

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

**MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE**

**SPECIALITE** : Physique théorique

**OPTION** : Physique mathématique

**THEME**

**Intégrale de chemins de Wiener et processus  
stochastique**

Par

**Bendahmane Issam**

SOUTENU LE : - - /--/----

**Devant le Jury :**

**Président : K. AITMOUSSA**

Professeur Univ. Mentouri - Constantine

**Rapporteur : B. BENTAG**

M. C. A Univ. Mentouri - Constantine

**Examineurs :**

**A. BENSLAMA**

Professeur Univ. Mentouri – Constantine

**A. BOUNAMES**

Professeur Univ. Jijel

# Table des matières

<b>1. Introduction</b> .....	4
<b>Partie I : Physique stochastique</b>	
<b>2. Processus stochastique</b> .....	6
<b>2.1 Définition</b> .....	6
<b>2.2 Processus Gaussien (normale)</b> .....	7
2.2.1 Densité de probabilité et fonction génératrice.....	7
2.2.2 Densité de probabilité jointe.....	8
<b>2.3 Processus markovien</b> .....	8
2.3.1 Analogie entre la dynamique et les processus markoviens.....	9
<b>2.4 Processus de Wiener (mouvement brownien)</b> .....	11
2.4.1 Introduction historique sur le mouvement brownien.....	11
2.4.2 Marche aléatoire (établissement de la distribution de probabilité).....	13
2.4.3 Equation de diffusion.....	19
2.4.4 Constante de diffusion.....	20
2.4.5 Equation de Smoluchowski.....	21
2.4.6 Processus de Wiener.....	23
<b>2.5 Processus interprété comme processus brownien (chaine moléculaire aléatoire)</b> .....	25
<b>2.6 Conclusion</b> .....	27
<b>3. Equations stochastiques</b> .....	28

<b>3.1 Equation de Chapman-Kolmogorov</b> .....	28
3.1.1 L'évolution de l'espérance.....	29
3.1.2 L'équation différentielle de Chapman-Kolmogorov.....	31
3.1.3 Loi de semi-groupe et analogie avec l'équation de Schrödinger.....	32
<b>3.2 Equation de Fokker-Planck</b> .....	33
<b>3.3 Equation de Langevin</b> .....	36
<b>3.4 Conclusion</b> .....	37
 <b>Partie II : Intégrale de chemin</b>	
<b>4. Intégrale de chemin de Wiener</b> .....	38
<b>4.1 Intégrale de Wiener</b> .....	38
<b>4.2 Mesure de Wiener</b> .....	41
4.2.1 Intégrale de chemin sur la mesure de Wiener.....	43
4.2.2 La relation ESKC.....	44
<b>4.3 Introduction d'une fonctionnelle</b> .....	45
<b>4.4 Conclusion</b> .....	46
<b>5. Méthodes de calcul des intégrales de chemin</b> .....	47
<b>5.1 Discrétisation du temps</b> .....	47
5.1.1 Exemple 1.....	48
5.1.2 Exemple 2.....	50
5.1.3 Exemple 3.....	52
<b>5.2 Réduction de l'intégrale par la relation ESKC</b> .....	55

5.2.1 Exemple 1 .....	55
5.2.2 Exemple 2 .....	56
<b>5.3 Changement de variables</b> .....	<b>57</b>
5.3.1 Exemple 1 .....	57
5.3.2 Exemple 2 .....	59
<b>5.4 Evaluation de l'intégrale de chemin par les équations différentielle de Sturm-Liouville</b> .....	<b>62</b>
<b>5.5 Conclusion</b> .....	<b>63</b>
<b>6. Intégrale de chemin dans la physique moderne</b> .....	<b>64</b>
<b>6.1 Feynman-Kac Formula</b> .....	<b>64</b>
6.1.1 Transformé de Laplace .....	65
6.1.2 Exemple .....	65
<b>6.2 Intégrale de chemin Quantique</b> .....	<b>66</b>
<b>6.3 Traitement par l'intégrale de chemin</b> .....	<b>70</b>
6.3.1 Analyse dimensionnelle des grandeurs physiques de la constante de diffusion .....	70
6.3.2 Étude de la densité de probabilité pour des positions fixes .....	72
6.3.3 Mouvement brownien dans un champ de forces .....	78
<b>Conclusion et perspectives</b> .....	<b>82</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>83</b>

**Chapitre 1**  
**Introduction**

E. W. Montroll et M. F. Shlesinger disaient sur les débuts de la théorie de probabilités : « Since travelling was onerous (and expensive), and eating, hunting and wrenching generally did not fill the 17<sup>th</sup> century gentleman's day, two possibilities remained to occupy the empty hours, praying and gambling; many preferred the latter. ». C'est en fait dans le secteur des jeux de hasard que la théorie de probabilité a eu son origine.

En physique, le mouvement brownien était le premier phénomène de nature probabiliste est considéré comme le problème archétypique sur laquelle la physique stochastique fut fondée, ce phénomène de nature non-dynamique à exigé aux physiciens d'inventé des méthodes nouvelles de nature probabiliste dans le but d'obtenir des grandeurs statistiques qui décrivent les systèmes étudiés. Après des années passé en observant les particules en mouvement brownien, *Gouy* a pu donner une description précise de ce mouvement, mais c'est seulement 17 ans après qu'Einstein et Smoluchowski ont réussi à présenter un modèle mathématique qui exprime avec succès les observations faites par *Gouy*. Depuis, plusieurs travaux ont été réalisés sur le mouvement brownien marqué par l'introduction de nouvelles techniques mathématiques fondées exclusivement sur la théorie stochastique.

En 1923 le mathématicien N. Wiener a eu l'idée de présenté le processus brownien sous forme d'intégrale dans un espace analytique fonctionnel, puis les mathématiciens R.H. Cameron et W.T. Martin ont établi des théorèmes sur les transformations linéaires dans l'espace de Wiener, et permettant de calculer certains types d'intégrale de chemin de Wiener à partir des solutions de l'équation différentielle de type Sturm-Liouville.

En s'appuyant sur les travaux de ces derniers, M. Kac a pu démontrer un théorème plus général permettant d'obtenir les solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre aux dérivées partielles à deux variables. Bien avant R.P. Feynman a développé une théorie similaire en utilisant le calcul variationnelle pour obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger dans le cadre de la mécanique quantique.

Ce mémoire vise à atteindre les objectifs d'illustrer la construction d'une théorie stochastique pour le processus de Wiener et expliquer en détails ces différents aspects, puis l'explication de l'intégrale de chemin de Wiener et ces différentes techniques, en faisant remarquer les similitudes entre la théorie stochastique et la théorie quantique, ce qui nous permettra de retrouver la constante inconnue qui apparaît dans l'intégrale de chemin de Feynman ce qui est remarquable et très motivant.

Pour cela, le deuxième chapitre servira à définir un processus stochastique et montrer les étapes de construction d'un processus de Wiener par l'établissement de la densité de probabilité, la constante de diffusion puis les équations de diffusion, ce chapitre sera clôturé par la donné un exemple sur le traitement d'un phénomène dynamique par une approximation stochastique.

Dans le troisième chapitre nous avons bien expliqué comment s'établissent les différentes équations stochastiques en montrant que toutes ces équations sont déduites de l'équation de Chapman-Kolmogorov, nous avons aussi montré une analogie entre cette dernière et l'équation de Schrödinger.

Dans le quatrième chapitre on a montré comment construire l'intégrale de chemin de Wiener et définir la mesure de Wiener, cela qui a été possible du fait de la ressemblance entre une mesure et une probabilité.

Au cinquième chapitre nous avons très bien détaillés les techniques de calcul de l'intégrale de chemin de Wiener et exposer le théorème qui a permit de son utilisation pour résoudre certains types d'équations différentielles.

Dans le dernier chapitre nous présentons le théorème de Feynman-Kac, afin de l'utiliser pour retrouver d'une manière simple l'équation de Schrödinger ainsi que l'expression du propagateur de Feynman, ce qui a permit également de retrouver la constante inconnue de Feynman par une approche purement stochastique, et interpréter le propagateur de Feynman comme équivalent à la probabilité de transition stochastique. De même nous avons interprété la fonction d'onde comme équivalente à la densité de probabilité stochastique. Enfin nous avons mené des études qui vont servir à traiter le mouvement brownien d'une particule soumise à des forces extérieures en utilisant l'intégrale de chemin de Wiener et l'équation de Langevin.

**Partie I**  
**Physique Stochastique**



**Chapitre 2**  
**Processus stochastique**

## 2.1 Définition

Un processus dynamique est une structure mathématique utilisée pour modéliser l'évolution déterministe de certains phénomènes (physique) dans le temps. Le mot clé ici est déterministe. On dit qu'un système est déterministe si son future est complètement prédictible connaissant de son état initial. Mais s'il y'a quelques intrinsèque randomisations dans le système, qui rend la prédiction parfaite du future impossible, on utilise alors une autre structure mathématique dite **processus stochastique**.

Donc un processus stochastique est une structure mathématique utilisée pour modeler les différents phénomènes où la prédiction de la future est impossible pour des raisons différentes : soit le système est soumis à une ou plusieurs forces inconnues, ou bien tout simplement, les forces agissent d'une façon aléatoire.

Citant à titre d'exemple, les systèmes suivants :

- Le mouvement d'une particule dans un fluide (mouvement Brownien).
- Le nombre de photons absorbés ou émis par un atome.
- La position d'un piston soumis au choc des molécules d'un gaz.
- Le mouvement des planètes lointaines.
- La fluctuation de la chaine d'ADN.
- Les réactions chimiques couplets non linéaires.
- Le bruit dans les circuits électroniques.
- L'étude des valeurs boursières...etc.

On constate que les processus stochastiques ne se limitent pas à l'étude des systèmes physiques, mais ils ont de larges applications dans plusieurs domaines scientifiques (Astronomie, Biologie, Électronique, Finance...etc).

Le calcul stochastique, est une branche entière des mathématiques qui prend ces bases théoriques de la théorie de probabilité et la statistique.

Soit  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire qui associé à tous résultat  $\xi$  d'une expérience  $\zeta$  le nombre  $\mathbf{X}(\xi)$ .

Un processus stochastique  $\mathbf{X}(t)$  est une loi mathématique qui attribue à chaque  $\xi$  une fonction  $\mathbf{X}(t, \xi)$ , autrement dites un processus stochastique est une famille de fonctions dépendants des paramètres  $t \in \mathbf{T}$  et de  $\xi$ ,  $t$  correspond physiquement au temps.

$\mathbf{T}$  est dit l'ensemble des paramètres, et toutes les valeurs prises par la fonction  $\mathbf{X}(\xi)$  forment l'ensemble des états noté  $\mathbf{E}$ .

Si les éléments de l'ensemble  $\mathbf{T}$  sont des réels positifs, alors  $\mathbf{X}(t)$  est dite processus continu dans le temps (à paramètre continue).

Si les éléments de l'ensemble  $\mathbf{T}$  sont des entiers positifs, alors  $\mathbf{X}(t)$  est dite processus discret dans le temps (à paramètre discret).

Si les éléments de  $\mathbf{E}$  forment un ensemble discret, on dit que le processus est un processus d'états-discrets.

Par contre si  $\mathbf{E}$  est un ensemble continu, on dit que le processus est un processus d'état-continu.

A noter qu'un processus stochastique d'états complexes est défini par :

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t) + i X_2(t).$$

Où  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont des processus stochastique (réels),  $i = \sqrt{-1}$ .

## 2.2 Processus Gaussien (normal)

Un processus stochastique  $\mathbf{X}(t)$  est dit gaussien (normal), si chaque combinaison linéaire finie de ces éléments est normalement distribué, cela veut dire que pour chaque ensemble finit ( $t_1, t_2, \dots, t_k$ ) de  $\mathbf{T}$ , les variables stochastiques correspondantes ( $x_1, x_2, \dots, x_k$ ) vérifient la relation suivante [1] :

$$E \left[ \exp \left\{ i \sum_{l=1}^k t_l x_l \right\} \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l,j} \sigma_{lj} t_l t_j + i \sum_l \mu_l t_l \right\} \dots (2.1).$$

Où :

- $i^2 = -1$ .
- $E[\dots]$  représente l'espérance.
- $\forall 1 \leq l, j \leq k : \sigma_{lj} \in \mathbb{R}^+, \mu_l \in \mathbb{R}$ , où  $\sigma_{lj}$  et  $\mu_l$  représentent respectivement les covariances et les valeurs moyennes des variables aléatoires.
- La relation (2.1) implique qu'il suffi juste de connaitre la distribution jointe d'ordre 2 pour décrire complètement ce genre de processus.

### 2.2.1 Densité de probabilité et fonction génératrice

La densité de probabilité gaussienne est donnée pour une seule variable par [2] :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \dots (2.2).$$

Où  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont l'espérance et la variance de la distribution.

On défini aussi la fonction génératrice d'une variable aléatoire par [2] :

$$G(x, t) = E(e^{tx}), t \in \mathbb{R}, E(\dots) \equiv \text{espérance},$$

dans le cas d'une variable continue :

$$\begin{aligned}
 G(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \dots (2.3).
 \end{aligned}$$

La fonction génératrice nous permet de calculer les moments de la distribution par une simple dérivation :

$$\begin{aligned}
 E(x^n) &= \left. \frac{d^n G(x, t)}{dt^n} \right|_{t=0} \\
 \Rightarrow E(x) &= \left. \frac{dG(x, t)}{dt} \right|_{t=0} = \left( \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \right)'_{t=0} = \mu. \\
 \Rightarrow E(x^2) &= \left. \frac{d^2 G(x, t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \left( \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \right)''_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2.
 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Densité de probabilité jointe

La densité de probabilité jointe pour un processus gaussien de n variables aléatoires est [3] :

$$w(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sqrt{\det(A)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j\right\} \dots (2.4).$$

Où A est une matrice réelle  $n \times n$  ( $A_{ij} \in \mathbb{R}$ ), symétrique  $A_{ij} = A_{ji}$ , inversible  $\det(A) \neq 0$  et strictement définie positive  $\sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j > 0$ .

A est aussi une matrice diagonalisable aux valeurs propres strictement positives dépendant du choix des temps ( $t_1, t_2, \dots, t_k$ ).

## 2.3 Processus markovien

Un processus stochastique  $\mathbf{X}(t)$  est dit markovien si [4] :

$$\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n : W(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots (2.5).$$

Où  $W(2|1)$  Représente la densité de probabilité conditionnelle (distribution conditionnelle) pour laquelle l'événement 2 se produit sachant que l'événement 1 c'était déjà produit.

La relation (2.5) équivaut à dire que l'événement  $\{x_n, t_n\}$  ne dépend que du précédent  $\{x_{n-1}, t_{n-1}\}$ , physiquement cela veut dire que le future du système est indépendant de son histoire, 'le processus est sans mémoire'.

La distribution conditionnelle pour n variables aléatoires vérifie la relation suivante [4] :

$$W(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k) = \frac{w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)}{w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k)} \dots \quad (2.6),$$

depuis cette relation on a (pour alléger l'écriture on a omit les  $t_i$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_1; x_2) = w(x_1)W(x_2|x_1) \\ w(x_1; x_2; x_3) = w(x_1; x_2)W(x_3|x_1; x_2) = w(x_1)W(x_2|x_1)W(x_3|x_1; x_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ w(x_1; x_2; \dots; x_n) = w(x_1)W(x_2|x_1)W(x_3|x_1; x_2) \dots W(x_n|x_1; x_2; \dots; x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Pour un processus stochastique markovien vérifiant la relation (2.5), on trouve que :

$$w(x_1; x_2; \dots; x_n) = w(x_1)W(x_2|x_1)W(x_3|x_2) \dots W(x_n|x_{n-1})$$

$$\Rightarrow w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w(x_1, t_1) \prod_{i=2}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \dots \quad (2.7).$$

La relation (2.7) implique qu'un processus markovien est entièrement déterminé par la donnée de la densité de probabilité (distribution marginale)  $w(x, t)$  et la distribution conditionnelle  $W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$  dite probabilité de transition.

- Si  $W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = W(x_i, t_i - t_{i-1} | x_{i-1}, 0)$  on dit que  $\mathbf{X}(t)$  est un processus markovien homogène (dans le temps).
- Si  $W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = W(x_i - x_{i-1}, t_i | 0, t_{i-1})$  on dit que  $\mathbf{X}(t)$  est un processus markovien homogène (dans l'espace).
- La combinaison donne un processus homogène dans le temps et l'espace ou :

$$W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = W(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1} | 0, 0) \dots \quad (2.8).$$

### 2.3.1 Analogie entre la dynamique et les processus markoviens

On va établir une analogie entre le traitement dynamique formé de  $n$  points et un processus stochastique pour cela on considère l'équation différentielle de 1<sup>ier</sup> ordre  $\dot{x}(t) = F[x(t)]$ .

Soit  $\varphi(x_0, t - t_0)$  le flot de l'équation donnant la trajectoire de  $x(t)$  correspondant à la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ .

On choisi les points de cette trajectoire d'une façon aléatoire, par exemple  $\{x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n\}$  étant donné que la condition initiale détermine complètement la solution, on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0, t_1 - t_0), \\ x_2 &= \varphi(x_0, t_2 - t_0) = \varphi(x_1, t_2 - t_1), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi(x_0, t_n - t_0) = \varphi(x_{n-1}, t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Puisque la particule partant de  $\{x_0, t_0\}$  doit passer avec certitude par tous les points  $\{x_i, t_i\}_{i=1}^n$ , cette certitude est traduite par la distribution suivante :

$$\begin{aligned} W(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)]\delta[x_2 - \varphi(x_0, t_2 - t_0)] \times \dots \\ &\quad \times \delta[x_n - \varphi(x_0, t_n - t_0)] \\ &= \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)]\delta[x_2 - \varphi(x_1, t_2 - t_1)] \times \dots \times \delta[x_n - \varphi(x_{n-1}, t_n - t_{n-1})] \dots \quad \text{(2.9)}. \end{aligned}$$

Etant que  $\{x_0, t_0\}$  est un événement initiale donnée on peut écrire (définie) :

$$\begin{cases} w(x_1, t_1) \equiv \delta[x_1 - \varphi(x_0, t_1 - t_0)] \\ W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \equiv \delta[x_i - \varphi(x_{i-1}, t_i - t_{i-1})] \end{cases}$$

Cela amènera la relation (2.9) à la relation (2.7) caractéristique du processus markovien.

Donc la mécanique peut être approchée à un processus markovien, en considérant les couples  $\{q(t), p(t)\}$  solutions des équations canoniques :

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial}{\partial p} H(q, p) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial q} H(q, p) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales  $q(t_0) = q_0$ ,  $p(t_0) = v_0$ . Si l'on ne considère que le processus  $q(t)$  sans tenir compte de  $p(t)$ , le processus mécanique perd la propriété markovien car la seule donnée de la position ne détermine plus la trajectoire. D'une manière générale, il se peut qu'un processus mécanique devienne markovien en adjoignant des variables  $p(t)$ , il est donc important de préciser quelles variables la propriété de Markov est valable pour, cela montre aussi le point de différence entre la physique dynamique et la physique stochastique.

Cette analogie a fait que tous les processus stochastiques étudiés dans la physique sont des processus markoviens, car cette propriété est l'équivalent de la dynamique dans la physique stochastique.

## 2.4 Processus de Wiener (mouvement brownien)

On va construire le processus de Wiener (mouvement brownien) étape par étape, commençant par un peu d'histoire puis établir la densité de probabilité et l'équation de diffusion.

### 2.4.1 Introduction historique sur le mouvement brownien

Le phénomène a été observé pour la première fois par le botaniste anglais Robert Brown en 1828 qui a publié dans l'*Edinburgh Journal* un article intitulé '*A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August; 1827 on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*'. Brown a cru que ce mouvement revienne à l'existence d'un sort de vis ce qui a été prouvé qu'il est faux et le phénomène a pris l'attention des physiciens à partir des années 1860 avec les expériences faites dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, ces derniers ont montré que :

- Le mouvement brownien augmente lorsque la taille des particules en suspension décroît (pour des rayons inférieurs à 1 micron).
- De même si la viscosité du fluide décroît.
- Aussi si la température augmente.

Basé sur les résultats ci-dessus plusieurs interprétations ont été données sur l'origine de ce mouvement une dit qu'elle revienne à des différences de températures, une à l'évaporation et une autre à des courants de convection.

Christian Wiener titulaire de la chaire de géométrie descriptive à Karlsruhe réaffirma en 1863 que le mouvement revienne à des interactions entre particules, le mouvement brownien aurait alors été relié aux vibrations de l'éther, à une longueur d'onde correspondant à celle de la lumière rouge.

Une telle explication fut critiquée par R. Mead Bache, qui montra que le mouvement était insensible à la couleur de la lumière, alors une autre interprétation a été donnée dans des notes publiées entre 1877-1880 [5] « *Les mouvements browniens...seraient, dans ma manière de considérer le phénomène, le résultat des mouvements moléculaires calorifiques du liquide ambiant* », écrivait ainsi Joseph Delsaulx dans son article [5] '*l'origine thermodynamique des mouvements browniens*'.

Cette théorie rencontra de fortes oppositions par le suisse Karl Von Nägeli et le chimiste britannique William Ramsey, remarquèrent que les particules en suspension possédaient une masse plusieurs centaines de millions de fois plus grande que celle des molécules du fluide,

chaque collision avec une molécule de fluide produisait donc un effet bien insuffisant pour déplacer la particule en suspension, Nägeli écrivait à propos du mouvement similaire des micro-organismes dans l'air [5] :

*« The motion which a sun-mote, and on the whole any particle found in the air, can acquire by the collision of an individual gas molecule or a multitude of such molecules is therefore so extraordinarily small, and the number of simultaneous collisions against the particle from all sides so extraordinarily large, that particle behaves as if it were completely at rest ».* Il croyait plutôt que la cause du mouvement résidait, non pas dans les mouvements moléculaire thermique, mais dans des forces attractives ou répulsives.

En 1888 le physicien français Louis-Georges Gouy, fit des meilleures observations sur le mouvement brownien, d'où il ressortissait les conclusions suivantes [5] :

- Le mouvement est extrêmement irrégulier, et la trajectoire semble ne pas avoir de tangente.
- Deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants l'un de l'autre.
- Plus les particules sont petites, plus leur mouvement est vif.
- La nature et la densité des particules n'ont aucune influence.
- Le mouvement est plus actif dans les fluides les moins visqueux.
- Le mouvement est plus actif à plus haute température.
- Le mouvement ne s'arrête jamais.
- La particule fluctue autour d'un point de départ, cela veut dire que le barycentre de sa trajectoire est le point de départ (la particule virevolte autour d'un même point).

Gouy expliquerait le mouvement brownien par les mouvements partiellement coordonnés à l'intérieur du liquide sur une échelle de l'ordre du micron. Et fut noter l'apparente contradiction avec le principe de Carnot. Celui-ci énonce que l'on ne peut extraire de travail d'une simple source de chaleur. Mais il semble bien que du travail soit produit de manière fluctuante par les mouvements thermiques des molécules du fluide.

Henri Poincaré a écrit à propos de ce problème [5] : *« Mais voici que la scène change. Le biologiste, armé de son microscope, a remarqué il ya longtemps dans ses préparations des mouvements désordonnés de petites particules en suspension ; c'est le mouvement brownien. Il a cru d'abord que c'est un phénomène vital, mais il a vu bientôt que les corps inanimés ne dansaient pas avec moins d'ardeur que les autres ; il a alors passé la main aux physiciens. Malheureusement, les physiciens se sont longtemps désintéressés de cette question ; on concentre de la lumière pour éclairer la préparation microscopique, pensaient-ils ; la lumière*



*ne va pas sans chaleur, de là des inégalités de température, et dans le liquide des courants intérieurs qui produisent les mouvements dont on nous parle.*

*L.Gouy eut l'idée d'y regarder de plus près et il vit, ou crut voir que cette explication est insoutenable, que les mouvements deviennent d'autant plus vifs que les particules sont plus petites, mais qu'ils ne sont pas influencés par le mode d'éclairage. Si alors ces mouvements ne cessent pas, ou plutôt renaissent sans cesse, sans rien emprunter à une source extérieure d'énergie, que devons-nous croire ? Nous ne devons pas, sans doute, renoncer pour cela à la conservation de l'énergie, mais nous voyons sous nos yeux tantôt le mouvement se transformer en chaleur par le frottement, tantôt la chaleur se changer inversement en mouvement, et cela sans que rien ne se perde, puisque le mouvement dure toujours. C'est le contraire du principe de Carnot. S'il en est ainsi, pour voir le monde revenir en arrière, nous n'avons plus besoin de l'œil infiniment subtil du démon de Maxwell, notre microscope nous suffit. Les corps plus gros, ceux qui ont, par exemple, un dixième de millimètre, sont heurtés de tous les côtés par les atomes en mouvement, mais ils ne bougent pas parce que ces chocs sont très nombreux et que la loi du hasard veut qu'ils se compensent ; mais les particules plus petites reçoivent trop peu de chocs pour que cette compensation se fasse à coup sûr et son encensement ballottées. Et voilà déjà l'un de nos principes en péril."*

Dans les années 1905 et 1906 le mouvement brownien a été expliqué rigoureusement simultanément par *Albert Einstein* et *Marian Von Smoluchowski* qu'ils ont pu construire un modèle mathématique pour le mouvement brownien et calculé les quantités probabilistes nécessaire pour décrire ce processus, de plus ils ont établi l'équation et la constante de diffusion.

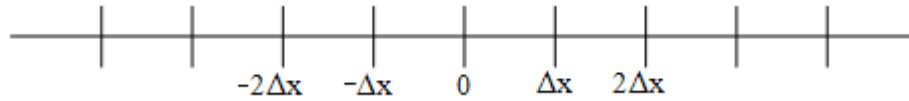
### **2.4.2 Marche aléatoire (établissement de la distribution de probabilité)**

On va étudier la marche aléatoire à une dimension car c'est simple et permet de présenter les méthodes mathématiques plus clairement, puis en généraliser les résultats obtenus à  $d$  dimensions, la méthode de la marche aléatoire a été utilisée par Smoluchowski dans ces articles [6,7] publiés en 1906.

L'approche de Smoluchowski est plus directe, simple, et convaincante par rapport à celle d'Einstein, bien que le modèle du marche aléatoire ait été introduit pour la première fois par Louis Bachelier en 1900 dans sa thèse 'la théorie de la spéculation'.

Considérant donc une particule brownienne qui se déplace sur une ligne droite, prenant comme origine de mouvement le point de départ, cette particule se déplace avec des sauts de

valeur  $\Delta x$ , cela veut dire que les sites occupé possibles sont  $0, \pm\Delta x, \pm 2\Delta x, \dots$  forment une ensemble qui représente les valeurs du variables stochastique  $X_i = \pm\Delta x$ , où  $X_1 = +\Delta x$  et  $X_2 = -\Delta x$ .



Donc à  $t = 0$  la particule se situe à  $x = 0$ , après chaque intervalle temporelle ' $\tau$ ' la particule soit se déplace vers la gauche d'une valeur  $-\Delta x$  avec une probabilité ' $q$ ', ou vers la droite d'une valeur  $+\Delta x$  avec une probabilité ' $p$ '.

Le but ici est de trouver la probabilité  $p(x, k\tau)$  pour que la particule soit à la position  $x$  après  $k$  sauts.

On pose  $x = n\Delta x$  car notre mouvement est fait par des sauts de valeur  $\Delta x$ , cela implique que la particule a fait  $(n+m)$  sauts à la droite et ' $m$ ' sauts à la gauche donc  $k = n + 2m$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ sauts à gauche est } (k - n)/2 \text{ sauts à gauche.} \\ n+m \text{ sauts à droite est } (k + n)/2 \text{ sauts à droite.} \end{array} \right.$$

Car les sauts sont des événements indépendants la probabilité qu'on cherche n'est que la somme des probabilités de chaque événements qu'elle est  $p$  pour chaque sauts à la droite, donc la probabilité  $p(X_1) = p^{(k+n)/2}$ , et  $q$  pour chaque sauts à la gauche qui nous donne la probabilité  $p(X_2) = q^{(k-n)/2}$ , comme  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables stochastiques indépendants (ils représentent des événements indépendants), alors  $p(X_1, X_2) = p(X_1) \cdot p(X_2)$ .

La probabilité totale sera le produit de  $p(X_1, X_2)$  avec le nombre totale de tous les combinaisons possible de réaliser ces sauts, ce nombre est obtenu par un simple calcul combinatoire et le résultat est :

$$\frac{k!}{\frac{(k+n)}{2}! + \frac{(k-n)}{2}!}$$

Alors :

$$p(x = n\Delta x, t = k\tau) = \frac{k!}{\frac{(k+n)}{2}! + \frac{(k-n)}{2}!} p(X_1, X_2),$$

$$p(x = n\Delta x, t = k\tau) = \frac{k!}{\frac{(k+n)}{2}! + \frac{(k-n)}{2}!} p^{\frac{(k+n)}{2}} q^{\frac{(k-n)}{2}} \dots \text{ (2.10).}$$

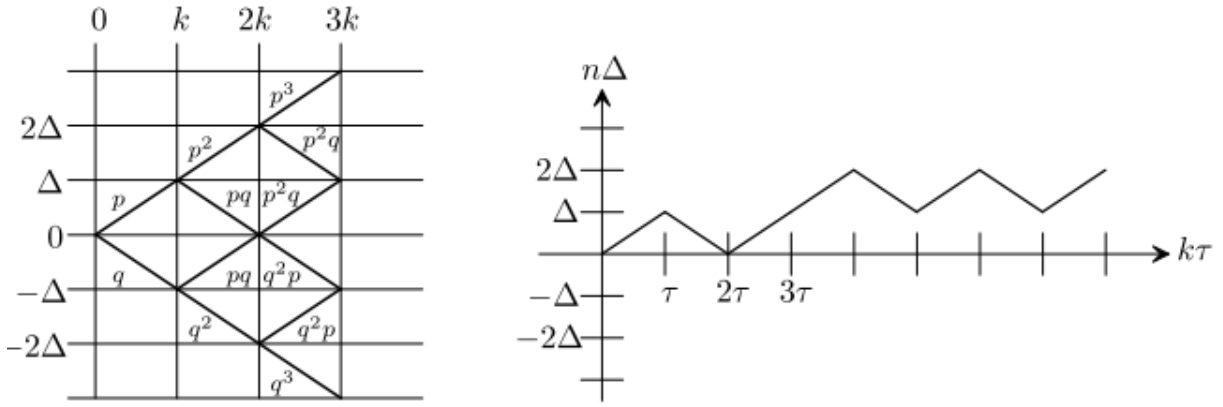


figure 2.1 Marche aléatoire en dimension 1

Maintenant on va écrire (2.10) sous une forme plus pratique dite forme intégrale, on utilise pour ça la relation binomiale de Newton comme suit :

$$\begin{aligned}
 (p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^k &= \sum_{d=0}^k \frac{k!}{d!(k-d)!} (p e^{i\varphi})^d (q e^{-i\varphi})^{k-d}, \\
 &= \sum_{d=0}^k \frac{k!}{d!(k-d)!} p^d q^{k-d} e^{i\varphi(2d-k)} \dots \text{(2.11)},
 \end{aligned}$$

$$(\varphi, p, q) \in \mathbb{R}^3, (k, d) \in \mathbb{N}^2.$$

on intégrant (2.11) sur  $\varphi$  et multipliant par  $e^{-in\varphi}$  :

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi [(p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^k] e^{-in\varphi} \\
 &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left[ \sum_{d=0}^k \frac{k!}{d!(k-d)!} p^d q^{k-d} e^{i\varphi(2d-k)} \right] e^{-in\varphi} \\
 &= \sum_{d=0}^k \left\{ \frac{k!}{d!(k-d)!} p^d q^{k-d} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi e^{i\varphi(2d-k)} e^{-in\varphi} \right\},
 \end{aligned}$$

Où

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi e^{i\varphi(2d-k)} e^{-in\varphi} = 2\pi \delta_{2d-k, n} = \begin{cases} 0 & \text{si } 2d-k \neq n. \\ 2\pi & \text{si } 2d-k = n \Rightarrow d = \frac{k+n}{2} \end{cases}$$

Alors pour  $d = \frac{k+n}{2}$  on aura :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi [(p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^k] e^{-in\varphi} = p^{\frac{k+n}{2}} q^{\frac{k-n}{2}} \frac{k!}{\left(\frac{k+n}{2}\right)! \left(\frac{k-n}{2}\right)!} 2\pi \dots \text{(2.12)}.$$

Par comparaison entre (2.10) et (2.12) en déduit que :

$$p(x = n\Delta x, t = k\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi (pe^{i\varphi} + qe^{-i\varphi})^k e^{-in\varphi} \dots (2.13).$$

Pour une marche aléatoire symétrique (directions équiprobables) on aura  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Donc (2.13) devient dans ce cas :

$$p(x = n\Delta x, t = k\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \frac{1}{2^k} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^k e^{-in\varphi} \dots (2.14),$$

la probabilité établit dans (2.14) est valable pour certains positions multiple de  $\Delta x$  et certains fragments temporelle multiple de  $\tau$ , mais pour des positions différents de  $n\Delta x$  et des moments temporelle différents de  $k\tau$  on est besoin de déduire la limite continue de (2.14) pour obtenir la densité de probabilité  $w(x, t)$ , nous avons utilisé la notation  $w$  au lieu de  $p$  car comme on va voir ultérieurement qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité marginale :

$$w(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{p(n\Delta x, k\tau)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow w(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\left( \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \frac{1}{2^k} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^k e^{-in\varphi} \right)}{(\Delta x)} \right\} \dots (2.15),$$

- ❖ On a  $\frac{1}{2^k} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^k = \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^k = (\cos \varphi)^k = e^{k \ln(\cos \varphi)}$ .
- **Problème1** : les valeurs de  $\varphi$  pour lequel  $\cos\varphi$  est négative la fonction «  $\ln(\cos\varphi)$  » n'est pas défini.
  - ✓ **Solution** : on peut écrire  $e^{k \ln(\cos \varphi)}$  sous la forme  $e^{\frac{1}{2} \ln(\cos \varphi)^{2k}}$ ,  $(\cos \varphi)^{2k}$  est toujours positive.
- **Problème2** :  $\cos\varphi$  doit être non nulle pour que «  $\ln(\cos\varphi)$  » soit défini, donc  $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$  ce qui n'est pas le cas.
  - ✓ **Solution** : On fait le changement de variable :  $\varphi = \sqrt{\tau} \psi$ , en fait quand  $\tau \rightarrow 0$  le problème sera résolut.
- ❖ On met  $D = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau}$ .
- ❖ On a  $t = k\tau \Rightarrow k = \frac{t}{\tau}$  et  $x = n\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{x}{n}$ .

❖ Alors après avoir évalué les opérations précédentes, la relation (2.15) deviendras :

$$w(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{+\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} d\psi e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\psi} e^{\frac{t}{\tau} \ln(\cos \sqrt{\tau}\psi)},$$

Le développement do Taylor de  $\ln(\cos \sqrt{\tau}\psi)$  au deuxième ordre nos donne ( $\tau \approx 0$ ) :

$$\begin{aligned} \ln(\cos \sqrt{\tau}\psi) &\simeq \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \sqrt{\tau}\psi \underbrace{\frac{\sin(\sqrt{\tau}\psi)}{\cos(\sqrt{\tau}\psi)}}_{=0} \Big|_{\tau=0} - \frac{(\sqrt{\tau}\psi)^2}{2} \underbrace{\frac{1}{\cos^2(\sqrt{\tau}\psi)}}_{=1} \Big|_{\tau=0} + o(\tau^3) \\ &\simeq -\frac{\tau\psi^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\psi} e^{-\frac{t\psi^2}{2}},$$

On utilise la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}},$$

pour obtenir la densité de probabilité :

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \dots (2.16).$$

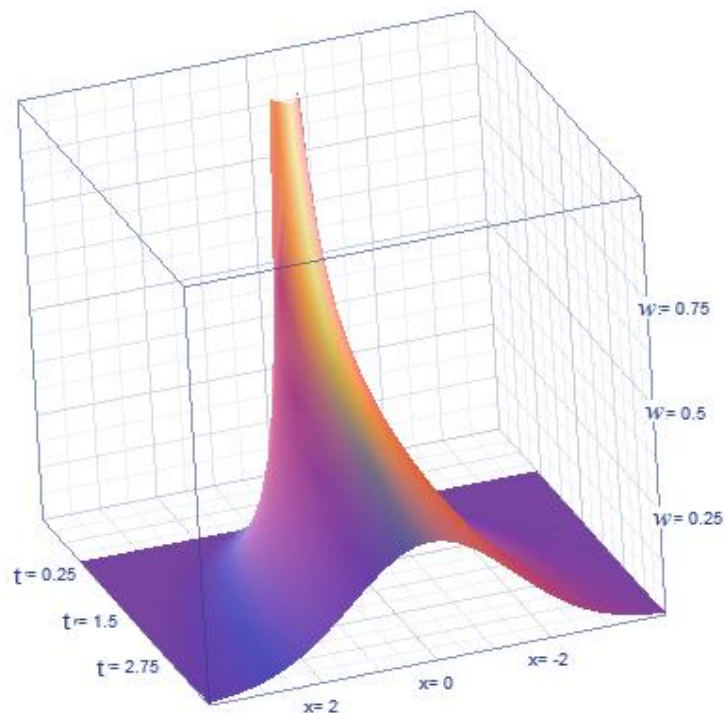


Figure 2. 2 la densité de probabilité w(x,t) (3D)

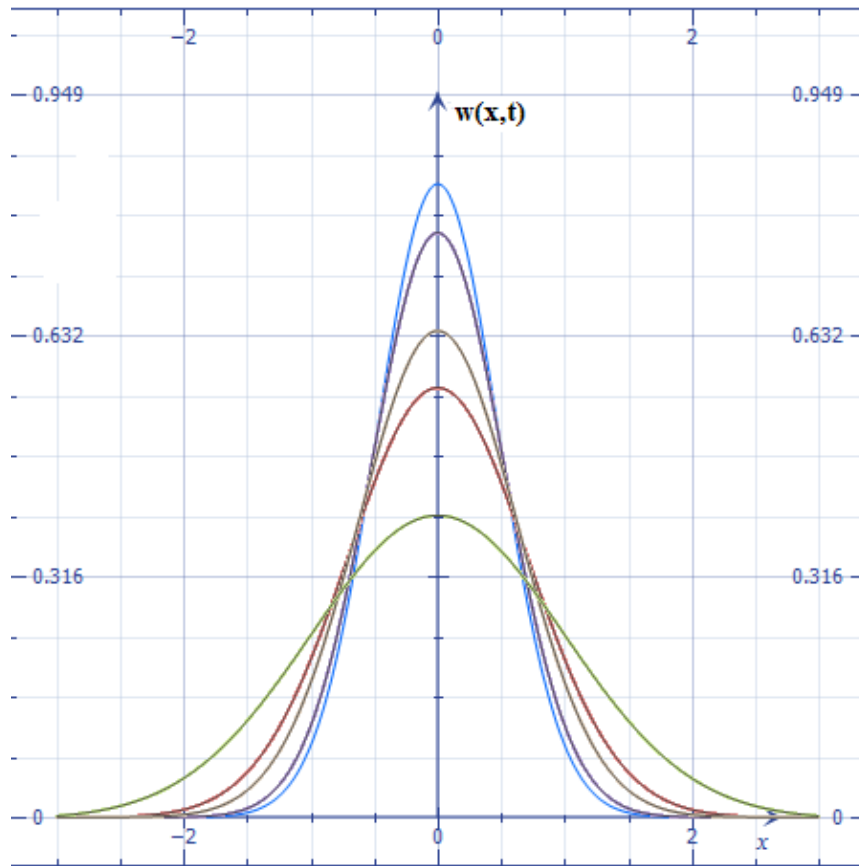


Figure 2.3 évolution de la forme de  $w(x,t)$  par rapport au temps

**Remarques et généralisation :**

1-  $w(x, t)$  vérifie les conditions mathématiques d'une densité de probabilité :

- $\forall(x, t) \quad w(x, t) \geq 0$  .
- $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \times \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4Dt}}} = 1$ .

2- La généralisation de la densité de probabilité  $w(x, t)$  avec les conditions initiales suivantes  $x_0 \neq 0$  et  $t_0 \neq 0$  s'obtient immédiatement grâce à l'homogénéité de l'espace et du temps :

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}$$

- La distribution  $w(x, t)$  est une densité gaussienne au l'espérance est  $x_0$ , ce qui traduit l'observation physique « La particule fluctue autour d'un point de départ ».
- La variance  $\sigma^2 = \frac{D\Delta t}{2}$ .
- En fait  $w(x, t)$  défini comme ça représente une densité de probabilité conditionnelle (probabilité de transition)  $W(x, t|x_0, t_0)$  pour laquelle une particule est à la position  $x$  à l'instant  $t$ , sachant quelle été à la position  $x_0$  à l'instant  $t_0$ .

Généralement la probabilité de transition pour laquelle une particule est à l'état  $(x_i, t_i)$  sachant quelle était à l'état  $(x_k, t_k)$  est :

$$W(x_i, t_i | x_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_k)}} e^{-\frac{(x_i - x_k)^2}{4D(t_i - t_k)}} \dots \quad (\mathbf{2.17}).$$

3- A la dimension  $d$ ,  $w(x, t)$  devient  $w(\vec{r}, t)$  où [4] :

- $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ .

- $\frac{\sqrt{4\pi D t}}{\dim=1} = (4\pi D t)^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{(4\pi D t)^{\frac{d}{2}}}{\dim=d}$ .

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\vec{r}|^2}{4Dt}} \dots \quad (\mathbf{2.18}).$$

### 2.4.3 Equation de diffusion

Pour obtenir l'équation de diffusion on revient sur la marche aléatoire étudié dans la section précédente, si on veut déterminer la densité de probabilité  $w(x, t)$  correspondant à une particule en position  $n\Delta x$  au temps  $(k+1)\tau$ , alors au temps précédent  $k\tau$  cette particule était soit en position  $(n-1)\Delta x$  (avec une probabilité de réalisation  $p$ ), soit en position  $(n+1)\Delta x$  (avec probabilité de réalisation  $q$ ), donc on peut écrire [4] :

$$w(n\Delta x, (k+1)\tau) = p w((n-1)\Delta x, k\tau) + q w((n+1)\Delta x, k\tau) \dots \quad (\mathbf{2.19}),$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = n\Delta x \\ t = k\tau \\ p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} w(x, t + \tau) &= \frac{1}{2} w(x - \Delta x, t) + \frac{1}{2} w(x + \Delta x, t) \\ \Rightarrow \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} &= \frac{\frac{1}{2} (w(x - \Delta x, t) + w(x + \Delta x, t)) - w(x, t)}{\tau} \\ \Rightarrow \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} &= \frac{\Delta x^2}{2\tau} \left( \frac{w(x + \Delta x, t) - 2w(x, t) + w(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

Cette relation a une forme d'une différence finie, donc pour obtenir l'équation différentielle correspondant il faut faire la limite continue où  $\tau \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} \right) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{w(x + \Delta x, t) - 2w(x, t) + w(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

Rappelons qu'on a posé  $D = \frac{\Delta x^2}{2\tau}$  lors de notre traitement de la marche aléatoire, ce qui nous donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \dots (2.20).$$

Généralement (dimension plus grand que 1) :

$$\frac{\partial w(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \Delta w(\vec{r}, t) \quad , \Delta \text{ est Laplacien.}$$

#### 2.4.4 Constante de diffusion

On va déduire la valeur numérique de la constante de diffusion suivant l'approche d'*Einstein* qui a considéré la suspension de plusieurs particules brownien immergés dans une solution diluées, la pression osmotique non-uniforme créée dans cette solution est donnée par l'équation de *morse (Van't Hoff)* :

$$p = iCRT,$$

$i$  est le facteur de *Van't Hoff* qui est égale à 1 pour la plus part des non-électrolytes,  $C$  est la molarité, tant que  $C = \frac{n}{N_A}$  ou  $n$  est la densité (concentration) particulaire et  $N_A$  est le nombre d'*Avogadro*, alors :

$$p = \frac{n}{N_A} RT,$$

*Einstein* a conclue que les particules on suspension sont soumise à une pression similaire, l'effet de cette force est exprimée par une force  $F_p$  où :

$$F_p = -\nabla p = -\frac{R}{N_A} T \nabla n \quad , \nabla \text{ est le gradient,}$$

puis il démontre que la somme des forces totale de collision  $F_T = nF$  est égale à la pression osmotique  $F_p$ , alors :

$$F_T + F_p = 0 \implies nF = \frac{R}{N_A} T \nabla n,$$

maintenant considérant l'équilibre de flux dans notre fluide, en se mouvant dans le fluide sous l'influence d'une force  $F$ , chaque particule en suspension subit une force de résistance visqueuse, ceci amène la particule à une vitesse limite  $v = \frac{F}{\mu}$  , où  $\mu$  est le coefficient de friction visqueuse de chaque particule en suspension.

Il en résulte alors un flux de particules donné par la relation :



$$\varphi_F = nv = \frac{nF}{\mu} = \frac{RT \nabla n}{N_A \mu},$$

d'un autre coté d'une point de vue diffusif, le flux pour les phénomènes diffusifs est donné par la loi de *Fick* :

$$\varphi_D = -D \nabla n,$$

a l'équilibre on aura :

$$\varphi_F + \varphi_D = 0 \Rightarrow \frac{RT \nabla n}{N_A \mu} = D \nabla n \Rightarrow D = \frac{RT}{N_A \mu} \dots (2.21),$$

enfin *Einstein* a supposé que les particules en suspension (mouvement brownien) sont toutes des sphères de rayon  $r$ , il en résulte par l'utilisation de la relation de *stokes* donnant le coefficient de friction  $\mu$  d'une sphère plongée dans un fluide (continue) de viscosité  $\eta$  :

$$\mu = 6\pi\eta r,$$

on remplace cela dans la relation (2.21) et on obtient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{RT}{N_A 6\pi\eta r} = \frac{k_b T}{6\pi\eta r} \\ [D] = \left[ \frac{k_b T}{6\pi\eta r} \right] = \frac{\frac{j}{K} \cdot K}{\frac{kg}{m \cdot s} \cdot m} = \frac{j \cdot s}{kg} = \frac{\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot s}{kg} = \frac{m^2}{s} \dots (2.22). \end{array} \right.$$

Où  $k_b$  est la constante de Boltzmann et  $[A]$  représente la dimension de la grandeur physique  $A$ . Cette relation à été établie simultanément par l'australien *William Sutherland*, est alors dite relation de *Sutherland-Einstein*, la relation a permit aux physiciens d'obtenir le rayon des différents particules.

La valeur de  $D$  est très petite, cela peut être rapidement constaté du fait que la valeur de  $\frac{R}{N_A}$  (constante de Boltzmann) est de l'ordre de  $10^{-23}$ , alors  $D \ll 1$ .

L'analyse dimensionnelle de  $D$  confirme le choix pris dans le développement du marche aléatoire  $D = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau}$ .

### 2.4.5 Equation de Smoluchowski

L'équation de diffusion obtenue par *Einstein* été pour une particule brownien libre, autrement dite qu'elle ne subit aucun autre forces a part celles des collisions avec les molécules du fluide, ce qui est généralement pas le cas, car au moins la particule brownien va être soumise à la force gravitationnelle ...etc.

Alors pour obtenir l'équation qui décrit le mouvement d'une particule brownien dans un champ de forces, Smoluchowski a eu l'idée d'interpréter (exprimé) l'effet de ces forces par une marche aléatoire asymétrique  $p \neq q$ .

Autrement dite que la symétrie  $p = q = \frac{1}{2}$  dans la marche aléatoire libre sera affectée par la présence d'une ou plusieurs autres forces extérieures, alors pour obtenir l'équation de diffusion qui exprime un champ de forces constant on pose  $p = \frac{1}{2} + \alpha\Delta x$ ,  $q = \frac{1}{2} - \alpha\Delta x$  avec  $\alpha$  une constante indépendante de la position, on remplaçant les nouveaux  $p$  et  $q$  dans la relation (2.19) :

$$w(n\Delta x, (k+1)\tau) = \left(\frac{1}{2} + \alpha\Delta x\right) w((n-1)\Delta x, k\tau) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\Delta x\right) w((n+1)\Delta x, k\tau)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = n\Delta x \\ t = k\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(x, t + \tau) = \frac{1}{2} [w(x - \Delta x, t) + w(x + \Delta x, t)] - \alpha\Delta x [w(x + \Delta x, t) - w(x - \Delta x, t)]$$

$$\Rightarrow \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} = \frac{\Delta x^2}{2\tau} \left( \frac{w(x + \Delta x, t) - 2w(x, t) + w(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \right)$$

$$- 2\alpha \frac{\Delta x^2}{2\tau} \left[ \frac{w(x + \Delta x, t) - w(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \right]$$

La limite continue ( $\tau \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$ ) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) - 2\alpha D \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \dots \text{(2.23)}.$$

Considérant maintenant un champ de force inhomogène, cela veut dire que l'effet des forces change avec la position (dépendant de la position), alors  $\alpha$  doit dépendre de la position  $\alpha \equiv \alpha(n\Delta x)$  donc  $p(n\Delta x) = \frac{1}{2} + \alpha(n\Delta x)\Delta x$  et  $q(n\Delta x) = \frac{1}{2} - \alpha(n\Delta x)\Delta x$ , dans ce cas pour obtenir l'équation de diffusion en suit les étapes prise pour un champ de forces constant qui nous donne la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) - 2D \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x)w(x, t)] \dots \text{(2.24)},$$

la quantité  $2D \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x)$  peut être interprété comme une force par un analyse dimensionnelle comme suit (suivant le système international d'unités MKSA) :

$$\begin{cases} [\alpha(x)] \equiv m \equiv \text{Longueur} \\ [D] \equiv \frac{m^2}{s} \text{ obtenue depuis (2.22)} \end{cases}$$

où  $[A]$  représente la dimension du grandeur physique  $A$ .

$D$  est une constante, si on veut appliquer la dérivée par rapport  $x$  sur  $D$  on doit négligée sa dépendance de la longueur pour ne pas affecté la valeur de  $D$ , donc  $\left[\frac{\partial}{\partial x} D\right] \equiv \frac{1}{s}$ , alors :

$$[2D\alpha(x)] \equiv \frac{m}{s},$$

on pose  $[\gamma] \equiv \frac{1}{s}$  alors :

$$[m\gamma D\alpha(x)] \equiv \frac{kg \cdot m}{s^2} \equiv [F(x)] \text{ une force, avec } [m] \equiv kg \equiv \text{la mass,}$$

Par cette analyse dimensionnelle on a put relier la dimension de  $2D \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x)$  à la dimension d'une force  $2D \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x) = \frac{1}{m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} F(x)$ , donc l'équation (2.24) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) - \frac{1}{m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} [F(x)w(x, t)],$$

cette équation est dite *équation de Smoluchowski*, établie par *Marian Smoluchowski* en 1906 pour décrire la distribution de probabilité d'une particule brownienne dans un milieu inhomogène,  $\gamma$  est justement une constante qui exprime une dimension inverse du temps et elle n'est pas une grandeur physique, cela nos laisse le chois libre de sa valeur  $\gamma = 1$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} [F(x)w(x, t)] \dots \text{(2.25)}.$$

### 2.4.6 Processus de Wiener

Le processus de Wiener est une description des mouvements aléatoires d'une particule immergée dans un fluide et qu'elle est soumise à des chocs (collisions) avec les molécules du fluide environnant (mouvement brownien), selon les résultats obtenu si dessus dans le cadre d'étude du mouvement brownien on peut citer les propriétés de ce processus :

- 1- Le processus de Wiener est gaussien : la densité de probabilité obtenue par la méthode de la marche aléatoire est une densité gaussienne donnée par la relation :

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}$$

L'espérance est  $x_0$  (exprime le fait que la particule virevolte autour du point de départ), la variance  $\sigma^2 = \frac{D(t-t_0)}{2}$  pour un choix de  $t_0 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{Dt}{2}$  et comme  $D \ll 1$ , alors  $\sigma^2 \ll t$ , cette propriété veut dire physiquement que la position varie très rapidement, la vitesse de la variation  $\frac{\sigma^2}{t}$  est alors pour un temps très petit

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{t} = \infty$  est infinie pour un temps infiniment petit, cela à fait que l'étude différentielle (dynamique) du mouvement brownien est impossible ( $\frac{dx}{dt} \rightarrow \infty$ ).

Il est facile de vérifie cette densité obier à l'équation de diffusion (2.20).

- 2- Le processus de Wiener est markovien : D'après les remarques de Gouy "La particule fluctuer autour d'un point de départ ". Cela veut dire que si on débutait l'observation d'une particule en mouvement brownien à un instant  $t_0$  correspondant à la position  $x_0$  celle la vas fluctuer autour de  $x_0$ , après  $\Delta t = t_0 + t'$ , un autre observant sur la même particule vas aperçue que la particule fluctué autour de  $x'$  correspondant à  $t'$ , on conclue alors que le processus est indépendant de l'histoire loin passé, ce qui est traduit par la propriété markovienne (c'est un processus à incréments indépendants). Mathématiquement si on considère un mouvement brownien débutant de  $(x_0, t_0)$  on a selon les relations (2.6) et (2.7) :

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | x_0, t_0) = \frac{w(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{w(x_0, t_0)},$$

$$w(x_0, t_0; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w(x_0, t_0) \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}),$$

$$\Rightarrow W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | x_0, t_0) = \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}),$$

$$W(x_n, t_n | x_0, t_0) = \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \dots \text{ (2.26)},$$

selon (2.17) :

$$W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}},$$

$$\Rightarrow W(x_n, t_n | x_0, t_0) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}} \dots \text{ (2.27)}.$$

- 3- La propriété markovienne nos permet toujours de choisir (assigné) les valeurs initiales, généralement il est convenant de choisir  $\{(x_0, t_0) = (0,0)\}$  (homogénéité du temps et de l'espace).

## 2.5 Processus interprété comme processus brownien (chaîne moléculaire aléatoire)

Certains problèmes dans la physique peuvent être interprétés comme des chemins browniens à cause de sa propriété markovien qui jouent le rôle des équations dynamique, par exemple on considère une chaîne moléculaire composé de  $N+1$  monomères, une extrémité de la chaîne étant fixée à l'origine, l'autre se trouvant au point  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  avec les suppositions suivantes :

- Deux monomères consécutifs sont à distance fixe  $a$ , et la position  $\mathbf{r}_j$  du  $j^{\text{ème}}$  monomère ne dépend que de celle du monomère précédent en  $\mathbf{r}_{j-1}$  (propriété markovien).
- Toutes les orientations d'un monomère relativement au précédent sont équiprobables (homogénéité), c'est-à-dire :

$$W(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_{j-1}) = W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}| - a) = \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}| - a) \dots (2.28).$$

Cela garantit la normalisation de  $W(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_{j-1})$  par rapport à  $\mathbf{r}_j$  sur la surface de la sphère de rayon  $a$  centrée en  $\mathbf{r}_{j-1}$ .

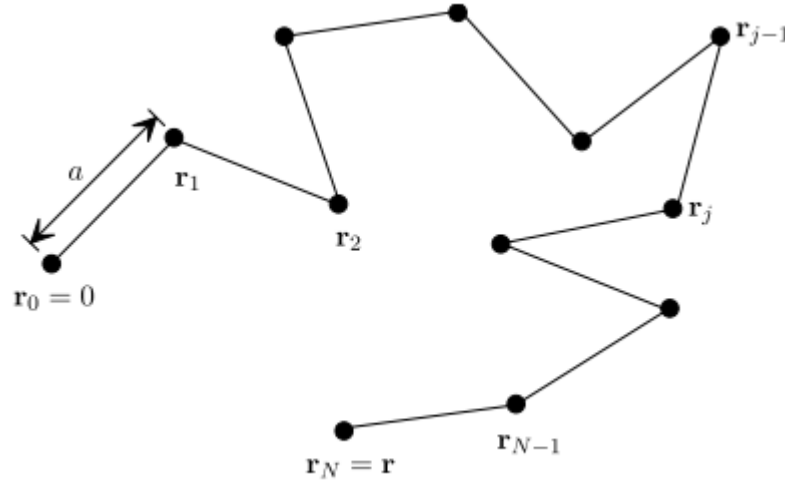


Figure 2.4 Polymère de  $N+1$  monomères

Le théorème de Bayes pour les distributions continue nous donne la relation suivante [2] :

$$w(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx W(y|x)w(x),$$

$$\Rightarrow w(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}_1 W(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)w(\mathbf{r}_1)$$

$$\Rightarrow w(\mathbf{r}_3) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}_2 W(\mathbf{r}_3|\mathbf{r}_2)w(\mathbf{r}_2) = \iint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 w(\mathbf{r}_1) W(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_3|\mathbf{r}_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}_{N-1} W(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{N-1}) w(\mathbf{r}_{N-1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{j=2}^N d^3 \mathbf{r}_{j-1} W(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_{j-1}) w(\mathbf{r}_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}_1 \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{r}_1| - a) \times \dots \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{N-1}| - a) \dots \quad (2.29), \end{aligned}$$

(2.29) est un produit de convolution multiple qui peut être factorisé par un transformé de Fourier.

Pour cela on considère le changement de variables qui permet de découpler les intégrales  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1$  &  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} = \mathbf{x}_j$ ,  $j = \overline{2, N}$  alors  $\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{x}_j$ ,  $i = \overline{1, N}$  il est facile de conclure que le jacobien pour cette transformation  $J = 1$ . Soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ , le transformée de Fourier  $\tilde{w}(\mathbf{k})$  de  $w(\mathbf{r})$  est :

$$\tilde{w}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} w(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

D'après (2.29)

$$\tilde{w}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}_1 \frac{\delta(|\mathbf{x}_1| - a)}{4\pi a^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_1} \times \dots \times \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}_N \frac{\delta(|\mathbf{x}_N| - a)}{4\pi a^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_N},$$

deux monomères consécutifs sont à distance fixe cela implique que  $\forall j = \overline{1, N} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}$ , donc :

$$\tilde{w}(\mathbf{k}) = \left( \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \frac{\delta(|\mathbf{x}| - a)}{4\pi a^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right)^N,$$

ce qui donne par un passage en coordonnées sphérique :

$$\tilde{w}(\mathbf{k}) = \left( \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty dR R^2 \delta(R - a) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-i|\mathbf{k}|R \cos(\theta)} \int_0^{2\pi} d\varphi \right)^N,$$

posant  $y = -\cos(\theta)$  alors :

$$\tilde{w}(\mathbf{k}) = \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy e^{-i|\mathbf{k}|ay} \right)^N = \left( \frac{\sin(|\mathbf{k}|a)}{|\mathbf{k}|a} \right)^N,$$

par un transformé de Fourier inverse on trouve que :

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \left( \frac{\sin(|\mathbf{k}|a)}{|\mathbf{k}|a} \right)^N e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \dots \quad (2.30).$$

Pour un nombre assez grand de monomères  $N \rightarrow \infty$  on remarque que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin(|\mathbf{k}|a)}{|\mathbf{k}|a} \right)^N = 0,$$

cela veut dire que la contribution dominante dans l'intégrale (2.30) provient du voisinage de  $|\mathbf{k}| = 0$ , ce qui permet le développement suivant :

$$\frac{\sin(|\mathbf{k}|a)}{|\mathbf{k}|a} = 1 - \frac{(|\mathbf{k}|a)^2}{6} + \Theta(|\mathbf{k}|^4) \dots \quad (2.31),$$

Négligeant le reste  $\Theta(|\mathbf{k}|^4)$ , et en insérant (2.31) dans (2.30), on obtient :

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \exp \left\{ N \ln \left( \frac{\sin(|\mathbf{k}|a)}{|\mathbf{k}|a} \right) \right\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \exp \left\{ N \ln \left( 1 - \frac{(|\mathbf{k}|a)^2}{6} \right) \right\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \end{aligned}$$

par approximation  $\ln(1+x) \sim x$  :

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \exp \left\{ -N \frac{(|\mathbf{k}|a)^2}{6} \right\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk \exp \left\{ -\frac{Na^2}{6} k^2 + ikr_i \right\},$$

on utilisant la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}} \dots \quad (2.32),$$

$$w(\mathbf{r}) = \left( \frac{3}{2\pi Na^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{3}{2Na^2} |\mathbf{r}|^2 \right\} \dots \quad (2.33).$$

Par comparaison avec (2.16) on en déduit que la constante de diffusion est  $D = \frac{a^2}{6}$  alors que le 'temps' est  $(t - t_0) = N$ , et la variance est  $\sigma^2 = \frac{Na^2}{3}$  qui traduit un comportement diffusif.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné la définition physique et mathématique d'un processus stochastique, puis après un exposé rapide de quelques processus (Gaussien, Markovien) nous avons entamé une étude bien détaillée sur le mouvement brownien, pour obtenir à la fin les caractéristiques d'un processus de Wiener.

Enfin nous avons donné un exemple sur le traitement des problèmes physique qui peuvent être interprétés comme un processus brownien, ce genre de problèmes est très courant en physique des solides et en physique statistique.

# **Chapitre 3**

## **Equations stochastique**





Dans le chapitre passé on a pu établir les résultats nécessaires pour décrire un système stochastique par la distribution jointe et l'équation de diffusion, depuis ce remarquable travail d'Einstein et Smoluchowski, la stochastique a connue plus d'attention dans la recherche dans la physique et dans les autres disciplines, ces recherches ont fait venir a des équations plus générale pour traité des problèmes de nature différent, la mère de ces équations est l'équation de Chapman-Kolmogorov, de plus on vas étudié l'équation de Langevin qui représente en effet une autre point de vus sur les mouvements stochastiques plus proche de celle de la mécanique newtonien.

### 3.1 Equation de Chapman-Kolmogorov

On va présenter l'équation de Chapman-Kolmogorov mathématique sous un autre forme plus convenant à la physique en utilisant la propriété de Markov, pour cela on considère un processus stochastique défini par la distribution jointe suivante  $w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$  et qui vérifie la propriété de Markov.

L'équation de Chapman-Kolmogorov permet de lier les distributions jointes d'un processus par la relation mathématique suivante [2] :

$$w(x_1, t_1; \dots; x_{i-1}, t_{i-1}; x_{i+1}, t_{i+1} \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n) dx_i \dots \quad (3.1).$$

On considère maintenant trois états de ce processus  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$  et  $(x_3, t_3)$  où  $(t_1 < t_2 < t_3)$  la propriété de Markov (2.7) implique que :

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = w(x_1, t_1) W(x_2, t_2 | x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_2, t_2) \dots \quad (3.2),$$

en intégrant (3.2) sur  $x_2$  on aura :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 w(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = w(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t_2 | x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_2, t_2),$$

On utilisant cette relation avec la relation de Chapman-Kolmogorov (3.1) pour obtenir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 w(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = w(x_1, t_1; x_3, t_3),$$

$$\Rightarrow w(x_1, t_1; x_3, t_3) = w(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t_2 | x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_2, t_2),$$

encore selon la propriété de Markov (2.7) on a :

$$w(x_1, t_1; x_3, t_3) = w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1) \dots \textbf{(3.3)},$$

$$\Rightarrow w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1) = w(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t_2 | x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_2, t_2),$$

En simplifiant les deux coté par  $w(x_1, t_1)$  et on obtient :

$$W(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3, t_3 | x_2, t_2) W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \dots \textbf{(3.4)}.$$

C'est l'équation de Chapman-Kolmogorov pour les probabilités de transition, aussi dite relation d'Einstein-Smoluchowski-Chapman-Kolmogorov (ESCK), cette équation s'interprète de façons intuitive comme suit : le processus initié en  $(x_1, t_1)$  atteint l'état  $(x_3, t_3)$  en passant par l'un quelconque des états en  $t_2$ , l'intégration sur  $x_2$  représente la somme sur toutes les positions  $x_2$  possibles au temps  $t_2$  pour atteindre  $x_3$  au temps  $t_3$ .

Pour retrouver la relation de bayes pour les variables continues en intègre simplement (3.3) sur  $x_1$ , on trouve bien :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1; x_3, t_3)}_{=w(x_3, t_3)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1),$$

$$\Rightarrow w(x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1).$$

Généralement :

$$w(x_j, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i w(x_i, t_i) W(x_j, t_j | x_i, t_i) \dots \textbf{(3.5)}.$$

### 3.1.1 L'évolution de l'espérance

On va étudier l'évolution de l'espérance (car l'absence de détermination dans la physique stochastique nous force de travailler statistiquement avec les valeurs moyennes) d'une fonction  $f(y)$  quelconque d'une variable aléatoire  $y$ , cette espérance pour un processus stochastique est caractérisé par la distribution  $w(y, t)$  est donné par la relation [2]:

$$\langle f(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) w(y, t) \dots (3.6).$$

Maintenant on considère l'évolution temporelle de cette espérance, ce qui veut dire le dérivé par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f(y) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) w(y, t) \right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) [w(y, t + \Delta t) - w(y, t)] \right\} \dots (3.7),$$

en utilisant la loi de bayes (3.5) :

$$w(y, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' w(y', t) W(y, t + \Delta t | y', t),$$

en remplaçons cela dans (3.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f(y) \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dy' w(y', t) W(y, t + \Delta t | y', t) - w(y, t) \right] \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' f(y) w(y', t) W(y, t + \Delta t | y', t) - \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) w(y, t) \right\}, \end{aligned}$$

on renomme nos variables  $y \rightarrow y'$  et  $y \rightarrow y'$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f(y) \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dy [f(y') W(y', t + \Delta t | y, t) - \delta(y - y') f(y')] w(y, t) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy w(y, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy' [f(y') W(y', t + \Delta t | y, t) - \delta(y - y') f(y')] \right\} \dots (3.8). \end{aligned}$$

On défini un opérateur  $A(t)$  comme suit :

$$A(t)f(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy [f(y) W(y, t + \Delta t | x, t) - f(x)] \right\} \dots (3.9).$$

Depuis (3.8) et (3.9) on conclue :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \langle Af \rangle \dots (3.10).$$

$A$  représente alors un opérateur linéaire qui décrit quand il agit sur une fonction  $f$  d'une variable aléatoire, le changement de l'espérance de cette fonction dans un temps infinitésimale selon le processus stochastique.

### 3.1.2 L'équation différentielle de Chapman-Kolmogorov

La relation (3.9) obtenue précédemment va nous permettre d'obtenir l'équation de Chapman-Kolmogorov sous une forme différentielle, pour cela en commence par Multipliant (3.9) par  $W(x, t|x', t')$  où  $t' < t$  et intégrant sur  $x$  :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx A(t)f(x)W(x, t|x', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy [f(y)W(y, t + \Delta t|x, t)W(x, t|x', t') - f(x)W(x, t|x', t')] \right\} \right] \end{aligned}$$

la relation de Chapman-Kolmogorov (3.4) implique que :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx W(y, t + \Delta t|x, t)W(x, t|x', t') = W(y, t + \Delta t|x', t'), \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} dx A(t)f(x)W(x, t|x', t') \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)W(y, t + \Delta t|x', t') - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)W(x, t|x', t') \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad y \rightarrow x \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} dx A(t)f(x)W(x, t|x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{W(x, t + \Delta t|x', t') - W(x, t|x', t')}{\Delta t} \right\}}_{\frac{\partial}{\partial t} W(x, t|x', t')} \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} dx A(t)f(x)W(x, t|x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} W(x, t|x', t') \dots \text{(3.11)}. \end{aligned}$$

D'un autre coté on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx A(t)f(x)W(x, t|x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)A^+(t)W(x, t|x', t') \dots \text{(3.12)}.$$

Où  $A^+(t)$  représente l'opérateur adjoint de  $A(t)$ , alors depuis (3.11) et (3.12) on conclue que :

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t|x', t') = A^+(t)W(x, t|x', t') \dots \text{(3.13)}.$$

(3.13) est dite équation différentielle de Chapman-Kolmogorov, la donnée de  $A^+(t)$  et la distribution initiale permet de complètement définir un processus markovien, pour des états discrets cette équation est connue physiquement sous le nom de *l'équation maitresse*.

### 3.1.3 Loi de semi-groupe et analogie avec l'équation de Schrödinger

Le forme des équations (3.10) et (3.13) ressemble a celle de l'équation de Schrödinger, cela à provoqué l'idée d'investir plus sur cette ressemblance et cherché une analogie entre l'équation différentielle de Chapman-Kolmogorov stochastique et l'équation de Schrödinger quantique, pour ca on doit établir une loi de groupe (où semi-groupe) dans une base défini comme suit.

On définit l'élément de matrice  $T_{ij}$  sur une base de l'ensemble des positions  $x_i$  come suit [4] :

$$T_{ij} = \langle x_j | T_\tau | x_i \rangle = W(x_j, t_j | x_i, t_i), \quad \tau = \Delta t = t_j - t_i \dots (3.14).$$

La matrice  $T_\tau$  représente alors un opérateur qui a comme éléments les probabilités de transitions dans le temps,  $T_\tau$  alors est équivalent à l'opérateur d'évolution du système stochastique.

Si le processus est caractérisé par  $n$  points  $T_\tau$  sera une  $n \times n$  matrice, dans le cas où  $i = j$  :

$$T_\tau = T_0 = \mathbb{I} \dots (3.15).$$

En posant  $\tau_1 = \Delta t_1 = t_2 - t_1$  et  $\tau_2 = \Delta t_2 = t_3 - t_2$ , l'équation de Chapman-Kolmogorov avec la notation suivi dans (3.14) s'écrit :

$$\langle x_3 | T_{\tau_1 + \tau_2} | x_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \langle x_3 | T_{\tau_2} | x_2 \rangle \langle x_2 | T_{\tau_1} | x_1 \rangle \Rightarrow T_{\tau_1 + \tau_2} = T_{\tau_1} * T_{\tau_2} \dots (3.16).$$

(3.15) et (3.16) défini une loi de semi-groupe pour l'opérateur  $T_\tau$  sur l'ensemble des positions  $x_i$ .

Maintenant on revient sur l'équation différentielle de Chapman-Kolmogorov (3.13) et l'écrire sous la nouvelle notation suivi précédemment :

$$\forall(x, x') : \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | T_\tau | x' \rangle = A^+(\tau) \langle x | T_\tau | x' \rangle \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau = A^+ T_\tau \dots (3.17).$$

L'équation (3.17) est analogue avec l'équation quantique de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} U_t = H U_t \dots (3.18).$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\tau \equiv U_t \text{ opérateur d'évolution d'un système quantique} \\ A^+ \equiv \frac{H}{i\hbar}, H \text{ est l'hamiltonien du système} \end{array} \right.$$

L'opérateur d'évolution d'un système quantique satisfait aussi la propriété de group par rapport à l'addition des temps positifs plus les négatifs, donc la différence entre le formalisme quantique et celui des processus stochastique est :

- $T_t$  régit l'évolution *irréversible* de la *probabilité de transition*.
- $U_t$  régit l'évolution *réversible* de l'*amplitude de probabilité*.

## 3.2 Equation de Fokker-Planck

L'équation de Fokker-Planck est la plus connue (utilisée) dans la physique (et autres disciplines) à cause sa forme convenant, mais on fait elle est qu'une dérivé de l'équation de Chapman-Kolmogorov pour les processus gaussien diffusifs avec la propriété de Markov, on va ici montré comment établir cette équation, pour cela bien sure on va considéré un processus markovien, gaussien, diffusif et homogène, cela nos permet de choisir la valeur de l'état initial ( $x_0, t_0 = 0$ ), on considère de plus deux autres états ( $x_1, t_1 = t$ ) et ( $x_2, t_2 = t + \Delta t$ ) l'équation de Chapman-Kolmogorov (3.4) donne alors :

$$W(x_2, t + \Delta t | x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) W(x_1, t | x_0, 0) \dots \quad (3.19),$$

multipliant (3.19) par une fonction différentiable quelconque  $f(x_2)$  puis intégrant sur  $x_2$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_0, 0) f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) W(x_1, t | x_0, 0) f(x_2),$$

la variable d'intégration du membre gauche de l'équation précédente étant muette, on peut alors renommer nôtres variables  $x_2 \rightarrow x_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t + \Delta t | x_0, 0) f(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) W(x_1, t | x_0, 0) f(x_2) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t + \Delta t | x_0, 0) f(x_1) & \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t | x_0, 0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) f(x_2) \dots \quad (3.20), \end{aligned}$$

pour  $\Delta t$  infinitésimal plus la propriété gaussien et diffusif du processus on aura :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) = \delta(x_2 - x_1) \dots \text{(3.21)},$$

la relation de (3.21) implique que seulement les valeurs de  $x_2$  proches de  $x_1$  contribuant à l'intégrale dans (3.20), On peut alors faire un développement limité de  $f(x_2)$  en  $x_2 \sim x_1$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t + \Delta t | x_0, 0) f(x_1) &\stackrel{\Delta t \sim 0}{\simeq} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t | x_0, 0) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) \\ &\times \left\{ f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} f''(x_1) + \underbrace{\Theta[(x_2 - x_1)^3]}_{\approx 0} \right\} \dots \text{(3.22)}, \end{aligned}$$

on note que  $W(x_2, t + \Delta t | x_1, t)$  veut dire que la position  $x_1$  est déjà occupé alors on peut fixer cette valeurs pour les intégrales suivants :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) f(x_1) = f(x_1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t)}_{=1} = f(x_1) \dots \text{(3.23)}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) (x_2 - x_1) f'(x_1) &= f'(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) (x_2 - x_1) \\ &= f'(x_1) a(x_1) \Delta t \dots \text{(3.24)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} f''(x_1) &= f''(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_2, t + \Delta t | x_1, t) \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} f''(x_1) b(x_1) \Delta t \dots \text{(3.25)}. \end{aligned}$$

Remplaçant les résultats obtenus à (3.23), (3.24) et (3.25) dans (3.22) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t + \Delta t | x_0, 0) f(x_1) &\stackrel{\Delta t \sim 0}{\simeq} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t | x_0, 0) \left( f(x_1) + f'(x_1) a(x_1) \Delta t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f''(x_1) b(x_1) \Delta t \right) \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \underbrace{\left[ \frac{W(x_1, t + \Delta t | x_0, 0) - W(x_1, t | x_0, 0)}{\Delta t} \right]}_{\frac{\partial}{\partial t} W(x_1, t | x_0, 0)} f(x_1) \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t | x_0, 0) \left( f'(x_1) a(x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1) b(x_1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1) \frac{\partial}{\partial t} W(x_1, t|x_0, 0) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W(x_1, t|x_0, 0) \left( f'(x_1) a(x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1) b(x_1) \right) \dots \text{(3.26)}, \end{aligned}$$

intégrant par partie le membre droit de (3.26) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1) \frac{\partial}{\partial t} W(x_1, t|x_0, 0) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1) \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} [a(x_1) W(x_1, t|x_0, 0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [b(x_1) W(x_1, t|x_0, 0)] \right) \end{aligned}$$

La variable  $x_1$  a été un chois libre alors on peut noter  $x_1 \rightarrow x$ , et de même pour la fonction  $f(x_1)$ , donc la relation précédente est valable pour toute fonction  $f(x)$  ce qui nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t|x_0, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x) W(x, t|x_0, 0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x) W(x, t|x_0, 0)] \dots \text{(3.27)}.$$

C'est l'équation de Fokker-Planck pour les distributions conditionnelles.

La relation (3.5) nous donne :

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) W(x, t|x_0, 0) \dots \text{(3.28)},$$

dérivons (3.28) par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) W(x, t|x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) \frac{\partial}{\partial t} W(x, t|x_0, 0),$$

en utilisant (3.27) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [a(x) W(x, t|x_0, 0)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x) W(x, t|x_0, 0)] \right\} \dots \text{(3.29)}, \end{aligned}$$

dérivons (3.28) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) W(x, t|x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) \frac{\partial}{\partial x} W(x, t|x_0, 0)$$



$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [a(x)w(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) \frac{\partial}{\partial x} [a(x)W(x, t|x_0, 0)] \dots \text{(3.30)},$$

Dérivons (3.28) deux fois par rapport à  $x$ , puis par développement similaire on trouve que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)w(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0, 0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)W(x, t|x_0, 0)] \dots \text{(3.31)},$$

ils en résultent depuis (3.29), (3.30) et (3.31) que :

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)w(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)w(x, t)] \dots \text{(3.32)}.$$

C'est l'équation de Fokker-Planck pour les densités de distribution, cette relation est une généralisation de l'équation de Smoluchowski obtenue au paravent (2.25).

### 3.3 Equation de Langevin

La théorie stochastique n'est pas dynamique car il n'y a pas de notion de vitesse et par conséquent l'accélération, car les trajectoires stochastiques sont non-différentiables qui traduit le fait que les positions changent trop vite dans un temps infinitésimal. Mais cela ne veut pas dire que cette notion de vitesse n'existe pas en réalité.

L'idée de Langevin était de développer un traitement dynamique pour les phénomènes stochastiques, cette idée est basée sur le fait que les équations de la mécanique restent valables *en moyenne*, et l'effet stochastique est exprimé par l'ajout d'une force aléatoire qui présente le champ des forces stochastique plus une force dynamique, en générale l'équation de Langevin s'écrit :

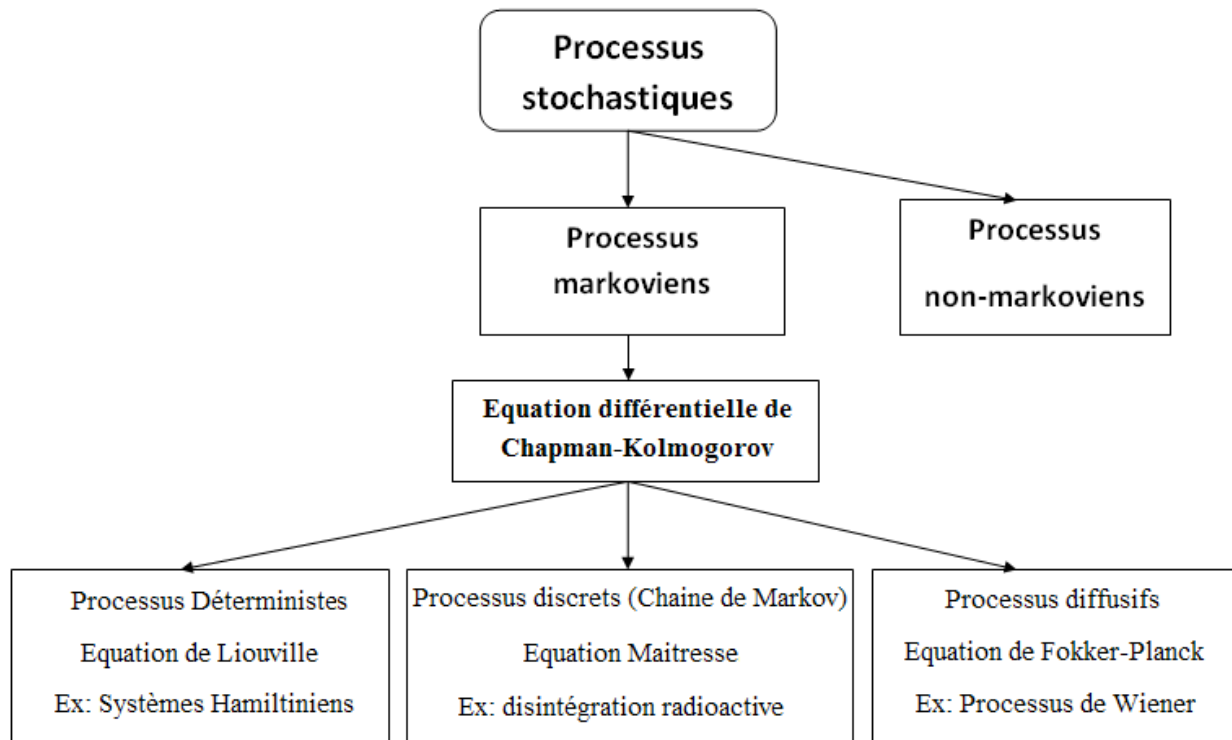
$$m \frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = f_D + f_S \dots \text{(3.33)}.$$

Où  $\left\{ \begin{array}{l} m \equiv \text{la masse de la particule brownien.} \\ f_D \equiv \text{la force du champ dynamique} \\ f_S \equiv \text{la force aléatoire du champ stochastique} \end{array} \right.$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu retrouver les équations de la physique stochastique à partir de l'équation mathématique bien connue de Chapman-Kolmogorov, on a également obtenu l'équation très importante de Chapman-Kolmogorov pour les processus markoviens sous forme intégrale et différentielle, cette dernière est analogue à l'équation de Schrödinger, nous avons aussi montré comment trouver l'équation bien connue de Fokker-Planck qui est une généralisation de l'équation de diffusion d'Einstein et de Smoluchowski, obtenues dans le chapitre précédent.

Enfin on a présenté l'équation de Langevin qui exprime une approche newtonienne de la physique stochastique, cette approche va jouer un rôle très important dans notre travail présenté au dernier chapitre.



**Partie II**  
**Intégrale de chemin**

**Chapitre 4**  
**Intégrale de chemin de Wiener**

L'intégrale de chemin a été introduite par le professeur Norbert Wiener dans les années 1920 pour résoudre les problèmes de la théorie de diffusion et du mouvement brownien, puis des autres mathématiciens R.H.Cameron et W.T.Martin ont présenté des méthodes pour calculer certaines fonctionnelles à l'aide d'une transformation d'espace [8,9,10] ces articles ont démontré la connexion importante entre l'analyse mathématique classique et l'analyse fonctionnelle, à la même période Shizuo Kakutani a publié un article sur la relation entre l'intégrale de chemin et la théorie du potentiel, Après en 1948 R.P.Feynman [11] a reformulé l'intégrale de chemin pour la mécanique quantique produisant la troisième formulation pour la mécanique quantique après celle de Schrödinger et Heisenberg, et juste après en 1949 Mark Kac [12,13] a pu utiliser l'intégrale de chemin technique pour résoudre des équations aux dérivées partielles connue sous le nom de « formule de Feynman-Kac » .

Tous ces progrès ont permis aux débuts des années 1950 l'introduction de l'intégrale de chemin pour étudier les solutions des équations fonctionnelles dans le domaine de la théorie quantique des champs.

Depuis elle trouve un très grand nombre d'applications en physique théorique (théorie quantique des champs, Champs de jauge, physique statistique, transition de phase, ... etc.)

## 4.1 Intégrale de Wiener

Wiener a voulu de construire un modèle analytique pour traiter les problèmes des mouvements brownien, partons du résultat obtenu dans les chapitres précédents on va reconstruire l'approche suivie par Wiener et obtenir la formule élémentaire de l'intégrale de chemin de Wiener, qui est considéré comme l'ancêtre de l'intégrale de chemin de Feynman bien que le dernier n'a pas été basé sur lui, d'abord on fait un rappel aux résultats concernant le processus de Wiener :

- $w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \dots$  (4.1).

La densité de probabilité d'avoir la particule brownienne à la position  $x$  au moment  $t$ .

- $W(x_i, t_i | x_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_k)}} e^{-\frac{(x_i - x_k)^2}{4D(t_i - t_k)}} \dots$  (4.2).

la probabilité conditionnelle pour laquelle la particule est à la position  $x_i$  au moment  $t_i$  sachant qu'elle était à la position  $x_k$  au moment  $t_k$ .

- $w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 W(x, t | x_0, t_0) w(x_0, t_0) \dots$  (4.3).

Où  $(x_0, t_0)$  représente l'état initial.

La construction d'un processus stochastique se fait par suivre l'évolution temporelle du system, dans notre cas (mouvement brownien) de trouver la probabilité pour qu'une particule quelconque démarre d'un point  $x_0 = 0, t_0 = 0$  (on a vu que le mouvement brownien a la propriété markovienne, donc il est possible d'assigner des valeurs initiales  $x_0$  et  $t_0$  nulle ou début de notre étude du processus car le processus n'a pas de mémoire) vers un point quelconque  $(x_n, t_n)$

**Note :** pour simplifier nous allons utiliser dans les figures suivantes des trajectoires différentiables, mais il faut rappeler que les trajectoires du mouvement brownien ne le sont pas.

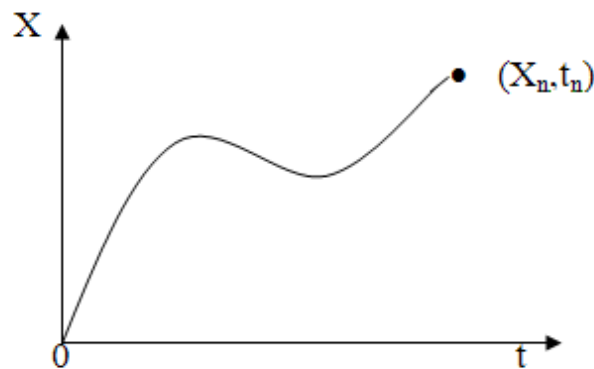


Figure 4.1 Trajectoire d'un processus de Wiener

Cette trajectoire qu'elle sera noté  $\mathcal{T}(0, 0 ; x_n, t_n)$  passera par d'autres points avant d'arriver au point final, Alors chaque trajectoire peut être décomposée en plusieurs points  $(x_i, t_i)$  avec  $i = \overline{0, n}$ , cette décomposition faite sur l'axe du temps permet de suivre l'évolution temporelle de notre particule et donne un ensemble des probabilités de transition entre chaque point de notre trajectoire dans l'espace  $W(x_i, t_i | x_j, t_j)$ , ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{0, n-1}; i \neq j$ ). Cette chaîne n'offre pas une vraie liaison entre les différents points de la trajectoire étudiée et quand  $n$  est assez grand l'écriture de toutes les probabilités conditionnelles de transition n'est pas pratique.

Pour cela Wiener a eu l'idée [8,14] de remplacer la position  $x$  par un intervalle  $[A, B]$  dans ce cas où la particule va de  $(0,0)$  passant par l'intervalle  $x \in [A, B]$  nommé un portail AB, on peut calculer la probabilité  $P_{AB}$  :

$$P_{AB} = \int_A^B W(x, t | 0, 0) dx \dots (4.4).$$

L'établissement de cette probabilité en fonction de la probabilité conditionnelle de transition nous permet d'exprimer notre trajectoire d'une façon différente en suivant les mêmes procédures

établit si dessus par juste le remplacement de la probabilité conditionnelle de transition par la probabilité équivalente.

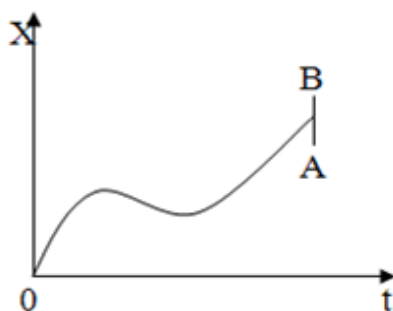


Figure 4.2 Trajectoire défini par un intervalle [A,B]

Alors pour établir le processus de Wiener (étudier l'évolution temporelle du processus) on doit décomposer l'intervalle du temps  $[0, t]$  d'une façon homogène qui donnera des instants  $t_1, t_2, \dots, t_n$  correspondons aux portails  $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n$  au lieu des points  $x_i$  avec  $(t_i - t_{i-1} = \Delta t, \forall i = \overline{1, n})$ .

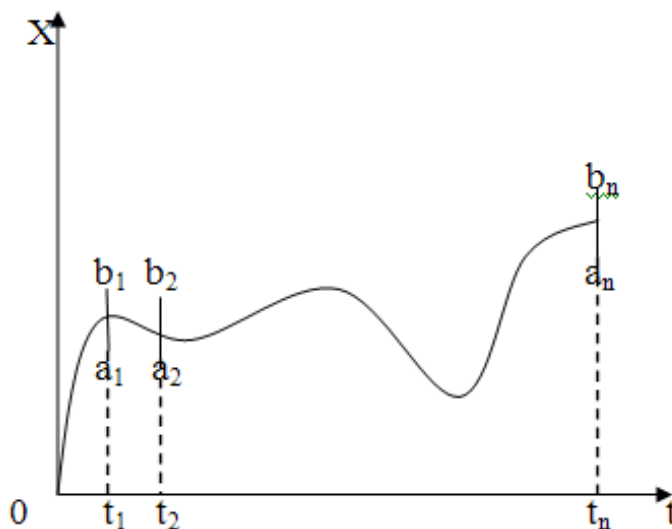


Figure 4.3 Trajectoire défini par des portails

De cette façons on peut obtenir la probabilité pour laquelle le processus suit certain « trajectoire »  $\mathcal{T}(0, 0 ; x_n, t_n)$  déterminé par les portails  $[a_i, b_i]$ .

Alors  $P_{\mathcal{T}(0,0 ; x_n, t_n)} = P_{a_1b_1} \cap P_{a_2b_2} \cap \dots \cap P_{a_nb_n} = \prod_{i=1}^n P_{a_ib_i}$  car les probabilités  $P_{a_ib_i}$  sont indépendants.

On utilise la relation (4.4)

$$P_{a_ib_i} = \int_{a_i}^{b_i} W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i,$$

$$P_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)} = \prod_{i=1}^n P_{a_i b_i} = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i,$$

$$P_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)} = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i \dots (4.5).$$

Ce produit d'intégrales suivant la trajectoire (chemin)  $\mathcal{T}(0, 0; x_n, t_n)$  est dite *intégrale de chemin de Wiener* [15] qui permet de calculer les différentes grandeurs physiques statistiques qui caractérisent le processus stochastique de Wiener.

## 4.2 Mesure de Wiener

Pour calculer l'intégrale de chemin obtenue précédemment Wiener a vu la nécessité de construire un espace mesurable, cela sera fait par la définition d'une mesure élémentaire dans l'ensemble des chemins stochastiques. On considère alors la probabilité pour qu'une particule suive une certaine trajectoire déterminée par les portails  $[a_i, b_i]$   $\mathcal{T}(0, 0; x_n, t_n)$  dans un processus de Wiener obtenu dans (4.5) :

$$P_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)} = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i,$$

$$= \int_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)} \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i,$$

$\int_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)}$  Symbolise l'intégration sur la trajectoire  $\mathcal{T}(0, 0; x_n, t_n)$  caractérisée par les portails  $[a_i, b_i]$   $i = \overline{1, n}$ .

➤ Calculons le produit des probabilités de transition :  $\prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i$

$$\begin{cases} W(x_1, t_1 | 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{4Dt_1}} & \text{Pour } i=1 \\ W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}} & \text{Pour } i \geq 2 \end{cases}$$

donc

$$\prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t_1}} e^{-\frac{x_1^2}{4Dt_1}} dx_1 \times \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}} dx_i,$$

la décomposition de l'axe du temps a été homogène cela veut dire que :

$$\forall i = \overline{1, n} (t_i - t_{i-1}) = \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{t_n}{n},$$



alors

$$\prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4D\pi\Delta t}} e^{-\frac{1}{4D}\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 \Delta t} dx_i,$$

$$\prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = \exp\left\{-\frac{1}{4D} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 \Delta t\right\} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\Delta t}}$$

pour  $n$  assez grand  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta t \rightarrow 0$  :

- L'intervalle temporelle  $\Delta t$  sera un élément différentielle du temps  $d\tau$  et la sommation sur  $i$  peut être exprimée par un intégral sur le temps car l'indexation par  $i$  représente on fait l'évolution temporelle du system est implicitement incluse dans  $d\tau$ , de même pour le produit.
- $\Delta t \rightarrow d\tau$  ( $t$  est utilisé come borne d'intégration donc on choisi un variable  $\tau$  pour représentent l'élément du temps au lieu de  $dt$ ).
- $\sum_{i=0}^n(\dots) \rightarrow \int_{\tau=0}^t(\dots)$ .
- $\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right) \rightarrow \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \dot{x}(\tau)$  alors  $\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 = \dot{x}^2(\tau)$  cette notation est symbolique car les trajectoires d'un mouvement brownien ne sont pas différentiable et donc cette notation exprime une variation de position par rapport au temps, pas une différentiation.
- $\prod_{i=1}^n(\dots) \rightarrow \prod_{\tau=0}^t(\dots)$ .
- $dx_i = dx(\tau)$ .

En résultant que :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left( \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i \right) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \exp\left\{-\frac{1}{4D} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 \Delta t\right\} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\Delta t}}$$

$$\equiv \exp\left\{-\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau \dot{x}^2(\tau)\right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}} \dots \text{(4.6)}.$$

La quantité  $\exp\left\{-\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau \dot{x}^2(\tau)\right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}}$  est dite *Mesure de Wiener* développé par le mathématicien N. Wiener [15] et noté  $d_w x(\tau)$  elle représente une mesure mathématique sur l'espace fonctionnel (espace de Wiener) qui est une collection de fonctions (trajectoires) continue (mais non-différentiable) dans un demain définie (le travail original de Wiener été fait pour des intervalles unitaire  $[0,1]$ , une généralisation a été réalisé par Leonard Gross a un espace séparable de Banach[16]) en prenant des valeurs dans espace métrique ( généralement un espace Euclidien n-dimensionnel) ; dans le quelle on calcule l'intégrale de chemin de

Wiener, cette mesure est on fait que l'équivalente de la probabilité pour laquelle la particule brownien se déplace dans un tube infiniment mince.

### 4.2.1 Intégrale de chemin sur la mesure de Wiener :

Le processus de Wiener est caractérisé par son point initial  $(x_0, t_0)$  et son point final  $(x, t)$ , la donné de ces deux points ne suffit pas a définir une trajectoire  $\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x, t)$  d'une façon unique, on fait on aura un nombre infini de trajectoires caractérisé comme ça, donc l'intégration sur la mesure de Wiener selon  $\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x, t)$  est une valeur statistique représentant tous les cas (trajectoires) possibles et quelle est on fait que la probabilité de transition de  $(x_0, t_0) \rightarrow (x, t)$ .

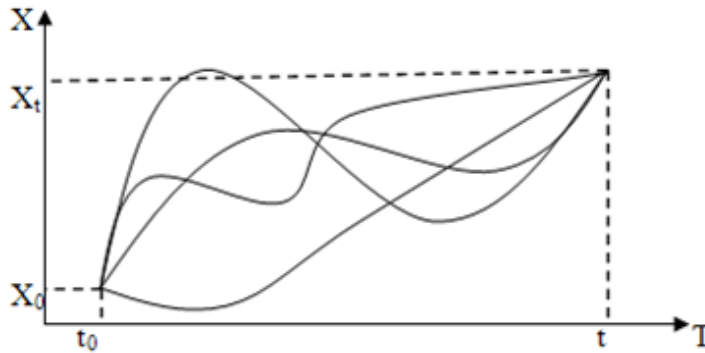


Figure 4.4 Différents trajectoires qui caractérisent la mesure de Wiener  $d_w X\{X_0(t_0), X_t(t)\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x, t)} d_w x(\tau) &= \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x, t)} \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=t_0}^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \prod_{\tau=t_0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)} \right\} = W(x, t|x_0, t_0) \dots (4.7). \end{aligned}$$

Ce genre des trajectoires  $\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x, t)$  qui représente une mesure avec une point finale fixé est dite *mesure conditionnel* [17].

Pour les trajectoires avec un intervalle comme position finale  $\mathcal{T}(x_0, t_0 ; [A, B], t)$ , l'intégration de la mesure de Wiener est la sommation (intégrale) sur l'intervalle  $[A, B]$  de tous les intégrales de chemin correspondons aux points  $x_t$  de ce intervalle, et selon la relation (4.4) est égale a la probabilité  $P\{x(t) \in [A, B]\}$  :

$$P\{x(t) \in [A, B]\} = \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0 ; [A, B], t)} d_w x(\tau) = \int_A^B dx_t \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0 ; x_t, t)} d_w x(\tau)$$

$$= \int_A^B dx_t \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x_t - x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right\} \dots \quad (\mathbf{4.8}).$$

Alors dans le cas ou le point final n'est pas fixé qui veut dire que la particule peut prendre n'importe quelle valeur entre de l'intervalle]  $-\infty, +\infty$ [, On dit qu'on a une *mesure inconditionnel (mesure absolue ou mesure totale)* [17], ces trajectoires sont noté  $\mathcal{T}(x_0, t_0; t)$  et ils représente on fait la probabilité  $P\{x(t) \in ]-\infty, +\infty[\}$ , d'une point de vue purement probabiliste, la probabilité  $P\{x(t) \in ]-\infty, +\infty[\}$  pour laquelle une particule ira d'une point  $(x_0, t_0)$  a n'importe quelle position dans l'espace à l'instant  $t$  est égale à la probabilité totale 1 (c'est une événement sure de trouvé la particule quelque part  $(-\infty, +\infty)$  à l'instant  $t$ ) :

$$\int_{\mathcal{T}(x_0, t_0; t)} d_w x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_t \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0; x_t, t)} d_w x(\tau) = 1 \dots \quad (\mathbf{4.9}).$$

### 4.2.2 La relation d'Einstein-Smoluchowski-Kolmogorov-Chapman ESKC :

On va rétablir l'équation de Chapman-Kolmogorov suivant une autre approche puis déduire l'équivalent par les intégrales de Wiener, pour cela Considérant les distributions de probabilité à trois instants  $t_1, t_2$  et  $t_3$

$$w(x_1, t_1) \quad w(x_2, t_2) \quad w(x_3, t_3) \quad \text{avec } t_1 < t_2 < t_3$$

La distribution  $w(x_2, t_2)$  représente un événement initial pour  $w(x_3, t_3)$ , de même  $w(x_1, t_1)$  pour les deux autres, cela nos donne par l'utilisation du théorème de Bayes pour les lois continues les relations suivantes [2] :

$$w(x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 w(x_2, t_2) W(x_3, t_3 | x_2, t_2),$$

$$w(x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1),$$

$$w(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_2, t_2 | x_1, t_1),$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3, t_3 | x_2, t_2) w(x_2, t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3, t_3 | x_2, t_2) \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_2, t_2 | x_1, t_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) W(x_3, t_3 | x_1, t_1) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 w(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3, t_3 | x_2, t_2) W(x_2, t_2 | x_1, t_1), \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$W(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 W(x_3, t_3 | x_2, t_2) W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \dots \text{(4.10)}.$$

Cette équation est dite aussi La relation d'Einstein-Smoluchowski-Kolmogorov-Chapman ou ESKC relation obtenu précédemment dans (3.4).

Prenant on compte les relations (4.7) et (4.10) on peut obtenir la relation ESKC pour l'intégrale de chemin de Wiener [17]

$$\int_{\mathcal{T}(x_1, t_1; x_3, t_3)} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{\mathcal{T}(x_1, t_1; x_2, t_2)} d_w x \int_{\mathcal{T}(x_2, t_2; x_3, t_3)} d_w x \dots \text{(4.11)}.$$

### 4.3 Introduction d'une fonctionnelle

Contrairement aux systèmes dynamiques les systèmes stochastiques sont basé sur le calcul des espérances des grandeurs physiques ou des fonctions de ces grandeurs, pour établir autre informations sur le system étudié comme la relation entre deux différents grandeurs on calcule la corrélation, covariance, écart type...etc.

L'espérance pour une fonction  $f(x)$  d'une variable aléatoire  $x$  menu d'une distribution de probabilité  $w(x, t)$  est défini comme suit :

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x, t) dx.$$

Pour un mouvement brownien défini par un processus de Wiener l'espérance de  $f(x)$  est [2] :

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\mathcal{T}(\dots)} f(x) d_w x(\tau) \dots \text{(4.12)}.$$

$f(x)$  peut être une fonction de plusieurs variables qui désigne plusieurs grandeur physique c'est pour cela on utilise le terme *fonctionnelle*  $f(x)$  au lieu de fonction aussi l'intégration est faite sur un espace de fonctions.

## 4.4 Conclusion

Wiener a représenté les résultats du mouvement brownien sous forme d'intégrale, cette transition d'un ensemble d'événements  $\Omega$  vers un espace ponctuel  $S$  est généralement faite par la construction d'une mesure  $\mu$  dans cet espace, les similarités entre une mesure et une probabilité sont résumées dans le tableau suivant (pour une description plus rigoureuse et complète sur la 'théorie de la mesure' consultez les références [18][19]) :

Probabilité	Mesure
<p>La probabilité <math>P(A_i)</math> est définie sur une classe d'évènements <math>A_i</math>. C'est une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :</p> <p>1- <math>\forall i : P(A_i) \geq 0</math>.</p> <p>2- Pour chaque série d'évènements mutuellement indépendants <math>A_1, A_2, \dots</math></p> $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ <p>3- <math>P(A) = 1, A \equiv</math> l'évènement certain</p> $A = \cup_j A_j \text{ pour tous les } A_j \text{ distincts.}$	<p>La mesure <math>\mu(S_i)</math> est définie sur une classe d'ensemble de points <math>S_i</math>. C'est une fonction qui vérifie les propriétés suivantes :</p> <p>1- <math>\forall i : \mu(S_i) \geq 0</math>.</p> <p>2- Pour chaque groupe de points mutuellement disjoints <math>S_1, S_2, \dots</math></p> $\mu(S_1 \cup S_2 \cup \dots) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \dots$ <p>3- la classe des mesures normalisées vérifie</p> $\mu(S) = 1, S \equiv$ l'ensemble total $S = \cup_j S_j \text{ pour tous les } S_j \text{ distincts.}$

Cette représentation pratique, offre des outils (méthodes) de calculs plus faciles, de plus la théorie de la mesure ne fait pas de distinctions entre variables continues, discrètes ou une mixture entre les deux [20] ce qui est très convenant.

## **Chapitre 5**

### **Méthodes de calcul des intégrales de chemin**

L'intégration dans l'espace de Wiener a ces propres règles qui ne défont pas trop de celles des intégrales dans un espace fonctionnelle multi-variables, ces méthodes de calculs varient selon les fonctionnelles autrement dit c'est la nature de fonctionnelle qui nous implique d'utiliser une méthode ou une autre, bien qu'une classe de fonctionnelles peut des fois être traitée par toutes les méthodes avec différence de difficulté, pour certaines fonctionnelles il est indispensable d'utiliser des méthodes approximatives ou numériques, mais on va se restreindre ici à des calculs exacts seulement.

Le tableau suivant résume les méthodes les plus utilisées :

<b>Calculs exact</b>	Discrétisation du temps
	Réduction par la relation ESKC
	Changement de variables
<b>Calculs approximative</b>	Semi-classique WKB méthode
	Théorie de perturbation
	Méthode variationnelle de Feynman
<b>Calcul numérique</b>	Simulations sur ordinateur

**Tableau 5.1 Méthodes de calcul des intégrales de chemin**

## 5.1 Discrétisation du temps

Cette méthode est basée sur la décomposition de l'axe du temps faite au paravent qui nous a donné comme résultat la relation (4.5)

$$P_{\mathcal{T}(0,0; x_n, t_n)} = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i,$$

- 1- On va étendre les portails  $a_i b_i$  à l'infini pour obtenir toutes les trajectoires possibles.
- 2- On calcule cette intégrale multiple pour une valeur finie de  $n$ ,  $I_n$ .

3- Enfin on fait la limite quand  $n \rightarrow \infty, I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

Si la limite quand  $n \rightarrow \infty$  existe, on aura une valeur exacte de notre intégrale de chemin  $I$ , mais dans le cas où la limite ne peut pas être rétabli, on fait appelle aux calculs numérique.

### 5.1.1 Exemple 1

Pratiquement si on veut calculé l'intégrale de chemin pour une particule brownien vas de  $(0,0)$  à  $(0, t) \rightarrow \mathcal{T}(0, 0 ; 0, t)$ , on doit alors décomposé l'axe du temps a  $n$  segments égaux d'une façon qu'on aura  $(t_i - t_{i-1} = \Delta t, \forall i = \overline{1, n} \rightarrow \Delta t = \frac{t}{n})$  :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \frac{1}{\sqrt{4D\pi\Delta t}} \exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D\Delta t}\right\} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left\{-\frac{1}{4D\Delta t} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2\right\} \dots \quad (5.1).
 \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice  $i$  par  $j$  ou  $j = i-1$  et on met  $N = n-1$  donc [21]:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \equiv \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)^2 = \sum_{k,l=1}^N x_k A_{kl} x_l \text{ avec } x_0 = x_n = 0,$$

où  $A = (a_{kl})$  est une  $N \times N$  tri-diagonale matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$I_n = \frac{1}{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \exp\left\{-\sum_{k,l=1}^N \frac{1}{4D\Delta t} A_{kl} x_k x_l\right\} \dots \quad (5.2),$$

on met  $(B = \frac{1}{4D\Delta t} A)$  alors le partie intégrale dans (5.2) aura la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \exp\left\{-\sum_{k,l=1}^N B_{kl} x_k x_l\right\} \dots \quad (5.3),$$



B est une matrice symétrique de valeurs réels donc on peut la diagonaliser avec une transformation diagonal  $C_{ij}$ :

$$x_i = \sum_{l=1}^N C_{il} y_l \quad \text{ou } \det(C) = 1,$$

$$B \rightarrow T = C^T B C \quad \text{ou } T_{ij} = \lambda_i \delta_{ij},$$

on applique les résultats de cette transformation sur (5.3) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^N B_{kl} x_k x_l \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_N \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i^2 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \{ - \lambda_i y^2 \} = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_N}}, \end{aligned}$$

alors la transformation diagonal nous a permis de transformer l'intégrale multidimensionnelle de Gauss (5.3) à un produit d'intégrales de Gauss standard par un changement de variable ( $x \rightarrow y$ ).

Comme la matrice T est diagonale alors  $\lambda_1 \times \lambda_2 \dots \times \lambda_N = \det(T) = \det(B)$ , enfin :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^N B_{kl} x_k x_l \right\} = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{\det(B)}} \dots \quad (5.4),$$

on a pour une matrice  $N \times N$  A est un scalaire  $\alpha$  la relation  $\det(\alpha A) = \alpha^N \det(A)$  [7]

alors :  $\det(B) = \det\left(\frac{1}{4D\Delta t} A\right) = \left(\frac{1}{4D\Delta t}\right)^N \det(A)$ ,

Remplaçons ce résultat dans (5.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^N B_{kl} x_k x_l \right\} &= \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{\left(\frac{1}{4D\Delta t}\right)^N \det(A)}} = \frac{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^N}{\sqrt{\det(A)}} \\ &= \frac{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^{n-1}}{\sqrt{\det(A)}} \dots \quad (5.5), \end{aligned}$$

alors selon (5.2) et (5.5) :

$$I_n = \frac{1}{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^n} \times \frac{(\sqrt{4D\pi\Delta t})^{n-1}}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{1}{\sqrt{4D\pi\Delta t} \det(A)} \dots \quad (5.6).$$

A est une  $N \times N$  tri-diagonale matrice avec  $(a_{ij})$  comme éléments et donc vérifie la formule récursive des matrices tri-diagonales suivante [21] :

$$\det(A_k) = a_{k,k} \det(A_{k-1}) - a_{k,k-1} a_{k-1,k} \det(A_{k-2}),$$

$\det(A_k)$  représente le  $k^{\text{ième}}$  mineur, c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en ne gardant que les  $k$  premières lignes et colonnes de  $A$ .

$$\text{pour notre matrice } A : a_{k,k} = 2, a_{k,k-1} = a_{k-1,k} = -1,$$

alors

$$\det(A_k) = 2 \det(A_{k-1}) - \det(A_{k-2}),$$

Par simple calculs on trouve que :  $\det(A_1) = 2, \det(A_2) = 3, \det(A_3) = 4$

Par l'utilisation des dernières relations on peut démontrer par récurrence que :

$$\det(A) = \det(A_N) = N + 1 = n, \text{ sachant que } \Delta t = \frac{t}{n} \rightarrow \det(A) = \frac{t}{\Delta t}.$$

Remplaçons ca dans (5.6) on trouve que :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{4D\pi \Delta t \frac{t}{\Delta t}}}$$

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} I_n = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \dots (5.7).$$

On fait  $\mathcal{T}(0, 0 ; 0, t)$  représente la probabilité de transition  $W(0,t | 0,0)$  et cela coïncide avec notre résultat établit par l'utilisation du méthode de la discrétisation du temps .

$$W(0, t|0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t-0)}} \exp\left\{-\frac{(0-0)^2}{4D(t-0)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} = I \dots (5.8).$$

**Remarque :**  $I$  représente la probabilité pour laquelle une particule brownien revient a ça position initiale après un moment  $t$ ,  $W(0, 0|0, t) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}}$  on remarque que c'est une relation de proposition inverse avec le temps, qui veut dire physiquement que la chance pour que la particule brownien revient a sa position initiale diminue avec le temps, autrement dite que la particule brownien s'éloigne de la position de début avec le temps.

### 5.1.2 Exemple 2

On va calculé l'intégrale de chemin de Wiener pour le fonctionnelle  $f(x) = x(t_l) \equiv x_l, t_l$  est une instant quelconque dans l'intervalle  $[0,t]$  pour une famille de trajectoires  $\mathcal{T}(x_0, 0 ; t)$  :

$$I = \int_{\mathcal{T}(x_0,0 ; t)} x_l d_w x(\tau) \approx I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\Delta t_i}} x_l \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})}\right\},$$

on choisi la décomposition du l'axe temporelle d'une façon que  $t_l$  coïncide avec l'extrémité de

$$\Delta t_l, \Delta t_l = t_l - t_{l-1}$$

$$I_n = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{l-1} \frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\Delta t_i}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^l \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\}}_{I_1} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_l \frac{dx_l}{\sqrt{4D\pi\Delta t_l}}}_{I_2}$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=l+1}^n \frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\Delta t_i}} \exp \left\{ - \sum_{l+1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\}}_{I_3} \dots \quad (5.9),$$

on évalue les intégrales  $I_1, I_2$  et  $I_3$  à l'aide des relations (4.7) et (4.9) [15] :

$$I_1 \times \frac{1}{\sqrt{4D\pi\Delta t_l}} = \int_{\mathcal{T}(x_0,0; x_l, t_l)} d_w x(\tau) = W(x_0, 0 | x_l, t_l)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4D\pi(t_l - 0)}} \exp \left\{ - \frac{(x_l - x_0)^2}{4D(t_l - 0)} \right\} = \frac{\exp \left\{ - \frac{(x_l - x_0)^2}{4Dt_l} \right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}} \dots \quad (5.10),$$

$$I_2 \div \frac{1}{\sqrt{4D\pi\Delta t_l}} = \int_{-\infty}^{\infty} x_l dx_l \dots \quad (5.11),$$

$$I_3 = \int_{\mathcal{T}(x_l, t_l; t)} d_w x(\tau) = 1 \dots \quad (5.12),$$

d'après (5.10) (5.11) (5.12) on obtient  $I_n$  :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_l dx_l \frac{\exp \left\{ - \frac{(x_l - x_0)^2}{4D(t_l - 0)} \right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_l x_l \frac{\exp \left\{ - \frac{(x_l - x_0)^2}{4Dt_l} \right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}},$$

on effectuant un changement de position  $x \rightarrow x_l - x_0$  :

$$(dx_l \equiv dx, x_l = x + x_0, (x_l - x_0)^2 = x^2)$$

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x + x_0) \exp \left\{ - \frac{x^2}{4Dt} \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{x_0}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ - \frac{x^2}{4Dt} \right\}}_{I_4} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \exp \left\{ - \frac{x^2}{4Dt} \right\}}_{I_5},$$

$$I_4 = \frac{x_0}{\sqrt{4Dt}} \sqrt{\frac{\pi}{4Dt}} = x_0 \dots (5.13),$$

$$I_5 = \frac{4Dt}{2} \int uv' = \frac{4Dt}{2} [uv] - \frac{4Dt}{2} \int vu'$$

où :  $u = 1$  ;  $v' = -\frac{2x}{4Dt} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}$  Donc

$$I_5 = \underbrace{\left[ \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int v \times 0 = 0 \dots (5.14),$$

depuis (5.13) et (5.14) on obtient :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_l x_l \frac{\exp\left\{-\frac{(x_l - x_0)^2}{4Dt_l}\right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}} = x_0 ; I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = x_0 \dots (5.15).$$

### Remarque :

- Le résultat obtenue est indépendante de  $x_l$ , cela veut dire quelle est la même pour chaque instants de l'intervalle  $[0, t]$ .
- Alors  $I = \langle f(x) \rangle = \langle x \rangle = x_0$  cela veut dire que a n'importe quelle instant  $t$  la valeur moyenne des déplacements de la particule brownien est égale a ça position initiale, cette résultat confirme les observations expérimentale ou on a cité dans la section sur les propriétés du mouvement brownien : « La particule fluctuer autour d'un point de départ, cela veut dire que le barycentre de sa trajectoire est le point de départ (la particule virevolte autour d'un même point) ».

### 5.1.3 Exemple 3

Calculons l'intégrale de chemin de Wiener pour la fonctionnelle dépendant implicitement du temps pour les trajectoires de genre  $\mathcal{T}(0,0 ; t)$ .

$$F[x(\tau)] = \exp\left\{-\int_0^t d\tau \alpha(\tau)x^2(\tau)\right\} \dots (5.16).$$

$$I = \int_{\mathcal{T}(0,0 ; t)} d_w x(\tau) \exp\left\{-\int_0^t d\tau \alpha(\tau)x^2(\tau)\right\}.$$

La discrétisation du temps pour la fonctionnelle  $F[x(\tau)]$  est faite par le remplacement des différentes valeurs et opérateurs de l'espace continue par ses équivalents discrets.

$$\begin{cases} \alpha_i \equiv \alpha(\tau_i) \\ x_i^2 \equiv x^2(\tau_i) \text{ et } \int_0^t (\dots) \rightarrow \sum_{i=1}^n (\dots), \\ d\tau \equiv \varepsilon \end{cases}$$

$$\exp\left\{-\int_0^t d\tau \alpha(\tau)x^2(\tau)\right\} \rightarrow \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \varepsilon\right\},$$

$\varepsilon = \Delta t = t/n$  , Alors on prenant on compte (5.1) :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\varepsilon}}\right) \times \exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D\varepsilon}\right\} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \varepsilon\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\varepsilon}}\right) \times \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \varepsilon - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D\varepsilon}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{\sqrt{4D\pi\varepsilon}}\right) \times \exp\left\{-\frac{1}{4D\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j\right\} \dots \text{(5.17)}, \end{aligned}$$

où  $C = (c_{ij})$  est la  $(n \times n)$  matrice tri-diagonale suivante :

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & c_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & c_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & c_{n-1} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & c_{n-2} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{ii} \equiv c_i = \alpha_i 4D\varepsilon^2 + 2 \text{ pour } i = \overline{1, (n-1)} \\ c_{nn} \equiv c_n = \alpha_n 4D\varepsilon^2 + 1 \end{cases} \dots \text{(5.18)},$$

alors depuis les résultats établit pour le calcul des intégrales multidimensionnelles gaussian

dans (5.4) et (5.17) avec :  $\det(B) = \det\left(\frac{1}{4D\varepsilon} C\right) = \left(\frac{1}{4D\varepsilon}\right)^n \det(C)$

$$I_n = \left(\frac{1}{\sqrt{4D\pi\varepsilon}}\right)^n \times \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\left(\frac{1}{4D\varepsilon}\right)^n \det(C)}} = \frac{1}{\sqrt{\det(C)}} \dots \text{(5.19)}.$$

Donc le calcul de l'intégrale  $I$  revient à la détermination du déterminant de la matrice  $C$   $\det(C_n)$ .

$C$  est une  $N \times N$  tri-diagonale matrice avec  $(a_{ij})$  comme éléments et donc vérifie la formule récursive des matrices tri-diagonales suivante pour tous  $k = \overline{3, n}$ :

$$\det(C_k) = c_{k,k} \det(C_{k-1}) - c_{k,k-1} c_{k-1,k} \det(C_{k-2}),$$

$\det(C_k)$  représente le  $k^{\text{ième}}$  mineur

$$\text{pour notre matrice } C : c_{k,k} = (\alpha_k 4D\varepsilon^2 + 2) \quad , \quad c_{k,k-1} = c_{k-1,k} = -1,$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(C_k) &= (\alpha_k 4D\varepsilon^2 + 2) \det(C_{k-1}) - \det(C_{k-2}) \\ \Rightarrow \frac{\det(C_k) - 2 \det(C_{k-1}) + \det(C_{k-2})}{\varepsilon^2} &= \alpha_k \det(C_{k-1}) \dots \text{(5.20)}. \end{aligned}$$

A la limite continue quand  $n \rightarrow \infty$  les déterminants devient des fonctions dépendant du temps et on aura [15][22] :

- $\varepsilon \rightarrow d\tau, \varepsilon^2 \rightarrow d\tau^2$
- $\det(C_k) \rightarrow f(\tau) \forall k = \overline{3, n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \det(C_n) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) \equiv f(0)$  car une infinie décomposition fait que  $\tau$  sera infiniment petit.
- $\alpha_k \rightarrow \alpha(\tau)$
- $[\det(C_k) - 2 \det(C_{k-1}) + \det(C_{k-2})] \rightarrow [f(\tau + d\tau) - f(\tau)]^2 \rightarrow [\Delta f(\tau)]^2 \rightarrow d^2 f(\tau)$

Alors la relation de différence finie (5.20) devient à la limite continue une équation différentielle :

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} = \alpha(\tau) f(\tau) \dots \text{(5.21)}.$$

On aura aussi à la limite continue à la condition limite à  $\tau = t$  :

- $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n 4D\varepsilon^2 + 1) = 1$
- Il en résultera que :  $\left. \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau=t} = 0$

Alors en tous on a :

$$\begin{cases} \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} = \alpha(\tau) f(\tau) \\ f(t) = 1 \\ \left. \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau=t} = 0 \end{cases} \dots \text{(5.22)}.$$

(5.22) représente une équation différentielle d'ordre deux a coefficients non-constants (avec des conditions aux limites), il n'existe pas d'expression générale des solutions de ce genre d'équation.

Depuis (5.19) et (5.22) on a :

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \dots \text{(5.23)}.$$

**Cas spéciale ou  $\alpha(\tau) = -\lambda^2$  :**

$$F[x(\tau)] = \exp \left\{ \lambda^2 \int_0^t d\tau x^2(\tau) \right\} \dots \text{(5.24)},$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \text{ et } \begin{cases} \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} = -\lambda^2 f(\tau) \\ f(t) = 1 \\ \left. \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau=t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\tau) = \cos(\lambda(\tau - t)) \text{ et } I = \frac{1}{\sqrt{\cos(\lambda t)}}.$$

On remarque que I n'est pas défini pour les valeurs  $(\lambda t = l \frac{\pi}{2}, l \in \mathbb{I})$ , ou la nécessité d'introduire la condition  $-\frac{\pi}{2} < \lambda t < \frac{\pi}{2}$ , comme  $t \geq 0$   $-\frac{\pi}{2t} < \lambda < \frac{\pi}{2t}$  donc :

$$\begin{cases} I = \frac{1}{\sqrt{\cos(\lambda t)}} \\ -\frac{\pi}{2t} < \lambda < \frac{\pi}{2t} \end{cases} \dots \text{(5.25)}.$$

**5.2 Réduction de l'intégrale par la relation ESKC**

Cette méthode est basée sur la relation ESKC (4.11) qui est utilisé pour réduire les intégrales de chemin ou les résultats sont inconnues a un produit des intégrales de résultats connues.

$$\int_{\mathcal{T}(x_1, t_1; x_3, t_3)} F[x(\tau)] d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} F[x(\tau)] dx_2 \int_{\mathcal{T}(x_1, t_1; x_2, t_2)} d_w x \int_{\mathcal{T}(x_2, t_2; x_3, t_3)} d_w x \dots \text{(5.26)}.$$

$$t_1 < t_2 < t_3$$

Cette méthodes est la plus simple et très facile.

**5.2.1 Exemple 1**

On reprend le fonctionnelle  $f(x) = x(t_l) \equiv x_l$ ,  $t_l$  est une instant quelconque dans l'intervalle  $[0, t]$  pour une famille de trajectoires  $\mathcal{T}(x_0, 0; t)$ , on a  $0 < t_l < t$  donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}(x_0,0; t)} x_l d_w x &= \int_{-\infty}^{\infty} x_l dx_l \underbrace{\int d_w x}_{\substack{\mathcal{T}(x_0,0; x_l,t_l) \\ = \frac{\exp\left\{-\frac{(x_l-x_0)^2}{4Dt_l}\right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}}}} \underbrace{\int d_w x}_{=1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_l x_l \frac{\exp\left\{-\frac{(x_l-x_0)^2}{4Dt_l}\right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}} = x_0. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Exemple 2

Considérons le fonctionnelle  $F[x(\tau)] = x(t_l) x(t_k) \equiv x_l x_k$ , ou  $0 < t_l < t_k < t$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{T}(0,0; t)} x_l x_k d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} x_l dx_l \underbrace{\int d_w x}_{\substack{\mathcal{T}(0,0; x_l,t_l) \\ = \frac{\exp\left\{-\frac{(x_l)^2}{4Dt_l}\right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}}}} \underbrace{\int x_k d_w x}_{I_k}, \\ I_k &= \int_{\mathcal{T}(x_l,t_l; t)} x_k d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} x_k dx_k \underbrace{\int d_w x}_{\substack{\mathcal{T}(x_l,t_l; x_k,t_k) \\ = \frac{\exp\left\{-\frac{(x_k-x_l)^2}{4D(t_k-t_l)}\right\}}{\sqrt{4D\pi(t_k-t_l)}}}} \underbrace{\int d_w x}_{=1}, \end{aligned}$$

alors

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x_l x_k \frac{\exp\left\{-\frac{(x_l)^2}{4Dt_l}\right\}}{\sqrt{4D\pi t_l}} \frac{\exp\left\{-\frac{(x_k-x_l)^2}{4D(t_k-t_l)}\right\}}{\sqrt{4D\pi(t_k-t_l)}} dx_l dx_k \dots \text{(5.27)}.$$

Par suivant les même étapes dans l'exemple 1 et faisant appelé a la méthode d'intégration par partie on obtient le résultat suivant :

$$I = 2Dt_l \text{ avec } t_l < t_k,$$

généralement :

$$I = \langle x(t_l) x(t_k) \rangle = 2D \text{ Min}(t_l, t_k) \dots \text{(5.28)}.$$

Où  $\text{Min}(t_l, t_k)$  représente la valeur minimum entre  $t_l$  et  $t_k$ .

Ce fonctionnelle représente la corrélation entre deux points du processus, cette résultat de  $I$  implique que la variation des positions est très rapide par rapport au temps ce qui est traduit par une vitesse de variation infini et donc la notion différentielle d'une vitesse est impossible a établir.

C'est le même résultat obtenu dans le chapitre 2.



### 5.3 Changement de variables

Cette méthode bien connue on mathématique a permit de mettre l'intégrale de chemin dans la carte par obtenir des relations entre l'analyse fonctionnelle avec l'analyse classique d'un coté et avec les équations différentielles d'une autre, cela a permit d'entendre l'utilisation des intégrales de chemin dans des autre problèmes physiques dans la mécanique quantique, théorie du champ...etc.

Mathématiquement dans le cas d'une intégrale n-dimensionnelle de Lebesgue ou Riemann après le changement des variables :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ ou } x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

On définit le jacobien de cette transformation :  $J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$ .

Et l'intégrale de chemin pour la transformation est :

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^n dx_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{a'_1}^{b'_1} \dots \int_{a'_n}^{b'_n} \prod_{i=1}^n dy_i J \tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) \dots \quad (5.29).$$

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_1(y_1), x_2(y_2), \dots, x_n(y_n)) \\ a_i = x_i(a'_1, \dots, a'_n) \\ b_i = x_i(b'_1, \dots, b'_n) \end{cases}$$

#### 5.3.1 Exemple 1

Considérons la class du fonctionnelle  $F[x(\tau)]$  suivante pour les trajectoires  $\mathcal{T}(0, 0 ; t)$  :

$$F[x(\tau)] = f \left( \int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau \right) \dots \quad (5.30).$$

$a(\tau)$  est une fonction intégrable sur l'intervalle  $[0, t]$ , et  $f$  est une fonction continue.

$$I = \int_{\mathcal{T}(0,0;t)} f \left( \int_0^t a(\tau)x(\tau)d\tau \right) d_w x(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n,$$

on décompose l'axe du temps a des parties  $\varepsilon_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{4D\pi\varepsilon_1}} \dots \frac{dx_n}{\sqrt{4D\pi\varepsilon_n}} f \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \varepsilon_i \right) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D\varepsilon_i} \right\},$$

On effectue le changement de variables suivant :

$$y_i = x_i - x_{i-1}; \quad i = \overline{1, n} \text{ pour ce changement : } J = \prod_{i=1}^n 1 = 1$$



remplaçons ce résultat dans (5.32), on obtient :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta}{\sqrt{4D\pi(A_1^2\varepsilon_1 + A_2^2\varepsilon_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_3}{\sqrt{4D\pi A_3^2\varepsilon_3}} \dots \frac{dz_n}{\sqrt{4D\pi A_n^2\varepsilon_n}} f[\beta + z_3 + \dots + z_n] \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4D(A_1^2\varepsilon_1 + A_2^2\varepsilon_2)} - \sum_{i=3}^n \frac{z_i^2}{4DA_i^2\varepsilon_i}\right\} \dots \quad (5.33),$$

la méthode suivit pour allez de (5.31) à (5.33) nous a permet de réduire le nombre du variables d'intégration de  $n$  à  $(n - 1)$  en gardant la même structure d'intégrale, donc après  $(n - 1)$  étapes similaire on aura :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{4D\pi \sum_{i=1}^n A_i^2\varepsilon_i}} f(\mu) \exp\left\{-\frac{\mu^2}{4D \sum_{i=1}^n A_i^2\varepsilon_i}\right\} \dots \quad (5.34),$$

quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_i \rightarrow d\tau$ , donc :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^n a_j \varepsilon_j = \int_{\tau}^t a(s) ds \\ R \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i^2 \varepsilon_i = \int_0^t d\tau \left[ \int_{\tau}^t a(s) ds \right]^2 \end{cases}$$

en fin :

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{f(\mu)}{\sqrt{4D\pi R}} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{4DR}\right\} \dots \quad (5.35).$$

Cette intégrale formule obtenue n'existe pas pour tous les fonctions continue  $f$ , cela pose une restriction sur la fonction  $f$  pour utilisé cette résultat sur le fonctionnelle proposé.

### 5.3.2 Exemple 2 (Transformation linéaire)

Cette méthode a été évalué par R.H Cameron et W.T. Martin [9][10], qui ont trouvé que une class de transformations linéaire de l'espace de Wiener permet de calculé l'intégrale de Wiener pour un type de fonctionnelle  $F[x(\tau)] = \exp\left\{\lambda^2 \int_0^t d\tau x^2(\tau)\right\}$  étudier dans l'exemple 3 au par avant, on effet la théorie conclue est plus générale mais le fonctionnelle mentionné par-dessus est le plus important.

Considérons la transformation linéaire de la forme :

$$y(t) = x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds \dots (5.36).$$

Où  $K(t,s)$  est une fonction telle que :

$$K(t,s) = \begin{cases} K^1(t,s) & \text{quand } 0 \leq t < s \text{ (} 0 \leq s \leq 1 \text{)} \\ K^2(t,s) & \text{quand } s < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}K^1(s,s) + \frac{1}{2}K^2(s,s) & \text{quand } t = s \end{cases} \dots (5.37).$$

On a les relations :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{F}_y} d_w y = |D| \int_{\mathcal{F}_x} \exp\{-\varphi[x]\} d_w x \dots (a) \\ \int_{\mathcal{F}} F[y]d_w y = |D| \int_{\mathcal{F}} F \left[ x(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \right] \exp\{-\varphi[x]\} d_w x \dots (b) \end{cases} \dots (5.38).$$

Où

$$D = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & \dots & K(s_1, s_\mu) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_\mu, s_1) & \dots & K(s_\mu, s_\mu) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_\mu \dots (5.39).$$

$$\varphi[x] = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \right] \right\}^2 dt + 2 \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [K(t,s)x(s)ds] \right\} dx(t) + \int_0^1 J(s)d\{[x(s)]^2\} \dots (5.40).$$

$$J(s) = K^2(s,s) - K^1(s,s) \dots (5.41).$$

Considérons comme une application la transformation suivante :

$$y(t) = x(t) + \int_0^t \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} x(s) ds \dots (5.42),$$

on met  $K^1(t,s) = 0$ , et  $K^2(t,s) = \lambda \tan\{\lambda(s-1)\}$  donc :

$$K(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{quand } 0 \leq t < s \text{ (} 0 \leq s \leq 1 \text{)} \\ \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} & \text{quand } s < t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} & \text{quand } t = s \end{cases},$$

Et

$$J(s) = \lambda \tan\{\lambda(s-1)\},$$

$$\begin{aligned}
D &= 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left\{ \int_0^1 k(s, s) ds \right\}^{\mu} = \exp \left\{ \int_0^1 k(s, s) ds \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} ds \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln[\sec \lambda(s-1)] \Big|_0^1 \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln[\sec(\lambda)] \right\} = \sqrt{\cos(\lambda)},
\end{aligned}$$

car  $K(t, s)$  ne dépend pas explicitement de  $t$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi[x] &= \int_0^1 \lambda^2 \tan^2\{\lambda(s-1)\} [x(s)]^2 ds + \underbrace{\int_0^1 \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} d\{[x(s)]^2\}}_{= x^2(1)J(1) - \int_0^1 [x(s)]^2 dj(s) ds} \\
&= \int_0^1 \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} d\{[x(s)]^2\} = x^2(1)J(1) - \int_0^1 [x(s)]^2 dj(s) ds,
\end{aligned}$$

$J(1) = 0$  et  $dj(s) = \frac{\lambda^2}{\cos^2\{\lambda(s-1)\}}$ , alors

$$\begin{aligned}
\varphi[x] &= \int_0^1 \lambda^2 \tan^2\{\lambda(s-1)\} [x(s)]^2 ds - \int_0^1 [x(s)]^2 \frac{\lambda^2}{\cos^2\{\lambda(s-1)\}} ds \\
&= \int_0^1 -\lambda^2 [x(s)]^2 \left[ \frac{1}{\cos^2\{\lambda(s-1)\}} - \tan^2\{\lambda(s-1)\} \right] \\
&= \int_0^1 -\lambda^2 [x(s)]^2 ds \left[ \frac{1 - \sin^2\{\lambda(s-1)\}}{\cos^2\{\lambda(s-1)\}} \right] = -\lambda^2 \int_0^1 [x(s)]^2 ds,
\end{aligned}$$

substituant les valeurs obtenir de  $D$  et  $\varphi[x]$  dans (5.38.b)

$$\int_{\mathcal{I}} F[y] d_w y = \sqrt{\cos(\lambda)} \int_{\mathcal{I}} F \left[ x + \int_0^1 \lambda \tan\{\lambda(s-1)\} x(s) ds \right] \exp \left\{ \lambda^2 \int_0^1 [x(s)]^2 ds \right\} d_w x,$$

si on met  $F[y] = 1$  on aura :

$$\int_{\mathcal{I}} \exp \left\{ \lambda^2 \int_0^1 [x(s)]^2 ds \right\} d_w x = \frac{1}{\sqrt{\cos(\lambda)}} \dots (5.43).$$

Le résultat obtenu avec la méthode de la transformation linéaire et le même obtenu à (5.25) pour  $t = 1$ , on pose encore la condition  $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$  nécessaire pour que l'intégral soit défini.

## 5.4 Evaluation de l'intégrale de chemin par les équations différentielle de Sturm-Liouville

Ce théorème exprime la relation entre l'intégrale de chemin de Wiener et les solutions des équations différentielle de Sturm-Liouville, bien que cela aille nos permettre calculé beaucoup d'intégrales de chemin pour une class de fonctionnelles, il est plus important de constaté que l'opération inverse (trouvé les solutions des équations différentielle) est possible, cela sera exposé dans le chapitre suivant.

Soit  $a(\tau)$  une fonction continue et positive pour tous  $0 \leq \tau \leq t$ , considérant l'équation différentielle de Sturm-Liouville :

$$f''(\tau) + k a(\tau)f(\tau) = 0 \dots (5.44).$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f'(t) = 0 & \dots (a) \\ f_{k_0}(0) = 0 & \dots (b) \end{cases} \dots (5.45).$$

Où  $k_0$  est la valeur propre borne pour laquelle l'équation (5.44) possède des solutions non-triviale.

- 1- Si  $-\infty < k < k_0$  et  $f_k(\tau)$  est une solution non-triviale de (5.44) vérifie la condition aux limites dans (5.45) alors :

$$\int_{\mathcal{T}} \exp \left\{ k \int_0^t a(\tau) x^2(\tau) d\tau \right\} d_w x = \sqrt{\frac{f_k(t)}{f_k(0)}} \dots (5.46).$$

- 2- Si  $k < k_0$ ,  $f^{(1)}(\tau)$  et  $f^{(2)}(\tau)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (5.44) alors :

$$\int_{\mathcal{T}} \exp \left\{ k \int_0^t a(\tau) x^2(\tau) d\tau \right\} d_w x = \sqrt{\frac{f^{(2)'(\varepsilon)}f^{(1)}(\varepsilon) - f^{(1)'(\varepsilon)}f^{(2)}(\varepsilon)}{f^{(2)'(t)}f^{(1)}(0) - f^{(1)'(t)}f^{(2)}(0)}} \dots (5.47).$$

Où  $\varepsilon$  est une valeur quelconque entre 0 et  $t \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \leq t$ .

Ce théorème est une généralisation de méthodes utilisées si dessus (sections 5.3.2 et 5.1.3) pour calculer l'intégrale de chemin de Wiener avec le fonctionnel du genre  $F[x(\tau)] = \exp\{a(\tau) x^2(\tau) d\tau\}$ .

### Exemple

Pour  $a(\tau) = 1$ , l'équation (5.44) sera :

$$f''(\tau) + k f(\tau) = 0 \dots (5.48),$$

la solution générale de cette équation est :

$$f(\tau) = \cos(\sqrt{k}\tau) \dots (5.49),$$

la condition limite (5.45) (a) implique :

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}t) = 0 \Rightarrow \sqrt{k}t = 0 \text{ ou } k = 0,$$

comme  $(k, t) \neq (0, 0)$  généralement, on effectue le changement suivant pour satisfaire la condition à la limite :  $\tau \rightarrow (\tau - t)$

Alors dans ce cas :

$$\begin{cases} f(\tau) = \cos\{\sqrt{k}(\tau - t)\} \\ \text{et} \\ f'(t) = -\sqrt{k} \sin\{\sqrt{k}(t - t)\} = -\sqrt{k} \sin(0) = 0 \end{cases} \dots (5.50),$$

la condition limite (5.45) (b) implique :

$$f_{k_0}(0) = 0 \Rightarrow \cos\{\sqrt{k_0}(0 - t)\} = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{k_0}t) = 0 \Rightarrow \sqrt{k_0} = \frac{\pi}{2t} \dots (5.51),$$

depuis (5.50), (5.51) et (5.46) on trouve que :

$$\int_{\mathcal{T}} \exp\left\{k \int_0^t x^2(\tau) d\tau\right\} d_w x = \sqrt{\left(\frac{\cos\{\sqrt{k}(t - t)\}}{\cos\{\sqrt{k}(0 - t)\}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\cos\{\sqrt{k}t\}}} \dots (5.52).$$

Avec  $k < k_0$ .

Le résultat de (5.52) est le même obtenu dans (5.25) pour  $\sqrt{k} = \lambda$  et dans (5.43) pour  $\sqrt{k} = \lambda$  et  $t = 1$ .

## 5.5 Conclusion

Ce Chapitre est une présentation des outils et méthodes utilisés pour calculer (exactement) les intégrales de chemin de Wiener. Chaque méthode a été consolidée par plusieurs exemples évalués dans le moindre détail. Le but a été de familiariser le lecteur avec ce genre de calculs et en plus quelques résultats obtenus ici seront utilisés ultérieurement.

Enfin nous avons exposé un théorème qui lie le calcul des intégrales de chemin de Wiener aux solutions d'équations différentielles de Sturm-Liouville.

## **Chapitre 6**

### **Intégrale de chemin dans la physique moderne**



## 6.1 Théorème de Feynman-Kac

Ce théorème (formule) a été rétabli par M. Kac qui a évalué [12,13] les travaux sur l'intégrale de chemin de Wiener pour lié les solutions d'une équation différentielle de forme suivant à l'intégrale de chemin de Wiener.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - V(x)u(x, t),$$

où  $V(x)$  est une fonction continue par segments, qui correspond physiquement à un potentielle, encore dans le cadre de la physique nous allons remplacer  $\frac{1}{2}$  dans l'équation précédente par la constante de diffusion  $D$  pour obtenir un forme analogique à l'équation de Smoluchowski (2.25), cela va nous permettre de déduire la constante inconnue de Feynman qui figure dans l'intégrale de chemin quantique par une approche stochastique en utilisant l'intégrale de chemin de Wiener.

Il faut préciser que ce changement est valable mathématiquement [13, 22].

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - V(x)u(x, t) \dots (6.1).$$

Si  $u(x, t)$  vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(x) \end{cases} \dots (6.2).$$

Où  $\delta(x)$  est la fonction de Dirac.

Le théorème de Feynman-Kac implique que les solutions de l'équation (6.1) avec les conditions (6.2) vérifient la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{I}} \exp \left\{ - \int_0^t V[x(\tau)] d\tau \right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \dots (6.3).$$

Ce théorème est largement utilisé dans la théorie des champs pour résoudre les équations différentielles physiques de la forme de (6.1), on doit préciser que le partie gauche de (6.3) représente une intégrale inconditionnelle de Wiener.

### 6.1.1 Transformé de Laplace

Pour transformer l'équation (6.1) de sa forme aux dérivées partielles à une équation différentielle aux dérivées totales, il sera pratique d'utiliser le transformé de Laplace suivant :

$$\psi(x) \equiv \psi(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt \dots (6.4).$$

Appliquant ce transformé sur les deux coté de (6.1) en obtient :

$$D \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - [s + V(x)]\psi(x) = 0 \dots (6.5).$$

Et les conditions aux limites seront :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0 \\ \psi'(x) \text{ continue excepte pour } x = 0 \dots (6.6). \\ \psi'(0^-) - \psi'(0^+) = 2 \end{cases}$$

### 6.1.2 Exemple

On considère le potentiel suivant :

$$V(x) = \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \dots (6.7),$$

pour un tel potentiel l'équation (6.5) ( $D = \frac{1}{2}$ ) prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - [s + 1]\psi(x) = 0 \text{ pour } x > 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - s \psi(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \dots (6.8),$$

les solutions de (6.8) sont :

$$\psi(x, s) = \begin{cases} c_1 e^{-x\sqrt{2s+2}} \text{ pour } x > 0 \\ c_2 e^{x\sqrt{2s}} \text{ pour } x < 0 \end{cases} \dots (6.9),$$

où  $c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s} + \sqrt{s+1}}$ , pour satisfaire les conditions aux limites (6.6).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, s) dx = \frac{1}{\sqrt{s(s+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{s^{k+1}} \dots (6.10),$$

le transformé inverse de Laplace est donné par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \psi(x, s) e^{st} ds \dots (6.11),$$

remplaçant les résultats de (6.10) et (6.11) dans (6.3) :

$$\int_{\mathcal{J}} \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \right\} d_w x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{1}{2} \right)^k t^k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t \cos^2 \theta} d\theta \dots (6.12).$$

## 6.2 Intégrale de chemin quantique

Nous allons ramener l'équation (6.1) à la forme de l'équation de Schrödinger, après on utilise le théorème de Feynman-Kac pour lier notre résultats à l'intégral de chemin et donc le processus de Wiener.

L'équation de Schrödinger pour une particule de mass  $m$  émergé dans un potentiel  $v(x)$  est donné par :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + v(x)\psi(x, t) \dots (6.13).$$

Pour réobtenir cette équation depuis l'équation (6.1) on assigne les valeurs suivantes aux constante de diffusion et le potentiel [23] :

$$\begin{cases} D = \frac{i\hbar}{2m} \\ V(x) = \frac{i}{\hbar} v(x) \end{cases} \dots (6.14).$$

(6.1) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{i}{\hbar} v(x)u(x, t),$$

en multipliant cette équation par  $i\hbar$  :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= i\hbar \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - i\hbar \frac{i}{\hbar} v(x)u(x, t) \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + v(x)u(x, t) \dots (6.15). \end{aligned}$$

L'équation (6.15) et celle de Schrödinger (6.13) ont la même forme, cela implique qu'on peut appliquer le théorème de Feynman-Kac avec prise en compte des changements faites dans (6.14) et la relation (6.3) sera dans ce cas :

$$\int_{\mathcal{J}} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{i}{\hbar} v(x) d\tau \right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \dots (6.16),$$

On évaluant l'intégrale de Wiener inconditionnelle de (6.16) suivant la trajectoire  $\mathcal{J}$  nous donne selon la relation (4.9) :

$$\int_{\mathcal{J}} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{i}{\hbar} v(x) d\tau \right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\mathcal{J}(x_0, t_0; x, t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{i}{\hbar} v(x) d\tau \right\} d_w x = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, t)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{J}(x_0, t_0; x, t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{i}{\hbar} v(x) d\tau \right\} d_w x = u(x, t; x_0, t_0) \dots \text{(6.17)},$$

nous avons met  $u(x, t; x_0, t_0)$  au lieu de  $u(x, t)$  car il s'agit d'une intégrale conditionnelle, qui doit donnée une probabilité conditionnelle (probabilité de transition).

On décompose la mesure de Wiener  $d_w x$  selon (4.6) prenant en compte la valeur de  $D$  dans (6.14), on obtient :

$$d_w x = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{4} \frac{i\hbar}{2m} \dot{x}^2 d\tau \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4 \frac{i\hbar}{2m} \pi d\tau}} = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{m}{2i\hbar} \dot{x}^2 d\tau \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar d\tau}{m}}} \dots \text{(6.18)},$$

en remplaçant cette valeurs dans (6.17) on obtient que :

$$\int_{\mathcal{J}(x_0, t_0; x, t)} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar d\tau}{m}}} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{i}{\hbar} v(x) d\tau \right\} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{m}{2i\hbar} \dot{x}^2 d\tau \right\} = u(x, t; x_0, t_0)$$

$$\Rightarrow u(x, t; x_0, t_0) = \int_{\mathcal{J}(x_0, t_0; x, t)} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar d\tau}{m}}} \exp \left\{ - \int_0^t \left( \frac{m}{2i\hbar} \dot{x}^2 + \frac{i}{\hbar} v(x) \right) d\tau \right\}$$

$$\Rightarrow u(x, t; x_0, t_0) = \int_{\mathcal{J}(x_0, t_0; x, t)} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar d\tau}{m}}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - v(x) \right) d\tau \right\} \dots \text{(6.19)},$$

- $\prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar d\tau}{m}}}$  est un produit de différentielles par une constante on la note  $\mathcal{D}x$  (mesure formelle).
- $\frac{m}{2} \dot{x}^2 - v(x)$  est Lagrangien du système  $L[\dot{x}, x]$  donc on a :

$$\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - v(x) \right) d\tau = \frac{i}{\hbar} \int_0^t L[\dot{x}, x] d\tau = \frac{i}{\hbar} S[x] \dots \text{(6.20)},$$

où  $S[x]$  est l'action du système.

Alors avec la nouvelle notation par  $\mathcal{D}x$  et la relation (6.20), la relation (6.19) devient :

$$u(x, t; x_0, t_0) = \int_{\mathcal{T}(x_0, t_0; x, t)} \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\} \dots (6.21).$$

C'est bien l'expression du propagateur de l'intégrale de chemin quantique.

**Remarques et interprétations :**

1- l'analyse dimensionnelle de la constante  $D$  prise dans (6.14) nous donne :

$$[D] = \left[ \frac{i\hbar}{2m} \right] = \left[ \frac{\hbar}{m} \right] \dots (6.22),$$

rappelons que  $[A]$  exprime la dimension de la grandeur physique  $A$ .

Sachant que (suivant les unités internationales MKSA) :

$$\begin{cases} [h] = \text{joule} \times \text{second} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \dots (6.23), \\ [m] = \text{kg} \end{cases}$$

alors d'après (6.23) la relation (6.22) devient :

$$[D] = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \dots (6.24).$$

C'est la dimension d'une constante de diffusion établie dans la relation (2.22).

Cela confirme l'importance physique de notre choix d'introduire et interprété  $D$  comme une constante de diffusion dans l'équation (6.1).

2- la relation (6.17) implique (dans le cadre de la physique stochastique) que  $u(x, t; x_0, t_0)$  correspond à la probabilité de transition  $W(x, t|x_0, t_0)$ , de même, la relation (6.21) implique (dans le cadre de la physique quantique) que  $u(x, t; x_0, t_0)$  correspondant au propagateur  $K(x, t|x_0, t_0)$ , ce qui donne la même analogie déduite dans la section (3.1.3) :

$$T_\tau \equiv U_t.$$

Car le propagateur lui même est une solution de l'équation de Schrödinger, d'où :

$$\begin{cases} K(x, t|x_0, t_0) = U_t \\ W(x, t|x_0, t_0) = T_\tau \\ K(x, t|x_0, t_0) = W(x, t|x_0, t_0) \end{cases} \dots (6.25).$$

On note aussi que le propagateur vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov (3.4)

$$K(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K(x_3, t_3 | x_2, t_2) K(x_2, t_2 | x_1, t_1).$$

De plus le propagateur satisfait :

$$\psi(y, t_y) = \int dx \psi(x, t_x) K(y, t_y | x, t_x) \dots \text{(6.26)}.$$

Cette relation correspond bien à la relation stochastique (3.5), et elle nous permet d'interpréter la fonction d'onde quantique comme l'équivalent de la densité de probabilité stochastique.

3- le résultat le plus important de notre approche est la déduction logique du produit différentielle (mesure formelle)  $\mathcal{D}x$  qui est la même dans l'intégrale de Feynman et par conséquent on retrouve la constante inconnue de Feynman ( $d\tau \rightarrow \varepsilon$ ) :

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \dots \text{(6.27)}.$$

Ce qui veut dire que selon notre approche stochastique, cette constante ne devient plus inconnue, mais le résultat naturel d'un calcul stochastique, ce qui est '*exceptionnel*' et très important !

4- les résultats obtenus ci dessus en particulier le troisième nous encourage à poursuivre la démarche qui mène vers une théorie stochastique pour la physique quantique. Il est important de dire, que malgré les analogies de nature mathématique entre la théorie stochastique et la physique quantique leurs concepts restent différents.

## 6.3 Traitement par l'intégrale de chemin

Nous allons ici développer une méthode pour traiter les processus stochastiques de Wiener en présence d'une force extérieure ou plus généralement un champ de forces. Cette étude sera divisée en deux parties :

Dans la première partie, nous utilisons une méthode statistique bien connue pour obtenir la variance d'un échantillon (positions d'une particule en mouvement brownien) et par conséquent, on obtient la constante de diffusion.

En seconde partie nous utiliserons l'intégrale de chemin de Wiener et l'équation de Langevin pour obtenir la relation qui nous donne la probabilité de transition.

Le manque de résultats expérimentaux, nous a poussé à imaginer une expérience plus adéquate en proposant des valeurs.

Pour garantir que les valeurs posées sont valides (comme dans une expérience réelle), nous allons mener une étude approfondie sur les grandeurs physique et comment elles sont liées mathématiquement dans un processus de Wiener (mouvement brownien).

### 6.3.1 Analyse dimensionnelle des grandeurs physiques de la constante de diffusion

Nous avons déjà fait une analyse dimensionnelle de la constante de diffusion (2.22) et nous avons trouvé que (suivant le système MKSA) :

$$[D] = \left[ \frac{k_b T}{6\pi\eta r} \right] = \frac{m^2}{s}.$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_b \text{ est la constante de Boltzmann} = 1.38 \times 10^{-23}, [k_b] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \\ T \text{ est la température du fluide en Kelvin.} \\ \eta \text{ la constante de viscosité du fluide, } [\eta] = \frac{kg}{m \cdot s} \\ r \text{ est le rayon de la particule en mouvement brownien.} \end{array} \right.$$

Le tableau suivant représente la constante de viscosité de certains fluides prise dans la température ambiante (293.15° K).

Fluide	Viscosité ( $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ )
Benzène	$0.647 \times 10^{-3}$
Chocolat	25
Dioxyde de carbone	$0.071 \times 10^{-3}$
Eau	$1.002 \times 10^{-3}$
Huile de ricin	0.986
Ketchup	50
Lait	$3 \times 10^{-3}$
Mercure	$1.552 \times 10^{-3}$
Méthanol	$0.594 \times 10^{-3}$
Miel	10

Tableau 6.1 constantes de viscosité à 20°C

Par expérience, les particules en mouvement brownien ont des tailles dans les environs d'un micron [5], sachant que la résolution d'un microscope optique dépend de la longueur d'onde de la lumière  $\lambda$  et de l'ouverture numérique des lentilles utilisées  $O.N.$ , et elle est donnée par la relation :

$$d = \frac{\lambda}{2 \times O.N.} \dots (6.28).$$

Pour la lumière visible (longueur d'onde visible) la plus petite résolution est de  $200nm$  ( $0.2\mu m$ ). Si on fixe la température à  $293.15^\circ K$  ( $20^\circ C$ ) la valeur de  $D$  dépendra que de  $\eta$  et  $r$  :

$$D = \frac{k_b T}{6\pi\eta r} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times \eta \times r} \dots (6.29).$$

Cette relation implique que pour des valeurs minimales de  $\eta$  et  $r$  on trouve une valeur maximale de  $D$  et vice versa. Depuis le tableau 6.1 la viscosité du fluide varie de  $\eta = 0.594 \times 10^{-3}$  à  $50$  ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ ), et le rayon de la particule varie de  $r = 0.2$  à  $1 \mu m$ . Par conséquence les valeurs de  $D$  correspondants sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{max} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times \eta \times r} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times 0.594 \times 10^{-3} \times 0.2 \times 10^{-6}} = 180.74 \times 10^{-14} \left( \frac{m^2}{s} \right) \\ D_{min} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times \eta \times r} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} = 0.43 \times 10^{-17} \left( \frac{m^2}{s} \right) \end{array} \right. (6.30).$$

On remarque que  $4.3 \left( \frac{nm^2}{s} \right) \leq D \leq 1.8 \left( \frac{\mu m^2}{s} \right)$ , ce rang est large et il correspond à des grandeurs atomiques (distances intermoléculaires).

### 6.3.2 Étude de la densité de probabilité pour des positions fixes

Nous allons étudier la variation de la densité de probabilité  $w(x, t)$  obtenu dans (2.16) par rapport à des positions fixes, dans ce cas la seule variable sera le temps  $t$ ,  $w(x_{fixe}, t) = f(t)$ .

Nous allons prendre l'eau comme fluide ou on immergeant une particule sphérique de rayon  $1 \mu m$  à la température ambiante ( $20^\circ C$ ), alors on aura :

$$D_{eau} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293.15}{6 \times 3.14 \times 1.002 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-6}} = 21 \times 10^{-14} \dots (6.31).$$



Les graphes suivants représentent le tracé de  $w(x, t)$  par rapport au temps pour des différentes positions fixés, ces positions ont été choisis d'une façon spéciale, qui permis de couvrir tous les situations possibles.

Il est important de clarifié que  $x$  peut être considéré, d'une coté comme la position de la particule en mouvement brownien par rapport à " $x_0 = 0$ " (c'est le chois possible le plus simple), et d'une autre comme une distance entre deux positions, où le premier cas représente plusieurs déplacements et le deuxième cas représente un seul déplacement.

Pour les valeurs suivant de  $x$  ( $0.031\mu m$ ,  $0.31\mu m$ ,  $1\mu m$ ,  $1000\mu m$ ) nous avons les graphes suivants :

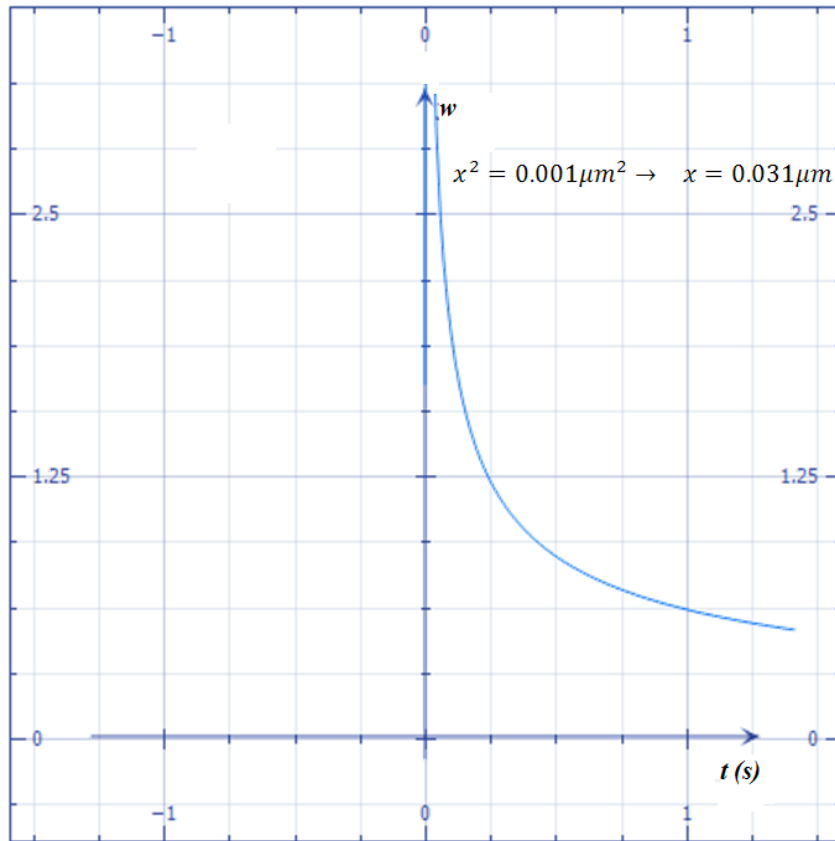


Figure 6.1 La densité de probabilité  $w(x, t)$  pour  $x = 0.031\mu m$

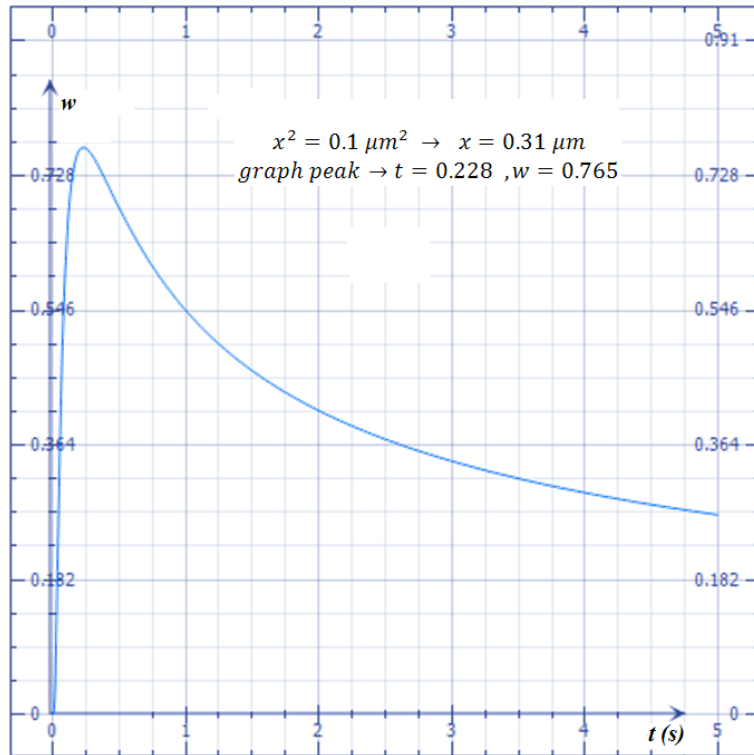


Figure 6.2 La densité de probabilité  $w(x, t)$  pour  $x = 0.31 \mu m$

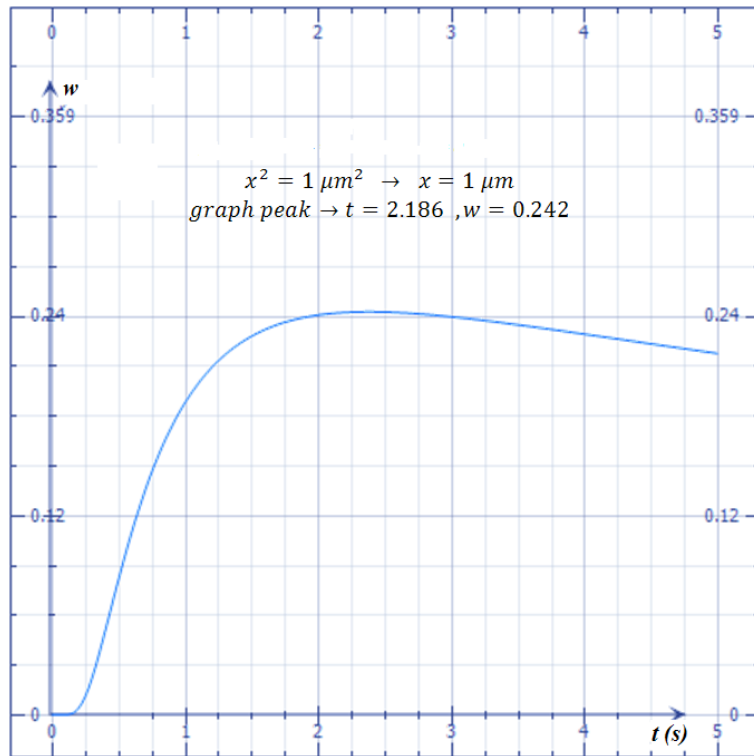
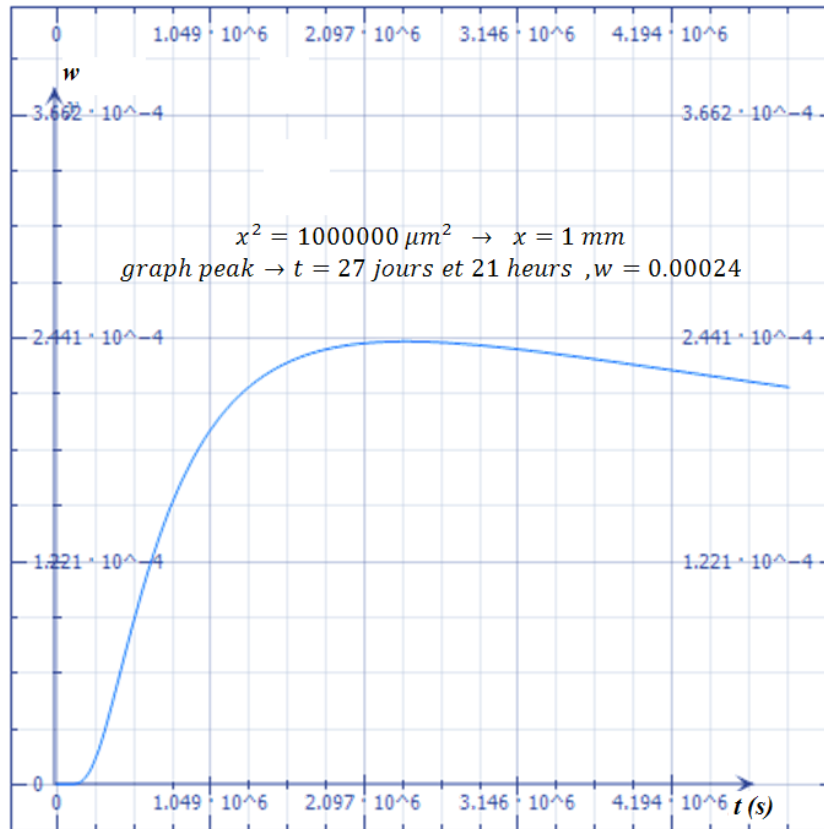


Figure 6.3 La densité de probabilité  $w(x, t)$  pour  $x = 1 \mu m$

Figure 6.4 La densité de probabilité  $w(x, t)$  pour  $x = 1000\mu\text{m}$ 

### Analyse et interprétations :

Généralement en remarque dans les figures 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 que l'allure des graphes est un peu différents pour les valeurs de  $x$  très petite inférieure à la taille de la particule en mouvement brownien ( $1\mu\text{m}$ ), mais depuis cette valeur l'allure des graphes commence à prendre des formes similaires (cette conclusion est prise par l'aide des autres graphes pour différent valeurs de  $x$  mais pour allégé nous avons juste présenté quatre graphes caractéristiques), maintenant nous allons analysé chaque graphe est discuté les résultats et les interprétations physiques.

1- dans la figure 6.1 ( $x = 0.031\mu\text{m}$ ) il semble que la densité de probabilité  $w$  vient de l'infini et diminue pour tendre vers 0 pour des valeurs de  $t$  très grand (infini), cela exprime le fait que la densité de probabilité est très grande dans les approximâtes de  $x_0 = 0$  ce qui fait que à n'importe quelle instant  $t$  la valeur moyenne (plus exactement dite l'espérance) des positions reste toujours  $x_0$  comme *Gouy* a remarqué, de même la diminution avec le temps exprime le fait la particule s'éloigne de la position initial, cela été noté comme résultat du calcul de l'exemple (5.1.1) du

cinquième chapitre, pour certain il semble qu'il ya une contradiction entre le fait que la valeur moyenne des positions est a tous temps est  $x_0$  bien que la probabilité diminué vers une valeurs nulle pour des position approximante de  $x_0$ , cela est expliqué brièvement par cité que la moyenne représente l'accumulation dans le temps des probabilités est  $x_0$  aura toujours la plus grandes valeurs, ce point sera clarifié de plus après l'analyse des graphes suivants.

Nous avons aussi noté le fait que la densité de probabilité est supérieurs à l'unité ce qui pose un problème de normalisation, il est clair que la densité de probabilité  $w$  tend vers l'infinité ci  $x$  et  $t$  tend simultanément vers 0, ce problème peut être résolue si on reprend le problème d'un point de vue physique à l'instant  $t \approx 0$  la particule n'a pas pratiquement sa position initiale  $x_0 = 0$ , et pour les valeurs approximâtes de  $x_0$  sont des valeurs interdit car il faut rappélé que les déplacements de la particule son le résultat des collisions avec les atomes du fluide et par conséquence les distances interatomique du fluide sont les limites de ces déplacement, autrement dite les déplacements de grandeurs atomique (plus précisément les déplacements inférieur à la distance intermoléculaire minimale du fluide) sont impossibles, cette contrainte physique est assuré par la constante de diffusion qui fait que chaque fluide impose les distance possible par son viscosité exprimé dans la constante de diffusion.

2- dans la figure 6.2 ( $x = 0.31\mu m$ ) la densité de probabilité  $w$  augment d'une valeur presque nulle pour atteindre rapidement un sommet correspondant à ( $t = 0.228$ ,  $w_{max} = 0.765$ ) puis diminue vers 0 pour  $t$  infini, physiquement cela explique le fait qu'au débit la position de notre particule en mouvement brownien est loin de  $x = 0.31\mu m$  ce qui explique la probabilité presque nulle, avec le temps (très petit) la particule commence à prendre des position  $x = 0.31\mu m$  ce qui est traduit par l'augmentation de la probabilité jusqu'à  $t = 0.228$  où la probabilité atteindre une valeur maximale puis diminue vers le 0, ce maximum veut dire physiquement que après  $t = 0.228$  la particule abandonne la position  $x = 0.31\mu m$  comme elle a fait avec la position initial.

3- la figure 6.3 et 6.4 confirme le comportement de la particule conclue depuis la figure 6.2, la particule en mouvement brownien fluctuer autour d'une position (augmentation de  $w$  jusqu'à une valeur maximale) puis quitte cette position pour fluctuer autour d'une autre.

On note aussi que la vitesse pour laquelle ces valeurs maximales sont atteindre se diminue pour des positions très grandes ce qui clair dans la figure 6.4 où la particule atteindre le sommet après

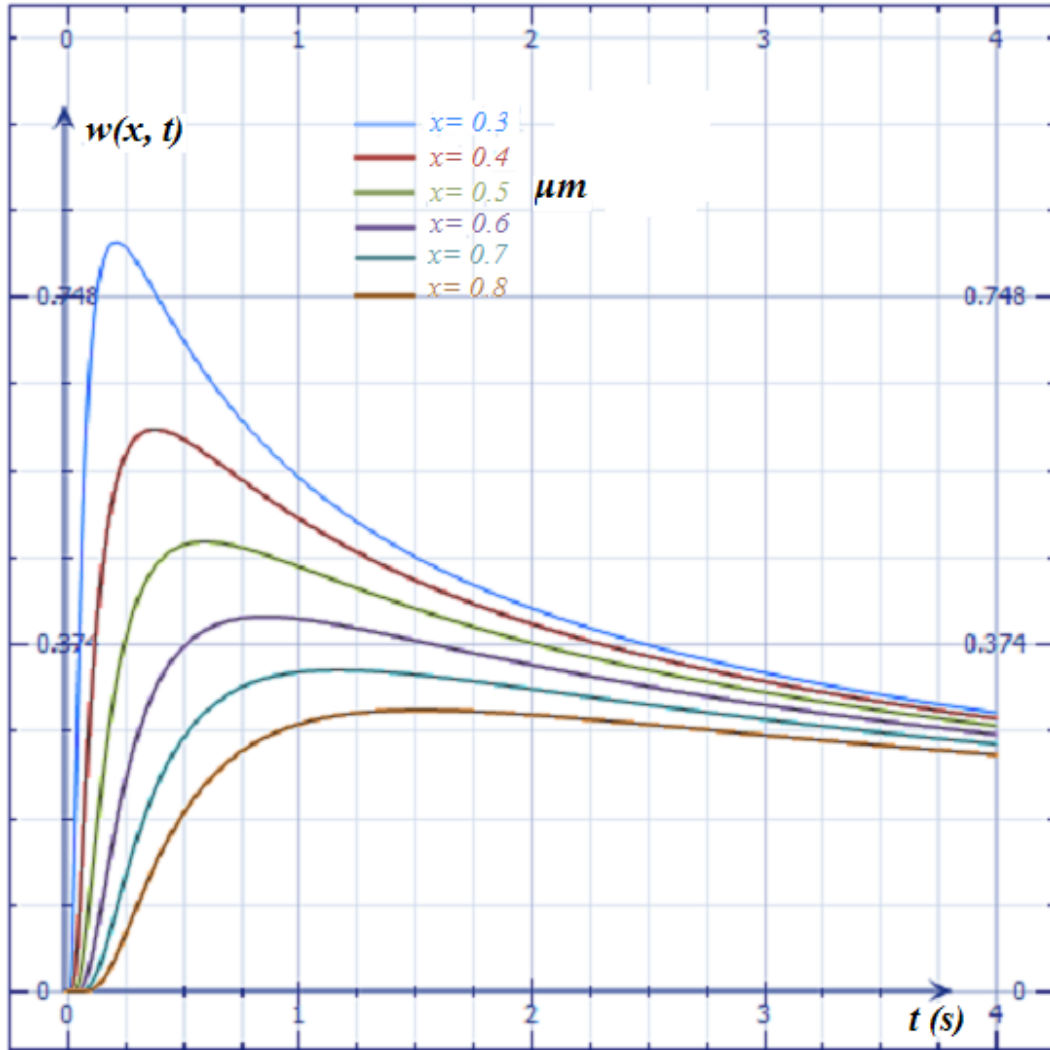
27 jours et 21 heures, de même on remarque que la densité de probabilité maximale  $w_{max}$  diminue pour des positions lointaines comme  $x = 1 \text{ mm}$  où  $w_{max} = 0.00024$  presque nulle, cela traduit le fait que la particule en mouvement brownien ne s'éloignera pas beaucoup de sa position initiale  $x_0$ , et que les grands déplacements sont moins probables, autrement dit que la particule va rarement se déplacer une grande distance sans aucune collision avec les atomes du fluide.

Enfin il faut préciser que les figures 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 ne sont pas tracées dans des repères homogènes à cause de la très grande variation avec le temps de la densité de probabilité, le graphique suivant figure 6.5 représente des valeurs de  $x$  très proches dans le même repère et montre comment les sommets de probabilité se déplacent d'un point à un autre avec le temps et diminuent pour des  $x$  plus grands.

### **Conclusion**

Suite à l'analyse des graphes 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5 nous avons pu souligner quelques points sur les déplacements d'une particule en mouvement brownien :

- Les déplacements inférieurs aux distances intermoléculaires du fluide sont interdits à la particule, ceci est dû à la présence de la constante de viscosité dans l'équation de la constante de diffusion.
- La particule en mouvement brownien se déplace en fluctuations d'un point à un autre, ce qui fait qu'on peut toujours prendre chaque point comme point de départ sans affecter l'évolution du système ou sa structure.
- La densité de probabilité varie très rapidement avec le temps (temps de variation des positions est très rapide ce qui affecte la notion de vitesse instantanée) et diminue par rapport à  $x$ , cela a fait que les positions lointaines et les grands déplacements sont très peu probables.

Figure 6.5  $w(x, t)$  pour un groupe des  $x$  fixes dans le même repère

### 6.3.3 Mouvement brownien dans un champ de forces

Les relations établies précédemment pour le processus de Wiener (mouvement brownien) sont dans ces majorités un peu idéaliste, car ils ne considèrent que les forces de collisions de la particule en mouvement brownien avec les atomes du fluide, ce type de processus est dit mouvement brownien libre.

Mais dans les expériences de la vie réelle ce type de mouvement brownien est pratiquement inexistant, car la particule en mouvement brownien est souvent soumise à un champ de forces (dites extérieures) qui va sans doute changer notre mouvement.

**L'expérience :**

Comme un exemple nous allons considérer le phénomène cas d'une particule (de rayon  $0.5\mu\text{m}$  à  $1\mu\text{m}$ ) dans un récipient transparent rempli par un liquide. Dans ce cas la particule va subir en plus des forces de collisions avec les atomes du liquide la force gravitationnelle, force de friction et la poussée d'Archimède. Pour se débarrasser de l'effet de la force gravitationnelle nous allons utiliser une particule de masse volumique très petite par rapport au liquide, de cette façon la particule va flotter sur le surface du liquide à cause de la poussée d'Archimède qui éliminera l'effet de la force gravitationnelle, donc il nous reste que la force de friction comme force extérieur.

**Observation :**

Pour améliorer les conditions d'observation de la particule en mouvement brownien, et par conséquent obtenir des mesures plus précises, nous allons considérer les instructions suivantes :

- 1- le récipient doit être d'une largeur mince, pour que la particule ne s'éloigne pas trop de notre côté d'observation.
- 2- la couleur de la particule doit être distinguable de celle du liquide pour une observation facile.
- 3- l'observation par le microscope doit être faite parallèlement à la surface du fluide, cela va nous permettre d'approximer le mouvement qui est à deux dimensions, et le réduire à une seule dimension par projection, ce cas est plus simple à traiter.

**Calculer la constante de diffusion**

L'observation va nous donner une ensemble de mesures de positions dans le temps, pour calculer la constante de diffusion  $D$  on utilise d'abord la méthode statistique bien connue pour calculer la variance, puis on retrouve  $D$  à l'aide de la relation suivante:

$$2\sigma^2 = 4D(t_f - t_i) \dots (6.32).$$

Le tableau suivant va représenter des résultats posés par nous à l'aide de l'analyse effectuée précédemment. Il contient 20 mesures que l'on suppose prises dans une période de 5 secondes ( $t_f - t_i = 5$ ).

$x_i$  représentent les positions occupées par la particule,  $n_i$  le nombre de fois pour lesquelles la particule a occupé la position  $x_i$ ,  $f_i$  la fréquence d'occupation  $f_i = \frac{n_i}{20}$ .

$x_i(\mu m)$	$n_i$	$f_i$	$f_i x_i(\mu m)$	$f_i x_i^2(\mu m^2)$
0	8	0.4	0	0
1.2	5	0.25	0.3	0.36
2	3	0.15	0.3	0.6
2.8	2	0.1	0.28	0.784
3	1	0.05	0.15	0.45
3.2	1	0.05	0.16	0.512
$\sum_i$	20	1	1.19	2.706

Statistiquement nous avons :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 f_i x_i^2 - (f_i x_i)^2 = 2.706 - 1.416 = 1.29 \mu m^2.$$

$$\Rightarrow D = \frac{\sigma^2}{2(t_f - t_i)} = \frac{1.29}{10} \approx 0.13 \mu m^2 \cdot s^{-1}$$

Depuis cette valeur on peut trouver la viscosité du liquide utilisé par la relation (2.22).

### **Le traitement par l'intégrale de chemin de Wiener**

Après avoir déduire la constante de diffusion expérimentalement, nous allons utiliser l'équation de Langevin pour trouver le fonctionnelle qui exprime l'effet de la force de friction dans l'intégrale de chemin de Wiener et par conséquent obtenir l'expression qui permet le calcul de la probabilité de transition.

Alors pour une particule en mouvement brownien de mass  $m$  soumise à une force de friction par le liquide  $f_d = -k\dot{x}$ , l'équation de Langevin s'écrit :

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} + f_s \dots (6.33),$$

où  $k$  est la constante de friction du fluide.

$$\Rightarrow \frac{k\dot{x}}{m} + \ddot{x} = \frac{f_s}{m} \dots (6.34),$$

La quantité  $\frac{f_s}{m}$ , force divisée par mass correspond physiquement à une accélération que nous allons noter  $\ddot{y}$  :



$$\frac{f_s}{m} = \ddot{y} \dots (6.35),$$

On met  $\frac{k}{m} = \rho$ , alors (6.34) devient :

$$\ddot{y} = \ddot{x} + \rho \dot{x} \dots (6.36),$$

on intégrant (6.36) deux fois sur  $t$ , on trouve :

$$y(t) = x(t) + \rho \int_0^t x(s) ds \dots (6.37).$$

La relation (6.37) est une équation intégrale du deuxième ordre où la solution est donnée par la relation suivante [24] :

$$x(t) = y(t) - \rho \int_0^t \exp\{\rho(s-t)\} y(s) ds \dots (6.38).$$

Cette relation représente la position  $x(t)$  en fonction d'une autre variable de position  $y(t)$ , cette dernière par conséquent de la relation (6.35) représente seulement une force stochastique  $f_s$  (collisions avec les atomes du fluide), autrement dite  $y(t)$  décrit un mouvement brownien libre, donc selon les relations (4.6) et (4.7) on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_w y = \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau \dot{y}^2(\tau) \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dy(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}} \\ \int_{\mathcal{J}(y_0,0; y,t)} d_w y = W(y, t | y_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(y-y_0)^2}{4Dt} \right\} \end{array} \right. \dots (6.39).$$

Pour calculer l'intégrale de chemin en fonction de la variable  $x(t)$  qu'elle exprime les positions de la particule soumise à la force de friction, on effectuant simplement le changement de variable provenu par la relation (6.37), selon les règles cité dans la (section 5.3) :

$dy(\tau) = J dx(\tau)$  Où  $J$  est le Jacobien du changement de variable  $y \rightarrow x$ , Pour calculer ce jacobien, on utilise la méthode des trapèzes pour découper la partie intégrale dans la relation (6.37), on met  $\tau_i = i\varepsilon$ ,  $i = \overline{0, n}$ , alors on obtient :

$$y(\tau_i) = x(\tau_i) + \rho \left( \frac{x(0)}{2} + x(\tau_1) + x(\tau_2) + \dots + x(\tau_{n-1}) + \frac{x(\tau_n)}{2} \right) \varepsilon \dots (6.40).$$

Le Jacobien est alors pour ce type de transformation est :

$$J = 1 + \rho t \dots (6.41).$$

Nous avons aussi par la première intégration sur  $t$  de (6.36) :

$$\dot{y} = \dot{x} + \rho x \Rightarrow \dot{y}^2 = (\dot{x} + \rho x)^2 = \dot{x}^2 + 2\rho\dot{x}x + \rho^2x^2 \dots (6.42).$$

Depuis (6.14) et (6.42) l'expression de  $d_w y$  dans (6.39) devient :

$$\begin{aligned} d_w y &= \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau (\dot{x}^2 + 2\rho\dot{x}x + \rho^2x^2) \right\} (1 + \rho t) \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}} \\ \Rightarrow d_w y &= \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau (2\rho\dot{x}x + \rho^2x^2) \right\} (1 + \rho t) \times \underbrace{\exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t \dot{x}^2 d\tau \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4D\pi d\tau}}}_{d_w x} \\ \Rightarrow d_w y &= \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau (2\rho\dot{x}x + \rho^2x^2) \right\} (1 + \rho t) d_w x \dots (6.43). \end{aligned}$$

Donc pour une particule de mass  $m$  en mouvement brownien soumise à la force de friction ( $f = -k\dot{x}$ ), le calcul de l'intégrale de chemin de Wiener se fait par la fonctionnelle  $F[x(\tau)]$  suivante :

$$F[x(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_{\tau=0}^t d\tau (2\rho\dot{x}x + \rho^2x^2) \right\} (1 + \rho t) \dots (6.44).$$

$$\int d_w y = \int F[x(\tau)] d_w x \dots (6.45).$$

### **Conclusion**

Nous avons vu que l'effet d'une force extérieure se traduit par l'introduction d'une fonctionnelle dans l'intégrale de chemin de Wiener, cette fonctionnelle est le résultat d'un changement de variable établi par l'équation de Langevin. Cela confirme l'interprétation fait par Smoluchowski exposé dans la section 2.4.5 où il a interprété l'effet d'une force extérieure par la brisure de la symétrie dans la marche aléatoire, cette brisure est exprimé dans notre méthode par le changement de variable où l'espace des  $y(t)$  représente un mouvement brownien libre (espace symétrique) et par contre l'espace des  $x(t)$  représente un mouvement brownien sous l'effet de la force de friction  $f = -k\dot{x}$  (espace asymétrique).

Cette méthode est donc très pratique et nous permis de traité plusieurs types de mouvement brownien sous l'effet des forces extérieurs.

## Conclusion et perspectives

Nos études approfondies sur les fondements de la théorie stochastique nous ont permis d'éclaircir plusieurs points d'analogies entre cette théorie et la théorie quantique, mieux que ça nous avons pu retrouver la constante inconnue de l'intégrale de chemin de Feynman par une approche stochastique en utilisons l'intégrale de chemin de Wiener, ce résultat s'ajoute aux travaux [22,23], qui mène vers une théorie *stochastique quantique*. Notre point de vu fondé sur la base de ce que nous avons pu obtenir comme résultats, stipule que les formules de la physique stochastique ne doivent pas être introduites directement dans les problèmes de la physique quantique sans tenir compte de la nature dynamique de ces problèmes où en doit utilisé des approximations, donc il est nécessaire de développer des formules nouveaux propre à la physique quantique en s'insérons du modèle stochastique existant.

Ce qu'ils concernent la physique stochastique et l'intégrale de chemin de Wiener, nous avons illustré les théories et les techniques les plus importants, avec des enrichissements personnelles par des rectifications et des interprétations qui vont aidées à mieux comprendre ces théories. Pour montré l'utilisation de certains de ces théories nous avons traité un problème pratique d'une particule en mouvement brownien soumise à des forces extérieurs (gravitation, poussée d'Archimède et friction) que nous avons réduisis à une seule force, afin d'utilisé l'équation de Langevin pour ramené le problème à un intégrale de chemin pour une particule libre (particule en mouvement brownien sans effet des forces extérieurs), cette technique que nous avons raffiné par des interprétations physique plus solides est très pratique, car on peut l'utilisée suivant le même démarche pour la plus part des forces et champs de forces physiques.

## Bibliographie

- [1] H. P. Hsu, *Theory and problems of probability, Random variables, and Random processes*, McGraw-Hill, New York, (1997).
- [2] A. Papoulis, *probability, Random variables, and Stochastic processes*, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [3] Peyton Z. Peebles Jr., *Probability, Random variables, and Random signal principles*, McGraw-Hill, New York (1987).
- [4] Philippe A. Martin, *Cours de physique statistique des processus irréversibles*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse (2001-2004).
- [5] Bertrand Duplantier, *Le mouvement brownien 'divers et ondoyant'*, séminaire Poincaré 1, pp 155-212, France (2005).
- [6] M.R. Von Smolan Smoluchowski, *Rozprawy Krakow A46, 257 (1906)* : Traduit Français, *Essai d'une théorie du mouvement brownien et de milieux troubles*, Bull. International de l'académie des sciences de Cracovie, pp 577-602 (1906).
- [7] M.R. Von Smolan Smoluchowski, *sur le chemin moyen parcouru par les molécules d'un gaz et sur son rapport avec la théorie de diffusion*, Bull. International de l'académie des sciences de Cracovie, pp 202-213 (1906).
- [8] R.H. Cameron and W.T. Martin, *Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations*, Bull. An. Math. Soc. S1 N°2, pp 73-90 (1945).
- [9] R.H. Cameron and W.T. Martin, *Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations*, Trans. An. Math. Soc. 58 N°2, pp 184-219 (1945).
- [10] R.H. Cameron and W.T. Martin, *Transformations of Wiener integrals under translations*, Ann. of. Math. vol 45, pp 386-396 (1944).
- [11] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. vol 20, N°2, pp 367-387 (1948).
- [12] M. Kac, *On distributions of certain Wiener functionals*, Trans. Am. Math. Soc. Vol65 N°1, pp 1-13 (1949).
- [13] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proc. 2<sup>nd</sup> Berkley symp. On Math. Statist. and Prob, Univ. of. Calif. Press, pp 189-215 (1951).

- [14] R. M. Mazo, *Brownian motion (Fluctuations, dynamics and applications)*, Clarendon press, Oxford (2002).
- [15] M. Chaichian and A. Demichev, *Path integrals in physics vol.1 (stochastic processes and quantum mechanics)*, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, (2001).
- [16] L. Gross, *Abstract Wiener spaces*, Proc. 5<sup>th</sup> of Berkley Symp on Math. Statist. And Prob, vol.2, part1, univ of Calif, pp 31-42 (1967).
- [17] S. S. Bayin, *Mathematical methods in science and engineering*, Wiley-Interscience (2006).
- [18] R. B. Ash and C. Doleans-Dode, *Probability and measure theory*, Academic press, (2000).
- [19] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World scientific, (1994).
- [20] J.S. Rosenthal, *First look at rigorous probability theory*, World scientific publishing company, (2006).
- [21] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, 7<sup>th</sup> edition, Academic press, (2007).
- [22] I. M. Gel'Fand and A. M. Yaglom, *Integration in functional spaces and its applications in quantum physics*, Journ. of Math. Phys, vol.1 N°1, pp 48-69, (1960).
- [23] F. Guerra, *Structural aspects of stochastic mechanics and stochastic field theory*; Phys. Rep. 77, pp 263, (1981)
- [24] A.D Polyanin and A. V Manzhirrov, *Handbook of integral equations*, Chapman and Hall CRC, (2008).

# *Résumé*

Ce mémoire s'intéresse aux concepts fondamentaux conduisant à l'élaboration d'une théorie stochastique pour les processus de Wiener.

Un autres point d'intérêt été de montrer l'obtention des différentes équations de la physique stochastiques, à partir de l'équation de Chapman-Kolmogorov, où nous avons constaté qu'elle présent des points de similitudes avec l'équation de Schrödinger.

Après une étude détaillée des notions de base de la physique stochastique, l'étude se focalisera sur l'intégrale de chemin de Wiener, où différentes techniques sont abordées.

Nous avons après utilisé le théorème de Feynman-Kac, pour retrouver sans aucune difficulté, l'équation de Schrödinger et l'expression du propagateur de Feynman, et déduire la constante inconnue de Feynman par une approche stochastique.

Des études ont également été menées sur le mouvement Brownien dans un champ de forces extérieures, en utilisant l'intégrale de chemin de Wiener et l'équation de Langevin.

Toute cette étude, permettra d'approfondir nos connaissances sur les processus stochastiques, et ouvrira un chemin conduisant à une théorie stochastique quantique bien fondée.

**Mots clés :** **Processus stochastiques, intégrale de Wiener, mouvement Brownien, physique quantique, intégrale de chemin, équations stochastiques.**

## ملخص

تتمحور هذه المذكرة حول دراسات معمقة اللازمة لبناء النظرية الستوكاستيكية لمعالج وينر. من جهة اخرى قمنا بتوضيح كيفية إستخراج المعادلات الستوكاستيكية المهمة من معادلة Chapman-Kolmogorov، و ذلك مكننا من توضيح العلاقة التي تربط هذه الأخيرة بمعادلة Schrödinger الكوانتية. ثم درسنا تكاملات المسار لـ Wiener أين ناقشنا طرق عديدة لحسابه. بعدها قمنا بإستعمال علاقة Feynman-Kac من أجل إستخراج معادلة Schrödinger بطريقة جد بسيطة مما سمح لنا بعدلك بالحصول على علاقة المنشور الكوانتي و إستخراج الثابت المجهول لـ Feynman متبعين طرق ستوكاستيكية بحتة. في النهاية قدمنا دراسة شاملة للحركة البراونية تحت تأثير حقل قوى خارجي، و ذلك بإستعمال تكاملات المسار لوينر مع معادلة Langevin . كل هذه الدراسات مكنت من تعميق معرفتنا بالفيزياء الستوكاستيكية ، فاتحتنا الطريق نحو نظرية كوانتية ستوكاستيكية. كلمات مفتاحية : معالج ستوكاستيكي ، تكامل المسار لوينر ، حركة براونية ، فيزياء كوانتية ، تكامل المسار ، معادلات ستوكاستيكية.

# *Abstract*

This thesis focuses on the basic concepts needed to the development of the stochastic Wiener process.

On the other hand we did show how to obtain the most important stochastic physics equations by mean of Chapman-Kolmogorov equation, where we did illustrate the similarities between the latter one and the quantum Schrödinger equation.

After those studies we did focus on Wiener path integral where we did discuss different calculus methods.

Then we did use Feynman-Kac formula to obtain in a simple way the Schrödinger equation, which did lead us to find the quantum propagator expression and Feynman unknown constant of proportionality by the mean of a stochastic approach only.

At last studies were also conducted on the Brownian motion under a field of external forces, using the Wiener path integral and Langevin equation.

All those studies will deepen our knowledge on the stochastic physics and open a path leading to a construction of a stochastic quantum theory.

*Keywords:* **stochastic processes, Wiener path integral, Brownian motion, quantum physics, path integral, stochastic equations.**