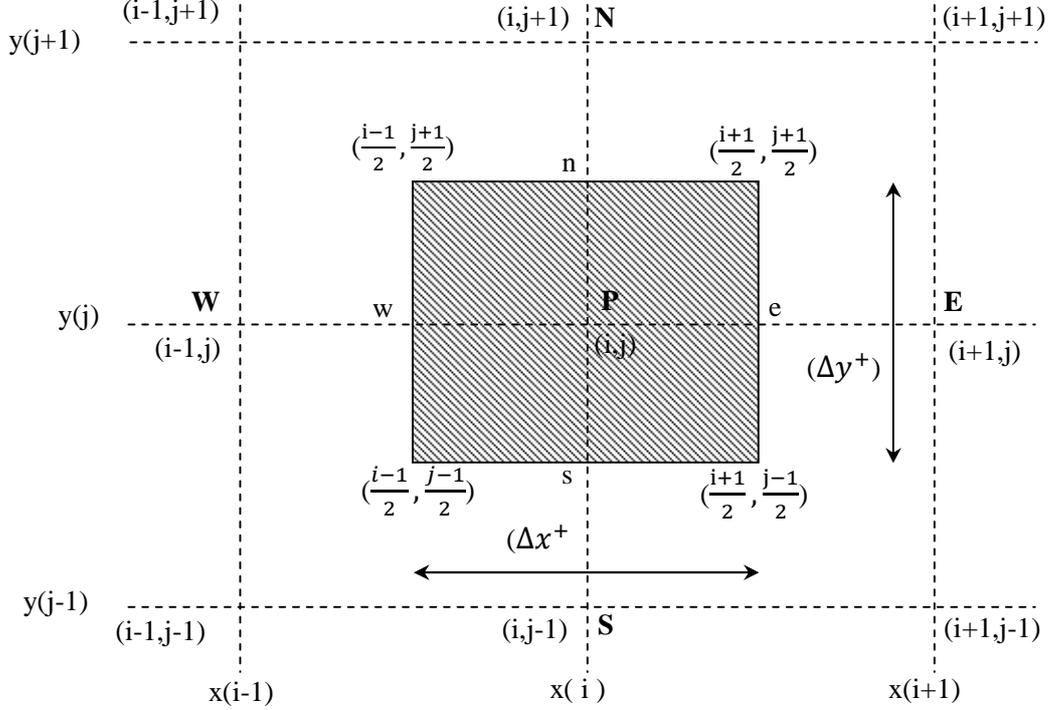


Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W, N et S dans le maillage.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y^+}\right)_e &= \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta y^+} \\
 &= \frac{1}{\Delta y^+} \left( \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1) + \psi^+(i+1, j-1)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4\Delta y^+} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i+1, j-1))
 \end{aligned}$$

Donc :

$$F_e = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i+1, j-1)) \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y^+}\right)_w &= \frac{\psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta y^+} \\
 &= \frac{1}{\Delta y^+} \left( \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4\Delta y^+} (\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1))
 \end{aligned}$$

Donc :

$$F_w = \frac{1}{4} (\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1)) \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x^+}\right)_n &= \frac{\psi^+\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - \psi^+\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x^+} \\
 &= \frac{1}{\Delta x^+} \left( \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i, j)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4\Delta x^+} (\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j))
 \end{aligned}$$

Donc :

$$F_n = \frac{1}{4} (\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)) \quad (3.25c)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x^+}\right)_s &= \frac{\psi^+\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) - \psi^+\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta x^+} \\
 &= \frac{1}{\Delta x^+} \left( \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4\Delta x^+} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1))
 \end{aligned}$$

Donc :

$$F_s = \frac{1}{4}(\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i+1, j-1)) \quad (3.25d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient  $\Gamma_\varphi$  prend la valeur 1. En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients  $D_e, D_w, D_n$  et  $D_s$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_e = D_w = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ D_n = D_s = \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_e = F_e \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_w = F_w \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_n = F_n \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ P_s = F_s \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21) on écrit P, E, W, N et S respectivement  $(i, j), (i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)$ .

Les coefficients  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i, j)$ . L'équation (3.21) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$a_P T^+(i, j) = a_E T^+(i+1, j) + a_W T^+(i-1, j) + a_N T^+(i, j+1) + a_S T^+(i, j-1) + S_T \quad (3.28)$$

### 3.4 Discrétisation des conditions aux limites :

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir :

- Sur la paroi chaude ( $j = 1$ ) :

$$T^+(i, 1) = 1$$

- Sur la paroi froide ( $j = NN$ ) :

$$T^+(i, NN) = 0$$

- Sur les parois adiabatiques ( $i = 1$  et  $i = NI$ ) :

$$T^+(1, j) = T^+(2, j) \text{ et } T^+(NI, j) = T^+(NI - 1, j)$$

### 3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement :

L'équation (2.16) étant de type elliptique comme nous l'avons cité plus haut, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons les différences centrées:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.29)$$

Donc :

$$\left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^2} \right) = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{\Delta x^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{\Delta y^2} \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2\Delta x^+} \quad (3.31a)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2\Delta y^+} \quad (3.31b)$$

Les équations (2.16), (3.30), (3.31a) et (3.31b) nous donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{\Delta x^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{\Delta y^2} \\ &= Ra^* \left( \cos \alpha \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2\Delta x^+} - \sin \alpha \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2\Delta y^+} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^{+2}} + \frac{1}{\Delta y^{+2}} \right)^{-1} & \left[ \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{\Delta x^{+2}} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{\Delta y^{+2}} \right. \\ & - Ra^* \left( \cos \alpha \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2\Delta x^+} \right. \\ & \left. \left. - \sin \alpha \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2\Delta y^+} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.6 Discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont :

- Sur la paroi chaude ( $j = 1$ ) :

$$\psi^+(i, 1) = 0$$

- Sur la paroi froide ( $j = NN$ ) :

$$\psi^+(i, NN) = 0$$

- Sur les parois adiabatiques ( $i = 1$  et  $i = NI$ ) :

$$\psi^+(1, j) = 0 \text{ et } \psi^+(NI, j) = 0$$

### 3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse :

Nous utilisons aussi les différences centrées aussi, pour obtenir une expression discrétisée des composantes adimensionnelles  $u^+$  et  $v^+$  de la vitesse, ce qui nous donne :

$$u^+(i, j) = \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta y^+} \quad (3.34)$$

$$v^+(i, j) = - \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} \right|_{i,j} = - \frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta x^+} \quad (3.35)$$

$$\forall (i, j) \quad i \neq 1 ; i \neq NI ; j \neq 1 ; j \neq NN$$

### 3.8 Processus du calcul :

Pour résoudre le système d'équations (3.28) et (3.33) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [16].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une méthode itérative à coefficients de relaxation :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - G_T)T^n(i, j) + \left(\frac{G_T}{a_P}\right) [a_E T^n(i + 1, j) + a_W T^{n+1}(i - 1, j) + a_N T^n(i, j + 1) + a_S T^{n+1}(i, j - 1)] \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \psi^{n+1}(i, j) = & (1 - G_P)\psi^n(i, j) \\ & + \frac{G_P}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \left[ \frac{\psi^n(i + 1, j) + \psi^{n+1}(i - 1, j)}{\Delta x^2} \right. \\ & + \frac{\psi^n(i, j + 1) + \psi^{n+1}(i, j - 1)}{\Delta y^2} \\ & - Ra^* \left( \cos \alpha \frac{T^{n+1}(i + 1, j) - T^{n+1}(i - 1, j)}{2\Delta x^+} \right. \\ & \left. \left. - \sin \alpha \frac{T^{n+1}(i, j + 1) - T^{n+1}(i, j - 1)}{2\Delta y^+} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

n: l'ordre d'intégration.

Les paramètres  $G_T$  et  $G_P$  sont les "facteurs de relaxation". Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh modifié ( $Ra^*$ ).

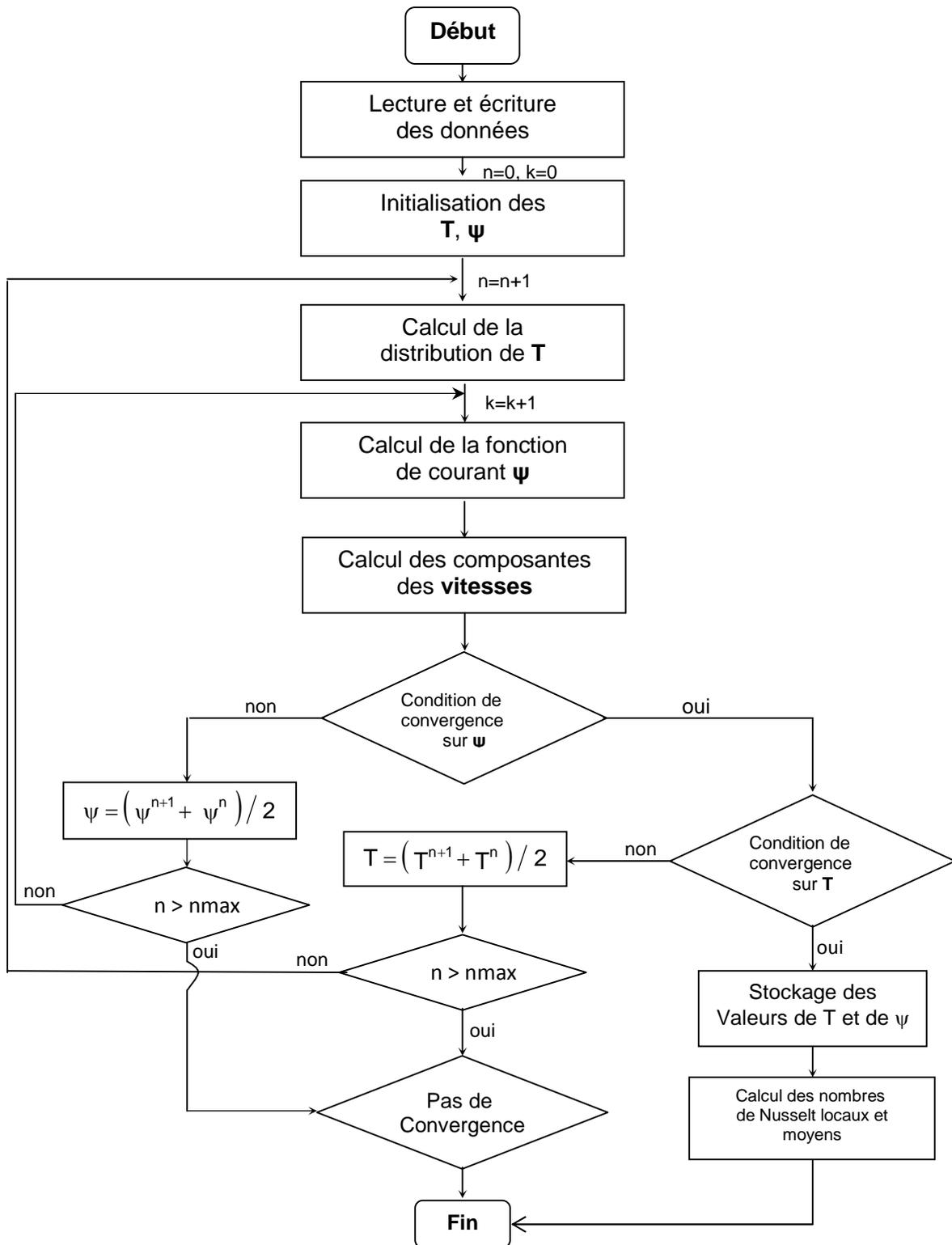
Nous résolvons le système d'équations (3.36) et (3.37) de la façon suivante :

1. Initialisation des valeurs de chaque variable au sein du maillage.
2. Calcul de la distribution de la température.
3. Calcul de la distribution de la fonction de courant.

4. Le processus itératif répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de  $\psi$  par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

5. Le même critère est utilisé pour la température.
6. Calcul des composantes de la vitesse.
7. Stockage des valeurs de T et  $\psi$ .



# Chapitre 4

## RESULTATS NUMERIQUE

### 4.1 Introduction :

Rappelons nos conditions de travail :

Les trois cavités sont caractérisées par les facteurs de formes suivants :  $A=1, 3$  et  $5$ . Les conditions thermiques aux parois horizontales ( $T_c$  et  $T_f$ ) ainsi que la hauteur de la cavité  $H$  sont supposées constantes.

Pour chaque cavité, nous donnons à l'angle d'inclinaison  $\alpha$  les valeurs suivantes :  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ , et  $90^\circ$ . Quant au nombre de Darcy-Rayleigh modifié  $Ra^*$ , il varie entre 100 et 450.

### 4.2 Etude du maillage :

L'étude de l'influence du maillage sur la valeur du nombre de Nusselt moyen de la paroi chaude et sur la valeur de la fonction de courant maximale est illustrée par les figures (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4). Elle nous a permis de constater que le maillage choisi ( $71 \times 71$ ) réalisait un bon compromis entre le temps et la précision des calculs.

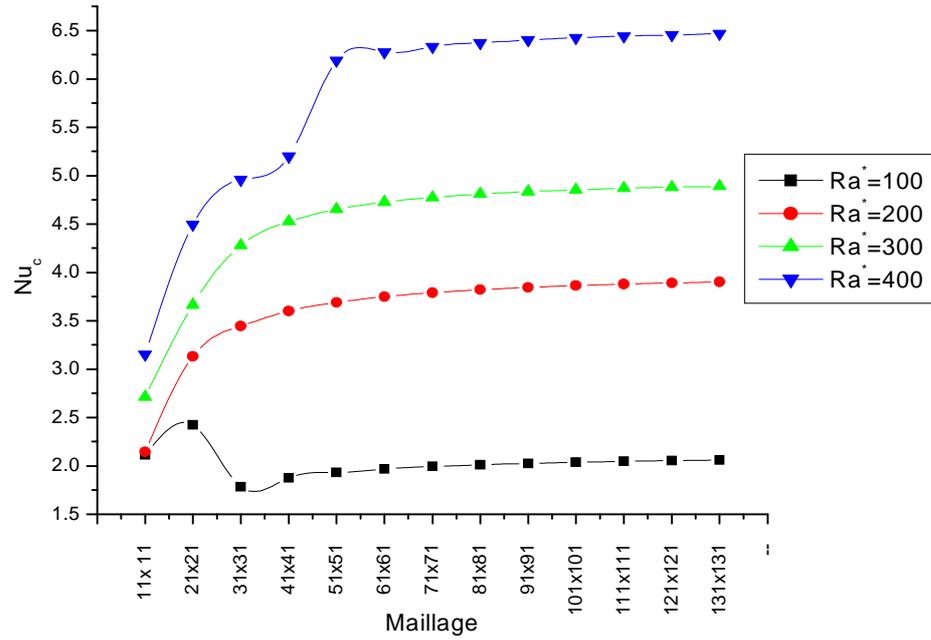


Figure 4.1 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_c$  sur la paroi chaude en fonction du maillage.  $A = 1$  et  $\alpha=0^\circ$ .

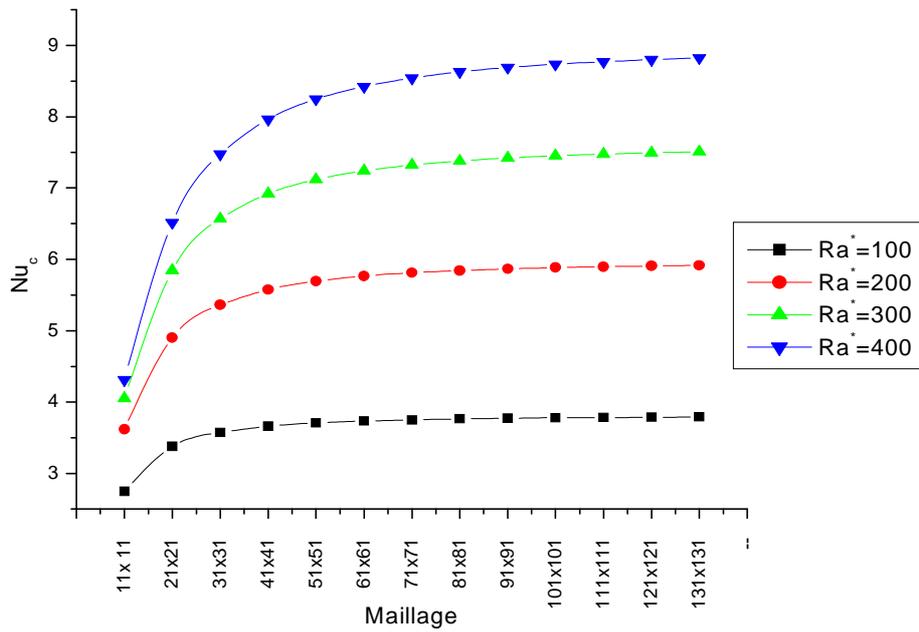


Figure 4.2 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_c$  sur la paroi chaude en fonction du maillage.  $A = 1$  et  $\alpha=45^\circ$ .

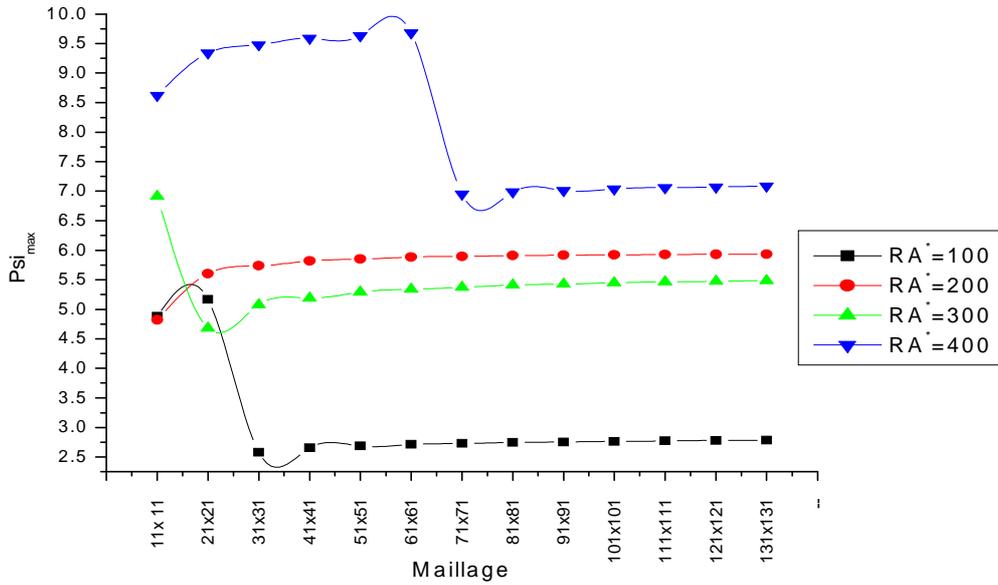


Figure 4.3 : Variation de la valeur de la fonction de courant maximale en fonction du maillage.  $A=1$  et  $\alpha=0^\circ$ .

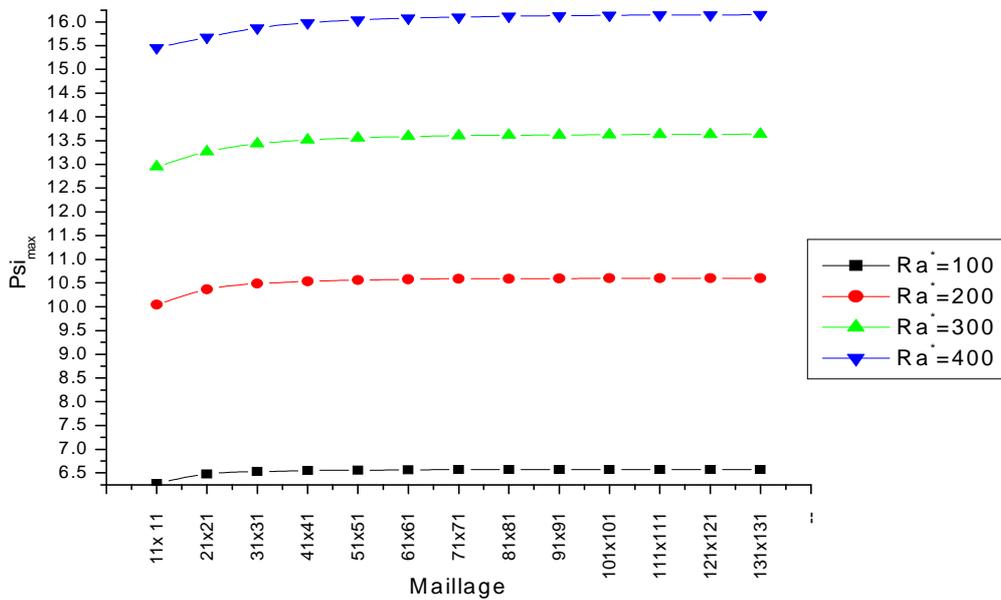


Figure 4.4 : Variation de la valeur de la fonction de courant maximale en fonction du maillage.  $A=1$  et  $\alpha=45^\circ$ .

Nous avons utilisé aussi divers maillages pour essayer de voir si le nombre de cellules dépend de la finesse de maillage ou non. Les figures (4.5.a, 4.5.b et 4.5.c) représentent les lignes

de courant pour les maillages 31 x 93, 51 x 153 et 71 x 213. Ces figures montrent que dans aucun cas plus de cinq cellules ont été produits.

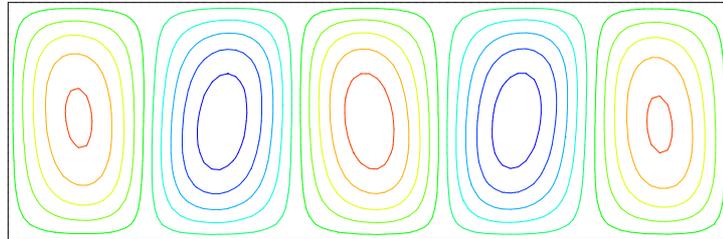


Figure 4.5.a : Lignes de courant pour un maillage 31x93 avec  $\alpha=0^\circ$ ,  $A=3$  et  $Ra^*=100$ .

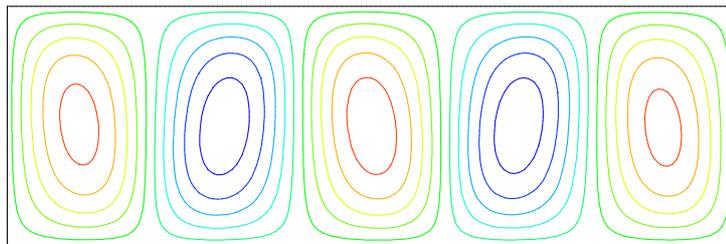


Figure 4.5.b : lignes de courant pour un maillage 51x153 avec  $\alpha=0^\circ$ ,  $A=3$  et  $Ra^*=100$ .

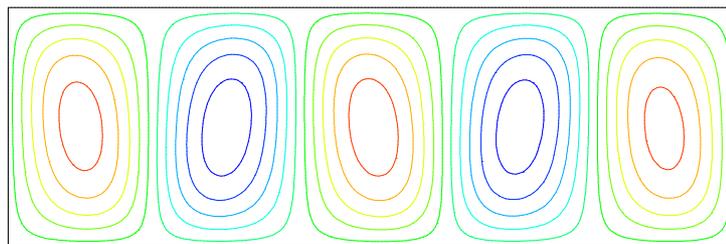


Figure 4.5.c : lignes de courant pour un maillage 71x213 avec  $\alpha=0^\circ$ ,  $A=3$  et  $Ra^*=100$ .

**4-3 Validation du code de calcul :**

S.L. Moya et E. Ramos [14] ont considéré une enceinte parallélépipédique allongée suivant un axe donné et de section rectangulaire, les deux parois horizontales sont différentiellement chauffées alors que les parois verticales sont isolées. Nous avons appliqué notre code de calcul à leur cas et nous avons fait une comparaison de nos résultats avec les leurs.

Ces résultats sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2, pour le cas d'un rapport de forme  $A=1$ , un nombre de Darcy-Rayleigh modifié  $Ra^*=100$ , différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ( $\alpha = 45^\circ$  et  $90^\circ$ ), et pour différents maillages (20x20, 30x30 et 40x40).

maillage	$\alpha=45^\circ$			$\alpha=90^\circ$		
	Référence [14]	Nos calculs	Erreur relative (%)	Référence [14]	Nos calculs	Erreur relative (%)
20x20	6.47	6.446	0.37	4.718	4.697	0.45
30x30	6.529	6.518	0.17	4.727	4.711	0.34
40x40	6.552	6.545	0.11	4.728	4.715	0.27

Tableau 4.1: Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximale avec les résultats de la référence [14].

maillage	$\alpha=45^\circ$			$\alpha=90^\circ$		
	Référence [14]	Nos calculs	Erreur relative (%)	Référence [14]	Nos calculs	Erreur relative (%)
20x20	3.316	3.347	0.93	2.662	2.748	3.13
30x30	3.481	3.562	2.27	2.801	2.907	3.65
40x40	3.564	3.653	2.44	2.873	2.976	3.46

Tableau 4.2: Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude avec les résultats de la référence [14].

On constate un très bon accord entre nos résultats et ceux de la référence [14] avec une précision de l'ordre de 0.93 % à 3.65 % pour le nombre de Nusselt moyen et de 0.11 % à 0.45 % pour la valeur maximale de la fonction de courant.

#### **4-4 Influence du nombre de Darcy-Rayleigh modifié:**

##### **4-4 -1 Isothermes et lignes de courant :**

Les figures (4.6), (4.7) et (4.8) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Darcy-Rayleigh modifié, pour un facteur de forme  $A=1, 3$  et  $5$  respectivement quand  $\alpha = 0^0$ . Elles montrent que la structure de l'écoulement est multicellulaire. Le nombre des cellules de convection et la valeur maximale de la fonction de courant augmentent avec l'augmentation du nombre de Darcy-Rayleigh modifié.

Pour  $Ra=100$  et  $Ra=200$  les figures (4.6.a) et (4.6.b) représentent une symétrie par rapport à l'axe vertical de la cavité. La structure d'écoulement est formée par deux cellules symétriques tournant en sens inverse, et un champ de température sous forme de panache vertical.

Pour  $Ra=300$  et  $Ra=400$ , la structure d'écoulement symétrique du cas ( $Ra=100$  et  $200$ ) est rapidement déstabilisée avec l'apparition d'une troisième cellule comme l'illustrent bien les figures (4.6.c) et (4.6.d).

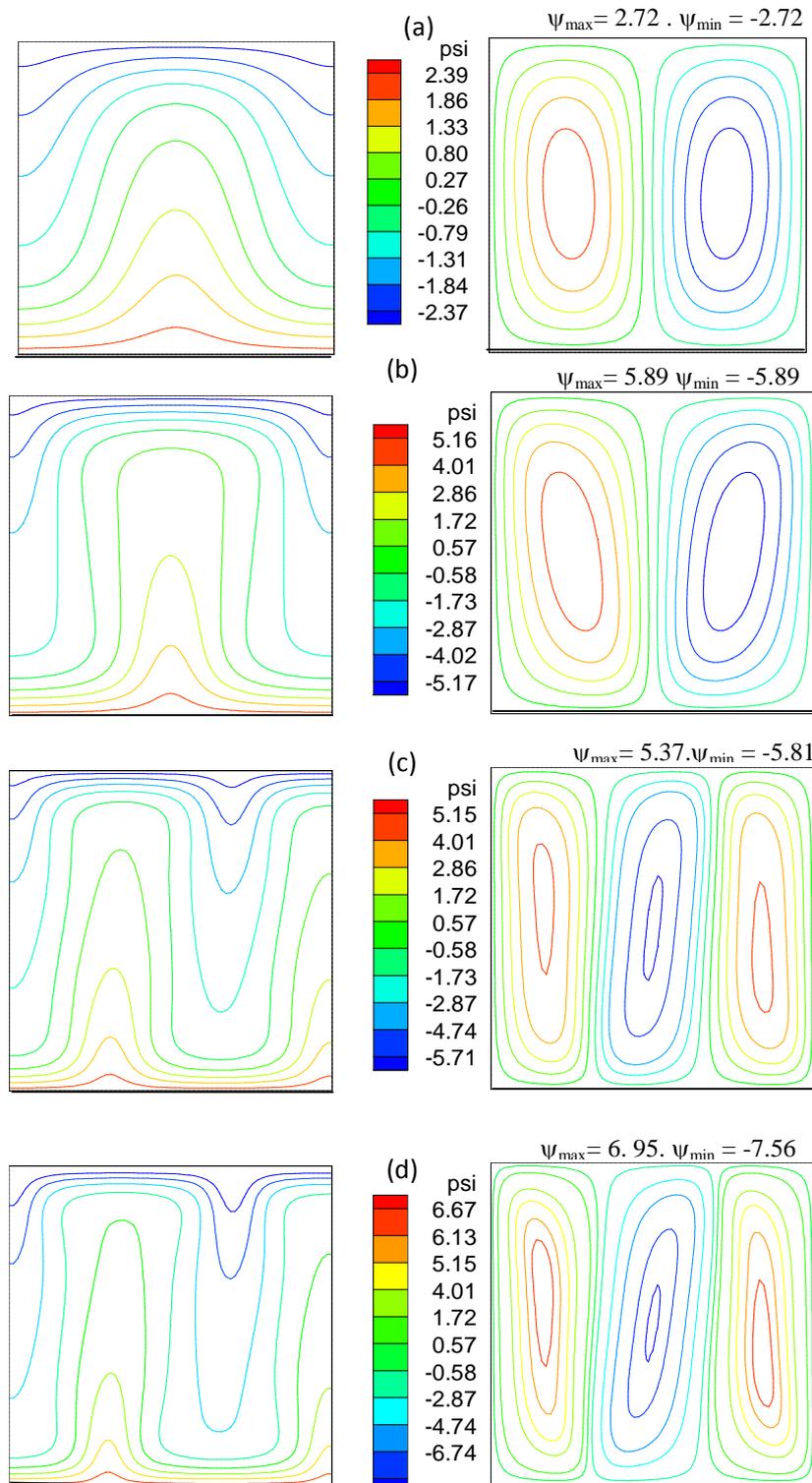


Figure 4.6: Isothermes et lignes de courant pour  $A=1$ ,  $\alpha = 0^0$ , (a): $Ra^*=100$ , (b): $Ra^*=200$ , (c) :  $Ra^*=300$ , (d) :  $Ra^*=400$ .

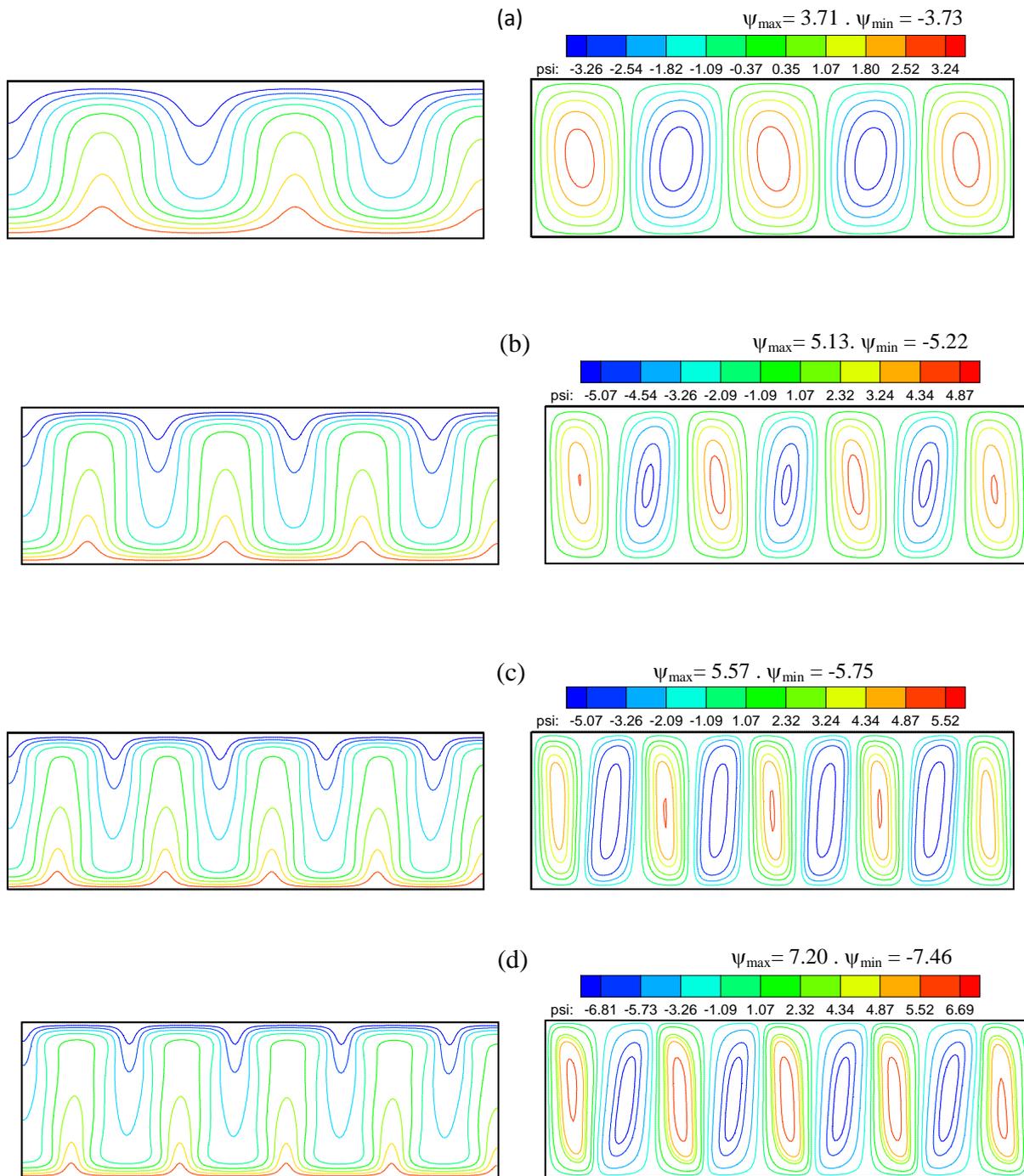
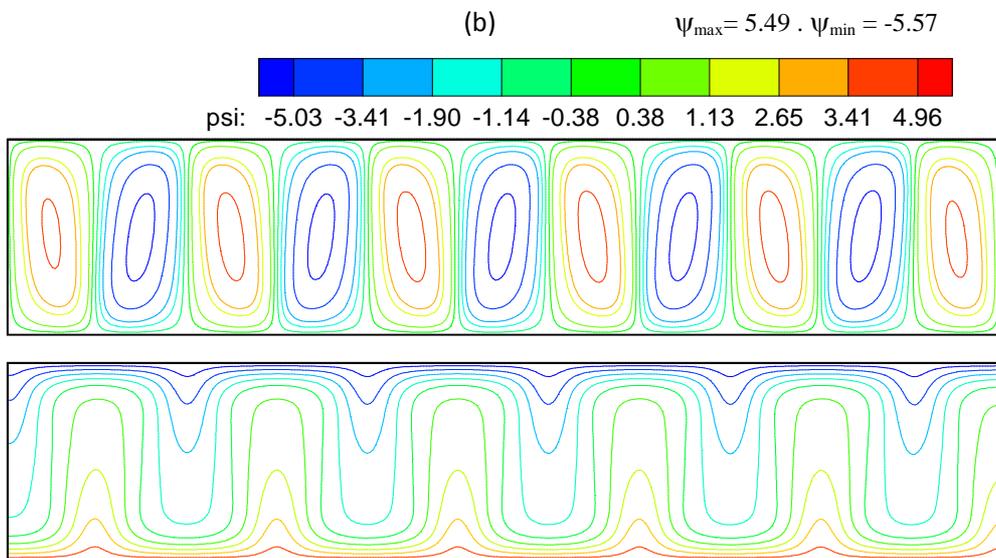
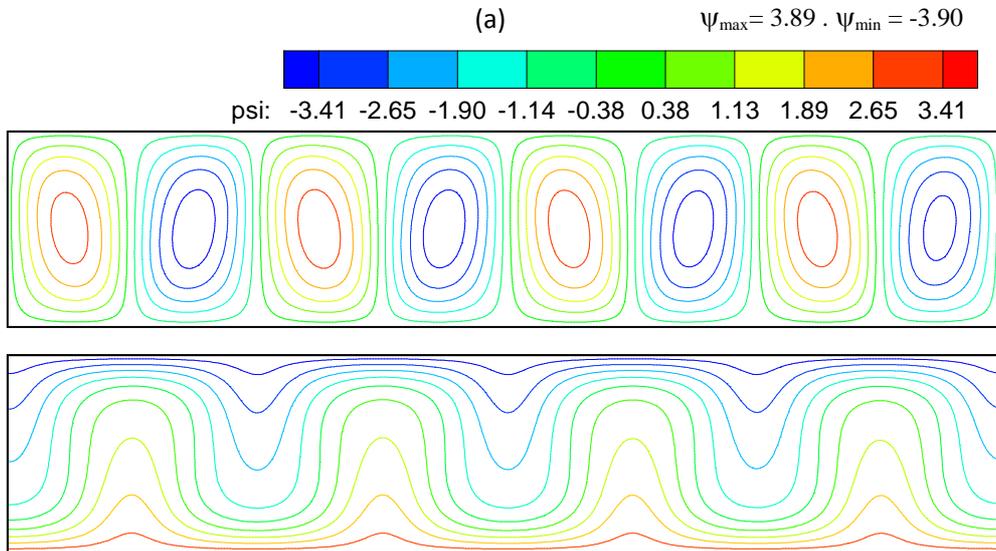


Figure 4.7 : Isothermes et lignes de courants pour  $A=3$ ,  $\alpha = 0^0$ , (a)  $Ra^*=100$ , (b)  $Ra^*=200$ , (c)  $Ra^*=300$ , (d)  $Ra^*=400$ .



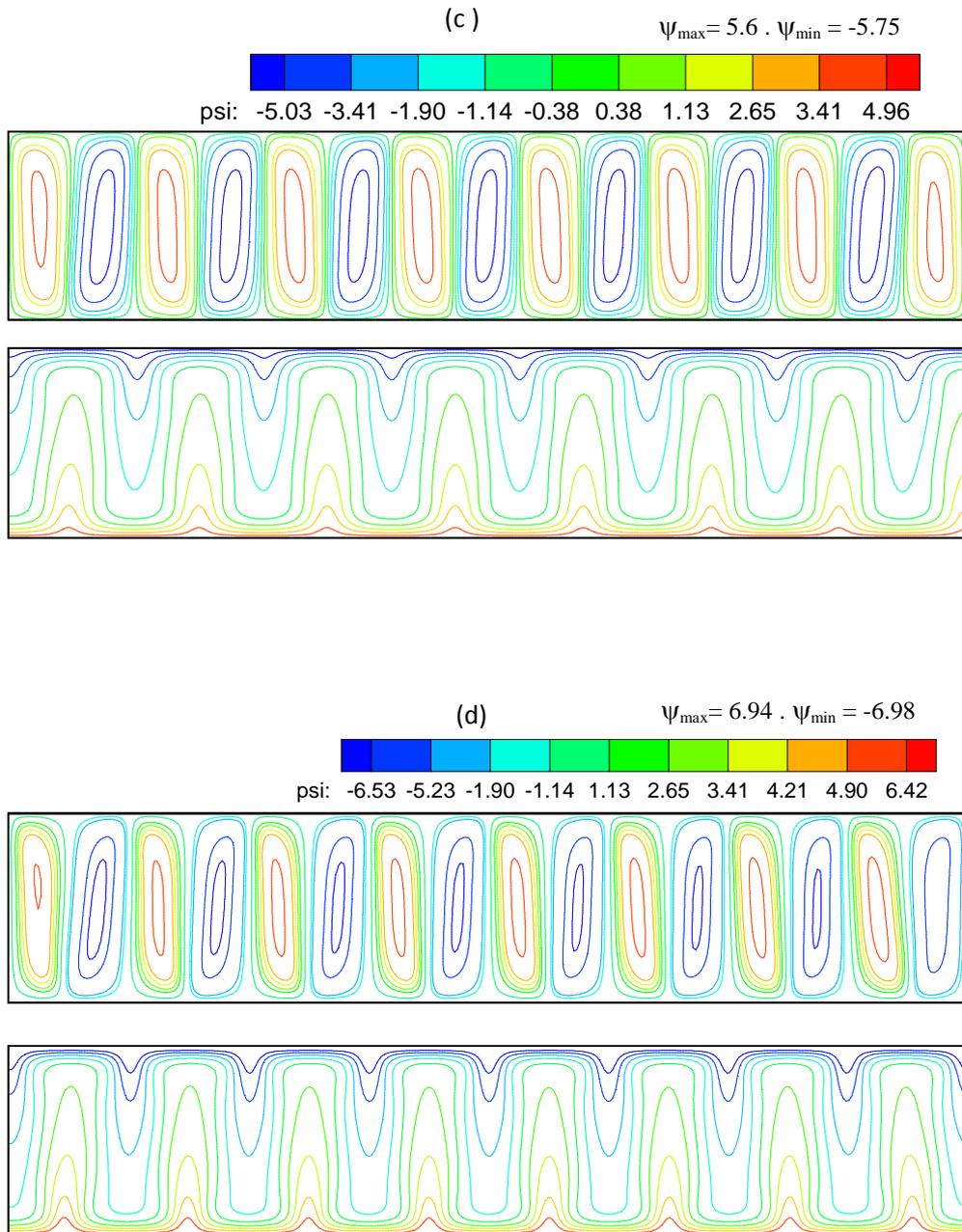


Figure 4.8: Isothermes et lignes de courants pour  $A=5$ ,  $\alpha = 0^0$ , (a):  $Ra^*=100$ , (b) :  $Ra^*=200$ ,  
 (c) :  $Ra^*=300$ , (d) :  $Ra^*=400$ .

**4-4 -2 Nombre de Nusselt local  $Nu_c$  :**

Les variations des nombres de Nusselt locaux le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les une des autres.

La figure (4.9) illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude, et nous permet de remarquer qu'avec l'augmentation du nombre de Darcy-Rayleigh modifié, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, mais aux positions  $0.2 \leq x \leq 0.35$  et  $0.85 \leq x \leq 1$  cette variation se fait presque en sens inverse, ceci est dû au fait qu'à ces positions là, le fluide quitte la paroi comme en témoignent les figures (4.6.a), (4.6.b), (4.6.c) et (4.6.d) déjà vues précédemment.

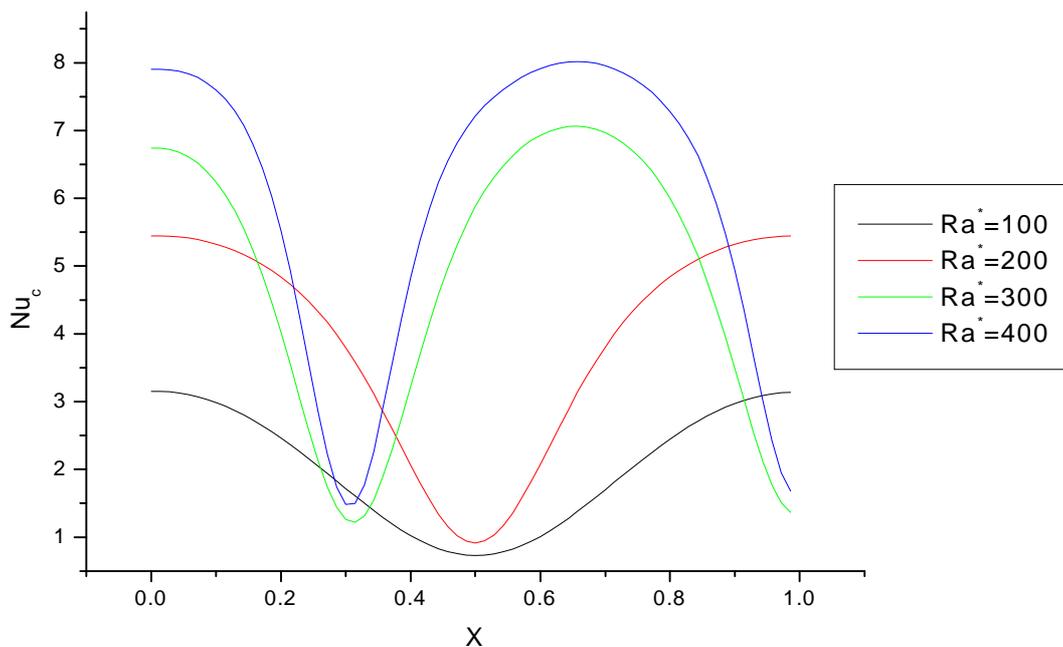


Figure 4.9 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude  $Nu_c$  pour différents  $Ra^*$ .  $A= 1$  et  $\alpha=0^\circ$ .

Les figures 4.10 et 4.11 qui illustrent respectivement pour  $A=3$  et  $A=5$  les variations du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude, montrent que ces variations présentent plusieurs maximums et minimums qui dénotent donc la présence d'un écoulement multicellulaire, chaque paire de cellules voisines sont contrarotatives, pour faire, soit éloigner du fluide de cette paroi,

soit le faire ramener vers cette dernière. Ce qui nous met en accord avec les figures (4.8.a), (4.8.b), (4.8.c) et (4.8.d) déjà vues plus haut.

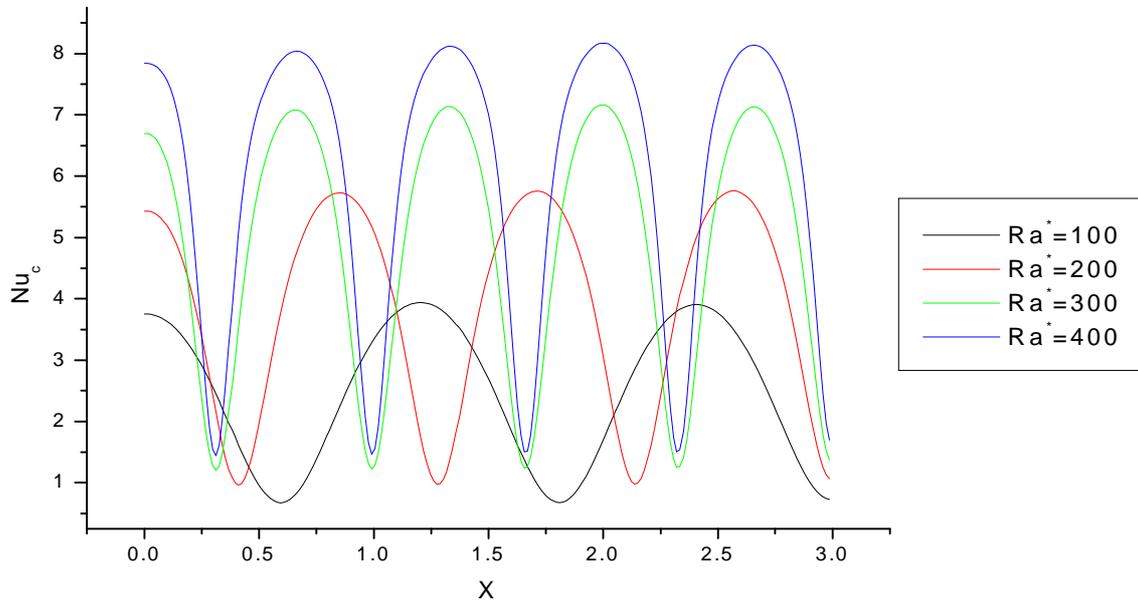


Figure 4.10 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude  $Nu_c$  pour différents  $Ra^*$ .  $A=3$  et  $\alpha=0^\circ$ .

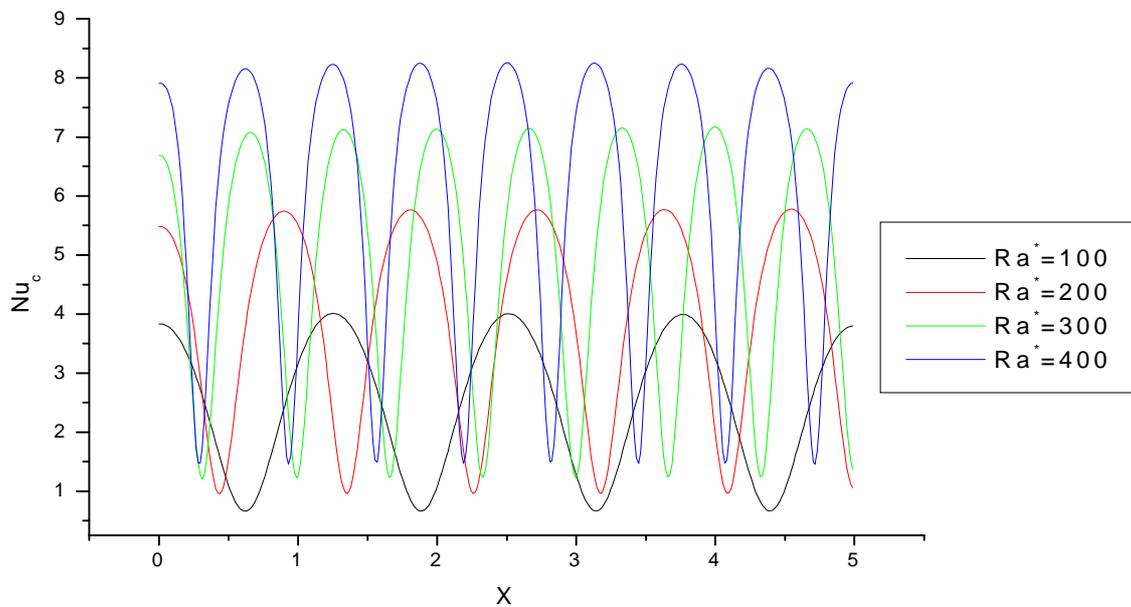


Figure 4.11 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude  $Nu_c$  pour différents  $Ra^*$ .  $A=5$  et  $\alpha=0^\circ$ .

#### 4-4 -3 Nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}_c$ :

La figure (4.12) illustre les variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh modifié, ce nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Darcy-Rayleigh modifié, donc le transfert de chaleur devient plus intense avec l'accroissement du nombre de Darcy-Rayleigh modifié.

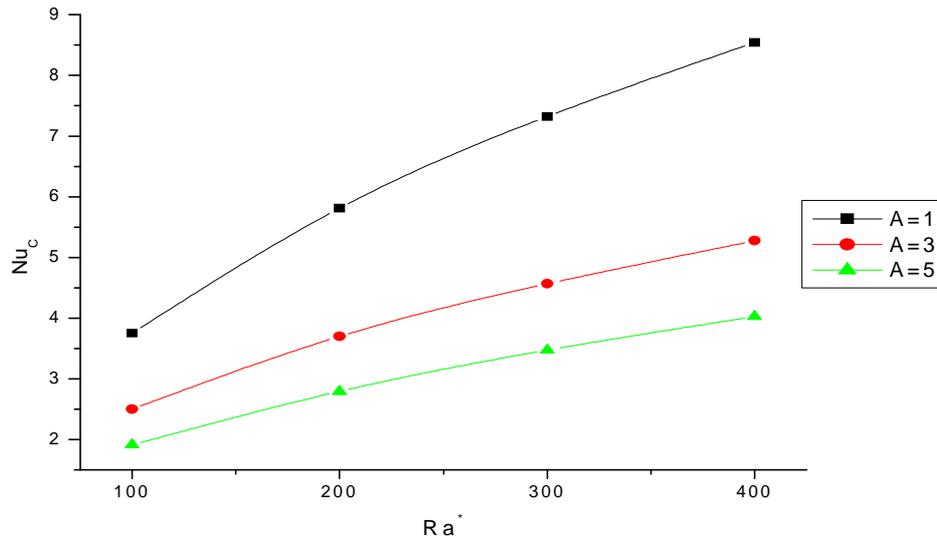


Figure 4.12 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_c$  sur la paroi chaude en fonction du  $Ra^*$  pour différents facteurs de forme  $A$ .  $\alpha=45^\circ$ .

#### 4-5 Influence du facteur de forme:

##### 4-5-1 Isothermes et lignes de courant :

Les figures (4.13.a), (4.13.b) et (4.13.c) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du facteur de forme de la cavité quand  $\alpha = 0^\circ$  et  $Ra^* = 400$ .

Ces figures montrent que le facteur de forme de la cavité influe sur le mode du transfert de chaleur, il reste toujours dominé par une convection multicellulaire et le nombre des cellules augmente.

Pour  $A=1$ , trois régions clairement identifiables où les cellules de convection contrarotatives se développent.

Pour  $A=3$ , sur la figure (4.13.b), ce sont neuf cellules contrarotatives de convection qui se développent aussi. Les cellules représentées avec la couleur rouge ont un sens de rotation trigonométrique et celles en bleu ont un sens de rotation contraire (horaire).

Pour  $A=5$ , la figure (4.13.c), représente une symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe vertical de la cavité. Les cellules contrarotatives aussi et qui sont au nombre 16 permettent justement cette configuration.

Sur ces mêmes figures (4.13.a), (4.13.b) et (4.13.c) qui montrent que le facteur de forme de la cavité influe peu sur la valeur maximale de la fonction de courant, celle-ci augmente de 3% quand  $A$  varie de 1 à 3 et elle diminue de 0.1% quand  $A=5$ .

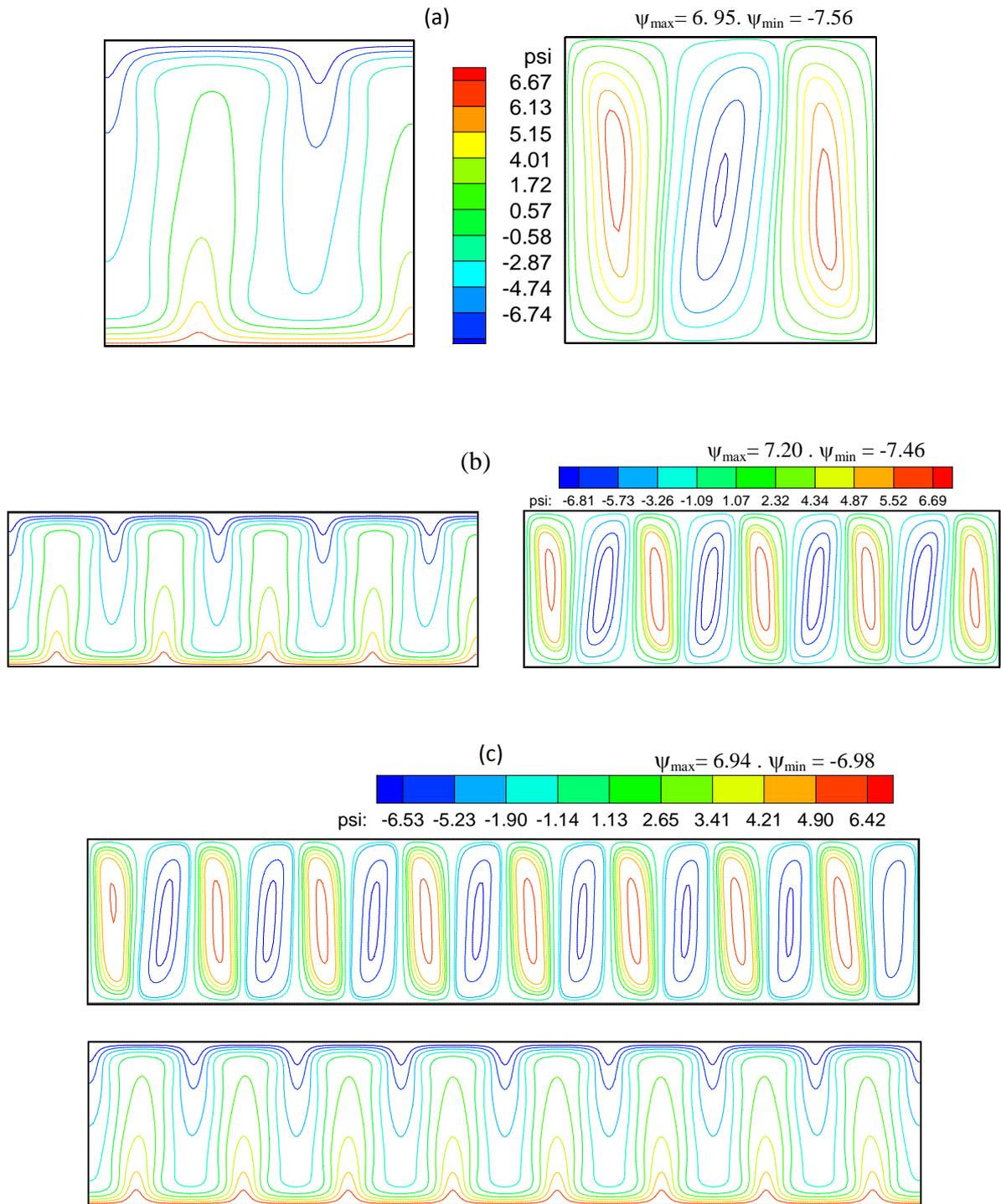


Figure 4.13: Isothermes et lignes de courants pour  $Ra^*=400, \alpha = 0^0$ ,

(a) :  $A=1$ , (b) :  $A=3$ , (c) :  $A=5$ .

#### 4-5 -3 Nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}_c$ :

La figure (4.14) illustre les variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du facteur de forme de la cavité, ce nombre diminue avec l'accroissement du facteur de forme de la cavité, donc le transfert de chaleur s'intensifie lorsque le facteur de forme de la cavité égal à l'unité dans pour une inclinaison de  $45^\circ$ .

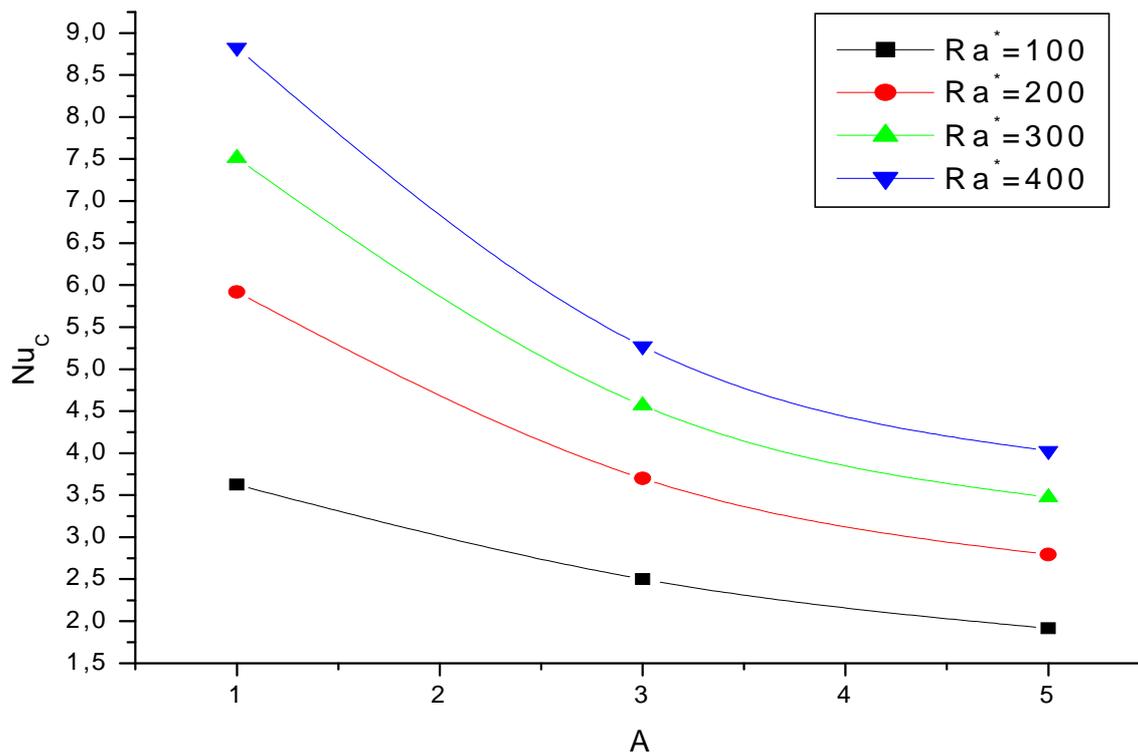


Figure 4.14 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_c$  sur la paroi chaude en fonction du facteur de forme A. pour différents  $Ra^*$  et  $\alpha=45^\circ$ .

#### 4-6 Influence de l'angle d'inclinaison :

##### 4-6 -1 Isothermes et lignes de courant :

Les figures (4.15), (4.16) et (4.17) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison, pour  $A=1, 3$  et  $5$  respectivement, quand  $Ra^*=100$ .

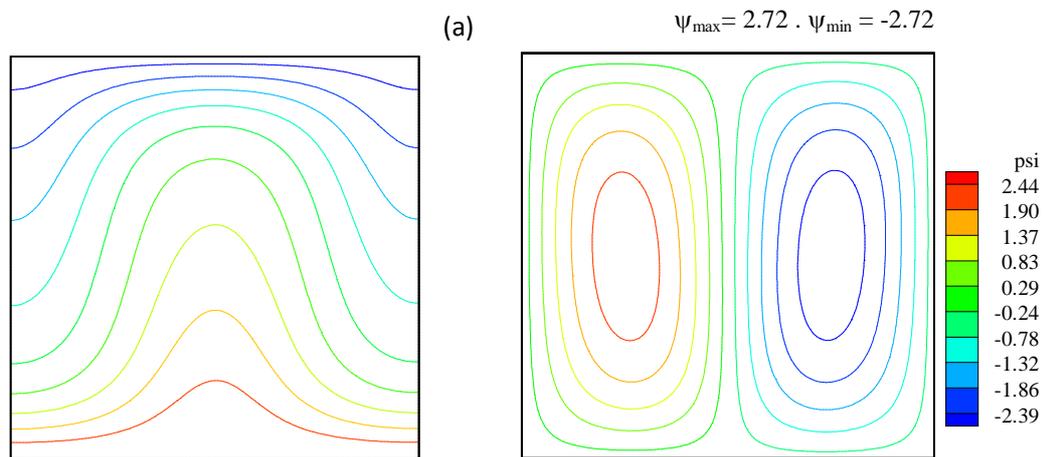
Pour un facteur de forme  $A= 1$ , et un angle d'inclinaison  $\alpha \geq 15^\circ$ ; une seule cellule a été obtenue. La valeur de la fonction de courant augmente quand  $Ra^*$  augmente, ce qui indique un

mouvement plus vigoureux. En fonction de l'angle d'inclinaison, la valeur de la fonction de courant  $\psi$  est maximale au voisinage de l'inclinaison  $\alpha=30^\circ$ .

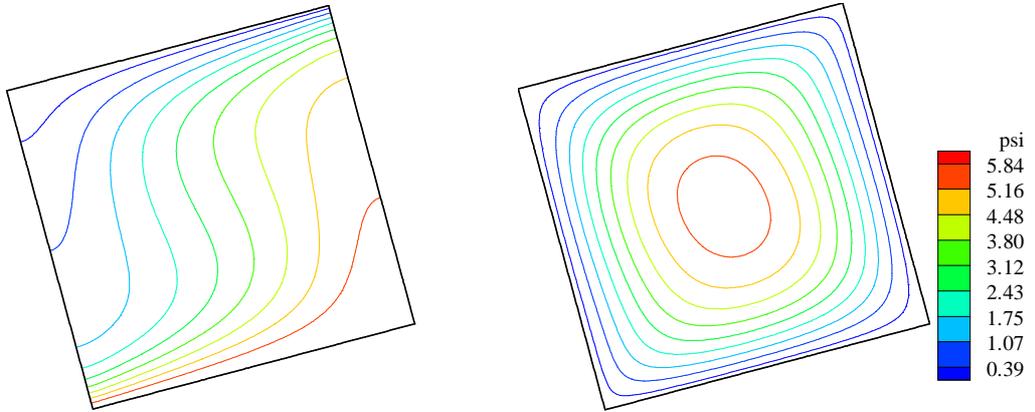
Les Géométries avec un facteur de forme A supérieur à l'unité présentent une plus grande variété de modes de convection.

Pour un facteur de forme  $A = 3$  et  $\alpha \geq 45^\circ$  ; les lignes de courant présentent une cellule unique où tout le fluide à l'intérieur de la cavité poreuse circule dans le même sens et la valeur de la fonction de courant augmente avec l'inclinaison du système. Pour des inclinaisons comprises entre  $\alpha=15^\circ$  et  $\alpha=30^\circ$ , nous avons vu qu'une inclinaison optimum est à rechercher pour trouver un meilleur transfert, mais l'écoulement du fluide dans la cavité reste dans le même sens. Pour  $0^\circ < \alpha \leq 15^\circ$  trois cellules de convection se développent avec des directions de rotation alternées. Et pour  $\alpha=0^\circ$ , nous avons cinq cellules pour  $Ra^* = 100$ , sept cellules pour  $Ra^* = 200$  et neuf cellules pour  $Ra^* = 300$  et  $400$  qui se développent avec des directions de rotation aussi alternées.

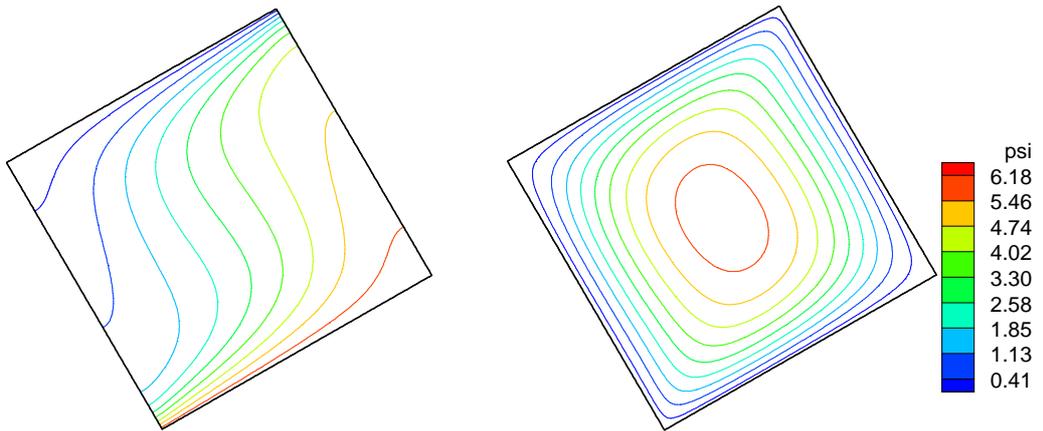
Le cas  $A=5$  ; présente essentiellement des caractéristiques d'écoulement similaires à celles trouvées pour  $A=3$ . La seule différence pour ce cas est le nombre de cellules qui apparaissent le plus grand nombre de cellules correspondant donc à de faibles angles d'inclinaison.



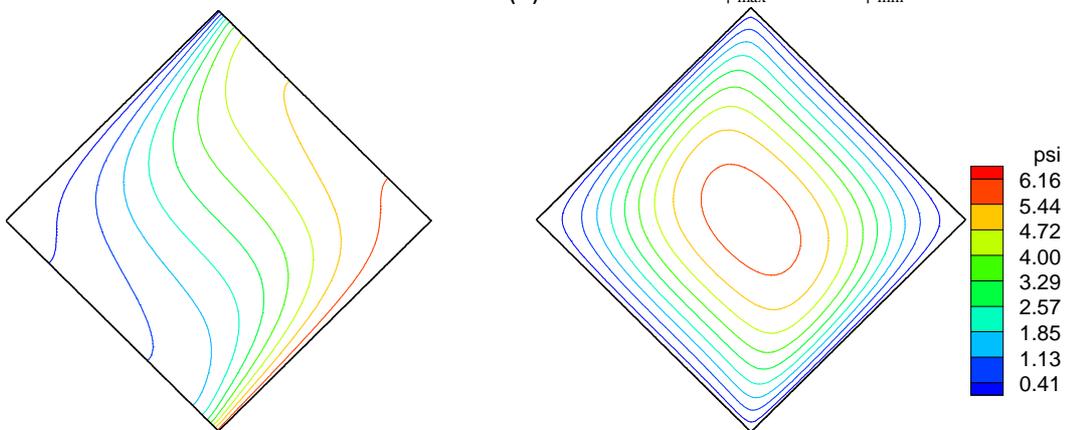
(b)  $\psi_{\max} = 6.22 \cdot \psi_{\min} = 0$



(c)  $\psi_{\max} = 6.59 \cdot \psi_{\min} = 0$



(d)  $\psi_{\max} = 6.57 \cdot \psi_{\min} = 0$



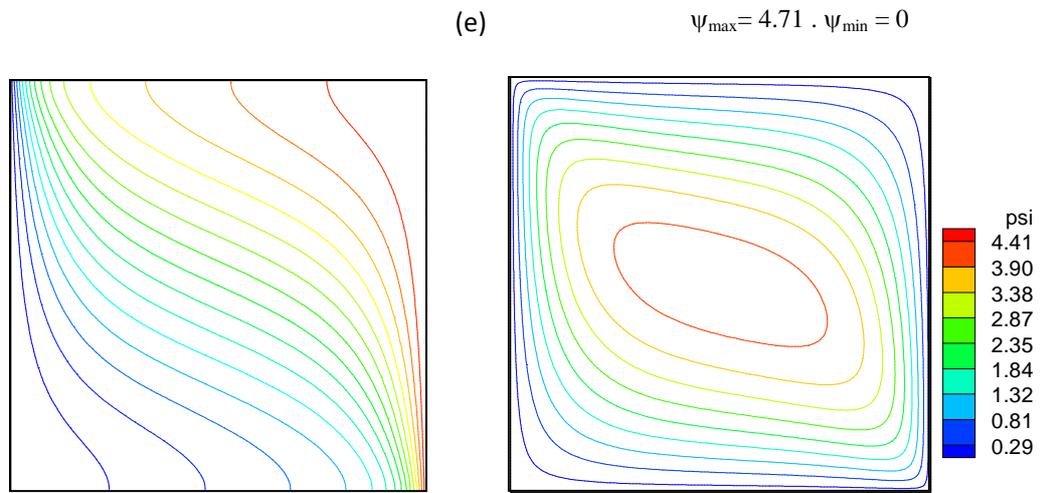
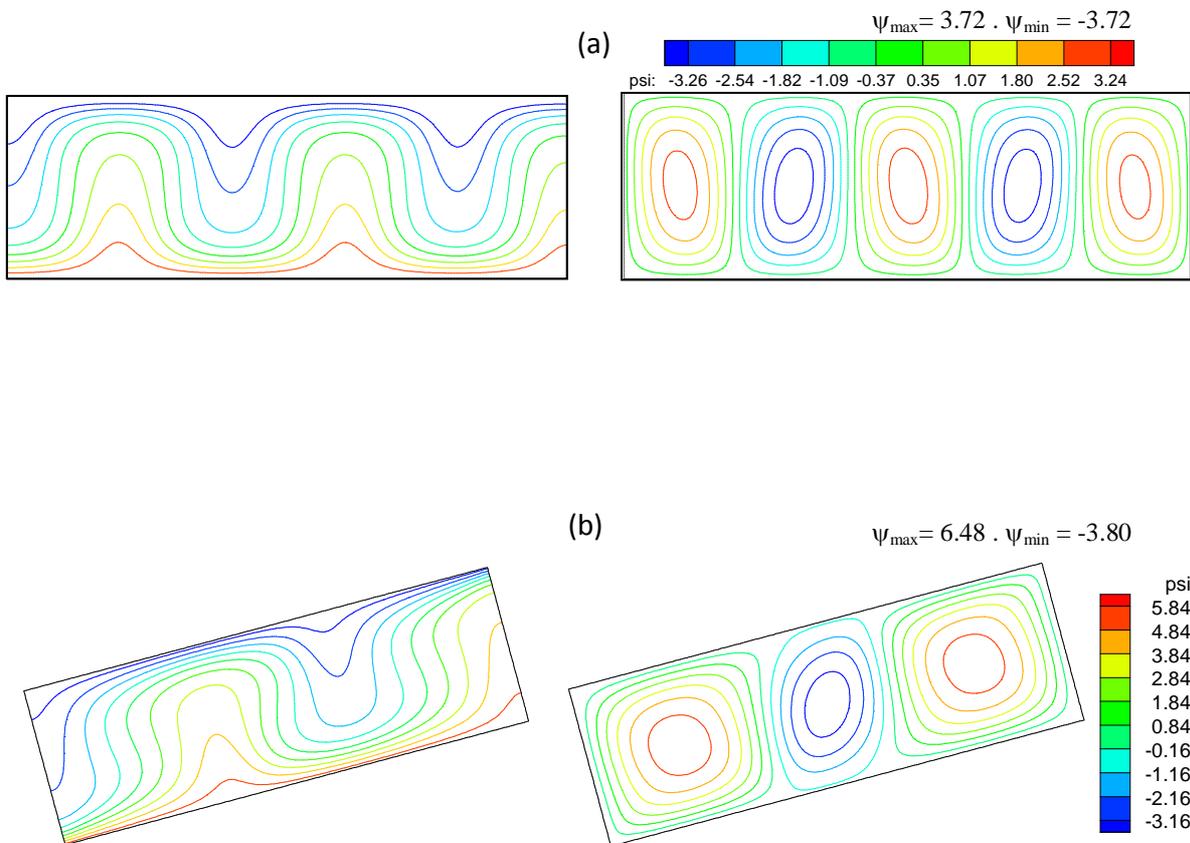


Figure 4.15 : Isothermes et lignes de courants pour  $A=1$ ,  $Ra^*=100$ .

(a) :  $\alpha = 0^0$ , (b) :  $\alpha=15^0$ . (c) :  $\alpha=30^0$ . (d) :  $\alpha=45^0$ . (e) :  $\alpha=90^0$ .



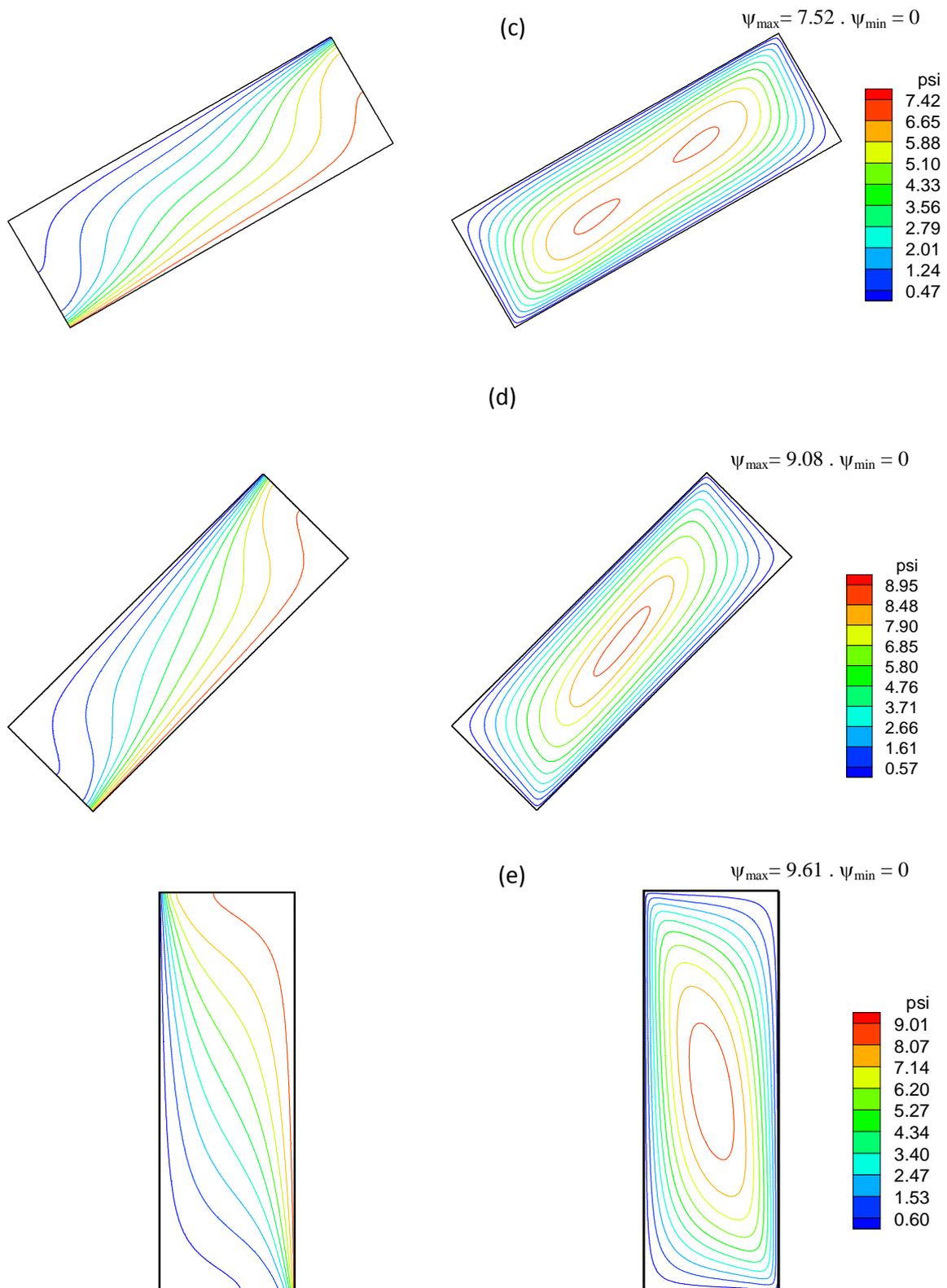
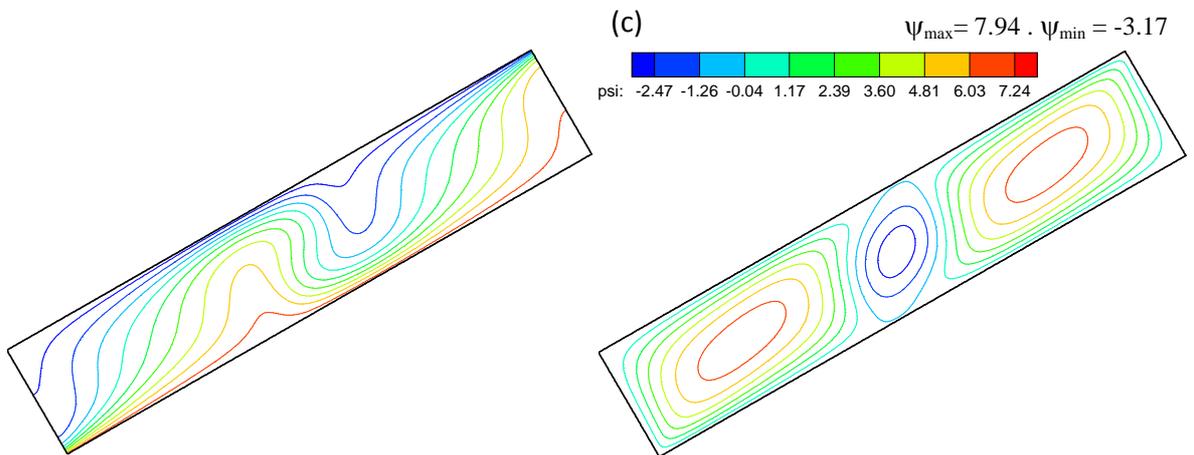
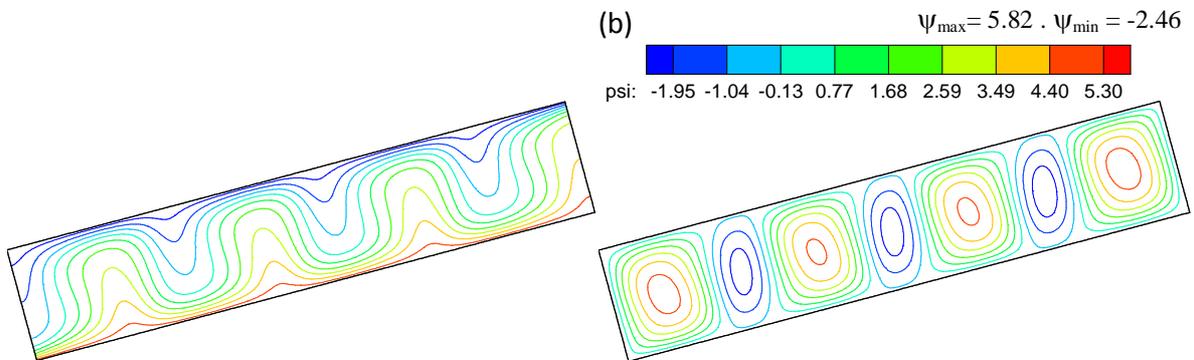
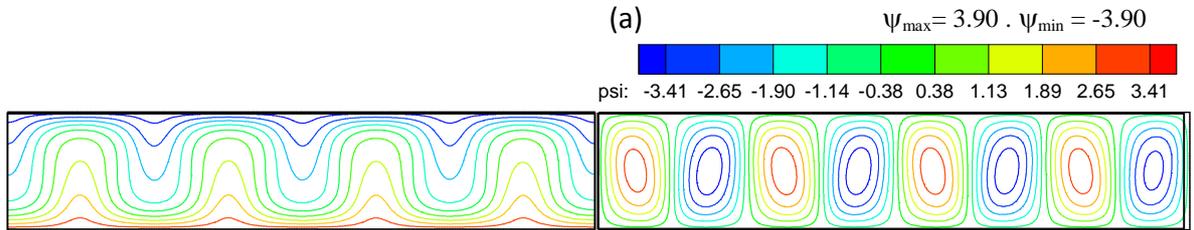


Figure 4.16 : Isothermes et lignes de courants pour  $A=3$ ,  $Ra^*=100$ .

(a):  $\alpha = 0^\circ$ , (b) :  $\alpha=15^\circ$ . (c) :  $\alpha=30^\circ$ . (d) :  $\alpha=45^\circ$ . (e) :  $\alpha=90^\circ$ .



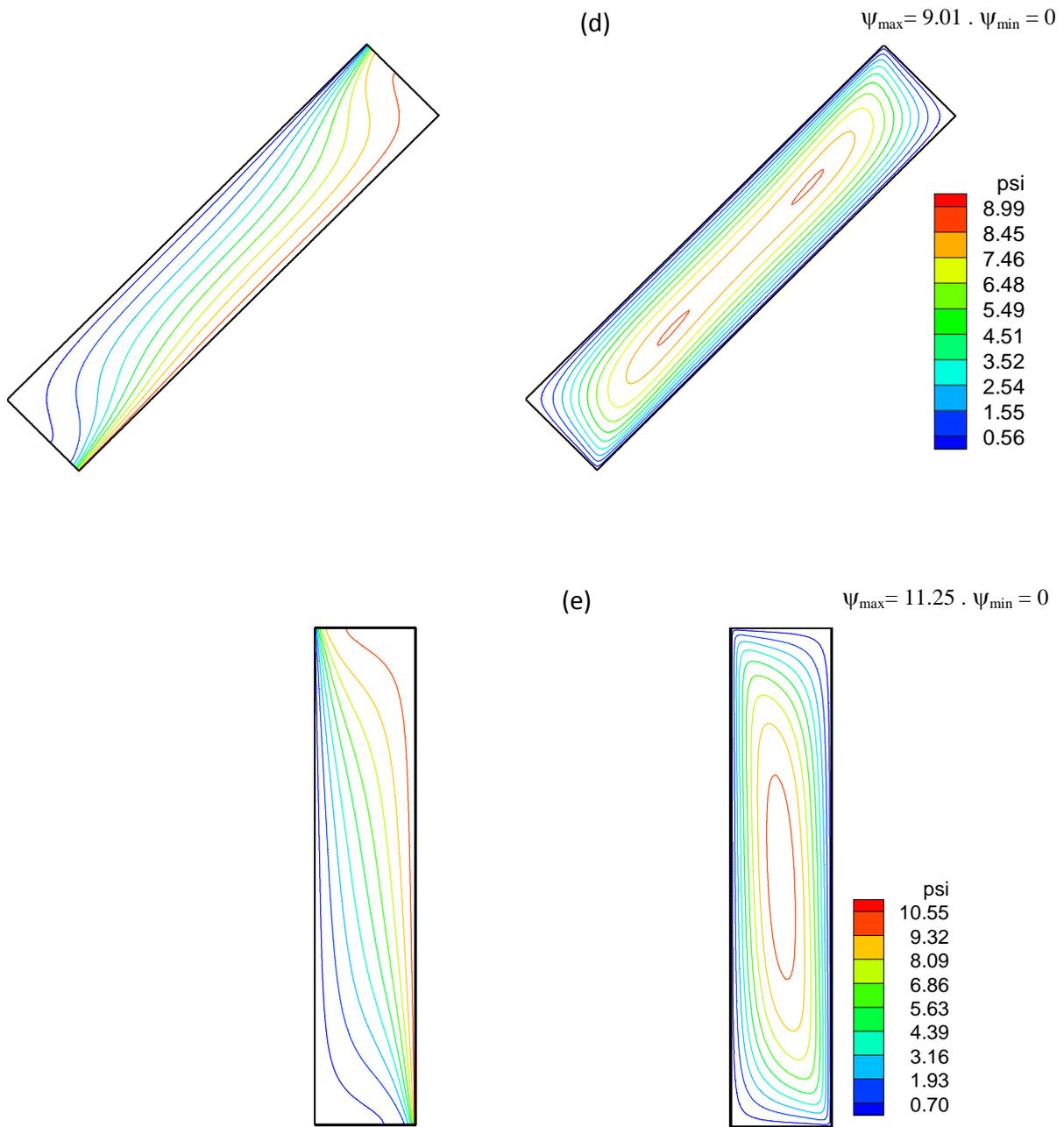


Figure 4.17 : Isothermes et lignes de courants pour  $A=5$ ,  $Ra^*=100$ .

(a):  $\alpha = 0^0$ , (b) :  $\alpha=15^0$ . (c) :  $\alpha=30^0$ . (d) :  $\alpha=45^0$ . (e) :  $\alpha=90^0$

#### 4-6 -2 Nombre de Nusselt local $Nu_c$ :

La figure (4.18) illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude, et nous permet de remarquer que pour le facteur de forme  $A=3$ , si l'inclinaison de notre cavité est supérieure à  $30^\circ$  le nombre de Nusselt local décroît d'une manière monotone le long de la paroi chaude, et donc nous sommes en présence d'un écoulement monocellulaire, la valeur maximale se situe à la position  $x=0$  et donc le fluide arrive vers la paroi à cette position, et la valeur minimale est à la position  $x=3$  et donc le fluide quitte la paroi à cette position, tout ceci nous amène à conclure que notre écoulement monocellulaire se fait dans un sens trigonométrique.

Pour des inclinaisons inférieures à  $30^\circ$  la variation du nombre de Nusselt local présente des maximums et des minimums ce qui dénote que nous sommes en présence d'un écoulement multicellulaire, car un maximum correspond à la juxtaposition de deux cellules ramenant du fluide vers la paroi, et un minimum correspond à la juxtaposition de deux cellules éloignant du fluide de la paroi. Toute cette analyse nous en accord avec les figures (4.16.a), (4.16.b), (4.16.c), (4.16.d) et (4.16.c),

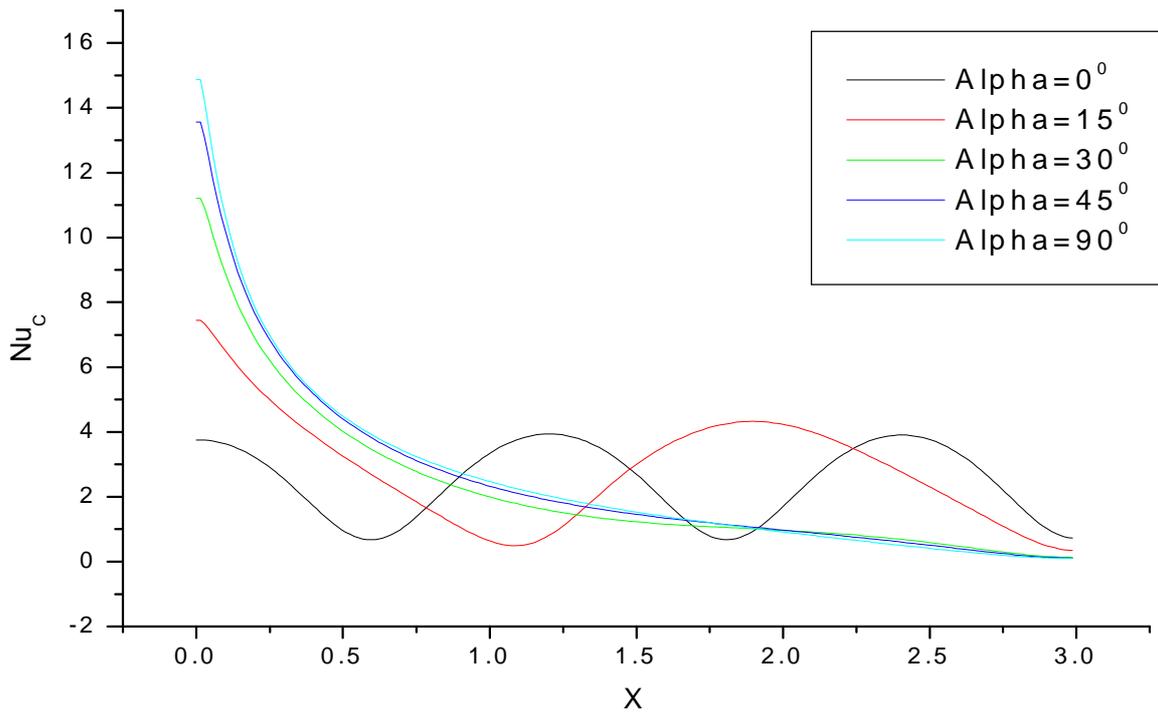


Figure 4.18 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude  $Nu_c$  pour différents  $\alpha$ .  
 $Ra^*= 100$  et  $A=3$ .

#### 4-6 -3 Nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu_c}$ :

La figure (4.19) présente la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh modifié  $Ra^*$ , pour différents  $\alpha$ , quand  $A=1$ . Elle montre que les transferts s'uniformisent mieux jusqu'à l'inclinaison  $\alpha=45^\circ$ , au-delà de cette dernière une inclinaison optimum est rechercher pour obtenir le meilleur transfert de chaleur.

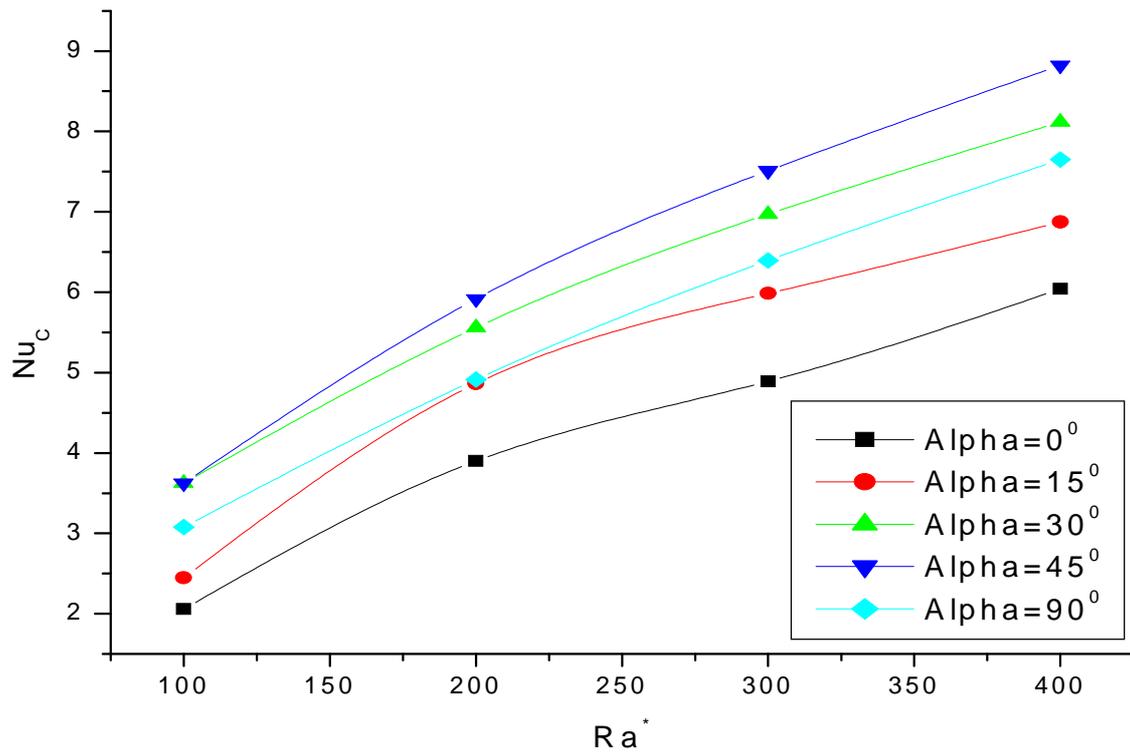


Figure (4.18) : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_c$  sur la paroi chaude en fonction de  $Ra^*$ , pour différents  $\alpha$ .  $A=1$

## Conclusion

Le phénomène de la convection naturelle dans une cavité poreuse bidimensionnelle saturé d'un fluide newtonien a été étudié au moyen d'une méthode numérique. La convection monocellulaire ou multicellulaire a lieu selon le facteur de forme, le nombre de Darcy-Rayleigh modifié et l'angle d'inclinaison.

Pour l'angle d'inclinaison  $\alpha=0^\circ$  le mode principal de transfert thermique est la convection multicellulaire, pour  $\alpha \neq 0^\circ$ , le comportement du système de la convection naturelle est complètement différent, lorsque la cavité poreuse est inclinée, les deux modes de convection sont présents. Nous avons remarqué que l'écoulement s'intensifie le plus quand  $\alpha=90^\circ$  pour tous les facteurs de formes considérés, sauf pour le cas  $A=1$  ou un angle  $\alpha$  est à rechercher pour avoir une valeur optimum de la valeur de la fonction de courant.

Aux angles d'inclinaison proches de zéro le mode préféré de la circulation est le mode multicellulaire, tandis qu'à de plus grands angles d'inclinaison, le mode préféré est monocellulaire. Le changement se produit à environ  $30^\circ$  pour  $A = 3$  et  $5$ . Nous avons constaté que le nombre maximum de cellules dans le cas  $A=3$  est  $9$  tandis que pour  $A = 5$ ,  $16$  cellules apparaissent, pour  $\alpha=0^\circ$ . Nous avons analysé ce point en détail, et divers maillages utilisés pour essayer de voir si le nombre de cellules dépend de la finesse du maillage ou non. Les maillages  $31 \times 93$ ,  $51 \times 153$  et  $71 \times 213$  ( $A=3$ ) ont été utilisés et dans aucun cas plus de neuf cellules ont été trouvés.

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'étude en considérant le cas tridimensionnel de notre enceinte, ceci en considérant bien sûr la formulation en variables primitives (vitesse-pression) et l'utilisation de l'algorithme Simpler.

# Annexe A

## Milieu Poreux

### Caractérisation d'un milieu poreux

#### 1. Définition du milieu poreux :

Le milieu poreux est composé d'une matrice solide, à l'intérieur de laquelle se trouvent des pores reliés entre eux ou éventuellement isolés. On peut distinguer :

- Les matrices solides non consolidées où la phase solide est formée de grains (par exemple le sable, le gravier, billes de verre, d'acier...), pratique pour l'expérimentation.
  
- Les matrices solides consolidées (par exemple les roches calcaires, les grés, l'argile, le bois, tissu biologique . . .).

Dans le cas de la matrice solide non consolidée les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides. On peut alors classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores :

1) le milieu est saturé d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).

2) le milieu est composé de plusieurs fluides non miscibles. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau-huile-gaz dans les roches pétrolières, ou un sol partiellement saturé d'eau, la deuxième phase étant l'air).

3) le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides. Il agit en général comme un filtre, mais ses propriétés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

## 2. Paramètres :

### 2.1 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

L'échelle du pore  $d$  varie généralement de  $0.05\mu\text{m}$  pour les nano pores, à  $0.5\text{mm}$  pour les macro pores. Or la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse et la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux  $L$ . Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un *Volume Élémentaire Représentatif* V.E.R (figure 1) du milieu. De plus, l'échelle  $l$  du V.E.R doit donc vérifier :

$$d \leq l \leq L$$

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le V.E.R. Cela permet de représenter un point dans un nouveau milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique. Lorsque les propriétés locales, définies sur le V.E.R, sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique. Sauf au cas particulier, toutes les grandeurs (pression, vitesse, température) apparaissant dans les différents modèles seront définies sur le V.E.R.

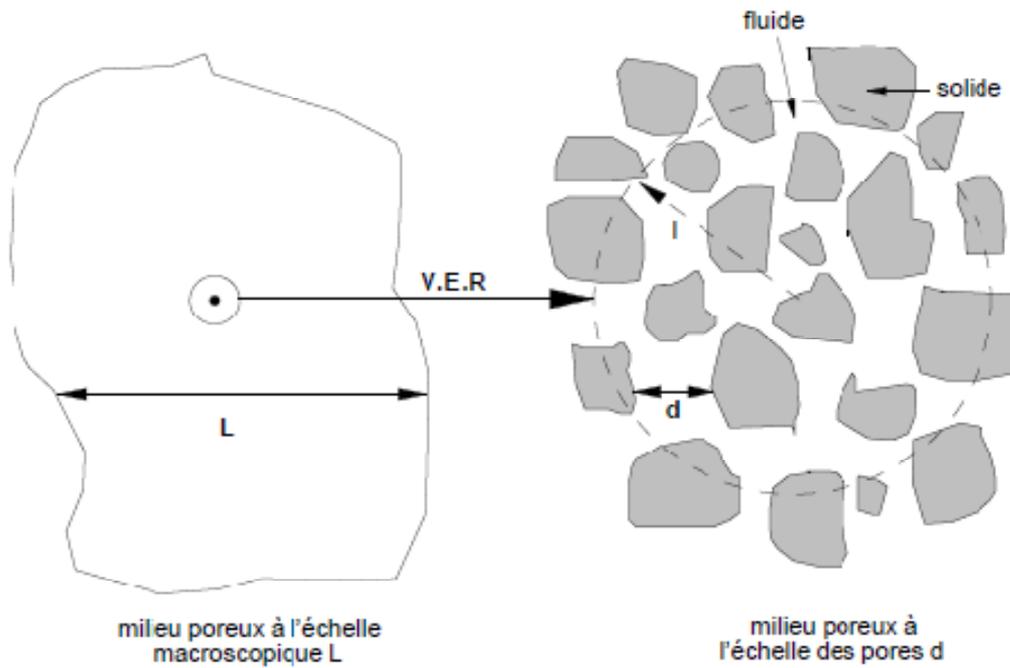


Figure 1 : La taille intermédiaire  $l$  du (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique  $L$  et à l'échelle des pores  $d$ .

## 2.2 Porosité :

La porosité  $\varepsilon$  est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}$$

La proportion occupée par la matrice solide est donc donnée par:  $1 - \varepsilon$ . En fait  $\varepsilon$  est plus exactement appelé *porosité totale*. En effet, cette définition prend en compte les pores fermés. On introduit donc une porosité accessible, définie comme le rapport du volume des pores connectés sur le volume total. Cela n'est possible que si on connaît suffisamment la structure du milieu poreux, elle est peu utilisée en pratique. Cette distinction n'aura pas lieu dans l'étude qui suit, les milieux expérimentaux se font par empilement (matrice solide non consolidée). Pour les milieux poreux naturels  $\varepsilon$  n'excède pas 0.66 (pour l'ardoise en poudre). Néanmoins cela peut être plus élevé pour des milieux poreux industriels (0.9 en moyenne pour les fibres de verre).

Beaucoup de résultats sont issus de modèles géométriques particuliers de grains ou de pores. Ils sont obtenus dans le cas d'empilements réguliers de sphères de même diamètre. Ces empilements forment des réseaux et la porosité dépend fortement de l'arrangement (figure 2). Dans le cas d'un réseau cubique il y a beaucoup plus d'espace pour le fluide ( $\varepsilon = 0.476$ ) que dans le cas d'un réseau cubique à face centré ( $\varepsilon = 0.255$ ) qui est le réseau régulier, le plus compact que l'on puisse obtenir avec des sphères de même diamètre.

Il existe de nombreux cas où la porosité est variable mais on la considère comme uniforme.

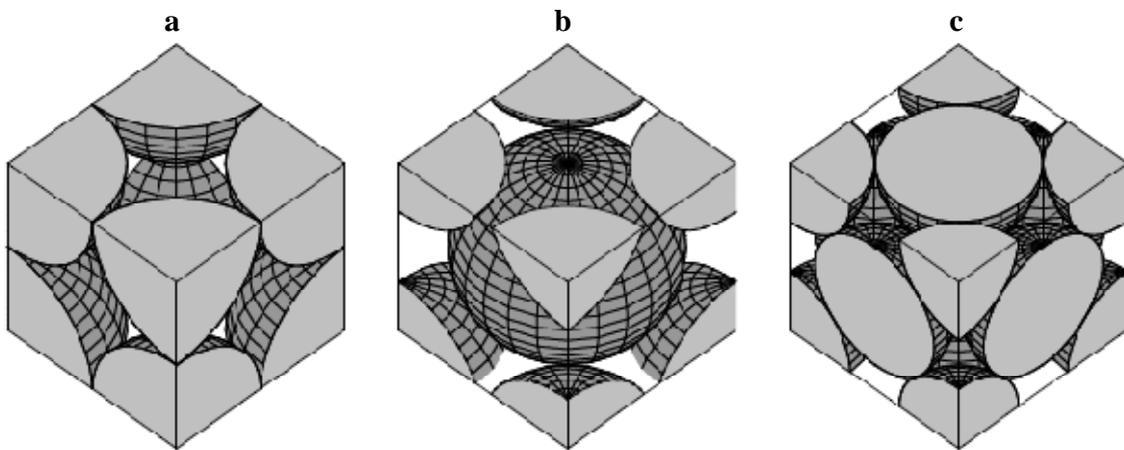


Figure 2 : modèle géométrique par empilement régulier de sphères de même diamètre. (a) : cubique  $\varepsilon = 0.476$ , (b) : cubique centré  $\varepsilon = 0.32$ , (c) : cubique à face centré  $\varepsilon = 0.255$ .

Des mesures expérimentales donnent dans le tableau (1) ci dessous quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

Matériaux	porosité	Matériaux	porosité
Matériau mousseux	0.98	Sable	0.37 – 0.50
Fibre de verre	0.88 – 0.93	Poudre de silice	0.37 – 0.49
Fil à tisser	0.68 – 0.76	Sphère bien empilée	0.36 – 0.43
Grains de silice	0.65	Filtre de cigarettes	0.17 – 0.49
Poudre d'ardoise noire	0.57 – 0.66	Briques	0.12 – 0.34

Cuir	0.56 – 0.59	Poudre de cuivre	0.09 – 0.34
Catalyseur	0.45	Pierre à chaud, Dolomite	0.04 – 0.10
Granulé de pierres	0.44 – 0.45	Houille	0.02 – 0.07
Terre	0.43 – 0.54		

Tableau 1: Porosité de quelques matériaux

### 2.3 Perméabilité

La perméabilité  $K$  se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux.

Généralement  $K$  est déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilité pour différents milieux. Elle se situe entre  $10^{-7}$  et  $10^{-9}$  pour le gravier et  $10^{-13}$  et  $10^{-16} \text{m}^2$  pour l'argile stratifié.

Il est possible d'évaluer la perméabilité  $K$  grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de  $\varepsilon$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

- la relation de Kozeny-Carman (1937), qui donne une estimation satisfaisante de  $K$  dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne  $D$  :

$$K = \frac{D^2 \varepsilon^3}{36C_0(1 - \varepsilon)^2}$$

$C_0$  est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Il est égal à 4.8 pour les grains sphériques et dans ce cas  $D$  représente le diamètre de la sphère. Le tableau ci-dessous représente la perméabilité de quelques matériaux poreux :

Matrice	Perméabilité[m <sup>2</sup> ]	Matrice	Perméabilité[m <sup>2</sup> ]
Briques	$4.8.10^{-15} - 2.2.10^{-13}$	Sable	$2. 10^{-11} - 1.8.10^{-10}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2. 10^{-15} - 4.5.10^{-14}$	Cheveux artificiels	$8.3.10^{-10} - 1.2.10^{-9}$
Cuir	$9.5.10^{-14} - 1.2.10^{-13}$	Plaque de liège	$3.3.10^{-10} - 1.5.10^{-9}$
Poudre d'ardoise noire	$4.9.10^{-14} - 1.2.10^{-13}$	Fils à tisser	$3.8.10^{-9} - 1.10^{-8}$
Terre	$2.9.10^{-13} - 1.4.10^{-11}$	Cigarette	$1.1.10^{-9}$
Fibres de verre	$2.4.10^{-11} - 5.1.10^{-11}$		

Tableau2: la perméabilité de quelques matériaux poreux

# Annexe B

## Méthodes Itératives

### Méthodes itératives pour systèmes linéaires

Pour la résolution des systèmes linéaires:

$$Ax = b \quad (1)$$

Il y a des situations où les méthodes itératives sont très utiles. Par exemple, si la matrice  $A$  possède une très grande dimension et si beaucoup d'éléments de  $A$  sont nuls (matrice creuse), ce qui est le cas pour les discrétisations des équations aux dérivées partielles.

Pour se ramener à un problème de point fixe, on considère une décomposition  $A = M - N$  (splitting) et on définit l'itération:

$$M x_{k+1} = N x_k + b \quad (2)$$

Le choix de la décomposition  $A = M - N$  est important pour la performance de la méthode. D'une part,  $M$  doit être choisie tel que le système (2) soit beaucoup plus facile à résoudre que le système (1). D'autre part, les valeurs propres de la matrice  $M^{-1}N$  doivent satisfaire pour que l'itération (2) converge.

Il y a beaucoup de possibilités de définir la décomposition  $A = M - N$ , Si l'on dénote

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 & \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Et  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  (afin que  $A = L + D + U$ ) les itérations les plus connus sont :

- *Jacobi* :  $M = D, N = -L - U$  ;

- Gauss-Seidel :  $M = D+L, N = -U$  ;

Pour ces deux méthodes, la matrice  $M$  est choisie de manière à ce que le système (2) soit très facile à résoudre. Un avantage de la méthode de Gauss-Seidel est le fait que pour le calcul de la composante  $x_i^{k+1}$  du vecteur  $x_{k+1}$  on n'a besoin que des composantes  $x_i^{k+1}, \dots, x_n^k$  du vecteur  $x_k$ . Alors, on peut utiliser la même variable pour  $x_i^{k+1}$  que pour  $x_i^k$ . Une itération devient donc simplement:

Pour  $i = 1, \dots, n$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)/a_{ii}$$

Une modification intéressante de cet algorithme est la méthode SOR ("successive over-relaxation"):

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= (1 - \omega)x_k + \omega \hat{x} \\ D \hat{x} &= b - Lx_{k+1} - Ux_k \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Où  $\omega$  est un paramètre donné (pour  $\omega = 1$ , SOR se réduit à Gauss-Seidel). Elle est aussi simple à programmer que la précédente.

Les résultats suivants démontrent la convergence dans quelques situations particulières.

**Théorème 1 :** Si la matrice  $A$  est à "diagonale dominante", c-à-d :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Alors l'itération de Jacobi converge.

**Démonstration :** Pour la méthode de Jacobi, on a  $M^{-1}N = -D^{-1}(L + U)$ . La condition (4) implique que  $\|M^{-1}N\|_{\infty} < 1$ .

Pour étudier la convergence de la méthode SOR (en particulier pour Gauss-Seidel), on l'écrit sous la forme équivalente :

$$(D + \omega L)x_{k+1} = ((1 - \omega)D - \omega U)x_k + \omega b$$

Ou encore  $x_{k+1} = H(\omega)x_k + \omega(D + \omega L)^{-1}b$  avec

$$H(\omega) = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U) \quad (5)$$

**Théorème 2 :** Si  $A$  est symétrique et définie positive et si  $\omega \in (0,2)$ , l'itération SOR, définie par (3), converge.

*Démonstration :* Il faut démontrer que toutes les valeurs propres de  $H(\omega)$  satisfont  $|\lambda| < 1$ . Soient  $\lambda$  une valeur propre et  $x \neq 0$  le vecteur propre correspondant:

$$((1 - \omega)D - \omega U)x = \lambda(D + \omega L)x \quad (6)$$

Comme  $(1 - \lambda)D - \omega U = D - \omega A + \omega L$ , la formule (6) devient:

$$\omega Ax = ((1 - \lambda)(D + \omega L)x \quad (7)$$

En multipliant (6) et (7) avec  $x^*$ , on obtient pour  $\alpha = x^*(D + \omega L)x$  (observer que  $U = L^T$ )

$$\lambda\alpha + \bar{\alpha} = (2 - \omega)x^*Dx > 0, (1 - \lambda)\alpha = \omega x^*Ax = \beta > 0 \quad (8)$$

On en déduit

$$0 < \lambda\alpha + \bar{\alpha} = \beta \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\bar{\lambda}} \right) = \beta \cdot \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2}$$

Ce qui implique  $|\lambda| < 1$

Pour quelques matrices, on connaît la valeur de  $\omega$  qui minimise le rayon spectral de  $H(\omega)$  et, par conséquent, qui accélère la convergence par rapport à l'itération de Gauss-Seidel. D'autres méthodes itératives pour des systèmes linéaires sont SSOR ("symmetric successive over-relaxation") et la méthode du gradient conjugué (avec pré-conditionnement).

## Références Bibliographiques

- [1] D. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, 2nd ed. Spingerverlang, New York Inc. (1999).
- [2] D. B. Ingham, I. pop, *Transport phenomena in porous media*, 2nd ed. Pergamon, Amsterdam. (2002).
- [3] A Bahloul, *Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity*, International Journal of Thermal Sciences, vol. 45, no 7, pp. 635-642. (2006).
- [4] A.C. Baytas, *Entropy generation for natural convection in a inclined porous cavity*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 43, pp. 2089-2099. (2000).
- [5] L. Kalla, M. Mamou, P. Vasseur, L. Robillard, *Multiple steady states for natural convection in a shallow porous cavity subject to uniform heat fluxes*, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol 26, Issue 6, pp. 761-770. (1999).
- [6] H. Nawaf, A. Saeid, A. Mohamad, *Natural convection in a square porous cavity with an oscillating wall temperature*, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol 15, Issue 6, pp. 555-566. (2005).
- [7] Y. Varol, F. Oztop, I. Pop, *Numerical analysis of natural convection for a porous rectangular enclosure with sinusoidally varying temperature profile on the bottom wall*, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol 35, pp. 56-64. (2008).
- [8] A. Barletta, S. Lazzari, *2D free convection in a porous cavity heated by an internal circular boundary*, International Journal of Thermal Sciences, vol 45, pp. 917-922. (2006).

- [9] K. Bouhadef, *Simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité à fond sinusoïdal*, 12èmes Journées Internationales de Thermique. Tanger, Maroc du 15 au 17 Novembre 2005.
- [10] Y. Varol, F. Oztop, E. Avci, *Estimation of thermal and flow fields due to natural convection using support vector machines (SVM) in a porous cavity with discrete heat sources*, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol 35, pp. 928–936. (2008).
- [11] E. Baez, A. Nicola's, *2D natural convection flows in tilted cavities: Porous media and homogeneous fluids*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 49, pp. 4773-4785. (2006).
- [12] T. Basak, S. Roy, T. Paul, I. Pop, *Natural convection in a square cavity filled with a porous medium: Effects of various thermal boundary conditions*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 49, pp. 1430-1441. (2006).
- [13] A. Saeid, H. Nawaf, *Natural convection in porous cavity with sinusoidal bottom wall temperature variation*, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 32, pp. 454-463. (2005).
- [14] S.L. Moya, E. Ramos, S. Mihir, *Numerical study of natural convection in a tilted rectangular porous material*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, Issue 4, pp. 741-756. (1987).
- [15] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New York, (1980).
- [16] E.F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat transfer*, McGraw-Hill book company, New York, (1978).

**Title: Numerical study of natural convection in porous media saturated with fluid in a square cavity with variable orientation.**

**Summary:**

Two-dimensional natural convective flow in a tilted rectangular porous material saturated with fluid is analyzed by solving numerically the mass, momentum and energy balance equations, using Darcy's law and the Boussinesq approximation. Isothermal boundary conditions are considered, where two opposite walls are kept at constant but different temperatures and the other two are thermally insulated. The external parameters considered are the tilt angle, the aspect ratio and the Darcy-Rayleigh number. Two main convective modes are found: single and multiple cell convection and their features described in detail. Local and global Nusselt numbers are presented as functions of the external parameters.

**Key words:** naturel convection, porous media, Boussinesq equations, Darcy Law, square cavity.

**العنوان :** دراسة عددية للحمل الحراري الطبيعي في وسط مسامي مشبع بمائع داخل فجوة مربعة مائلة.

### **ملخص :**

قمنا في إطار هذا العمل بدراسة عددية لظاهرة انتقال الحرارة بواسطة الحمل الحراري الطبيعي، داخل تجويف مسامي مربع مائل وثنائي الأبعاد. هذا التجويف مملوء بمائع نيوتوني. وذلك بحل عددي لمعادلات انحفاظ الكتلة والطاقة، باستعمال مقارنة بوسيناسك وقانون دارسي. الشروط الحدية مرتبطة بوجهين متقابلين، درجة حرارتهما ثابتة لكنها مختلفة. والوجهان الآخران معزولين حراريا. العوامل الخارجية المؤثرة والمأخوذة بعين الحسبان هي : زاوية الميلان، عامل الشكل، وعدد دراسي رايلي المعدل. لقد وجدنا الكيفيتين الرئيسيتين للحمل الحراري، الأحادية والمتعددة الخلايا، وكل منهما مشروحة بالتفصيل.

**المفاتيح :** الحمل الحراري الطبيعي، وسط مسامي، مقارنة بوسيناسك، قانون دارسي، فجوة مربعة.

**Titre : Etude numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé de fluide dans une cavité carrée à orientation variable.**

**Résumé :**

La convection naturelle bidimensionnelle dans un matériau poreux carré et incliné, est analysé en résolvant numériquement les équations des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, en utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites considérées correspondent à deux parois opposées maintenues à deux températures uniformes mais différentes et les deux autres étant thermiquement isolées. Les paramètres externes considérés sont l'angle d'inclinaison, le rapport de forme et le nombre de Darcy-Rayleigh modifié. On trouve deux modes principaux de convection: la convection avec un ou plusieurs cellules et leur description est donnée en détail. Les nombres de Nusselt locaux et globaux sont présentés en fonction des paramètres externes.

**Mots-clés** : convection naturelle, milieu poreux, équations de Boussinesq, loi de Darcy, cavité carrée.