

# THESE

Présentée à

L'INSTITUT DES SCIENCES DE LA TERRE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE D'ALGER

Pour l'obtention du MAGISTER

SPECIALITÉ : PHYSIQUE

OPTION : GEOPHYSIQUE

par

Mohamed HAMOUDI

Sujet :

Prolongement des champs de potentiel  
par méthodes inverses

Application aux données magnétiques MAGSAT  
au-dessus du continent africain

Soutenue le 28 Février 1984 devant la Commission d'Examen

Président M. CHIKHAOUI :

Rapporteur J. DUCRUIX :

Examineurs

J. L. LE MOUEL

H. BENHALLOU

# THESE

Présentée à

L'INSTITUT DES SCIENCES DE LA TERRE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE D'ALGER

Pour l'obtention du MAGISTER

SPECIALITE : PHYSIQUE

OPTION : GEOPHYSIQUE

par

Mohamed HAMOUDI



Sujet :

Prolongement des champs de potentiel  
par méthodes inverses

Application aux données magnétiques MAGSAT  
au-dessus du continent africain

Soutenue le 28 Février 1984 devant la Commission d'Examen

Président M. CHIKHAOUJ :  
Rapporteur J. DUCRUIX :

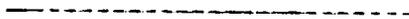
Examinateurs { J. L. LE MOUEL  
H. BENHALLOU

à ma femme et mon fils

à ma famille

à mes amis

AVANT - PROPOS



Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué essentiellement au Laboratoire de Géomagnétisme Interne de l'Institut de Physique du Globe de Paris où j'ai pu bénéficier de quatre stages de courte durée chacun par le biais de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène (USTHB) ainsi que le Centre National d'Astronomie, d'Astrophysique et de Géophysique (CNAAG). Le premier stage m'a permis de m'initier aux techniques de traitements de données magnétiques mises au point par l'équipe de Géomagnétisme Interne. Les stages suivants ont porté sur la mise au point des différents algorithmes utilisés dans ce mémoire. Le dernier enfin, d'une durée de six mois, m'a permis de procéder à l'exploitation d'un sous-ensemble des données magnétiques se rapportant à l'Afrique et recueillies par le satellite américain MAGSAT. Les traitements ont été effectués, pour une grande partie, au centre de calcul de l'Institut de Physique du Globe de Paris. Par l'intermédiaire d'une ligne asynchrone, des traitements ont également été effectués au centre de calcul du Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) à Toulouse. Malgré l'accord donné par certains organismes nationaux tel que SONATRACH ou le Centre National d'Informatique (CNI) pour l'accès à leur centre de calcul, il n'a pas été possible d'effectuer les traitements que nous décrivons dans ce mémoire ; le plus souvent, nous étions limités par les performances des ordinateurs utilisés.

## REMERCIEMENTS

Je suis heureux d'exprimer ici mes sincères remerciements à Monsieur J.L. LE MOUËL, Directeur du Laboratoire de Géomagnétisme Interne, qui m'a proposé le sujet de cette thèse et qui m'a, depuis, régulièrement accordé l'aide la plus large.

Joël DUCRUIX, Physicien-Adjoint dans ce même laboratoire, m'a suivi tout au long de ce travail et m'a guidé d'une poigne énergique mais amicale. Pour cela, et pour m'avoir fait bénéficier de sa grande expérience, qu'il soit assuré ici de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Mohamed CHIKHAOUI, Maître de Conférence à l'USTHB, pour avoir bien voulu juger ce travail et m'avoir fait l'honneur de présider la Commission d'examen.

Je voudrais également exprimer mes sentiments de respectueuse gratitude à Monsieur Hadj BENHALLOU, Directeur du Centre National d'Astronomie, d'Astrophysique et de Géophysique (CNAAG) qui m'a permis de bénéficier des moyens de ce centre et n'a jamais cessé de me témoigner sa confiance, ni de me prodiguer les conseils et les encouragements.

A chacun des membres de l'équipe du Géomagnétisme Interne (IPG/Paris) dont j'ai apprécié les discussions critiques sur mon travail, je tiens à exprimer mes remerciements.

La collaboration de Camille GIRE m'a été particulièrement bénéfique, qu'elle en soit remerciée.

Gisèle DUPIN a exécuté avec brio la plupart des figures présentées dans ce mémoire, Jacqueline WERMELINGER et Sylvie LAROUSSE m'ont aidé pour la dactylographie rapide et soignée de ce mémoire. Je les remercie toutes, très sincèrement et très amicalement.

## SOMMAIRE

Introduction	1
<u>Première Partie</u> : Prolongement des champs de potentiel par méthodes inverses	
Introduction	5
I-1 : Présentation des méthodes	7
-1-1 : Méthode globale inverse	7
-1-2 : Remarques sur la matrice (G)	10
-1-2-1 : Etude des fonctions de base	10
-1-2-2 : Etude des composantes $g_{ij}$ de (G)	12
-2-1 : Méthode stochastique inverse	13
-3 : Détermination des paramètres optimaux	17
-3-1 : Inversion globale	17
-3-1-1 : Erreur liée à la méthode	18
-3-1-2 : Erreur due aux instabilités numériques	20
-3-1-3 : Erreur due à l'effet de bord	24
-3-2 : Inversion stochastique	26
-3-2-1 : Erreur liée à la méthode	27
-3-2-2 : Influence des caractéristiques du signal	28
-3-2-3 : Influence des caractéristiques du bruit	29
-4 : Propagation des erreurs	32
-4-1 : Inversion globale	32
-4-1-1 : Propagation des erreurs à distribution gaussienne	34
-4-1-2 : Propagation des erreurs à distribution uniforme	34
-4-2 : Inversion stochastique	37
-4-2-1 : Propagation des erreurs aléatoires gaussiennes	38
-4-2-2 : Propagation des erreurs aléatoires uniformes	40
-4-3 : Influence de l'échantillonnage	42
-5 : Décoalescence des anomalies	46
-6 : Comparaison des méthodes - Conclusion	56
Annexe	58
<u>Deuxième Partie</u> : Application aux données magnétiques MAGSAT sur le continent africain	
Introduction	59
II-1 : Présentation du satellite	64
-2 : Les données	65
-3 : Traitements préliminaires des données - Cartes préliminaires	66
-3-1 : Champs externes	66
-3-2 : champ interne	69

-3-3	:Calcul d'un modèle de champ principal	70
-3-3-1	:Rappels sur le développement en harmoniques sphériques	70
-3-3-2	:Principe de calcul du modèle	71
-3-3-3	:Calcul de modèle à partir de données scalaires et vectorielles	73
-3-4	:Présentation des résultats	76
-3-5	:Etude des anomalies	80
-3-5-1	:Anomalies à l'altitude du satellite	89
-4	:Prolongement vers le bas des différentes anomalies	97
-4-1	:Coordonnées cartésiennes	101
-4-2	:Coordonnées sphériques	102
-5	:Grands traits de la géologie africaine	108
Conclusion		112
Bibliographie		114

## INTRODUCTION

En 1979, le Laboratoire de Géomagnétisme Interne de l'Institut de Physique du Globe de Paris, en collaboration avec le Groupement de Recherche en Géodesie Spatiale de Toulouse soumettait à la NASA un projet de recherche se rapportant au traitement des données magnétiques du satellite américain MAGSAT. Ce projet (Proposal M55, 1979) portait sur 4 points:

- Réduction des données pour l'obtention d'un modèle de représentation analytique du champ principal par décomposition en harmoniques sphériques. Cette réduction porte sur la séparation des champs magnétiques internes et externes à la terre et l'obtention de cartes des composantes du champ géomagnétique.
- Etudes régionales, concernant principalement l'Afrique et l'Europe, par prolongement de ces cartes à l'altitude du sol en vue de comparaisons avec d'autres données géologiques et géophysiques existantes et la détection d'anomalies de grandes longueurs d'onde.
- Etude des caractéristiques du champ principal par prolongement des données vers l'interface noyau-manteau et étude de la variation séculaire.
- Etude de la corrélation globale des données MAGSAT et le modèle GRIM2 du champ de gravitation.

Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes particulièrement intéressé aux deux premiers points de ce projet. Les techniques de réduction et de traitement de données mesurées par satellite pour l'établissement de cartes du champ total et celles du champ d'anomalies magnétiques, différent des techniques habituellement utilisées dans le cas de levés aéro magnétiques ou dans le cas de campagnes au sol (Regan et al, 1975 ; Bhattacharrya, 1977). Les variations, notables, des altitudes des

points de mesures peuvent créer des "pics" et des "creux" dans les cartes du champ magnétique, masquant et distordant ainsi les anomalies dûes à des structures de la croûte terrestre. Il est alors nécessaire, pour faciliter l'interprétation des cartes d'anomalies magnétiques, de réduire les données à une altitude constante. Cette réduction des mesures est réalisée par l'opération de prolongement.

Dans la première partie de ce mémoire, nous présentons deux nouvelles méthodes de prolongement des champs de potentiel (champ magnétique et gravimétrique). Le prolongement est abordé sous l'aspect de problèmes inverses. Pour cela, nous étudions deux techniques d'inversion : l'inversion globale et l'inversion stochastique. Dans le cas de l'inversion globale dont l'approche a été signée pour la première fois par Backus et Gilbert (1967, 1968, 1970), le modèle que nous cherchons (fonction prolongée) est parmi l'ensemble des modèles possibles celui dont les paramètres permettent de minimiser la distance quadratique entre le modèle et la fonction vraie. Dans le cas de l'inversion stochastique, introduite par Franklin (1970), nous cherchons à la fois un modèle qui satisfasse les données et les paramètres d'une distribution d'erreur qui représente aussi bien que possible les erreurs qui affectent les données. Ces méthodes sont appliquées à des exemples synthétiques variés afin de déterminer l'ensemble des paramètres optimaux pour chacune d'elles. Toujours à l'aide d'exemples synthétiques, nous avons étudié l'influence des erreurs contenues dans les données sur la précision des résultats obtenus et nous avons également abordé le problème important de la décoalescence des anomalies. Les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes, en fonction des buts à atteindre, sont présentés en dernier lieu.

Dans la deuxième partie de notre mémoire, les méthodes de prolongement étudiées auparavant sont appliquées à un sous-ensemble des données recueillies par le satellite MAGSAT. MAGSAT est un satellite américain lancé le 30 Octobre 1979 sur une orbite polaire héliosynchrone et de basse altitude (350-550 km). La sensibilité de l'appareillage embarqué - deux capteurs scalaires et une sonde vectorielle tri-composante associée à un système sophistiqué de positionnement (2 caméras à étoiles et 1 capteur solaire) - ainsi que la fréquence d'échantillonnage utilisée (8 mesures par seconde pour les mesures scalaires et 16 mesures par seconde pour les mesures vectorielles), ont permis une collecte de données de bonne précision, unique dans ce type de levés.

Notre premier travail a donc été, après sélection et mise en forme des données dont nous avons besoin, l'étude du premier point du projet M55 précédemment décrit. Les cartes obtenues, bien que préliminaires, présentent les mêmes grands traits que celles obtenues par d'autres équipes travaillant sur les données MAGSAT. Aux cartes d'anomalies obtenues, principalement sur l'Afrique, nous avons appliqué les méthodes de prolongement décrites dans la première partie. Après le choix de la méthode globale, les résultats obtenus dans le cas de coordonnées sphériques géocentriques sont d'une grande homogénéité. La comparaison de ces cartes d'anomalies prolongées à l'altitude du sol avec les cartes obtenues à partir de levés au sol (Vassal et Godivier, 1976) ou à partir de levés aéromagnétiques (Green, 1976) pour certaines régions d'Afrique, montre que le champ d'anomalies a été prolongé avec succès de l'altitude du satellite au niveau du sol. Les différences observées sont entièrement expliquées par l'échantillonnage grossier que nous avons été contraint d'utiliser ( $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ).

Le dernier chapitre est consacré à une description succincte de la Géologie et des grands traits structuraux de l'Afrique. Cette description est une étape nécessaire pour interpréter les cartes que nous avons obtenues. L'interprétation est de loin l'opération la plus délicate. Elle n'est pas achevée dans notre mémoire et fera l'objet de publications ultérieures lesquels montreront également des exemples de modèles des sources responsables.

I-PROLONGEMENT DES CHAMPS DE POTENTIEL PAR METHODES INVERSEES

## INTRODUCTION

Parmi les problèmes qu'ont à résoudre couramment les géophysiciens, en particulier les gravimétriciens et les géomagnéticiens, figure celui du prolongement de certaines fonctions harmoniques, scalaires ou vectorielles, mesurées sur un ensemble discret de points de l'espace à trois dimensions. Dans le cas qui nous intéresse, ces fonctions sont les composantes d'un champ d'anomalies magnétiques.

Les intérêts du prolongement sont multiples. Parmi eux, citons :

- La possibilité de raccorder des panneaux de cartes, dressés à des altitudes différentes comme c'est souvent le cas dans les levés aéromagnétiques.
- Le rétablissement à altitude uniforme de cartes établies à partir de données de satellites dans le but d'en faciliter l'interprétation.
- L'élimination de l'effet de la topographie dans les levés gravimétriques à garde au sol constante ou dans le cas de mesures magnétiques où la trajectoire du magnétomètre épouse un fond marin ( "deep-tow", Miller, 1977).

Il existe deux types principaux de méthodes de résolution du problème de prolongement :

- Les méthodes non inverses : méthode des différences finies ou les méthodes d'ajustement, par exemple. Ces méthodes ne sont pas toujours pratiques dans le cas où la distribution de données est irrégulière comme c'est souvent le cas en géophysique; il est nécessaire alors d'utiliser une technique d'interpolation pour ramener les données sur une grille régulière.
- Les méthodes inverses.

Nous présentons dans ce mémoire deux nouvelles techniques de prolongement qui appartiennent à la classe des problèmes inverses. Ce sont les méthodes globale inverse et stochastique inverse. Pour une présentation complète du problème inverse voir Couptillot et al.(1978).

Après avoir donné les équations principales, relatives à chacune des méthodes, nous en avons fait une étude systématique afin de déterminer l'ensemble des paramètres optimaux pour chacune d'elles; cette étude est entreprise à partir de données synthétiques. Puis, toujours à l'aide de données synthétiques, nous avons étudié l'influence des erreurs contenues dans les données sur la précision des résultats obtenus. Le problème important de la décoalescence des anomalies est abordé; pour ce problème nous cherchons les conditions optimales pour réaliser la séparation des anomalies dûes à plusieurs sources distinctes mais responsables d'une anomalie unique au niveau des mesures. Ces méthodes sont enfin testées sur des données synthétiques dont les caractéristiques sont aussi proches que possible de celles de données réelles. En dernier lieu, les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes en fonction de la qualité des données et des buts à atteindre sont présentés.

## 1- Présentation des méthodes

### 1.1- Méthode globale inverse

Rappelons qu'il s'agit du prolongement d'une fonction scalaire  $\Psi$ , solution de l'équation de Laplace :

$\Delta\Psi=0$  La fonction  $\Psi$  est mesurée en  $N$  points  $P_i$  d'une surface  $(\Sigma)$  quelconque (fig.I-1). On veut prolonger  $\Psi$  sur la surface coordonnée  $(S)$ ,  $\Psi$  étant harmonique dans un domaine contenant les deux surfaces.

Dans le cas nous intéressant, la fonction  $\Psi$  est soit un potentiel magnétique soit une composante d'un champ d'anomalies magnétiques. Dans la suite nous n'aurons à utiliser que le système de coordonnées cartésiennes et sphériques (les plus couramment utilisées par les géophysiciens). Nous allons d'abord donner les formules de prolongement en coordonnées cartésiennes en prenant, pour simplifier, le plan  $z=0$  comme surface  $(S)$ .

Soit  $\Gamma$  la fonction de Green, relative à l'opérateur  $\Delta$  (Laplacien) du problème de Dirichlet extérieur. Si  $\Psi$  est mesurée de façon continue sur  $(\Sigma)$ , en un point  $M$  de  $(S)$  la solution s'écrit:

$$\Psi(P) = (1/4\pi) \int_S (\partial\Gamma(P,M)/\partial n_M) \Psi(M) dS_M \quad (1-1)$$

où  $n_M$  est la normale extérieure à  $(S)$  en  $M$

$$\Psi(P) = (1/4\pi) \int_S G(P,M) \Psi(M) dS_M \quad (1-2)$$

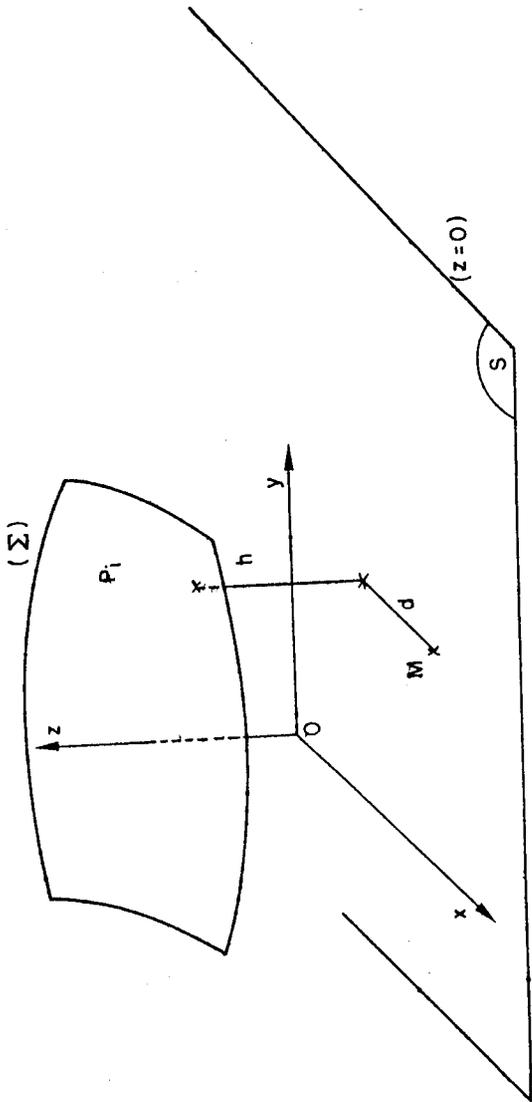
L'équation (1-2) définit le produit scalaire de deux fonctions sur  $(S)$ , nous pouvons l'écrire sous la forme suivante:

$$\Psi(P) = (G, \Psi) \quad (1-3)$$

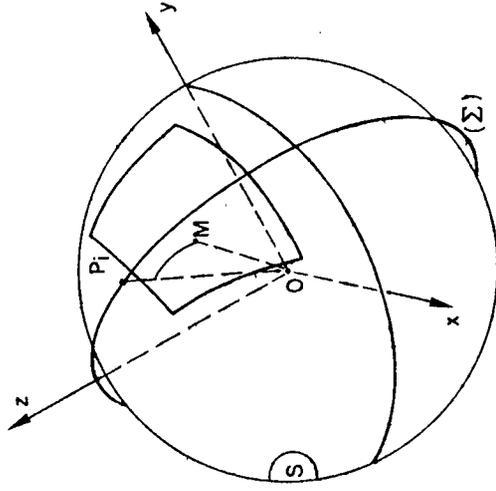
Dans le cas des coordonnées cartésiennes, l'expression de  $G(P,M)$  est donnée par:

$$G(P_i, M) = \frac{z_i}{2\pi [(x_i-x)^2 + (y_i-y)^2 + (z_i)^2]^{3/2}} \quad (1-4)$$

où  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  est le point courant de  $(\Sigma)$   $i=1, \dots, N$



a) Plan



b) Sphérique

Figure I-1  
 Schémas illustrant les notations utilisées dans le texte pour le prolongement.  $(\Sigma)$  est la surface contenant les points P  
 (S) est la surface coordonnée contenant les points M de la zone de prolongement.  
 a) les sources appartiennent au demi-espace  $z < 0$   
 b) " " " "  $r < a$

et  $M(x,y,0)$  est le point courant de  $(S)$

La fonction  $G$  est donnée par la résolution du problème direct (Courant et Hilbert, 1966).

Notons que la fonction  $\Psi$  appartient à  $C_S$ , l'espace des fonctions continues, bornées sur  $(S)$ ; ce qui signifie que  $(S)$  ne contient aucune singularité de  $\Psi$ .

On connaît  $\Psi(P_i) = \gamma_i$  valeurs mesurées en  $N$  points  $P_i$ .

L'expression (1-3) du produit scalaire nous permet d'écrire:

$$(\Psi, G_i) = \gamma_i \quad \text{avec } G_i = G(P_i, M) \text{ pour } i \text{ allant de } 1 \text{ à } N$$

nous cherchons la projection  $\Psi_N$  de  $\Psi$  sur le sous-espace  $E_N$  de  $C_S$ , sous-espace de dimension  $N$  engendré par les fonctions  $G(P_i, M)$ . Ces fonctions sont linéairement indépendantes si les points  $P_i$  sont distincts.

La solution cherchée est donc de la forme (Courtillet et al., 1978) :

$$\Psi_N = \gamma_j G_j$$

connaissant  $\gamma_i = (\Psi, G_i) = (\Psi_N, G_i)$  alors

$$\gamma_j = \gamma^i (G_i, G_j) \quad (1-5)$$

soit  $(g_{ij})$  la matrice des produits scalaires  $G_i$ , cette matrice est aussi la matrice de la première forme quadratique fondamentale relative à la base des  $\{G_i\}$  ou encore le tenseur deux fois covariant relatif à la base des  $\{G_i\}$ .

$$g_{ij} = (G_i, G_j) \quad (1-6)$$

d'où la nouvelle expression de l'équation (1-5)

$$\gamma_j = \gamma^i g_{ij} \quad (1-7)$$

soit  $(g^{ij})$  la matrice inverse de  $(g_{ij})$ , représentant le tenseur deux fois contravariant relatif à la base des  $\{G_i\}$  et tel que:

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le tenseur de Kronecker, alors}$$

$$\gamma^i = \gamma_j g^{ij} \quad (1-8)$$

L'expression finale de la solution ainsi obtenue est:

$$\Psi_N(M) = g^i_j \gamma_j G(P_i, M) \quad (1-9)$$

Explicitons l'équation (1-6):

$$g_{ij} = (1/4\pi) \int_S G(P_i, M) G(P_j, M) dS_M \quad (1-10)$$

ce qui permet de déterminer l'expression des éléments  $g_{ij}$  de la matrice ( $g_{ij}$ ):

$$g_{ij} = \frac{z_i + z_j}{2\pi [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i + z_j)^2]^{3/2}} \quad (1-11)$$

Remarquons que (1-11) et (1-4) ont la même forme, ce qui constitue une propriété intéressante dans les calculs pratiques.

## 1-2 Remarques sur la matrice (G)

### 1-2-1 Etude des fonctions de base

Soient  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  un point de  $(\Sigma)$  et  $M(x, y, 0)$  un point de  $(S)$ ; soit  $d$  la longueur de la projection de  $P_iM$  sur le plan horizontal, l'expression (1-4) devient:

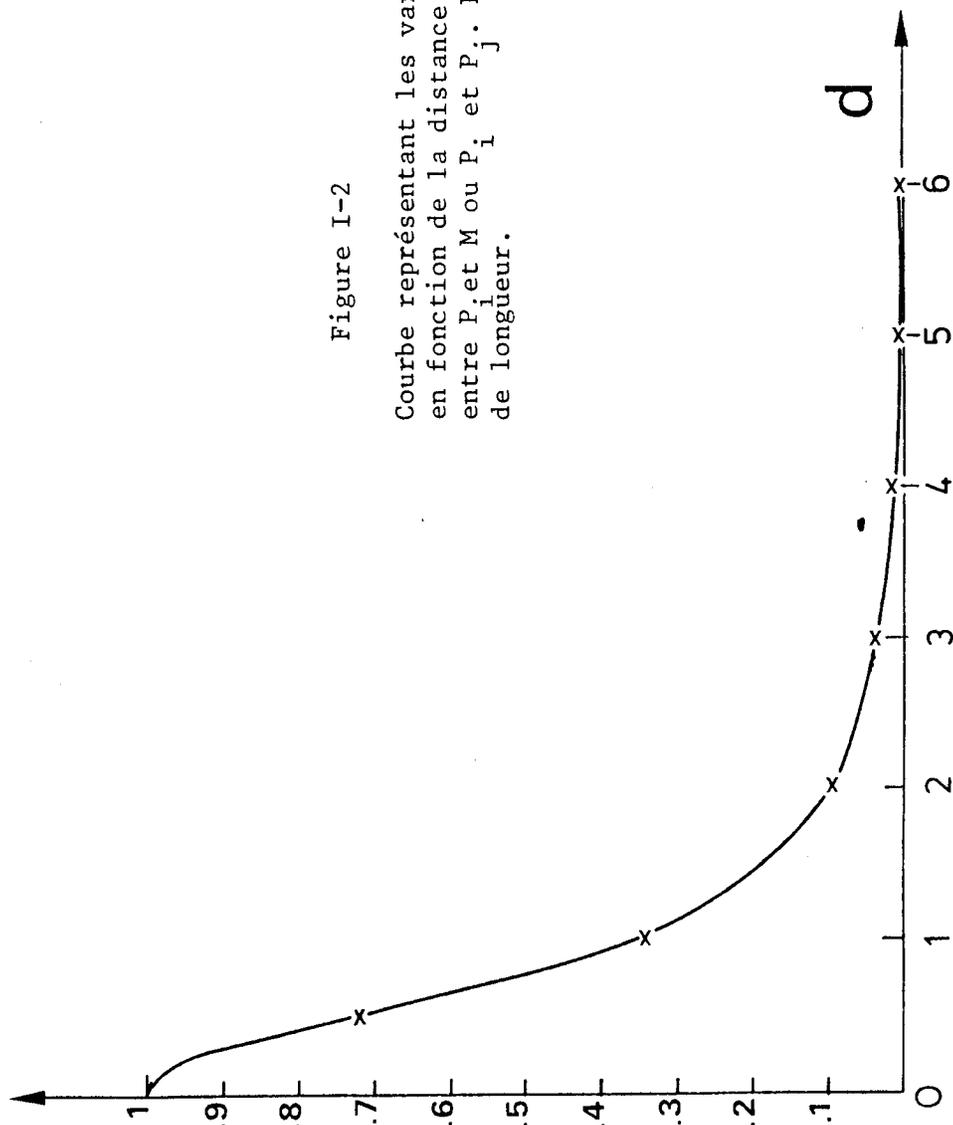
$$G_i(M) = \frac{z_i}{2\pi [d^2 + z^2]^{3/2}}$$

l'étude de  $G_i(M)$  en fonction de  $d$  montre que les valeurs ne dépendent que du rapport entre  $z_i$  et  $d$ .

La courbe de la figure I-2 montre une rapide décroissance de  $G_i(d)/G(0)$  en fonction de la distance horizontale  $d$ . Ainsi pour  $d \geq 3z_i$  alors  $G_i(d)/G(0) \leq 3 \cdot 10^{-2}$ . Cela signifie que n'interviendront de manière non négligeable dans la valeur  $\Psi_N(M)$  que les fonctions de base correspondant à des points  $P_i$  "proches" de  $M$  ( $d \leq 3z_i$ ). Nous verrons ultérieurement

Figure I-2

Courbe représentant les variations de  $G(P_i, M)$  ou  $G(P_i, P_j)$  en fonction de la distance horizontale  $d$  entre  $P_i$  et  $M$  ou  $P_i$  et  $P_j$ . La hauteur  $H$  est prise comme unité de longueur.



l'influence de cette propriété sur l'effet de bord.

### 1-2-1 Etude des composantes $g_{ij}$ de $G$

De la même façon que précédemment, nous étudions la fonction  $g_{ij}=g(d)$ .

Soient  $d$  la distance horizontale entre les points  $P_i$  et  $P_j$  de la surface  $(\Sigma)$  et  $z$  la somme des altitudes de ces points; alors la similitude déjà notée de (1-11) et (1-4) implique:

$$g(d)=G_i(d)$$

Si les points de données sont régulièrement distribués sur une grille de mesure horizontale, nous pouvons définir un pas de maille : la distance  $P$  séparant deux points de mesure. La fonction  $g$  ne dépend alors que du rapport  $(H/P)$  où  $H$  est la différence d'altitude entre le plan de mesure et le plan de prolongement. Nous verrons dans la suite l'importance primordiale de ce paramètre  $(H/P)$ .

2-1 METHODE STOCHASTIQUE INVERSE

Suivant une méthode plus générale proposée par Franklin (1970), nous traitons le prolongement comme un problème inverse linéaire mal posé et nous cherchons un modèle  $\Psi_N$  dont les valeurs sont des échantillons d'un processus aléatoire. Les mesures  $\gamma_i$  ainsi que le bruit qui les affecte sont également considérés comme des réalisations de processus aléatoires.

Nous avons vu au chapitre précédent que les valeurs de  $\Psi$  sur  $(\Sigma)$  et sur  $(S)$  sont reliées par l'équation suivante :

$$\Psi(P) = (1/4\pi) \int_S \Psi(M) G(P, M) dS_M \quad (2-1)$$

En réalité nous ne connaissons pas  $\Psi(P) = \gamma$  exactement mais :

$$\Psi'(P) = \Psi(P) + n(P) \quad (2-2)$$

$n(P)$  étant le bruit qui affecte le signal  $\Psi(P)$

l'équation (2-2) nous permet d'écrire l'équation intégrale stochastique :

$$\Psi'(P) = (1/4\pi) \int_S \Psi(M) G(P, M) dS_M + n(P) \quad (2-3)$$

Soient  $H_1 = L_2(R^3)$  l'espace des fonctions de carrés sommables et  $H_2 = R^N$  l'espace vectoriel de dimension  $N$ .

Pour  $a_k$  et  $b_k$  des éléments quelconques de  $H_k$  ( $k=1,2$ ), les produits scalaires sur  $H_1$  et  $H_2$  sont définis comme suit :

$$a_1 b_2 = \int_S a_1(M) b_1(M) dS_M \quad (2-4)$$

$$a_2 b_2 = \sum_i a_2(P_i) b_2(P_i) \quad (2-5)$$

soit  $A$  l'opérateur qui projette  $H_1$  sur  $H_2$  et défini par :

$$A h_1 = \int G(P_i, M) h_1(M) dS_M \quad (2-6) \quad i=1, \dots, N$$

alors l'opérateur adjoint  $A^*$  applique  $H_1$  sur  $H_2$  de la façon suivante :

$$A^* h_2 = \sum_i h_2(P_i) G(P_i, M) \quad (2-7)$$

$A$  et  $A^*$  sont liés par la relation suivante :

$$(A h_1) h_2 = (A^* h_2) h_1$$

l'équation (2-3) est donc de la forme:

$$Au_1 + u_2 = u_3 \quad (2-9)$$

où:  $u_3$  est le vecteur des données;  $u_1$  et  $u_2$  sont des échantillons inconnus de processus aléatoires  $P_1$  (signal) et  $P_2$  (bruit) agissant sur  $H_1$  et  $H_2$  respectivement.

Aux processus  $u_1^*$  et  $u_2^*$ , on associe des fonctionnelles linéaires aléatoires comme suit:

$$u_1^* h_1 = \int S u_1(M) h_1(M) dS_M \quad (2-10)$$

$$u_2^* h_2 = \sum_i u_2(P_i) h_2(P_i) \quad (2-11)$$

construisons maintenant des fonctions de corrélations  $\rho_{ij}$  et les opérateurs de corrélation  $R_{ij}$  correspondants:

$$\begin{aligned} E\{u_1(M)u_1(M')\} &= \rho_{11}(M, M') = \rho_{11}(M', M) \\ E\{u_1(M)u_2(P_i)\} &= \rho_{12}(M, P_i) = \rho_{21}(P_i, M) \\ E\{u_2(P_i)u_2(P_j)\} &= \rho_{22}(P_i, P_j) = \rho_{22}(P_j, P_i) \end{aligned} \quad (2-12)$$

si nous supposons que les processus  $P_1$  et  $P_2$  sont indépendants alors:

$$\rho_{12} = \rho_{21} = 0$$

l'équation (2-9) définit un processus aléatoire sur  $H_2$  dont

l'autocorrélation est donnée par:

$$\begin{aligned} R_{33} &= E\{u_3 u_3^*\} \\ R_{33} &= AR_{11} A^* + AR_{12} + R_{12}^* A^* + R_{22} \\ R_{33} &= AR_{11} A^* + R_{22} \end{aligned} \quad (2-13)$$

$R_{33}$  est une matrice ( $N \times N$ ), définie positive, dont les éléments sont les  $\rho_{33}(P_i, P_j)$  tels que:

$$\begin{aligned} \rho_{33}(P_i, P_j) &= \iint G(P_i, M) \rho_{11}(M, M') G(P_j, M') dS_M dS_{M'} \\ + \rho_{22}(P_i, P_j) \end{aligned} \quad (2-14)$$

Si on se donne  $u_3(P)$ , on démontre (Franklin, 1970; Jackson, 1979) que la meilleure estimation pour  $u_1(M)$  est donnée par:

$$v = R_{13} R_{33}^{-1} u_3 \quad (2-15)$$

$R_{13}$  est défini par ses éléments tels que :

$$\begin{aligned} \rho_{13}(M, P_i) &= E\{u_1(M)u_3(P_i)\} \\ &= E\{u_1(M)[\int_S G(P_i, M')u_1(M')dS_{M'} + u_2(P_i)]\} \\ &= \int_S G(P_i, M')\rho_{11}(M, M')dS_{M'} \end{aligned} \quad (2-16)$$

Pour calculer  $v$ , calculons d'abord  $w$  tel que :

$$\sum_j \rho_{33}(P_i, P_j)w(P_j) = u_3(P_i) \quad (2-17)$$

puis calculons :

$$v(M) = \sum_i \rho_{13}(M, P_i)w(P_i) \quad (2-18)$$

Pour cela définissons  $\rho_{11}$  et  $\rho_{22}$ , les fonctions de corrélation des processus aléatoires  $u_1$  et  $u_2$  par :

$$\rho_{11}(M, M') = \psi^2 \delta(M - M') \quad (2-19)$$

$$\rho_{22}(P_i, P_j) = \varepsilon^2 \delta_{ij} \quad (2-20)$$

où :

$\psi^2$  caractérise le signal cherché (taille, rugosité)

$\varepsilon^2$  caractérise le bruit sur la mesure

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij}=1$  si  $i=j$  et  $\delta_{ij}=0$  si  $i \neq j$ )

$\delta_{MM'}$  est la fonction de Dirac

les équations (2-16) et (2-18) deviennent ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_{13}(P, M) &= \int G(P, M')\delta(M - M')\psi^2 dS_{M'} \\ &= \psi^2 G(P, M) \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\begin{aligned} v(M) &= \sum_i \psi^2 G(P_i, M)w(P_i) \\ &= \psi^2 \sum_i G(P_i, M)w(P_i) \end{aligned}$$

le vecteur  $w$  est relié au vecteur  $u_3$  de composante  $\gamma_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) par l'équation (2-15) donc  $w$  correspond au vecteur des composantes contravariantes  $\gamma^i$ , d'où :

$$\begin{aligned} v(M) &= \psi^2 \sum_i G(P_i, M)\gamma^i \\ \rho_{33}(P_i, P_j) &= \iint G(P_i, M)\psi^2 \delta(M - M')G(P_j, M')dS_M dS_{M'} \\ &\quad + \rho_{22}(P_i, P_j) \end{aligned}$$

$$\rho_{33}(P_i, P_j) = \phi^2 \int G(P_i, M) G(P_j, M) dS_M + \rho_{22}(P_i, P_j) \\ \phi^2 g_{ij} + \varepsilon^2 \delta_{ij} \quad (2-23)$$

L'expression finale du prolongement ainsi obtenue est:

$$\Psi_N(M) = (\phi^2 g_{ij} + \varepsilon^2 \delta_{ij})^{-1} \phi^2 \gamma_i G(P_i, M) \quad (2-24)$$

Remarque:

Si nous faisons tendre  $\varepsilon^2$  vers zéro, dans l'expression (2-24), nous retrouvons l'expression(1-9) du prolongement par inversion globale.

### 3- DETERMINATION DES PARAMETRES OPTIMAUX

#### 3-1 INVERSION GLOBALE

L'intérêt des méthodes étudiées réside dans l'efficacité du prolongement indépendamment de la distribution spatiale des points de mesures  $P_i$  ( $i$  allant de 1 à  $N$ ), a priori quelconques sur  $(S)$ . Pour comparer l'efficacité des deux méthodes, nous nous placerons cependant dans le cas où les données sont régulièrement réparties sur une grille de pas  $P$  suivant les directions  $x$  et  $y$  dans un système de coordonnées cartésiennes  $(Oxyz)$ .

La source des anomalies est un dipôle vertical de moment magnétique arbitraire, enfoui à une profondeur  $z_0$ . La fonction harmonique  $\Psi$  à prolonger est la composante verticale du champ créée par le dipôle sur un plan d'altitude  $z_i$  en  $N=n^2$  points de mesures (si  $n$  est le nombre de points dans une direction donnée). La fonction  $\Psi$  est donnée par:

$\Psi = -\partial V / \partial r$  où  $V$  est le potentiel du dipôle

$$\Psi = (3z_i^2 - r^2) / r^5 \quad \text{avec } r = (x_i^2 + y_i^2 + (z_i - z_0)^2)^{1/2}$$

$\Psi_N(M)$  étant la valeur obtenue au point  $M$  de  $(S)$ , par prolongement des données de  $(S)$  et  $\Psi(M)$  la valeur calculée directement au point  $M$ , nous caractérisons la distance de  $\Psi_N$  à  $\Psi$  soit par:

- L'écart quadratique moyen  $\sigma$  défini comme suit:

$$\sigma^2 = (1/N_M) \sum_{N_M} (\Psi_N(M) - \Psi(M))^2$$

soit par:

- L'erreur relative  $\nu$  telle que:

$$\nu = \frac{\Psi_N(M_0) - \Psi(M_0)}{\Psi(M_0)} \quad \text{où } M_0 \text{ est le point central de l'anomalie}$$

Nous distinguons plusieurs types d'erreur pouvant perturber le mode  $\Psi_N$ . Ce sont l'erreur liée à la méthode, l'erreur numérique et l'erreur due à l'effet de bord. L'erreur due à la propagation des erreurs sur les données sera étudiée séparément.

### 3-1-1 Erreur liée à la méthode

L'étude des éléments  $g_{ij}$  de la matrice (G) et celle des fonctions de base  $G(P_i, M)$  (fig. I-2) a mis en évidence l'importance pour l'étude du prolongement du paramètre (H/P), H étant la hauteur de prolongement et P le pas de maille.

Augmenter (H/P) revient à augmenter la densité des fonctions de base, ce qui diminue théoriquement la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$ .

Si (H/P) tend vers zéro, c'est-à-dire si la densité des fonctions de base tend vers zéro, l'opérateur de prolongement ne tend pas vers l'identité. En effet :

la matrice (G) tend vers  $g_{ii}\{I_{NN}\}$  avec  $g_{ii}=1/8\pi H^2$  et  $\{I_{NN}\}$  la matrice identité de rang N; la matrice inverse  $(G)^{-1}$  tend alors vers  $8\pi H^2\{I_{NN}\}$ .

$$\Psi_N(M) \text{ tend vers } 8\pi H^2 \sum_i \gamma_i G(P_i, M)$$

sachant que  $G(P_i, M)$  tend vers  $(1/2\pi H^2)\delta P_i(M)$  nous aurons donc :

$$\lim \Psi_N(M) = 4 \sum_i \gamma_i \delta P_i(M)$$

$$(H/P) \rightarrow 0$$

Cette limite est différente de la limite à laquelle on s'attendrait, soit :

$$\Psi_N(M) \rightarrow \sum_i \gamma_i \delta P_i(M)$$

Ce résultat est dû au fait que l'opérateur de prolongement est orienté. Le même opérateur ne sert pas à prolonger, à la fois, en se

rapprochant des sources: "prolongement vers le bas" et en s'en éloignant: "prolongement vers le haut".

La variation de la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$ , en fonction de  $(H/P)$ , est donnée par le tableau ci-dessous:

H/P	0.5	1	1.5	2	3
v(%)	>10	2	0.6	1.3	8

Ce tableau montre la présence d'un minimum de la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$ . Nous avons considéré, arbitrairement, que des erreurs supérieures à 10% conduisaient à des modèles inacceptables. Le domaine de variation du paramètre  $(H/P)$  est donc restreint à l'intervalle  $]0.5, 3]$  ce qui, en pratique, est largement suffisant pour les applications de cartographie.

L'accroissement de l'erreur pour les faibles valeurs de  $(H/P)$  est dû à l'orientation de l'opérateur de prolongement alors que pour les valeurs plus fortes de  $(H/P)$ , l'augmentation de cette distance rend les fonctions  $G(P_i, M)$  suffisamment semblables entre elles pour qu'elles puissent devenir numériquement dépendantes. La matrice  $(G)$  devient alors singulière.

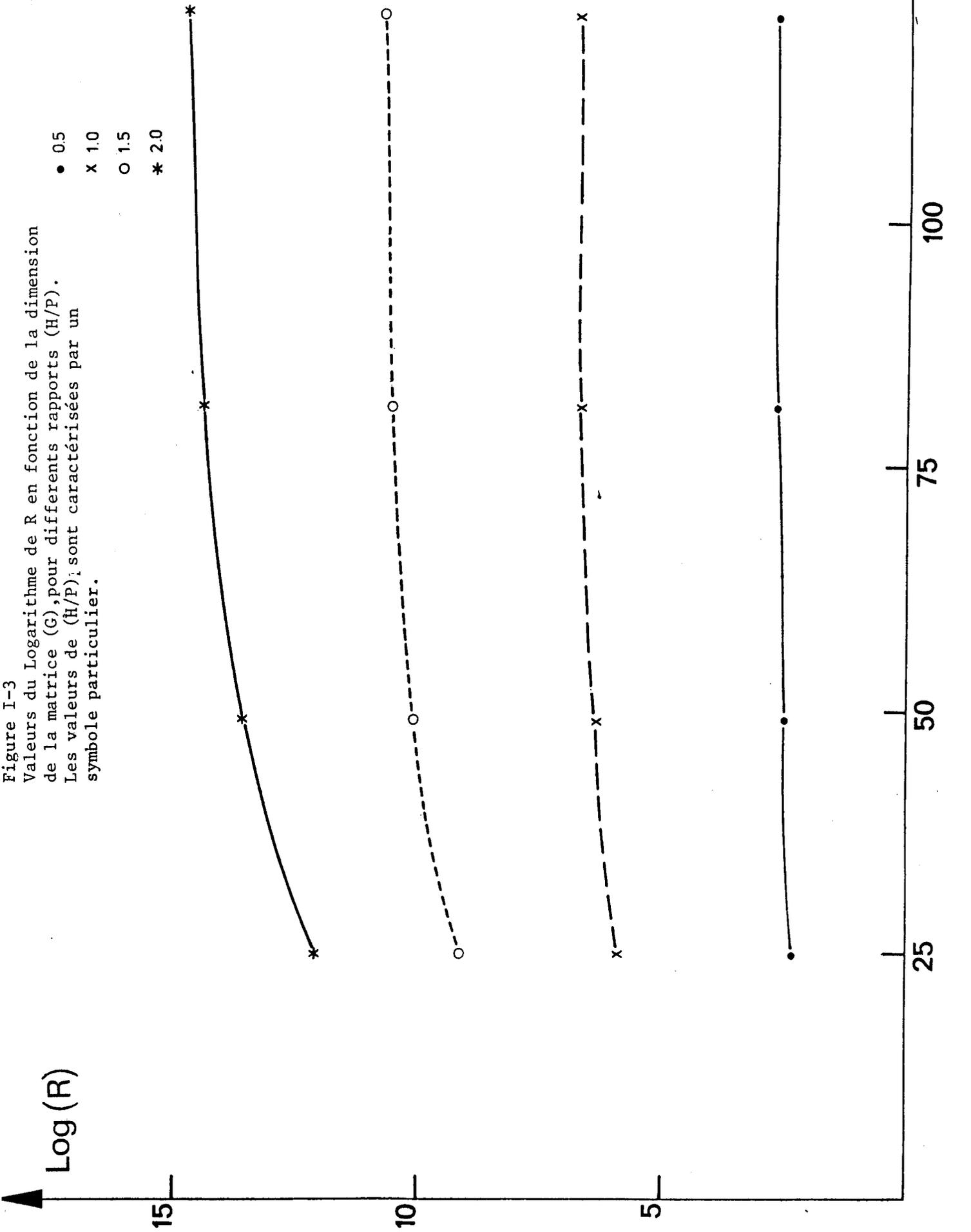
### 3-1-2 Erreur d'ue aux instabilités numériques

Nous avons vu au paragraphe précédent que si le rapport (H/P) était grand ou si les points  $P_i$  sont "proches" les uns des autres, ce qui revient au même, la matrice (G) peut devenir numériquement singulière. Pour rendre compte de son conditionnement, nous utiliserons classiquement le rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre de (G). Plus ce rapport R est grand et plus la matrice est difficile à inverser; pour la matrice unité  $R=1$  .

Nous avons calculé R pour différentes valeurs du rapport (H/P) et pour différentes valeurs de N (dimension de (G)). Les résultats sont portés dans le tableau suivant:

H/P	N	25	49	81	121
0.5		10.5	12.8	14.3	15.4
1		360	591	770	907
1.5		9638	23590	38160	50757
2		$1.9 \times 10^5$	$8.4 \times 10^5$	$17 \times 10^5$	$27 \times 10^5$
3		$48 \times 10^6$	/	/	/

nous observons, pour (H/P) fixé, une croissance de R avec N (fig.I-3). Cette croissance tend cependant vers une valeur limite  $R_L$ . En effet, au-delà d'un certain rang, on n'augmente pas la complexité de la matrice (G) en lui rajoutant K points. Ceci revient en fait (voir l'allure des  $g_{ij}$  sur la figure I-2) à des permutations de lignes et de colonnes



près, à la border de zéro.

$$G_{N,K} = (G_N(0))$$

nous avons aussi représenté sur la figure I-4 , la variation du Logarithme de R en fonction de (H/P). Cette variation est linéaire, la pente de la droite croît avec N et tend vers une valeur limite de 8, pour les grandes valeurs de N.

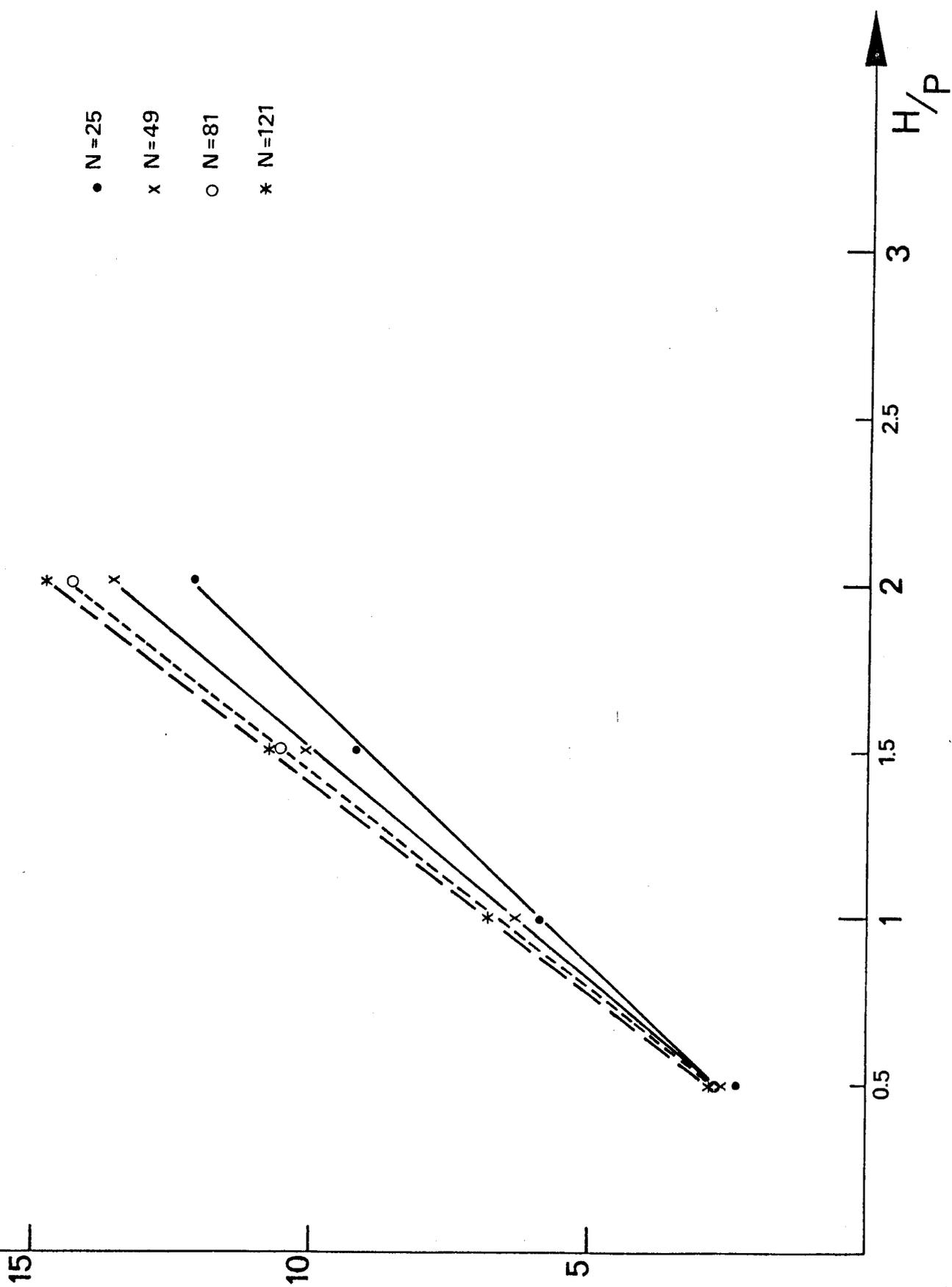
Si les performances de l'algorithme d'inversion et de l'ordinateur utilisés ne permettent pas d'aller au-delà d'un certain nombre de conditionnement maximum  $R_M$ , on voit d'après la figure 4 que lorsque le rapport (H/P) croît, le nombre de points de données doit décroître. Par exemple, avec l'algorithme que nous avons utilisé (NATS PROJECT, 1972) un rapport (H/P) égal à 3 entraîne que N ne peut être supérieur à 25 si l'on veut contenir la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$  à l'intérieur de limites raisonnables.

Nous pouvons, en principe, augmenter le nombre N, en accroissant l'efficacité de l'algorithme d'inversion et la précision de l'ordinateur utilisé mais la présence d'une pente limite dans les variations du Logarithme de R en fonction de (H/P) montre que le gain associé à une telle opération est négligeable par rapport aux efforts déployés.

#### Remarque

Une autre façon d'améliorer le conditionnement de la matrice (G), c'est-à-dire de rendre les  $G_i(M)$  plus indépendants, est d'utiliser des points de données à altitude non constante; nous avons effectué deux

Figure I-4  
 Variation du Logarithme de R en fonction du rapport (H/P), pour différentes  
 tailles N de la matrice (G).



essais satisfaisants :

a) Cas de mesures réparties sur un plan incliné

Pour un rapport (H/P) variant entre 2.5 et 3.5, nous avons pu utiliser 121 points de données, tout en maintenant l'erreur relative  $v$  largement inférieure à 10%.

Cette distribution de points de mesures est celle rencontrée dans le cas où l'on utilise les données MAGSAT, dans un domaine suffisamment restreint pour que l'on puisse utiliser l'approximation plane (voir §4-1, I<sup>o</sup> partie)

b) Cas de deux plans de mesures

Nous avons également obtenu un accroissement du nombre de points de données utilisables en répartissant ces points de mesures sur deux plans horizontaux séparés par un demi pas de maille.

Cette distribution de points de mesures est également rencontrée dans le cas de données MAGSAT (voir §4-1, I<sup>o</sup> Partie)

3-1-3 Erreur d'ue à l'effet de bord

Pour étudier cette erreur, nous avons utilisé des données réparties sur une grille carrée ( $\lambda$ ) d'un plan horizontal d'altitude  $Z$ . Nous calculons le prolongement de ces données sur une grille ( $S$ ) dans un plan d'altitude  $Z-H$ . Le centre de ( $S$ ) est situé à une distance  $d$  du bord de la projection de ( $\lambda$ ) sur le plan d'arrivée (fig.1-5).

Nous avons vu au paragraphe (1-2-1) que  $G_i(M)$  est une fonction

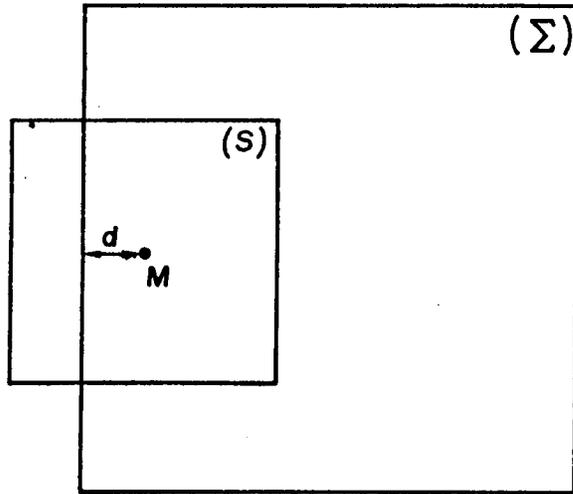


Figure I-5  
 $(\Sigma)$  est la surface sur laquelle sont mesurées des données,  $(S)$  est la zone de prolongement de ces données. L'effet de bord est étudié en fonction de  $d$

rapidement décroissante de la distance horizontale, le modèle  $\Psi_N$  sera donc peu dépendant des fonctions  $G_i(M)$  pour lesquelles la distance horizontale entre  $P_i$  et  $M$  est grande (équation 1-9).

Sur le tableau ci-dessous sont portées les valeurs de l'erreur relative  $v$  en fonction du rapport  $(d/H)$ , dans le cas où l'on prolonge 121 points sur une grille carrée régulière sur un plan situé 1.5 pas de maille plus bas.

d/H	1	1.5	2	2.5	3	4
v(%)	23	13	8	5	2	0.6

Nous remarquons que pour un rapport  $(d/H) \gg 3$ , l'erreur due à l'effet de bord est de l'ordre de 1%, ce qui est cohérent avec l'estimation du paragraphe (1-2-1) où l'on montre que  $G(P_i, M)$  est de l'ordre de  $10^{-2}$  pour  $(d/H)$  supérieur à 3. Il apparaît donc que pour effectuer le prolongement sur une région donnée, avec une erreur de quelque pourcent, il faut déborder la zone à étudier de 2 à 3 pas de maille ; ceci quelque soit la hauteur de prolongement, tant que cette hauteur est comprise dans les limites  $]0.5, 3]$ .

### 3-2 INVERSION STOCHASTIQUE

A partir des mêmes données synthétiques que dans le cas de l'inversion globale (points répartis sur une grille régulière horizontale de dimension  $N=n \times n$ ), nous étudions ici l'influence de différents paramètres sur la distance du modèle  $\Psi_N$  à la fonction  $\Psi$ . Ces paramètres sont la hauteur de prolongement, exprimée en pas de maille, les caractéristiques du

signal et celles du bruit.

### 3-2-1 Erreur liée à la méthode

De la même façon qu'au paragraphe (3-1-1), cherchons l'expression de  $\Psi_N$  quand la densité des fonctions de base tend vers zéro.

L'équation (2-23) peut se mettre sous la forme suivante :

$$G = \psi^2 (g_{ij}) + \epsilon^2 (\delta_{ij})$$

si  $(H/P)$  tend vers zéro alors  $G$  tend vers  $\psi^2 (g_{ii}) + \epsilon^2 (\delta_{ii})$

avec :

$$(g_{ii}) = (1/8\pi H^2) I_{NN} \text{ et } (\delta_{ii}) = I_{NN}$$

la matrice inverse  $G^{-1}$  tend alors vers  $(\psi^2/8\pi H^2 + \epsilon^2)^{-1} I_{NN}$

l'expression de la projection  $\Psi_N$  devient :

$$\begin{aligned} \Psi_N(M) &= \frac{8\pi H^2}{\psi^2 + 8\pi H^2 \epsilon^2} \sum_i \gamma_i \psi^2 G(P_i, M) \\ &= \frac{4}{1 + 8H^2 \pi (\epsilon^2 / \psi^2)} \sum_i \gamma_i \delta P_i(M) \end{aligned}$$

Remarquons que, dans ce cas également, nous avons  $\Psi_N(M) \neq \sum_i \gamma_i \delta P_i(M)$  mais que l'expression trouvée est proche de celle déterminée au paragraphe (3-1-1) car le rapport  $(\epsilon^2/\psi^2)$  est toujours petit.

L'étude des variations de la distance entre le modèle calculé  $\Psi_N$  et le modèle vrai  $\Psi$ , distance représentée ici par l'erreur relative  $v$ , en fonction du rapport  $(H/P)$ , est représentée dans le tableau suivant :

H/P	0.5	1	1.5	2	3
v(%)	5	1.2	1	0.6	4

Ce tableau est à comparer à celui du paragraphe (3-1-1). On constate que dans la zone [0.5,3] les erreurs varient très peu et sont sensiblement du même ordre de grandeur dans les deux cas; mais il semble qu'en-dehors de cet intervalle la croissance de l'erreur soit moins rapide dans le cas de l'inversion stochastique. L'erreur la plus faible est obtenue pour (H/P) compris entre 1.5 et 2 comme dans le cas de l'inversion globale.

### 3-2-2 Influence des caractéristiques du signal

Le paramètre  $\psi^2$  défini par l'équation (2-19) traduit la taille du signal (Franklin, 1970). Dans les exemples illustrant l'utilisation de la méthode stochastique inverse, nous avons évalué  $\psi^2$  en prenant la moyenne quadratique du signal prolongé.

Pour étudier l'influence d'une mauvaise détermination de ce paramètre  $\psi^2$ , nous avons utilisé un ensemble de 121 points de données répartis régulièrement sur une grille horizontale que nous avons prolongée vers le bas d'une hauteur de 2 pas de maille. Le moment dipolaire de la source a été choisi de façon à ce que la moyenne quadratique du champ prolongé soit de l'ordre de  $10^4 u^2$  ( $u$  est une unité arbitraire). L'évolution de la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\alpha$  étant le rapport entre l'estimation supposée  $\psi'^2$  et l'estimation vraie  $\psi^2$ , est montrée dans le tableau ci-dessous:

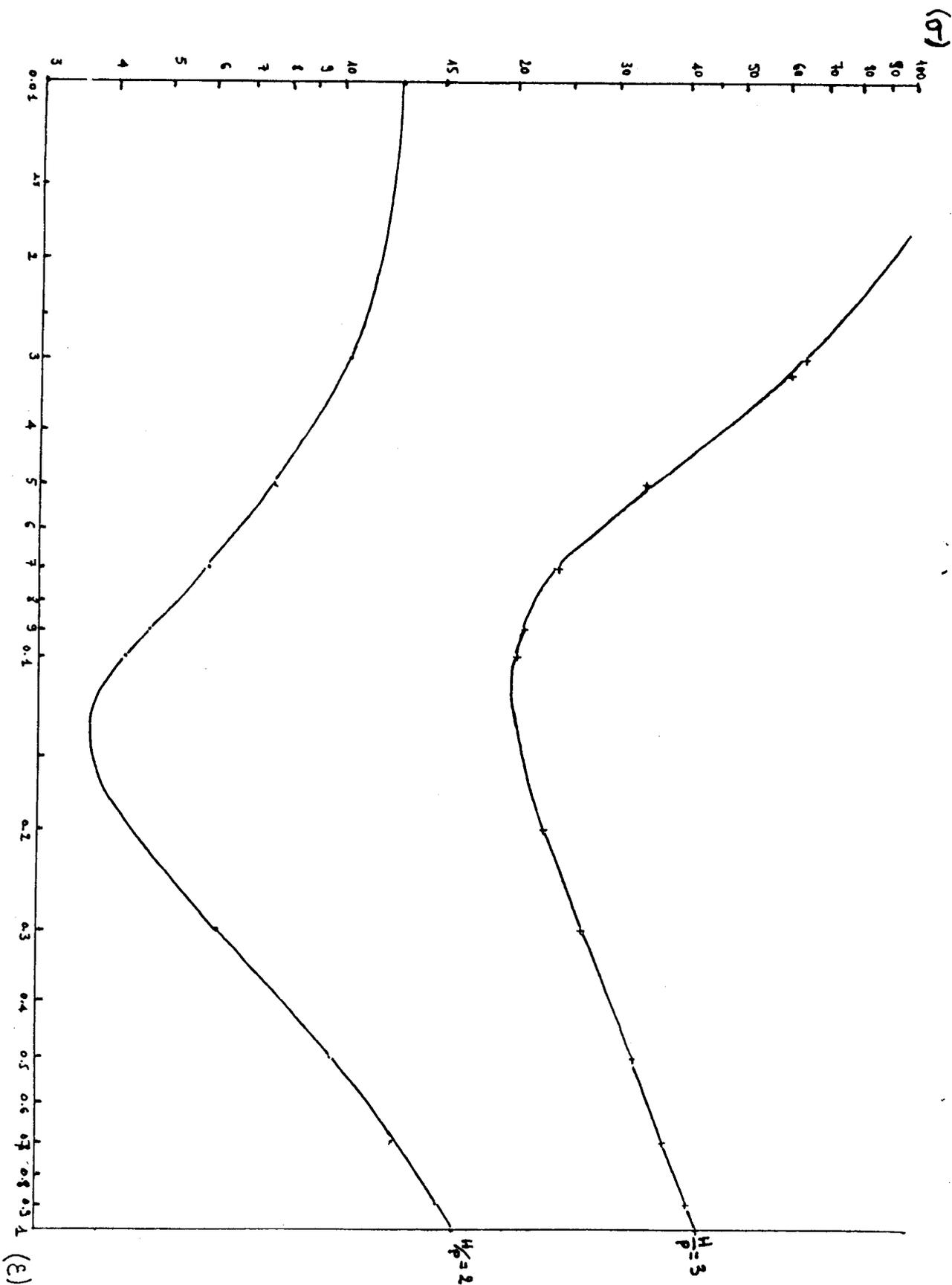
$\alpha$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^1$	$10^2$
$\sigma(u)$	6	1.4	0.4	0.6	2
$v(\%)$	13	6	0.6	1.7	2.3

Nous constatons qu'il suffit de connaître l'ordre de grandeur de  $\phi^2$  pour avoir une erreur inférieure à 1%. Ceci est particulièrement utile dans le cas des données MAGSAT (voir I<sup>P</sup> partie) quand aucune mesure au sol n'est disponible sur la zone étudiée.

### 3-2-3 Influence des caractéristiques du bruit

Dans l'expression  $\rho_{22}$  de l'autocorrélation du bruit qui affecte les mesures,  $\epsilon^2$  représente la variance de la distribution des erreurs aux points  $P_i$  de ( $\underline{\lambda}$ ). Si le prolongement est effectué avec des données exactes, alors  $\rho_{22}$  traduit les erreurs dûes au bruit numérique.

L'étude du comportement de  $\epsilon^2$  pour différentes hauteurs de prolongement et différentes couvertures de données, montre que la distance  $\sigma$  entre le modèle  $\Psi_N$  et la fonction  $\Psi$  est une fonction de ce paramètre  $\epsilon^2$ . Le prolongement des données synthétiques montre l'existence d'une valeur optimale  $\epsilon^2$  pour laquelle  $\sigma$  est minimal. Pour des valeurs de  $\epsilon^2$  supérieures à la valeur optimale, on constate une croissance rapide de  $\sigma$  tout au moins pour des valeurs du rapport (H/P) comprise entre 1.5 et 3 (fig.1-6). Il semble que pour (H/P)=1, le comportement de  $\sigma$  en fonction de  $\epsilon^2$  soit anormal mais nous n'avons pas pu déterminer la cause de cette anomalie.



Les tableaux ci-dessous, présentent la variation de la distance  $\sigma$  en fonction de  $\epsilon^2$

$\epsilon^2$	0.081	0.01	0.09	0.25	0.490	0.81	1	9	16	25	100
H/P=1	0.91	0.90	0.78	1.25	/	3.1	3.6	13.5	21.3	/	37.4
=1.5	/	6.5	6.5	6.4	6.4	6.3	6.3	5.5	4.9	4.1	9.4

$\epsilon \times 10^{-4}$					$\epsilon^2 \times 10^{-2}$							
1	9	2	49	81	1	4	9	25	49	81	1	
H/p=2	12.6	10.4	7.7	6	4.7	4.4	/	6.28	9.7	12.5	15	16
H/p=3	588	64.5	34.4	24.1	20.6	20.4	22.8	26.6	32.5	37.5	41.5	43.1

On constate que  $\sigma$  n'est pas un paramètre significatif pour déterminer  $\epsilon^2$  en d'autres termes, l'intensité des anomalies est relativement bien déterminée même si  $\epsilon^2$  est loin de sa valeur optimale.

#### 4 - Propagation des erreurs

Dans les exemples synthétiques que nous venons de décrire, l'erreur affectant les données est de l'ordre de grandeur de la précision de l'ordinateur (en général environ  $10^{-6}$ ). Dans les exemples réels nous verrons que le bruit affectant les mesures est beaucoup plus important, au mieux quelques pourcents et au pire 50%. Nous allons voir dans cette section comment ces erreurs se propagent et leur influence sur la précision de la fonction prolongée.

##### 4-1 Inversion globale

Soient  $\Gamma$  le vecteur des données, de composantes  $\gamma_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) et  $\alpha$  le vecteur des coefficients  $\alpha_i$  du développement de  $\Psi_N$  sur la base des  $G_i$ .

Soit  $G$  la matrice des éléments  $g_{ij}$  :

$$\alpha = G^{-1}\Gamma$$

Faisons l'hypothèse classique que les données sont non corrélées, statistiquement indépendantes et de même variance  $s$ . La matrice de covariance du vecteur  $\Gamma$  s'écrit alors:

$$C_\Gamma = s^2 I_{NN} \quad \text{où } I_{NN} \text{ est la matrice identité de rang } N$$

L'expression de la matrice de covariance du vecteur  $\alpha$  est alors (Courtilot et al., 1978) :

$$C_\alpha = s^2 (G^{-1})^2$$

Soit  $V$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les composantes des vecteurs propres  $V_i$  dans la base des  $G_i$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$ , alors:

$$G = V\Lambda V^T \quad \text{et} \quad G^{-1} = V\Lambda^{-1} V^T$$

Soit  $\alpha'$  le vecteur des coefficients du développement de  $\Psi_N$  sur la base des  $V_i$  :

$$\alpha' = V^T \alpha$$

la matrice de covariance du vecteur colonne  $\alpha'$  s'écrit donc:

$$C_{\alpha'} = \Lambda^{-2} C_{\Gamma'} \quad \text{où} \quad \Gamma' = V^T \Gamma$$

la matrice  $V$  est orthonormale, alors:

$$C_{\Gamma'} = C_{\Gamma}$$

donc:

$$C_{\alpha'} = s^2 \Lambda^{-2}$$

la matrice de covariance  $C_{\alpha'}$  mesure l'effet des petites valeurs propres  $\lambda_i$ .

Le bruit qui affecte les mesures  $a$ , en général, une composition spectrale où prédominent les courtes longueurs d'onde. Nous voyons d'après l'expression de  $C_{\alpha'}$  que les petites valeurs propres sont associées à une amplification considérable de ce bruit. Pour cela, il est préférable dans le cas de données erronées de ne conserver dans le développement de  $\Psi_N$  que les termes relatifs aux  $p$  plus grandes valeurs propres. Ce qui revient en fait à projeter  $\Psi_N$  non plus sur  $E_N$  mais sur un sous-espace  $E_p$  de celui-ci. Cette technique "Ranking and Winnowing" a été introduite par Gilbert (1971). Différents critères ont été proposés pour déterminer le nombre optimal de vecteurs propres et valeurs propres (Jackson, 1972; Whaler et Gubbins, 1981).

A l'aide de données synthétiques, nous avons étudié l'influence des erreurs affectant les données sur le nombre optimal de valeurs propres (celui qui minimise la distance  $\Psi_N - \Psi$ ). Comme dans les paragraphes précédents, nous avons utilisé comme source un dipôle vertical de moment arbitraire, de profondeur  $z_0$ , dont le champ est mesuré en 121 points d'une grille régulière horizontale d'altitude  $H=1.5P$ . Nous avons testé la propagation des erreurs en utilisant deux types de distribution : aléatoire gaussienne et aléatoire uniforme.

#### 4-1-1 Propagation des erreurs à distribution gaussienne

Nous ne considérerons ici que des distributions aléatoires dont la valeur moyenne est nulle. Ces distributions sont donc caractérisées, sans ambiguïté, par leur écart-type  $s_d$ .

Nous avons déterminé  $NW$ , le nombre optimal de valeurs propres pour des écart-type croissants entre 0 et 10. La valeur maximum représente une précision des données de l'ordre de 10%. La figure I-7 montre que  $NW$  décroît d'abord rapidement en fonction de  $s_d$  ( $s_d \leq 2$ ) puis se stabilise aux alentours de 39, soit 32% du nombre total de valeurs propres. Pour chaque point de la courbe de la figure I-7, nous avons calculé la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$ ; l'ensemble de ces résultats est présenté dans le tableau suivant :

$s_d$	0	0.5	1	1.5	2	3	4	10
$\sigma$	4.6	18	22	28	37	37.5	37.5	42

On voit que  $\sigma$  varie rapidement dans l'intervalle (0,0.5) puis plus lentement après. Avec les données utilisées, pour  $s_d=10$ , l'erreur relative  $v$  est de l'ordre de 20%.

#### 4-1-2 Propagation des erreurs à distribution uniforme

Nous avons également utilisé, sur les mêmes données que précédemment, des distributions d'erreur aléatoire uniforme d'amplitude  $A$  croissante, comprise entre 0 et 15. La figure I-8 montre que  $NW$  décroît rapidement avec l'amplitude du bruit rajoutée aux données. Le tableau suivant, qui donne la valeur de la distance ( $\Psi_N, \Psi$ ) en fonction de

Figure I-7

Variation du nombre optimal de valeurs propres NW (exprimé en % du nombre total de vecteurs propres; la grille utilisée est une grille horizontale régulière de 11x11 points) en fonction de  $s_d$ , l'écart-type de la distribution d'erreur gaussienne superposée aux données.

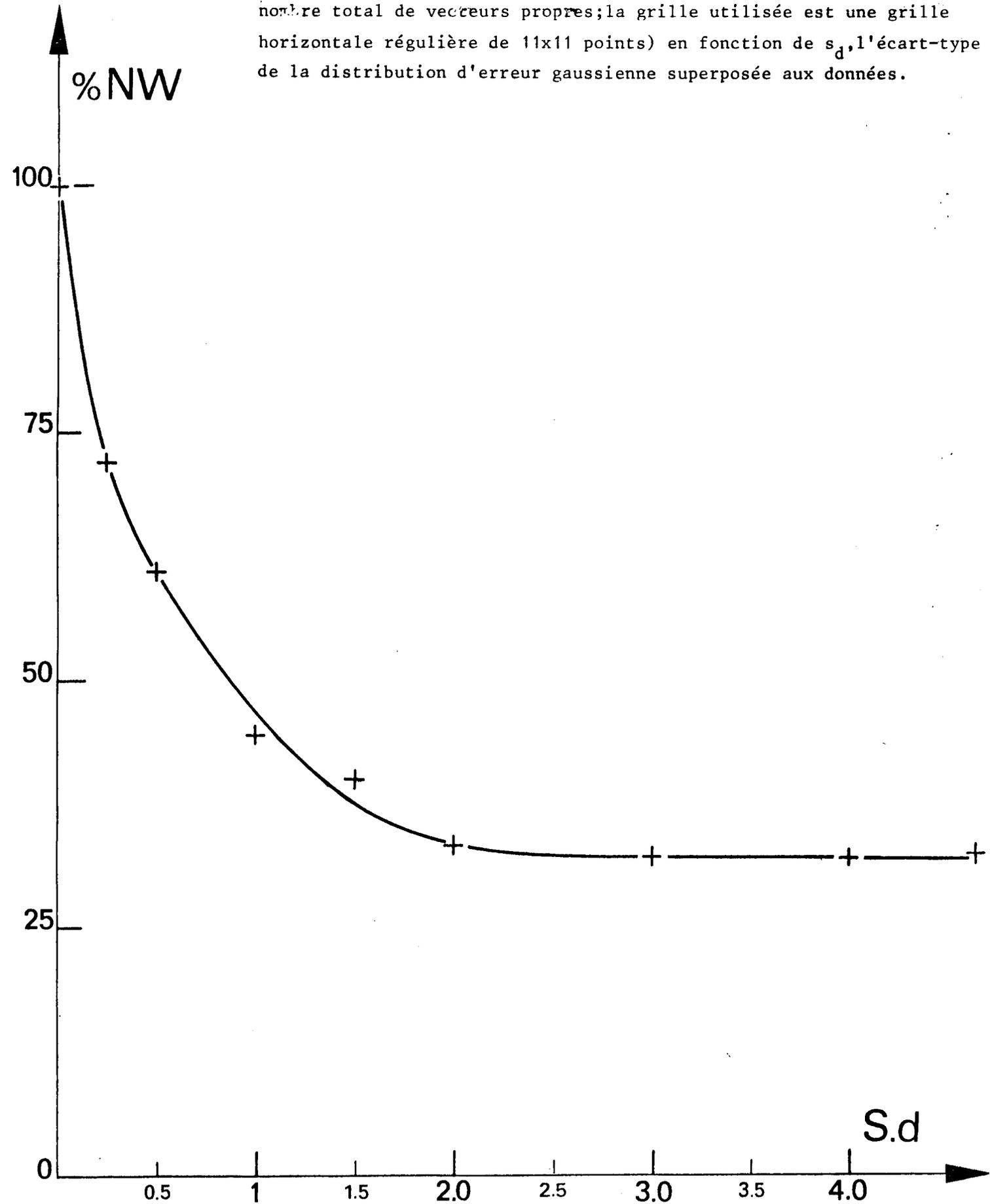
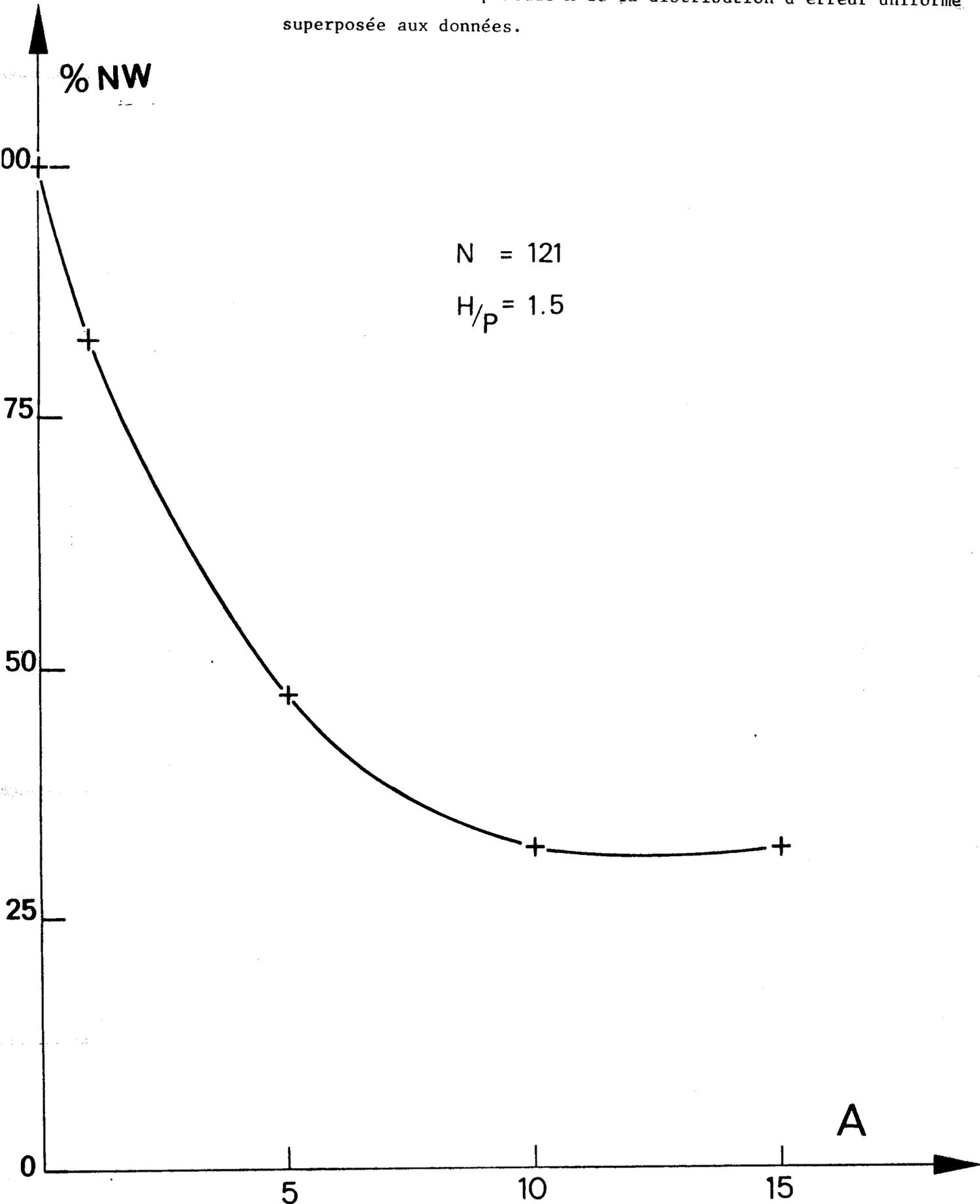


Figure I-8

Variation du nombre optimal NW de vecteurs propres (NW est exprimé en % du nombre total de vecteurs propres; la grille utilisée est une grille régulière horizontale de 11x11 points de données), en fonction de l'amplitude A de la distribution d'erreur uniforme superposée aux données.



de l'amplitude du bruit montre que cette distance croît d'abord rapidement puis se stabilise d'une façon analogue à ce qu'on avait observé au paragraphe précédent.

A	U	1	5	10	15
$\sigma$	4.6	13.5	27.5	39	41

#### Remarque

L'aspect des figures I-7 et I-8 et le comportement de  $\sigma$  dans les tableaux correspondants s'expliquent par l'aspect du spectre de (G); le bruit ayant surtout un spectre haute fréquence est transmis principalement par les petites valeurs propres qui représentent approximativement 40% du spectre. L'élimination de ces petites valeurs propres, si elle accroît légèrement la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$  a pour effet de stabiliser de façon spectaculaire l'inversion de (G).

#### 4-2 Inversion stochastique

Dans le cas de l'inversion stochastique, la matrice (G) s'écrit:

$$G = \phi^2 (g_{ij}) + \varepsilon^2 (\delta_{ij})$$

d'autre part (voir §4-1):

$$(g_{ij}) = \Lambda \Lambda^T$$

$$(\delta_{ij}) = V V^T = V^T V$$

G peut se mettre donc sous la forme:

$$\begin{aligned} G &= \phi^2 \Lambda \Lambda^T + \varepsilon^2 V V^T \\ &= V (\phi^2 \Lambda + \varepsilon^2 I_{NN}) V^T \end{aligned}$$

soit  $\Lambda'$  telle que:

$$\begin{aligned}\Lambda' &= \psi^2 \Lambda + \varepsilon^2 I_{NN} \\ &= \psi^2 (\Lambda + (\varepsilon^2 / \psi^2) I_{NN})\end{aligned}$$

la matrice inverse  $G^{-1}$  s'écrit alors:

$$G^{-1} = V \Lambda'^{-1} V^T$$

un calcul analogue à celui développé au paragraphe (4-1) nous donne l'expression de la matrice de covariance  $C_{\alpha}$  qui s'écrit dans ce cas:

$$C_{\alpha} = s^2 \Lambda'^{-2} \quad \text{avec } \Lambda' = \Lambda + (\varepsilon^2 / \psi^2) I_{NN}$$

Ainsi, nous pouvons déduire d'après l'expression de  $\Lambda'$  que le terme  $(\varepsilon^2 / \psi^2)$  a pour effet de lisser la solution et est équivalent à l'effet d'une diminution du nombre de valeurs propres et vecteurs propres.

Nous avons choisi, pour la fonction d'autocorrélation  $\rho_{22}$ , celle d'un bruit gaussien. Dans cette section, nous tenterons de déterminer la valeur optimale des paramètres  $\varepsilon^2$  et  $\psi^2$  en fonction des caractéristiques du bruit ajouté aux données.

#### 4-2-1 Propagation des erreurs aléatoires gaussiennes

De même que dans le cas du prolongement par inversion globale, nous ne considérerons ici que des distributions aléatoires gaussiennes dont la valeur moyenne est nulle. Les données utilisées sont celles décrites au paragraphe (4-1).

Pour  $\psi^2$  fixé, nous avons déterminé  $\varepsilon^2$  optimal (valeur qui minimise la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$ ). La figure I-9 traduit la variation de ce paramètre optimal en fonction de l'écart-type  $s_d$  de l'erreur ajoutée aux données. Cette variation est représentée par une droite de la forme:

$$\varepsilon^2 = \beta s_d + \varepsilon_0^2$$

Où  $\beta$ , la pente de la droite, est une fonction de  $N$  et de  $(H/P)$

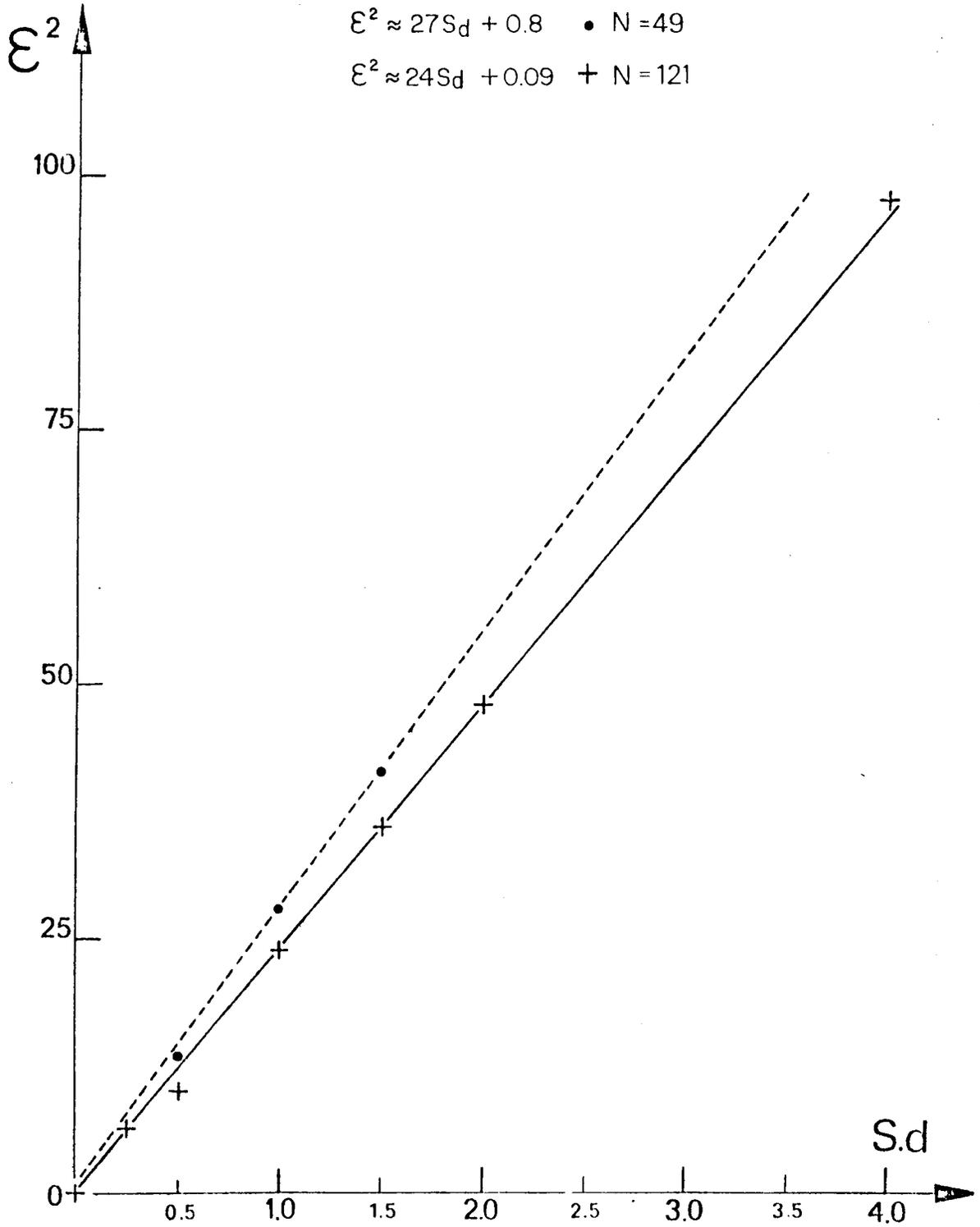


Figure-9

Variation du paramètre optimal  $\varepsilon^2$  en fonction de l'écart-type  $s_d$  de la distribution d'erreur gaussienne superposée aux données. Les données sont réparties sur une grille horizontale régulière de 7x7 points (•) ou de 11x11 points (+).

Le tableau ci-dessous :

$s_d$	0	0.5	1	1.5	2	4	10
$\sigma$	4.3	16.5	18	28	32	41	58

montre que la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$  croît avec l'erreur sur les données sans se stabiliser comme dans le cas de l'inversion globale.

#### 4-2-2 Propagation des erreurs aléatoires uniformes

Dans ce cas également, la variation du paramètre optimal  $\epsilon^2$  en fonction de l'amplitude A de l'erreur uniforme introduite sur les données, a la forme d'une droite (fig.I-10) d'équation:

$$\epsilon^2 = \gamma A + \epsilon_0^2$$

notons que  $\epsilon_0^2$  est indépendant de l'erreur qui entache les données. Les pentes  $\beta$  et  $\gamma$  traduisent l'amplification des erreurs, lors de l'opération de prolongement.

L'étude du tableau suivant:

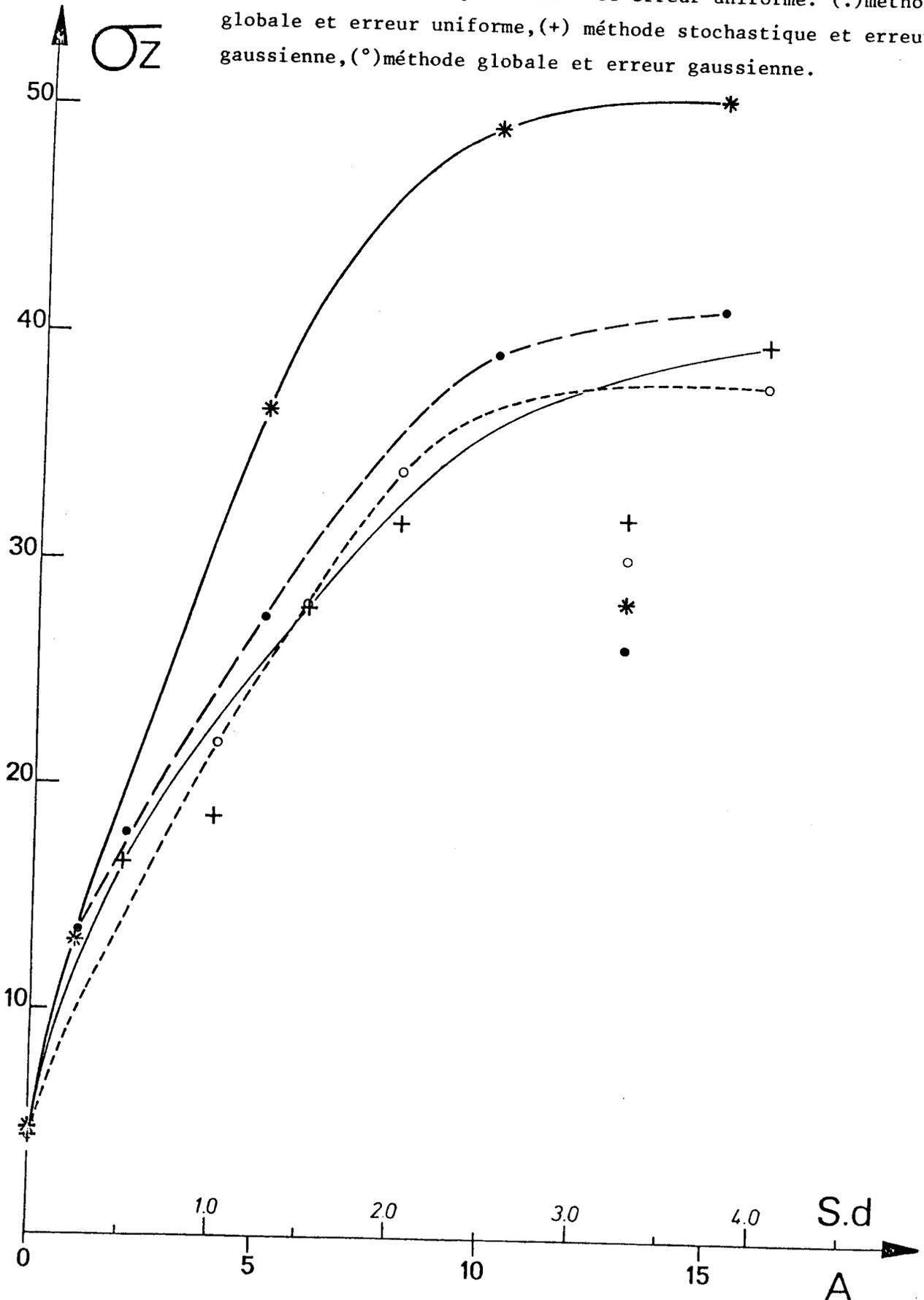
A	0	1	5	10	15
$\sigma$	4.3	13	37	50	58

représentant la variation de la distance entre  $\Psi_N$  et  $\Psi$  en fonction de l'amplitude A de l'erreur qui affecte les données, montre que  $\sigma$  est une fonction croissante monotone de A.

Ces différents exemples permettent de conclure que dans le cas d'une distribution aléatoire gaussienne des erreurs, les méthodes globale inverse

Figure I-11

Cette figure représente la variation de  $\bar{z}$ , distance entre le modèle calculé  $N$  et la fonction véritable  $Z$ . En abscisse nous avons porté les caractéristiques du bruit superposé aux données globales soit  $s_d$  l'écart-type dans le cas d'une distribution gaussienne soit  $A$ , l'amplitude dans le cas d'une distribution uniforme. Les données globales ont été calculées pour une grille régulière horizontale de 11x11 points. Nous avons utilisé les symboles suivants (\*) méthode stochastique inverse et erreur uniforme, (.) méthode globale et erreur uniforme, (+) méthode stochastique et erreur gaussienne, (°) méthode globale et erreur gaussienne.



et stochastique inverse conduisent à des résultats d'une qualité équivalente. Si l'erreur a une distribution uniforme, les résultats sont entachés d'une erreur plus importante dans le cas où l'on utilise la méthode stochastique inverse (fig. I-11). Ceci est en accord avec nos hypothèses de départ pour le choix d'une fonction d'autocorrélation du bruit dans le cas de l'inversion stochastique.

#### 4-3 Influence de l'échantillonnage

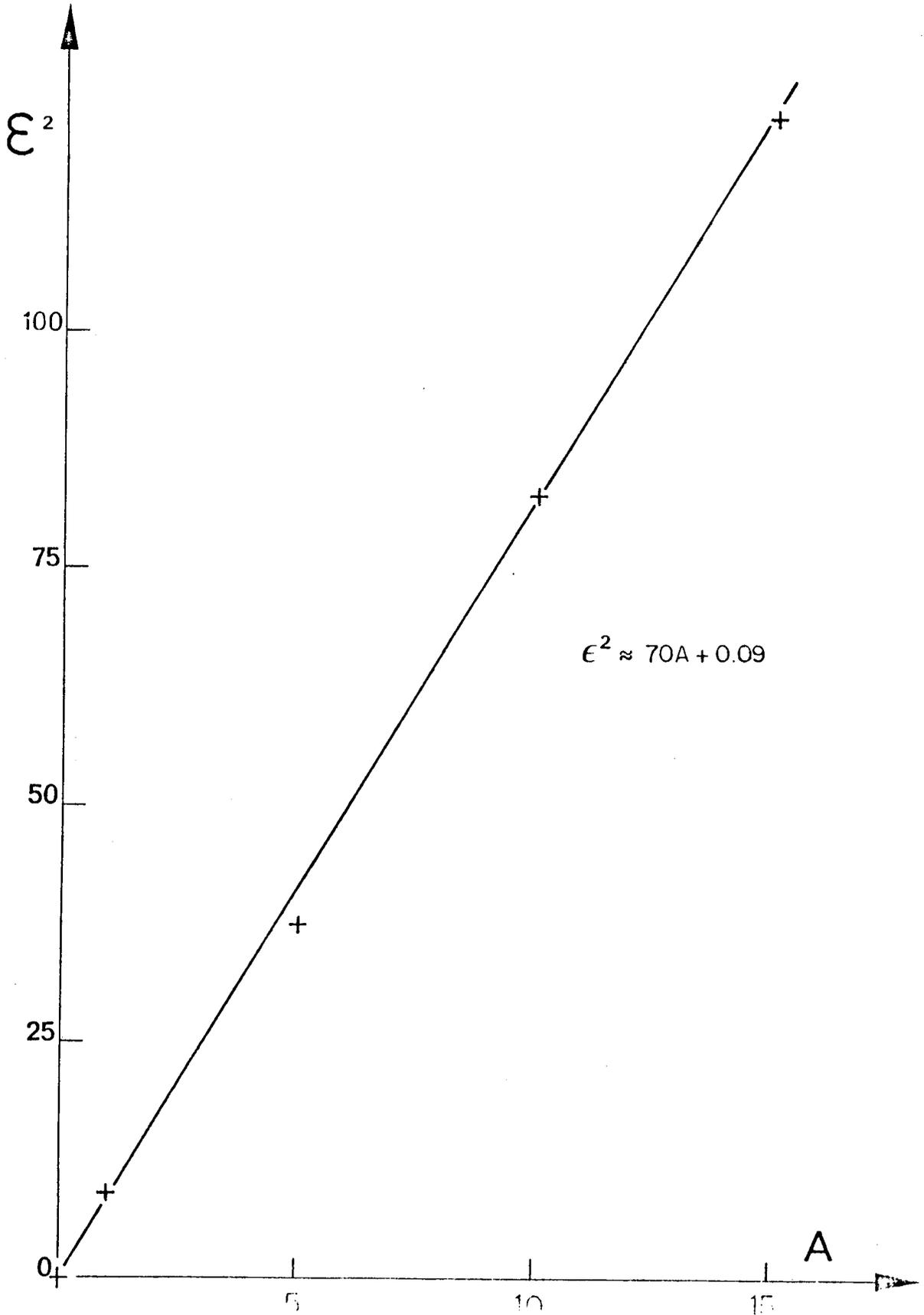
Dans l'étude systématique du prolongement, nous avons dans tous les cas considéré des fonctions suffisamment bien échantillonnées pour éviter les distorsions pouvant être engendrées par l'insuffisance de points de mesures.

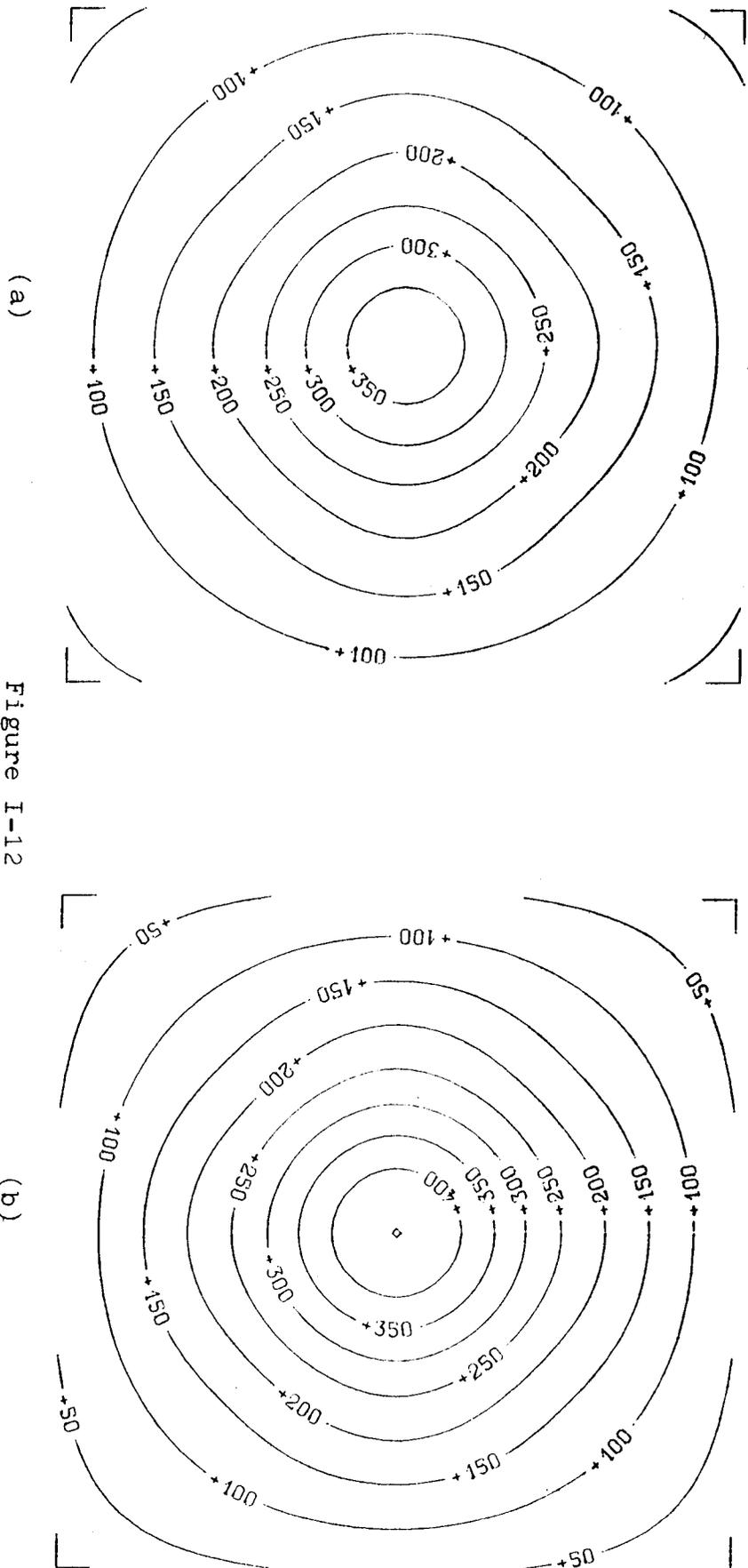
Pour une fonction  $\Psi$  donnée, de longueur d'onde caractéristique  $\lambda$ , le contenu spectral de cette fonction prolongée dépendra du nombre de points de mesures pris par demi-longueur d'onde.

Les figures I-12(a-c) représentent le prolongement des données d'un dipôle pour différentes valeurs de l'échantillonnage. Nous constatons que la bonne représentation de la fonction prolongée impose classiquement une valeur minimale de 4 points par demi-longueur d'onde. Il convient bien sûr dans le cas de données synthétiques, de s'assurer que l'échantillonnage ne coïncide pas avec les zéros de la fonction. D'autre part le pas de maille doit être choisi par un compromis de façon à ce que les longueurs d'onde caractéristiques de l'anomalie soient bien représentées et que le contenu spectral à plus haute fréquence soit aussi peu amplifié que possible.

Figure I-10

Variation du paramètre  $\epsilon^2$  optimal en fonction de l'amplitude  $A$  de la distribution d'erreur uniforme superposée aux données. Les données sont réparties sur une grille régulière horizontale de  $11 \times 11$  points.



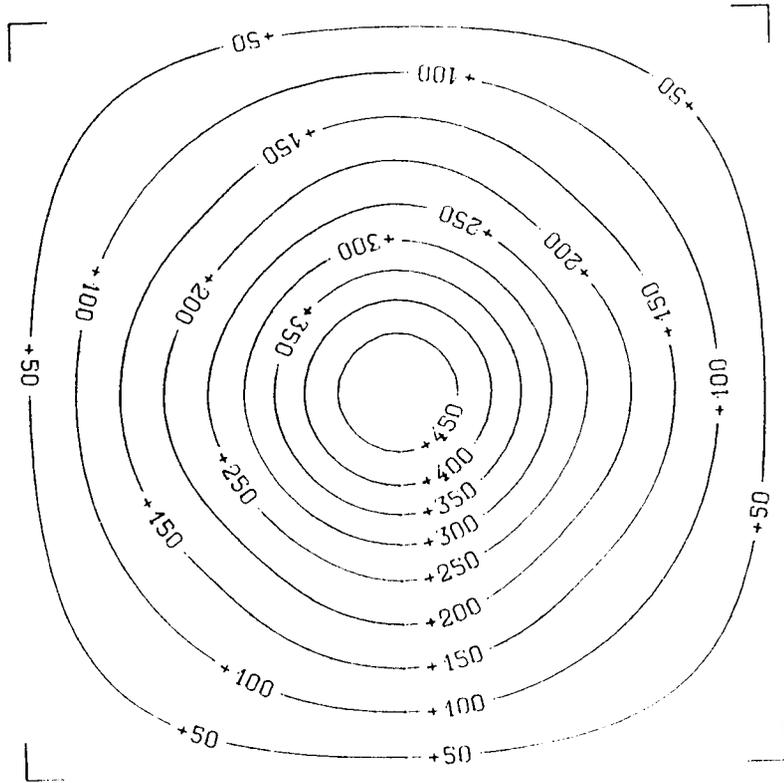


(a)

Figure I-12

(b)

Composante verticale du champ créée par un dipôle vertical.  
 Prolongement effectué par méthode globale inverse de données réparties  
 régulièrement sur un plan horizontal d'altitude 1.5 pas de maille. (a): données  
 échantillonnées à 2 points par demi-longueur d'onde soit 1 point pour 6 pas  
 de maille.); (b): échantillonnage à 3 points par demi-longueur d'onde soit  
 1 point de donnée pour 3 pas de maille.



(c)

Figure I-12

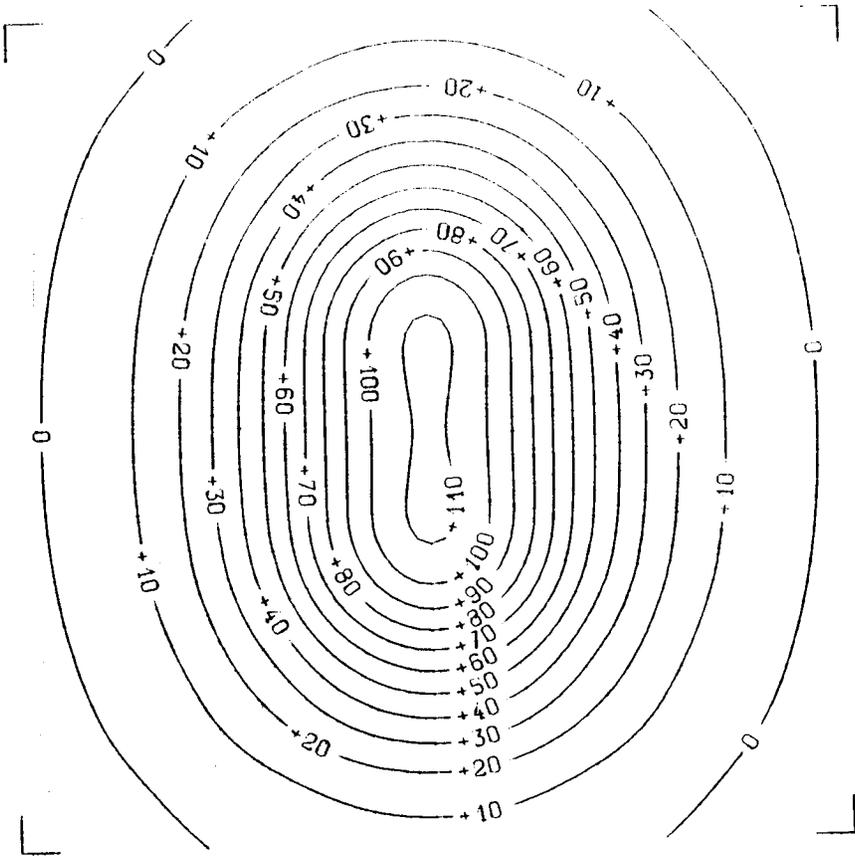
Composante verticale du champ créé par un dipôle vertical. Prolongement effectué par méthode globale inverse de  $7 \times 7$  points de données réparties sur un plan horizontal d'altitude 1.5 pas de maille. La fonction à prolonger est échantillonnée à 4 points par demi-longueur d'onde.

### 5- Décoalescence des anomalies

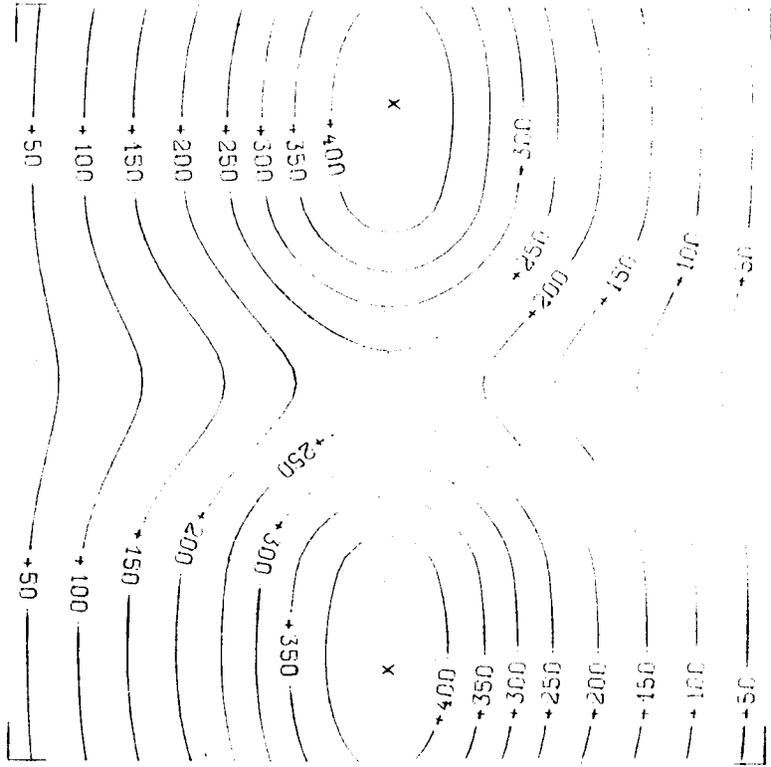
Quand la distance entre la source et les observations est égale ou supérieure à la distance horizontale entre les sources, on assiste en général au phénomène de coalescence des anomalies : plusieurs sources peuvent être alors responsables d'une même anomalie.

Le prolongement vers le bas est le moyen idéal de "décoalescer" les anomalies (Neumann et Courtillet, 1976) dans la mesure où le bruit est suffisamment faible pour ne pas être d'une amplitude supérieure aux anomalies, après prolongement. Si le bruit est important, le pourcentage de fonctions propres à utiliser sera faible (ou bien le paramètre d'erreur  $\epsilon^2$  sera important) d'où le lissage introduit lors du prolongement.

Nous ferons l'étude de la décoalescence en utilisant comme source deux dipôles verticaux de même intensité. L'écartement entre les dipôles est de 3 pas de maille, le plan ( $\Sigma$ ) des observations est à 3.5 pas de maille des sources. Il y a 121 points de mesures sur ce plan. Le prolongement de données exactes (fig. I-13a-b) par la méthode globale inverse (fig. I-13c) et par la méthode stochastique inverse (fig. I-13d) n'introduit pas de distorsion notable dans la forme de la fonction sur le plan (S) de prolongement. L'erreur relative  $v$  est de l'ordre de 2% pour les deux méthodes. La décoalescence se fait dans d'excellentes conditions si les données sont exactes ou tant que l'erreur relative qui les affecte reste faible (<10%). Les résultats obtenus par les deux méthodes sont équivalents si la distribution des erreurs suit une loi aléatoire gaussienne de faible dispersion (fig. I-14a,b). Si l'erreur est importante, des déformations apparaissent et affectent la carte prolongée, les anomalies ne sont alors plus identifiables de façon sûre (fig. I-15a,b). Dans le cas où les données sont perturbées par une erreur aléatoire uniforme,



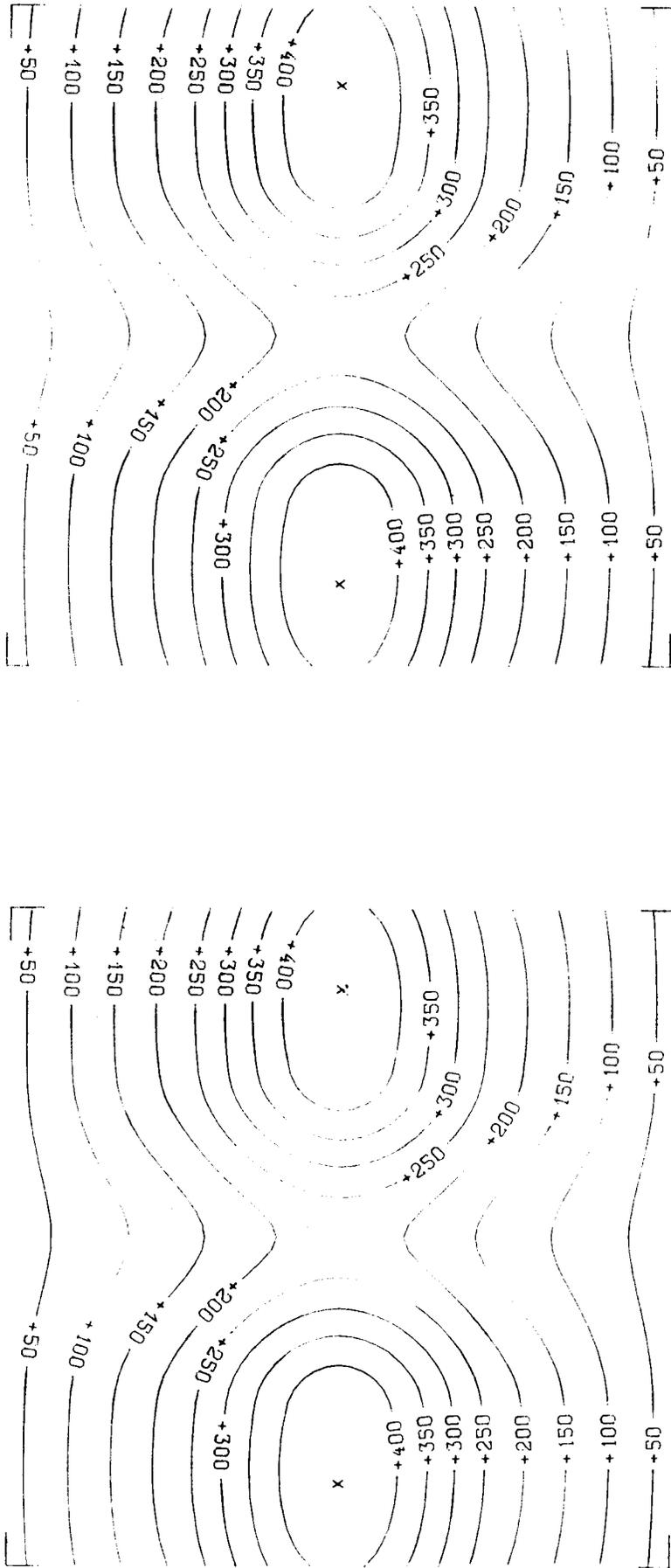
(a)



(b)

Figure I-13

Composante du champ créée par 2 dipôles identiques. Valeurs mesurées sur une grille régulière horizontale de points à une altitude de 1.5 pas de mailles points à altitude zero.



(c) NW=100%  
 $\sigma = 4.6$

(d)  $\sigma = 4.4$   
 $\sigma = 4.4$

Figure I-13  
Composante verticale du champ crée par 2 dipôles identiques. Valeurs obtenues par prolongement des données (a), par les méthodes globale inverse (c) et stochastique inverse (d).

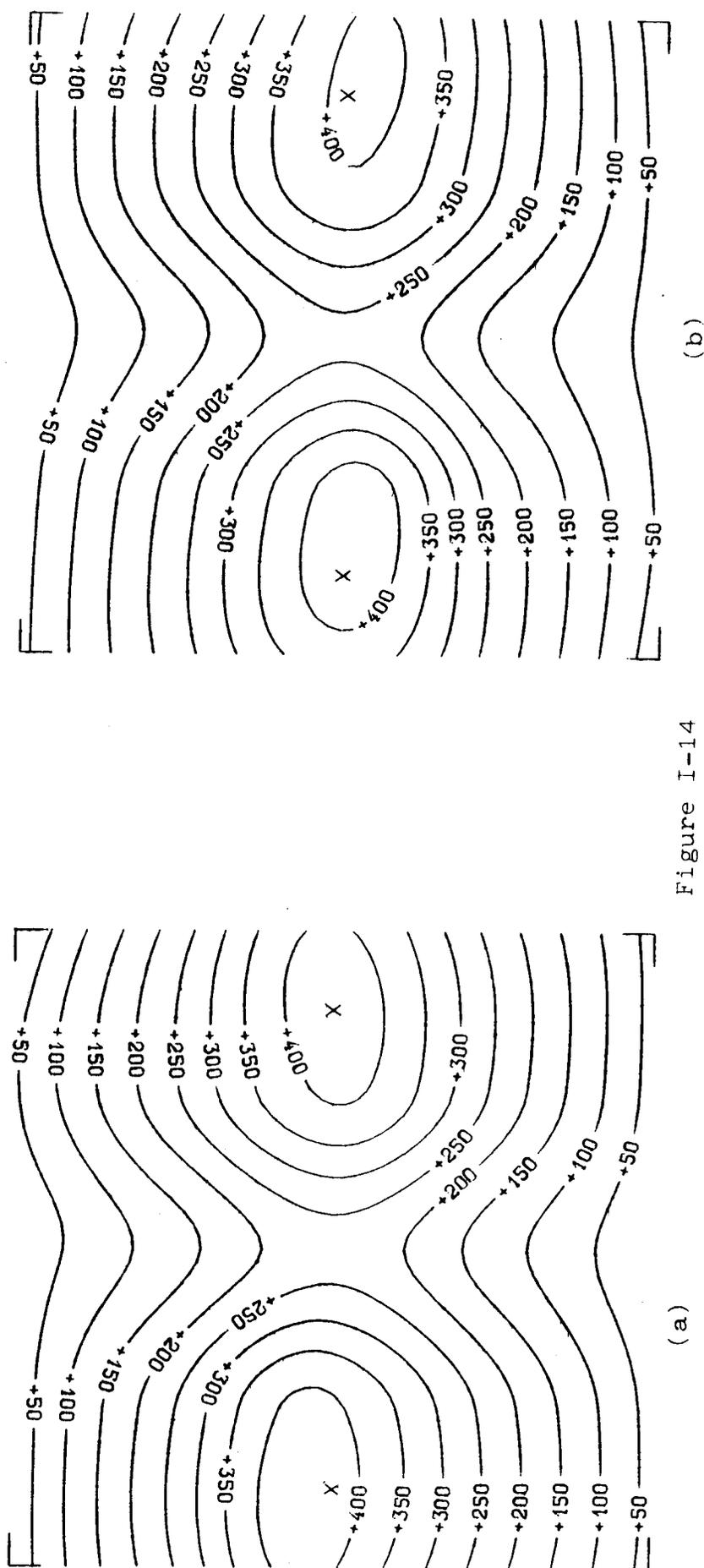


Figure I-14

Composante verticale du champ créé par 2 dipôles identiques (x). Valeurs obtenues par prolongement des données (I-13a) auxquelles est ajoutée une erreur aléatoire gaussienne d'écart-type  $s_1=0.5$ .

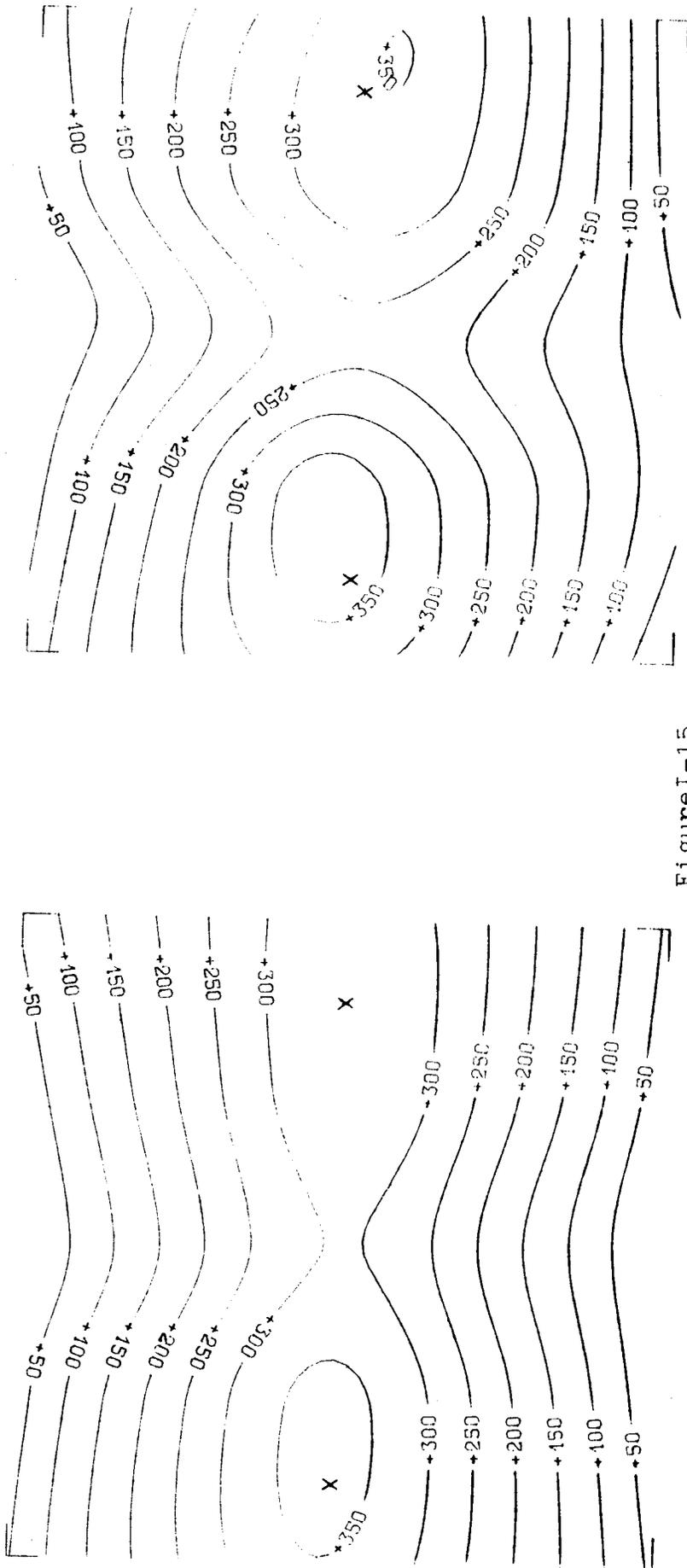


Figure I-15

(a) NW=32%  
 $\sigma = 42$

(b)  $\sigma = 104$   
 $\sigma = 42$

Composante du champ créée par 2 dipôles identiques (x). Valeurs obtenues par prolongement des données (I-13a) auxquelles est ajoutée une erreur aléatoire gaussienne. (a): prolongement par méthode globale inverse. (b): prolongement par méthode stochastique inverse. L'écart-type de l'erreur est de 4.

les distorsions obtenues en utilisant la méthode stochastique sont légèrement plus grandes que celles obtenues en utilisant la méthode globale (fig.I-16a,b). La décoalescence se fait néanmoins dans des conditions satisfaisantes.

Dans la pratique, il ne sera pas toujours évident d'estimer correctement l'erreur d'où le problème du choix du nombre optimal de fonctions propres ou du paramètre  $\epsilon^2$ . De ce choix dépendra la bonne représentation des anomalies lors du prolongement (restitution des amplitudes et décoalescence des anomalies). Les figures I-17(a,f) illustrent l'effet d'un mauvais choix des paramètres optimaux sur la fonction prolongée.

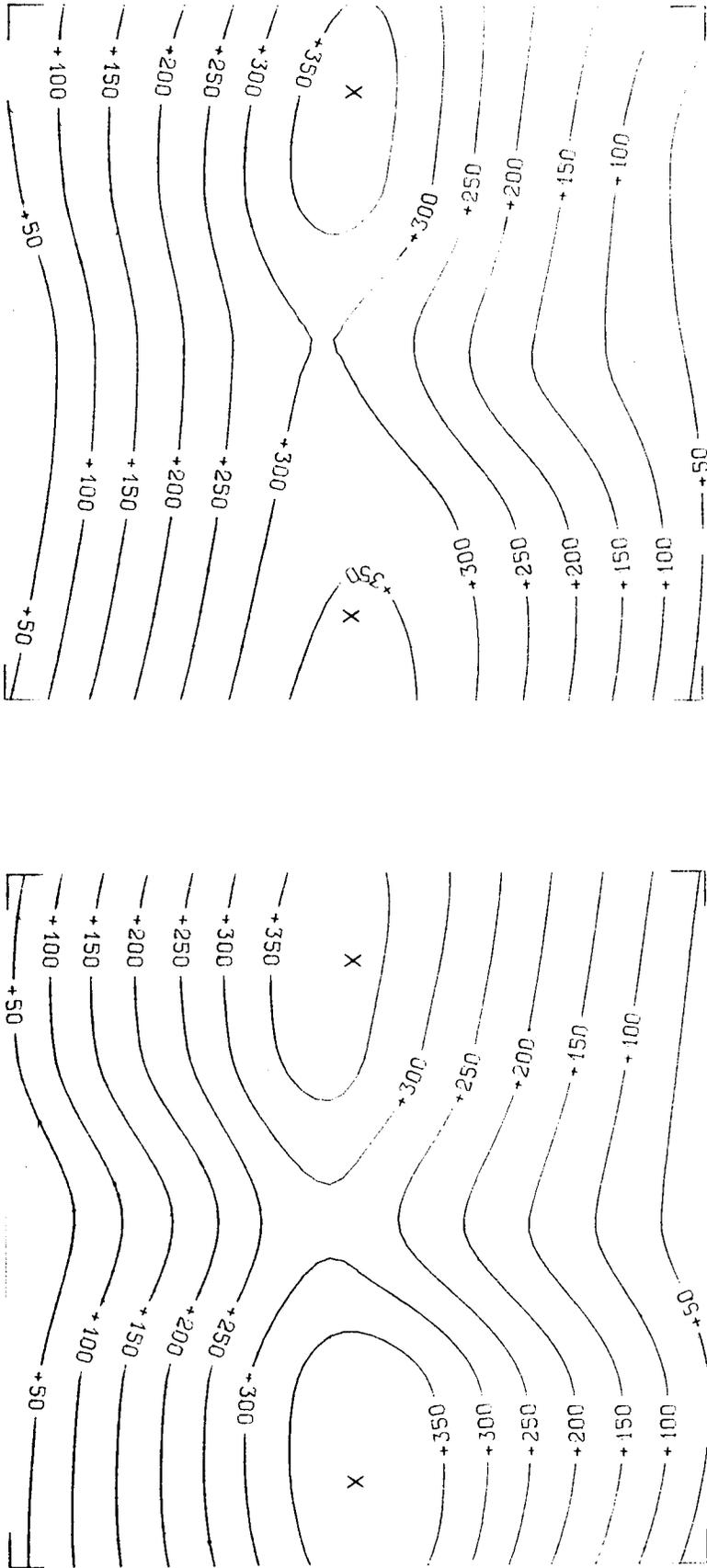
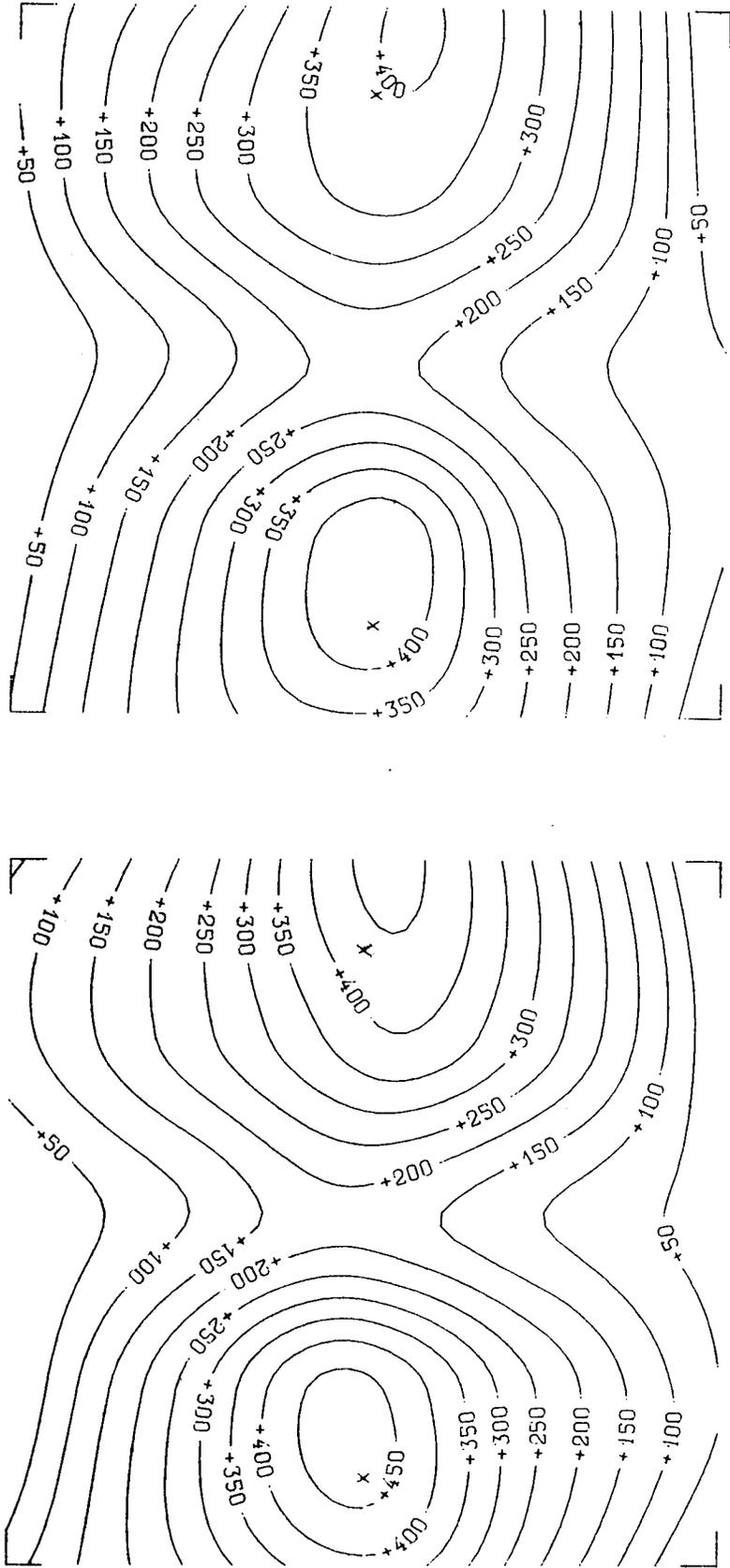


Figure I-16 (a) (b)

Composante du champ créé par 2 dipôles identiques (X). Valeurs obtenues par prolongement des données (fig. I-13a) auxquelles est ajoutée une erreur uniforme d'amplitude 5. Le prolongement est effectué par les méthodes globale inverse et stochastique inverse (b)

NW=66% > NW<sub>opt</sub>  
 $\sigma = 43$

$\xi^2 = 20 < \xi^2_{opt}$   
 $\sigma = 38$



(a) Figure I-17 (b)  
 Composante verticale du champ créé par 2 dipôles identiques (X).  
 Valeurs obtenues par prolongement des données (fig. I-13a) auxquelles est  
 ajoutée une erreur aléatoire gaussienne d'écart-type  $s_d = 2$ . Le prolongement  
 est effectué par méthode globale inverse (a) et méthode stochastique inverse (b)  
 en utilisant des paramètres différents des paramètres optimaux.

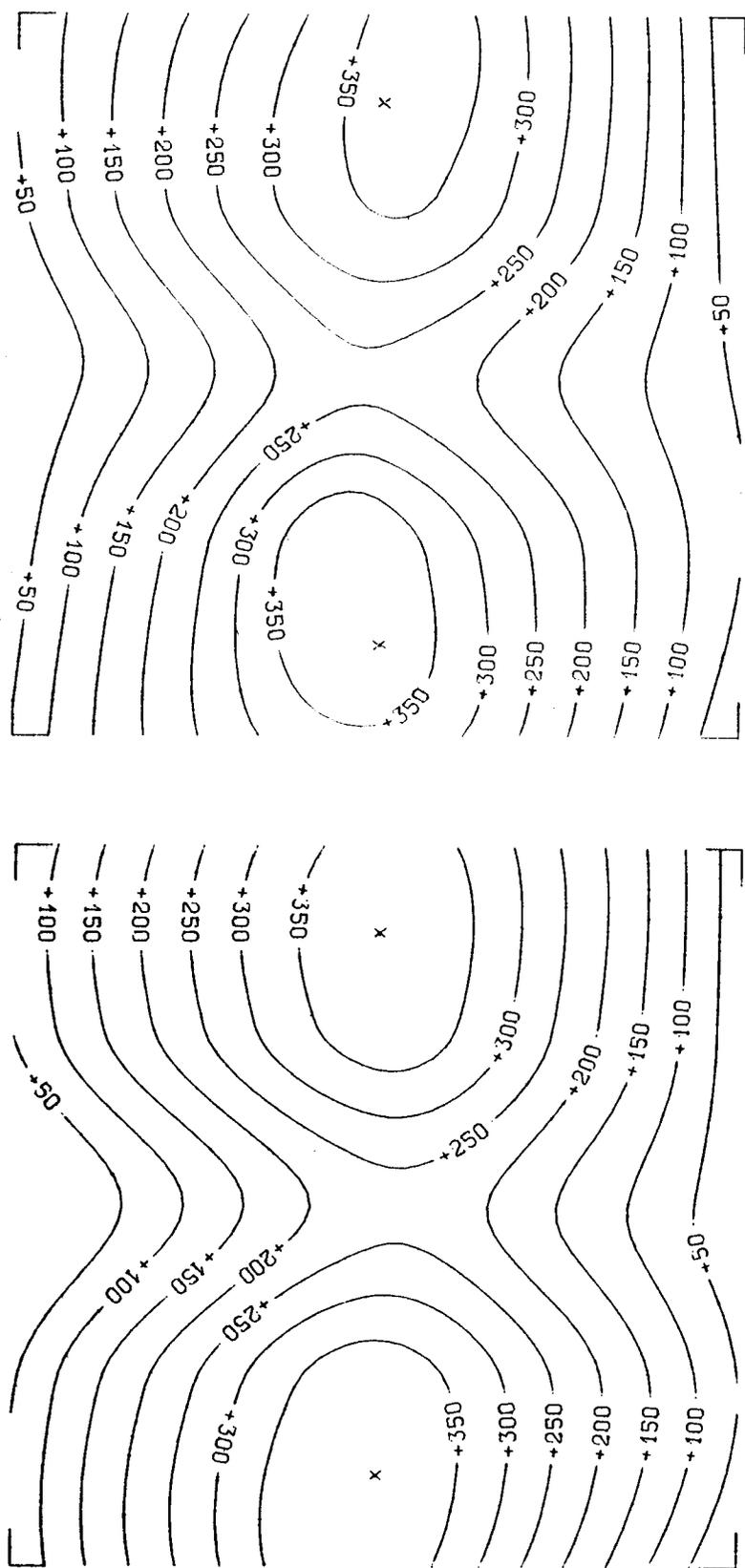


Figure I-17

(c)

NW=47% ;  $\sigma=32$ 

(d)

 $\xi^2=48$  ;  $\sigma=32$ 

Composante verticale du champ créé par 2 dipôles identiques(x).  
 Le prolongement est effectué par les méthodes globale inverse (c) et  
 stochastique inverse (d) après choix des paramètres optimaux (NW et  $\xi^2$ ).

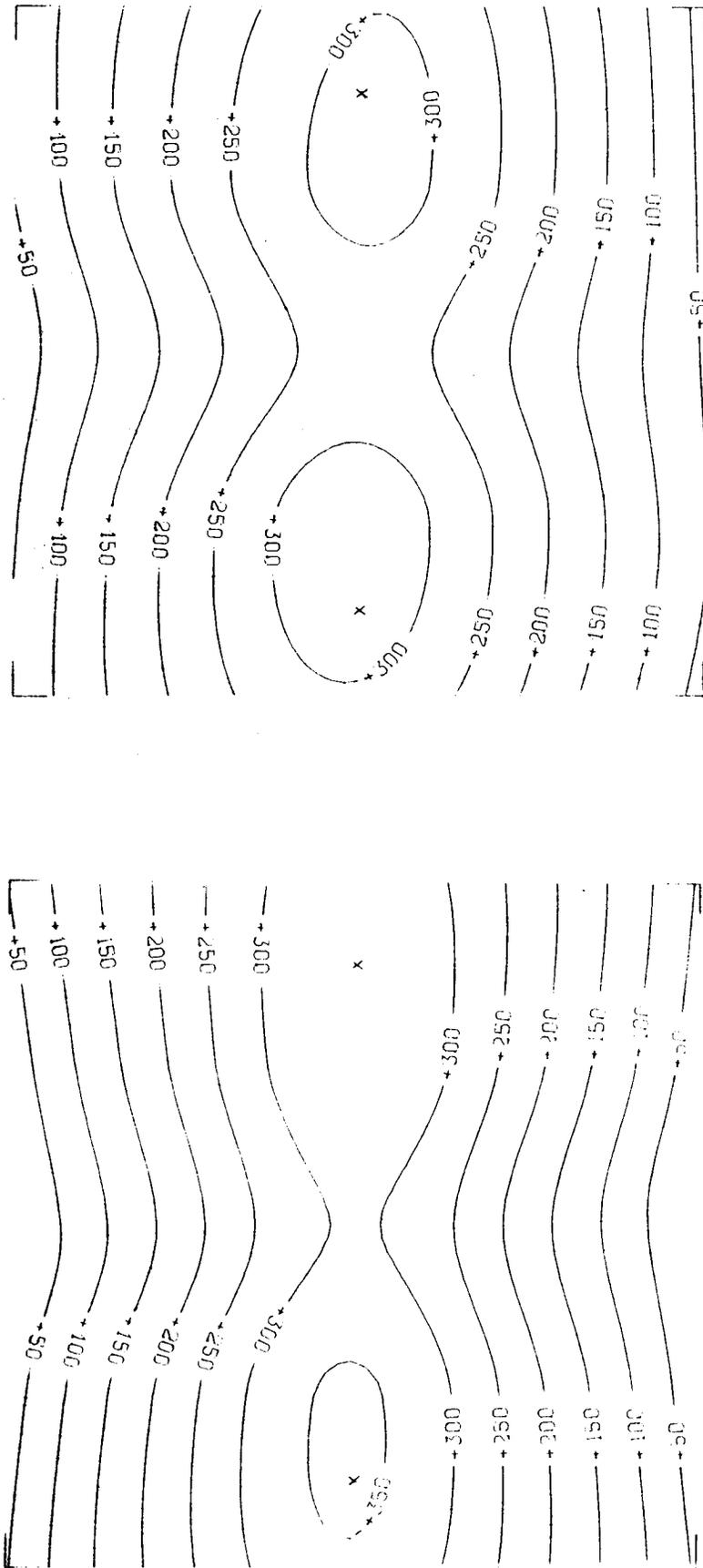


Figure I-17

Composante verticale du champ créé par 2 dipôles identiques (X)  
 Effet de lissage dû à un mauvais choix des paramètres optimaux,  
 NW (nombre de valeurs propres) dans le cas du prolongement par  
 la méthode globale inverse (e) et ( $\epsilon$  paramètre du bruit) dans le cas de  
 la méthode stochastique inverse (f). Les données sont celles utilisées  
 pour les figures I-17a,d.

(e)

(f)

$NW=32\% < NW_{opt}$

$\epsilon^2=200 > \epsilon_{opt}^2$   $\sigma=48$

## 6- Comparaison des méthodes-Conclusion

Les nombreux exemples synthétiques traités permettent de mettre en évidence les principales qualités et les principaux défauts de chacune des méthodes. De même les contraintes d'utilisation de chacune d'elles ont pu être déterminées lors de l'étude systématique du prolongement.

Etant donné une fonction  $\Psi$ , les paramètres du prolongement sur lesquels nous pouvons jouer pour réaliser les conditions optimales sont d'une part la hauteur de prolongement  $H$  et  $d$  la dimension de la zone sur laquelle on calcule  $\Psi$  et d'autre part  $N$  le nombre de points de mesures,  $P$  la distance caractéristique entre les points de mesures,  $NW$  le nombre de fonctions propres retenues dans le cas de l'inversion globale et les paramètres  $\psi^2$  et  $\epsilon^2$  dans le cas de l'inversion stochastique.

La méthode globale inverse est caractérisée par une mise en oeuvre peu coûteuse en temps calcul, les essais sur le nombre de valeurs propres optimum n'intervenant qu'après l'inversion de la matrice  $(G)$ , ce qui permet une détermination très fine de ce nombre. Cette méthode fait malheureusement l'hypothèse que le bruit est gaussien limité aux courtes longueurs d'onde et la sélection de valeurs propres correspond parfois à une perte importante d'informations, par ailleurs elle est peu efficace pour des rapports  $(H/P)$  supérieurs à 2 ou inférieurs à 1.

La méthode stochastique inverse est une méthode d'une manipulation plus difficile et si l'on peut se contenter d'une approximation grossière pour  $\psi$ , elle exige des déterminations parfois difficiles du paramètre  $\epsilon$ ; ce qui nécessite des temps calculs relativement élevés pour l'inversion. Elle ne prend véritablement l'avantage sur la méthode globale que dans le cas où la distribution des mesures nécessite des rapports  $(H/P)$

plus grands que 3 pour le prolongement et dans le cas où les données sont entachées d'un bruit gaussien dont l'écart-type est relativement grand (>10%) par rapport aux valeurs observées.

ANNEXE: Expressions des fonctions de base  $G(P,M)$  et de la matrice  $(G)$  en coordonnées sphériques.

La surface coordonnée  $(S)$  est dans ce cas la sphère de rayon  $\rho=a$ . Les sources sont internes à  $(S)$  ( $\rho < a$ ). La résolution du problème direct pour la sphère (Courant et Hilbert, 1966) donne l'expression suivante pour les fonctions de base  $G(P,M)$

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi a} \times \frac{\rho^2 - a^2}{[\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\gamma]^3/2}$$

si  $P(\rho, \theta, \phi)$  est le point courant de  $(\Sigma)$  (fig. I-1) et  $M(a, \theta_M, \phi_M)$  de  $(S)$   $\gamma$  est l'angle  $(OM, OP)$ , son expression est donnée par:

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_M + \sin\theta \sin\theta_M \cos(\phi - \phi_M)$$

Les éléments  $g_{ij}$  de la matrice  $(G)$  des produits scalaires  $(G_i, G_j)$  ont la forme explicite suivante:

$$g_{ij} = \frac{1}{4\pi a} \times \frac{(\rho_i \rho_j / a)^2 - a^2}{[(\rho_i \rho_j / a)^2 - 2\rho_i \rho_j \cos\gamma + a^2]^3/2}$$

où  $\gamma$  est l'angle  $(OP_i, OP_j)$  avec  $P_i(\rho_i, \theta_i, \phi_i)$  et  $(\rho_j, \theta_j, \phi_j)$  deux points quelconques de  $(\Sigma)$ .

Nous remarquons que la relation donnant  $g_{ij}$  est similaire à celle donnant  $G(P_i, M)$  avec la correspondance:

$$\rho_i \rightarrow \rho_i \rho_j / a$$

$$\text{angle}(OP, OM) \rightarrow \text{angle}(OP_i, OP_j)$$

Cette similitude entre les 2 relations est d'une grande utilité pour les calculs pratiques.

II-APPLICATION AUX DONNEES MAGNETIQUES MAGSAT SUR LE CONTINENT AFRICAIN

## INTRODUCTION

L'étude du champ géomagnétique à l'aide de satellite a débuté avec le lancement du satellite soviétique Spoutnik 3 en mai 1958. Des missions analogues ont suivi depuis, sporadiquement toutefois (Benkova et Dolginov, 1971; Cain et Langel, 1971; Zmuda, 1971 et Langel, 1979).

Le tableau 1 récapitule la liste des principaux satellites mis sur orbite pour mesurer le champ magnétique terrestre et donne également les caractéristiques spécifiques à chacun d'eux. Nous pouvons constater qu'excepté les satellites de la série POGO (Polar Orbiting Geophysical Observatory): OGO-2, -4, -6, dans tous les autres cas la précision de l'instrumentation embarquée était insuffisante pour des études fines du champ. Par ailleurs les données ne couvraient pas toujours la totalité du globe. Les paramètres orbitaux des satellites limitèrent également l'utilisation de ces données.

L'intérêt des mesures magnétiques par satellite pour la compréhension des phénomènes géomagnétiques n'est plus à démontrer. Ainsi, la modélisation du champ principal de la terre et de sa variation nécessite une répartition spatio-temporelle des mesures aussi homogène que possible à l'échelle du globe. Cette contrainte, difficile à satisfaire dans le cas de mesures au sol, peut l'être aisément dans le cas de mesures par satellite. L'étude de la variation temporelle du champ régulier (variation séculaire) peut également bénéficier de l'apport des données de satellite qui complètent celles des observatoires et ce particulièrement pour les régions du globe d'accès difficile et les océans.

L'intérêt des mesures par satellite apparait également dans l'étude des anomalies de grandes longueurs d'onde. Ces dernières ont été détectées

pour la première fois lors de traitements de données aéromagnétiques (Serson et Hannaford, 1957; Pakiser et Zietz, 1965). Les données des satellites de la série POGO (Zietz et al., 1970) et COSMOS (Benkova et al., 1973) ont permis de mieux étudier ces anomalies qui ont suggéré l'existence d'hétérogénéités dans la croûte terrestre et probablement au niveau du manteau supérieur.

Ces anomalies de très faible amplitude ( $< 20 \text{ nT}$ ) à haute altitude sont néanmoins détectables par les satellites. Elles sont définies par rapport à un modèle du champ principal de la terre dont les sources sont essentiellement situées dans le noyau (voir par exemple Le mouel, 1976). Les problèmes vont de la détection de ces anomalies à leur séparation et leur identification (Regan, 1979).

Dans le cadre des projets étudiés par l'agence spatiale américaine (NASA) et l'U.S. Geological Surevey (USGS) pour l'évaluation des ressources naturelles mondiales, MAGSAT est le dernier en date des satellites lancé pour la mesure du champ magnétique terrestre (NASA, 1978). La sensibilité de l'appareillage embarqué et les paramètres orbitaux (trajectoire polaire de basse altitude) devaient permettre:

- L'obtention d'une couverture totale du globe
- de lever les ambiguïtés sur les directions du champ d'anomalies
- une meilleure étude des champs d'origine externe (ionosphère, magnétosphère)
- une meilleure définition des anomalies crustales (résolution et niveau du signal)

Durant les sept mois de fonctionnement -novembre 1979 à mai 1980- la fréquence d'échantillonnage était de 8 mesures par seconde pour les magnétomètres scalaires et 16 mesures par seconde pour le magnétomètre vectoriel; ce qui représente une importante quantité d'informations.

Il est évidemment impossible d'effectuer le traitement de ces données autrement qu'avec l'aide d'ordinateurs puissants.

Notre premier travail consistait à sélectionner et à mettre sous une forme aisément manipulable les données nécessaires à l'étude du continent africain. L'utilisation d'un sous-ensemble des données vectorielles de MAGSAT nous a permis de déterminer un modèle du champ interne. Des cartes des composantes du champ total et des cartes des composantes des anomalies à l'altitude du satellite ont pu être ainsi tracées. Bien que préliminaires, ces cartes présentent les mêmes grands traits que celles obtenues par d'autres équipes travaillant sur les données MAGSAT (Hastings, 1982; Langel et al., 1982).

Ensuite nous appliquons les méthodes inverses de prolongement présentées dans la première partie aux cartes d'anomalies. Des cartes d'anomalies de la composante verticale  $Z$  au sol ont été établies. Le système de coordonnées cartésiennes s'avère mal adapté, pour l'échantillonnage utilisé ( $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ), pour restituer la forme et l'intensité des anomalies au sol. Les résultats obtenus dans le système de coordonnées sphériques sont plus homogènes et compatibles avec les cartes partielles dressées à partir de campagnes au sol ou aéroportées en certaines régions d'Afrique, République Centrafricaine notamment.

Nous avons consacré le quatrième chapitre à une description succincte de la géologie et des grands traits structuraux du continent africain. Il s'agit là d'une étape nécessaire pour interpréter les cartes obtenues. Pour être tout à fait rigoureuse, cette interprétation doit porter sur des cartes ayant subi l'opération de réduction au pôle. Le but de cette transformation introduite par Baranov (1957) est d'éliminer les distorsions des isanomaes résultant de l'inclinaison du vecteur champ normal et de celle de

l'aimantation des sources. En d'autres termes de replacer les anomalies à l'aplomb des sources. Cette opération permet de corrélérer avec une plus grande précision les traits structuraux avec la distribution des anomalies magnétiques de grandes longueurs d'onde.

Satellite	Dates	P	P/A (Km)	Instrument	nT	Couverture
SPOUTNIK3	5/58-6/58	65	440/600	fluxgate	100	URSS
VANGUARD3	9/59-12/59	33	510/3750	proton	10	telemetre*
1963/38C	9/63-1/64	Pol	1100	fluxgate	30/35	"
COSMOS26	3/64	49	270/403	proton	?	pleine orbite
COSMOS49	10/64-	50	261/488	proton	22	" "
1964/83C	12/64-6/65	90	1040/1089	rubidium	22	telemetre*
OGO-2	10/65-9/67	87	413/1510	"	6	pleine orbite
OGO-4	7/67-1/69	86	412/908	"	6	" "
OGO-6	6/69-7/71	82	397/1098	"	6	" "
COSMOS321	1/70-3/70	72	270/403	césium	?	" "
AZUR	11/69-6/70	103	384/3145	fluxgate(2 axes)	?	telemetre*
TRIAD	9/72	Pol	750/832	fluxgate	?	"

Tableau.1

Liste des principaux satellites utilisés pour mesurer le champ magnétique terrestre. P(perigée),A(apogée),I(inclinaison),nT(précision)

(\*) Il n'existe pas de système d'enregistrement de données à bord

## 1 - Présentation du satellite

Le satellite américain MAGSAT (MAGnetic field SATellite) a été conçu pour étudier au voisinage de la Terre, le champ magnétique terrestre; son orbite devait répondre à plusieurs critères (Langel, 1979):

- fournir une couverture totale de la surface terrestre
- fournir des données à basse altitude
- éviter autant que possible les électrojets équatoriaux et les courants de la variation diurne.

MAGSAT a été lancé le 30 octobre 1979 sur une orbite héliosynchrone crépusculaire dont les paramètres initiaux étaient:

Perigée: 352.4 Km

Apogée : 561.2 Km

Inclinaison: 96.8°

L'heure de passage aux noeuds (points de rencontre de l'orbite et du plan équatorial terrestre) est la limite jour-nuit.

Il est le premier satellite à enregistrer d'une part l'intensité et d'autre part les trois composantes vectorielles du champ magnétique terrestre X(Nord), Y(Est) et Z(verticale descendante) suivant un trièdre local. L'instrumentation utilisée comprend:

- deux magnétomètres à vapeur de césium pour les mesures scalaires d'une précision de 1nT (nanoTesla)
- un magnétomètre tri-axial (type fluxgate) pour les mesures vectorielles d'une précision de 3nT

Les magnétomètres scalaires servent également au calibrage du magnétomètre vectoriel. L'orientation du satellite sur sa trajectoire était assurée par:

- deux caméras à étoiles
- un capteur solaire

La précision du suivi du satellite par les stations au sol était de 60m en altitude et 300m en distance horizontale. La position des axes du fluxgate par rapport au satellite était déterminée par un système optique. La précision du résultat est de l'ordre de 20 secondes d'arc (soit  $1/5000^{\circ}$  sur une composante). La position de ces appareils était telle qu'elle permettait de connaître l'intensité à 3nT près et les composantes à 6nT près, toutes erreurs comprises à savoir positionnement et incertitudes dues à l'appareillage (Langel et al., 1982).

Certains problèmes de positionnement se sont posés. Ainsi, quand sur les trois appareils de positionnement un seul était fonctionnel, la trajectoire du satellite était déterminée à partir de sa trajectoire théorique. Cette solution, précise pour des intervalles de temps inférieurs à 10 secondes, introduit une erreur pouvant être très importante ( $>20nT$ ) au-delà d'une à deux minutes.

## 2 - Les données

MAGSAT a été opérationnel de novembre 1979 à juin 1980. La fréquence d'échantillonnage était de 8 mesures par seconde pour les mesures scalaires et 16 mesures par seconde pour les composantes du champ magnétique terrestre. Les données, envoyées par la NASA ont été reçues au centre de calcul du Centre d'Etudes Spatiales (CNES) à Toulouse où divers traitements ont été effectués:

- décodage des bandes de données
- calcul de moyennes sur un intervalle de temps de 2.5 secondes, soit approximativement 18Km sur l'orbite
- réécriture des données sous la forme finale suivante: date et heure de la mesure, coordonnées du satellite au moment de la mesure, valeurs des composantes géocentriques X,Y,Z du champ et enfin valeur d'un indice

d'activité magnétique.

### 3 - Traitements préliminaires des données-Cartes préliminaires

Le champ mesuré par le satellite est la superposition d'un champ d'origine interne et d'un champ d'origine externe. Les anomalies que nous nous proposons d'étudier sont dûes principalement à des sources crustales (sources internes au globe); il est donc nécessaire de pouvoir distinguer dans les données la contribution de chacune de ces sources. Cette séparation est l'un des problèmes les plus difficiles du géomagnétisme. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de modèles spatio-temporels du champ d'origine externe, responsable des variations transitoires du champ magnétique terrestre.

#### 3-1 Champs externes

Le champ d'origine externe est dû essentiellement à deux sources (Le Mouél, 1976):

\*) Des systèmes de courants électriques circulant principalement dans la couche E de l'ionosphère, entre 110 et 120 Km d'altitude. Ces systèmes de courants existent en permanence et occupent une position relativement stable par rapport au Soleil. Leur forme, leur intensité ainsi que la latitude de leur foyer varient jour à jour autour d'une valeur moyenne. Ces systèmes de courants sont responsables de la variation diurne ou  $S_R$  (Solar Regular) dont l'amplitude au sol est de quelques dizaines de nT. Cette variation régulière journalière dont la forme et l'amplitude varient d'un jour à l'autre autour d'une valeur moyenne standard, le  $S_q$  (Solar Quiet), établie par voie statistique pour les jours calmes (Mayaud, 1978), est dûe à un phénomène de marées ionosphériques et apparait synchrone en temps local d'une longitude à une autre. Principalement, la

variation  $S_R$  résulte d'effets de deux types distincts de courants:

- deux vortex de courants, un par hémisphère, dont le foyer est aux latitudes moyennes.
- des courants circulant dans les régions polaires et dont les effets de très courtes périodes (environ 1 heure) sont parfois sensibles jusqu'aux latitudes tempérées.

La minimisation des effets de cette variation diurne est assurée grâce à l'utilisation d'une orbite crépusculaire. Le satellite passe en tout lieu à la même heure locale, une fois le matin et une fois le soir, au moment où cette variation diurne est voisine de son minimum.

\*) L'anneau de courant, à la forme d'un tore, situé entre 5 et 6 rayons terrestres à l'intérieur de la magnétosphère. Il est responsable des variations intenses appelées orages magnétiques. Ces orages, d'occurrence imprévisible, résultent de l'interaction entre la magnétosphère et le vent solaire (principalement constitué de protons et d'électrons) de faible densité, 2 à 50 particules/cm<sup>3</sup> et dont la vitesse varie de 300 à 1000 Km/seconde. L'amplitude de ces variations intenses peut atteindre plus de 1000 nT au sol. Pour une description de la morphologie des variations transitoires voir P.N.MAYAUD (1978, 1980).

Notons que les deux sources de champs externes sont liées par un système de courants appelés courants de Birkeland ou courants alignés, les particules chargées se déplacent parallèlement aux lignes de champ. Lorsque le satellite traverse de telles structures (fig.II-1), il enregistre des anomalies extrêmement intenses (plusieurs centaines de nT), plus marquées en général sur les composantes horizontales (Fukushima et Kamide, 1973). Ces anomalies rendent l'utilisation des données aux voisinages des pôles extrêmement difficile. La proximité des électrojets auroraux

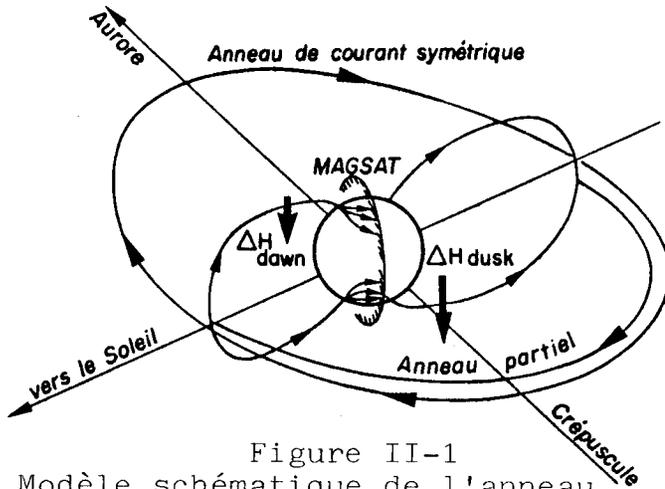


Figure II-1  
Modèle schématique de l'anneau de courant asymétrique constitué d'un anneau symétrique et d'un anneau partiel de courant. Orbite polaire de MAGSAT. Adapté de Suzuki et Fukushima(1982)

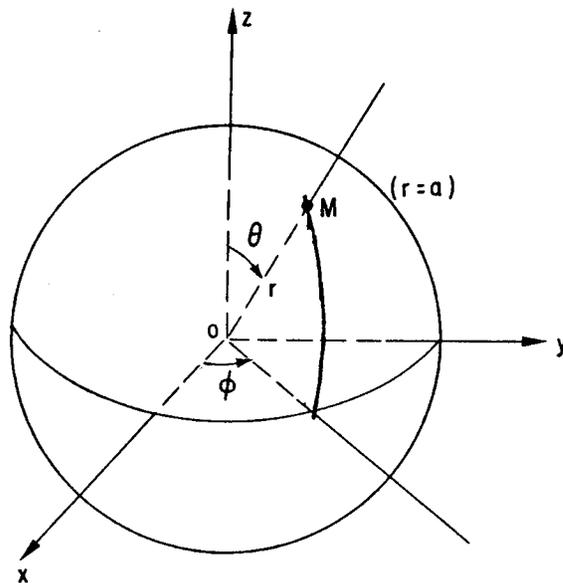


Figure II-2  
Représentation de l'espace en coordonnées sphériques géocentriques.

donne lieu à des variations atteignant quelques centaines de nT et de longueur d'onde spatiale de l'ordre de 200 Km.

Ces champs externes sont actuellement difficilement modélisables. Leurs variations souvent rapides (constante de temps  $< 1h$ ) conduisent en général à des bouleversements de leur distribution géographique. La minimisation des effets externes reposera sur la sélection de données pendant des intervalles de temps magnétiquement calmes. L'agitation magnétique aux latitudes tempérées est mesurée par la valeur d'un indice d'activité déterminé à partir des mesures d'observatoires. Pour cela, la surface du globe a été divisée en huit zones: cinq dans l'hémisphère nord et trois dans l'hémisphère sud. Dans chaque zone 3 observatoires ont été retenus:

-Si pour les 3 observatoires l'agitation est inférieure à 5 nT, l'indice 0 est affecté à la zone

-Si dans un observatoire, l'agitation est comprise entre 5 et 15 nT, l'indice 1 est affecté à cette zone

-Enfin, si l'agitation magnétique est supérieure à 15 nT, l'indice 2 est affecté à la zone

### 3-2 Champ interne

Le champ magnétique terrestre d'origine interne peut se décomposer en deux champs (Le Mouél, 1976) :

\*) Un champ régulier, d'origine nucléaire (environ 99% de l'intensité) lié aux mouvements convectifs qui animent la couche superficielle du noyau. Ce champ régulier à variation à l'échelle planétaire dont les longueurs d'onde caractéristiques sont de plusieurs milliers de Km, à l'altitude du satellite, son intensité varie de 30000 à 60000 nT. Les variations temporelles de ce champ présentent des constantes de temps caractéristique

de l'ordre du siècle.

\*) Un champ d'anomalies dont les sources sont essentiellement localisées dans la croûte terrestre et peut être dans la partie supérieure du manteau. Ce champ, principalement lié aux propriétés magnétiques des roches a des effets locaux et des longueurs d'onde de quelques centaines de kilomètres (Le Mouél, 1976). Il existe aussi un champ d'anomalies intermédiaires de longueurs d'onde de l'ordre du millier de kilomètres, difficile à séparer du champ régional dans le cas de mesures au sol; il a été mis en évidence à partir des données POGO puis des données MAGSAT. L'amplitude du champ d'origine crustale ne dépasse pas 20 nT à l'altitude du satellite (Langel, 1982). Ce champ est invariable dans le temps.

### 3-3 Calcul d'un modèle de champ principal

Dans le calcul des modèles, nous ne tiendrons pas compte de l'existence hypothétique d'un champ externe permanent.

#### 3-3-1 Rappels sur le développement en harmoniques sphériques

Il existe un système complet de fonctions orthogonales sur la sphère de rayon  $a$ , qui forment une base de l'espace des fonctions continues sur la sphère. Ces fonctions orthogonales sont les fonctions  $Y_n^m$  ou harmoniques superficielles avec  $n$  appartenant à l'ensemble des entiers naturels  $N$  et  $m$  tel que  $-n \leq m \leq n$ . Ces harmoniques superficielles sont définies par:

$$Y_n^m = P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (1)$$

où:  $P_n^m$  sont les fonctions associées de Legendre de première espèce

$(\theta, \phi)$  sont les coordonnées sphériques d'un point quelconque de la surface de la sphère de rayon  $a$  (fig. II-2).

toute fonction  $V$  continue sur la sphère ( $r=a$ ) peut s'écrire (Jobert, 1973)

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=0}^{\infty} (a/r)^{n+1} \sum_{m=0}^n C_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2)$$

Les fonctions  $r^{-(n+1)} Y_n^m$  étant harmoniques, toute fonction harmonique à l'extérieur de la sphère  $r=a$  peut s'écrire sous la forme du développement (2). L'écriture usuelle est la suivante (Le Mouël, 1976):

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_n \sum_m (a/r)^{n+1} \{g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi\} P_n^m(\cos\theta) \quad (3)$$

Cette expression de  $V$  est appelée développement en harmoniques sphériques où  $n$  caractérise le degré et  $m$  l'ordre du développement;  $g_n^m$  et  $h_n^m$  sont des coefficients ayant la dimension d'un champ.

### 3-3-2 Principe de calcul du modèle

La constante de temps du champ régulier est de l'ordre du siècle. Ainsi pour des intervalles de temps de quelques mois, nous pouvons considérer que le champ magnétique terrestre  $B$  est décrit par les lois de la magnétostatique (Le Mouël, 1976):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{I} \quad (4) \quad \mu \text{ est la perméabilité magnétique du milieu considéré}$$

dans la couronne  $U$ , délimitée par la surface du globe (sphère de rayon  $a$ ) et la couche inférieure de l'ionosphère,  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel harmonique  $V$ :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} V \quad (5)$$

$$\Delta V = 0 \quad (6)$$

En un point quelconque de mesure  $M(r, \theta, \phi)$  du système de coordonnées sphériques géocentriques (fig. II-2), nous définissons un repère local d'axes Nord, Est et verticale descendante. Dans ce repère, nous mesurons les trois composantes géocentriques  $X$  (Nord),  $Y$  (Est) et  $Z$  (verticale descendante) du champ  $\vec{B}$  reliées au potentiel par l'équation (5):

$$X = (1/r) \partial V / \partial \theta \quad (7)$$

$$Y = (-1/r \sin \theta) \partial V / \partial \phi \quad (7)$$

$$Z = \partial V / \partial r \quad (7)$$

D'après les relations (1) et (6) ce potentiel peut s'écrire:

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_n \sum_m (a/r)^{n+1} \{ g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi \} P_n^m(\cos\theta) \quad (8)$$

### Remarque

En pratique le développement (8) est tronqué à un degré  $N$  fini, il existe ainsi  $N(N+2)$  fonctions de base. D'autre part le coefficient  $C_0^0$  est nul (équation 2) car c'est le flux du champ solénoïdal  $\vec{B}$  à travers la surface terrestre. D'où l'expression finale de  $V$ :

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_n \sum_m (a/r)^{n+1} \{ g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi \} P_n^m(\cos\theta) \quad (9)$$

les expressions des composantes  $X, Y, Z$  de  $\vec{B}$  déduites de (9) s'écrivent comme suit:

$$X(r, \theta, \phi) = -\sin\theta \sum_n \sum_m \{ g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi \} \{ dP_n^m(\cos\theta)/d(\cos\theta) \} \{ (a/r)^{n+2} \}$$

$$Y(r, \theta, \phi) = (1/\sin\theta) \sum_n \sum_m \{ g_n^m \sin m\phi + h_n^m \cos m\phi \} \{ P_n^m(\cos\theta) \} \{ (a/r)^{n+2} \}$$

$$Z(r, \theta, \phi) = \sum_n \sum_m -(n+1) \{ g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi \} \{ P_n^m(\cos\theta) \} \{ (a/r)^{n+2} \}$$

Le calcul du modèle de champ principal se fait en déterminant par la méthode des moindres carrés l'ensemble des  $N(N+2)$  coefficients  $g_n^m$  et  $h_n^m$ . Notons que chaque composante  $X$  ou  $Z$  peut suffire, théoriquement à calculer les coefficients  $g_n^m, h_n^m$ . Cela n'est pas le cas de la composante  $Y$  (Est) car les coefficients  $g_n^0$  n'interviennent pas dans son développement. Pour conserver l'avantage fourni par les données vectorielles du satellite, il est préférable d'utiliser les trois composantes.

Par la méthode des moindres carrés, nous cherchons donc l'ensemble des  $N(N+2)$  coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  qui minimisent la distance

quadratique  $\xi^2$  entre les valeurs  $X(M)$ ,  $Y(M)$  et  $Z(M)$  mesurées par le satellite et celles déduites par le calcul:  $X(g_n^m, h_n^m, M)$ ,  $Y(g_n^m, h_n^m, M)$  et  $Z(g_n^m, h_n^m, M)$ .  $\xi^2$  est définie par:

$$\xi^2 = \sum_{M_k} \{ P_1 [X(g_n^m, h_n^m, M) - X(M)]^2 + P_2 [Y(g_n^m, h_n^m, M) - Y(M)]^2 + P_3 [Z(g_n^m, h_n^m, M) - Z(M)]^2 \}$$

avec  $k=1, \dots, K$  où  $K$  est le nombre total d'observations;  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont les poids affectés à chacune des composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ .

Soient:

$\Gamma$  le vecteur des coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  cherchés

$U$  le vecteur des observations  $X(M)$ ,  $Y(M)$  et  $Z(M)$  en  $K$  points de mesures

$P = \begin{matrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & P_3 \end{matrix}$  la matrice diagonale des poids  $P_i (i=1, 2, 3)$

$C = \begin{matrix} & \text{coefficients des } g_n^m, & \text{coefficients des } h_n^m & \text{dans } X(M) \\ & & & \\ & & & Y(M) \\ & & & Z(M) \end{matrix}$

La méthode des moindres carrés nous permet d'écrire le vecteur  $\Gamma$  des paramètres cherchés sous la forme suivante:

$$\Gamma = (C^T P C)^{-1} C^T P U \quad \text{où } T \text{ représente la transposition}$$

### 3-3-3 Calcul de modèle à partir de données scalaires et vectorielles

MAGSAT est le premier satellite à mesurer les composantes du champ magnétique terrestre. Tous les modèles en harmoniques sphériques du champ principal étaient jusqu'alors calculés à partir de données scalaires

en l'occurrence l'intensité du champ (Cain et al.,1967).

Un modèle calculé à partir de données scalaires permet une bonne représentation de l'intensité. Cependant, quand on dispose de mesures vectorielles, on s'aperçoit qu'il existe des différences, parfois très importantes, entre les valeurs réelles et les valeurs déduites du modèle. Stern et al. (1980) calculent, à partir des données MAGSAT deux modèles; l'un en utilisant les données de l'intensité et l'autre avec les données des composantes. Ils trouvent des écarts dépassant 1500 nT à la surface du globe sur la composante radiale (figure II-3) dérivée des deux modèles alors que l'écart maximal pour l'intensité n'excède pas 22 nT. Nous constatons donc qu'un modèle calculé à partir de données scalaires peut ne pas représenter correctement le champ ainsi que le prévoit la théorie. C'est ce que ces auteurs ont appelé "effet Backus".

### Effet Backus

Backus (1970), en fournissant une classe de contre-exemples dans laquelle deux développements différents pour l'équation (8) correspondent à une même fonction  $F$ , montre que la donnée de l'intensité  $F$  ne caractérise pas de manière unique le potentiel  $V$ . Stern et Bredkamp (1975) ont développé la théorie de cet effet; deux fonctions  $F_V$  et  $F_W$  presque égales peuvent conduire à des potentiels, donc des composantes très différentes. Ainsi apparaît l'intérêt de la mission MAGSAT qui va permettre pour la première fois de déterminer un modèle en harmoniques sphériques à partir de mesures vectorielles.

### Détermination du degré $N$ du développement

Un développement en harmoniques sphériques de degré  $N$ , représentera les longueurs d'onde jusqu'à  $(40000/N)$  Km. Il faudra donc choisir  $N$  assez

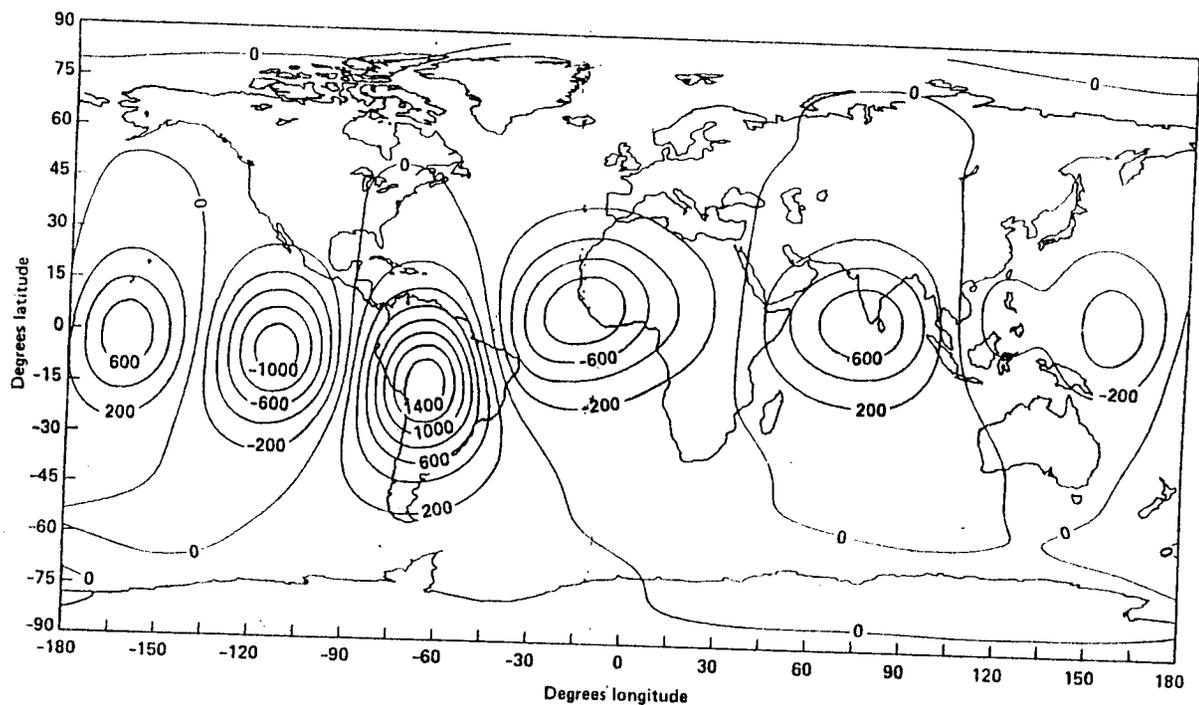


Figure II-3  
 Effet Backus. Isogammes des différences de la composante radiale du champ principal, calculées à partir des coefficients du développement du champ en harmoniques sphériques. Un développement est calculé à partir de données scalaires de MAGSAT le deuxième développement est calculé à partir de données vectorielles. L'intervalle entre deux Lignes isovaleurs est de 200 nT (Adapté de Stern et al., 1980)

grand pour tenir compte de toutes les longueurs d'onde du champ régulier. Pour éviter d'introduire des termes non significatifs et donc la représentation de certaines anomalies locales,  $N$  ne doit pas être trop grand.

Par l'étude du spectre d'énergie harmoniques sphériques (lowes, 1974) défini par:

$$R_N = (N+1) \sum [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]$$

Langel et Estes (1981) constatent une rupture de pente dans la courbe  $R_N = f(N)$ , au voisinage de  $N=14$ . Ils concluent que le champ d'origine nucléaire prédomine pour  $N < 13$ . Cependant, l'influence des derniers termes des coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  étant négligeable, nous nous limiterons à  $N=11$ , ce qui nous permet de diminuer considérablement le temps calcul.

### 3-4 Présentation des résultats

Nous avons donc utilisé pour le modèle un développement de degré  $N=11$  soient 143 coefficients  $g_n^m$  et  $h_n^m$  à déterminer. Les poids  $P_i$  ( $i=1,2,3$ ) qui permettent d'avoir des écarts quadratiques moyens des résidus (champ calculé - champ observé), du même ordre de grandeur sur les différentes composantes sont:

$$P_1 = 1.2$$

$$P_2 = 0.6$$

$$P_3 = 0.8$$

pour une meilleure représentation des anomalies au-dessus d'une région donnée du globe, nous affectons aux données qui s'y rapportent une pondération régionale dans le calcul du modèle. Cette pondération est fonction de la latitude  $\lambda$  et de la longitude  $\phi$ . Le continent africain étant notre zone d'étude, nous avons adopté les poids suivants:

( $\alpha$ )	$\left. \begin{array}{l} 30^{\circ} S < \lambda < 50^{\circ} N \\ 30^{\circ} W < \phi < 70^{\circ} E \end{array} \right\}$	P(Afrique)=10
( $\beta$ )	$\ \lambda\  > 60^{\circ}$	P(pôles) =0.1
( $\gamma$ )	ailleurs	P =1

Les données des zones polaires définies en ( $\beta$ ), bien que très perturbées par les phénomènes externes (courants alignés et courants ionosphériques) sont néanmoins nécessaires pour assurer une répartition homogène des mesures sur l'ensemble du globe. Différents essais ont montré qu'il était nécessaire de n'utiliser que les données affectées de l'indice d'activité magnétique 0 et 1 pour lesquelles la contribution des phénomènes externes est négligeable.

Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CYBER 170 (CDC) du CNES à Toulouse à partir des données du 2 décembre 1979 0h au 21 décembre 1979 23h59, soient 20 jours de données au total. Pour manipuler des matrices de tailles "raisonnables" nous gardons un point de mesure sur trente soit approximativement une mesure pour 500 Km sur l'orbite, ce qui représente 7270 points de mesures des composantes X, Y, Z du champ magnétique terrestre.

Les valeurs en nT des 143 coefficients  $g_{nm}, h_{nm}$  du modèle harmonique sphérique ainsi déterminé sont portées dans le tableau 2. Ce modèle "AFR80" sera daté 1979.85

L'étude de la comparaison de ce modèle AFR80 par rapport au modèle (Peddie, 1982) IGRF80 (International Geomagnetic Reference Field) ne montre pas de différences notables, excepté pour le terme  $g_2^1$ . Ces différences ne dépassent guère 25 nT en valeur absolue (Tableau 3). Ce résultat n'est

Coefficients  $g_n^m$  et  $h_n^m$  du modèle AFR80 pour l'époque 1979.85, spécifique à l'Afrique.

AFR	$n$	$m$	111979.8	$g_n^m$	$h_n^m$
	1	0		-29950.24	
	1	1		-1998.05	5592.10
	2	0		-1996.68	
	2	1		3044.14	-2106.92
	2	2		1664.50	-175.19
	3	0		1277.72	
	3	1		-2177.45	-351.71
	3	2		1248.84	280.77
	3	3		838.16	-236.58
	4	0		938.40	
	4	1		780.31	217.44
	4	2		398.66	-251.04
	4	3		-420.97	43.45
	4	4		206.87	-291.86
	5	0		-214.94	
	5	1		359.24	50.12
	5	2		259.37	-157.03
	5	3		-70.18	-152.00
	5	4		-169.15	-51.61
	5	5		-51.59	98.39
	6	0		44.19	
	6	1		63.39	-16.15
	6	2		42.17	94.03
	6	3		-143.65	66.86
	6	4		5.79	-43.98
	6	5		14.62	-1.63
	7	0		-108.48	13.55
	7	1		72.79	
	7	2		-59.44	-34.52
	7	3		-0.58	-27.36
	7	4		20.25	-5.73
	7	5		-14.60	17.17
	7	6		-0.72	17.97
	7	7		11.13	-23.69
	8	0		-0.20	-5.71
	8	1		18.61	
	8	2		7.67	9.23
	8	3		0.86	-18.25
	8	4		-5.87	5.72
	8	5		-5.68	-23.10
	8	6		4.22	9.14
	8	7		2.11	13.18
	8	8		5.24	-13.68
	9	0		-0.14	-15.27
	9	1		6.32	
	9	2		0.16	-23.34
	9	3		1.80	14.65
	9	4		-13.97	8.54
	9	5		2.92	-4.58
	9	6		-2.50	-6.89
	9	7		-1.64	7.29
	9	8		7.83	10.58
	9	9		1.01	-4.45
	10	0		-7.88	2.01
	10	1		-2.69	
	10	2		-2.50	1.72
	10	3		1.51	1.77
	10	4		-4.30	3.09
	10	5		-3.63	5.69
	10	6		4.15	-3.98
	10	7		3.12	2.20
	10	8		-0.15	-1.62
	10	9		2.52	2.30
	10	10		4.20	0.24
	10	11		0.22	-5.80
	11	0		-0.03	
	11	1		-0.01	2.48
	11	2		-3.01	1.30
	11	3		1.45	1.06
	11	4		1.55	-4.09
	11	5		0.84	0.85
	11	6		0.37	0.01
	11	7		2.51	-2.47
	11	8		0.80	0.01
	11	9		-1.44	-3.03
	11	10		2.28	-1.97
	11	11		4.14	0.51

Tableau 2

Tableau 3

1	0	-2.34	
1	1	-39.55	-14.66
2	1	0.12	
2	2	16.34	21.88
2	2	1.60	23.41
3	0	-2.48	
3	1	35.44	-16.21
3	2	-2.46	13.87
3	3	5.20	14.92
4	0	-0.61	
4	1	-1.99	5.68
4	2	1.46	5.76
4	3	-1.47	-3.95
4	4	8.57	5.14
5	0	2.16	
5	1	2.24	5.02
5	2	-1.03	3.13
5	3	4.12	-1.30
5	4	1.42	-3.91
5	5	-3.89	-1.41
6	0	0.09	
6	1	-1.70	-1.69
6	2	0.17	0.63
6	3	-2.19	-7.94
6	4	1.79	-1.08
6	5	0.52	0.07
6	6	-1.38	-3.95
7	0	1.79	
7	1	-1.34	-1.42
7	2	-1.86	-0.26
7	3	0.10	-0.23
7	4	-1.59	1.27
7	5	-1.56	0.07
7	6	0.35	-0.29
7	7	2.50	0.29
8	0	-0.39	
8	1	-0.03	1.63
8	2	-0.14	-0.45
8	3	0.63	2.42
8	4	1.52	-0.70
8	5	0.22	-0.10
8	6	-1.59	1.38
8	7	-1.86	-0.38
8	8	1.10	-0.07
9	0	1.22	
9	1	-2.64	-1.54
9	2	0.80	-1.45
9	3	-1.97	-2.26
9	4	0.62	0.42
9	5	1.74	0.61
9	6	-0.54	-2.11
9	7	0.73	0.18
9	8	-0.49	-0.95
9	9	-0.82	-0.09
10	0	0.62	
10	1	1.57	0.75
10	2	-1.09	1.77
10	3	1.10	0.39
10	4	-1.83	0.19
10	5	-0.92	0.32
10	6	0.52	1.50
10	7	-1.45	-0.52
10	8	0.22	-2.10
10	9	1.10	0.84
10	10	0.52	0.40
11	0	-0.03	
11	1	-0.01	1.48
11	2	-3.01	1.38
11	3	1.40	1.06
11	4	1.55	-4.99
11	5	0.84	0.85
11	6	0.97	0.01
11	7	2.51	-2.47
11	8	0.80	0.91
11	9	-1.44	-3.03
11	10	2.28	-1.97
11	11	4.16	0.91

Coefficients  $\Delta g_n^m$  et  $\Delta h_n^m$  de la difference des modèles AFR80 et IGRF80

pas surprenant car le modèle IGRF80 a été déterminé à partir de données provenant essentiellement des mesures MAGSAT.

Les cartes des figures(II-4a,e) représentent la distribution des éléments du champ principal, en l'occurrence les composantes X(Nord), Y(Est) Z(verticale descendante), D(déclinaison) et I(inclinaison), pour l'époque 1979.85, à la surface de la zone étudiée. Ces éléments ont été calculés à partir des coefficients du modèle en harmoniques sphériques. Sur les cartes des figures(II-5a,c) sont représentées les isocourbes de la différence des modèles AFR80 et IGRF80, pour les composantes X, Y et Z pour l'époque 1979.85

#### Remarque

L'isocourbe  $I=0$  (fig.II-4e) représente l'équateur magnétique, situé à environ  $10^{\circ}$  N de l'équateur géographique. La composante verticale Z y est nulle. Au voisinage de  $D=0$ , nous constatons que l'allure de la composante horizontale Y(Est) est semblable à celle de D.

La plupart des cartes des figures II-4 n'ont d'autre intérêt que de fournir une image de la distribution des éléments du champ principal à la surface de la Terre car, pour des études quantitatives, nous utilisons directement les relations du paragraphe 3-3-2. Signalons cependant l'importance des cartes d'isogones (déclinaison) (fig.II-4d) en tenant compte de la variation séculaire, pour la navigation aérienne et maritime et pour la cartographie.

#### 3-5 Etude des anomalies

Le champ d'anomalies est obtenu en retranchant au champ observé un

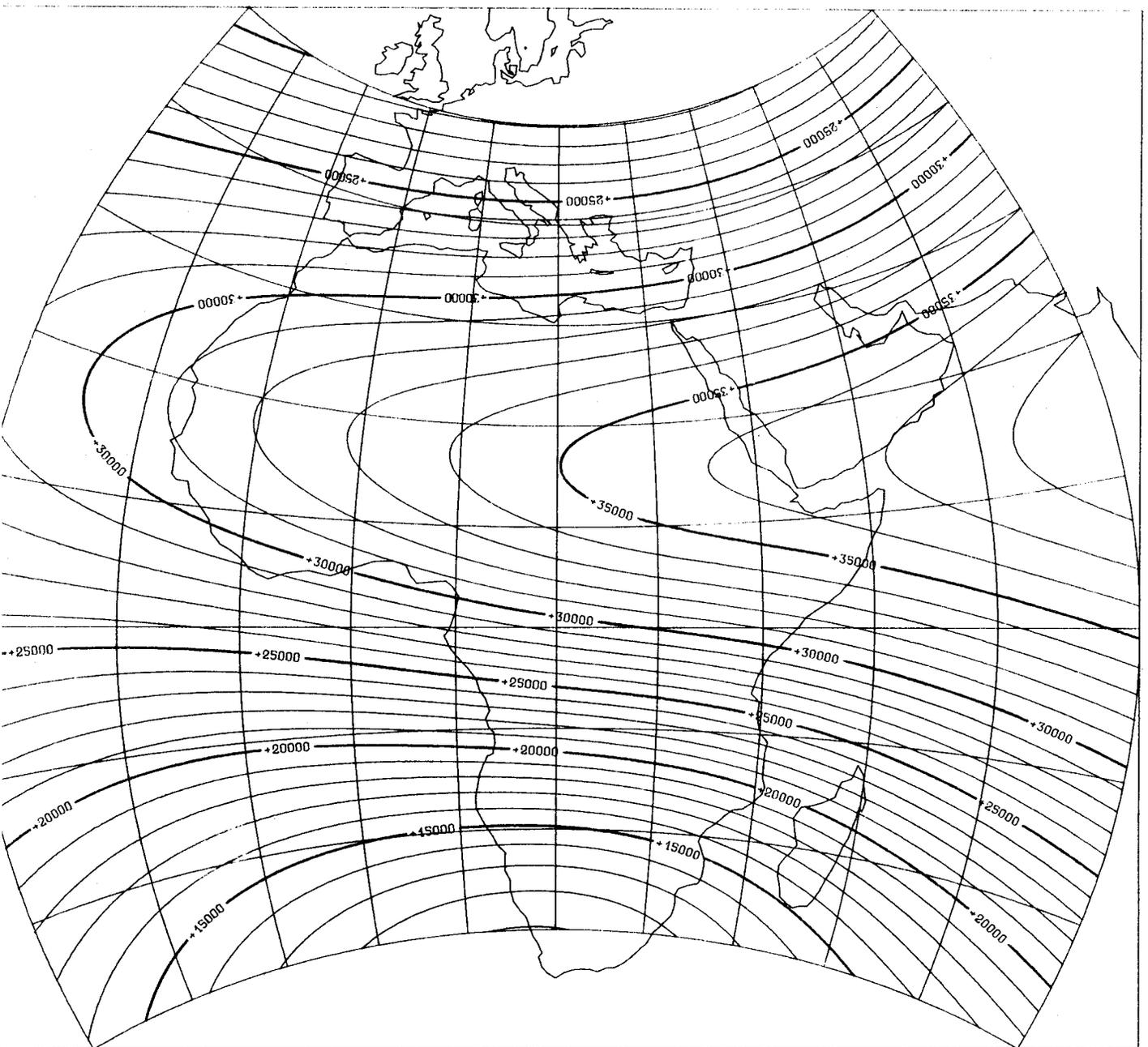


Figure II-4a

Carte de la composante horizontale X(Nord) du champ principal au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est AFR80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 1000 nT.



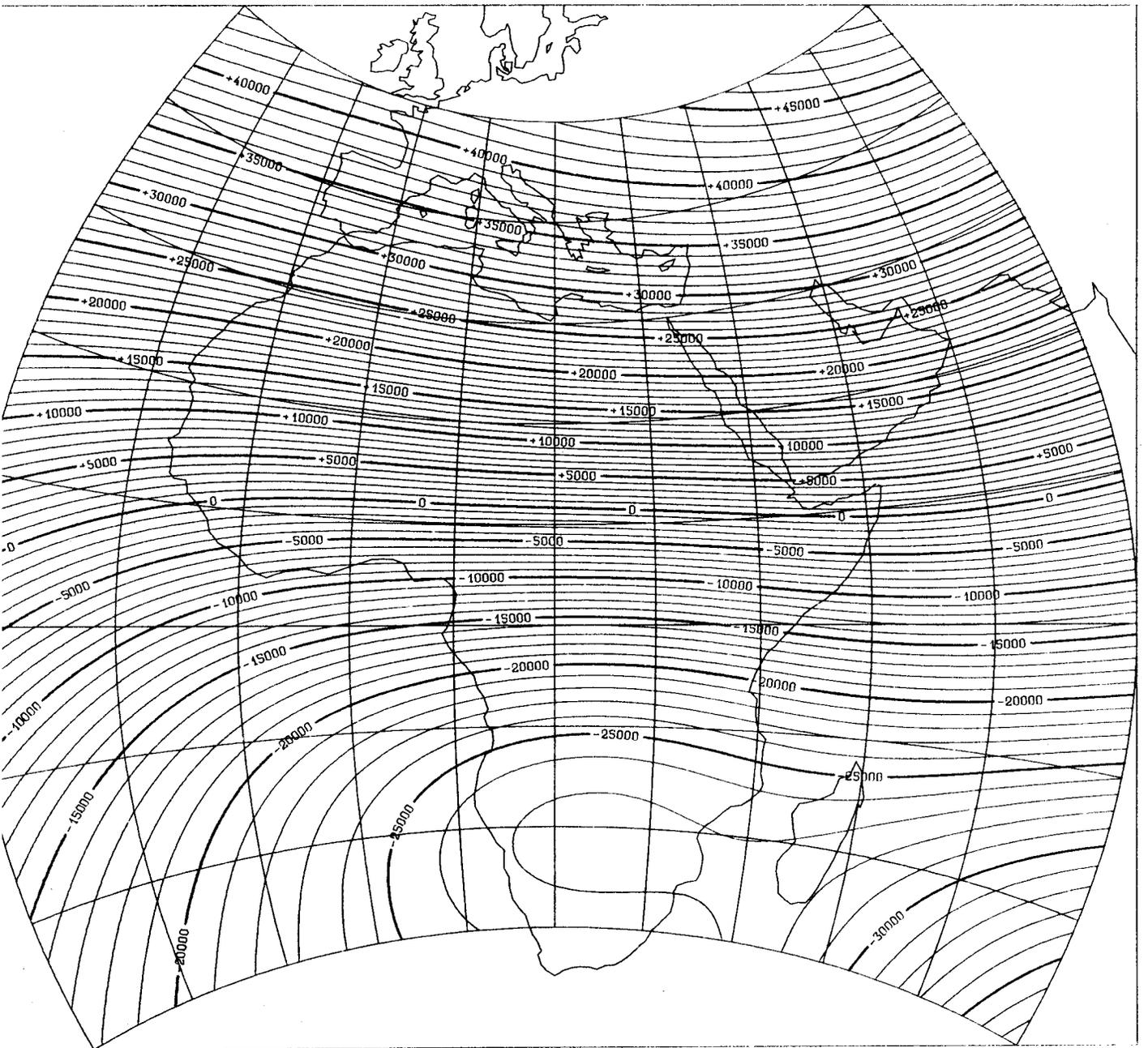


Figure II-4c

Carte de la composante verticale Z du champ principal, au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est AFR80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 1000 nT.

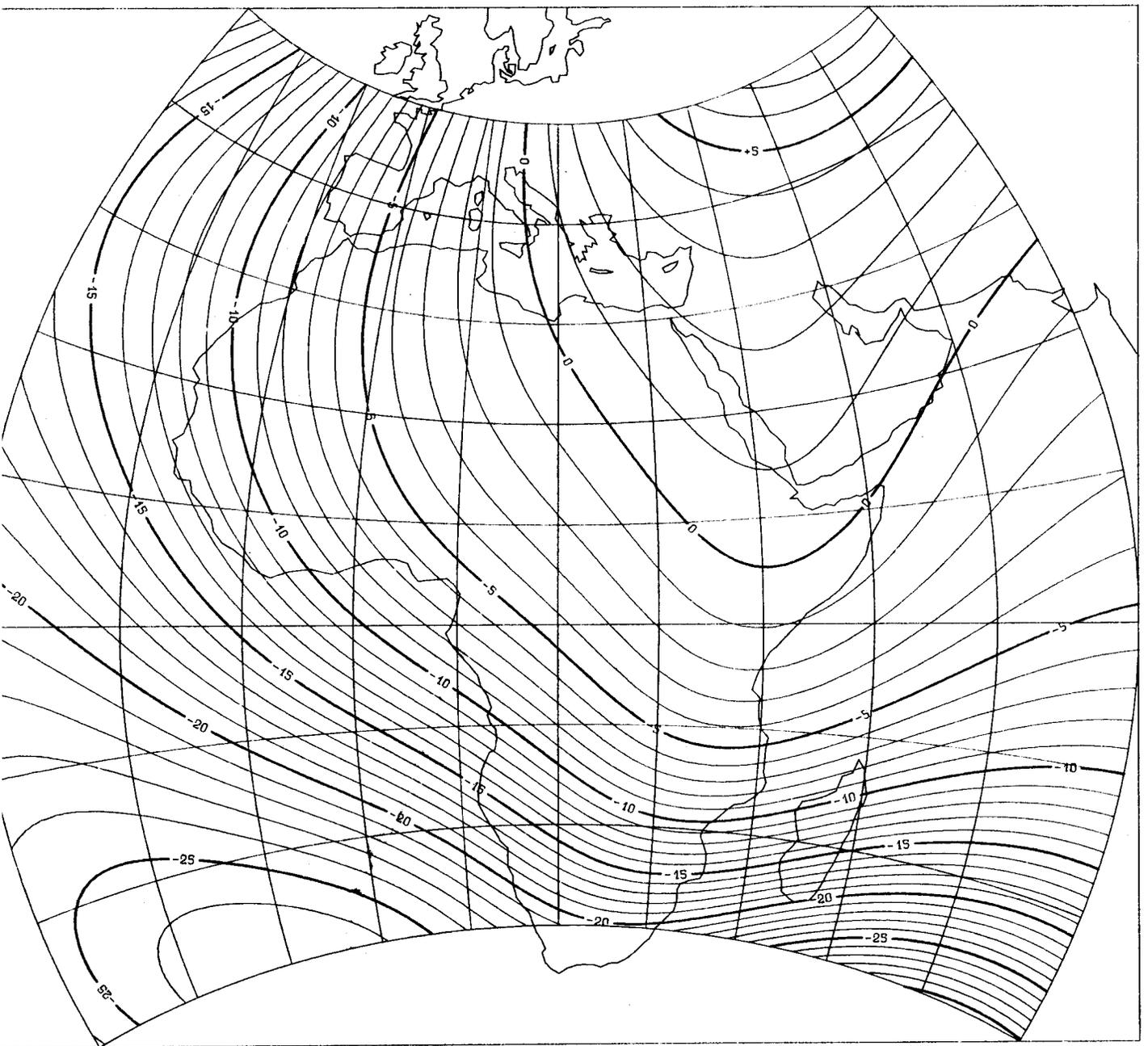
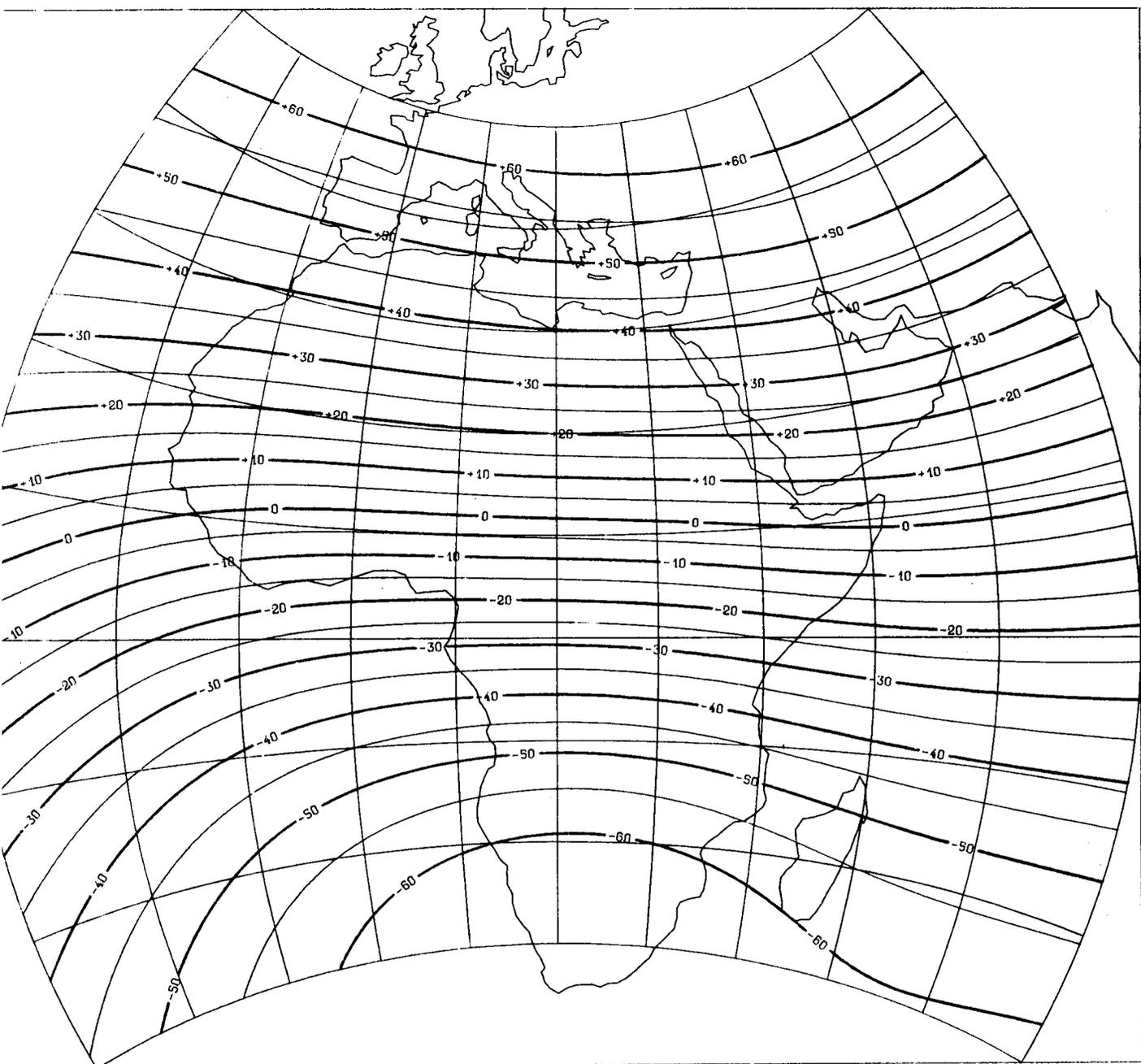


Figure II-4d  
 Carte de la déclinaison D du champ principal, au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est AFR80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux courbes isogones est de  $1^\circ$



PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME  
AFRIQUE MODELE\*1979.85\* Inclinaison I [degre]

Figure II-4e  
Carte de l'inclinaison I du champ principal, au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est AFR80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux lignes isoclines est de  $5^\circ$

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

MODELE(AFR80 - IGRF80) \*\* COMPOSANTE X[NORD]

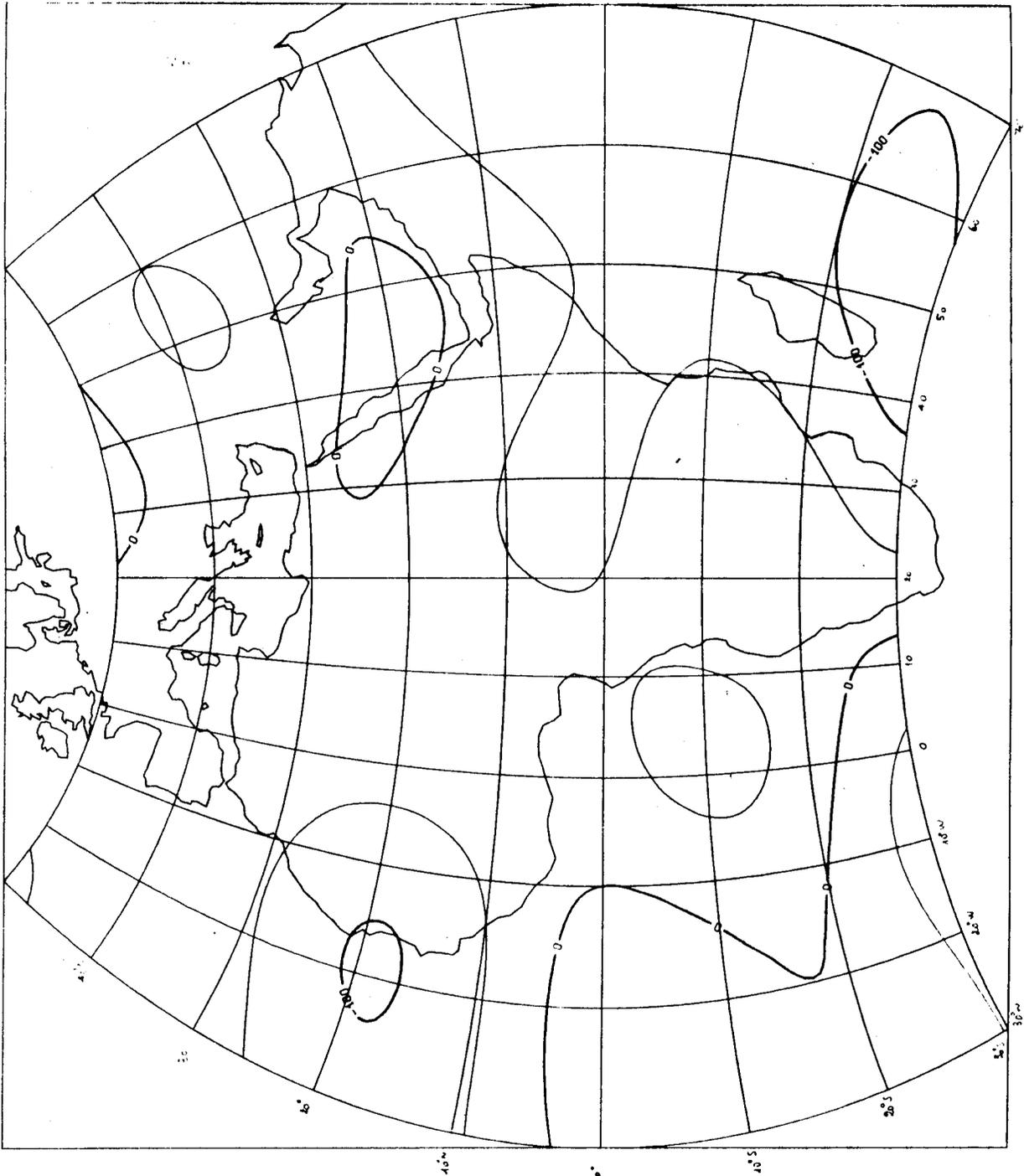


Figure II-5a

Isogammes des différences de la composante horizontale X(Nord) du champ principal, au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est celui obtenu par différence des modèles AFR80 et IGRF80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 50 nT.

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME  
MODELE(AFR80 - IGRF80) \*\*COMPOSANTE Y[EST]

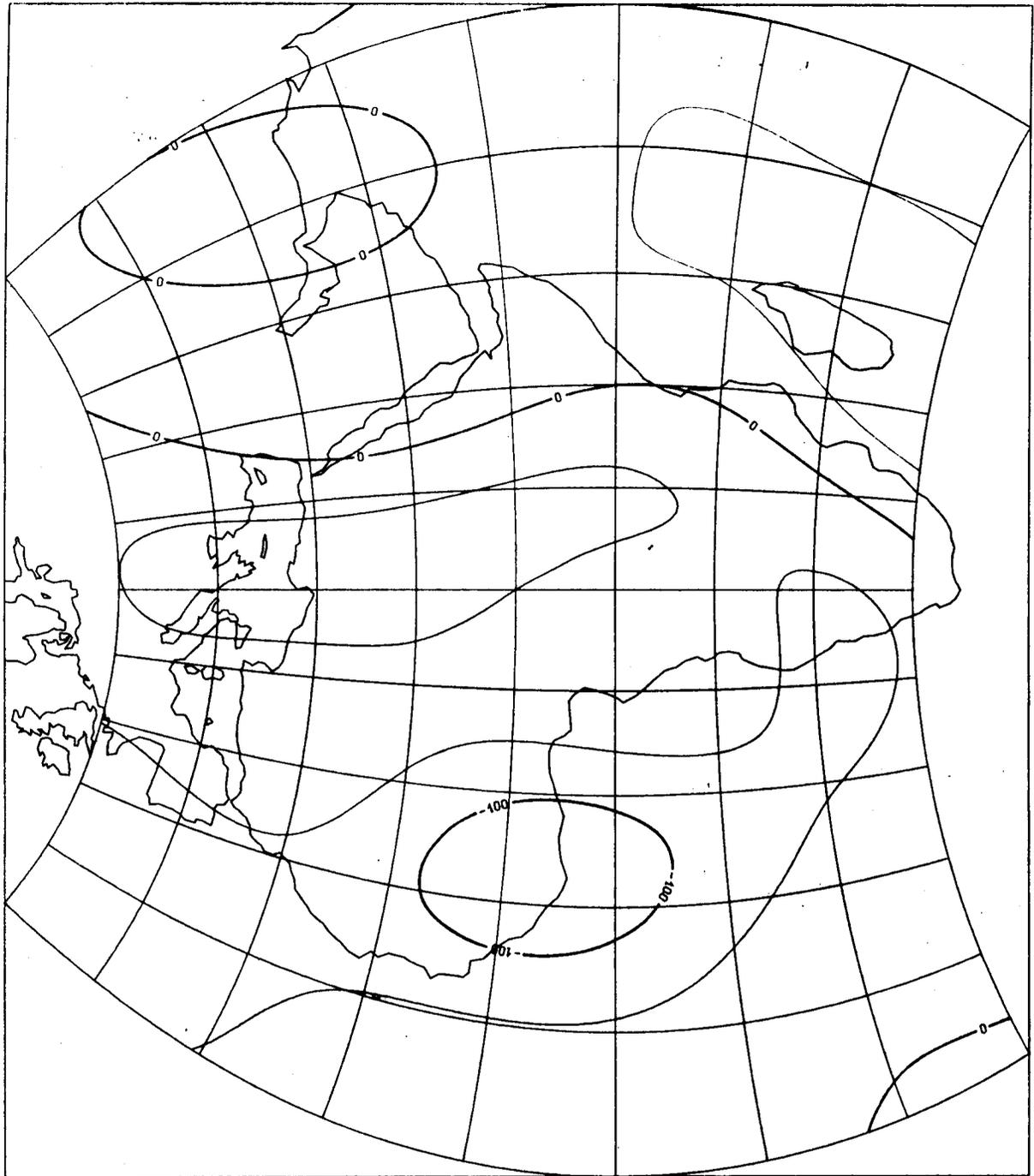


Figure II-5b

Isogammes des differences de la composante horizontale Y(Est) du champ principal au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est celui obtenu par difference des modèles AFR80 et IGRF80 pour l'époque 1979.85 .L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 50 nT.

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME  
 MODELE( AFR80 - IGRF80 ) : COMPOSANTE VERTICALE Z

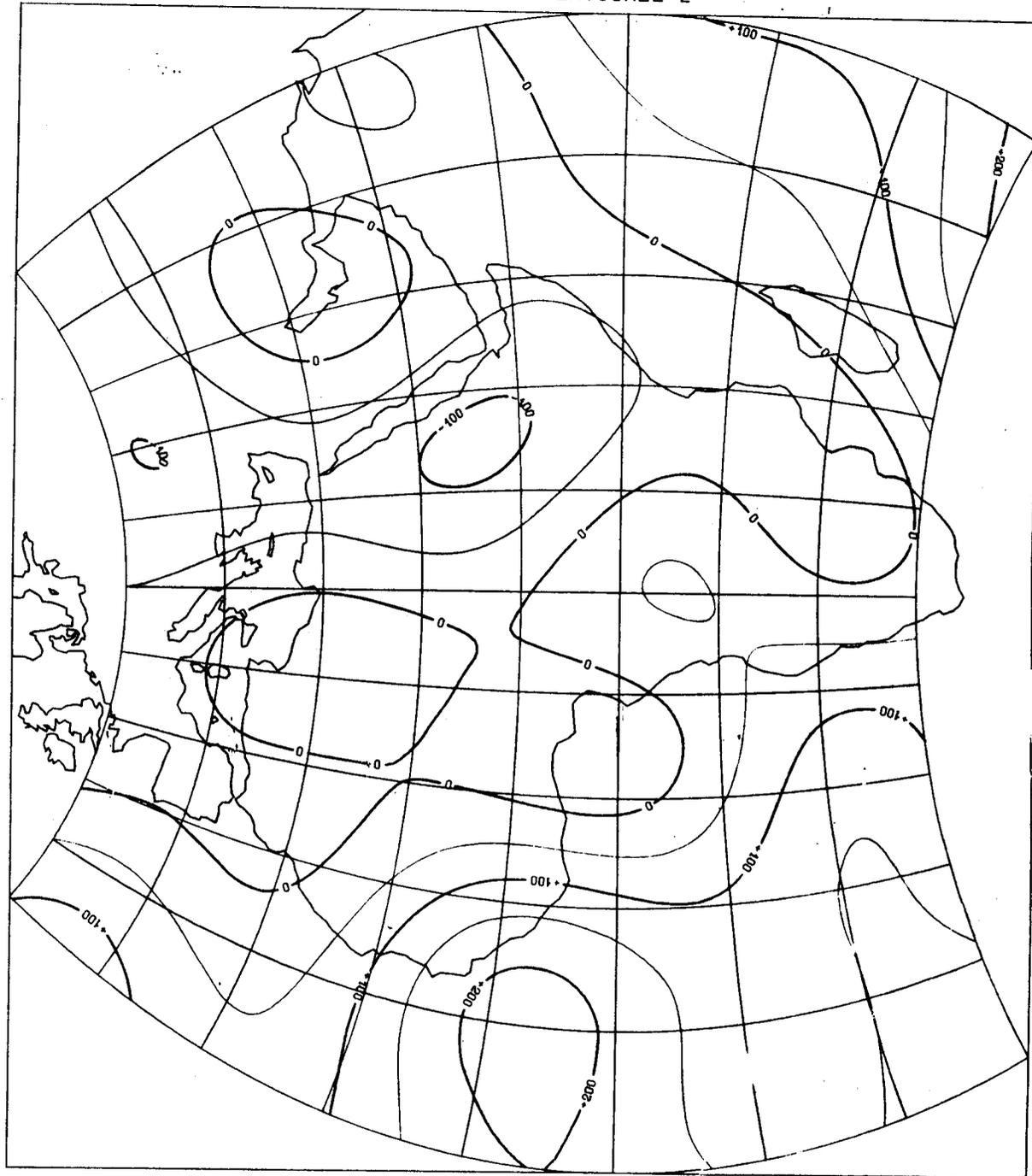


Figure II-5c

Isogammes des différences de la composante verticale Z du champ principal, au-dessus de l'Afrique. Le jeu de coefficients utilisé est celui obtenu par différence des modèles AFR80 et IGRF80 pour l'époque 1979.85. L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 50 nT.

champ régional. Le champ régional est calculé à partir des coefficients du développement en harmoniques sphériques.

Cette opération nous a permis d'établir les cartes d'anomalies pour chacune des composantes X(Nord), Y(Est) et Z(verticale descendante), à l'altitude du satellite et pour la zone définie par les équations ( $\alpha$ ) (voir §3-4). En l'absence de modèle prédictif pour le champ externe, nous avons utilisé ici pour "réduire" les variations externes une méthode assez grossière mais simple à mettre en oeuvre. Nous avons fait l'hypothèse qu'en un point donné de l'espace, la distribution du champ est également répartie entre contributions positives et contributions négatives. En faisant la somme d'un nombre de mesures suffisant, nous espérons ainsi réduire les erreurs dues à la présence de variations externes à un niveau comparable à celui des autres erreurs (positionnement, incertitudes dues à l'appareillage).

### 3-5-1 Anomalies à l'altitude du satellite

Les résidus, différence entre champ modélisé par un développement en harmoniques sphériques et champ observé, se rapportant à l'Afrique ont été groupés par demi-orbités d'altitudes comparables. En effet, quand le satellite est sur le méridien auroral, en d'autres termes quand il passe au-dessus d'un lieu à 6h du matin heure locale, son altitude est comprise entre 350 et 400 Km. Quand le satellite suit un méridien crépusculaire (6h du soir heure locale) son altitude est comprise entre 500 et 550 Km. A l'intérieur de la zone définie par les inégalités ( $\alpha$ ) (voir §3-4), nous procédons à un découpage en carrés de tailles données ( $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ). Dans chaque carré, nous ne conservons que les résidus dont l'amplitude est inférieure, en valeur absolue à :

\*) 50 nT pour la composante verticale Z

\*)40 nT pour les composantes horizontale X et Y  
 nous calculons ensuite la moyenne des résidus retenus à l'intérieur de chaque carré. Avec l'hypothèse concernant la moyenne des variations transitoires des phénomènes externes, la valeur moyenne calculée dans chaque carré représente une approximation de l'anomalie réelle au centre du carré.

Pour la période du 2 au 21 décembre 1979, la dispersion des données sur la zone ( $\alpha$ ) nous contraint d'utiliser des carrés de  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  soit approximativement 300 Km de coté. Cette valeur nous permet d'avoir des valeurs moyennes statistiquement significatives et de disposer d'une couverture du champ d'anomalies avec un nombre réduit de lacunes. Nous aboutissons ainsi à deux grilles de données composées chacune de 27x34 carrés:

- une grille pour les mesures crépusculaires, basse altitude
- une grille pour les mesures aurorales, haute altitude

les histogrammes des répartitions géographiques des points de données, pour chaque composante du champ d'anomalies sont portés dans les tableaux 4 à 6. Nous pouvons constater que le nombre de carrés ne comportant aucune valeur est négligeable -environ 6 sur 900- pour les composantes Y et Z; ce nombre est plus important -25 sur 900- dans le cas de la composante X. L'altitude moyenne de la grille établie à 6h du matin (heure locale) est de 530 Km alors que l'altitude moyenne de la grille établie à 6h du soir est de 370 Km. Les figures II-6(a,b) représentent la distribution géographique des altitudes moyennes pour les 2 grilles, haute et basse altitude.

Les cartes d'anomalies de la composante verticale Z (fig. II-7a,b) montrent des résultats satisfaisants. Bien qu'il reste des effets externes, le niveau de ces perturbations est cependant assez faible. La valeur moyenne sur ( $\alpha$ ) des anomalies est de l'ordre du nT pour les deux





PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

AFRIQUE/MAGSAT \*Altitudes moyennes [Km] orbite DAWN\* Pas deg=3x3

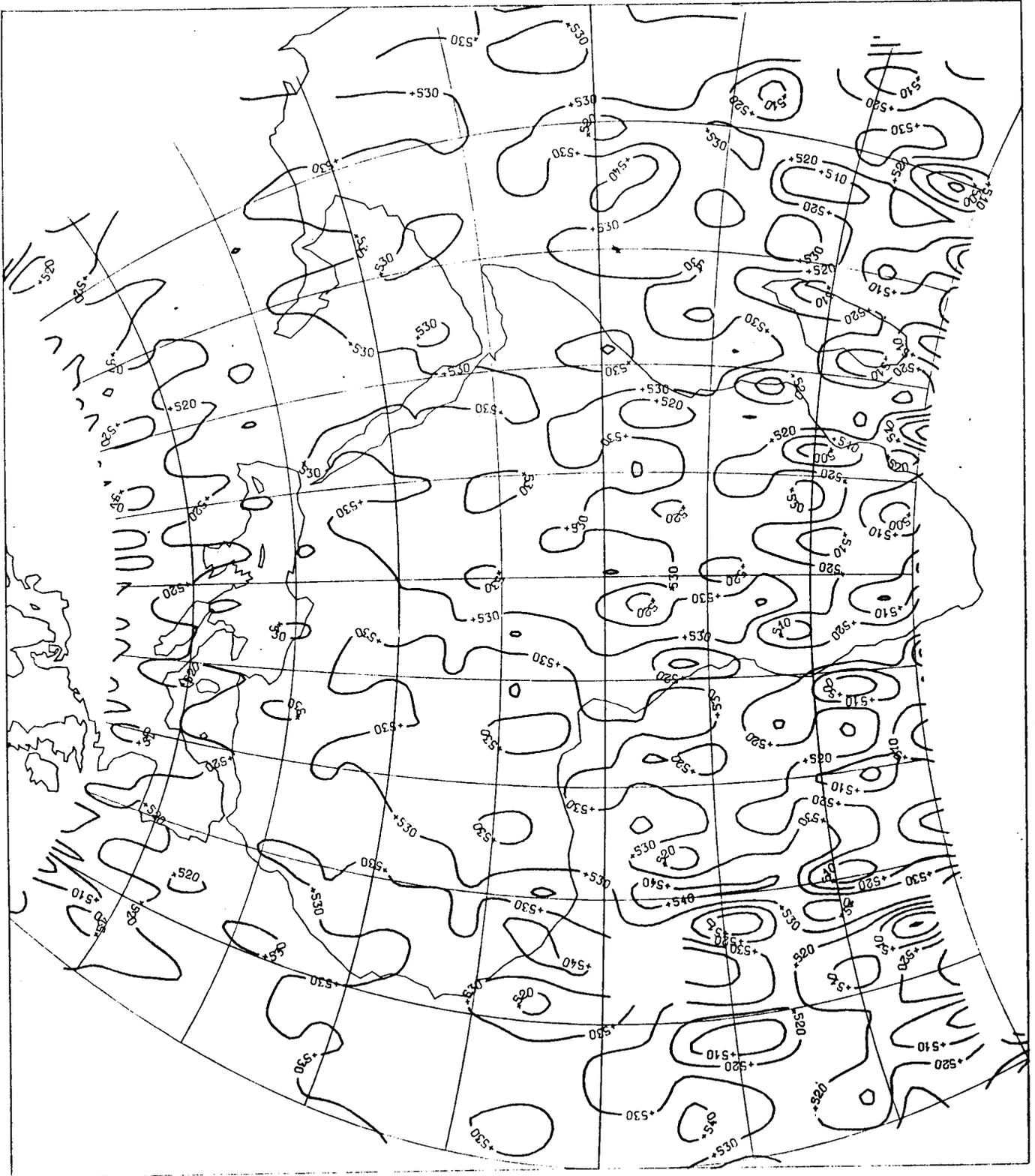


Figure II-6a

Distribution géographique des altitudes moyennes des données du 2 au 21 décembre 1979 moyennées sur des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$  pour les orbites aurorales, au-dessus de l'Afrique.

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

AFRIQUE/MAGSAT \*\*Altitudes moyennes [Km] orbite DUSK\*\* Pas deg=3x3

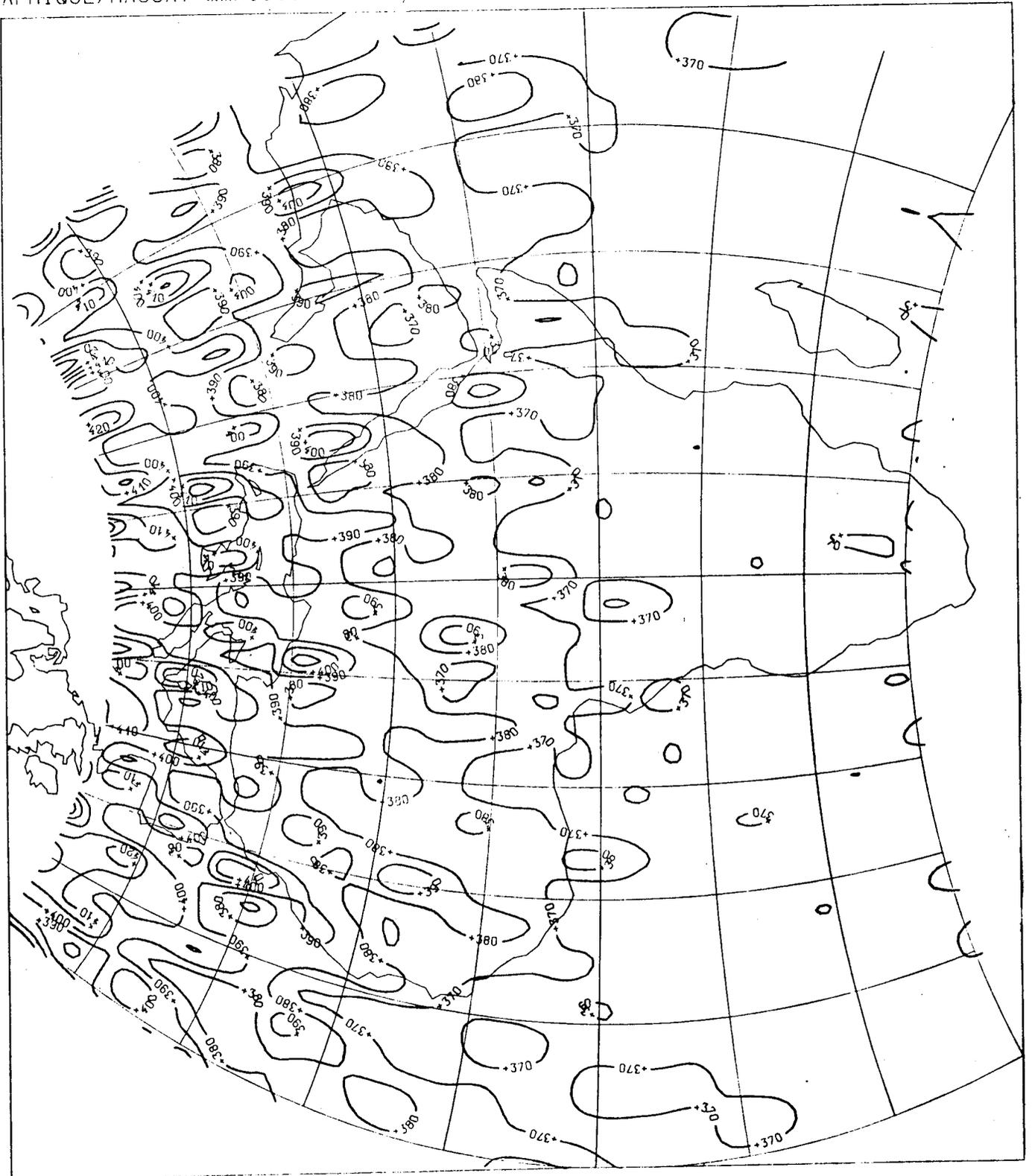


Figure II-6b

Distribution géographique des altitudes moyennes des données du 2 au 21 décembre 1979 moyennées sur des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$  pour les orbites crépusculaires, au-dessus de l'Afrique.

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

AFRIQUE \*\*MAGSAT\*\* ANOMALIES Z [nT] \*\*Orbite DAWN

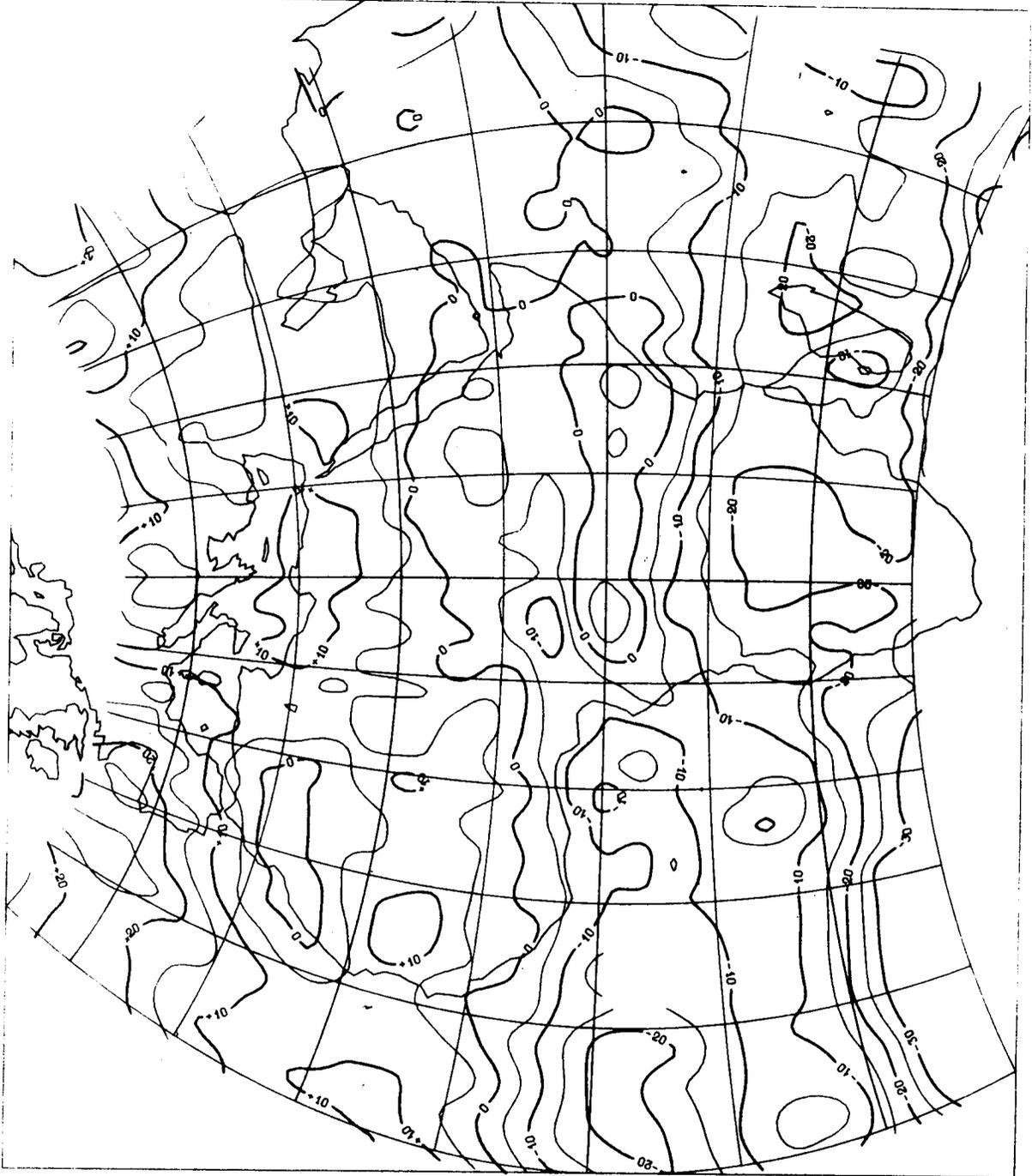


Figure II-7a

Anomalies de la composante verticale Z à l'altitude du satellite. Les données MAGSAT du 2 au 21 décembre 1979, au-dessus du continent africain, pour les orbites aurorales (DAWN), sont moyennées sur des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$ . L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 5nT.

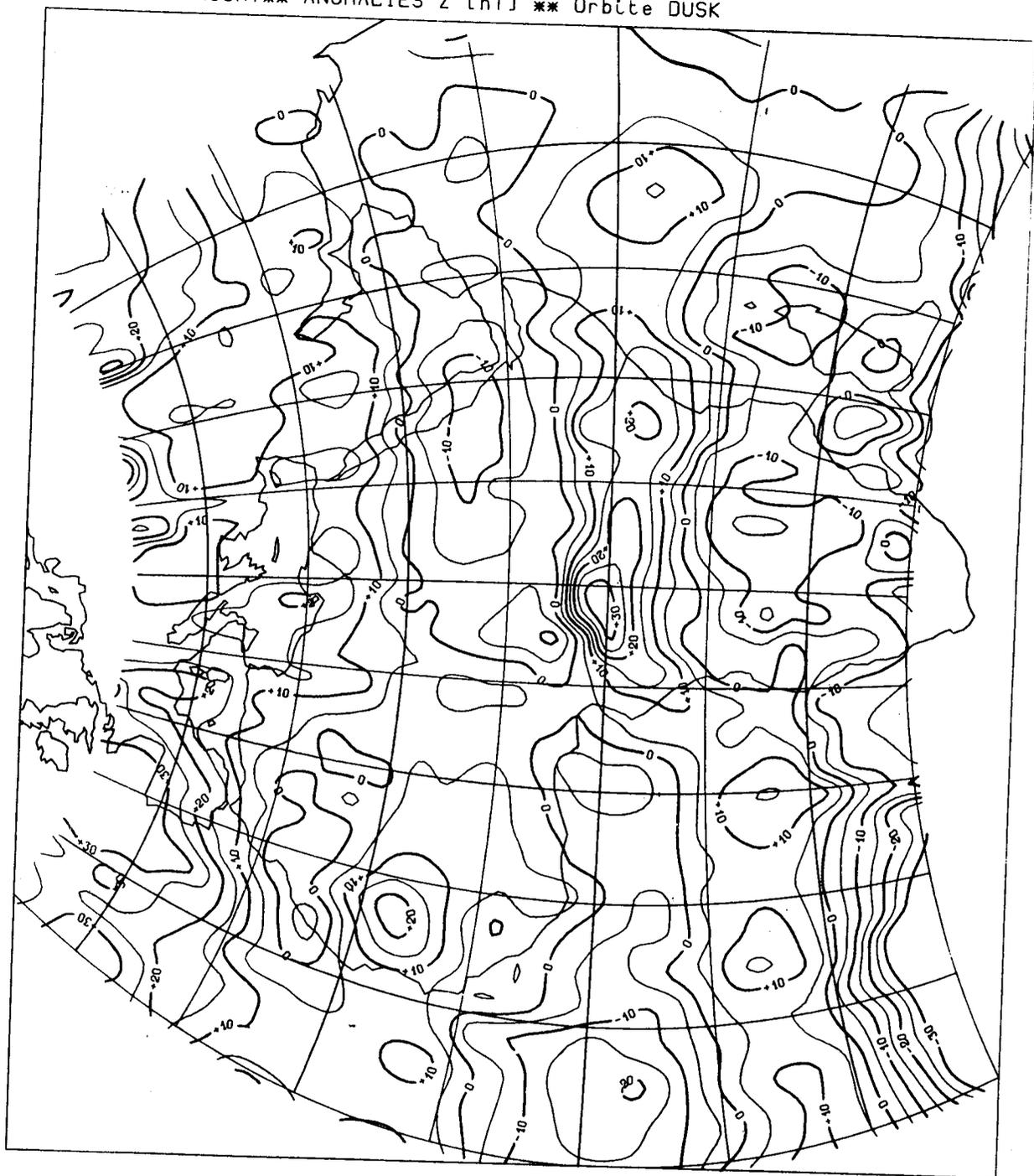


Figure II-7b

Anomalies de la composante verticale Z à l'altitude du satellite. Les données MAGSAT du 2 au 21 décembre 1979, au-dessus du continent africain et pour les orbites crépusculaires (DUSK), sont moyennées sur des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$ . L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 5nT.

cartes, haute et basse altitude. La comparaison des cartes d'anomalies obtenues à basse et haute altitude montre que la plupart des anomalies sont de plus faible amplitude sur la carte obtenue à haute altitude, ceci est un argument en faveur de l'origine interne (crustale) des anomalies observées. La comparaison de ces cartes avec les cartes obtenues à partir des mêmes données MAGSAT par d'autres équipes (Hastings, 1982; Langel et al., 1982) montre les mêmes grands traits, bien que les cartes établies par Hastings concernent les anomalies de l'intensité (fig.II-8). La localisation géographique des principales anomalies y est analogue, en particulier celles se rapportant à l'ouest ( $20^{\circ}$  N,  $19^{\circ}$  W), le centre ( $9^{\circ}$  N,  $20^{\circ}$  E) et le sud ( $20^{\circ}$  S,  $45^{\circ}$  E) de l'Afrique. Des différences d'intensité existent cependant entre les différentes cartes.

Nous avons également calculé les cartes d'anomalies des composantes X et Y (fig.II-9a,b), malheureusement ces cartes montrent une pollution considérable des anomalies internes par des variations du champ externe. Ces cartes ne sont pas utilisables mais, l'utilisation de techniques d'élimination des effets externes plus raffinées que la méthode utilisée ici, nous permettra d'établir des cartes plus significatives.

#### 4- Prolongement vers le bas des différentes anomalies

Les cartes obtenues dans le paragraphe précédent utilisent des données dont l'altitude par rapport au sol n'est pas constante, le prolongement vers le bas de ces cartes à un double but, d'abord d'effacer l'effet des distorsions dues aux variations d'altitude ensuite dans le cas de prolongement au sol, la mise en évidence des anomalies de plus courtes longueurs d'onde et la comparaison avec les autres données géophysiques existantes. Des comparaisons entre les cartes établies à partir de données scalaires de satellite et celles obtenues par

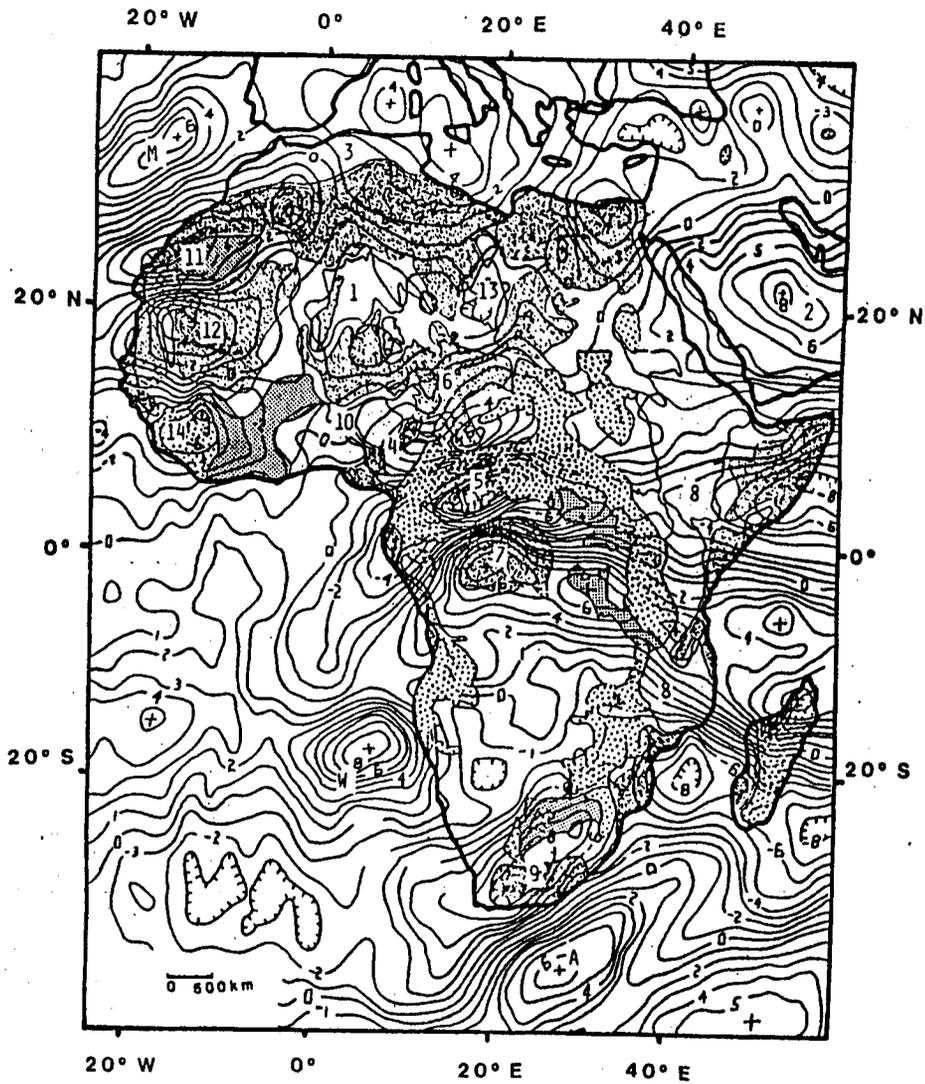


Figure II-8

Carte préliminaire des anomalies de l'intensité du champ magnétique au-dessus de l'Afrique, déterminée à partir des mesures scalaires de MAGSAT, à l'altitude du satellite. L'intervalle entre deux courbes isovaleurs est de 1 nT (d'après HASTINGS, 1982)

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

AFRIQUE/MAGSAT \*Anomalies X(Nord) [nT]\* Orbite DUSK

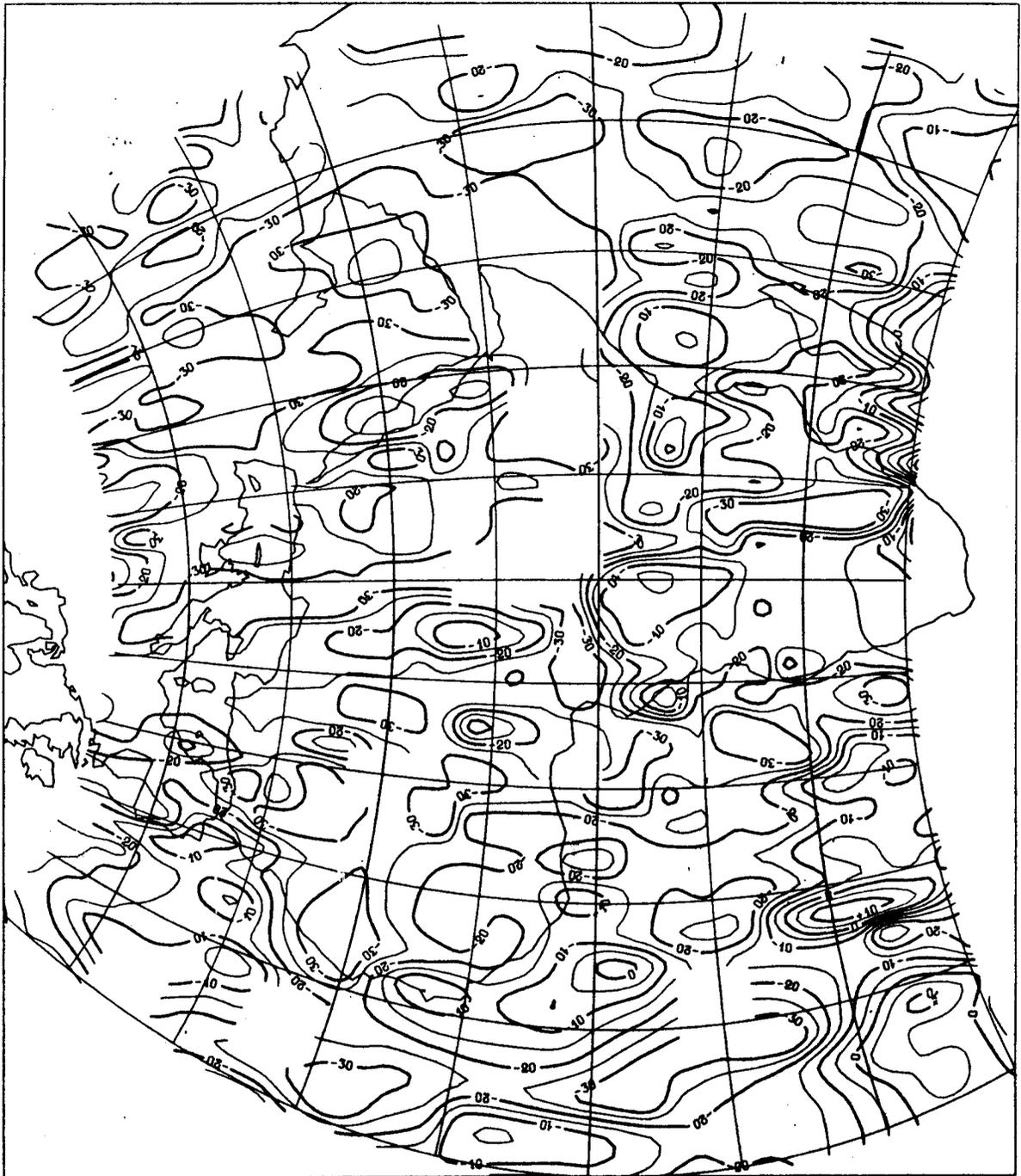


Figure II-9a

Anomalies de la composante horizontale X(Nord). Les données MAGSAT du 2 au 21 décembre 1979, au-dessus de l'Afrique et pour les orbites crépusculaires (DUSK), sont moyennées sur des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$ . L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 5nT.

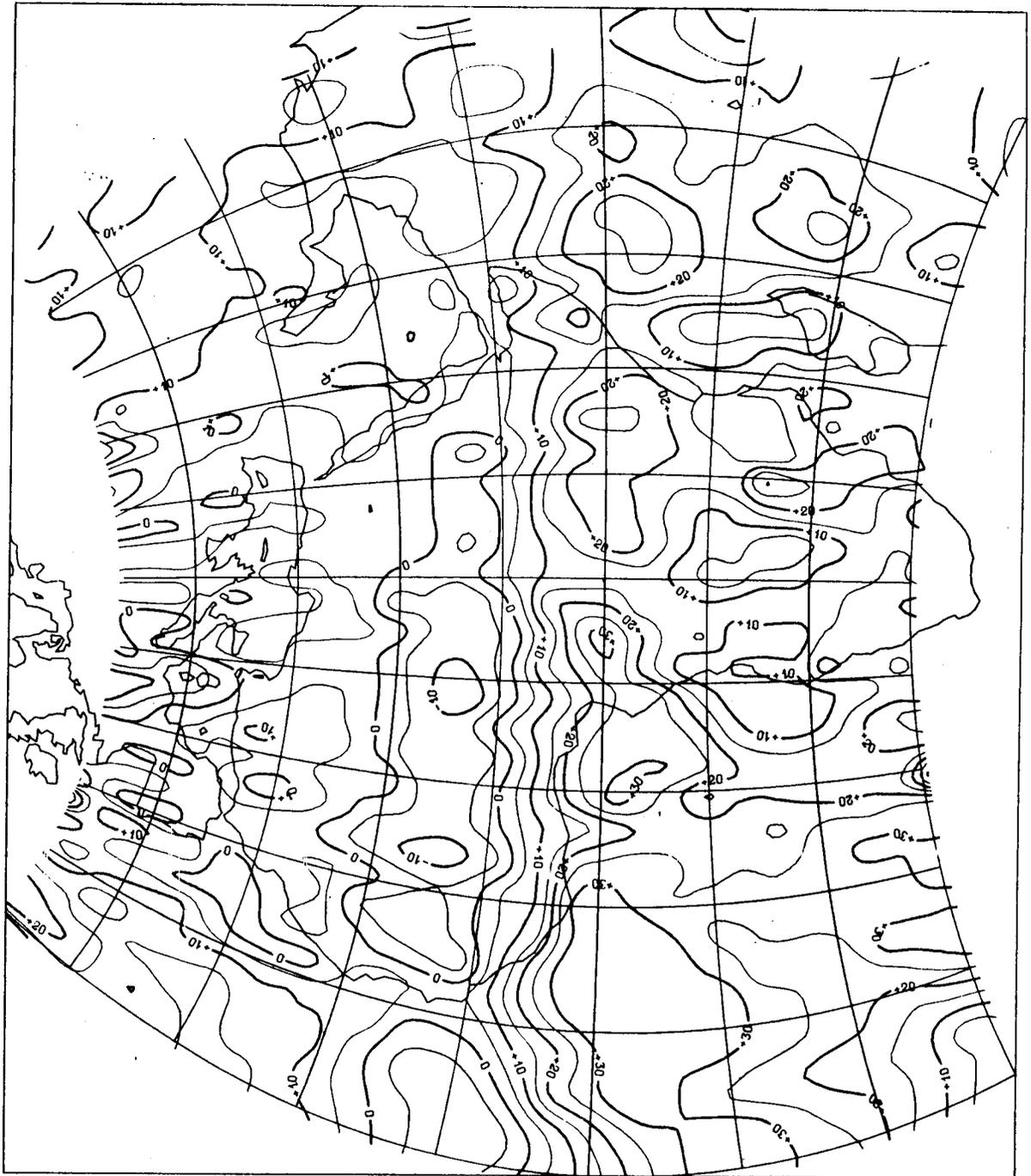


Figure II-9b

Anomalies de la composante horizontale Y(Est) du champ magnétique  
Les données MAGSAT du 2 au 21 décembre 1979 ,au-dessus de l'Afrique  
et pour les orbites crépusculaires (DUSK), sont moyennées sur  
des carrés de  $3^{\circ} \times 3^{\circ}$ . L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est  
de 5nT.

prolongement vers le haut de données aéromagnétiques ont déjà été effectuées (Langel et al., 1980; Newit et al., 1982). Notre but est d'utiliser les données vectorielles et de les prolonger vers le bas. Pour ce faire, les méthodes inverses décrites dans la première partie, ont été appliquées aux cartes d'anomalies de la composante verticale Z. Nous avons effectué le prolongement vers le bas dans le cas de coordonnées cartésiennes et sphériques en utilisant la méthode globale inverse. Le choix de cette méthode a été guidé essentiellement par des considérations de rapidité d'exécution et de facilité de mise en oeuvre.

#### 4-1 Coordonnées cartésiennes

Nous considérons deux grilles de 5x5 points de mesures, une pour chaque portion d'orbite crépusculaire et aurorale décrite précédemment (voir §3-5), ce qui correspond à des panneaux de 1300 Km de côté. Nous avons dépassé ici la limite de l'approximation plane qui est de  $\varphi$ , environ 1000 Km, mais nous avons vu au paragraphe (3-1-3) de la première partie que pour garder un effet de bord de taille raisonnable, il faut 2 pas de maille de sécurité, ce qui impose, pour calculer la valeur au point central l'utilisation d'une grille de 5x5 points; la distorsion introduite par l'utilisation des coordonnées cartésiennes restant inférieure aux erreurs dues à la méthode de prolongement proprement dite.

Le prolongement simultané des 2 grilles est effectué de l'altitude du satellite jusqu'au niveau du sol; ce qui représente, en moyenne, une hauteur de prolongement de 1.5 pas de maille. La hauteur de prolongement varie entre 1.1 et 1.9 pas de maille. Nous sommes donc, théoriquement, dans les conditions idéales d'application de cette méthode (voir première partie). L'intérêt de la méthode des 2 panneaux prolongés simultanément est de contraindre la solution au niveau du sol par la donnée du gradient de la

fonction d'anomalie (composante verticale Z). Des essais de prolongement effectués séparément pour chacun des panneaux crépusculaire et auroral au-dessus d'une région centrée sur  $[4.5^{\circ} \text{ N}, 22.5^{\circ} \text{ E}]$  montrent des différences, parfois très importantes - de l'ordre de 50 nT pour un signal de 200 nT d'amplitude au sol - entre les valeurs de la composante verticale Z obtenues au niveau du sol. Le prolongement sur une zone définie par:

$$19.5^{\circ} \text{ S} < \lambda < 31.5^{\circ} \text{ N}$$

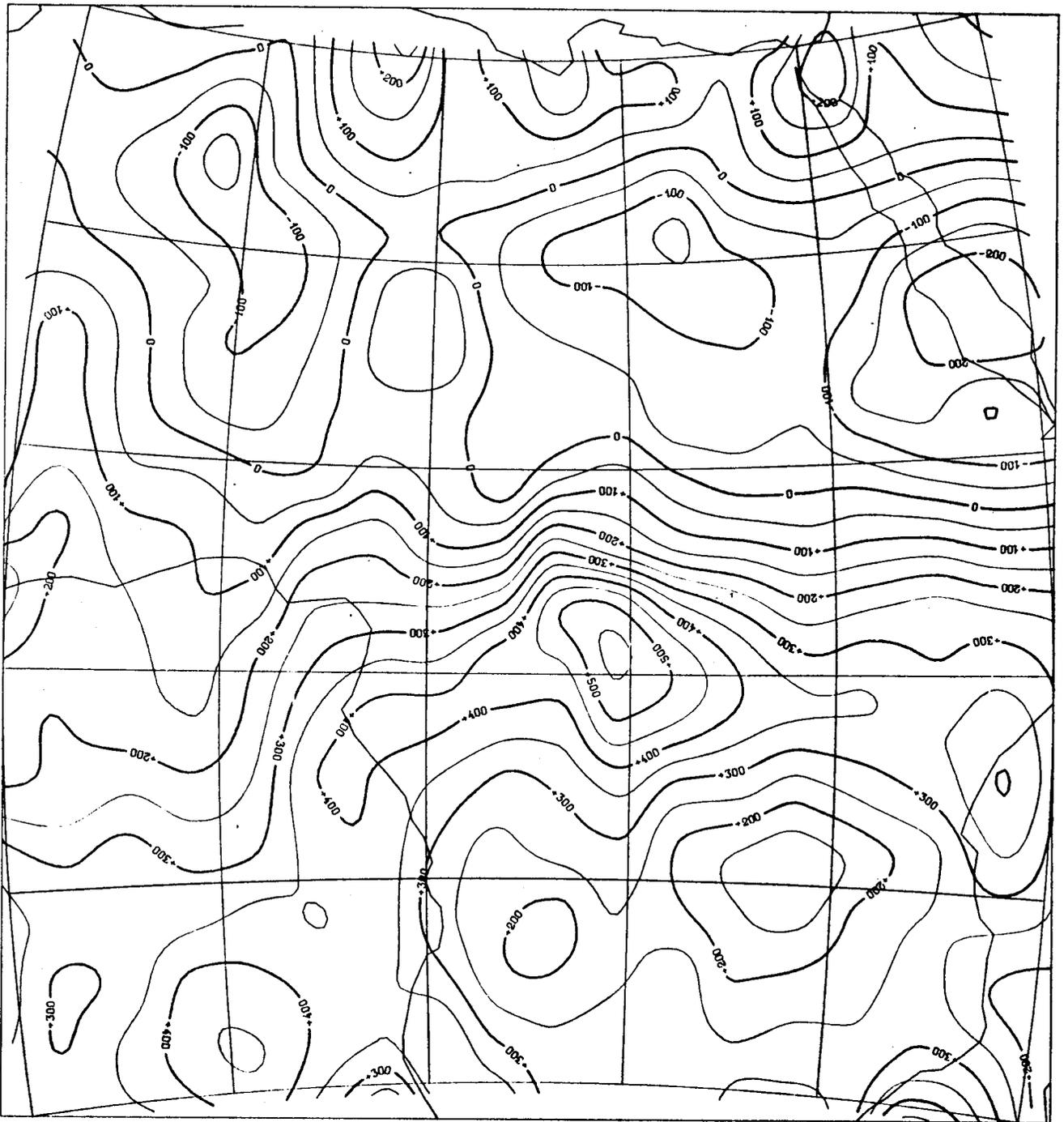
$$15.5^{\circ} \text{ W} < \phi < 45.5^{\circ} \text{ E}$$

est obtenu en déplaçant le système des deux grilles. Après quelques essais, nous avons déterminé le nombre optimal de valeur propre et vecteur propre soit 31 sur 50. Ces essais ont été effectués sur la zone centrale de l'Afrique pour laquelle des données au sol existent, ce qui nous a permis de comparer les résultats obtenus par prolongement avec ces données, en fonction du nombre de valeurs propres et vecteurs propres utilisés. Nous avons également vérifié que ce nombre optimal de fonctions propres était relativement stable pour toutes les grilles.

La figure II-10 représente les isogammes de la composante verticale Z des anomalies prolongées au niveau du sol. Nous pouvons constater que si l'amplitude au sol du signal est correcte - environ 600 nT au-dessus du centre de l'Afrique - la forme des anomalies restituées n'est pas satisfaisante. Ceci est dû au sous-échantillonnage des anomalies à prolonger, à la présence de champ d'origine externe et à la présence de bruit dans le signal à prolonger.

#### 4-2 Coordonnées sphériques

Nous avons également effectué le prolongement dans le cas de coordonnées sphériques géocentriques. Les équations relatives à ce cas sont données en annexe.



CARTE AU SOL \* \* \* [Lat 19.5S 31.5N] Lon [7.5W 43.5E]

Figure 10

Carte au sol des anomalies de la composante verticale Z du champ magnétique. 31 valeurs propres sur 50 sont retenues pour le calcul du prolongement, en coordonnées cartésiennes. L'intervalle entre deux courbes isovaleurs est de 50 nT.

Le système de grilles adopté est identique au précédent, mais n'étant plus limité par la courbure de la Terre, les dimensions des deux grilles peuvent être théoriquement aussi grandes que l'on veut. Cependant en pratique, il existe une contrainte liée à la capacité et à la précision de l'ordinateur utilisé. Ces deux grilles sont, dans les exemples présentés ici, de 11x11 points de mesures chacune donc 242 points de données à inverser, ce qui nécessite des temps calculs relativement élevés. Ainsi: la phase d'inversion dure environ 1h30mn "C.P.U" (temps de calcul dans l'unité centrale) sur l'ordinateur PRIME de l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPG).

Le prolongement est calculé aux noeuds d'une grille de 49 points, centrée par rapport à celle des données, ce qui correspond à un panneau de 2000 Km de côté, au voisinage de l'équateur. Nous sommes certains ainsi de minimiser l'effet de bord. Pour la sélection des fonctions propres de la matrice (G), un nombre de conditionnement  $R=500$  a été choisi. Ce choix de  $R$  a été déterminé par différents essais de prolongement sur une zone du centre de l'Afrique [7.5° S-10.5° N; 10.5° E-28.5° E] pour laquelle nous avons rééchantillonné à  $P \times P$  la carte d'anomalies magnétiques au sol établie pour la république Centrafricaine par Vassal et Godivier (1976) dans le but de pouvoir effectuer des comparaisons.

Une carte des anomalies de  $Z$  est tracée au sol (fig.II-11) en déplaçant le système de grilles sur la région définie par:

$$22.5^{\circ} \text{ S} < \lambda < 43.5^{\circ} \text{ N}$$

$$22.5^{\circ} \text{ W} < \phi < 64.5^{\circ} \text{ E}$$

l'examen de la carte prolongée montre que les principales anomalies restituées ont une forme cohérentes bien que le signal soit de faible niveau. Cette relative faiblesse des amplitudes est d'ôe essentiellement au très faible pourcentage de fonctions propres sélectionnées pour les

PROJECTION MERCATOR OBLIQUE CONFORME

AFRIQUE \* Carte d'anomalie Z au sol \* [Lat(22.5 S 43.5 N) Lon(22.5 O 58.5 E)]

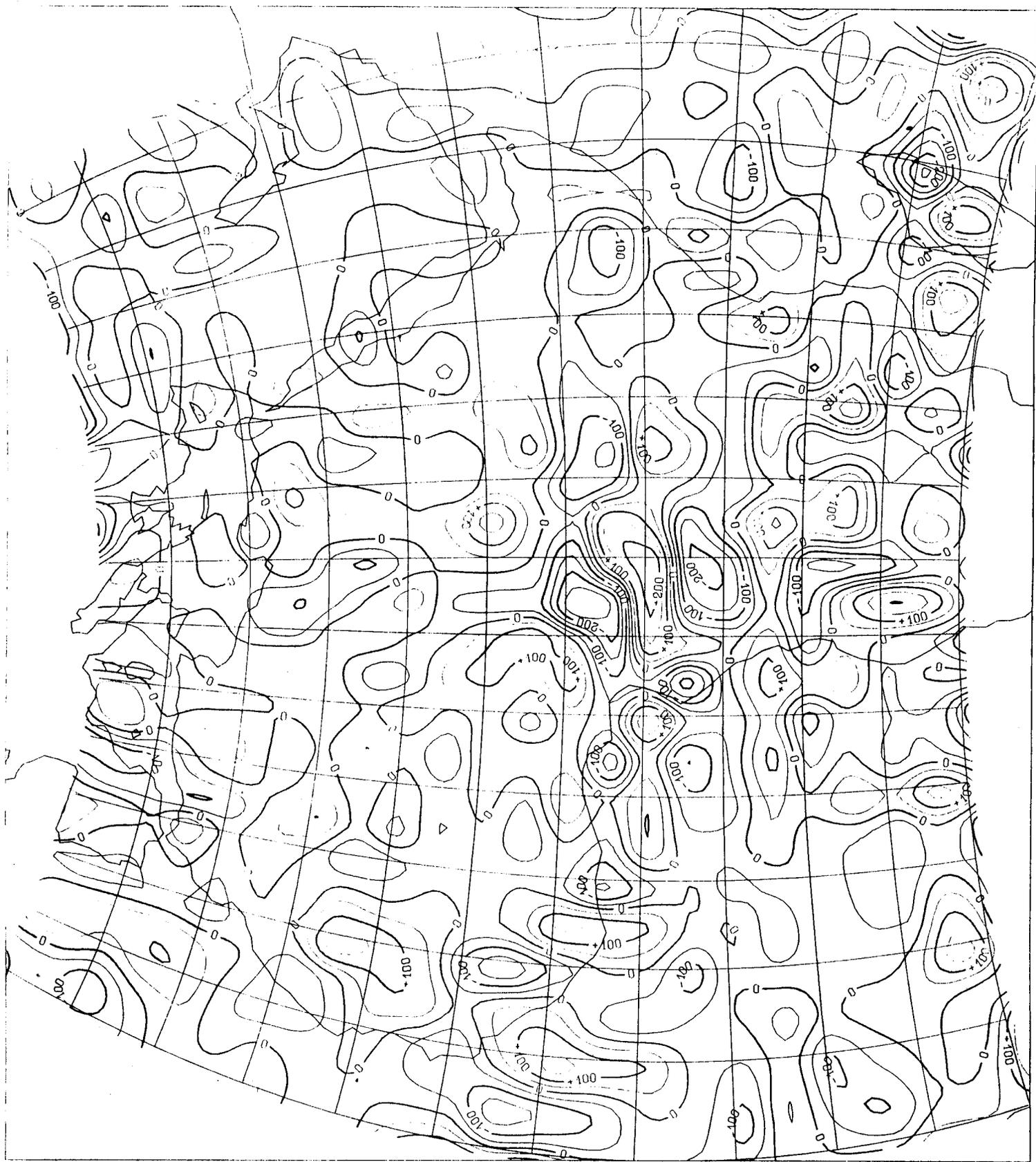


Figure II-11

Carte au sol des anomalies de la composante verticale Z du champ magnétique. 73 valeurs propres sur 242 sont retenues pour le prolongement en coordonnées sphériques géocentriques. L'intervalle entre deux courbes isovaleurs est de 50nT.

calculs du prolongement.

La comparaison de la carte obtenue par prolongement avec celles établies par l'Office de la Recherche Scientifique et Technique d'Outre-Mer (ORSTOM) à partir de mesures au sol d'intensité du champ magnétique terrestre en République Centrafricaine (Vassal et Godivier, 1976; Regan et Marsh, 1982) et avec les données des levés aéromagnétiques pratiqués par l'U.S. Geological Survey (USGS) en Afrique dans le cadre du projet MAGNET (Green, 1975) confirme la validité de nos résultats, tout au moins pour l'anomalie Centrafricaine (fig. II-12). Cette dernière, plus connue sous le nom d'anomalie de Bangui a été mise en évidence pour la première fois par Godivier et Ledonche (1956). De direction est-ouest, c'est l'une des plus importantes anomalies magnétique du continent africain tant en intensité (plus de 200 nT au sol) qu'en extension (longueur d'onde supérieure ou égale à 1800 Km).

Pour les anomalies de l'ouest et du sud-est de l'Afrique, les directions ne sont pas aussi clairement apparentes sur la carte prolongée. Des distorsions subsistent dans les anomalies.

Il est certain que les données que nous avons utilisées contiennent encore une forte proportion de bruit dûe à la présence de champ résiduel externe. Ce champ étant amplifié lors du prolongement, l'utilisation de la méthode stochastique inverse serait préconisée pour prendre en considération la présence de ce bruit dans certaines régions.

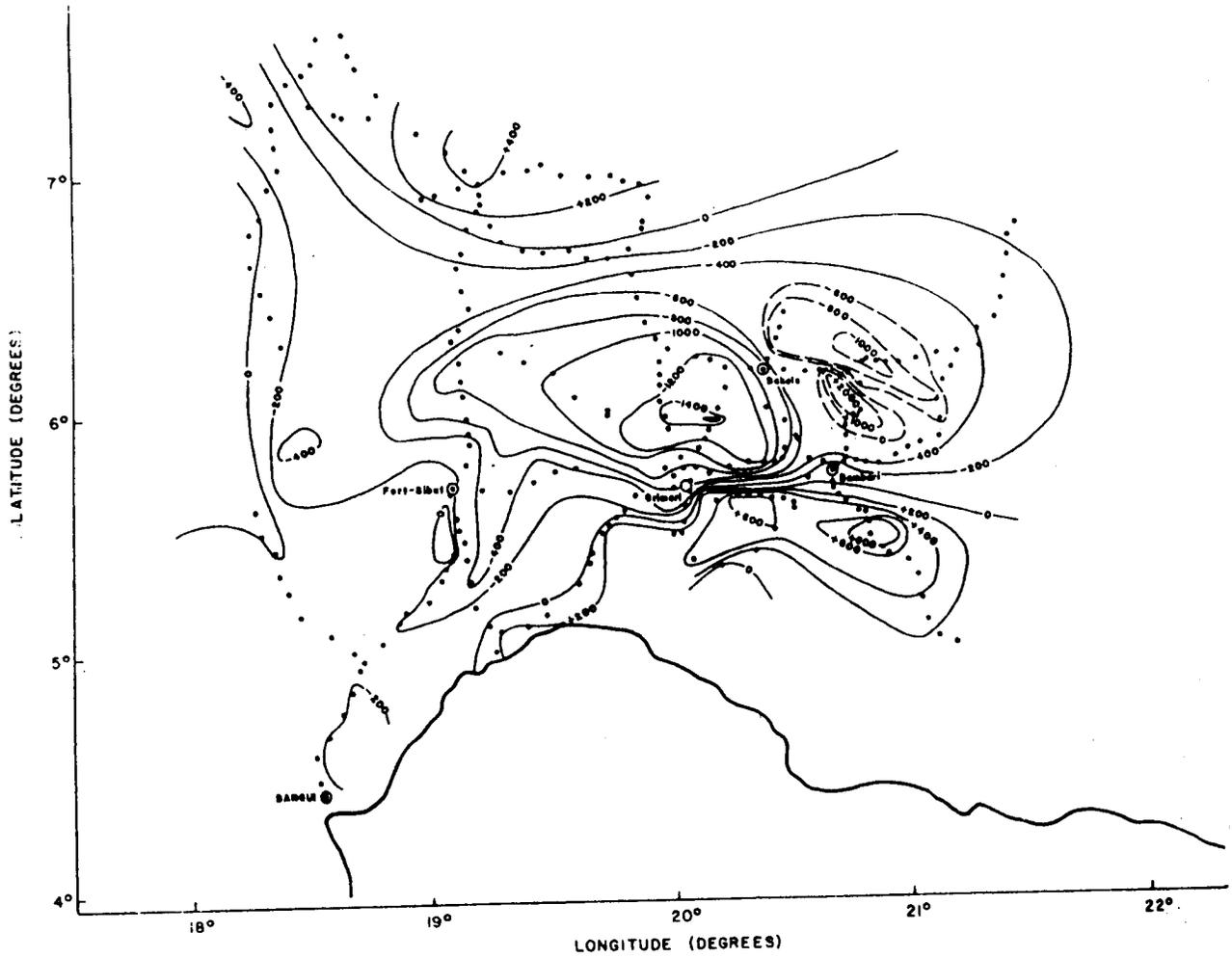


Figure II-12  
 Carte des anomalies de l'intensité du champ magnétique  
 en République Centrafricaine d'après les mesures de J.VASSAL(1976)  
 L'intervalle entre deux lignes isovaleurs est de 200nT.  
 (tiré de REGAN et MARSH,1982)

## 5- Grands traits de la géologie africaine

L'interprétation des cartes préliminaires étudiées au paragraphe précédent ne saurait être complète que si leurs traits principaux sont liés à l'existence de traits géologiques de dimensions comparables aux anomalies; cette liaison étant plus ou moins lâche suivant la profondeur des sources de l'anomalie et l'épaisseur du terrain impliqué dans l'accident correspondant.

Nous ne nous intéresserons, dans un premier temps, qu'à des structures d'extensions géographiques importantes. En effet, l'échantillonnage utilisé (1 point de données tous les  $\varphi$ ) ne nous permet guère de représenter que des longueurs d'onde supérieures ou égales à 1200 Km.

Rappelons brièvement les principaux événements dans l'évolution du continent africain depuis le noyau primitif jusqu'à sa configuration actuelle (Bessoles, 1977). Déterminées essentiellement à partir de la géochronologie et d'études structurales en différentes régions du continent, les principales étapes reconnues actuellement sont:

- orogène à 3000 millions d'années (Ma)
- " à 2500-2800 Ma
- " à 1800±250 Ma (orogénie Eburnéenne et épisode huabien)
- " à 1100±200 Ma (orogénie Kibarienne)
- " à 550±100 Ma (orogénie Damarienne-Katangienne-Panafricaine)
- " de la période Paléozoïque moyen Mésozoïque (orogénie acadienne et hercynienne)

-orogénie alpine de l'Atlas

selon T.N.Clifford (1970), l'effet de ces différentes orogènes a été la cratonisation progressive du continent. L'orogène à 550 Ma est considérée par plusieurs auteurs (Bessoles, 1977; Bessoles et Trompette, 1980) comme une

étape fondamentale dans l'évolution de l'Afrique. Elle correspond également à un évènement majeur dans l'évolution de la terre, se traduisant par une importante chaîne mobile avec des ramifications mondiales (Black, 1978). Ceci nous amène donc à suivre la division classique de l'Afrique (fig. II-13) en deux entités:

- une partie stable depuis environ 1200 Ma et qui comporte les cratons ouest africain, du Congo, le craton du Kalahari et le craton nilotique.
- une partie ayant subi l'épisode panafricain.

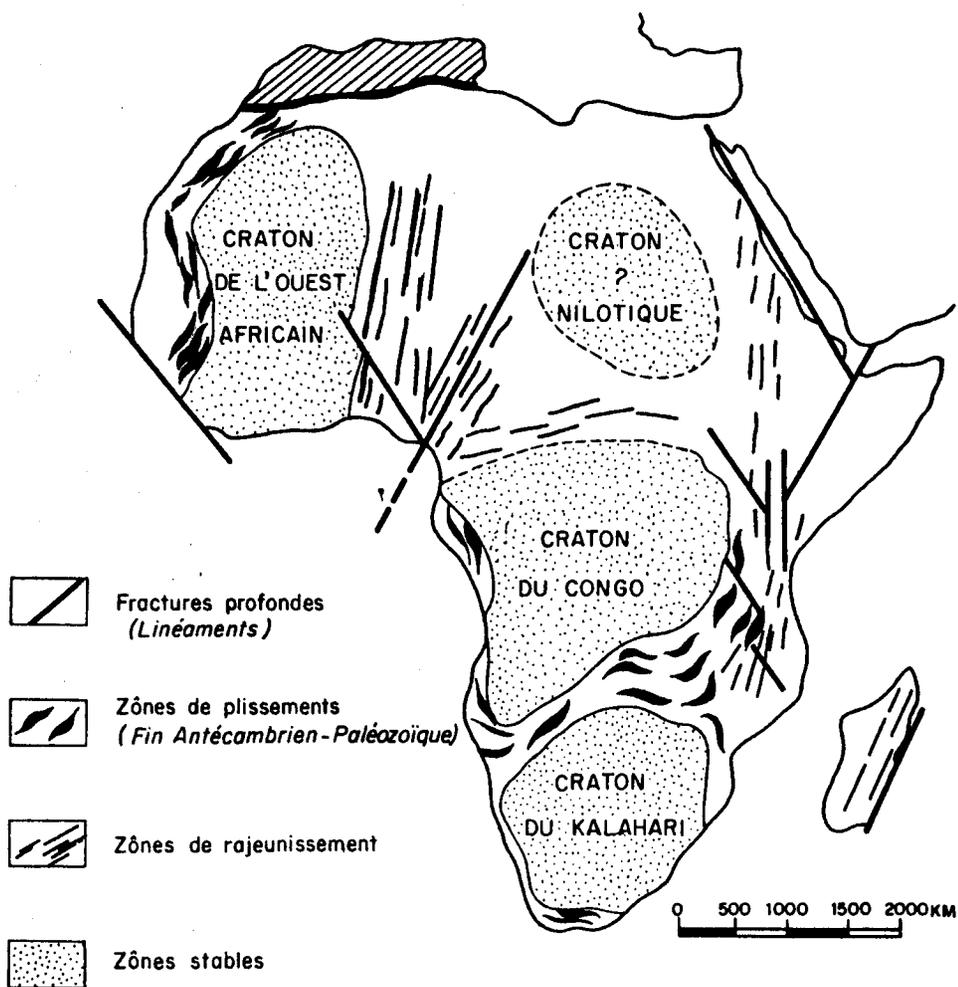
les cratons sont entourés sur leurs périmètres par des zones mobiles dont le plissement a constitué la chaîne Panafricaine (Bessoles et Trompette, 1980). Ce sont:

- la zone mobile de l'Afrique de l'ouest (Rockelides et Mauritanides) à l'ouest du craton ouest africain.
- la zone mobile de l'Afrique centrale, entre le craton ouest africain et le craton du Congo (zones sahariennes et tropicales).

Cette grande division de l'Afrique est également soulignée par des études sismologiques. En effet, Dorbath et Montagner (1983), en étudiant la dispersion des ondes de Rayleigh, mettent en évidence une épaisseur de croûte d'environ 38 Km sous les cratons et 34 Km sous les zones mobiles. Ces résultats sont en accord avec ceux de Dorbath et al. (1982) dans l'étude de la marge du craton du Congo, de même qu'avec ceux de Dorbath et al. (1983) concernant l'étude de la marge du craton ouest africain.

En rapport avec les zones mobiles récentes, il existe dans la partie est de l'Afrique une zone tectoniquement active (Choubert et Faure-Muret, 1971). Elle se situe dans le golf d'Aden et en mer Rouge d'une part et d'autre part dans la zone liée au rift avorté de la région des grands lacs depuis les Afars au nord jusqu'à la Tanzanie au sud (Minster et al., 1974)

Figure II-13



STRUCTURE D'ENSEMBLE DE L'AFRIQUE. (G. Rocci, 1965)

(Tiré de Bessoles, 1977)

Une des caractéristiques structurales majeures du continent africain est représentée par les linéaments de grandes extensions. Ce type d'accident dont la signification structurale n'est pas clairement définie actuellement est susceptible de corrélation avec les données magnétiques dans le domaine des longueurs d'onde étudiées. Ces linéaments pourraient être des jalons d'accidents affectant la croûte continentale. Ainsi, en Afrique centrale, on a reconnu une série d'accidents se succédant depuis le Cameroun (golf de Guinée) à l'ouest jusqu'en Somalie (golf d'Aden) à l'est sur environ 5000 Km, créant une sorte de couloir tectonique (Cornacchia et Dars, 1983). Au Cameroun et en République Centrafricaine ce faisceau d'accidents est-ouest coïncide avec le réseau de failles du Brésil. Par ailleurs les structures camerounaises sont dans le prolongement de la faille transformante d'Ascension. Ces constatations conduisent Sibuet et Mascle (1978) à corréler les linéaments centrafricains aux modalités d'ouverture de l'océan Atlantique. Les accidents vers la Somalie sont liés quant à eux au "rifting" est-africain.

Du golf de Guinée au sud, jusqu'au Hoggar au nord, soit sur une distance d'environ 2600 Km, l'Afrique de l'ouest est également sillonnée par une série de linéaments. Ce sont la faille de Kandi au Bénin, prolongée au nord par le faisceau de failles d'In-Guezzam et par l'accident à 4.9° E du Hoggar central (Bayer et Lesquer, 1978; Guiraud et al. 1981).

## CONCLUSION

Les cartes que nous avons présentées ici sont préliminaires et des travaux sont en cours pour améliorer substantiellement la qualité de ces cartes. Les principales opérations pour atteindre ce but consistent en une meilleure séparation du champ interne et du champ externe d'une part et d'autre part du champ d'origine nucléaire et du champ d'origine crustale. Une meilleure connaissance du champ externe nous permettra d'utiliser au mieux les composantes vectorielles du champ magnétique et de garder ainsi l'avantage des données MAGSAT. Enfin une augmentation du nombre de données disponibles permet un échantillonnage sur des carrés de  $P \times P$ . Cette opération nécessite l'utilisation de mesures étalées sur plusieurs mois. Il faudra alors tenir compte des termes de variation séculaire dans le calcul des coefficients du modèle.

Ces améliorations se feront simultanément mais il faudra plusieurs étapes avant d'atteindre un résultat dont la précision soit comparable avec les spécifications annoncées par la NASA pour les mesures MAGSAT, en l'occurrence établissement de cartes d'anomalies magnétiques avec une résolution de 300 Km et une précision de l'ordre de quelques dizaines de nT (NASA, 1978).

Une autre opération importante devra être envisagée. Opération que nous n'avons pas abordée dans notre mémoire. Il s'agit de la réduction au pôle (Baranov, 1957; Baranov, 1975). Dans le cas des cartes d'anomalies dressées à partir des données MAGSAT, la réduction au pôle classiquement utilisée (Le mouel, 1969) n'est pas applicable. Nous avons fait quelques essais sur des exemples synthétiques d'une nouvelle méthode proposée par J.L. Le mouel (communication personnelle). Cette méthode nous permet de distinguer, dans la mesure du possible, les aimantations induites des

aimantations rémanentes. Dans le cas des premières, elles donnent directement la polarité de l'aimantation induite. Cette méthode, extrêmement délicate à mettre en oeuvre, ne sera appliquée que sur les meilleures données que l'on puisse obtenir. Les cartes ainsi transformées montreront les sources d'anomalies à l'aplomb des anomalies. Elles sont donc d'une importance fondamentale pour donner un sens à d'éventuelles corrélations entre les anomalies magnétiques et certains traits structuraux superficiels ou sub-superficiels et avant même l'obtention de cartes réduites au pôle, nous nous efforcerons de fournir des interprétations cohérentes bien que fondées sur des cartes magnétiques qui ne soient pas définitives. Nous montreront dans cette interprétation des exemples de modèles de sources responsables des anomalies étudiées.

Le perfectionnement des algorithmes de traitements proposés dans notre mémoire pour l'étude du prolongement ainsi que ceux de la réduction au pôle, en cours de mise en point, permettra une exploitation optimale des futures données GRM (Geopotential Research Mission). Ce projet concerne le lancement simultané en 1989 de deux satellites, par les Etats Unis: GRAVSAT pour les mesures du champ gravifique et MAGSAT pour celles du champ magnétique. Les caractéristiques orbitales prévues (NASA, 1983) pour GRM: orbite polaire ( $90^\circ$ ), basse altitude (160 Km) permettront:

- une meilleure modélisation mathématique des champs gravifique et magnétique.
- une détermination du champ gravifique avec une précision meilleure que 2 mgals et celle du géoïde avec une précision meilleure que 10 cm.
- une détermination du champ d'anomalies magnétiques à 1 nT près et 100 Km de résolution spatiale.

d'où l'importance de ces données pour une meilleure compréhension des phénomènes géologiques et géophysiques de la terre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BACKUS, G.E. et GILBERT, F., 1967. Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems, Geophys.J.Roy.astr.Soc., 13, 247-276.
- BACKUS, G.E. et GILBERT, F., 1968. The resolving power of gross earth data Geophys.J.Roy.astr.Soc., 16, 169-205.
- BACKUS, G.E. et GILBERT, F., 1970. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data, Phil. Trans. Roy. Soc., A26, 123-192.
- BACKUS, G.E., 1970. Non-uniqueness of the external geomagnetic field determined by surface intensity measurements, J. Geophys. Res., 75, 6339-6341.
- BARANOV, V., 1957. A new method for interpretation of aeromagnetic maps : pseudo-gravimetric anomalies, Geophysics, XXII (2), 359-383.
- BARANOV, V., 1975. Potentiel fields and their transforms in applied geophysics, ed. Gebrüder Borntraeger, Berlin-Stuttgart.
- BAYER, R. et LESQUER, A., 1978. Les anomalies gravimétriques de la bordure orientale du craton ouest africain : géométrie d'une suture pan-africaine, Bull. Soc. Géol. Fr., t. XX, 863-876.

- BENKOVA, N.P. et DOLGINOV, Sh. Sh., 1971, the Survey with COSMOS 49, in World Magnetic Survey 1957-1969, ed. Zmuda, IAGA Bull., 28, IUGG Publication Office, Paris.
- BENKOVA, N.P., DOLGINOV, Sh. Sh., et SIMONENKO, T.N., 1973. Residual geomagnetic field from the satellite COSMOS 49, J. Geophys. Res., 78, 798-803.
- BESSELES, B., 1977. Géologie de l'Afrique : le craton Ouest africain, Bur. Recherch. Géol. Minière, Memo. 88.
- BESSELES, B. et TROMPETTE, R., 1980. Géologie de l'Afrique : la chaîne pan-africaine "zone mobile de l'Afrique centrale (partie Sud) et zone mobile soudanaise", Bur. Recherche Géol. Minière, Memo. 92.
- BHATTACHARYA, B.K., 1977. Reduction and treatment of magnetic anomalies of crustal origin in satellite data, J. Geophys. Res., 82, 3379-3390.
- BLACK, R., 1978. Propos sur le pan-Africain, Bull. Soc. Géol. Fr., t. XX, 843-850.
- CAIN, J.C., HENDRICKS, S.J., LANGEL, R.A., et HUDONS, W.V., 1967. A proposed model for the International Geomagnetic Reference Field-1965, J. Geomagnet. Geoelectr., Kyoto, 19, 335-355.

- CAIN, J.C. et LANGEL, R.A., 1971. Geomagnetic survey by the Polar-Orbiting Geophysical Observatories, in world magnetic survey 1957-1969, ed. Zmuda, IAGA Bull., 28, IUGG Publication Office, Paris.
- CHOUBERT, G. et FAURE-MURET, A., 1971. Les grands traits du continent africain, in Sciences de la Terre, 6, UNESCO.
- CLIFFORD, T.N., 1970. The structural framework of Africa, in African Magnetism and Tectonics, ed. CLIFFORD-GASS, Oliver and Boyd, London.
- CORNACCHIA, M. et DARS, R., 1983. Un trait structural majeur du continent africain. Les linéaments centrafricains du Cameroun au Golf d'Aden, Bull. Soc. Géol. Fr., t. XXV, 101-109.
- COURANT, R. et HILBERT, D., 1966. Methods of mathematical physics, I, 561 p., Interscience Publishers Inc., New York.
- COURTILLOT, V., DUCRUIX, J. et LE MOUËL, J.L., 1978. Inverse method applied to continuation problems in géophysics, in Applied Inverse Problems, ed. Sabatier, Springer-Verlag, Berlin, 125 p.
- DORBATH, C., DORBATH, L. et GAULON, R., 1982. Seismological investigation of the Bangui magnetic anomaly and its relation to the margin of the Congo craton, submitted to J. Geophys. Res.
- DORBATH, C., DORBATH, L., LE PAGE, A. et GAULON, R., 1983. The West African craton margin in eastern Senegal : a seismological study, Annales Geophysicae, 1, 25-36.

- DORBATH, L. et MONTAGNER, J.P., 1983. Upper mantle heterogeneities in Africa deduced from Rayleigh wave dispersion, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 32, 218-225.
- FRANKLIN, J.N., 1970. Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems, J. Math. Anal. Appl., 31, 682-716.
- FUKUSHIMA, N. et KAMIDE, Y., 1973. Partial ring current models for worldwide, geomagnetic disturbances, Rev. Geophys. and Sp. Phys., 11, 795-853.
- GILBERT, F., 1971. Ranking and winnowing gross earth data for inversion and resolution, Geophys. J. Roy. astr. Soc., 23, 125-128.
- GODIVIER, R. et LE DONCHE L., 1956. Réseau magnétique ramené au 1<sup>er</sup> janvier 1956: République Centrafricaine, Tchad méridional, ORSTOM, 19p
- GREEN, A.G., 1976. Interpretation of project MAGNET aeromagnetic profiles across Africa, Geophys. J. Roy. astr. Soc., 44, 203-228
- GUIRAUD, R., et ALIDOU, S., 1981. La faille de Kandi (Benin), témoin du rejeu fini-crétacé d'un accident majeur à l'échelle de la plaque africaine, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 293
- HASTINGS, D.A., 1982. Preliminary correlation of MAGSAT anomalies of Africa, Geophys. Res. Lett., 9(4), 303-306
- JACKSON, D.D., 1972. Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data, Geophys. J. Roy. astr. Soc., 28, 97-109

- JACKSON, D.D., 1979. The use of "a priori" data to resolve non-uniqueness in linear inversion, Geophys.J.Roy.astr.Soc., 57, 137-157
- JOBERT, G., 1973. Fonctions de Legendre et de Bessel, in Traité de Géophysique Interne, I, ed. Coulomb-Jobert, Masson, Paris, 646p
- LANGEL, R.A., 1979. Near-earth satellite magnetic field measurements: A prelude to MAGSAT, EOS Trans.A.G.U., 60(38), 667
- LANGEL, R.A., COLES, R et MAYHEW M.A., 1980. Comparison of magnetic anomalies of lithospheric origin measured by satellite and airborne magnetometers over western Canada, Canadian Journal of Earth Sciences, 17, 876-887
- LANGEL, R.A. et ESTES, R.H., 1982. A geomagnetic field spectrum, Geophys. Res. Lett., 9(4), 250-253
- LANGEL, R.A., PHILLIPS, J.D. et HORNER R.J., 1982. Initial scalar magnetic anomaly map from MAGSAT, Geophys.Res.Lett., 9(4), 269-272
- LANGEL, R.A., PHILLIPS, J.D. et HORNER, R.J., 1982. Initial vector magnetic anomaly map from MAGSAT, Geophys.Res.Lett., 9(4), 273-276
- LE MOUËL, J.L., 1969. Sur la distribution des éléments magnétiques en France, Thèse de Doctorat es-Sciences, Université Paris VI
- LOWES, F.J., 1974. Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core, Geophys.J.Roy.astr.Soc., 36, 717-730

- MAYAUD, P.N.,1978. Morphology of the transient irregular variations of the terrestrial magnetic field, and their main statistical laws, Ann.Géophys., t.34, fasc.3, 243-276
- MAYAUD, P.N.,1980. Derivation, meaning, and use of geomagnetic indices, Geophysical monograph, 22, 154p, American Geophysical Union, Washington D.C
- MILLER, S.P.,1977. The validity of the geological interpretation of marine magnetic anomalies, Geophys.J.Roy.astr.Soc., 50, 1-21
- NASA. MAGSAT:Magnetic field SATellite.Resource observation program, brochure d'information, 15p
- NASA, 1978. Announcement of opportunity:MAGnetic field SATellite (MAGSAT), document interne, 19p
- NASA, 1983. Geopentiel Research Mission (GRM), brochure d'information, 14p
- NATS PROJECT, 1972. Eigensystem Subroutine PACKage (EISPACK), a FORTRAN IV subroutine to determine the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix, Argonne National Laboratory, Applied Mathematics Division, Illinois(USA)
- NEWITT, L.R., DAWSON, E., COLES, R.L. et NAUDI, A., 1982. Magnetic charts of Canada derived from MAGSAT data, Geophys.Res.Lett., 9(4), 303-306

- NEWMAN, R. et COURTILOT, V., 1976. Interprétation des anomalies magnétiques et prospection magnétique in Traité de Géophysique Interne II, éd. Coulomb-Jobert, Masson, Paris, 586 p.
- PAKISER, L.C. et ZIETZ, I., 1965. Transcontinental crustal and upper mantle structure, Rev. Geophys., 3, 505-520
- PEDDIE, N.W., 1982. International Geomagnetic Reference Field: the third generation, J. Geomag. Geoelectr., 34, 309-326
- REGAN, R.D., CAIN, J.C. et DAVIS, W.M., 1975. A global magnetic anomaly map, J. Geophys. Res., 80(5), 794-802
- REGAN, R.D., 1979. The reduction and analysis of satellite magnetometer data, Geophysical Survey, 3, 331-349
- REGAN, R.D. et MARSH, B.D., 1982. The Bangui magnetic anomaly : its geological origin, J. Geophys. Res., 87, 1107-1120
- SERSON, P.H. et HANNAFORD, W.L.W., 1957. A statistical analysis of magnetic profiles, J. Geophys. Res., 62, 1-18
- SIBUET, J.C. et MASCLE, J., 1978. Plate kinematics implications of Atlantic Equatorial fracture zone trends, J. Géophys. Res., 83, 3401-3421.

- STERN, D.P. et BREDEKAMP, J.H., 1975. Error enhancement in Geomagnetic Models Derived from scale data, J. Geophys. Res., 80(13), 1776-1782.
- STERN, D.P., LANGEL, R.A. et MEAD, G.D., 1980. Backus effect observed by MAGSAT, Geophys. Res. Lett., 7(11), 941-944
- SUZUKI, A. et FUKUSHIMA, N., 1982. Sunward or anti-Sunward electric current in space below the MAGSAT level, Geophys. Res. Lett., 9(4), 345-347
- VASSAL, J. et GODIVIER, R., 1976. Anomalie magnétique en R.C.A, rapport préliminaire, ORSTOM, non publié
- WHALER, K.A. et GUBBINS, D., 1981. Spherical harmonic analysis of the geomagnetic field: an example of a linear inverse problem Geophys. J. Roy. astr. Soc., 65, 645-693
- ZIETZ, I., ANDREASEN, G. et CAIN, J.C., 1970. Magnetic anomalies from satellite magnetometer, J. Geophys. Res., 75, 4007-4015
- ZMUDA, A.J., 1971. Satellite 1964 83C, in World Magnetic Survey 1957-1969, ed ZMUDA, IAGA Bull., 28, IUGG Publication office, Paris