

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :  
Série :

**MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE**

**SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE**

**THEME**

**RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE**

Par

**NOUICER ZAHIA**

**SOUTENU LE : / / 2010**

**Devant le jury :**

**Président : L. GUECHI Prof. Univ. Mentouri-Constantine.**

**Rapporteur : S. R. ZOUZOU Prof. Univ. Mentouri-Constantine.**

**Examineurs : F. BENAMIRA Prof. Univ. Mentouri-Constantine.**

**M. T. MEFTAH Prof. Univ. Ouargla.**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La théorie de la relativité générale</b>	<b>6</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Le principe d'équivalence . . . . .	8
1.3	Forces gravitationnelles . . . . .	10
1.3.1	Relation entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ . . . . .	11
1.4	La limite Newtonienne . . . . .	16
1.5	Eléments d'analyse tensorielle . . . . .	18
1.5.1	Principe de covariance générale . . . . .	18
1.5.2	Vecteurs et tenseurs . . . . .	19
1.5.3	Algèbre tensorielle . . . . .	21
1.5.4	Densité tensorielle . . . . .	23
1.5.5	Transformation de la connexion affine . . . . .	26
1.5.6	Dérivation covariante . . . . .	27
1.5.7	Dérivée covariante le long d'une courbe . . . . .	32
1.6	La courbure . . . . .	35
1.6.1	Commutateur de deux dérivées covariantes . . . . .	39
1.6.2	Propriétés algébriques du tenseur de courbure . . . . .	40
1.6.3	Identité de Bianchi . . . . .	44
1.7	Les équations d'Einstein . . . . .	45
1.7.1	Contraintes sur la théorie de la gravitation . . . . .	45
1.7.2	Tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	46
1.7.3	Les équations d'Einstein . . . . .	47

<b>2</b>	<b>Métrieque statique à symétrie sphérique avec ou sans constante cosmologique</b>	<b>54</b>
2.1	Métrieque générale statique et isotrope . . . . .	54
2.2	La solution de Schwarzschild . . . . .	58
2.2.1	Les équations générales du mouvement . . . . .	61
2.2.2	La déflexion de la lumière . . . . .	65
2.3	L'effet de lentille gravitationnelle . . . . .	71
2.3.1	Cadre et hypothèses de l'étude . . . . .	72
2.3.2	Passage de l'angle de coordonnée à l'angle physique . . . . .	78
2.3.3	Passage de la distance de coordonnée à la distance d'aire . . . . .	81
2.3.4	Passage du décalage spectral à la distance d'aire . . . . .	83
<b>3</b>	<b>L'effet de lentille fort dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus</b>	<b>86</b>
3.1	Principe cosmologique . . . . .	86
3.1.1	Métrieque de Robertson-Walker . . . . .	87
3.1.2	Déplacement spectral vers le rouge . . . . .	88
3.1.3	Dynamique de l'expansion . . . . .	90
3.2	L'effet de lentille fort dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus . . . . .	95
3.2.1	Déflexion de la lumière dans le cadre de la métrieque de Kottler . . . . .	95
3.2.2	La solution d'Einstein-Straus avec constante cosmologique . . . . .	97
3.2.3	Intégration de la géodesique du photon . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>126</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>

# Remerciements

Je tiens à remercier mon encadreur M. Sami Ryad ZOUZOU, Professeur à l'université de Constantine, pour m'avoir confié ce sujet et pour son aide, sa disponibilité et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, M. Larbi GUECHI, Professeur à l'université de Mentouri-Constantine, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs : M. Mohamed Tayeb MEFTAH, professeur à l'université de Ouargla, M. Farid BENAMIRA, Professeur à l'université de Mentouri-Constantine, qui ont bien voulu accepté de juger ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille, en particulier à ma mère, et à mon père qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

# Introduction

La relativité générale d'Einstein est aujourd'hui admise comme la théorie relativiste de la gravitation. Les prédictions de la relativité générale sont en parfait accord avec les observations expérimentales. Ceci est en particulier le cas pour la déflexion de la lumière et le temps de retard, qui constituent deux tests parmi les quatre tests classiques de la théorie de la relativité générale.

Le travail exposé dans ce manuscrit a traité à l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière.

Jusqu'à tout récemment, la croyance générale était que la constante cosmologique n'a pas d'effet sur la déflexion de la lumière. La raison avancée étant que la constante cosmologique disparaissait de l'équation de la trajectoire. Rindler et Ishak [1] remirent en cause cette croyance, en arguant qu'il ne suffisait pas de considérer uniquement l'équation de trajectoire mais qu'il fallait également tenir compte de la métrique elle-même. Il s'ensuivit une grande polémique. Sereno [2],[3], Schüker [4],[5], Miraghaei et Nouri-Zonoz [6], Kantowski, Chen et Dai [7] confirmaient les résultats de Rindler et Ishak tandis que Khriplovich et Pomeransky [8], Park [9], Gibbons, Warnick et Werner [10], Simpson, Peacock et Heavens [11] les infirmaient. En fin de compte, la polémique semble avoir tournée en faveur de Rindler et Ishak. Dans cette thèse, nous visons à réétudier le problème de l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière, émise par une source  $S$ , un quasar, par une lentille gravitationnelle  $L$ , qui est typiquement un amas de galaxies.

Les calculs sont fait dans le cadre de deux solutions différentes : La solution de Kottler (appelée aussi solution de Schwarzschild-de Sitter) et la solution d'Einstein-Straus. La métrique de Kottler est appropriée au cas statique, à symétrie sphérique, en présence d'une constante cosmologique  $\Lambda$ . Dans ce cas on suppose que toutes les masses de l'univers sont négligeables vis à vis de la masse de la lentille et que l'observateur aussi bien que la source sont au repos par rapport à la lentille.

La métrique d'Einstein-Straus résulte du raccordement de la métrique de Kottler à l'in-

térieur d'une sphère centrée sur la lentille appelée sphère de Schücking et de la métrique de Friedmann (modèle  $\Lambda$ CDM) à l'extérieur de celle-ci. Cette solution nous affranchit des hypothèses simplificatrices ci-dessus mentionnées. On permet à l'observateur d'être en mouvement par rapport à la lentille et on tient compte des masses des autres galaxies par une poussière homogène et isotrope, l'observateur étant pris comobile par rapport à la poussière.

Le manuscrit est organisé comme suit : Après une introduction consacrée aux motivations de ce travail, le premier chapitre est un exposé assez complet des notions de base de la relativité générale : le principe d'équivalence, le principe de covariance générale, le calcul tensoriel, le tenseur métrique, la connexion affine, le tenseur de Ricci, le scalaire de courbure, les équations d'Einstein sont considérés à tour de rôle. Ce premier chapitre permet de comprendre la suite du manuscrit, sans avoir à se référer à d'autres supports de documentation.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par redériver la métrique de Schwarzschild, métrique statique, à symétrie sphérique en l'absence de la constante cosmologique, obtenue pour la première fois par Schwarzschild en 1916. Nous faisons de même pour la métrique de Kottler, appelée aussi métrique de Schwarzschild-de Sitter appropriée au cas statique, à symétrie sphérique en présence de la constante cosmologique. Le calcul de la déflexion de la lumière est entrepris dans le cadre des modèles de Schwarzschild et de Kottler.

Dans le troisième chapitre, nous exposons d'abord le principe cosmologique, qui nous mène à la métrique de Robertson-Walker, avec le facteur d'échelle à déterminer dans le cadre du modèle  $\Lambda$ CDM. La solution d'Einstein-Straus résulte alors du raccordement des solutions de Kottler, à l'intérieur de la sphère de Schücking, et de Friedmann à l'extérieur de celle-ci. Le calcul de la déflexion de la lumière est ensuite entrepris dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus.

Cette thèse s'achève par une conclusion générale, où sont résumés les résultats du travail. Nous utiliserons dans ce mémoire les conventions usuelles du calcul tensoriel. Rappelons en particulier que la virgule dénote la dérivée usuelle, tandis que le point virgule dénote la dérivée covariante. Nous réserverons les indices latins pour les coordonnées spatiales uniquement (*p.ex* :  $i = 1, 2, 3$ ), tandis que les indices grecs s'appliqueront aux coordonnées spatio-temporelles (*p.ex* :  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ). Nous travaillerons dans des unités où la vitesse de la lumière  $c$  vaut 1.

# Chapitre 1

## La théorie de la relativité générale

Nous nous sommes, dans ce chapitre, fortement inspirés des références [12], [13] et [14].

### 1.1 Introduction

La loi de Newton relative à la gravitation implique une action à distance instantanée qui est incompatible avec la relativité restreinte. Celle-ci introduit une vitesse limite de propagation, la vitesse de la lumière  $c$ , et exige que les équations soient invariantes de forme sous les transformations de Lorentz. Le problème posé au début de 20<sup>ème</sup> siècle était de modifier à la fois l'équation de Poisson du potentiel de gravitation  $\phi$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \tag{1.1}$$

où  $\rho$  désigne la densité de masse, qui est la source du champ, et les équations du mouvement des particules.

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{1.2}$$

afin d'en faire des équations covariantes sous les transformations de Lorentz, condition imposée à toutes les lois de la physique par le principe de relativité restreinte.

La plupart des tentatives d'obtenir une loi fondamentale pour la force gravitationnelle qui ont vu le jour à l'époque sont passées aux oubliettes.

Dès que les déductions physiques de la relativité restreinte ont atteint un certain niveau de développement et de confiance, Einstein s'est attaché à étendre son principe de relativité à une classe de référentiels plus large que celle des observateurs inertiels privilégiés de la relativité restreinte. Cette extension a été rendue possible par l'introduction du "principe d'équivalence". Rappelons que, dans la mécanique newtonienne, un système placé dans un champ de gravitation constant et homogène est équivalent à un système uniformément accéléré. Einstein érige en principe le fait que cette équivalence doit pouvoir s'étendre à tous les processus physiques. Ceci est à la base de la relativité générale. Einstein réalise que cette théorie du champ de gravitation homogène basée sur le principe d'équivalence rompt le cadre de la relativité restreinte. Parce que la vitesse de la lumière et le taux de variation d'une horloge dépendent du potentiel de gravitation, la définition qu'il a donnée de la simultanéité n'est plus valable et les transformations de Lorentz perdent leurs sens. De ce point de vue écrit-il : "la relativité restreinte ne peut être correcte qu'en l'absence de gravitation " [15]. Le champ de gravitation est une quantité physique qui doit être reliée aux autres quantités physiques par des lois. On doit exiger que ces lois soient covariantes sous un groupe plus large de transformations. La question qui se pose est donc d'élaborer une théorie cohérente, basée sur le principe d'équivalence, mais valable pour un champ non homogène.

En collaboration avec M. Grossmann, Einstein fait une avancée considérable. Ils montrent qu'en utilisant des coordonnées curvilignes arbitraires de l'espace-temps, le carré de l'élément de longueur devient une forme quadratique en les différentielles avec certains coefficients  $g_{\mu\nu}$ . Ils montrent également que i) bien qu'introduits comme objets géométriques ce sont ces  $g_{\mu\nu}$  qui doivent être vus comme les grandeurs physiques appropriées à la description du potentiel de gravitation dans un système de coordonnées donné et ii) que l'introduction de ces  $g_{\mu\nu}$  dans les équations du mouvement des particules et dans les équations du champ électromagnétique dans le vide donne à ces équations une forme covariante générale sous tous les changements de coordonnées. Seules les équations du champ de gravitation lui-même n'ont pas encore la bonne forme.

Entre 1914 et 1915, Einstein se montre plus rigoureux dans la recherche des équations du champ et revient au principe de covariance générale. C'est dans la théorie de Riemann de l'espace courbe qu'il puise les éléments géométriques qui lui faisaient défaut. Il réussit à



écrire des équations covariantes pour les coefficients de la métrique qui obéissent à toutes les contraintes imposées par la physique. Dans une série d'articles en 1915, publiés dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin, Einstein présente ses équations et les met à l'épreuve : Il explique l'avance de périhélie de Mercure et obtient les 43'' d'arc par siècle en parfait accord avec les observations astronomiques et prédit une déviation de 1.7'' des rayons lumineux dans le champ de gravitation du soleil, double de celle qu'il avait calculée précédemment dans le cadre des champs constants [15]. Ces résultats qu' Einstein dérive en utilisant une solution approchée de ses équations du champ sont rapidement confirmés par ceux de Schwarzschild avec sa solution exacte à symétrie sphérique.

## 1.2 Le principe d'équivalence

La notion de masse recouvre deux notions physiques a priori différentes l'une de l'autre :

1° – La masse inertielle  $m_I$  qui mesure l'inertie d'un corps, c'est à dire sa résistance au changement entre deux états de mouvement.

2° – La masse gravitationnelle  $m_G$  qui mesure la réponse d'un corps à un champ de gravitation, tout comme la charge électrique mesure la réponse à un champ électrique.

Le principe d'équivalence est fondé sur l'égalité de la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Cette égalité avait déjà été testée par Newton, puis vérifiée de façon plus précise par Bessel en 1830. En 1889, Roland von Eötvös, réussit à prouver que le rapport de ces masses ne varie pas d'une substance à l'autre de plus de  $10^{-9}$  [15].

La masse inertielle  $m_I$ , est celle qui figure dans la loi de Newton  $\vec{F} = m_I \vec{a}$ . Pour un champ de gravitation constant,  $\vec{F} = m_G \vec{g}$ . L'égalité  $m_I = m_G = m$  a comme conséquence que le mouvement d'un corps soumis à la seule force de gravitation est régi par l'équation

$$m_I \vec{a} = m_G \vec{g} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}. \quad (1.3)$$

Tous les corps tombent avec la même accélération, quelle que soit leur masse. C'est la conclusion à laquelle Galilée était arrivé par ces célèbres expériences réalisées du haut de la tour de Pise. Dans le cadre de la théorie de Newton, on en déduit qu'un observateur en chute libre dans un champ de gravitation homogène et constant  $\vec{g}$  ne peut pas détecter la présence de ce champ.

Voyons cela pour un système de  $N$  particules non relativistes, soumises à des forces du type  $\vec{F}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$  et à un champ gravitationnel constant  $\vec{g}$ . Pour l'observateur  $O$  au repos dans le champ de gravitation, les équations du mouvement de la  $j$ -ème particule sont données par

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \sum_{k \neq i} \vec{F}(\vec{x}_i - \vec{x}_k). \quad (1.4)$$

Pour l'observateur  $O'$ , en mouvement uniformément accéléré par rapport à  $O$  dans la direction du champ

$$\vec{x} = \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t = t', \quad (1.5)$$

les équations du mouvement prennent la forme

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i'}{dt^2} = \sum_{k \neq i} \vec{F}(\vec{x}_i' - \vec{x}_k'), \quad (1.6)$$

où la force de gravitation a disparu, compensée par une force d'inertie. Inversement, en partant de l'équation (1.6) et en y substituant le changement de coordonnées

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t' = t, \quad (1.7)$$

on reproduit l'équation (1.4) avec une force de gravitation. Pour l'observateur  $O$  qui utilise les coordonnées  $(\vec{x}, t)$  et pour l'observateur  $O'$  qui utilise les coordonnées  $(\vec{x}', t')$  les lois de la mécanique sont inchangées mais pour le premier, il y a un champ de gravitation et pour le second, il n'y en a pas. Puisque l'une peut être éliminée par l'autre, force gravitationnelle et force d'inertie sont équivalentes dans les équations de la mécanique.

Si le champ de gravitation n'est plus constant  $\vec{g}(\vec{x}, t)$ , il ne peut pas être globalement éliminé par une simple accélération (1.5) du référentiel. On doit cependant pouvoir localement (dans des régions d'espace-temps suffisamment petites pour que les variations spatiale et temporelle du champ de gravitation puissent être négligées) annuler ce champ en se plaçant dans un référentiel approprié.

Einstein étend cette équivalence à toutes les lois de la physique et l'érige en principe qui s'énonce comme suit : "tous les effets locaux d'un champ de gravitation sont identiques aux effets produits par une accélération du référentiel".

Les référentiels dans lesquels il n'y a, localement, ni force d'inertie ni force gravitationnelle (que l'on ne peut pas de toute façon distinguer) sont appelés "référentiels localement inertiels". Ce sont des référentiels en chute libre. Dans de tels référentiels, les lois locales de la physique prennent la même forme que celle qu'elles ont dans les référentiels inertiels de l'espace-temps de Minkowski.

### 1.3 Forces gravitationnelles

Considérons le mouvement d'une particule massive sous la seule influence d'un champ de gravitation. En vertu du principe d'équivalence, il existe un système de coordonnées localement inertiel  $\xi^\alpha$  dans lequel la trajectoire est une droite de l'espace-temps

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (1.8)$$

où  $\tau$  est le temps propre défini comme

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (1.9)$$

et  $\eta_{\alpha\beta}$  est le tenseur de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Un autre système de coordonnées  $x^\mu$ , qui peut être celui d'un observateur au repos dans le laboratoire ou de tout autre observateur, est relié au système de coordonnées  $\xi^\alpha$  par

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu), \quad \det \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \neq 0. \quad (1.11)$$

L'équation de trajectoire (1.8) peut se mettre sous la forme

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.12)$$

En multipliant par  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ , et en faisant usage de la relation

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\lambda_\mu, \quad (1.13)$$

où  $\delta^\lambda_\mu$  est le symbole de Kronecker est défini par

$$\delta^\lambda_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \lambda \\ 0 & \text{si } \mu \neq \lambda \end{cases}, \quad (1.14)$$

on obtient les équations du mouvement dans le système de coordonnées  $x^\lambda$

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.15)$$

où on a posé

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \quad (1.16)$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  est désigné sous le nom de connexion affine ou symboles de Christoffel. Dans le système de coordonnées  $\{x^\mu\}$ , le temps propre s'exprime comme

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.17)$$

où  $g_{\mu\nu}$ , le tenseur métrique, est défini comme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (1.18)$$

Pour une particule de masse nulle, les équations (1.15) restent valables à condition de remplacer le temps propre  $\tau$  ( $d\tau^2 = 0$  dans ce cas) par un autre paramètre  $p$ , appelé paramètre affine, et l'équation (1.17) est remplacée par

$$0 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{dp} \frac{d\xi^\beta}{dp} = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}. \quad (1.19)$$

### 1.3.1 Relation entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

La forme des équations du mouvement (1.15) indique que la force gravitationnelle est déterminée par les  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , tandis que l'équation (1.17) montre que l'intervalle de temps propre entre deux événements infiniment voisins est déterminé par les  $g_{\mu\nu}$ .

Nous allons montrer que la métrique  $g_{\mu\nu}$  peut être interprétée comme le potentiel gravitationnel, dans la mesure où ses dérivées définissent les forces  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . En dérivant (1.18) par rapport à  $x^\lambda$ , on obtient

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.20)$$

En multipliant l'équation (1.16) par  $\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda}$ , on en tire que

$$\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (1.21)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (1.22)$$

Il est résulte que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho. \quad (1.23)$$

En multipliant les deux membres de (1.23) par le tenseur métrique inverse  $g^{\sigma\nu}$ , qui satisfait la relation

$$g^{\sigma\nu} g_{\rho\nu} = \delta^\sigma_\rho, \quad (1.24)$$

on obtient les composantes de la connexion affine en termes du tenseur métrique et du tenseur métrique inverse

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (1.25)$$

ou

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} [\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}], \quad (1.26)$$

où on a introduit la notation

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.27)$$

La connexion affine  $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho$ , notée également  $\{\rho_{\mu\lambda}\}$ , est donc symétrique dont l'échange des deux indices du bas ( $\mu$  et  $\lambda$ ).

Donc, la connexion affine s'exprime en fonction du tenseur métrique et ses dérivées premières, c'est à dire que toute l'information sur le champ gravitationnel est codée dans le tenseur métrique.

Une conséquence très importante de la relation entre la connexion affine et le tenseur métrique est que l'équation du mouvement d'une particule en chute libre est cohérente avec la définition du temps propre. En effet

$$\frac{d}{d\tau} \left[ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}. \quad (1.28)$$

En utilisant l'équation de la géodésique (1.15), ainsi que l'équation (1.22), l'équation (1.28) peut être mise sous la forme

$$\frac{d}{d\tau} \left[ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = [-g_{\sigma\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma + g_{\sigma\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma] \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.29)$$

Le second membre de l'équation (1.29) est un produit de deux facteurs l'un symétrique et l'autre antisymétrique dans l'échange des indices  $\mu$  et  $\nu$ , ce qui entraîne sa nullité. Par conséquent,

$$\frac{d}{d\tau} \left[ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c, \quad (1.30)$$

où  $c$  représente la constante du mouvement, qui peut être déterminée en utilisant les conditions initiales

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.31)$$

d'où

$$-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1. \quad (1.32)$$

Il s'ensuit que  $c$  vaut 1. Pour une particule sans masse, la condition initiale est  $c = 0$  (ou  $\tau$  est remplacé par un paramètre affine  $p$ ) et l'équation du mouvement garantit que  $d\tau^2 = 0$ .

Une autre conséquence de la relation (1.26) est qu'on peut retrouver l'équation du mouvement d'une particule en chute libre, en partant d'un principe variationnel. Considérons une particule en chute libre. L'intervalle de temps propre  $T_{AB}$  entre deux points  $A$  et  $B$  est donné par :

$$T_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \frac{d\tau}{dp} dp, \quad (1.33)$$

où  $p$  est un paramètre arbitraire continu qui décrit la courbe entre deux points  $A$  et  $B$ , et est appelé paramètre affine.

En utilisant la définition du temps propre (1.17), on obtient

$$T_{AB} = \int_A^B \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp. \quad (1.34)$$

Cette intégrale est invariante sous un changement différentiable de paramétrisation  $p \rightarrow p'(p)$ .  $x^\mu(p)$  décrit la trajectoire de la particule test qui doit être une fonction différentiable et monotone du paramètre  $p$ .

Faisons maintenant une variation arbitraire du chemin :

$$x^\mu(p) \rightarrow x^\mu(p) + \delta x^\mu(p), \quad |\delta x^\mu(p)| \ll 1, \quad (1.35)$$

en maintenant les deux points extrêmes  $A$  et  $B$  fixes, c'est à dire que

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(p_A) &= 0, \\ \delta x^\mu(p_B) &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'intervalle de temps propre devient :

$$T_{AB} + \delta T_{AB} = \int_A^B \left\{ -g_{\mu\nu}(x^\rho + \delta x^\rho) \frac{d}{dp}(x^\mu + \delta x^\mu) \frac{d}{dp}(x^\nu + \delta x^\nu) \right\}^{1/2} dp. \quad (1.37)$$

Si on fait un développement en série de puissances du tenseur métrique jusqu'au premier ordre

$$g_{\mu\nu}(x^\rho + \delta x^\rho) = g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda + 0(\delta x)^2, \quad (1.38)$$

alors

$$\begin{aligned} T_{AB} + \delta T_{AB} = \int_A^B \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right. \\ \left. - g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{d\delta x^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp, \end{aligned} \quad (1.39)$$

ou encore

$$T_{AB} + \delta T_{AB} = \int_A^B \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}}{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} \right\}^{1/2} dp. \quad (1.40)$$

Si on fait usage de l'approximation  $(1+x)^n = 1+nx$ ,  $|x| \ll 1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
T_{AB} + \delta T_{AB} &= \int_A^B \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} dp - \int_A^B \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{-1/2} \\
&\quad \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\} dp.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Il s'ensuit que

$$\delta T_{AB} = - \int_A^B \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{-1/2} \left\{ + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\} dp. \tag{1.42}$$

D'autre part, l'élément d'intégration  $d\tau$  peut s'écrire comme

$$\frac{d\tau}{dp} = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}}, \tag{1.43}$$

d'où

$$\delta T_{AB} = - \int_A^B \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau. \tag{1.44}$$

En intégrant par parties le deuxième terme du membre de droite de l'équation (1.44), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_A^B g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau &= g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \Big|_A^B - \\
&\quad \int_A^B \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

En tenant compte de  $\delta x^\mu(\tau_A) = \delta x^\mu(\tau_B) = 0$ , (1.45) se simplifie en

$$\int_A^B g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = - \int_A^B \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) d\tau. \tag{1.46}$$

Comme on peut toujours permuter des indices muets, alors

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{1.47}$$

Par conséquent,

$$\delta T_{AB} = \int_A^B \left\{ \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right\} \delta x^\lambda d\tau. \tag{1.48}$$



En utilisant la relation (1.22) exprimant la dérivée du tenseur métrique en terme de la connexion affine, on obtient finalement

$$\delta T_{AB} = \int_A^B \left( \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} + \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} \right) g_{\lambda\nu} \delta x^{\lambda} d\tau. \quad (1.49)$$

En imposant à la variation de l'élément de ligne d'être stationnaire

$$\delta T_{AB} = 0, \quad (1.50)$$

et en tenant compte du fait que  $\delta x^{\lambda}$  est arbitraire, on arrive à

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} + \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} = 0, \quad (1.51)$$

qui n'est autre que l'équation du mouvement d'une particule test avec une masse arbitraire différente de zéro. La même démonstration peut être entreprise dans le cas d'une particule de masse nulle sauf que  $\tau$  doit être remplacé par une autre paramètre affine.

## 1.4 La limite Newtonienne

Considérons le cas d'une particule qui se meut lentement dans un champ de gravitation faible et stationnaire (les  $g_{\lambda\nu}$  ne dépendent pas de  $x^0 = t$ ). En négligeant dans ce cas  $\frac{dx^k}{d\tau}$  par rapport à  $\frac{dt}{d\tau}$ , l'équation (1.51) se simplifie en

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^{\mu} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \simeq 0. \quad (1.52)$$

Le champ gravitationnel étant stationnaire, toutes les dérivées de  $g_{\lambda\nu}$  par rapport au temps sont nulles et par conséquent

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{1}{2} g^{\mu i} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (1.53)$$

L'hypothèse du champ faible permet d'introduire l'approximation suivante pour le tenseur métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (1.54)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est le tenseur de Minkowski. De sorte qu'au premier ordre en les  $h$

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu i}\frac{\partial}{\partial x^i}h_{00}. \quad (1.55)$$

On distingue deux cas :

$$1^{\circ} - \mu = 0, \Gamma_{00}^0 = 0,$$

et l'équation (1.52) devient

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} \simeq 0. \quad (1.56)$$

En intégrant cette équation on obtient

$$t(\tau) \simeq c\tau + c', \quad (1.57)$$

où  $c$  et  $c'$  sont des constantes d'intégration.

$$2^{\circ} - \mu = j, \text{ l'équation (1.52) devient}$$

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0. \quad (1.58)$$

D'autre part,

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} \simeq \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^j}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^j}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right) + \frac{dx^j}{dt}\frac{d^2t}{d\tau^2}.$$

En utilisant l'équation (1.57), on obtient

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} \simeq \frac{d^2x^j}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (1.59)$$

L'équation (1.58) peut alors se réécrire comme

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}h_{00} \simeq 0, \quad (1.60)$$

ou sous forme trivectorielle

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}. \quad (1.61)$$

L'équation de Newton correspondante est

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (1.62)$$

où  $\phi$  est le potentiel gravitationnel. Dans le cas d'un corps sphérique de masse  $M$

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (1.63)$$

où  $G$  est la constante de Newton.

La comparaison des équations (1.61) et (1.62) donne

$$h_{00} \simeq -2\phi + \text{constante}. \quad (1.64)$$

Si  $\phi$  s'annule à l'infini, comme c'est le cas pour un corps sphérique de masse  $M$ , cette constante doit être prise nulle si on veut que  $h_{00} \rightarrow 0$  à l'infini. Dans ce cas

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi). \quad (1.65)$$

Cette dernière équation constitue le lien entre le potentiel gravitationnel de Newton et la composante  $g_{00}$  du tenseur métrique. Autrement dit, elle constitue le lien entre la théorie de Newton et la théorie d'Einstein.

## 1.5 Eléments d'analyse tensorielle

Nous allons dans ce qui suit donner un aperçu sur l'analyse tensorielle, qui constitue un outil pour la formulation de la relativité générale.

### 1.5.1 Principe de covariance générale

En partant des équations de la relativité restreinte dans un référentiel localement inertiel, nous obtenons par un changement de coordonnées de nouvelles équations incluant les effets gravitationnels. On pourrait poursuivre ainsi, mais les calculs deviendraient rapidement fastidieux. Il existe une méthode équivalente mais beaucoup plus élégante basé sur le "principe de covariance générale". Le principe de covariance générale stipule qu'une équation physique est valable dans un champ gravitationnel quelconque si

1) L'équation est valable en l'absence de gravitation, c'est à dire qu'elle est en accord avec les lois de la relativité restreinte lorsque  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  et  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ .

2) L'équation est généralement covariante : elle garde la même forme sous une transformation générale de coordonnées.

La seconde condition revient à exiger que l'équation exprime qu'un certain tenseur est nul. En effet, si les composantes d'un tenseur sont toutes nulles dans un certain système de coordonnées alors elles sont nulles dans toute autre système de coordonnées déduit de précédent par une transformation générale de coordonnées.

Comme le principe d'équivalence est seulement valable localement, l'espace plat de Minkowski n'est pas approprié à la description d'un champ de gravitation. Nous sommes donc naturellement conduits à considérer l'espace-temps comme une variété métrique courbe et à étudier le champ de tenseurs définis sur une telle variété.

Seul le tenseur métrique et ses dérivées premières interviennent car le principe de covariance générale n'est valable qu'à une échelle qui est petite comparativement à l'échelle caractéristique d'un champ gravitationnel.

## 1.5.2 Vecteurs et tenseurs

Par définition, un scalaire est un objet qui reste invariant sous une transformation générale de coordonnées  $x \rightarrow x'$ . Le temps propre  $d\tau^2$ , le nombre  $\pi$ , la célérité de la lumière  $c$  sont des exemples de scalaire.

On appelle un vecteur contravariant  $v^\mu$  un objet qui se transforme comme

$$v^\mu \rightarrow v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \quad (1.66)$$

sous une transformation générale de coordonnées

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu.$$

De même on appelle vecteur covariant  $w_\mu$  un objet qui se transforme comme

$$w_\mu \rightarrow w'_\mu = w_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu},$$

sous une transformation générale de coordonnées.

La différentielle  $dx^\mu$  constitue un prototype de vecteur contravariant. Effectivement, en utilisant les règles du calcul différentiel

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu.$$

De même  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  constitue un prototype de vecteur covariant. En effet, sous un changement de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Un tenseur est une généralisation de la notion de vecteur. On appelle un  $(p, q)$  tenseur un objet  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  avec  $p$  indices contravariants et  $q$  indices covariants, se transformant comme

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q},$$

sous une transformation de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ .  $n = p + q$  est appelé l'ordre du tenseur. Il s'ensuit qu'un vecteur contravariant est un  $(1, 0)$  tenseur et qu'un vecteur covariant est un  $(0, 1)$  tenseur.

## Tenseur métrique

Partons de la définition de  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.67)$$

Si on applique une transformation générale de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}, \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Si on fait usage de (1.67), on obtient

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (1.69)$$

$g_{\mu\nu}$  se transforme donc comme un  $(0, 2)$  tenseur. Il est facile de montrer que l'inverse  $g^{\mu\nu}$  du tenseur métrique, défini comme

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma,$$

où  $\delta^\mu{}_\sigma$  est le symbole de Kronecker, se transforme comme un  $(2,0)$  tenseur

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}.$$

Nous allons voir plus tard, que le tenseur métrique et le tenseur métrique inverse servent respectivement à abaisser et à élever les indices d'un tenseur.

### Symbole de Kronecker

Il s'agit ici de montrer que le symbole de Kronecker est un  $(1,1)$  tenseur.

Soit un  $(1,1)$  tenseur  $A^\mu{}_\nu$ , dont les composantes sont confondues avec celle du symbole de Kronecker dans un certain système de coordonnées, c'est à dire

$$A^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu,$$

dans un certain système de coordonnées  $x^\mu$ .

Sous un changement de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ,  $A^\mu{}_\nu$  se transforme en

$$\begin{aligned} A'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^\rho{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \delta^\rho{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \end{aligned}$$

ce qui montre que le symbole de Kronecker  $\delta^\mu{}_\nu$  est effectivement un  $(1,1)$  tenseur. Notons qu'un objet qui comporte des indices n'est pas forcément un tenseur. La connexion affine en est un exemple, elle ne se transforme pas comme un tenseur, car si un tenseur est nul dans certain système des coordonnées, il est forcément nul dans toutes autre système de coordonnées, c'est à dire la nullité des composantes d'un tenseur dans un système de coordonnées entraîne leur nullité dans tout autre système de coordonnées. Il en est de même de l'égalité des composantes de deux tenseurs : leur égalité dans un certain système de coordonnées entraîne leur égalité dans tout autre système de coordonnées.

### 1.5.3 Algèbre tensorielle

La combinaison linéaire de deux  $(p,q)$  tenseurs  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  et  $S^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  est également un  $(p,q)$  tenseur  $R^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ . En terme de composantes :

$$R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = aT^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + bS^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}, \quad (1.70)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires.

De manière générale, à partir de plusieurs  $(p, q)$  tenseurs, on peut engendrer d'autres  $(p, q)$  tenseurs par combinaisons linéaires.

Le produit externe (ou produit direct) d'un  $(p, q)$  tenseur  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  par un  $(m, n)$  tenseur  $S^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}$  donne un  $(p+m, q+n)$  tenseur  $R^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_m}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_n}$ . En terme de composantes :

$$R^{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_m}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma_1 \dots \sigma_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} S^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}. \quad (1.71)$$

A partir d'un  $(p, q)$  tenseur  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ , on peut fabriquer un  $(p-1, q-1)$  tenseur en contractant un indice contravariant  $\mu_s$  de  $T$  avec un indices covariant  $\nu_l$  de  $T$

$$T^{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_l \dots \nu_q} \rightarrow T^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1} \mu_s \nu_{l+1} \dots \nu_q} =: T^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \mu_{s+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1} \nu_{l+1} \dots \nu_q}. \quad (1.72)$$

On peut répéter la contraction des indices jusqu'à extinction des indices covariants si  $p > q$  ou des indices contravariants si  $p < q$ . On aboutit alors, selon le cas, soit à un  $(p-q, 0)$  soit à un  $(0, q-p)$  tenseur. Dans le cas où  $p = q$  le processus de contraction aboutit à la formation d'un scalaire.

Abaissement d'un indice contravariant : Soit  $T^{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  un  $(p, q)$  tenseur. On définit le  $(p-1, q+1)$  tenseur  $T^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma^{\mu_{s+1} \dots \mu_p}}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  comme

$$T^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma^{\mu_{s+1} \dots \mu_p}}_{\nu_1 \dots \nu_q} := g_{\mu_s \sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (1.73)$$

Élévation d'un indice covariant : Soit  $R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_s \dots \nu_q}$  un  $(p, q)$  tenseur. On définit le  $(p+1, q-1)$  tenseur  $R^{\mu_1 \dots \mu_p \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \nu_{s+1} \dots \nu_q}$  comme

$$R^{\mu_1 \dots \mu_p \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \nu_{s+1} \dots \nu_q} := g^{\sigma \nu_s} R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \nu_s \nu_{s+1} \dots \nu_q}. \quad (1.74)$$

On peut combiner les deux opérations de produit directe et de contraction.

Permutation des indices d'un tenseur : Soit un  $(p, q)$  tenseur de composantes  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ . Considérons une permutation  $\sigma$  de ses indices contravariants et une permutation  $\tau$  de ses indices covariants. On obtient en général un nouveau  $(p, q)$  tenseur

$$S^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} : s = T^{\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(p)}}_{\nu_{\tau(1)} \dots \nu_{\tau(p)}}.$$

Si le tenseur  $T$  n'a pas de propriétés de symétrie particulières, on peut former de cette manière  $p!q!$  tenseurs à partir de  $T$ .

### 1.5.4 Densité tensorielle

On ne peut pas qualifier un objet de tenseur seulement sur la base des indices qu'il porte. Seule la loi de transformation sous un changement général de coordonnées permet de trancher à propos de la nature tensorielle ou non d'un objet. L'exemple le plus trivial est le déterminant du tenseur métrique qui comme on va leur voir, n'est pas un tenseur. Définissons  $g$  comme

$$g = -\det g_{\mu\nu}. \quad (1.75)$$

Le signe  $(-)$  est introduit pour des raisons de commodité. En effet le tenseur métrique admet trois valeurs propres positives et une valeur propre négative, comme d'ailleurs le tenseur de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ . Le déterminant du tenseur métrique produit de ses valeurs propres, est donc une quantité négative. Comme il est plus avantageux de travailler avec des nombres positifs qu'avec des nombres négatifs, on considère plutôt  $(-)$  le déterminant du tenseur métrique.

Sous une transformation générale de coordonnées  $x \rightarrow x'$ , le tenseur métrique se transforme en

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}, \quad (1.76)$$

ou

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}, \quad (1.77)$$

qu'on peut considérer comme une équation matricielle. En faisant usage des deux propriétés des déterminants :  $\det(AB) = \det A \det B$  et  $\det A^T = \det A$ , la relation (1.77) implique que

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g, \quad (1.78)$$

où  $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$  est le Jacobien de la transformation  $x' \rightarrow x$ . En utilisant la relation

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad (1.79)$$



qui implique que

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{-1},$$

la relation (1.78) peut être mise sous la forme  $g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} g$ . Donc  $g$  ne se transforme pas exactement comme un scalaire à cause du facteur supplémentaire du Jacobien. Ceci amène à définir une densité scalaire de poids  $p$ , comme un objet  $S$  se transformant sous un changement de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  comme

$$S \rightarrow S' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^p S.$$

En particulier  $g$  est une densité scalaire de poids  $(-2)$ . De manière similaire, une quantité qui se transforme comme un tenseur à des facteurs supplémentaires multiplicatifs du jacobien près, est appelée densité tensorielle, la puissance du facteur  $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$  étant appelé poids de la densité tensorielle.

À partir d'une densité tensorielle de poids  $w$ , on peut fabriquer un tenseur ordinaire en la multipliant par un facteur  $g^{\frac{w}{2}}$ . En effet, soit  $F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  une densité tensorielle de poids  $w$ . Sous une transformation générale de coordonnées  $x \rightarrow x'$

$$F'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^\omega \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} F^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}. \quad (1.80)$$

En multipliant les deux membres de la relation précédente par  $g'^{\omega/2}$ , et en utilisant la relation (1.78) on obtient :

$$g'^{\omega/2} F'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} g^{\omega/2} F^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}. \quad (1.81)$$

Donc  $g^{\omega/2} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  est bien un  $(p, q)$  tenseur. L'importance de la notion de densité tensorielle apparaît en particulier lors des calculs d'intégrales. Sous une transformation générale de coordonnées  $x \rightarrow x'$ , l'élément de volume transformé  $d^4 x'$  est lié à l'élément de volume initial  $d^4 x$  par

$$d^4 x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4 x. \quad (1.82)$$

Il s'ensuit le produit de l'élément de volume  $d^4 x$  par une densité tensorielle de poids  $(-1)$  se transforme comme un scalaire ordinaire. Ceci est en particulier le cas de  $\sqrt{g} d^4 x$ . Autrement dit,

$\sqrt{g} d^4x$  est un élément de volume invariant. Considérons maintenant le symbole de Levi-Civita  $\zeta^{\mu\nu\lambda\kappa}$  défini par :

$$\zeta^{\mu\nu\lambda\kappa} = \begin{cases} +1 & \mu\nu\lambda\kappa \text{ permutation paire de l'ordre de référence, par exemple } 0123. \\ -1 & \mu\nu\lambda\kappa \text{ permutation impaire de l'ordre de référence.} \\ 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux.} \end{cases} \quad (1.83)$$

Montrons que  $\zeta^{\mu\nu\lambda\kappa}$  est une densité tensorielle. Pour ce faire, considérons la quantité

$$\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\xi'}}{\partial x^\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa}. \quad (1.84)$$

Il est facile de montrer que cette quantité est complètement antisymétrique dans l'échange des indices  $\rho\sigma\eta\xi$ . Par conséquent elle est obligatoirement proportionnelle au symbole de Levi-Civita  $\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}$ . Donc

$$\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\xi'}}{\partial x^\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa} = \alpha \zeta^{\rho\sigma\eta\xi}, \quad (1.85)$$

pour déterminer  $\alpha$  considérons le cas  $\rho = 0, \sigma = 1, \eta = 2, \xi = 3$ .

Nous avons, en utilisant la définition du déterminant

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^1}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^2}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^3}{\partial x^\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|.$$

Ceci d'une part. D'autre part, nous avons également, en utilisant l'équation (1.85)

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^1}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^2}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^3}{\partial x^\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa} = \alpha \zeta^{0123} = \alpha,$$

où on a utilisé le fait que  $\zeta^{0123} = 1$ . En comparant les deux expressions précédentes, on déduit que  $\alpha = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$ . Donc

$$\zeta^{\rho\sigma\eta\xi} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\xi'}}{\partial x^\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa},$$

et par conséquent  $\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}$  est une densité tensorielle de poids  $-1$ . D'après ce qui précède, on peut former un tenseur contravariant ordinaire d'ordre 4 en multipliant  $\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}$  par  $g^{-1/2}$ . On peut également former une densité tensorielle covariante, en abaissant les quatre indices de  $\zeta^{\mu\nu\lambda\kappa}$  par la méthode usuelle :

$$\zeta_{\rho\sigma\eta\xi} = g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} g_{\eta\lambda} g_{\xi\kappa} \zeta^{\mu\nu\lambda\kappa}. \quad (1.86)$$

On peut voir facilement que  $\zeta_{\rho\sigma\eta\xi}$  est complètement antisymétrique dans l'échange des indices  $\rho, \sigma, \eta$  et  $\xi$ . Il s'ensuit que  $\zeta_{\rho\sigma\eta\xi}$  est numériquement proportionnel à  $\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}$

$$\zeta_{\rho\sigma\eta\xi} = c\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}, \quad (1.87)$$

pour déterminer  $c$ , considérons l'ordre 0, 1, 2, 3, auquel cas, en vertu de (1.86),

$$\zeta_{0123} = g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\kappa}\zeta^{\mu\nu\lambda\kappa} = \det g = -g,$$

D'autre part, en vertu de (1.87),

$$\zeta_{0123} = c\zeta^{0123} = c.$$

En comparant, on a l'égalité numérique

$$\zeta_{\rho\sigma\eta\xi} = -g\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}.$$

Il est clair d'après (1.86) que  $\zeta_{\rho\sigma\eta\xi}$  est une densité tensorielle de poids  $-1$ , comme l'est  $\zeta^{\rho\sigma\eta\xi}$ . L'algèbre des densités tensorielles est semblable à celle des tenseurs.

1° – Une combinaison linéaire de deux densités tensorielles de même poids  $\omega$  est également une nouvelle densité tensorielle de poids  $\omega$ .

2° – Le produit direct de deux densités tensorielles de poids  $\omega_1$  et  $\omega_2$  est une densité tensorielle de poids  $(\omega_1 + \omega_2)$ .

3° – La contraction d'indices dans une densité tensorielle de poids  $\omega$  donne une nouvelle densité tensorielle de même poids  $\omega$ .

Il s'ensuit que l'élévation ou l'abaissement des indices ne change pas le poids d'une densité tensorielle. En effet pour abaisser ou élever un indice, on multiplie d'abord selon le cas par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  ou le tenseur métrique inverse  $g^{\mu\nu}$  qui sont de poids zéro puis on contracte deux indices. Donc on ne modifie pas le poids de la densité tensorielle.

### 1.5.5 Transformation de la connexion affine

Considérons la connexion affine désignée également sous le vocable de symboles de Christoffel, définie par

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \zeta^{\alpha}} \frac{\partial^2 \zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (1.88)$$

où  $\zeta^\alpha$  dénotent des coordonnées localement inertielles et  $x^\mu$  désignent des coordonnées arbitraires.

Sous une transformation générale de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (1.89)$$

Mais,

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \zeta^\alpha} \quad (1.90)$$

et

$$\frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} \right) = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\eta} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}. \quad (1.91)$$

Par conséquent,

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\eta\rho}^\sigma + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (1.92)$$

Nous voyons que  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  ne se transforme pas comme un tenseur, à cause de la présence du deuxième terme du membre de droite.

### 1.5.6 Dérivation covariante

La dérivation d'un tenseur ne donne généralement pas un tenseur. Considérons un vecteur contravariant  $v^\mu$ , sous une transformation générale de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  :

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (1.93)$$

Dérivons  $v'^\mu$  par rapport à  $x'^\lambda$

$$\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \right). \quad (1.94)$$

Mais,

$$\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}. \quad (1.95)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} v^\nu + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} v^\nu. \quad (1.96)$$

Le premier terme du membre de droite brise le comportement tensoriel de  $\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\lambda}$ . Ce terme nous rappelle quelque peu le terme non homogène qui fait que la connexion affine n'est pas

un tenseur. Notre but est de construire une généralisation de la dérivée d'un tenseur de telle manière que le résultat soit de nouveau un tenseur avec un indice covariant en plus. Etudions la loi de transformation de  $\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} v^{\lambda}$ , sous une transformation générale de coordonnées  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$  :

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} v^{\prime\lambda} = \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\rho}^{\sigma} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} \right) \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} v^{\theta}. \quad (1.97)$$

Cherchons une autre expression pour  $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}}$ . Partons de l'identité

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (1.98)$$

et dérivons la par rapport à  $x'^{\lambda}$ . Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \right) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = 0, \quad (1.99)$$

d'où

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}. \quad (1.100)$$

L'équation (1.97) peut alors être réécrite comme :

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} v^{\prime\lambda} = \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\rho}^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \right) \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} v^{\theta}. \quad (1.101)$$

En utilisant la relation  $\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} = \delta^{\varepsilon}_{\theta}$

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} v^{\prime\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\theta\rho}^{\sigma} v^{\theta} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} v^{\sigma}. \quad (1.102)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{\prime\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} v^{\prime\lambda} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} v^{\sigma} + \Gamma_{\theta\rho}^{\sigma} v^{\theta} \right) + \\ &\quad \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} v^{\lambda} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} v^{\theta}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Les indices de sommation étant des indices muets, on peut montrer que les deux derniers termes du membre de droite de (1.103) disparaissent, c'est à dire que,

$$\frac{\partial v'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\nu}{}^{\mu} v'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} v^{\sigma} + \Gamma_{\theta\rho}{}^{\sigma} v^{\theta} \right). \quad (1.104)$$

Donc  $(\partial_{\lambda} v^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}{}^{\mu} v^{\nu})$  est un  $(1, 1)$  tenseur. Ceci nous amène à définir la dérivée covariante d'un vecteur contravariant  $v^{\mu}$  noté  $v^{\mu}{}_{;\lambda}$  par

$$v^{\mu}{}_{;\lambda} = \partial_{\lambda} v^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}{}^{\mu} v^{\nu}. \quad (1.105)$$

Nous pouvons également définir une dérivation covariante pour un vecteur covariant  $\omega_{\mu}$ . Sous une transformation générale de coordonnées

$$\omega'_{\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \omega_{\rho}. \quad (1.106)$$

La dérivé de  $\omega_{\mu}$  par rapport à  $x^{\nu}$ ,  $\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left( \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \omega_{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \omega_{\rho} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \omega_{\rho}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

De nouveau, le premier terme du membre de droite de (1.107) fait que  $\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  n'est pas un tenseur. Nous avons à construire une généralisation de la dérivée d'un tenseur qui soit un tenseur. Pour cela, considérons d'abord le transformé de  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \omega_{\lambda}$ . Nous avons

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} \omega'_{\lambda} = \left[ \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\sigma}{}^{\theta} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial^2 x^{\theta}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \right] \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \omega_{\rho}. \quad (1.108)$$

En utilisant la relation  $\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} = \delta_{\theta}{}^{\rho}$ , on aboutit à

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} \omega'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\sigma}{}^{\rho} \omega_{\rho} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \omega_{\rho}. \quad (1.109)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} \omega'_{\lambda} &= \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \omega_{\rho} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \omega_{\rho} - \\ &\quad \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\sigma}{}^{\rho} \omega_{\rho} - \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \omega_{\rho}. \\ &= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \omega_{\rho} - \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\xi\sigma}{}^{\rho} \omega_{\rho}. \end{aligned}$$

En faisant un changement convenable des indices muets, on aboutit à

$$\frac{\partial \omega'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega'_\lambda = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \omega_\rho - \Gamma_{\rho\sigma}^\theta \omega_\theta \right]. \quad (1.110)$$

Il en résulte que  $(\partial_\nu \omega_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda)$  est un tenseur covariant d'ordre 2 noté  $\omega_{\mu;\nu}$

$$\omega_{\mu;\nu} = \partial_\nu \omega_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (1.111)$$

Nous pouvons aussi généraliser la notion de dérivée covariante pour un  $(p, q)$  tenseur quelconque. Pour définir la dérivée covariante de  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ , on ajoute à la dérivée ordinaire de  $T$  un terme  $\Gamma T$  pour chaque indice contravariant et on retranche un terme  $\Gamma T$  pour chaque indice covariant. Plus précisément

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \gamma} &= T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q, \gamma} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\mu_1} T^{\delta \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma_{\delta\gamma}^{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \delta}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \\ &\Gamma_{\nu_1 \gamma}^\delta T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\delta \nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma_{\nu_q \gamma}^\delta T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \delta}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

On définit également la dérivée covariante d'une densité tensorielle. Considérons  $F$  une densité tensorielle de poids  $\omega$ . Considérons  $g^{\omega/2} F$ , qui rappelons le, est un tenseur ordinaire. Considérons maintenant la dérivée covariante du tenseur  $g^{\omega/2} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ . Multiplions ensuite la dérivée covariante ainsi obtenue par  $g^{-\omega/2}$ . L'objet obtenu qui est également une densité tensorielle de poids  $\omega$ , est par définition la dérivée covariante de la densité tensorielle  $F$ , et est notée de la même façon que la dérivée covariante d'un tenseur. Donc

$$F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} = g^{-\omega/2} \left( g^{\omega/2} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \right)_{; \lambda}. \quad (1.113)$$

Il s'ensuit que la dérivée covariante d'une densité tensorielle est formellement identique à celle d'un tenseur ordinaire à l'exception d'un terme supplémentaire faisant intervenir la dérivée de  $g$  :

$$\begin{aligned} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} &= F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q, \lambda} + \Gamma_{\delta\lambda}^{\mu_1} F^{\delta \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma_{\delta\lambda}^{\mu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \delta}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \\ &\Gamma_{\nu_1 \lambda}^\delta F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\delta \nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma_{\nu_q \lambda}^\delta F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \delta} + \frac{\omega}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}, \end{aligned} \quad (1.114)$$

où

$$F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q, \lambda} := \frac{\partial}{\partial x^\lambda} F^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}.$$

Signalons quelques propriétés de la dérivation covariante.

1° – La dérivation covariante d'une combinaison linéaire de deux tenseurs est la même combinaison linéaire des dérivées covariantes de ces deux tenseurs. En terme de composantes :

$$(\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \beta S^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q})_{;\rho} = \alpha T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \rho} + \beta S^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \rho}, \quad (1.115)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

2° – La dérivation covariante d'un produit direct de deux tenseurs obéit à la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} (T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} U^{\rho_1 \dots \rho_s}_{\sigma_1 \dots \sigma_m})_{;\lambda} &= T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q; \lambda} U^{\rho_1 \dots \rho_s}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} + \\ &T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} U^{\rho_1 \dots \rho_s}_{\sigma_1 \dots \sigma_m; \lambda}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

3° – Les deux opérations de contraction et de dérivée covariante commutent :

- La dérivée covariante du tenseur métrique est nulle. En effet  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  et  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$  s'annulent dans un système de coordonnées localement inertielles et par conséquent  $g_{\mu\nu; \lambda}$  s'annule dans le même système de coordonnées. Mais comme  $g_{\mu\nu; \lambda}$  est un tenseur, il en résulte qu'il s'annule dans n'importe quel autre système de coordonnées. Donc :

$$g_{\mu\nu; \lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0. \quad (1.117)$$

On peut également montrer ce résultat de manière différente. En effet en partant de la dérivée première du tenseur métrique en termes de la connexion affine et du tenseur métrique lui-même,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}, \quad (1.118)$$

on aboutit à

$$g_{\mu\nu; \lambda} = 0. \quad (1.119)$$

De la même manière on peut montrer que les dérivations covariantes des autres formes du tenseur métrique sont également nulles :



$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \delta^{\mu}{}_{\nu;\lambda} = 0. \quad (1.120)$$

Signalons aussi que la dérivation covariante commute avec les opérations d'élévation et d'abaissement des indices.

L'importance de la dérivation covariante apparaît dans deux points essentiels :

a– La dérivée covariante d'un tenseur nous donne un nouveau tenseur .

b– La dérivation covariante se réduit à la dérivation ordinaire en l'absence du champ gravitationnel, c'est à dire dans le cas où  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} = 0$  et  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , d'où une méthode de construction des équations covariantes.

### 1.5.7 Dérivée covariante le long d'une courbe

Il peut se faire qu'un tenseur ne soit défini que sur une courbe. Considérons un vecteur covariant  $A^{\mu}(\tau)$  le long d'une courbe  $x^{\mu}(\tau)$ . Sous une transformation générale de coordonnées  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$

$$A'^{\mu}(\tau) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(\tau), \quad (1.121)$$

où  $\tau$  est le paramètre qui décrit la courbe et  $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  à évaluer en  $x^{\nu} = x^{\nu}(\tau)$ . En dérivant  $A'^{\mu}(\tau)$  par rapport à  $\tau$  on aboutit à

$$\frac{dA'^{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dA^{\nu}(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}(\tau). \quad (1.122)$$

Le terme non homogène  $\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}$  ressemble à celui qui apparaît dans la loi de transformation de la connexion affine. On définit alors la dérivée covariante le long d'une courbe  $x^{\mu}(\tau)$  par :

$$\frac{DA^{\mu}}{d\tau} = \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}, \quad (1.123)$$

sous une transformation générale de coordonnées :

$$\Gamma'_{\lambda\nu}{}^{\mu} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} A'^{\nu} = \left[ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\delta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} \right] \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\theta}} \frac{dx^{\theta}}{d\tau} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}, \quad (1.124)$$

Mais

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} = - \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}. \quad (1.125)$$

Il s'ensuit que

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\delta}} \Gamma_{\alpha\theta}^{\delta} A^{\alpha} \frac{dx^{\theta}}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} A^{\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \quad (1.126)$$

En effectuant un changement convenable des indices de sommation :

$$\begin{aligned} \frac{dA'^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} A'^{\nu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dA^{\nu}(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} A^{\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} + \\ &\quad \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\alpha\theta}^{\nu} A^{\alpha} \frac{dx^{\theta}}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} A^{\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{dA'^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\prime\mu} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\delta}} \left( \frac{dA^{\delta}}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\theta}^{\delta} A^{\alpha} \frac{dx^{\theta}}{d\tau} \right). \quad (1.127)$$

Finalement

$$\frac{DA'^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{DA^{\nu}}{d\tau}. \quad (1.128)$$

La dérivée covariante le long d'une courbe d'un vecteur contravariant se transforme comme un vecteur contravariant. De manière similaire on définit la dérivée covariante le long d'une courbe  $x^{\mu}(\tau)$  d'un vecteur covariant  $B_{\mu}(\tau)$ . Sous une transformation générale de coordonnées  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$  :

$$B_{\mu}(\tau) \rightarrow B'_{\mu}(\tau) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} B_{\alpha}(\tau), \quad (1.129)$$

avec

$$\frac{dB'_{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{dB_{\alpha}}{d\tau} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} B_{\alpha}. \quad (1.130)$$

Si on définit la dérivée covariante le long d'une courbe  $x^{\mu}(\tau)$  d'un vecteur covariant  $B_{\mu}(\tau)$  par :

$$\frac{DB_{\mu}}{d\tau} = \frac{dB_{\mu}}{d\tau} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} B_{\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\tau}. \quad (1.131)$$

Alors, sous une transformation générale de coordonnées

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\rho}^{\prime\lambda} B'_{\lambda} \frac{dx'^{\rho}}{d\tau} &= \left[ \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma_{\eta\theta}^{\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\rho}} \right] \\ &\quad \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\lambda}} B_{\varepsilon} \frac{dx^{\xi}}{d\tau} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\xi}}. \end{aligned}$$

En faisant usage de l'identité  $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} = \delta^\sigma_\rho$ , on obtient

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\rho} B'_\lambda \frac{dx'^\rho}{d\tau} = \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\eta\theta} B_\sigma \frac{dx^\theta}{d\tau} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} B_\beta \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi}. \quad (1.132)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{dB'_\mu}{d\tau} - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\rho} B'_\lambda \frac{dx'^\rho}{d\tau} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{dB_\alpha}{d\tau} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\xi} \frac{dx^\xi}{d\tau} B_\alpha - \\ &\quad \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\eta\theta} B_\sigma \frac{dx^\theta}{d\tau} - \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} B_\beta \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Avec un changement convenable des indices muets

$$\frac{dB'_\mu}{d\tau} - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\rho} B'_\lambda \frac{dx'^\rho}{d\tau} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \left( \frac{dB_\alpha}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\theta} B_\sigma \frac{dx^\theta}{d\tau} \right). \quad (1.134)$$

Donc, finalement

$$\frac{DB'_\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{DB_\alpha}{d\tau}. \quad (1.135)$$

On peut généraliser la notion de dérivée covariante le long d'une courbe pour un  $(p, q)$  tenseur quelconque  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  par

$$\begin{aligned} \frac{DT^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \Gamma_{\lambda\delta}^{\mu_1} \frac{dx^\delta}{d\tau} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma_{\lambda\delta}^{\mu_p} \frac{dx^\delta}{d\tau} T^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \\ &\quad \Gamma_{\nu_1 \delta}^{\lambda} \frac{dx^\delta}{d\tau} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma_{\nu_q \delta}^{\lambda} \frac{dx^\delta}{d\tau} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \lambda}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

La propriété de linéarité et la règle de Leibniz se généralisent immédiatement à la dérivée de covariante le long d'une courbe. C'est également le cas pour la contraction des indices.

On peut également définir la dérivée covariante le long d'une courbe d'un champ tensoriel. Si  $T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}$  est un champ tensoriel, la relation (1.136) est toujours valable, mais comme nous avons affaire à un champ tensoriel, nous pouvons parler de dérivée ordinaire, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\frac{dT^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{d\tau} = \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{\partial T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{\partial x^\delta}. \quad (1.137)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{DT^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{d\tau} = \left( \frac{\partial T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\lambda\delta}^\mu T^{\lambda\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} + \dots - \Gamma_{\rho\delta}^\lambda T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} - \dots \right) \frac{dx^\delta}{d\tau}. \quad (1.138)$$

Le terme entre parenthèses, n'est rien d'autre que la dérivée covariante du tenseur  $T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}$ . Il s'ensuit une relation entre la dérivée covariante le long d'une courbe pour un champ tensoriel :

$$\frac{DT^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{d\tau} = T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots;\delta} \frac{dx^\delta}{d\tau}. \quad (1.139)$$

Notons finalement que la dérivée covariante le long d'une courbe sert à définir le transport parallèle le long de cette courbe. On dit d'un vecteur contravariant qu'il est transporté parallèlement le long d'une courbe  $x^\mu(\tau)$ , si sa dérivée covariante le long de cette courbe est nulle :

$$\frac{DA^\mu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} A^\lambda = 0, \quad (1.140)$$

ou bien encore

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} A^\lambda,$$

équation différentielle du premier ordre qui définit  $A^\mu(\tau)$  connaissant sa valeur pour un certain  $\tau = \tau_0$ . On définit de même le transport parallèle pour un vecteur covariant  $B_\mu$

$$\frac{DB_\mu}{d\tau} = \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\delta}^\lambda \frac{dx^\delta}{d\tau} B_\lambda = 0, \quad (1.141)$$

et plus généralement pour un tenseur  $T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}$

$$\frac{DT^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}}{d\tau} = 0. \quad (1.142)$$

## 1.6 La courbure

Un espace est plat s'il est possible d'effectuer une transformation des coordonnées de telle façon que le tenseur métrique, dans le nouveau système de coordonnées, soit identique au tenseur de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.143)$$

partout dans l'espace. Dans le cas contraire l'espace est dit courbe. Pour développer une méthode qui nous permette de caractériser un espace courbe, revenons à la notion du transport parallèle pour un vecteur covariant  $S_\mu$ . Si  $S_\mu$  transporté parallèlement le long d'une courbe  $x^\mu(\tau)$ , l'équation du transport parallèle s'écrit

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho S_\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.144)$$

D'autre part,

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.145)$$

en comparant les deux expressions de  $\frac{dS_\mu}{d\tau}$ , on aboutit à

$$\left( \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho S_\rho \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.146)$$

Comme l'équation précédente est satisfaite indépendamment du chemin  $x^\mu(\tau)$ , on déduit que

$$S_{\mu;\nu} = 0, \quad (1.147)$$

c'est à dire  $S_\mu$  ne dépend pas du chemin suivi pour aller du point de départ jusqu'au le point d'arrivée.

D'après l'équation (1.146), on a :

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho S_\rho. \quad (1.148)$$

En différentiant l'équation (1.148) par rapport à  $x^\lambda$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma_{\mu\nu}^\rho S_\rho) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right) S_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\lambda} S_\rho. \quad (1.149)$$

En utilisant l'équation (1.148) et avec un changement convenable d'indices :

$$\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \right) S_\rho. \quad (1.150)$$

De la même manière

$$\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) S_\rho. \quad (1.151)$$

En retranchant membre à membre (1.150) et (1.151), on arrive à

$$0 = \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) S_\rho, \quad (1.152)$$

où on a utilisé le fait que les dérivées partielles commutent. Comme la valeur de  $S_\rho$  en un point donné peut être choisi arbitrairement, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour que la variété soit plate :

$$R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} := \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho = 0. \quad (1.153)$$

La nullité de  $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$  traduit l'absence de courbure. Cette dernière est une propriété intrinsèque c'est à dire indépendante du système de coordonnées utilisé. Ceci signifierait que  $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$  serait un tenseur. On va montrer dans ce qui suit que c'est bien le cas :

Sous une transformation générale de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (1.154)$$

Appliquons maintenant la transformation inverse c'est à dire  $x'^\mu \rightarrow x^\mu$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho'} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} \frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.155)$$

Multiplions les deux membres de (1.155) par  $\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda}$  et faisons usage de la propriété  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} = \delta^\kappa{}_\tau$ .

On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\eta}^{\kappa'}. \quad (1.156)$$

Dérivons la dernière équation une troisième fois par rapport à  $x^\tau$ . on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\tau} &= \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\lambda \partial x^\tau} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\eta}^{\kappa'} - \\ &\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\eta}{\partial x^\tau \partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\eta}^{\kappa'} - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\tau} \frac{\partial}{\partial x'^\theta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\kappa'}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

En utilisant la relation (1.156) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu} \partial x^{\tau}} &= \left[ \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\theta}} \Gamma_{\lambda\tau}^{\theta} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\kappa} \right] \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \\
&\left[ \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\theta}} \Gamma_{\mu\tau}^{\theta} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\sigma} \right] \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \\
&\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \left[ \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\theta}} \Gamma_{\nu\tau}^{\theta} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\eta} \right] \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \\
&\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial}{\partial x'^{\theta}} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa}.
\end{aligned} \tag{1.158}$$

Sous un changement convenable des indices de sommation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu} \partial x^{\tau}} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\theta\tau}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \right] - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\tau}} \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial x'^{\theta}} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\delta} \Gamma_{\delta\eta}^{\prime\kappa} \right] - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \\
&\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\tau}^{\theta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\theta}} \Gamma_{\nu\tau}^{\theta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} \\
&+ \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\eta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa}.
\end{aligned} \tag{1.159}$$

Ceci d'une part. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\tau} \partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda} + \Gamma_{\theta\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\tau}^{\theta} \right] - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\nu}} \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial x'^{\theta}} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\delta} \Gamma_{\delta\eta}^{\prime\kappa} \right] - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\kappa} \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda} - \\
&\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\theta}} \Gamma_{\nu\tau}^{\theta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} \\
&+ \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\eta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa}.
\end{aligned} \tag{1.160}$$

On remarque que les quatre derniers termes sont symétriques dans l'échange des indices  $\nu$  et  $\tau$ . En prenant la différence entre (1.159) et (1.160), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu} \partial x^{\tau}} - \frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\tau} \partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda} + \Gamma_{\theta\tau}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} - \Gamma_{\theta\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\tau}^{\theta} \right] - \\
&\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\tau}} \left[ \frac{\partial}{\partial x'^{\theta}} \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\kappa} - \frac{\partial}{\partial x'^{\eta}} \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\kappa} - \right. \\
&\left. \Gamma_{\sigma\theta}^{\prime\delta} \Gamma_{\delta\eta}^{\prime\kappa} + \Gamma_{\sigma\eta}^{\prime\delta} \Gamma_{\delta\theta}^{\prime\kappa} \right].
\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la relation précédente par  $\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\kappa}$ . On arrive à

$$\delta^\varepsilon{}_\lambda R^\lambda{}_{\mu\nu\tau} - \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\tau} R'^\kappa{}_{\sigma\eta\theta} = 0, \quad (1.161)$$

où on a utilisé la définition de  $R^\lambda{}_{\mu\nu\tau}$ , (1.153). Par conséquent,

$$R^\varepsilon{}_{\mu\nu\tau} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\theta}{\partial x^\tau} R'^\kappa{}_{\sigma\eta\theta}, \quad (1.162)$$

quand on passe du système de coordonnées  $x'^\mu$  au système de coordonnées  $x^\mu$  et

$$R'^\lambda{}_{\mu\nu\tau} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\tau} R^\sigma{}_{\delta\eta\varepsilon}, \quad (1.163)$$

lorsque on passe de système de coordonnées  $x^\mu$  au système de coordonnées  $x'^\mu$ .

$R^\lambda{}_{\mu\nu\tau}$  se comporte donc comme un tenseur appelé tenseur de courbure de Riemann Christoffel.

La contraction du tenseur de courbure donne le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\rho} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\rho}. \quad (1.164)$$

La contraction de ce dernier donne le scalaire de courbure :

$$R := g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}. \quad (1.165)$$

### 1.6.1 Commutateur de deux dérivées covariantes

Le tenseur de courbure entre en scène quand on cherche le commutateur des dérivées covariantes d'un vecteur, à savoir

$$[D_\mu, D_\nu] v^\lambda(x) = v^\lambda{}_{;\nu;\mu} - v^\lambda{}_{;\mu;\nu}. \quad (1.166)$$

Ce commutateur, à la différence du commutateur des dérivées ordinaires qui est nul dans un espace plat,

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] v^\lambda = 0, \quad (1.167)$$

est différent de zéro dans l'espace de Riemann. En effet, en partant de la définition de la dérivée covariante d'un vecteur covariant  $v_\mu$  :



$$v_{\mu;\rho} = \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} v_{\lambda}, \quad (1.168)$$

et

$$\begin{aligned} v_{\mu;\rho;\sigma} &= \frac{\partial v_{\mu;\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} v_{\theta;\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} v_{\mu;\theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left( \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} v_{\lambda} \right) - \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\rho\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon} \right) - \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} \left( \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\theta}} - \Gamma_{\mu\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} - \left( \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \right) v_{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} v_{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} \Gamma_{\rho\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon} - \\ &\quad \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\theta}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} \Gamma_{\mu\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Ceci d'une part. D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{\mu;\sigma;\rho} &= \frac{\partial^2 v_{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} - \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \right) v_{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} v_{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\theta} \Gamma_{\sigma\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon} - \\ &\quad \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\theta}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\theta} \Gamma_{\mu\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

En faisant la différence de (1.169) avec (1.170), on obtient finalement,

$$v_{\mu;\rho;\sigma} - v_{\mu;\sigma;\rho} = - \left( \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \right) v_{\lambda} + \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \right) v_{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\theta} \Gamma_{\rho\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon} - \Gamma_{\mu\rho}^{\theta} \Gamma_{\sigma\theta}^{\epsilon} v_{\epsilon}. \quad (1.171)$$

En utilisant la relation, de définition du tenseur de courbure (1.153) , on aboutit à

$$v_{\mu;\rho;\sigma} - v_{\mu;\sigma;\rho} = R_{\mu\sigma\rho}^{\lambda} v_{\lambda} = -R_{\mu\rho\sigma}^{\lambda} v_{\lambda}. \quad (1.172)$$

Dans le cas d'un vecteur contravariant  $U^{\mu}$  on a, en procédant de manière analogue, la relation

$$U^{\mu}{}_{;\nu;\kappa} - U^{\mu}{}_{;\kappa;\nu} = R^{\mu}{}_{\theta\nu\kappa} U^{\theta}. \quad (1.173)$$

## 1.6.2 Propriétés algébriques du tenseur de courbure

Il est plus commode d'utiliser la forme complètement covariante du tenseur de courbure en vu d'étudier les propriétés algébriques de ce dernier.

La forme purement covariante du tenseur de courbure est obtenue en abaissent l'indice contravariant grâce au tenseur métrique :

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} = g_{\sigma\lambda} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}, \quad (1.174)$$

avec

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}. \quad (1.175)$$

En Substituant à la connexion affine son expression en termes du tenseur métrique inverse et des dérivées premières du tenseur métrique,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} \left[ \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\theta}} \right], \quad (1.176)$$

dans (1.174), on arrive à

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu\kappa} &= g_{\sigma\lambda} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} \left( \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\theta}} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} \left( \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\kappa\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\theta}} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Calculons d'abord les deux premiers termes du membre de droite de (1.177). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[ g^{\lambda\theta} \left( \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\theta}} \right) \right] &= \frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} g^{\lambda\theta} \left[ \frac{\partial^2 g_{\mu\theta}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\theta}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\theta}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\lambda\theta} \right) \left( \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (1.178)$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\lambda\theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left( g_{\sigma\lambda} g^{\lambda\theta} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left( g_{\sigma\lambda} \right) g^{\lambda\theta} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left( g_{\sigma\lambda} \right) g^{\lambda\theta}, \end{aligned} \quad (1.179)$$

où on a utilisé le fait que

$$g_{\sigma\lambda} g^{\lambda\theta} = \delta_{\sigma}^{\theta},$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[ g^{\lambda\theta} \left( \frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\theta}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\sigma}} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left( g_{\sigma\lambda} \right) \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.180)$$

Il est clair que pour le calcul du deuxième terme du membre de droite de (1.177), il suffit de permuter  $\kappa$  et  $\nu$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g_{\sigma\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\theta}\left(\frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^\kappa}+\frac{\partial g_{\theta\kappa}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\theta}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\kappa}+\frac{\partial^2 g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(g_{\sigma\lambda})\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Comme nous l'avons vu, la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle

$$g_{\sigma\lambda;\kappa}=0,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}g_{\sigma\lambda}=\Gamma_{\kappa\sigma}^\theta g_{\theta\lambda}+\Gamma_{\kappa\lambda}^\theta g_{\sigma\theta}, \quad (1.182)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}g_{\sigma\lambda}=\Gamma_{\nu\sigma}^\theta g_{\theta\lambda}+\Gamma_{\nu\lambda}^\theta g_{\sigma\theta}. \quad (1.183)$$

En insérant les expressions (1.182) et (1.183) dans (1.180) et (1.181) respectivement, puis en insérant dans (1.177), on arrive finalement à la forme complètement covariante du tenseur de courbure

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu\partial x^\kappa}-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma\partial x^\kappa}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\sigma\partial x^\nu}\right]+ \\ & g_{\lambda\theta}\left[\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda\Gamma_{\mu\kappa}^\theta-\Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\theta\right]. \end{aligned} \quad (1.184)$$

Sur cette dernière forme, on peut mettre facilement en évidence les symétries du tenseur de courbure  $R_{\sigma\mu\nu\kappa}$  :

1° – Symétrie dans l'échange en bloc de  $(\sigma\mu)$  et  $(\nu\kappa)$

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa}=R_{\nu\kappa\sigma\mu}. \quad (1.185)$$

2° – Antisymétrie dans l'échange du premier et du deuxième indice et également vis à vis de l'échange du troisième et du quatrième indice:

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa}=-R_{\mu\sigma\nu\kappa}=-R_{\sigma\mu\kappa\nu}=R_{\mu\sigma\kappa\nu}. \quad (1.186)$$

3° – Cyclicité :

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} + R_{\sigma\nu\kappa\mu} + R_{\sigma\kappa\mu\nu} = 0. \quad (1.187)$$

Cette dernière relation est vérifiable, en utilisant le fait que le tenseur métrique est symétrique et que la connexion affine est symétrique vis à vis de ses deux indices du bas. Il s'ensuit que pour une variété à 4 dimensions le tenseur de courbure possède 20 composantes indépendantes qu'on peut prendre comme

$$\begin{aligned} &R_{0101}, R_{0102}, R_{0103}, R_{0112}, R_{0113}, R_{0123}, R_{0202}, R_{0203}, R_{0212}, R_{0213}, \\ &R_{0223}, R_{0303}, R_{0313}, R_{0323}, R_{1212}, R_{1213}, R_{1223}, R_{1313}, R_{1323}, R_{2323}. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Les autres composantes sont soit nulles, soit se déduisent des précédentes en appliquant les propriétés de symétrie, d'antisymétrie et de cyclicité.

On a essentiellement une seule manière de contracter une seule fois le tenseur de Riemann ce qui nous donne le tenseur de Ricci  $R_{\mu\kappa}$

$$g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\kappa}. \quad (1.189)$$

Le tenseur de Ricci est symétrique par l'échange de ses deux indices. En effet

$$\begin{aligned} R_{\kappa\mu} &= g^{\lambda\nu} R_{\lambda\kappa\nu\mu} \\ &= g^{\nu\lambda} R_{\nu\kappa\lambda\mu} \\ &= g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \\ &= R_{\mu\kappa}. \end{aligned}$$

Il en résulte que Le tenseur de Ricci a 10 composantes indépendantes.

Nous avons également une manière unique de contracter deux fois le tenseur de courbure dans le but d'obtenir le scalaire de courbure  $R$ .

$$g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} =: R, \quad (1.190)$$

ou

$$g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R. \quad (1.191)$$

### 1.6.3 Identité de Bianchi

Le tenseur de courbure possède des identités différentielles importantes. Pour dériver ces identités, considérons un système de coordonnées localement inertielles  $\zeta^\alpha$  dans lequel la connexion affine et les dérivées premières de  $g$  sont nulles. En prenant la dérivée covariante du tenseur de courbure dans le système de coordonnées localement inertiel  $\zeta^\alpha$  on obtient :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\eta \partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta \partial x^\lambda \partial x^\kappa} + \frac{\partial^3 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\eta \partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^3 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\eta \partial x^\nu \partial x^\mu} \right]. \quad (1.192)$$

Faisons des permutations circulaires des trois derniers indices, on obtient :

$$R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\eta \partial x^\mu} - \frac{\partial^3 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda \partial x^\eta} - \frac{\partial^3 g_{\eta\mu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa \partial x^\nu} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa \partial x^\mu} \right], \quad (1.193)$$

et

$$R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^3 g_{\lambda\eta}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^3 g_{\mu\eta}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^3 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa \partial x^\eta} + \frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\eta \partial x^\lambda} \right]. \quad (1.194)$$

En ajoutant membre à membre les trois relations précédentes, on aboutit à :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} = 0. \quad (1.195)$$

La relation précédente stipule la nullité d'un certain tenseur. Comme elle est valable, comme nous venons de le voir dans un système de coordonnées particulier (système de coordonnées localement inertielles), elle est valable dans n'importe quel système de coordonnées. Sachant que les dérivées covariantes de tenseur métrique inverse sont nulles

$$g^{\lambda\nu}{}_{;\eta} = 0, \quad g^{\lambda\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad g^{\lambda\nu}{}_{;\kappa} = 0, \quad (1.196)$$

et en faisant usage de la règle de Leibniz, on obtient, après multiplication des deux membres de (1.195) par  $g^{\lambda\nu}$ ,

$$(g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa})_{;\eta} + (g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\eta})_{;\nu} + (g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\eta\nu})_{;\kappa} = 0, \quad (1.197)$$

ce qui donne

$$(R_{\mu\kappa})_{;\eta} + (R_{\mu\kappa\eta}^{\nu})_{;\nu} - (R_{\mu\eta})_{;\kappa} = 0. \quad (1.198)$$

En utilisant de nouveau la règle de Leibniz et la nullité des dérivées covariantes du tenseur métrique inverse  $g^{\mu\kappa}$ , on arrive à

$$(g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa})_{;\eta} + (g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa\eta}^{\nu})_{;\nu} - (g^{\mu\kappa} R_{\mu\eta})_{;\kappa} = 0. \quad (1.199)$$

Mais,

$$(g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa\eta}^{\nu})_{;\nu} = (g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\eta})_{;\nu} = - (g^{\lambda\nu} R_{\lambda\eta})_{;\nu} = - (R^{\nu}{}_{\eta})_{;\nu}, \quad (1.200)$$

et l'équation (1.199) se réduit alors à

$$0 = R_{;\eta} - (R^{\nu}{}_{\eta})_{;\nu} - (R^{\kappa}{}_{\eta})_{;\kappa} = R_{;\eta} - 2 (R^{\nu}{}_{\eta})_{;\nu}, \quad (1.201)$$

ou

$$(R^{\nu}{}_{\eta})_{;\nu} = \frac{1}{2} R_{;\eta},$$

qu'on peut mettre également sous la forme

$$\left( R^{\nu}{}_{\eta} - \frac{1}{2} g^{\nu}{}_{\eta} R \right)_{;\nu} = 0. \quad (1.202)$$

## 1.7 Les équations d'Einstein

### 1.7.1 Contraintes sur la théorie de la gravitation

La théorie de Newton a connu de très nombreux succès dans la description et la compréhension des systèmes planétaires. Elle ne peut cependant pas être gardée telle quelle, car c'est une théorie non relativiste. La théorie qui doit prendre sa place doit satisfaire deux critères essentiels :

1° – En première approximation, elle doit se réduire à la théorie de Newton pour des champs gravitationnels faibles et reproduire les résultats connus en ce qui concerne les mouvements planétaires.

2° – Au delà de cette approximation, les déviations par rapport à la théorie Newtonienne prédites par la nouvelle théorie doivent pouvoir être vérifiées expérimentalement.

Rappelons les caractéristiques de la théorie de Newton :

a) Il s'agit d'une théorie scalaire : *i*) Le potentiel de gravitation  $\phi$  est une fonction scalaire et *ii*) La source du champ est un scalaire, c'est la densité de masse  $\rho$  de la distribution de matière.

b) L'équation régissant le potentiel  $\phi$  est l'équation de Poisson, qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.203)$$

où  $\Delta$  désigne le Laplacien et  $G$  est la constante gravitationnelle qui entre dans l'expression de la force d'attraction  $F$  entre deux masses  $m$  et  $m'$  par

$$F = \frac{Gmm'}{r^2}. \quad (1.204)$$

## 1.7.2 Tenseur d'énergie-impulsion

En Relativité Restreinte, on caractérise une distribution continue de matière ou d'énergie par un tenseur symétrique  $T^{\mu\nu}$ . La conservation de l'énergie et de l'impulsion totale s'expriment, au niveau local par la loi

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (1.205)$$

En présence de la gravitation, cette équation doit être remplacée par une équation qui se réduise dans un système de coordonnées inertiel à (1.205). D'après ce qui précède, il suffit de remplacer la dérivée ordinaire par une dérivée covariante. Autrement dit, (1.205) est remplacée par

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\kappa\nu} T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu{}_{\kappa\nu} T^{\mu\kappa} = 0. \quad (1.206)$$

### Fluide parfait

Le fluide parfait est défini comme un milieu dans lequel en chaque point il existe un système de coordonnées localement inertiel qui se déplace avec ce fluide, de sorte que, le fluide apparaisse

le même dans toutes les directions. Pour un système de coordonnées comobile, les composantes du tenseur d'énergie-impulsion prennent la forme

$$T^{ij} = \delta_{ij}p, \quad T^{i0} = T_{0i} = 0, \quad T^{00} = \rho, \quad (1.207)$$

où  $p$  et  $\rho$  représentent la pression et la densité d'énergie respectivement. Ensuite, dans un système de coordonnées cartésien et localement inertiel  $T^{\mu\nu}$  prend la forme

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, \quad (1.208)$$

où  $p$  et  $\rho$  sont identiques à celles définies pour le système de coordonnées comobiles. Par conséquent, ce sont des scalaires et  $u^\mu$  est définie de manière qu'il se transforme comme un quadri-vecteur vitesse sous une transformation générale de coordonnées et a comme composantes  $u^0 = 1$  et  $u^i = 0$  dans un système de coordonnées comobile.

### 1.7.3 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein ou les équations de champ d'Einstein constituent des équations dynamiques qui décrivent comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Cette courbure de la géométrie autour d'une source de matière est alors interprétée comme le champ gravitationnel de cette source. Le mouvement d'une particule test dans ce champ est décrit très précisément par les équations de la géodésique.

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique de la relativité générale, c'est à dire que nous allons dériver les équations qui gouvernent le tenseur métrique.

- Considérons un champ faible et statique créé par une distribution non relativiste de matière. Nous avons alors pour  $g_{00}$  l'expression suivante :

$$g_{00} = -(1 + 2\phi), \quad (1.209)$$

où  $\phi$  est le potentiel de Newton qui est une solution de l'équation de Poisson (1.203). D'après ce qui précède

$$\Delta g_{00} = -2 \Delta \phi = -8\pi G T_{00}. \quad (1.210)$$



Cette dernière équation est valable pour un champ faible et statique créé par une masse non relativiste. L'équation (1.210) nous amène à conjecturer pour un champ faible et statique pour une distribution générale  $T_{\alpha\beta}$  d'énergie impulsion, une équation de la forme

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi GT_{\alpha\beta}, \quad (1.211)$$

où  $G_{\alpha\beta}$  est une combinaison linéaire du tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes. Le principe de covariance nous dit que les équations qui gouvernent des champs gravitationnels d'intensité arbitraire prennent la forme

$$G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.212)$$

où  $G_{\mu\nu}$  est un tenseur qui se réduit à  $G_{\alpha\beta}$  pour des champs faibles. Signalons les propriétés que doit satisfaire  $G_{\mu\nu}$  :

- a– D'après (1.212),  $G_{\mu\nu}$  doit être un tenseur tout comme l'est  $T_{\mu\nu}$ .
- b– Toujours d'après (1.212),  $G_{\mu\nu}$  doit être symétrique, tout comme l'est  $T_{\mu\nu}$ .
- c– De nouveau d'après (1.212),  $G_{\mu\nu}$  doit avoir une dérivée covariante nulle à l'instar de  $T_{\mu\nu}$ .
- d– De plus, on fera l'hypothèse suivante : Pour un champ gravitationnel faible et statique généré pour une distribution non relativiste de matière

$$G_{00} \simeq \Delta g_{00}. \quad (1.213)$$

e–  $G_{\mu\nu}$  consiste en une somme de termes avec  $N = 2$  dérivations au totale pour chacun d'eux. Autrement dit, ces termes sont soit quadratiques en les dérivées premières de la métrique, soit linéaires en les dérivées secondes de la métrique.

Comme nous l'avons vu, le tenseur de courbure est l'unique tenseur qu'on puisse construire à partir de tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes, et qui soit linéaire dans les dérivées secondes. Il s'ensuit que les termes composant  $G_{\mu\nu}$  seront obligatoirement obtenus par contraction du tenseur de courbure. Les propriétés de symétrie du  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  montrent qu'il y a seulement deux tenseurs qui peuvent être formés par la contraction de  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  à savoir le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure. Alors, la propriété (a) impose à  $G_{\mu\nu}$  de prendre la forme

$$G_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu} R, \quad (1.214)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes. Du fait que le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  et le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  sont symétriques la condition (b) se trouve automatiquement satisfaite. Imposons maintenant la condition (c). Nous avons alors

$$0 = G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = c_1 R^{\mu\nu}{}_{;\mu} + c_2 g^{\mu\nu} R_{;\mu} + c_2 g^{\mu\nu}{}_{;\mu} R. \quad (1.215)$$

Comme  $g^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ , la relation (1.215) se réduit à

$$0 = G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = c_1 R^{\mu\nu}{}_{;\mu} + c_2 g^{\mu\nu} R_{;\mu}. \quad (1.216)$$

En faisant l'usage de la relation

$$R^{\nu\sigma}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\eta} R_{;\eta}, \quad (1.217)$$

dérivée à partir de l'identité de Bianchi, nous arrivons à

$$\begin{aligned} 0 &= G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = c_1 \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\mu} + c_2 g^{\mu\nu} R_{;\mu} \\ &= \left( \frac{1}{2} c_1 + c_2 \right) g^{\mu\nu} R_{;\mu}. \end{aligned} \quad (1.218)$$

En utilisant la propriété  $g^{\mu\nu} g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\rho$ , l'équation (1.218) peut se mettre sous la forme

$$0 = G^\mu{}_{\rho;\mu} = \left( \frac{1}{2} c_1 + c_2 \right) R_{;\rho}. \quad (1.219)$$

Donc pour satisfaire à (1.219) on a deux possibilités

soit

$$R_{;\rho} = 0, \quad (1.220)$$

soit

$$c_2 = -\frac{1}{2} c_1 \quad \text{si } R_{;\rho} \neq 0. \quad (1.221)$$

La première possibilité est exclue car l'équation (1.212) implique que

$$G^\mu{}_\mu = -8\pi G T^\mu{}_\mu. \quad (1.222)$$

Ceci d'une part. D'autre part, d'après (1.214),

$$\begin{aligned} G^\mu{}_{\mu;\nu} &= c_1 R^\mu{}_{\mu;\nu} + c_2 g^\mu{}_\mu R_{;\nu}, \\ &= (c_1 + 4c_2) R_{;\nu}, \end{aligned} \quad (1.223)$$

où on a fait usage de  $g^\mu{}_\mu = 4$  et de  $R^\mu{}_\mu = R$ .

En combinant (1.222) et (1.223) on arrive à

$$(c_1 + 4c_2) R_{;\nu} = -8\pi G T^\mu{}_{\mu;\nu},$$

et l'annulation de  $R_{;\nu}$  implique alors celle de  $T^\mu{}_{\mu;\nu}$ , qui n'est pas acceptable dans le cas général ( $T^\mu{}_{\mu;\nu} \neq 0$  en présence de matière non relativiste et non homogène. Il s'ensuit que

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1, \quad (1.224)$$

et par conséquent

$$G_{\mu\nu} = c_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (1.225)$$

Finalement, on utilise la propriété (d) pour fixer la constante  $c_1$ . Pour un système non relativiste la condition

$$T_{ij} \ll |T_{00}|,$$

se trouve toujours réalisée, il s'ensuit que

$$G_{ij} \simeq 0, \quad (1.226)$$

ce qui implique que

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R. \quad (1.227)$$

Comme le champ est faible  $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$ , le scalaire de courbure sera donné par

$$R \simeq \eta^{00} R_{00} + (\eta^{ij} R_{ij} + \eta^{0i} R_{0i} + \eta^{i0} R_{i0}),$$

ou en utilisant les valeurs des composantes du tenseur de Minkowski

$$R \simeq -R_{00} + \sum_{i=1}^3 R_{ii} = -R_{00} + \frac{3}{2} R \implies R = 2R_{00}.$$

Il s'ensuit que

$$G_{00} = c_1 \left( R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right) \simeq 2c_1 R_{00}. \quad (1.228)$$

Pour calculer  $R_{00}$  pour un champ faible, nous pouvons utiliser la partie linéaire du tenseur de courbure  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  donnée par la relation suivante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right].$$

Comme le champ est statique toutes les dérivées par rapport au temps s'annulent. Il en résulte que

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu 0} = R^j{}_{0j0} \simeq \sum_{j,k=1}^3 \eta^{jk} R_{k0j0} \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^j \partial x^j} = \frac{1}{2} \Delta g_{00}. \quad (1.229)$$

Il s'ensuit, en remplaçant dans (1.228), que

$$G_{00} = c_1 \Delta g_{00}.$$

En comparant à (1.213), on aboutit à

$$c_1 = 1,$$

et par conséquent à

$$c_2 = -\frac{1}{2}. \quad (1.230)$$

Finalement,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.231)$$

Les équations du champ d'Einstein s'écrivent alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.232)$$

Il existe une forme alternative utile pour les équations du champ d'Einstein. En contractant (1.232) à l'aide de tenseur métrique  $g^{\mu\nu}$ , on obtient

$$R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} g^\mu{}_\mu R = -8\pi G T^\mu{}_\mu,$$

ce qui implique que

$$R = 8\pi GT^\mu{}_\mu. \quad (1.233)$$

En insérant cette expression de  $R$  dans les équations de champ d'Einstein, nous obtenons

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right). \quad (1.234)$$

Les équations (1.234) et (1.232) sont complètement équivalentes. Dans le vide  $T_{\mu\nu}$  s'annule, et en partant de l'équation (1.234), les équations de champ d'Einstein dans un espace vide se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.235)$$

Dans un espace-temps à deux ou trois dimensions, le tenseur de courbure s'annule, et le champ de gravitation est alors absent. Le champ gravitationnel dans un espace vide n'existe que pour quatre dimensions et plus.

Si on renonce à la cinquième condition, condition (e), pour permettre à  $G_{\mu\nu}$  de contenir des termes avec moins de dérivées, la liberté d'utiliser des dérivées premières ne permet pas de nouveaux termes supplémentaires, mais si nous pouvons utiliser la métrique elle-même, alors un nouveau terme proportionnel à  $g_{\mu\nu}$  est possible. Les équations d'Einstein s'écrivent alors :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.236)$$

Le terme  $\Lambda g_{\mu\nu}$  a été introduit par Einstein pour des raisons cosmologiques, et  $\Lambda$  est appelé constante cosmologique. Ce terme satisfait les propriétés (a), (b), (c) et (e) et ne satisfait pas la propriété (d). Pour cette raison  $\Lambda$  doit prendre une valeur suffisamment petite de manière à ne pas remettre en cause le succès de la théorie de la gravitation de Newton.

En contractant (1.236), nous obtenons

$$R^\mu{}_\mu - 2R - 4\Lambda = -8\pi GT^\mu{}_\mu, \quad (1.237)$$

alors

$$R = 8\pi GT^\lambda{}_\lambda - 4\Lambda. \quad (1.238)$$

En remplaçant  $R$  par son expression (1.238) dans les équations d'Einstein avec la constante cosmologique, on obtient

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (8\pi GT^\lambda_\lambda - 4\Lambda) - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.239)$$

Par conséquent, nous obtenons une deuxième forme pour les équations d'Einstein avec constante cosmologique

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right). \quad (1.240)$$

De nouveau, Les équations (1.236) et (1.240) sont complètement équivalentes.

# Chapitre 2

## Métrieque statique à symétrie sphérique avec ou sans constante cosmologique

### 2.1 Métrieque générale statique et isotrope

Un espace plat dans un système de coordonnées sphériques est décrit par la métrieque de Minkowski. Celle ci est donnée par

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.1)$$

Définissons ce qu'on entend par métrieque statique. Une métrieque statique est telle que les composantes du tenseur métrieque soient indépendantes du temps

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0. \quad (2.2)$$

D'autre part, une métrieque qui possède une symétrie sphérique est une métrieque où il n'y a de direction privilégiée. Ceci implique en particulier que la métrieque doit être invariante sous le changement de  $d\theta$  en  $-d\theta$  ou/et de  $d\varphi$  en  $-d\varphi$ . Il s'ensuit que nous ne pouvons pas avoir des termes de la forme  $drd\theta$ ,  $drd\varphi$  et  $d\theta d\varphi$  dans l'élément de temps propre.

Mathématiquement si la métrieque est statique et isotrope, il est alors toujours possible de trouver un système de coordonnées dit quasi-Minkowskien  $\{x^1, x^2, x^3, x_0 = t\}$ , où le temps propre  $d\tau = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  ne dépend de  $\vec{x}$  et de  $d\vec{x}$  qu'à travers les invariants rotationnels

$d\vec{x}^2$ ,  $\vec{x}.d\vec{x}$  et  $\vec{x}^2$  [12]. Par conséquent, l'élément de temps propre prend la forme

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt\vec{x}.d\vec{x} - D(r)(\vec{x}.d\vec{x})^2 - C(r)d\vec{x}^2, \quad (2.3)$$

où  $F, E, D$  et  $C$  sont des fonctions arbitraires de  $r$ , qui est défini comme

$$r = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}. \quad (2.4)$$

Il est convenable de travailler avec les coordonnées sphériques de  $\vec{x}$   $r, \theta$  et  $\varphi$  liées aux coordonnées quasi-Minkowskiennes  $x^1, x^2$  et  $x^3$  par les relations habituelles

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta.$$

La relation (2.3) prend alors la forme

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dt dr - r^2 D(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5)$$

Faisons un changement de la coordonnée temps  $t \rightarrow t'$ . Ceci correspond à une redéfinition du temps ou une resynchronisation des horloges.

$$t' = t + \Phi(r), \quad (2.6)$$

d'où

$$dt' = dt + \frac{d\Phi(r)}{dr} dr, \quad (2.7)$$

où  $\Phi$  est une fonction arbitraire de  $r$ . Le temps propre s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} d\tau^2 = & F(r)dt'^2 - \left( -F(r) \left( \frac{d\Phi(r)}{dr} \right)^2 + r^2 D(r) - 2rE(r) \frac{d\Phi}{dr} \right) dr^2 - \\ & 2 \left( F(r) \frac{d\Phi(r)}{dr} + rE(r) \right) dt' dr - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Choisissons  $\Phi$  de telle manière à éliminer les termes non diagonaux de (2.8), ce qui revient à choisir  $\Phi$  satisfaisant à l'équation différentielle



$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}.$$

Avec ce choix de  $\Phi$ ,  $d\tau^2$  se réduit à

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r) [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2], \quad (2.9)$$

où

$$G(r) = r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right).$$

On a aussi la possibilité de redéfinir  $r$ . Si on prend un nouveau rayon  $r'$  lié à  $r$  par

$$r'^2 = C(r)r^2, \quad 2r'dr' = \left( 2C(r)r + r^2\frac{dC(r)}{dr} \right) dr.$$

Le temps propre se met alors sous la forme

$$\begin{aligned} d\tau^2 = & F(r)dt'^2 - \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{r}{2C(r)}\frac{dC(r)}{dr}} \right)^2 dr'^2 \\ & - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si on pose  $B(r') = F(r)$  et  $A(r') = \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( 1 + \frac{r}{2C(r)}\frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}$ , alors

$$d\tau^2 = B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.11)$$

$B(r')$  et  $A(r')$  sont des fonctions de  $r'$  qui vont être déterminées par les équations de champ d'Einstein. Dans un but de simplification des notations réappelons dans ce qui suit  $r$ ,  $r'$ .

La relation (2.11) est désignée sous le nom de forme standard de la métrique générale d'un champ gravitationnel statique et isotrope.

Le tenseur métrique associé à (2.11) est donné par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B(r) & & & \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

et le tenseur métrique inverse de (2.12) est

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(r)} & & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

En outre, le déterminant du tenseur métrique vaut  $-g$ , avec  $g$  donné par

$$g = r^4 \sin^2 \theta A(r) B(r). \quad (2.14)$$

L'élément de volume invariant est donné par

$$\sqrt{g} dr d\theta d\varphi = r^2 \sqrt{A(r) B(r)} \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (2.15)$$

Calculons maintenant la connexion affine, en utilisant la relation :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right). \quad (2.16)$$

Les composantes non nulles de la connexion affine sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A(r)} \right) \left( \frac{dB(r)}{dr} \right), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)}, \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} &= \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En faisant usage des expressions des composantes non nulles de la connexion affine, on peut tirer les composantes non nulles de tenseur de Ricci. Tous calculs faits, on obtient

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right), \quad (2.18)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} \right), \quad (2.19)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{r}{2A(r)} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} - 1, \quad (2.20)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \left[ \frac{r}{2A(r)} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} - 1 \right] = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}, \quad (2.21)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour } \mu \neq \nu, \quad (2.22)$$

où  $' := d/dr$ . L'équation (2.22) montre que le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  est diagonal. L'annulation des composantes  $R_{r\theta}$ ,  $R_{r\varphi}$  et  $R_{\theta\varphi}$  et le fait que  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$  traduisent l'invariance par rotation de la métrique. L'annulation des composantes  $R_{tr}$ ,  $R_{t\theta}$ , et  $R_{t\varphi}$  est une conséquence de l'invariance de la métrique sous la transformation  $t \rightarrow (-t)$  [12].

## 2.2 La solution de Schwarzschild

Une année après la publication des équations d'Einstein, K. Schwarzschild, en 1916, trouva une solution de ces équations valable à l'extérieur de la source, supposée statique et à symétrie sphérique. Cette solution correspond au potentiel Newtonien créé par une telle source en mécanique céleste non relativiste, et a ainsi rendu possible la résolution du problème de Kepler en relativité générale. La solution de Schwarzschild est une solution dans le vide, c'est à dire que

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.23)$$

avec les composantes du tenseur de Ricci données par (2.18 – 2.22). En remplaçant  $R_{tt}$  et  $R_{rr}$  par leurs expressions respectives (2.18) et (2.19), puis en combinant, on obtient

$$0 = \frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right). \quad (2.24)$$

Cette dernière équation implique que

$$\frac{B'(r)}{B(r)} = -\frac{A'(r)}{A(r)}.$$

Il s'ensuit que

$$A(r)B(r) = \text{constante}. \quad (2.25)$$

Pour  $r \rightarrow \infty$  la métrique de Schwarzschild doit tendre vers celle de Minkowski. Dans le système de coordonnées sphériques le temps propre est donnée par la formule (2.1). Il s'ensuit que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1, \quad (2.26)$$

et par conséquent

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r)B(r) = 1. \quad (2.27)$$

En comparant à (2.25), on déduit que

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.28)$$

En faisant usage de (2.28), (2.20) et (2.19) peuvent être réécrites, comme

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r), \quad (2.29)$$

et

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB(r)}. \quad (2.30)$$

Les équations du champ d'Einstein (2.23) impliquent alors que

$$B'(r)r + B(r) = 1.$$

L'intégration de cette équation donne

$$rB(r) = r + \text{constante}. \quad (2.31)$$

Pour déterminer la constante d'intégration, revenons à la limite Newtonienne d'un champ gravitationnel faible et stationnaire, auquel cas  $g_{tt}$  se réduit à

$$g_{tt} = -(1 + 2\phi),$$

où  $\phi$  est le potentiel Newtonien créée par une masse sphérique  $M$  située à une distance  $r$ . Comme cela est connu  $\phi = -\frac{GM}{r}$ , où  $G$  est la constante de Newton, qui vaut :  $G = 6,6726 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ .

En comparant alors à (2.11), on aboutit à

$$B(r) = 1 + 2\phi, \quad (2.32)$$

ou

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (2.33)$$

En comparant à (2.32) on arrive finalement à déterminer la constante intervenant dans (2.31), qui n'est rien d'autre que le rayon de Schwarzschild  $R_S := 2GM$ .

En faisant usage de (2.28) on arrive alors à l'expression de  $A(r)$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}. \quad (2.34)$$

Finalement, on obtient l'expression finale de la solution des équations d'Einstein dans le vide dans le cas statique et isotrope

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.35)$$

On constate deux choses au vu de cette dernière équation, la première est que pour  $r$  grand. La métrique se réduit approximativement à celle d'un espace plat de Minkowski. La deuxième est que la métrique a deux singularités aux points  $r = 0$  et  $r = 2MG$ . Cependant, ces deux singularités sont de nature différentes. Au point  $r = 0$ , on a une singularité physique où le tenseur de courbure diverge, tandis qu'au point  $r = 2MG = R_S$ , le tenseur de courbure est bien défini, mais l'espace-temps a un horizon en ce point appelé horizon d'événement.

Comme nous l'avons vu, la métrique souffre d'un défaut au point  $r = R_S$ . Cependant, pour les petits astres comme la terre, le rayon de Schwarzschild est très petit et nous n'avons pas à craindre que notre métrique soit brisée. Pour la terre  $R_S = 9 \times 10^{-3} m$ , et pour un objet de la taille du soleil  $R_S = 3 \times 10^3 m$ . Donc  $R_S$  est bien inférieur aux rayons de la distribution

de masse. Donc à l'extérieur de celle-ci, on n'a pas à craindre de problèmes puisque on aura largement dépassé la rayon de Schwarzschild.

### 2.2.1 Les équations générales du mouvement

Considérons une particule massive ou un photon en chute libre dans un champ gravitationnel statique et isotrope. La métrique est donnée par

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - B^{-1}(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = 0, \quad (2.36)$$

et les équations de mouvement d'une particule test sont données par

$$\frac{d^2x}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0,$$

où  $p$  est un paramètre qui décrit le trajectoire de la particule test. En général,  $d\tau$  est proportionnel à  $dp$ , et donc on peut choisir  $p = \tau$  pour une particule massive. Pour un photon  $d\tau^2 = 0$  et par conséquent, on ne peut pas choisir  $p = \tau$ . On choisit alors tout autre paramètre excepté le temps propre.

Si on fait usage des composantes non nulles de la connexion affine calculées en (2.17) les équations de mouvement appelées aussi équations de la géodésique s'écrivent comme

$$\frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} - \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - rB(r) \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 - r\sin^2\theta B(r) \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{1}{2} B'(r)B(r) \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\varphi}{dp} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{dp} \frac{d\varphi}{dp} = 0, \quad (2.40)$$

où de nouveau  $' := d/dr$

Divisons l'équation (2.40) par  $\frac{d\varphi}{dp}$  on obtient

$$\frac{d}{dp} \left[ \ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 + \ln \sin^2 \theta \right] = 0.$$

Par intégration de cette dernière équation, on trouve

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dp} = J \text{ ou } \frac{d\varphi}{dp} = \frac{J}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.41)$$

où  $J$  est une constante arbitraire. Substituons à  $\frac{d\varphi}{dp}$ , son expression (2.41) dans (2.39). On obtient

$$\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \frac{J^2 \cos \theta}{r^4 \sin^3 \theta} = 0. \quad (2.42)$$

Multiplions (2.42) par  $2r^4 \frac{d\theta}{dp}$ , ce qui donne

$$2r^4 \frac{d\theta}{dp} \frac{d^2\theta}{dp^2} + 4r^3 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 \frac{dr}{dp} - \frac{2J^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{d\theta}{dp} = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dp} \left[ r^4 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + J^2 \cot^2 \theta \right] = 0. \quad (2.43)$$

Par intégration, on arrive à

$$r^4 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + J^2 \cot^2 \theta = A, \quad (2.44)$$

où  $A$  est une constante arbitraire qui peut être déterminé à partir des conditions initiales. Si on fait le choix suivant des conditions  $\theta : \theta_0 = \theta(p = p_0) = \frac{\pi}{2}$  et  $\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{p=p_0} = 0$ , alors  $A = 0$  et par conséquent (2.44) se simplifie en :

$$r^4 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + J^2 \cot^2 \theta = 0. \quad (2.45)$$

Cette dernière équation est une somme de deux termes tous deux positifs. Donc les deux termes doivent être séparément nuls, d'où

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (2.46)$$

et le mouvements de la particule s'effectue donc dans le plan équatorial. Autrement dit, si le mouvement se faisait initialement dans le plan équatorial la particule test restera dans le plan équatorial. Ceci est intimement lié à l'invariance sous les rotations qui implique que le mouvement de la particule se fait dans un plan qu'on pourra toujours prendre comme le plan équatorial. L'équation (2.41) se simplifie alors en :

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{J}{r^2}. \quad (2.47)$$

Si on divise l'équation (2.37), par  $\frac{dt}{dp}$ , on obtient

$$\frac{d}{dp} \left\{ \ln \frac{dt}{dp} + \ln B(r) \right\} = 0,$$

ce qui donne par intégration

$$\frac{dt}{dp} = \frac{k}{B(r)}. \quad (2.48)$$

La constante  $k$  peut être absorbée dans une redéfinition de  $p$ . On choisit donc le paramètre  $p$  de telle sorte que la solution prenne la forme

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.49)$$

Comme  $B(r)$  reste voisin de l'unité ( $B(r) \approx 1$ ),  $p$  est à peu près à la coordonnée temps  $t$ .

Insérons maintenant les équations (2.46), (2.47) et (2.49) dans l'équation (2.38). On obtient alors

$$\frac{d^2r}{dp^2} - \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2 B(r)}{r^3} + \frac{B'(r)}{2B(r)} = 0.$$

En multipliant cette dernière équation par  $2 \frac{1}{B(r)} \frac{dr}{dp}$ , nous obtenons

$$\frac{d}{dp} \left\{ B^{-1}(r) \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right\} = 0,$$

Ce qui donne par intégration

$$B^{-1}(r) \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E, \quad (2.50)$$



où  $E$  est une constante arbitraire. D'après ce qui précède, on peut mettre le temps propre sous la forme

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (2.51)$$

Cette dernière équation est en accord avec la remarque que  $d\tau^2$  doit être proportionnel à  $dp^2$ .

La constante de proportionnalité  $E$  est telle que :

$E > 0$  pour une particule massive.

$E = 0$  pour les photons.

Comme  $B(r)$  est une fonction strictement positive, alors (2.50) implique que

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq \frac{1}{B(r)}. \quad (2.52)$$

On peut utiliser l'équation (2.49) pour éliminer le paramètre  $p$  :  $dp = B(r) dt$ . On obtient alors les expressions de  $\frac{d\varphi}{dt}$  et  $\frac{dr}{dt}$ , qui caractérisent l'évolution de  $\varphi$  et de  $r$  en fonction du temps  $t$ ,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = JB(r), \quad (2.53)$$

$$B^{-3}(r) \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E, \quad (2.54)$$

Pour un mouvement lent d'une particule plongée dans un champ gravitationnel  $\frac{J^2}{r^2}$ ,  $\left( \frac{dr}{dt} \right)^2$  et  $B(r) - 1 = 2\phi$  sont tous petits. Par conséquent,

$$\frac{1}{1 + 2\phi} \simeq 1 - 2\phi.$$

Il s'ensuit que

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \simeq J, \quad (2.55)$$

et

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \simeq \frac{1 - E}{2}. \quad (2.56)$$

Cette dernière équation est la même que celle qu'obtient Newton pour un champ de force centrale, avec  $\left( \frac{1-E}{2} \right)$  jouant le rôle d'énergie du mouvement par unité de masse ( $m = 1$ ) et  $J$  jouant également le rôle du moment cinétique par unité de masse.

Dans les applications de la relativité générale, nous nous intéressons beaucoup plus à la forme de l'orbite. L'équation de l'orbite peut être obtenue en éliminant l'élément  $dt$  entre les équations (2.53) et (2.54), ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{B^{-\frac{1}{2}}(r)}{r^2 \left( \frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.57)$$

dont la solution est

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) \pm \int_r^\infty \frac{B^{-\frac{1}{2}}(r') dr'}{r'^2 \left( \frac{1}{J^2 B(r')} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.58)$$

pour un photon  $E = 0$ , et (2.58) se réduit à

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) \pm \int_r^\infty \frac{B^{-\frac{1}{2}}(r') dr'}{r'^2 \left( \frac{1}{J^2 B(r')} - \frac{1}{r'^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.59)$$

## 2.2.2 La déflexion de la lumière

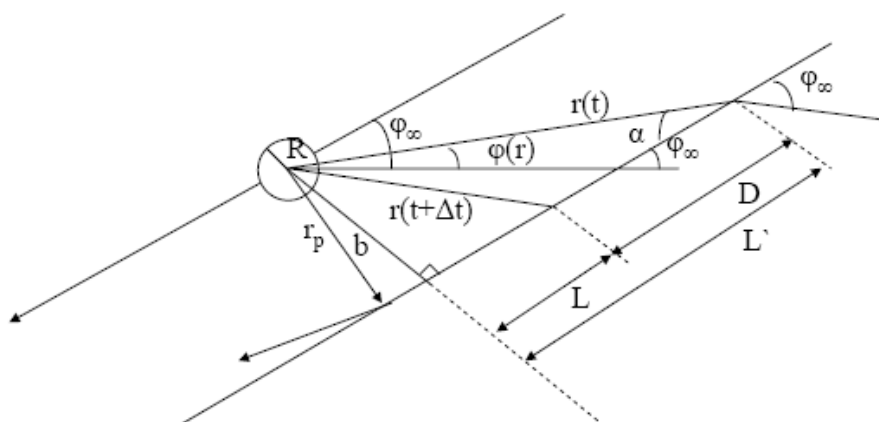


Fig.1 : Déflexion de la lumière.

Par rapport à ce qui passe dans l'espace de Minkowski, où les rayons lumineux se propagent en ligne droite, la trajectoire des rayons lumineux dans l'espace-temps de Schwarzschild est courbe. Elle peut être calculée perturbativement par rapport à la droite de Minkowski. Considérons une particule venant de l'infini avec un angle  $\varphi_\infty$ , et un point sur la ligne de Minkowski de rayon  $r$  et d'angle  $\varphi(r)$ .

Considérons le paramètre d'impact  $b$  :

$$b = r(t) \sin(\varphi_\infty - \varphi_r). \quad (2.60)$$

Cette dernière relation est vraie seulement en l'absence de la déflexion, en présence d'une déflexion très faible

$$b \simeq r \sin(\varphi_\infty - \varphi(r)). \quad (2.61)$$

Comme  $|\varphi_\infty - \varphi(r)| \ll 1$

$$b \simeq r(\varphi_\infty - \varphi(r)). \quad (2.62)$$

Considérons une autre point de rayon  $r(t + \Delta t)$ , après un intervalle de temps  $\Delta t$ . La distance parcourue par le photon pendant l'intervalle  $\Delta t$ , est donnée par :

$$D = L' - L,$$

où  $L$  est la distance parcourue entre le point de rayon  $r(t + \Delta t)$  et le point de rayon de paramètre impacte  $b$ , et  $L'$  est la distance parcourue entre le point de rayon  $r(t)$  et le point de rayon de paramètre impacte  $b$ .

Nous avons, sous la base de considérations géométriques élémentaires,

$$\frac{L}{r(t + \Delta t)} = \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t + \Delta t))),$$

$$\frac{L'}{r(t)} = \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t))).$$

Par conséquent,

$$D = r(t) \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t))) - r(t + \Delta t) \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t + \Delta t))).$$

La vitesse moyenne du photon pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est donnée par :

$$V_{moy} = \frac{D}{\Delta t} = \frac{r(t) \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t))) - r(t + \Delta t) \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t + \Delta t)))}{\Delta t},$$

et la vitesse instantanée est donnée par :

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D}{\Delta t} = -\frac{d}{dt}r(t) \cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t))). \quad (2.63)$$

La relation (2.63) est strictement vrai s'il n'y a pas de déflexion.

En présence de la déflexion la relation est vraie approximativement. Comme  $|(\varphi_\infty - \varphi(r(t)))| \ll 1$  et donc  $\cos(\varphi_\infty - \varphi(r(t))) \simeq 1$ , la vitesse instantanée se réduit à

$$V \simeq -\frac{d}{dt}r(t). \quad (2.64)$$

En partant de la relation (2.62), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{b}{r} \right) \simeq \frac{d}{dt} (\varphi_\infty - \varphi),$$

et donc

$$-\frac{b}{r^2} \frac{dr}{dt} \simeq -\frac{d\varphi}{dt}.$$

En faisant usage de la relation

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \simeq J,$$

on arrive à

$$-\frac{b}{r^2} \frac{dr}{dt} \simeq \frac{J}{r^2},$$

ou, en tenant compte de (2.64)

$$bV = -J. \quad (2.65)$$

Si on considère la relation

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - 1 \simeq -E,$$

dans la limite  $r \rightarrow \infty$ , on arrive à

$$E = 1 - V^2. \quad (2.66)$$

Pour un photon  $V = c = 1$ , ce qui prouve de nouveau que  $E = 0$  pour un photon.

Désignons par  $r_p$  la distance minimale d'approche de la particule par rapport au soleil. On a alors

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_p} = 0, \quad (2.67)$$

d'où on déduit, en tenant compte de (2.54), que

$$\frac{1}{r_p^2} - \frac{1}{J^2 B(r_p)} = -\frac{E}{J^2},$$

et par conséquent une expression pour  $J$

$$J = r_p \left( \frac{1}{B(r_p)} - E \right)^{\frac{1}{2}} = r_p \left( \frac{1}{B(r_p)} + V^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.68)$$

Insérons cette dernière équation dans la formule (2.58), on obtient alors

$$\varphi(r) = \varphi_\infty - \int_r^\infty \frac{B^{-\frac{1}{2}}(r') dr'}{r'^2 \left[ \frac{1}{r_p^2} \left( \frac{1}{B(r_p)} + V^2 - 1 \right)^{-1} \left( \frac{1}{B(r')} + V^2 - 1 \right) - \frac{1}{r'^2} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.69)$$

Cette dernière équation est valable de  $r \rightarrow \infty$  jusqu'à  $r = r_p$ .

Pour un photon  $V = 1$ , (2.69) se simplifie en

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = - \int_r^\infty B^{-\frac{1}{2}}(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_p} \right)^2 \left( \frac{B(r_p)}{B(r')} \right) - 1 \right]^{\frac{-1}{2}} \frac{dr'}{r'}, \quad (2.70)$$

qui donne la variation de  $\varphi$  lorsque  $r$  varie de  $r = \infty$  à  $r = r_p$ .

D'autre part, la variation de  $\varphi$  lorsque  $r$  varie de  $r = r_p$  à  $r = \infty$  est identique à celle de  $\varphi$  lorsque  $r$  varie de  $\infty$  à  $r = r_p$ , et donc, la variation totale de  $\varphi$  lorsque  $r$  varie de  $\infty$  à  $r = r_p$  et ensuite, de  $r = r_p$  à  $\infty$  est  $2(\varphi(r_p) - \varphi_\infty)$ . Finalement, la déflexion est donnée par l'expression :

$$\Delta\varphi = 2(\varphi(r_p) - \varphi_\infty) - (-\pi) = 2(\varphi(r_p) - \varphi_\infty) + \pi. \quad (2.71)$$

L'intégrale (2.70) est une intégrale elliptique. On peut l'intégrer en donnant la forme de la fonction  $B(r)$ . Dans le cas de la solution de Schwarzschild

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$$

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = - \int_r^\infty \frac{r_p}{r'^2 \sqrt{B(r_p)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r'^2} \frac{B(r')}{B(r_p)}}} dr'. \quad (2.72)$$

Simplifions la fonction à intégrer. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{r_p}{r^2 \sqrt{B(r_p)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_p)}}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} B(r_p) - B(r)}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} \left(1 - 2GM \frac{1}{r_p}\right) - 1 + 2GM \frac{1}{r}}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 2GM \frac{r^2}{r_p^2} \frac{1}{r_p} - 1 + 2GM \frac{1}{r}}}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ajoutons et retranchons le terme  $2GM \frac{r^2}{r_p^2} \frac{1}{r_p}$  à l'expression sous la racine dans le dénominateur de l'équation précédente. On obtient,

$$\frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - \frac{r^2}{r_p^2} \frac{2GM}{r_p} - 1 + \frac{2GM}{r}}} = \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1 - \left(\frac{r^2}{r_p^2} - 1\right) \frac{2GM}{r} + 2GM \frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p}\right)}}. \quad (2.74)$$

Simplifions le terme,  $\frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p}\right)$ , on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p}\right) &= \frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{r_p^2 - r^2}{rr_p(r+r_p)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{r^2}{r_p^2}\right) \left(\frac{r}{r_p(r+r_p)}\right) \\ &= - \left(\frac{r^2}{r_p^2} - 1\right) \left(\frac{r}{r_p(r+r_p)}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\frac{d\varphi}{dr}$  peut être réécrit sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1} \left[1 - 2GM \frac{1}{r} - 2GM \frac{r}{r_p(r+r_p)}\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.75)$$

De même

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\sqrt{B(r_p)}}{B(r) \sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r^2} \left[1 - 2GM \frac{1}{r} - 2GM \frac{r}{r_p(r+r_p)}\right]^{\frac{1}{2}}}}. \quad (2.76)$$

Faisons un développement limité de  $\left[1 - 2GM\frac{1}{r} - 2GM\frac{r}{r_p(r+r_p)}\right]^{-\frac{1}{2}}$ , et ne gardons les termes jusqu'au premier ordre

$$\left[1 - 2GM\frac{1}{r} - 2GM\frac{r}{r_p(r+r_p)}\right]^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + GM\frac{1}{r} + GM\frac{r}{r_p(r+r_p)} \quad (2.77)$$

En remplaçant ensuite dans  $\frac{d\varphi}{dr}$  par son expression approximative dans  $\varphi(r) - \varphi_\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi_\infty = & -\int_r^\infty \frac{dr'}{r' \sqrt{\left(\frac{r'}{r_p}\right)^2 - 1}} - GM \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\left(\frac{r'}{r_p}\right)^2 - 1}} \\ & - GM \int_r^\infty \frac{dr'}{r_p (r_p + r') \sqrt{\left(\frac{r'}{r_p}\right)^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Faisons le changement de variable  $u' = \frac{r'}{r_p}$ ,  $du = \frac{dr'}{r_p}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi_\infty = & -\int_u^\infty \frac{du'}{u' \sqrt{u'^2 - 1}} - GM \frac{1}{r_p} \int_u^\infty \frac{du'}{u'^2 \sqrt{u'^2 - 1}} - \\ & GM \frac{1}{r_p} \int_u^\infty \frac{du'}{(u' + 1) \sqrt{u'^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

En faisant usage des intégrales :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} &= -\arcsin \frac{1}{x}, \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}, \\ \int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 - 1}} &= \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi_\infty = & -\arcsin \frac{1}{u} - GM \frac{1}{r_p} \left[1 - \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u}\right] - \\ & GM \frac{1}{r_p} \left[1 - \sqrt{\frac{u - 1}{u + 1}}\right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Par conséquent, la déflexion totale de la lumière est donnée par

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= 2(\varphi(r_p) - \varphi_\infty) + \pi \\
&= 2\left[-\frac{\pi}{2} - 2GM\frac{1}{r_p}\right] + \pi \\
&= -4MG\frac{1}{r_p} \prec 0.
\end{aligned}
\tag{2.82}$$

La valeur de la déflexion de la lumière est négative par ce que la déflexion s'effectue dans le sens d'aiguilles d'une montre.

Pour un rayon lumineux approchant le soleil, la déflexion est prend la valeur [15]

$$\Delta\varphi = -1,75''.$$
(2.83)

## 2.3 L'effet de lentille gravitationnelle

Le phénomène spectaculaire de la déflexion de la lumière par une source gravitationnelle (en l'occurrence, le soleil) fut à la base du succès fulgurant de la théorie d'Einstein. L'avènement de nouvelles techniques de détection permet aujourd'hui l'observation de mirages gravitationnels (images multiples) à des échelles extragalactiques.

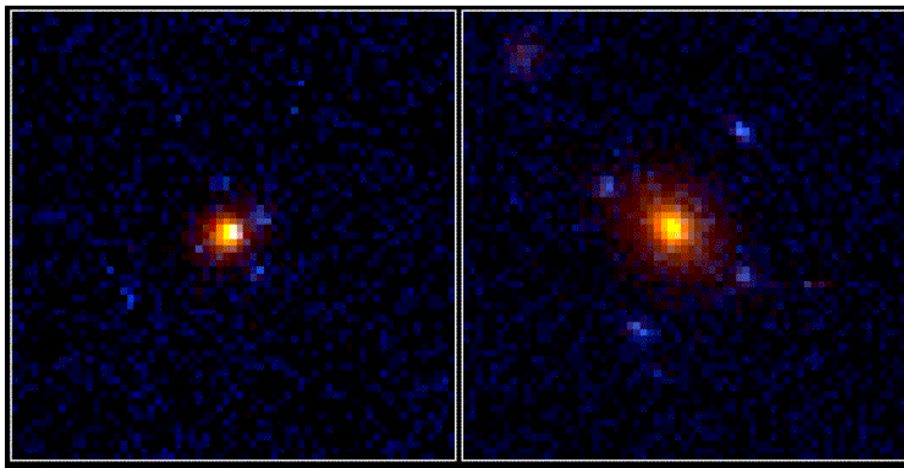


Fig. 2 : Effet de lentille gravitationnelle pour PRC 95 - 43. Image provenant du satellite Hubble (HST pictures) [16].

Jusqu'en septembre 2007, la croyance générale était que la déflexion de la lumière par une distribution de masse à symétrie sphérique n'était pas sensible à la présence d'une constante



cosmologique. Cette croyance a été révisé suite au travaux de Rindeler et Ishak [1].

### 2.3.1 Cadre et hypothèses de l'étude

Nous avons le schéma suivante : Une source  $S$ , un quasar émet des photons, défléchis lors de leur passage au voisinage d'une lentille gravitationnelle  $L$ , consistant en une galaxie ou un amas de galaxie, puis sont ensuite reçus sur terre  $E$ . Notre objectif est d'étudier l'influence de la présence de la constante cosmologique sur l'effet du lentille gravitationnelle, en ce qui concerne déflexion de la lumière. Nous adopterons dans ce chapitre, les hypothèses suivantes : L'univers est considéré comme vide à l'exception d'une masse  $M$  à symétrie sphérique, statique et dépourvue d'un mouvement de rotation, la lentille  $L$ . Ceci signifie qu'on ne tient pas compte des autres masses de l'univers. En particulier les masses du groupe local et de la source sont négligées.

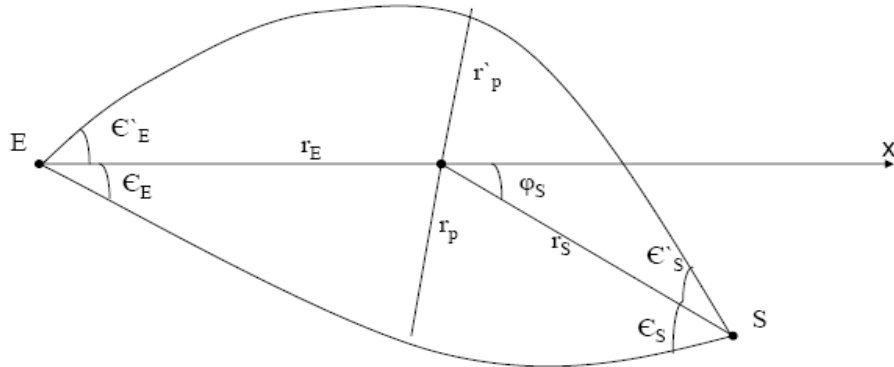


Fig. 3 : Deux photons émis par une source ( $S$ ), reçu sur terre ( $E$ ), et empruntant deux trajectoires différentes, donnant lieu à une image double.

On considère aussi que la source  $S$ , aussi bien que la terre  $E$  sont au repos par rapport à la lentille  $L$ .

Nous utilisons un système de coordonnées sphériques (polaires)  $(r, \theta, \varphi)$  centré sur la lentille  $L$ . A cause de la symétrie sphérique, la trajectoire des photons est contenue dans un plan et nous pouvons faire en sorte de choisir le système de coordonnées de telle manière que ce plan soit le plan équatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Nous pouvons également choisir le système de coordonnées de telle manière l'angle polaire  $\varphi'_E$  correspondant à la terre soit  $\varphi'_E = \pi$ . En présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , la métrique appropriée pour la description du champ gravitationnel

créé par une masse  $M$  statique à symétrie sphérique dépourvue d'un mouvement de rotation est la métrique de Kottler, appelée aussi métrique de Schwarzschild-de Sitter, caractérisée à l'extérieur de la distribution de masse par le l'intervalle de temps propre

$$d\tau^2 = Bdt^2 - B^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (2.84)$$

avec

$$B = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \quad (2.85)$$

Dans le plan équatorial,  $d\tau^2$  se réduit à

$$d\tau^2 = Bdt^2 - B^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2.$$

Les conditions initiales pour le photon sont  $(r_S, \varphi'_S)$  pour la position et l'angle  $\epsilon'_S = \arctan\left(r_S \left| \frac{d\varphi'}{dr(r_S)} \right| \right)$  pour la vitesse. Dans ce qui suit,  $r'_p$  désignera la distance d'approche minimale du photon au centre de la distribution de masse, appelée péri-lens. A sa réception sur terre le photon sera caractérisé par  $(r_E, \varphi'_E = \pi)$  pour la position et l'angle  $\epsilon'_E = \arctan\left(r_E \left| \frac{d\varphi'}{dr(r_E)} \right| \right)$  pour la vitesse. Dans le cas d'une symétrie sphérique, on aura une ou deux images. Il existe une exception : Lorsque la terre, la source et la lentille sont alignées avec  $r_E = r_S$ , on a un nombre infini d'images forment l'anneau d'Einstein. On s'intéressera au cas non aligné avec deux images. On a donc la situation suivante : un premier photon est émis par la source au temps  $t'_S$  avec une vitesse caractérisée par un angle de coordonnée  $\epsilon'_S$ , emprunte un certain chemin et est défléchi par la lentille pour être reçu sur terre au temps  $t = 0$  avec une vitesse caractérisée par l'angle de coordonnée  $\epsilon'_E$ . un deuxième photon est émis par la source au temps  $t_S$  avec une vitesse caractérisée par un angle de coordonnée  $\epsilon_S$ , emprunte un chemin différent, passant de l'autre côté de la lentille pour être reçu sur terre en même temps que le premier photon, et avec une vitesse caractérisée par l'angle de coordonnée  $\epsilon_E$ .

Le tenseur métrique correspondant à (2.84) est donné par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

et le tenseur métrique inverse par

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Les calculs de la section précédente concernant les symboles de Christoffel pour la métrique de Schwarzschild peuvent être repris intégralement ici avec les mêmes résultats avec  $B$  donné cette fois-ci par (2.85). Les équations de la géodésique sont les mêmes et peuvent être intégrés de la même manière que la section précédente avec les mêmes résultats si on se limite aux photons, auquel cas  $E = 0$

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{B(r)}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{J}{r^2}, \\ \frac{1}{B(r)} \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} &= 0, \end{aligned}$$

sauf que  $B$  doit remplacé par (2.85).

On peut également éliminer le paramètre affine  $p$  de la même manière que dans le cas de Schwarzschild avec comme résultats

$$\frac{d\varphi'}{dr} = \pm \frac{r'_p}{r^2 \sqrt{B(r'_p)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'^2_p B(r)}{r^2 B(r'_p)}}} \quad (2.88)$$

et

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{B(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'^2_p B(r)}{r^2 B(r'_p)}}},$$

où on a tenu compte de l'expression de  $J$  en terme du péri-lens  $r'_p$

$$J = r'_p B^{-\frac{1}{2}}(r'_p).$$

L'équation (2.88) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi'}{dr} &= \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} B(r_p') - B(r)}} \\
&= \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_p'} - \frac{\Lambda}{3} r_p'^2\right) - 1 + \frac{2GM}{r} + \frac{\Lambda}{3} r^2}} \\
&= \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} - \frac{r^2}{r_p'^2} \frac{2GM}{r_p'} - 1 + \frac{2GM}{r}}}. \tag{2.89}
\end{aligned}$$

Retranchons et ajoutant le terme  $\frac{r^2}{r_p'^2} \frac{2GM}{r}$  à l'expression sous la racine carrée dans le dénominateur de l'expression précédente. En organisant les termes on obtient

$$\frac{d\varphi'}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} - 1 - \left(\frac{r^2}{r_p'^2} - 1\right) \frac{2GM}{r} + 2GM \frac{r^2}{r_p'^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p'}\right)}}. \tag{2.90}$$

On peut simplifier le terme  $\frac{r^2}{r_p'^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p'}\right)$  en

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{r_p'^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p'}\right) &= \frac{r^2}{r_p'^2} \left(\frac{r_p'^2 - r^2}{r r_p' (r + r_p')}\right) \\
&= \left(1 - \frac{r^2}{r_p'^2}\right) \left(\frac{r}{r_p' (r + r_p')}\right) \\
&= -\left(\frac{r^2}{r_p'^2} - 1\right) \left(\frac{r}{r_p' (r + r_p')}\right). \tag{2.91}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.90), on obtient

$$\frac{d\varphi'}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} - 1 \left[1 - \frac{2GM}{r} - 2GM \frac{r}{r_p' (r + r_p')}\right]^{\frac{1}{2}}}}. \tag{2.92}$$

Au premier ordre en  $GM$ , l'équation précédent se réduit à

$$\frac{d\varphi'}{dr} \simeq \pm \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{r}{r_p'}\right)^2 - 1}} \left[1 + \frac{MG}{r} + \frac{MGr}{r_p' (r + r_p')}\right]. \tag{2.93}$$

On obtient donc pour  $\frac{d\varphi'}{dr}$  dans le cas de la métrique de Kottler pour une masse nulle la même résultat que pour la métrique de Schwarzschild. Autrement dit, la constante cosmologique  $\Lambda$  a

disparu de l'expression de  $\frac{d\varphi'}{dr}$ . Il vaut la peine de noter que ce résultat, qui est un accident de calcul, n'est pas valable pour des particules massives. Ce résultat est à la base de la croyance générale que la présence de la constante cosmologique n'a aucun effet sur la trajectoire du photon, croyance qui devait s'avérer non fondée suite aux travaux de Rindler et Ishak [1] : Il ne suffit pas de considérer les équations de la géodésique, mais il faut également tenir compte de la métrique elle-même qui déterminent les observations qui peuvent être effectivement faites.

Dorénavant, on mettra les termes d'ordre deux en  $\frac{GM}{r'_p}$  et  $\epsilon'_S$ , à savoir les termes en  $\left(\frac{GM}{r'_p}\right)^2$ ,  $\epsilon_S'^2$  et  $\left(\frac{GM}{r'_p}\right)\epsilon'_S$ . En particulier

$$\epsilon'_S = r_S \left| \frac{d\varphi'}{dr(r_S)} \right| \sim \left( \frac{r_S^2}{r_p'^2} - 1 \right)^{-1/2} \sim \frac{r'_p}{r_S},$$

et par conséquent

$$\epsilon'_S r_S \sim r'_p.$$

De la même manière

$$\epsilon'_E r_E \sim r'_p,$$

et

$$\epsilon_S r_S \sim r_p, \quad \epsilon_E r_E \sim r_p.$$

Notons que pour la trajectoire du haut,  $\varphi'$  augmente lorsque  $r$  passe de  $r_S$  à  $r'_p$  et également lorsque  $r$  passe de  $r'_p$  à  $r_E$ . Il s'ensuit

$$\varphi'_E - \varphi'_S = \int_{r'_p}^{r_S} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr + \int_{r'_p}^{r_E} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr. \quad (2.94)$$

En utilisant l'approximation au premier ordre en  $GM$ , (2.93), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi'_E - \varphi'_S &= \int_{r'_p}^{r_S} \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}} + GM \int_{r'_p}^{r_S} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}} \\ &+ GM \int_{r'_p}^{r_S} \frac{dr}{r'_p (r + r'_p) \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}} + \int_{r'_p}^{r_E} \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}} \\ &+ GM \int_{r'_p}^{r_E} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}} + GM \int_{r'_p}^{r_E} \frac{dr}{r'_p (r + r'_p) \sqrt{\left(\frac{r}{r'_p}\right)^2 - 1}}. \end{aligned}$$

En faisant le même changement de variable que dans le cas de Schwarzschild  $u = \frac{r}{r'_p}$  et en faisant usage des mêmes intégrales (2.80), on arrive à

$$\begin{aligned}\varphi'_E - \varphi'_S &= -\arcsin \frac{r'_p}{r_S} + \frac{\pi}{2} + \frac{MG}{r'_p} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{r'_p}{r_S}\right)^2} + \sqrt{\frac{r_S - r'_p}{r_S + r'_p}} \right) \\ &\quad - \arcsin \frac{r'_p}{r_E} + \frac{\pi}{2} + \frac{MG}{r'_p} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{r'_p}{r_E}\right)^2} + \sqrt{\frac{r_E - r'_p}{r_E + r'_p}} \right),\end{aligned}$$

ou en organisant les termes

$$\begin{aligned}\varphi'_E - \varphi'_S &= \pi - \arcsin \frac{r'_p}{r_S} - \arcsin \frac{r'_p}{r_E} + \frac{MG}{r'_p} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{r'_p}{r_S}\right)^2} + \sqrt{\frac{r_S - r'_p}{r_S + r'_p}} \right) \\ &\quad + \frac{MG}{r'_p} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{r'_p}{r_E}\right)^2} + \sqrt{\frac{r_E - r'_p}{r_E + r'_p}} \right).\end{aligned}\tag{2.95}$$

Comme  $\frac{r'_p}{r_S} \ll 1$  et  $\frac{r'_p}{r_E} \ll 1$ , on peut faire usage des approximations

$$\frac{r_S - r'_p}{r_S + r'_p} \sim 1, \quad 1 - \left(\frac{r'_p}{r_S}\right)^2 \sim 1, \quad \frac{r_E - r'_p}{r_E + r'_p} \sim 1, \quad 1 - \left(\frac{r'_p}{r_E}\right)^2 \sim 1.\tag{2.96}$$

L'expression de  $\varphi'_E - \varphi'_S$  peut être alors approximée par

$$\varphi'_E - \varphi'_S \sim \pi - \frac{r'_p}{r_S} - \frac{r'_p}{r_E} + \frac{4MG}{r'_p},$$

ou

$$\varphi'_E - \varphi'_S \sim \pi - \epsilon'_S \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) + \frac{4MG}{\epsilon'_S r_S},\tag{2.97}$$

où on a fait usage des relations  $\epsilon'_S \sim \frac{r'_p}{r_S}$  et  $r'_p \sim \epsilon'_S r_S$ .

Pour la trajectoire du bas,  $\varphi$  diminue lorsque  $r$  varie de  $r_S$  à  $r_p$  et également lorsque  $r$  varie de  $r_p$  à  $r_E$ . Il s'ensuit que

$$\varphi_E - \varphi_S = -\int_{r_p}^{r_S} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr - \int_{r_p}^{r_E} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr,\tag{2.98}$$

qui est au signe près, la même intégrale que dans le membre de droite de l'équation (2.94) sauf que  $r'_p$  est remplacé par  $r_p$ . Par conséquent,

$$\varphi_E - \varphi_S \sim -\pi + \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) - \frac{4MG}{\epsilon_S r_S}.\tag{2.99}$$

On peut dans (2.97) et (2.99) remplacer  $\epsilon'_S$  et  $\epsilon_S$  par  $\epsilon'_E$  et  $\epsilon_E$  ce qui donne

$$\varphi'_E - \varphi'_S \sim \pi - \epsilon'_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) + \frac{4MG}{\epsilon'_E r_E},$$

et

$$\varphi_E - \varphi_S \sim -\pi + \epsilon_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) - \frac{4MG}{\epsilon_E r_E}.$$

On a  $\varphi'_E = \pi$  et  $\varphi_E = -\pi$ , il s'ensuit que

$$\varphi'_S \sim \epsilon'_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) - \frac{4MG}{\epsilon'_E r_E}. \quad (2.100)$$

$$\varphi_S \sim -\epsilon_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) + \frac{4MG}{\epsilon_E r_E}. \quad (2.101)$$

Les deux expressions de  $\varphi_S$  et  $\varphi'_S$  doivent être identiques. Il s'ensuit que

$$\left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) (\epsilon'_E + \epsilon_E) = \frac{4MG}{r_E} \left( \frac{1}{\epsilon'_E} + \frac{1}{\epsilon_E} \right),$$

d'où

$$\frac{r_E}{r_S} \sim \frac{4MG}{\epsilon'_E \epsilon_E r_E} - 1. \quad (2.102)$$

### 2.3.2 Passage de l'angle de coordonnée à l'angle physique

Les angles  $\epsilon'_S$ ,  $\epsilon_S$ ,  $\epsilon'_E$ , et  $\epsilon_E$  sont des angles de coordonnées. Expérimentalement, on a accès à d'autres angles, les angles physiques  $\alpha'_S$ ,  $\alpha_S$ ,  $\alpha'_E$  et  $\alpha_E$  qui sont bien entendu liés aux angles de coordonnée. Notre objectif dans cette sous-section est d'établir une relation entre angles physiques et angles de coordonnée correspondants.

Considérons l'angle physique  $\alpha'_E$  caractérisant la vitesse du photon à sa réception sur terre. L'angle  $\alpha'_E$  est mesuré par un rapport de temps propres de l'observateur terrestre.

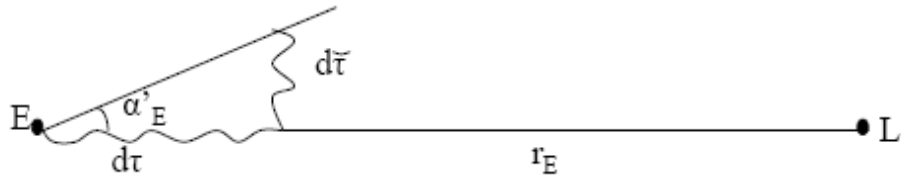


Fig. 4 : L'angle physique.

Le temps de coordonnée  $dt$  que demande le voyage d'un premier photon de  $(r_E, \varphi'_E)$  à  $(r_E - dr, \varphi'_E)$  s'obtient en remarquant que le temps propre du photon est nul. Il s'ensuit que

$$B(r_E)dt^2 - B^{-1}(r_E)dr^2 = 0,$$

d'où

$$dt = \frac{1}{B(r_E)}dr.$$

De même, le temps de coordonnée  $d\tilde{t}$  que demande le voyage d'un deuxième photon de  $(r_E - dr, \varphi'_E)$  à  $(r_E - dr, \varphi'_E - d\varphi)$  s'obtient en remarquant de nouveau que le temps propre du photon est nul, ce qui donne

$$B(r_E)d\tilde{t}^2 - r_E^2 d\varphi'^2 = 0,$$

d'où on déduit que

$$d\tilde{t} = \frac{r_E}{\sqrt{B(r_E)}}d\varphi'.$$

En temps propre de l'observateur terrestre le voyage du premier photon

$$d\tau = \sqrt{B(r_E)}dt,$$

et le voyage du deuxième photon

$$d\tilde{\tau} = \sqrt{B(r_E)}d\tilde{t}.$$

L'angle physique  $\alpha'_E$  mesuré par l'observateur terrestre est donné par la relation

$$\tan \alpha'_E = \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = \frac{d\tilde{t}\sqrt{B(r_E)}}{dt\sqrt{B(r_E)}} = \sqrt{B(r_E)}r_E \frac{d\varphi'}{dr} = \sqrt{B(r_E)} \tan \epsilon'_E. \quad (2.103)$$

Pour des angles petits  $\tan \alpha'_E \sim \alpha'_E$  et  $\tan \epsilon'_E \sim \epsilon'_E$ , la relation précédente se réduit à

$$\alpha'_E \sim \epsilon'_E \sqrt{B(r_E)} \sim \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}r_E^2} \epsilon'_E. \quad (2.104)$$

Ishak et Rindler [1] ont calculé l'angle physique via la formule du cosinus en utilisant moins la partie spatiale de la métrique

$$\cos \alpha'_E = \frac{(dr_E, 0)(dr_E, d\varphi)}{[(dr_E, 0)(dr_E, 0)]^{1/2} [(dr_E, d\varphi)(dr_E, d\varphi)]^{1/2}}. \quad (2.105)$$

Mais

$$(dr_E, 0)(dr_E, d\varphi) = B^{-1}(r_E)dr_E^2,$$



$$(dr_E, 0)(dr_E, 0) = B^{-1}(r_E)dr_E^2,$$

$$(dr_E, d\varphi)(dr_E, d\varphi) = B^{-1}(r_E)dr_E^2 + r_E^2d\varphi^2.$$

Il s'ensuit que :

$$\cos \alpha'_E = \frac{B^{-1}dr_E^2}{[B^{-1}(r_E)dr_E^2]^{1/2} [B^{-1}(r_E)dr_E^2 + r_E^2d\varphi^2]^{1/2}}, \quad (2.106)$$

où

$$\begin{aligned} \cos \alpha'_E &= \frac{1}{\left[1 + B(r_E)r_E^2 \frac{d\varphi^2}{dr_E^2}\right]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{[1 + B(r_E) \tan^2 \epsilon'_E]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

En effet en prenant le carré de (2.107), on obtient

$$\cos^2 \alpha'_E = \frac{1}{1 + B(r_E) \tan^2 \epsilon'_E},$$

ou

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha'_E} = 1 + B(r_E) \tan^2 \epsilon'_E.$$

Mais

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha'_E} = 1 + \tan^2 \alpha'_E.$$

Il s'ensuit que

$$\tan^2 \alpha'_E = B(r_E) \tan^2 \epsilon'_E,$$

d'où

$$\tan \alpha'_E = \sqrt{B(r_E)} \tan \epsilon'_E, \quad (2.108)$$

qui est bien identique à (2.104). Il s'ensuit que la relation (2.108) se réduit pour  $\alpha'_E \ll 1$  et  $\epsilon'_E \ll 1$ , à

$$\alpha'_E \sim \sqrt{B(r_E)} \epsilon'_E \quad (2.109)$$

$$\sim \sqrt{1 - \frac{\Lambda r_E^2}{3}} \epsilon'_E. \quad (2.110)$$

On peut voir que pour  $\Lambda = 0$ , c'est à dire en l'absence de la constante cosmologique l'expression (2.108), se réduit à

$$\tan \alpha'_E = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_E}} \tan \epsilon'_E. \quad (2.111)$$

Donc, dans la région asymptotique  $\frac{2GM}{r_E} \ll 1$  ou  $\frac{2GM}{r_E} \rightarrow 0$ ,

$$\tan \alpha'_E = \tan \epsilon'_E, \quad (2.112)$$

et  $\alpha'_E$  coïncide avec  $\epsilon'_E$ .

Donc angle physique  $\alpha'_E$  et angle de coordonnée  $\epsilon'_E$  coïncident dans la région asymptotique dans le cas de Schwarzschild. Autrement dit, il n'y a pas de distinction entre angle physique et angle de coordonnée dans le cas de Schwarzschild. De même,

$$\tan \alpha_E = \sqrt{B(r_E)} \tan \epsilon_E. \quad (2.113)$$

### 2.3.3 Passage de la distance de coordonnée à la distance d'aire

Imaginons une bougie standard émettant des photons de manière isotrope à partir de la position de la lentille. La distance d'aire  $d_L$  observé sur terre est définie comme

$$d_L := \frac{dS}{d\Omega}, \quad (2.114)$$

où  $d\Omega$  est l'élément d'angle solide dans lequel sont rayonnés les photons et  $dS$  est la surface infinitésimale de la plaque sensible qui collecte les photons sur terre.

En temps propre de l'observateur terrestre, le voyage du photon dure

$$d\tau = \sqrt{B(r_E)} dt = r_E d\varphi \quad (2.115)$$

L'aire est encore une fois mesuré au moyen du temps de vol d'un photon qui fait des voyage le long des bords. Pour les bord des plan appartenant au plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , la coordonnée temps de vol  $dt$  est déterminée par :  $B(r_E) dt^2 - r_E^2 d\varphi^2 = 0$ . Pour des raisons de symétrie nous obtenons la même expression du temps propre pour le bord orthogonal au plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Par conséquent,

$$d_L = r_E. \quad (2.116)$$

Pour la distance d'aire  $d_S$  de la source vue de la terre, les calculs sont plus compliqués. L'isotropie de la bougie standard dans le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  est définie par rapport à l'angle physique  $\alpha_S$  qui a une période de  $2\pi B^{1/2}(r_S)$ . Le temps propre de l'observateur terrestre correspondant au temps du vol du photon sur le bord infinitésimal dans le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  est

$$dl_{||} = r_E |d\varphi_E|. \quad (2.117)$$

En dérivant l'équation (2.99) par rapport a  $\epsilon_S$ , on obtient

$$d\varphi_E \sim d\epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) + \frac{4GM}{\epsilon_S^2 r_S} d\epsilon_S,$$

en fait l'usage de l'équation (2.102)

$$\frac{r_E}{r_S} + 1 \sim \frac{4GM}{\epsilon'_E \epsilon_S r_S},$$

on peut montrer que

$$\frac{4GM}{\epsilon_S^2 r_S} \sim \frac{\epsilon'_E}{\epsilon_E} \left(\frac{r_S}{r_E} + 1\right), \quad (2.118)$$

et par conséquent  $d\varphi_E$  peut être mis sous la forme

$$d\varphi_E \sim - \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) \left(1 + \frac{\epsilon'_E}{\epsilon_E}\right) d\epsilon'_S, \quad (2.119)$$

de l'équation (2.104) on déduit que  $\frac{\epsilon'_E}{\epsilon_E} = \frac{\alpha'_E}{\alpha_E}$  et  $d\epsilon_S = \frac{d\alpha_S}{\sqrt{B(r_S)}}$ . Il s'ensuit que

$$d\varphi_E \sim \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) \left(1 + \frac{\alpha'_E}{\alpha_E}\right) \frac{d\alpha_S}{\sqrt{B(r_S)}}, \quad (2.120)$$

Dans le plan orthogonal au plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , les calculs sont plus faciles à cause de la symétrie autour de l'axe lentille-source. Une rotation infinitésimale par un angle de coordonnée  $d\eta$  de période  $2\pi$  donne une longueur infinitésimale  $dl_{\perp} \sim r_E \sin(\pi + \varphi_E - \varphi_S) d\eta$ . En tenant compte que  $\varphi_E = -\pi$ , donc  $dl_{\perp} \sim r_E \sin(-\varphi_S) d\eta$

Partons de l'équation (2.99)

$$-\varphi_S \sim \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_E}\right) - \frac{4GM}{\epsilon_S r_S}.$$

Comme

$$\epsilon_S r_S \sim \epsilon_E r_E,$$

il en résulte que

$$-\varphi_S \sim \epsilon_E \left(\frac{r_E}{r_S} + 1\right) - \frac{4GM}{\epsilon_E r_E}.$$

D'autre part, d'après (2.102)

$$\frac{4GM}{\epsilon_S r_S} = \epsilon'_E \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\varphi_S &\sim \epsilon_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) - \epsilon'_E \left( 1 + \frac{r_E}{r_S} \right) \\ &\sim (\epsilon_E - \epsilon'_E) \left( 1 + \frac{r_E}{r_S} \right). \end{aligned}$$

Or, d'après (2.104)

$$\epsilon_E = \frac{\alpha_E}{\sqrt{B(r_E)}}, \quad \epsilon'_E = \frac{\alpha'_E}{\sqrt{B(r_E)}}.$$

Par conséquent,

$$-\varphi_S = \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) \frac{|\alpha_E - \alpha'_E|}{\sqrt{B(r_E)}}, \quad (2.121)$$

où on utilise le fait que  $\pi + \varphi_E - \varphi_S \ll 1 \implies \sin(\pi + \varphi_E - \varphi_S) \simeq \pi + \varphi_E - \varphi_S$ .

Finalement,

$$dl_{\perp} \sim r_E \left( \frac{r_E}{r_S} + 1 \right) \frac{|\alpha_E - \alpha'_E|}{\sqrt{B(r_E)}} d\eta. \quad (2.122)$$

Nous sommes maintenant en position de calculer  $d_S^2 = dl_{\parallel} dl_{\perp}$ . Nous avons

$$d_S^2 \sim \left( \frac{r_E}{r_S} \right) (r_E + r_S)^2 \left( 1 + \frac{\alpha'_E}{\alpha_E} \right) \frac{|\alpha_E - \alpha'_E|}{\sqrt{B(r_E)}} \frac{1}{\sqrt{B(r_S)}} d\alpha_S d\eta, \quad (2.123)$$

pour terminer remplaçons l'angle de coordonnée  $d\eta$  par l'angle physique  $d\alpha_S$  en faisant usage de la relation (2.104), qui donne  $d\eta = \frac{d\alpha_S}{\sqrt{B(r_S)}}$ . On obtient alors

$$d_S = \frac{r_E + r_S}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda r_S^2}{3}}} \sqrt{\left( 1 + \frac{\alpha'_E}{\alpha_E} \right) \frac{r_E |\alpha_E - \alpha'_E|}{r_S \sqrt{1 - \frac{\Lambda r_E^2}{3}}}} d\alpha_S. \quad (2.124)$$

Notons qu'il apparaît une singularité lorsque la terre, la source et la lentille sont alignées  $\alpha_E = \alpha'_E$  [4].

### 2.3.4 Passage du décalage spectral à la distance d'aire

La distance d'aire correspond à un décalage spectral

$$d(z) = \int_0^z \frac{a}{\frac{da}{dt}} d\tilde{z}. \quad (2.125)$$

La solution numérique de l'équation de Friedmann pour  $a(t)$  peut être reproduite de façon satisfaisante par [4]

$$a(t) = a_0 (pH_0 t)^{1/p},$$

où  $H_0$  est la constante de Hubble, et avec  $p = 0.69$ , jusqu'à des valeurs de  $z$  allant jusqu'à  $z = 2$ , avec une précision d'au moins 3% [4].

Nous avons, en dérivant l'équation de  $a(t)$  donnée ci-dessus

$$\frac{da}{dt} = a_0 \frac{1}{p} (pH_0)^{1/p} t^{1/p-1}. \quad (2.126)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{a(t)}{\frac{da}{dt}} = pt.$$

D'autre part, nous avons la relation entre décalage spectral  $z$  et facteur d'échelle  $a(t)$

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1,$$

d'où

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1, \quad (2.127)$$

et

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{z + 1} = (pH_0 t)^{\frac{1}{p}}.$$

Il s'ensuit que

$$pt = \frac{1}{H_0} \left( \frac{1}{z + 1} \right)^p = \frac{1}{H_0} (z + 1)^{-p}.$$

Par intégration, on obtient finalement l'expression de  $d(z)$

$$\begin{aligned} d(z) &= \int_0^z \frac{a}{\frac{da}{dt}} d\tilde{z} = \frac{1}{H_0} \int_0^z (\tilde{z} + 1)^{-p} d\tilde{z} \\ &= \frac{1}{H_0(1-p)} [(z + 1)^{1-p} - 1]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

À cause de la singularité nous ne pouvons pas utiliser la formule (2.124) pour estimer la distance angulaire terre-source. Nous avons adopté l'ansätze (la conjecture) [4]

$$d_S = \frac{r_E + r_S}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda r_S^2}{3}}}, \quad (2.129)$$

qui' est la distance d'aire en l'absence de la lentille  $M = 0$ .

# Chapitre 3

## L'effet de lentille fort dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus

La métrique d'Einstein-Straus a été proposée initialement pour expliquer pour quoi il n'y a pas un expansion à l'échelle atomique et planétaire.

### 3.1 Principe cosmologique

La plus part des modèle cosmologiques sont basée sur deux hypothèse : L'espace est homogène est isotrope autour de chaque point d'espace.

En vérité on peut montrer que l'hypothèse d'isotropie autour de chaque point d'espace entraîne l'homogénéité. L'ensemble des deux hypothèse d'isotropie et d'homogénéité est désigné sous le de nom principe cosmologique. On dit d'espaces satisfaisant au principe cosmologique qu'ils sont de symétrie maximale.

les observations astronomiques montrent qu'en réalité l'univers apparaît comme formé des grandes étendues vides ponctuées par des galaxies ou des amas des galaxies. En vérité l'homogénéité et l'isotropie de l'espace apparaissent comme des propriétés valable à grand échelle, de l'ordre de  $10^8$  années lumière. Autrement dit, l'homogénéité et l'isotropie de l'espace sont des propriétés valables lorsque on moyenne sur des cellules des l'univers réel d'extension linéaires de l'ordre de  $10^8$  à  $10^9$  années lumières, suffisamment grandes pour inclure des nombreux amas de galaxies. C'est dans ce sens qu'on parle de principe cosmologique, qui est plutôt une hypothèse

de travail qu'un grand principe de physique. La situation est très analogue à celle rencontrée en mécanique des fluides, ce qui explique qu'on parle de fluide cosmologique [13].

### 3.1.1 Métrique de Robertson-Walker

Le principe cosmologique est si fort que la métrique d'espace-temps qui est normalement définie par la donnée de 10 composantes qui sont des fonctions d'espace temps est réduite à une seule fonction du temps  $a(t)$  appelée facteur d'échelle et à un indice discret  $k$  prenant trois valeurs  $k = -1, 0, +1$ . Pour être précis, on peut toujours faire le choix d'un système de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  de telle manière que l'élément de ligne s'écrive

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (3.1)$$

La métrique correspondante à l'élément de ligne précédente a été obtenue par Robertson et Walker en se basant uniquement sur des considérations de symétrie et juste porte pour cette raison le nom de Robertson-Walker (RW). Elle est également parfois appelée métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ou encore métrique de Friedmann-Le Maître-Robertson-Walker.

Faisons le changement de variable  $r = \Sigma(\chi)$ , où

$$\begin{aligned} \Sigma(\chi) &= \sin \chi & \text{si } k = \frac{k}{|k|} = +1 & \quad (\text{Courbure spatiale positive}). \\ \Sigma(\chi) &= \chi & \text{si } k = 0 & \quad (\text{Courbure spatiale nulle}). \\ \Sigma(\chi) &= \sinh \chi & \text{si } k = \frac{k}{|k|} = -1 & \quad (\text{Courbure spatiale négative}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

On peut alors montrer que l'élément de ligne se réduit à

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (3.3)$$

qui est parfois plus commode à utiliser que la première forme de  $ds^2$ . Le facteur d'échelle  $a(t)$  doit en principe être déterminé par les équations d'Einstein, ce qui nécessite la connaissance du tenseur d'énergie-impulsion. Aussi bien le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  que le système de coordonnées  $(t, \chi, \theta, \varphi)$  sont appelés systèmes de coordonnées comobiles : On peut montrer



que les coordonnées spatiales restent fixes lorsque le temps varie ( $r = cste$ ,  $\theta = cste$ ,  $\varphi = cste$ ) ou ( $\chi = cste$ ,  $\theta = cste$ ,  $\varphi = cste$ ).

### 3.1.2 Déplacement spectral vers le rouge

Montrons que  $a(t)$  est lié au déplacement spectral vers le rouge.

Considérons un premier photon émis au temps  $t_0$  par une galaxie lointaine et reçu sur terre au temps  $t_1$ . Au bout d'un laps de temps  $\delta t_0$ , un deuxième photon est émis par la galaxie et reçu sur terre au bout d'un laps de temps  $\delta t_1$  après réception du premier photon.

Essayons de lier  $\delta t_0$  et  $\delta t_1$  (les périodes à l'émission et à la réception du signal respectivement).

Pour obtenir ce lien, partons du fait que pour un photon l'intervalle de temps propre est nul, ce qui implique que

$$dt^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (3.4)$$

où nous avons considéré le cas d'une trajectoire radiale  $\theta = cste$ ,  $\varphi = cste$ . Il s'ensuit de (3.4) que

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.5)$$

si  $dr$  dénote la variation de la distance du photon à la terre, il est clair que lorsque le temps  $t$  augmente  $dt > 0$ , la distance du photon à la terre diminue (puisque le photon est envoyé en direction de temps). Donc  $dt$  et  $dr$  sont de signes contraires et par conséquent

$$dt = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.6)$$

En intégrant entre  $t_0$  et  $t_1$ , on obtient

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.7)$$

où on a considéré que le système de coordonnées est basé sur la terre ( $r = 0$  pour la terre). En intégrant entre  $t_0 + \delta t_0$  et  $t_1 + \delta t_1$ , on obtient

$$\int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.8)$$

où on a tenu compte du fait que comme on a affaire à un système de coordonnées comobiles,  $r$  conserve sa valeur pour la galaxie et également pour la terre. Il s'ensuit que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.9)$$

et par conséquent

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.10)$$

Comme le facteur d'échelle ne varie de façon considérable que sur des échelles de temps cosmologique et comme  $\delta t_0$  et  $\delta t_1$ , périodes à l'émission et à la réception du photon sont inférieure aux échelles de temps cosmologiques

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{\delta t_0}{a(t_0)}, \quad (3.11)$$

et

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (3.12)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (3.13)$$

En termes de fréquence à l'émission et à la réception  $\nu_0 = \frac{1}{\delta t_0}$  et  $\nu_1 = \frac{1}{\delta t_1}$ , la relation précédente s'écrit

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (3.14)$$

Si  $a(t)$  croit avec le temps  $a(t_1) \succ a(t_0)$  et  $\nu_0 \succ \nu_1$  : la fréquence à l'émission est supérieur à la fréquence à la réception : On parle de décalage spectral vers le rouge. Par contre, lorsque  $a(t)$  décroît avec le temps  $a(t_0) \succ a(t_1)$  et  $\nu_1 \succ \nu_0$  : La fréquence à l'émission est inférieure à la fréquence à la réception : on parle de décalage spectrale vers le bleu. On définit le décalage spectrale  $z$  comme

$$z = \frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\nu_0}{\nu_1} - 1, \quad (3.15)$$

ou

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = z + 1; \quad (3.16)$$

$z$  est positif (décalage spectrale vers le rouge) si  $\nu_0 \succ \nu_1$  (fréquence à l'émission supérieur à la fréquence à la réception).  $z$  est négatif (décalage spectrale vers le bleu) si  $\nu_1 \succ \nu_0$  (fréquence à la réception supérieur à la fréquence à l'émission).

De (3.14) et (3.16) nous obtenons

$$z + 1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (3.17)$$

La croissance de facteur d'échelle est traduite par un  $z$  positif. Sa décroissance par un  $z$  négatif.

Les observations expérimentales montrent qu'on a un déplacement spectral vers le rouge, et donc  $z > 0$  et  $a(t_1) > a(t_0)$ . Autrement dit, les observations expérimentale montre qu'on est actuellement dans une phase d'expansion de l'univers.

Le redshift cosmologique concerne toutes les raies spectrales et pas seulement le spectre visible. Cet effet a été mis en évidence la première fois par Edwin Hubble en 1929 et trouve une explication satisfaisante dans le phénomène de l'expansion de l'univers [17].

### 3.1.3 Dynamique de l'expansion

On peut montrer que la dynamique de la géométrie de l'univers est contenue dans la fonction  $a(t)$  qui peut être déterminée à partir des équations d'Einstein. Partons maintenant de l'élément de ligne de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3.18)$$

où  $k = -1, 0, 1$ , et  $t$  représente la coordonnée de temps cosmique. Le tenseur métrique est diagonal est donné par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

et le tenseur métrique inverse  $g^{\mu\nu}$  par

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Calculons les symboles de Christoffel définis au chapitre 1 par

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left[ \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \right].$$

Notons que les dérivées  $\partial_i g_{00}$  et  $\partial_t g_{0i}$  sont nulles, et donc  $\Gamma_{00}^i = 0$ . Ce qui signifie qu'une particule qui est au repos dans ce système de coordonnées reste au repos. IL en résulte qu'on a affaire à un système de coordonnées comobiles qui suit le mouvement de l'observateur. De plus  $g_{00} = -1$ , ce qui signifie que l'intervalle du temps propre  $(-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu})^{1/2}$  pour une montre comobile coïncide avec la coordonnée de temps  $t$ . Les composantes non nulles du symbole de Christoffel sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{a \frac{da}{dt}}{1 - kr^2} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = r^2 a \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^t = a \frac{da}{dt} r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{rt}^r &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -a^2(1 - kr^2)r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{t\theta}^{\theta} &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour le tenseur de Ricci défini comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma},$$

les composantes  $R_{i0} = R_{0i}$  sont nulles et  $R_{ij} = \delta_{ij} R_{ij}$  à cause de l'isotropie de l'univers de Robertson-Walker, et les seules composantes non nulles sont les composantes diagonales avec

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2}, \\ R_{rr} &= \frac{1}{1 - kr^2} \left[ -a \frac{d^2 a}{dt^2} - 2 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - 2k \right], \\ R_{\theta\theta} &= r^2 \left[ -a \frac{d^2 a}{dt^2} - 2 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - 2k \right], \\ R_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \theta \left[ -a \frac{d^2 a}{dt^2} - 2 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - 2k \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Remarquons que  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$ , ceci est encore une conséquence de l'isotropie de l'espace de Robertson-Walker.

Le tenseur d'énergie-impulsion du fluide cosmologique parfait est défini comme

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu, \quad (3.23)$$

avec

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1. \quad (3.24)$$

$p$  représente la pression,  $\rho$  est la densité d'énergie-impulsion, et  $u^\mu$  est la quadri-vitesse. Dans un système de coordonnées localement inertiel  $(u^0)^2 = 1$ ,  $u^i = 0$  et donc :

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = g_{ij}p, \quad (3.25)$$

c'est à dire

$$T_{11} = \frac{a^2 p}{1 - kr^2}, \quad T_{22} = pr^2 a^2(t), \quad T_{33} = pr^2 a^2(t) \sin^2 \theta. \quad (3.26)$$

Les équations de champs d'Einstein s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right),$$

ou en détaillant

$$R_{00} = -8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} (T^0{}_0 + T^l{}_l) \right), \quad (3.27)$$

$$R_{ij} = -8\pi G \left( T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} (T^0{}_0 + T^l{}_l) \right), \quad (3.28)$$

où  $l = 1, 2, 3$ .

Si on fait usage des formules (3.19), (3.20), (3.22), (3.25) et (3.26), les équations du champ relatives aux coordonnées spatiales sont identiques et nous obtenons finalement deux équations.

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -4\pi G (\rho + 3p), \quad (3.29)$$

$$-\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{2}{a^2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{2k}{a^2} = -4\pi G (\rho - p). \quad (3.30)$$

On peut éliminer la dérivée seconde de  $a(t)$  en multipliant l'équation (3.30) par 3 et en ajoutant membre à membre l'équation (3.29), ce qui nous donne

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k = \frac{8\pi G\rho a^2}{3}. \quad (3.31)$$

Cette dernière équation est dénommée équation fondamentale de Friedmann, gouverne l'expansion de l'univers.

La loi de conservation de moment cinétique  $T^{\nu\mu}_{;\mu} = 0$ , nous donne une autre information sur la dynamique de l'expansion. En effet écrivons  $T^{0\mu}_{;\mu} = 0$ , ce qui donne en utilisant la définition de la dérivée covariante,

$$T^{0\mu}_{;\mu} = 0 = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^0_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} T^{0\nu}. \quad (3.32)$$

l'équation (3.32) se réduit à, en tenant compte de la nullité de certains symboles de Christoffel et de celle des composantes non diagonales de  $T_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} + \Gamma^i_{i0} T^{00} = 0,$$

Il s'ensuit en utilisant les expressions explicites des symboles de Christoffel et des composantes du tenseur d'énergie-impulsion

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} (\rho + p) = 0. \quad (3.33)$$

Cette équation peut être facilement résolu, si on conjecture la proportionnalité entre  $p$  et  $\rho$  :

$$p = \omega\rho \quad (3.34)$$

avec  $\omega$  est indépendant du temps. La solution de (3.33) pour  $p$  donnée par (3.34) est

$$\rho = ka^{-3(\omega+1)}. \quad (3.35)$$

On a trois cas extrêmes pour  $p$  [17] :

*a*– **Matière froide sombre** (cold dark matter) exemple la poussière :  $p = 0$

$$\rho \propto a^{-3}.$$

*b*– **Matière chaude** (hot matter) :  $p = \frac{\rho}{3}$

$$\rho \propto a^{-4}.$$

$c$ - **Ènergie de vide** (vacuum energy) : Ceci correspond à  $p = -\rho$ . Il s'ensuit que  $\rho = cste$ .  
Le candidat favoris pour l'ènergie du vide est la constante cosmologique  $\Lambda$ .

### L'èquation de Friedmann du second ordre pour un espace plat en présence de la constante cosmologique

En utilisant les calculs de la sous-section précédente et en prenant  $k = 0$ , les èquations d'Einstein s'ècrivent alors

$$R_{tt} + \Lambda g_{tt} = -8\pi G \left( T_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} (T^t_t + T^r_r + T^\theta_\theta + T^\varphi_\varphi) \right),$$

qui donne

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \Lambda = -4\pi G (\rho + 3p), \quad (3.36)$$

et

$$R_{ii} + \Lambda g_{ii} = -8\pi G \left( T_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} (T^t_t + T^r_r + T^\theta_\theta + T^\varphi_\varphi) \right),$$

qui donne

$$-\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - 2 \frac{1}{a} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \Lambda = -4\pi G (\rho - p). \quad (3.37)$$

Si on ajoute (3.36) et (3.37) membre à membre, nous obtenons

$$4 \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} + 2 \frac{1}{a} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - 2\Lambda = -16\pi G p. \quad (3.38)$$

Pour la matière froide (dust)  $p = 0$ , L'èquation (3.38), se réduit à

$$2 \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{1}{a} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \Lambda. \quad (3.39)$$

Cette dernière èquation est l'èquation de Friedmann du second ordre pour un espace plat en présence d'une constante cosmologique.

## 3.2 L'effet de lentille fort dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus

Notre objectif est de calculer la déflexion de la lumière par une masse à symétrie sphérique, qui est supposée être un amas de galaxie. Nous allons faire ce calculs dans le cadre de la métrique d'Einstein-Straus. Nous rappelons également les résultats correspondant à la métrique de Kottler.

### 3.2.1 Déflexion de la lumière dans le cadre de la métrique de Kottler

Cette section a pour but de rappeler les résultats obtenus dans le cadre de la métrique de Kottler déjà considéré dans le chapitre précédent.

La métrique de Kottler est une généralisation appropriée de la métrique de Schwarzschild dans le cas d'une métrique statique à symétrie sphérique avec constante cosmologique et est donnée par

$$d\tau^2 = BdT^2 - \frac{1}{B}dr^2 - r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad B = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (3.40)$$

à l'extérieur de la distribution de masse.

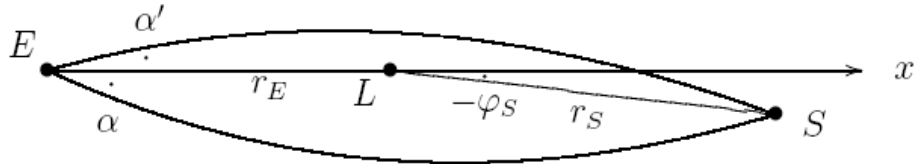


Fig. 5 : Deux rayons lumineux émis par la source S et empruntant deux chemins différents pour être reçus sur terre [18].

Dans la métrique de Kottler, les géodésiques peuvent s'intégrer analytiquement au premier ordre en le rapport du peri-lens  $r'_p$  au rayon de Schwarzschild  $\left(\frac{r'_p}{s}\right)$ .

On est intéressé par l'établissement d'une relation entre les observations physiques du lensing forte : Les deux angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  des deux images avec la lentille, les décalages spectraux vers le rouge de la lentille  $z_L$  et de la source  $z_S$  et la masse  $M$  de la lentille. On considère le système lentille-quasar *SDSSJ1004 + 4112* [18]



$$\begin{aligned}
\alpha &= 10'' \pm 10\%, \quad z_L = 0.68, \quad M = 5 \cdot 10^{13} M_\odot = 1.4 \cdot 10^{-8} ag \pm 20\%, \\
\alpha' &= 5'' \pm 10\%, \quad z_S = 1.734.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

pour le calcul numérique, nous avons utilisé le système d'unité suivant : La longueur est mesurée en astromètre ( $am$ ), le temps en astroseconde ( $as$ ) et la masse en astrogramme ( $ag$ ),

$$\begin{aligned}
am &= 1.30 \cdot 1026m = 4221Mpc, \quad as = 4.34 \cdot 1017s, \\
ag &= 6.99 \cdot 1051kg = 3.52 \cdot 1021M_\odot.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Dans ce système d'unité  $c = 1amas^{-1}$ ,  $8\pi G = 1amas^{-2}ag^{-1}$ ,  $H_0 = 1as^{-1}$  [18].

Nous utilisons le modèle spatialement plat ( $k = 0$ ) modèle ( $\Lambda$ CDM) avec  $\Lambda = 0.77 \times 3am^{-2} \pm 20\%$  pour convertir les décalages spectraux en distances angulaires de la lentille et du quasar par rapport à la terre qui sont notés  $d_L$  et  $d_S$  respectivement. Nous avons les relations suivantes entre les distances angulaires et les distances de coordonnées

$$d_L = r_E, \quad d_S = \frac{r_E + r_S}{\sqrt{1 - \frac{\Lambda r_S^2}{3}}}, \tag{3.43}$$

ainsi que les relations suivantes pour les angles de coordonnées  $\epsilon_E$  et  $\epsilon'_E$

$$\tan \epsilon'_E = \left[ r_E \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| \right]_E, \quad \tan \epsilon_E = \left[ r_E \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| \right]_E \tag{3.44}$$

ou

$$\epsilon'_E = \arctan \left[ r_E \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| \right]_E, \quad \epsilon_E = \arctan \left[ r_E \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| \right]_E. \tag{3.45}$$

En considérant la trajectoire du haut, nous avons obtenue pour l'angle polaire de la source,

$$\varphi'_S \sim \epsilon'_E \left( 1 + \frac{r_E}{r_S} \right) - \frac{4GM}{\epsilon'_E r_E}. \tag{3.46}$$

ainsi pour la trajectoire du bas

$$\varphi_S \sim -\epsilon_E \left( 1 + \frac{r_E}{r_S} \right) + \frac{4GM}{\epsilon_E r_E}. \tag{3.47}$$

Notons que ces angles de coordonnée ne dépendent pas de la constante cosmologique. La constante cosmologique s'introduit à travers la relation entre l'angle de coordonnée et l'angle physique. On a

$$\tan \alpha'_E \sim \sqrt{1 - \frac{\Lambda r_E^2}{3}} \tan \epsilon'_E, \quad (3.48)$$

et

$$\tan \alpha_E \sim \sqrt{1 - \frac{\Lambda r_E^2}{3}} \tan \epsilon_E. \quad (3.49)$$

Pour un observateur au repos par rapport à la lentille. En imposant l'égalité de  $\varphi_S$  et  $\varphi'_S$ ,  $\varphi_S = \varphi'_S$ , qui traduit le fait que les deux photons du haut et du bas sont émis par la même source

$$\frac{r_E}{r_S} \sim \frac{4GM}{\epsilon_E \epsilon'_E r_E} - 1.$$

Si on fait usage de (3.48), nous obtenons pour  $|\epsilon'_E|$  et  $|\epsilon_E| \ll 1$

$$\frac{r_E}{r_S} \sim \frac{4GM}{\alpha_E \alpha'_E r_E} \left(1 - \frac{\Lambda r_E^2}{3}\right) - 1. \quad (3.50)$$

### 3.2.2 La solution d'Einstein-Straus avec constante cosmologique

La solution d'Einstein-Straus est obtenue en raccordant la solution de Kottler à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r_{Schü}(T) = a(t) \chi_{Schü}$ , dite sphère de Schücking à la solution de Friedmann à l'extérieur de la sphère. La métrique de Kottler s'écrit comme

$$d\tau^2 = B(r) dT^2 - B^{-1}(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (3.51)$$

et la métrique de Friedmann comme

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2], \quad (3.52)$$

où le facteur d'échelle a satisfait à

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\rho_{dust} a^2}{3} + \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad (3.53)$$

ou

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\rho_{dust} a^2}{3} + \frac{\Lambda a^2}{3}}. \quad (3.54)$$

Mais comme [17]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{a} \frac{da}{dt} \rho, \quad (3.55)$$

on obtient par intégration

$$\rho_{dust} = \frac{c}{a^3}, \quad (3.56)$$

et donc

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{c}{3a} + \frac{\Lambda a^2}{3}}, \text{ ou bien } \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3}}, \quad (3.57)$$

avec  $A = \frac{c}{3} = \frac{1}{3} \rho_{dust0} a_0^3$ . Evaluons (3.57) pour  $t = 0$ . Nous avons

$$\frac{da(0)}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3} (\rho_{dust0} + \Lambda) a_0}. \quad (3.58)$$

Or, on sait que  $\rho_{dust0} = 3 - \Lambda$ . Il s'ensuit alors que

$$\frac{da(0)}{dt} = a_0,$$

Si nous choisissons  $a_0 = 1$ , alors  $\frac{da}{dt}|_{t=0} = 1$  également.

Nous supposons que le facteur d'échelle  $a(t)$  est strictement monotone. Les deux solutions (Kottler et Friedmann) sont raccordées au rayon de Schücking  $\chi_{Schü}$

$$r_{Schü}(T) = a(t) \chi_{Schü}, \quad r \preceq r_{Schü}, \quad \chi \preceq \chi_{Schü}, \quad (3.59)$$

on a

$$A = \frac{1}{3} \rho_{dust0} \left( \frac{r_{Schü0}}{\chi_{Schü0}} \right)^3.$$

La masse centrale doit être égale à la densité de poussière multipliée par le volume de la sphère de Schücking

$$M = \rho_{dust0} \frac{4\pi}{3} r_{Schü0}^3 \Rightarrow r_{Schü0}^3 = \frac{3M}{4\pi \rho_{dust0}},$$

et donc

$$A = \frac{1}{\chi_{Schü0}^3} \frac{2M}{8\pi},$$

ou en tenant compte du fait que  $G = \frac{1}{8\pi}$

$$A = \frac{2GM}{\chi_{Schü0}^3}. \quad (3.60)$$

Définissons la fonction  $B_{Schü}$  par

$$B_{Schü} := B(r_{Schü}) = 1 - \frac{A}{a} \chi_{Schü}^2 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \chi_{Schü}^2. \quad (3.61)$$

Et la fonction  $C_{Schü}$  par  $C_{Schü} = \sqrt{1 - B_{Schü}}$ .

Le Jacobien de transformation de coordonnées  $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$  au rayon de Schücking est donné par [18]

$$\left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} = 1, \quad \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} = -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}}, \quad (3.62)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{Schü} = -\frac{C_{Schü}}{a}, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{Schü} = \frac{1}{aB_{Schü}}. \quad (3.63)$$

Le Jacobien de la transformation de coordonnée inverse, on pose  $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$  correspond à la matrice inverse. En effet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial t} & \frac{\partial T}{\partial \chi} \\ \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial \chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial T} & \frac{\partial t}{\partial r} \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} & \frac{\partial \chi}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial T} & \frac{\partial T}{\partial \chi} \\ \frac{\partial r}{\partial T} & \frac{\partial r}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial t} & \frac{\partial T}{\partial \chi} \\ \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial \chi} \end{pmatrix}, \text{ est l'inverse de } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial T} & \frac{\partial t}{\partial r} \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} & \frac{\partial \chi}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} \\ -\frac{C_{Schü}}{a} & \frac{1}{aB_{Schü}} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

La matrice transposée de  $M$  s'écrit

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_{Schü}}{a} \\ -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} & \frac{1}{aB_{Schü}} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{(aB_{Schü})^{-1} (1 - C_{Schü}^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{aB_{Schü}} & \frac{C_{Schü}}{B_{Schü}} \\ \frac{C_{Schü}}{a} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{Schü}} & \frac{aC_{Schü}}{B_{Schü}} \\ C_{Schü} & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{Schü} &= \frac{1}{B_{Schü}}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= \frac{aC_{Schü}}{B_{Schü}} \\ \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{Schü} &= C_{Schü}, & \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{Schü} &= a. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Les temps de Kottler et Friedmann sont liés par

$$\left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} = B_{Schü}. \quad (3.66)$$

reproduisons la démonstration de [18].

**Preuve :** Le facteur d'échelle est supposé monotone ce qui permet de faire une transformation de coordonnées  $(t, \chi) \rightarrow (a, \chi)$ , en utilisant la formule (3.57) on obtient

$$dt^2 = \frac{da^2}{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2},$$

et la métrique de Friedmann s'écrit

$$d\tau^2 = \frac{da^2}{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \chi^2 d\Omega^2.$$

L'étape suivante consiste à remplacer le facteur  $a^2 \chi^2$  qui se trouve devant  $d\Omega^2$  par  $r^2$

$$(a, \chi) \rightarrow (b, r), \quad a := \Phi(b, r), \quad \chi := \frac{r}{\Phi(b, r)}.$$

Sur le rayon de schücking  $\chi_{Schü}$  la nouvelle et l'ancienne coordonnées coïncident,  $a = b = \Phi(b, b\chi_{Schü})$  et avec  $C_1 = \sqrt{\frac{A}{\Phi} + \frac{\Lambda}{3}\Phi}$

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi_b db + \Phi_r dr, \\ d\chi &= \frac{\partial \chi}{\partial r} dr + \frac{\partial \chi}{\partial \Phi} d\Phi, \\ &= \frac{1}{\Phi(b, r)} dr - \frac{r}{\Phi^2} [\Phi_b db + \Phi_r dr]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Il s'ensuit que

$$d\Phi^2 = \Phi_b^2 db^2 + \Phi_r^2 dr^2 + 2\Phi_b \Phi_r dr db, \quad (3.68)$$

$$d\chi^2 = \left[ \frac{1}{\Phi} - \frac{\Phi_r r}{\Phi^2} \right]^2 + r^2 \frac{\Phi_b^2}{\Phi^4} db^2 - 2 \left[ \frac{1}{\Phi} - \frac{\Phi_r r}{\Phi^2} \right] \left[ r \frac{\Phi_b}{\Phi^2} \right], \quad (3.69)$$

et le temps propre se réduit à

$$d\tau^2 = \Phi_b^2 \left[ \frac{1}{c_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2} \right] db^2 - \left[ \left( 1 - \frac{\Phi_r r}{\Phi} \right)^2 - \frac{\Phi_r^2}{c_1^2} \right] dr^2 + \quad (3.70)$$

$$2\Phi_b \left[ \frac{2\Phi_r}{c_1^2} + \frac{r}{\Phi} - \frac{\Phi_r r^2}{\Phi^2} \right] dr db - r^2 d\Omega. \quad (3.71)$$

En comparant à

$$d\tau^2 = g_{bb}^{Frie} db^2 + g_{rr}^{Frie} dr^2 + 2g_{br}^{Frie} db dr - r^2 d\Omega, \quad (3.72)$$

On déduit que,

$$g_{bb}^{Frie} = \Phi_b^2 \left[ \frac{1}{C_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2} \right], \quad g_{rr}^{Frie} = \left[ \left( 1 - \frac{\Phi_r}{\Phi} r \right)^2 - \frac{\Phi_r^2}{C_1^2} \right], \quad (3.73)$$

$$g_{br}^{Frie} = \Phi_b \left[ \frac{\Phi_r}{C_1^2} + \frac{r}{\Phi} \left( 1 - \frac{r\Phi_r}{\Phi} \right) \right]. \quad (3.74)$$

Nous pouvons éliminer l'élément non diagonal, c'est à dire imposer  $g_{br}^{Frie} = 0$ , par un choix approprié de  $\Phi$

$$\Phi_r = -\frac{r}{\Phi} \left[ \frac{C_1^2 \Phi^2}{\Phi^2 - r^2 C_1^2} \right].$$

D'autre part,

$$\frac{\Phi^2}{\Phi^2 - r^2 C_1^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2 C_1^2}{\Phi^2}} \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{Ar^2}{\Phi^3} - \frac{\Lambda}{3} r^2} \quad (3.76)$$

$$= \frac{1}{B_1}, \quad (3.77)$$

où  $B_1 = 1 - \frac{Ar^2}{\Phi^3} - \frac{\Lambda}{3} r^2$ .

Finalement, on obtient

$$\Phi_r = -\frac{r C_1^2}{\Phi B_1}. \quad (3.78)$$

Pour toute limites valeur fixe de  $b$ , l'équation (3.78) admet une seule solution qui satisfait les conditions aux bornes, on a

$$\frac{1}{C_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2} = -\frac{r}{\Phi} \frac{1}{\Phi_r} = -\frac{r}{\Phi} \left( -\frac{\Phi B_1}{C_1^2 r} \right) = \frac{B_1}{C_1^2}. \quad (3.79)$$

En simplifiant

$$g_{rr}^{Frie} = \frac{r^2 C_1^2}{\Phi^2 B_1^2} - \left[ 1 + \frac{r^2 C_1^2}{\Phi^2 B_1^2} \right]^2 \quad (3.80)$$

$$= \frac{r^2 C_1^2}{\Phi^2 B_1^2} - \left[ \frac{1 - \frac{Ar^2}{\Phi^3} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{Ar^2}{\Phi^3} + \frac{\Lambda}{3} r^2}{1 - \frac{Ar^2}{\Phi^3} - \frac{\Lambda}{3} r^2} \right]^2 \quad (3.81)$$

$$= \frac{r^2 C_1^2}{\Phi^2 B_1^2} - \left[ \frac{1}{B_1} \right]^2. \quad (3.82)$$

Par conséquent

$$g_{rr}^{Frie} = -\frac{1}{B_1} \quad (3.83)$$

et

$$g_{bb}^{Frie} = \Phi_b^2 \frac{B_1}{C_1^2}. \quad (3.84)$$

Si on dérive les conditions aux limites par rapport à  $b$

$$\frac{d\Phi|_{Schü}}{db} = \Phi_b|_{Schü} + \Phi_r|_{Schü} \frac{\partial r}{\partial b} \quad (3.85)$$

$$1 = \Phi_b|_{Schü} + \Phi_r|_{Schü} \chi_{Schü}, \quad (3.86)$$

ou

$$\begin{aligned} \Phi_b|_{Schü} &= 1 - \chi_{Schü} \left( -\frac{r_{Schü}}{\Phi_{Schü}} \frac{C_1^2}{B_1|_{Schü}} \right) \\ &= 1 + \frac{\frac{A}{\Phi_{Schü}} \chi_{Schü}^2 + \frac{\Lambda}{3} \Phi_{Schü} \chi_{Schü}^2}{1 - \frac{A}{\Phi_{Schü}} \chi_{Schü}^2 - \frac{\Lambda}{3} \Phi_{Schü} \chi_{Schü}^2}, \end{aligned}$$

En simplifiant

$$\Phi_b|_{Schü} = 1 - \Phi_r|_{Schü} \chi_{Schü} = \frac{1}{B_{Schü}}. \quad (3.87)$$

Maintenant, revenons à la solution de Kottler et nous faisons le changement de coordonnées

$$(T, r) \rightarrow (b, r), \quad \frac{dT}{db} = \Psi(b). \quad (3.88)$$

La métrique de Kottler s'écrit alors

$$d\tau^2 = B dT^2 - \frac{1}{B} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad B = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (3.89)$$

ou

$$d\tau^2 = B \Psi^2(b) db^2 - \frac{1}{B} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.90)$$

En comparant à

$$d\tau^2 = g_{bb} db^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.91)$$

on obtient

$$g_{bb}^{Kott} = B \Psi^2(b), \quad g_{rr}^{Kott} = \frac{1}{B}. \quad (3.92)$$

C'est dans ces coordonnées  $(b, r, \theta, \varphi)$  que nous raccordons les deux solutions de Friedmann et de Kottler d'une manière continue en le rayon de Schücking et pour tout temps  $t$

$$B_{Schü} = 1 - \frac{A}{\Phi_{Schü}} \chi_{Schü}^2 - \frac{\Lambda}{3} \Phi_{Schü}^2 \chi_{Schü}^2 = B_1|_{Schü}, \quad (3.93)$$

et

$$C|_{Schü} = \sqrt{1 - B_{Schü}} = \sqrt{\frac{A}{\Phi} \chi_{Schü}^2 + \frac{\Lambda}{3} \Phi^2 \chi_{Schü}^2} = C_1|_{Schü} \chi_{Schü}. \quad (3.94)$$

Alors

$$g_{rr}^{Frie} = -\frac{1}{B_1|_{Schü}} = \frac{-1}{B_{Schü}} = g_{rr}^{Kott}, \quad (3.95)$$

$$g_{bb}^{Frie} = \frac{\chi_{Schü}^2}{B|_{Schü} C^2|_{Schü}} = B|_{Schü} \Psi^2(b) = g_{bb}^{Kott}, \quad (3.96)$$

d'où

$$\Psi(b) = \frac{\chi_{Schü}}{B_{Schü}(b) C_{Schü}(b)}. \quad (3.97)$$

Par une application de la règle de chaîne (règle de dérivation de fonctions composées)

$$(t, \chi) \rightarrow (a, \chi) \rightarrow (b, r) \rightarrow (T, r), \quad (3.98)$$

$$(T, r) \rightarrow (b, r) \rightarrow (a, \chi) \rightarrow (t, \chi). \quad (3.99)$$

On a

$$\frac{\partial t}{\partial T} = \frac{dt}{da} \frac{d\Phi}{db} \frac{db}{dT}, \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{dt}{da} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{db}{dT}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \Phi_r. \quad (3.103)$$

Les éléments de matrice du Jacobien sur le rayon de Schücking sont donnés par

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} &= \frac{dt}{da} \Phi_b \frac{db}{dT} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3} a^2}} \frac{1}{B|_{Schü}} [\Psi(b)]^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{Schü} = \frac{1}{a B|_{Schü}},$$



$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} = -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}},$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{Schü} = -\frac{1}{a}C_{Schü}.$$

Pour comparer les coordonnées temps de Friedmann et Kottler sur le rayon de Schücking, considérons la courbe paramétrisée,  $T = p$ ,  $r = \chi_{Schü}b$ , ( $\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ ). La quadri-vitesse est donnée par

$$\frac{dt}{dp} = \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{Schü} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{Schü} \frac{dr}{dp} = 1.1 + \frac{C_{Schü}}{B_{Schü}}B_{Schü}C_{Schü} = B_{Schü},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dp} &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{Schü} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{Schü} \frac{dr}{dp} \\ &= -\frac{1}{a}C_{Schü} \cdot 1 + \frac{1}{aB_{Schü}}B_{Schü}C_{Schü} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons la relation désirée

$$\frac{\partial t}{dT} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = B_{Schü}.$$

Pour la section suivante, nous voulons interpréter la masse centrale comme la masse de l'amas de galaxie  $M \sim 10^{14}M_{\odot}$ . Pour que cette interprétation ait un sens, il faudrait satisfaire à une hiérarchie des longueurs pour les échelles suivantes : rayon de Schwarzschild  $s \sim 10^{-9}am$ , rayon typique du cluster  $r_{cluster} \sim 10^{-3}am$ , rayon de Schücking  $r_{Schü} \sim 10^{-3}am$ , distance typique entre les clusters  $D_{cluster} \sim 10^{-3}$ , et rayon de de Sitter  $r_{dS} \sim 1am$  [18]:

$$s \prec r_{cluster} \prec r_{Schü} \prec D_{cluster} \text{ et } r_{Schü} \prec r_{dS}.$$

### 3.2.3 Intégration de la géodesique du photon

Comme se sont les conditions finales qui sont données, on intègre dans le sens de  $p$  décroissant, des temps décroissantes :  $dt$ ,  $dT$  et  $dp$  négatifs.

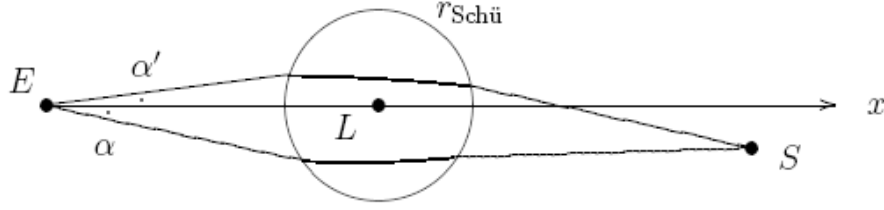


Fig. 6 : Deux rayons lumineux empruntant des lignes droites à l'extérieur de la vacuole de Schücking. La courbure des rayons lumineux se fait uniquement à l'intérieur de la vacuole morceau [18].

On intègre la géodésique du photon par morceaux : pour la métrique de Friedmann pour le cas plat, avec constante cosmologique  $\Lambda = 0.77 \times 3am^{-2}$  et densité de poussière  $\rho_{dust} = (3 - \Lambda) ag/am^3$ , à l'extérieur de la sphère de Schücking dans la moitié de l'espace comprenant la terre, pour la métrique de Kottler avec la même constante cosmologique à l'intérieur de la sphère de Schücking, et de nouveau pour la métrique de Friedmann dans le cas plat avec toujours la même constante cosmologique et la même densité de poussière, à l'extérieur de la sphère de Schücking, mais dans l'autre moitié de l'espace comprenant cette fois-ci la source.

Les trois solutions ainsi obtenues seront ensuite raccordées au niveau de la sphère de Schücking et leurs premières dérivées seront reliées par les conditions du Jacobien toujours au niveau de la sphère de Schücking.

Avant d'aller plus loin, calculons d'abord le facteur d'échelle  $a(t)$ .

La procédure généralement adoptée est d'utiliser l'équation de Friedmann de seconde ordre pour déterminer  $a(t)$ .

$$2\frac{1}{a} \frac{d^2a(t)}{dt^2} + \frac{1}{a^2} \frac{da(t)}{dt} = \Lambda, \quad (3.104)$$

avec les condition finales  $\frac{da(t=0)}{dt} = a(t=0) = 1$ . L'équation de Friedmann avec les conditions finales spécifiées est généralement résolue en fait l'usage de la méthode de Runge-Kutta [18].

Ici nous allons donner la solution exacte pour  $a(t)$  satisfaisant aux mêmes conditions finales  $\frac{da(t=0)}{dt} = a(t=0) = 1$ . Nous sommes partis cette fois ci de l'équation de Friedmann du premier ordre

$$\frac{da(t)}{dt} = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3}}, \quad (3.105)$$

avec condition initiales  $a(0) = 1$ . On peut montrer que l'équation de Friedmann du seconde ordre avec la condition initiales  $\frac{da(t=0)}{dt} = a(t=0) = 1$ , est strictement équivalente à l'équation

de Friedmann du premier ordre avec condition initiale  $a(t=0) = 1$ . Pour le montrer, remarquons d'abord que l'équation de Friedmann du premier ordre est une racine carrée de l'équation de Friedmann de second ordre, Au sens que si  $a(t)$  est une solution de l'équation de Friedmann du premier ordre, elle est également solution de l'équation de Friedmann du second ordre.

Soit  $a(t)$  une solution de l'équation de Friedmann du premier ordre, dérivons l'équation (3.105) par rapport à  $t$ . On obtient

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{-A}{a^2} \frac{da}{dt} + \frac{2\Lambda}{3} a \frac{da}{dt}\right)}{\sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3}}}, \quad (3.106)$$

ou en multipliant par  $\frac{2}{a}$

$$\frac{2}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = \left(-\frac{A}{a^3} + \frac{2\Lambda}{3}\right). \quad (3.107)$$

Mais

$$\frac{A}{a^3} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.108)$$

d'où, en remplaçant  $\frac{A}{a^3}$  par son expression précédente

$$\frac{2}{a} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \frac{1}{a^2} \frac{da(t)}{dt} = \Lambda. \quad (3.109)$$

Donc l'équation de Friedmann de second ordre résulte de l'équation de Friedmann du premier ordre. Par conséquent toute solution de l'équation de Friedmann du premier ordre est également solution de l'équation de Friedmann de seconde ordre. D'autre part, considérons la solution unique de l'équation de Friedmann du seconde ordre avec aux condition  $\frac{da(t=0)}{dt} = 1, a(t=0) = 1$ . Désignons maintenant par  $\tilde{a}(t)$  la solution unique de l'équation de Friedmann du premier ordre avec la condition  $\tilde{a}(t=0) = 1$ . Cette solution est telle que sa dérivée première au temps  $t=0$  vaut

$$\frac{d\tilde{a}(t=0)}{dt} = \sqrt{\frac{A}{\tilde{a}(0)} + \frac{\Lambda \tilde{a}^2(0)}{3}} = \sqrt{A + \frac{\Lambda}{3}} = 1, \quad (3.110)$$

si on tient compte du fait que  $A + \frac{\Lambda}{3} = 1$ .

D'après ce qui précède  $\tilde{a}(t)$  est également solution de l'équation de Friedmann du second ordre.  $a(t)$  et  $\tilde{a}(t)$  sont donc toutes deux solutions de l'équation de Friedmann avec les mêmes conditions initiales. Il s'ensuit que d'après ce qui précède que  $\tilde{a}(t) = a(t)$ .

La résolution de l'équation de Friedmann de seconde ordre pour un espace plat donne

$$a(t) = -\frac{1}{154} \left( \frac{1}{46} (77 - 10\sqrt{77}) \right)^{\frac{1}{3}} (77 + 10\sqrt{77}) \exp \left[ \frac{1}{10} \sqrt{77} \left( -t + \frac{20 \log \left[ -2 \left( \frac{1}{23} (-177 + 20\sqrt{77}) + \exp \left[ \frac{3\sqrt{77}t}{10} \right] \right) \right]}{3\sqrt{77}} \right) \right] \quad (3.111)$$

Le facteur d'échelle est lié au décalage spectral via la relation

$$a(t) = \frac{1}{1+z}, \quad (3.112)$$

ce qui permet de tirer les valeurs numériques des facteurs d'échelles pour la lentille  $L$  et la source  $S$  connaissant les décalages spectraux  $z_L = 0.68$  et  $z_S = 1.734$

$$a_S = \frac{1}{1+z_S} = 0.365764.$$

$$a_L = \frac{1}{1+z_L} = 0.595238.$$

En utilisant l'inverse de  $a(t)$ ,  $\tilde{t}(a)$ , on peut tirer les temps de Friedmann correspondant à la lentille et à la source

$$t_S = -0.737202$$

$$t_L = -0.456582.$$

Nous allons procéder en plusieurs étapes :

**Etape 0 :**

Nous allons intégrer dans cette étapes la géodésique du photon dans le cas sans déflexion.

Remplaçons la vacuole de Kottler par une densité de poussière homogène et isotrope de même densité de  $\rho_{dust0}$  qu'à l'extérieur de la vacuole.

La métrique de Friedmann plate prévaut alors dans tout l'espace et les photons suivant alors des lignes des droites. Autrement dit, les trajectoires des photons ne sont pas courbées dans un tel espace.

Choisissons l'origine du système de coordonnées en la terre  $\chi = 0$ , en la terre et le plan équatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de telle manière qu'il contienne la terre, la lentille et la source. Un photon

est émis par la source  $S$ , un quasar, emprunte une ligne droite pour arriver sur terre avec des conditions finale. Substituant à  $a(t)$  son expression analytique (3.111) et en tenant compte de la condition initiale  $\chi(0) = 0$ , qui signifie que le photon arrive sur terre au temps  $t = 0$ . les distances géodésiques peut être donnée par

$$\chi(t) = -\frac{1}{a(t)} \quad (3.113)$$

l'équation (3.113) peut être résolue pour donner une expression analytique assez compliquée que nous ne reportons par ici. Il est également clair d'après (3.113) que  $\chi$  est strictement décroissante donc injective et par conséquent  $\chi(t)$  peut être inversé pour donner  $t$  en terme de  $\chi$ .

La connaissance des décalages spectraux  $z_L$  et  $z_S$  permet de tirer les valeurs correspondantes du facteur d'échelle, ce qui permet par inversion de déduire les temps correspondants  $t_S$  et  $t_L$ , qui substitués dans l'expression de  $\chi$  permettent de déduire les distances géodésiques source-terre  $\chi_S := \chi(t_S)$ . La distance géodésiques lentille-terre  $\chi_L := \chi(t_L)$

$$\chi_L = 0.590544. \quad (3.114)$$

$$\chi_S = 1.18479. \quad (3.115)$$

De la connaissance du rayon de Schücking  $\chi_{Schü}$

$$\begin{aligned} \chi_{Schü} &= \left( \frac{3M}{4\pi\rho_{dust0}} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ &= 0.00169199, \end{aligned}$$

on peut déduire les distances géodésiques des points d'entrée et de sortie du photon de la sphère de Schücking  $\chi_{SchüS,E}$  et  $\chi_{SchüE,E}$  respectivement

$$\chi_{SchüS,E} = \chi_L + \chi_{Schü} = 0.592236.$$

$$\chi_{SchüE,E} = \chi_L - \chi_{Schü} = 0.588852.$$

On peut on tirer, grâce à l'inverse de  $\chi(t)$ , les temps de passage du photon en l'entrée et en la sortie de la sphère de Schücking. On obtient alors le tableau suivant

	Terre	Rayon de Schücking	lentille	rayon de Schücking	Source
$z$			0.68		1.734
${}^\circ t$	0	-0.455574	-0.456582	-0.457588	-0.737202
$\chi$	0	0.588852	0.590544	0.592236	1.18479

Tableau 1 : Temps de passage sans déflexion du photon et distances géodésiques correspondantes.

Il vaut la peine de noter qu'en déplaçant l'origine de coordonnées de la terre à la lentille, on obtient les résultats consignés dans le tableau 3 de [18].

L'introduction de la vacuole de Kottler ne va pas changer de manière significative les résultats du tableau 3, qui nous donnent par conséquent une bonne idée sur les temps de passage et les distances géodésiques lorsque la vacuole de Kottler est restaurée.

**Étape 1 :**

Dans cette étape nous allons calculer la trajectoire du photon entre la terre et le rayon de Schücking.

A cause de la symétrie sphérique la trajectoire du photon est antenu dans un plan, et on peut toujours choisir un système de coordonnées de telle manière que la trajectoire soit continue dans le plan équatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , les symboles de Christoffel de la métrique de Friedmann sont données par

$$\Gamma_{xx}^t = a \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^t = \chi^2 a \frac{da}{dt}, \quad (3.116)$$

$$\Gamma_{t\chi}^x = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^x = -\chi, \quad (3.117)$$

$$\Gamma_{t\varphi}^\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \Gamma_{\chi\varphi}^\varphi = \frac{1}{\chi}, \quad (3.118)$$

et les équations de la géodésique s'écrivent comme

$$\ddot{t} + a \frac{da}{dt} \dot{\chi}^2 + \chi^2 \frac{da}{dt} a \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3.119)$$

$$\ddot{\chi} + 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \dot{t} \dot{\chi} - \chi \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3.120)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\dot{t}\dot{\varphi} + \frac{2}{\chi}\dot{\chi}\dot{\varphi} = 0 \quad (3.121)$$

En tenant compte du fait que l'angle de coordonnée  $\arctan\left(\left|\chi\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\chi}}\right|\right)$  à la réception sur terre coïncide avec l'angle physique aussi bien pour la trajectoire du bas que pour la trajectoire du haut, les conditions finales en  $p = 0$  sont

$$t = 0, \quad \chi = \chi_E, \quad \varphi' = \pi \quad (3.122)$$

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = \cos \alpha', \quad \dot{\varphi}' = \frac{\sin \alpha'}{\chi_E}. \quad (3.123)$$

Pour le photon de la trajectoire du haut, et

$$t = 0, \quad \chi = \chi_E, \quad \varphi = -\pi \quad (3.124)$$

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = \cos \alpha, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\sin \alpha}{\chi_E}. \quad (3.125)$$

pour le photon de la trajectoire du bas.

Considérons d'abord le photon de la trajectoire du haut.

Pour un photon, l'intervalle de temps  $d\tau^2$  est nul  $d\tau^2 = 0$ . Par conséquent,

$$dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\varphi'^2) = 0, \quad (3.126)$$

soit en dérivant par  $dp^2$

$$\dot{t}^2 - a^2 (\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}'^2) = 0. \quad (3.127)$$

où le point dénote la dérivation par rapport au paramètre affine. En substituant dans (3.119), on obtient

$$\ddot{t} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\dot{t}^2 = 0, \quad (3.128)$$

d'où, en dérivant par  $\dot{t}$

$$\frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\dot{t} = \frac{d\dot{t}}{\dot{t}} + \frac{1}{a}da = 0, \quad (3.129)$$

que s'intègre en

$$\ln \dot{t} = \ln \frac{1}{a} + cste, \quad (3.130)$$

ou en prenant l'exponentielle des deux membres

$$\dot{t} = \frac{c}{a}. \quad (3.131)$$

Au point  $p = 0$ ,  $t = 0$ ,  $\dot{t} = 1$ ,  $a(t = 0) = 1$ , et par conséquent  $c$  vaut 1. Donc

$$\dot{t} = \frac{1}{a}. \quad (3.132)$$

En multipliant par  $dp$  et en divisant par  $\dot{\varphi}'$ , l'équation (3.121) peut se mettre sous la forme,

$$\frac{d\dot{\varphi}'}{\dot{\varphi}'} + 2\frac{1}{a}\frac{da}{dt}dt + 2\frac{d\chi}{\chi} = \frac{d\dot{\varphi}'}{\dot{\varphi}'} + 2\frac{da}{a}dt + 2\frac{d\chi}{\chi} = 0, \quad (3.133)$$

qui s'intègre en

$$\ln \dot{\varphi}' + \ln a^2 + \ln \chi^2 = cste, \quad (3.134)$$

ou

$$\dot{\varphi}' = \frac{c'}{a^2\chi^2}, \quad (3.135)$$

où la constante  $c'$  est déterminée par les conditions initiales  $p = 0$ ,  $\dot{\varphi}' = \frac{\sin \alpha'}{\chi_E}$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\chi = \chi_E$ , ce qui donne  $c' = \chi_E \sin \alpha'$  et par conséquent

$$\dot{\varphi}' = \frac{\chi_E \sin \alpha'}{a^2\chi^2} = \frac{\chi'_p}{a^2\chi^2}, \quad (3.136)$$

où  $\chi'_p$  est définie par

$$\chi'_p = \chi_E \sin \alpha'. \quad (3.137)$$

En faisant usage des équations (3.127) et (3.132)

$$\dot{\chi}^2 + \chi^2\dot{\varphi}'^2 = \frac{\dot{t}^2}{a^2} = \frac{1}{a^4}. \quad (3.138)$$

Ceci d'une part. D'autre part, en utilisant (3.136)

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\dot{\varphi}'\chi^2}{\chi'_p}. \quad (3.139)$$

Il en résulte que

$$\frac{\chi^4\dot{\varphi}'^2}{\chi_p'^2} = \dot{\chi}^2 + \chi^2\dot{\varphi}'^2, \quad (3.140)$$

d'où

$$\dot{\varphi}'^2 = \frac{\dot{\chi}^2}{\frac{\chi^4}{\chi_p'^2} - \chi^2} = \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2 \left( \frac{\chi^2}{\chi_p'^2} - 1 \right)}, \quad (3.141)$$



ou

$$\dot{\varphi}' = \pm \frac{\dot{\chi}\chi'_p}{\chi^2 \sqrt{1 - \frac{\chi_p'^2}{\chi^2}}}. \quad (3.142)$$

Des deux signes + ou –, il faut choisir le signe +, car pour la trajectoire du haut  $\varphi'$  est croissant. Ceci d'une part. D'autre part,  $\frac{\dot{\chi}\chi'_p}{\chi^2} = -\frac{d}{dp} \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right)$  et par conséquent

$$\dot{\varphi}' = \frac{-\frac{d}{dp} \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right)}{\sqrt{1 - \frac{\chi_p'^2}{\chi^2}}}. \quad (3.143)$$

En multipliant les deux membre de l'équation précédente par  $dp$  et en intégrant

$$\int_p^{p=0} d\varphi' = - \int_{\frac{\chi'_p}{\chi}}^{\frac{\chi'_p}{\chi_E}} \frac{d \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right)}{\sqrt{1 - \frac{\chi_p'^2}{\chi^2}}}. \quad (3.144)$$

d'où

$$\pi - \varphi' = - \arcsin \left( \frac{\chi'_p}{\chi_E} \right) + \arcsin \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right). \quad (3.145)$$

Mais

$$\arcsin \left( \frac{\chi'_p}{\chi_E} \right) = \arcsin (\sin \alpha') = \alpha', \quad (3.146)$$

et par conséquent

$$\varphi' = \pi - \arcsin \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right) + \alpha'. \quad (3.147)$$

De (3.147) on déduit que

$$\arcsin \left( \frac{\chi'_p}{\chi} \right) = \pi + \alpha' - \varphi'. \quad (3.148)$$

D'où en utilisant les propriétés du sinus

$$\frac{\chi'_p}{\chi} = \sin (\varphi' - \alpha'). \quad (3.149)$$

Pour le photon de la trajectoire du bas, on suit la même procédure comparativement au photon de la trajectoire du haut, seules les conditions finales différent. On obtient

$$\dot{t} = \frac{1}{a}, \quad (3.150)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\chi_p}{a^2 \chi^2}, \quad \chi_p := \chi_E \sin \alpha, \quad (3.151)$$

$$\varphi = -\pi + \arcsin\left(\frac{\chi_p}{\chi}\right) - \alpha, \quad (3.152)$$

on en déduit que

$$\frac{\chi_p}{\chi} = -\sin(\varphi + \alpha). \quad (3.153)$$

L'angle polaire  $\varphi'_{SchüE}$  en lequel le photon de la trajectoire du haut traverse la sphère de Schücking dans le demi-espace contenant la terre et donné par

$$\varphi'_{SchüE} = \pi - \arcsin\left(\frac{\chi'_p}{\chi_{Schü}}\right) + \alpha', \quad (3.154)$$

où on a utiliser l'équation (3.147).

De même l'angle polaire  $\varphi_{SchüE}$  en lequel le photon de la trajectoire du bas traverse la sphère de Schücking dans demi espace du côté de la terre est donné par

$$\varphi_{SchüE} = -\pi + \arcsin\left(\frac{\chi_p}{\chi_{Schü}}\right) - \alpha. \quad (3.155)$$

Nous allons maintenant calculer la distance géodésique séparant le point de sortie du photon de la trajectoire du haut de la sphère de Schücking de la terre. En utilisant des propriétés géométriques élémentaires, voir fig. 7, nous avons d'une part

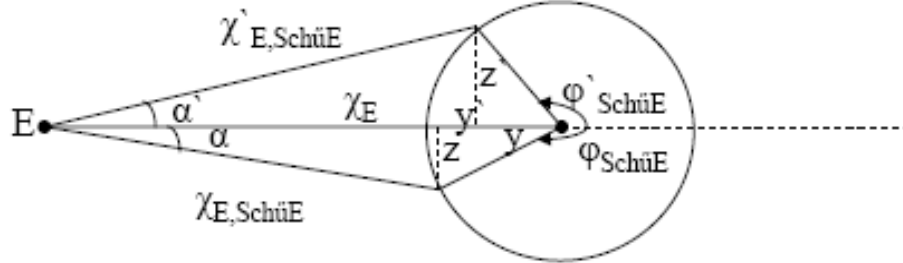


Fig. 7 : Distance géodésique séparant le point de sortie du photon du haut (du bas) de la sphère de Schücking.

$$\cos \alpha' = \frac{\chi_E - y'}{\chi'_{E,SchüE}}, \quad (3.156)$$

$$\sin \alpha' = \frac{z'}{\chi'_{E,SchüE}}, \quad (3.157)$$

d'où

$$\chi'^2_{E,SchüE} = (\chi_E - y')^2 + z'^2, \quad (3.158)$$

D'autre part

$$\frac{y'}{\chi_{Schü}} = \cos(\pi - \varphi'_{SchüE}) = -\cos(\varphi'_{SchüE}),$$

et

$$\frac{z'}{\chi_{Schü}} = \sin(\pi - \varphi'_{SchüE}) = \sin(\varphi'_{SchüE}).$$

En remplaçant  $y'$  et  $z'$  par leurs expressions ci-dessus, dans celle donnant  $\chi'_{E,SchüE}$ , on obtient

$$\chi'^2_{E,SchüE} = \chi_E^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_E\chi_{Schü} \cos(\varphi'_{SchüE}), \quad (3.159)$$

où

$$\chi'_{E,SchüE} = \sqrt{\chi_E^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_E\chi_{Schü} \cos(\varphi'_{SchüE})}. \quad (3.160)$$

La distance géodésique séparant le point de sortie de la sphère de Schücking du photon de la trajectoire du bas de la terre s'obtient de manière similaire et donne

$$\chi_{E,SchüE} = \sqrt{\chi_E^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_E\chi_{Schü} \cos(\varphi_{SchüE})}. \quad (3.161)$$

La connaissance de  $\chi'_{E,SchüE}$  et  $\chi_{E,SchüE}$  devrait nous permettre de calculer les temps de sortie du photons des trajectoires du haut et du bas de la sphère de Schücking :  $t'_{SchüE}$  et  $t_{SchüE}$  respectivement. Mais ces temps de passages ne diffèrent des temps de passages sans déflexion qui sont d'ailleurs égaux  ${}^{\circ}t_{SchüE} = {}^{\circ}t'_{SchüE}$  que par des termes de seconde ordre en  $(\pi - \varphi'_{SchüE})$  ou en  $(\pi - \varphi_{SchüE})$  respectivement.

Ceci nous permet d'utiliser  ${}^{\circ}t_{SchüE}$  à la place de  $t'_{SchüE}$  et  $t_{SchüE}$ , tant qu'on ne s'intéresse uniquement à la déflexion.

Au moment de la sortie de photon de la trajectoire du haut dans la sphère de Schücking, celui-ci à une quadri-vitesse donnée par

$$\dot{t}'_{SchüE} = \frac{1}{a'_{SchüE}}, \quad \dot{\varphi}'_{SchüE} = \frac{\chi'_p}{a'^2_{SchüE}\chi_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}'_{SchüE} = -\frac{\cos(\varphi'_{SchüE} - \alpha')}{a'^2_{SchüE}}, \quad (3.162)$$

où la dernière relation est obtenu par dérivation de (3.149).

De même au moment de l'entrée du photon de la trajectoire du bas de la sphère de Schücking, celui-ci possède une quadri-vitesse donnée par

$$\dot{t}_{SchüE} = \frac{1}{a_{SchüE}}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = \frac{-\chi_p}{a^2_{SchüE}\chi_{SchüE}}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{-\cos(\varphi_{SchüE} + \alpha)}{a^2_{SchüE}}. \quad (3.163)$$

Soit  $\gamma'_F$  le plus petit angle non orienté des deux angles que fait la direction du photon de la trajectoire du haut avec la direction dirigée vers la lentille à sa sortie de la sphère de Schücking. Nous avons

$$\gamma'_F = \arctan \left( \left| \frac{\chi_E \dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{\chi}'_{SchüE}} \right| \right). \quad (3.164)$$

En remplaçant  $\dot{\varphi}'_{SchüE}$  et  $\dot{\chi}'_{SchüE}$  par leurs expressions, on obtient pour  $\gamma'_F$  l'expression suivante

$$\gamma'_F = \pi - (\varphi'_{SchüE} - \alpha'). \quad (3.165)$$

De même, soit  $\gamma_F$ , F pour Friedmann, le plus petit angle non orienté des deux angles que fait la direction du photon de la trajectoire du bas avec la direction dirigée vers la lentille à sa sortie de la sphère de Schücking, on a

$$\gamma_F = \arctan \left( \left| \frac{\chi_E \dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{\chi}_{SchüE}} \right| \right). \quad (3.166)$$

De même on obtient une expression de  $\gamma_F$  similaire à celle de  $\gamma'_F$  en remplaçant  $\dot{\varphi}_{SchüE}$  et  $\dot{\chi}_{SchüE}$  par leurs expressions

$$\gamma_F = \pi + \varphi_{SchüE} + \alpha. \quad (3.167)$$

## Etape 2 :

Nous pouvons toujours faire usage de la liberté motionnée lors du raccordement des solution de Kottler et Friedmann pour prendre  $T'_{SchüE} = t'_{SchüE}$ . Nous devons d'abord traduire les quadrivitesse à la sortie de sphère de Schücking. On a

$$\dot{r}'_{SchüE} = \frac{\partial r}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial r}{\partial \chi} \dot{\chi} \Big|_{SchüE}. \quad (3.168)$$

En faisant usage de l'expression du Jacobien inverse

$$\dot{r}'_{SchüE} = C'_{SchüE} \dot{t}'_{SchüE} + a'_{SchüE} \dot{\chi}'_{SchüE}, \quad (3.169)$$

d'où en remplaçant  $\dot{t}'_{SchüE}$  et  $\dot{\chi}'_{SchüE}$  par leurs expressions

$$\dot{r}'_{SchüE} = \frac{C'_{SchüE} - \cos(\varphi'_{SchüE} - \alpha')}{a'_{SchüE}}. \quad (3.170)$$

En procédant de manière similaire, on obtient pour  $\dot{r}_{SchüE}$  l'expression

$$\dot{r}_{SchüE} = \frac{C_{SchüE} - \cos(\varphi_{SchüE} + \alpha)}{a_{SchüE}}. \quad (3.171)$$

Soit  $\gamma'_K$ ,  $K$  pour Kottler, le plus petit angle non orienté des deux angles que fait la direction du photon de la trajectoire du haut avec la direction dirigée vers la lentille à sa sortie de la sphère de Schücking. Nous avons

$$\gamma'_K = \arctan \left( \left| r'_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüE}}{\dot{r}'_{SchüE}} \right| \right). \quad (3.172)$$

En remplaçant  $r'_{SchüE}$ ,  $\dot{\varphi}'_{SchüE}$  et  $\dot{r}'_{SchüE}$  par leurs expressions respectives on obtient

$$\gamma'_K = \arctan \left( a'_{SchüE} \chi_{Schü} \frac{\chi'_p}{a'^2_{SchüE} \chi_{Schü}^2} \frac{a'_{SchüE}}{C'_{SchüE} - \cos(\varphi'_{SchüE} - \alpha')} \right) \quad (3.173)$$

$$\gamma'_K = \arctan \left( \frac{\frac{\chi'_p}{\chi_{Schü}}}{C'_{SchüE} - \cos(\varphi'_{SchüE} - \alpha')} \right). \quad (3.174)$$

Mais

$$\frac{\chi'_p}{\chi_{Schü}} = \sin(\pi + \alpha' - \varphi'_{SchüE}) = \sin \gamma'_F, \quad (3.175)$$

et

$$\cos(\varphi'_{SchüE} - \alpha') = -\cos(\pi - \varphi'_{SchüE} + \alpha') = \cos \gamma'_F. \quad (3.176)$$

Il s'ensuit que

$$\gamma'_K = \arctan \left( \frac{\sin \gamma'_F}{C'_{SchüE} + \cos \gamma'_F} \right). \quad (3.177)$$

Soit  $\gamma_K$ ,  $K$  pour Kottler, le plus petit angle non orienté des deux angles qui fait direction du photon de la trajectoire du bas avec la direction dirigée de son point de sortie de la sphère de Schücking vers la lentille. On a de manière similaire

$$\gamma_K = \arctan \left( \left| r_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right| \right) = \arctan \left( -r_{SchüE} \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right). \quad (3.178)$$

En remplaçant  $r_{SchüE}$ ,  $\dot{\varphi}_{SchüE}$  et  $\dot{r}_{SchüE}$  par leurs expressions respectives on obtient, en faisant usages de quelques propriétés des fonctions trigonométriques et en tenant compte des expressions de  $\sin \gamma_F$  et  $\cos \gamma_F$ ,

$$\gamma_K = \arctan \left( \frac{\sin \gamma_F}{C_{SchüE} + \cos \gamma_F} \right). \quad (3.179)$$

### Etape 3 :

Nous avons ainsi spécifié les conditions finales de l'équation de la géodésique à l'intérieur de la sphère de Schücking.

Les symboles de Christoffel de la métrique de Kottler se réduisent dans le plan équatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à :

$$\Gamma_{Tr}^T = \frac{B'}{2B}, \quad (3.180)$$

$$\Gamma_{TT}^r = \frac{BB'}{2}, \Gamma_{rr}^r = -\frac{B'}{2B}, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -rB, \quad (3.181)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (3.182)$$

Les équations de la géodésique s'écrivent alors comme

$$\ddot{T} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{T} \dot{r} = 0, \quad (3.183)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} B(r) B'(r) \dot{T}^2 - \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{r}^2 - rB(r) \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (3.184)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (3.185)$$

L'intégration de ces équations donne trois intégrales premières

$$\dot{T} = \frac{1}{B}, \quad (3.186)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = J, \quad (3.187)$$

$$\frac{\dot{r}^2}{B} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E. \quad (3.188)$$

L'équation (3.187) vient de l'invariance de la métrique sous les rotations, avec  $J$  ayant l'interprétation d'un moment cinétiques par unité de masse. L'équation (3.188) vient de l'invariance de la métrique sous les translations (de temps) temporelles, avec  $E$  ayant la signification d'une énergie par unité de masse. Pour le photon, nous avons  $E = 0$ .

En éliminant le paramètre affine entre (3.188) et (3.187), Nous obtenons dans le cas du photon

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{J^2} - B(r)}. \quad (3.189)$$

Au péri-lens  $r'_p$ , qui représente la distance minimale entre le photon de la trajectoire du haut et de la lentille

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r'_p} = 0, \quad (3.190)$$

d'où on déduit une expression pour  $J'$

$$J' = r'_p B^{-\frac{1}{2}}(r'_p). \quad (3.191)$$

De même au péri-lens  $r_p$ , lorsque le photon de trajectoire du bas s'approche le plus de la lentille

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_p} = 0, \quad (3.192)$$

et nous obtenons une autre expression de  $J$  en termes de  $r_p$

$$J = r_p B^{-\frac{1}{2}}(r_p) \quad (3.193)$$

En remplaçant  $J'$  et  $J$  par ses expressions appropriées (3.191) et (3.193) on obtient

$$\frac{d\varphi'}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p'^2} - 1}} \left[ 1 - \frac{s}{r} - \frac{s}{r'_p} \frac{r}{r'_p + r} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.194)$$

valable pour la trajectoire du haut et

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1}} \left[ 1 - \frac{s}{r} - \frac{s}{r_p} \frac{r}{r_p + r} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.195)$$

valable pour la trajectoire du bas, où  $s$  dénote le rayon de Schwarzschild  $s = 2GM$ .

Il vaut la peine de noter que la constante cosmologique  $\Lambda$  a aussi bien disparu de (3.194) que de (3.195).

Comme  $\frac{s}{r'_p} \ll 1$  et  $\frac{s}{r_p} \ll 1$ , Nous ne retiendrons dans ce qui suit que les termes jusqu'au premier ordre en  $\frac{s}{r_p}$  et en  $\frac{s}{r'_p}$  négligeant ainsi les termes d'ordre supérieur. Pour des raisons de commodité notons que  $\frac{d\varphi'}{dr}$  lorsque il s'agit de la trajectoire du haut et continuons à noter  $\frac{d\varphi}{dr}$  lorsque il s'agit de la trajectoire du bas.

Attachons-nous maintenant à dériver des expressions approximatives pour les péri-lens  $r'_p$  et  $r_p$ . Commençons par la trajectoire du haut, partons de la relation

$$\tan \gamma'_K = r'_{SchüE} \left. \frac{d\varphi'}{dr} \right|_{SchüE}. \quad (3.196)$$

Mais, en utilisant (3.194)

$$\left. \frac{d\varphi'}{dr} \right|_{r'_{SchüE}} = \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE} \sqrt{1 - \frac{r_p'^2}{r'^2_{SchüE}}}} \left[ 1 - \frac{s}{r'_{SchüE}} - \frac{s}{r'_p} \frac{r'_{SchüE}}{r'_p + r'_{SchüE}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.197)$$

Faisons usages de  $(1+x)^n \simeq 1+nx$ , valable pour  $|x| \ll 1$ , nous obtenons, sachant que

$$\frac{s}{r'_{SchüE}} \ll 1, \frac{s}{r'_p} \ll 1,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi'}{dr} \right|_{r'_{SchüE}} &\simeq \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r'^2_p}{r'^2_{SchüE}} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \frac{r'_{SchüE}}{r'_p + r'_{SchüE}} \right) \\ &\simeq \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \frac{r'_{SchüE}}{r'_p + r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right)^2 \right) \\ &\simeq \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \left( \frac{1}{1 + \frac{r'_p}{r'_{SchüE}}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right)^2 \right) \\ &\simeq \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \left( 1 - \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.198)$$

Si on néglige le terme en  $\left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right)^2$  devant le terme en  $\frac{s}{r'_p}$ , on obtient

$$\left. \frac{d\varphi'}{dr} \right|_{r'_{SchüE}} = \frac{r'_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \right). \quad (3.199)$$

Il s'ensuit une expression approximative pour  $\tan \gamma'_K$

$$\tan \gamma'_K = \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \right), \quad (3.200)$$

d'où une expression approximative pour  $r'_p$  en terme de  $\tan \gamma'_K$  et de  $s$

$$r'_p \sim r'_{SchüE} \tan \gamma'_K - \frac{s}{2}. \quad (3.201)$$

En vertu de la relation trigonométriques bien connu

$$\tan^2 \gamma'_K = \frac{\sin^2 \gamma'_K}{1 - \sin^2 \gamma'_K}, \quad (3.202)$$

qui peut être inversé pour exprimer  $\sin^2 \gamma'_K$  en termes de  $\tan^2 \gamma'_K$

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma'_K &= \frac{\tan^2 \gamma'_K}{1 + \tan^2 \gamma'_K} \\ &\sim \frac{\frac{r'^2_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{s}{r'_p} + \frac{s^2}{4r'^2_p} \right)}{1 + \frac{r'^2_p}{r'^2_{SchüE}} \left( 1 + \frac{s}{r'_p} + \frac{s^2}{4r'^2_p} \right)}. \end{aligned} \quad (3.203)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sin \gamma'_K &\sim \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \left( 1 + \frac{s}{r'_p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \right), \end{aligned} \quad (3.204)$$



d'où une expression approximative pour les peri-lens  $r'_p$

$$r'_p \sim r'_{SchüE} \sin \gamma'_K - \frac{s}{2}. \quad (3.205)$$

En procédant exactement de la même manière on obtient pour le péri-lens  $r_p$  de la trajectoire du bas l'expression suivante :

$$r_p \sim r_{SchüE} \sin \gamma_K - \frac{s}{2}. \quad (3.206)$$

Déterminons tour à tour les angles polaires  $\varphi'_{SchüS}$  et  $\varphi_{SchüS}$  avec lesquels les photons de la trajectoire du haut et du bas pénètrent respectivement dans la sphère de Schücking. Comme  $\varphi'$  croit continuellement aussi bien lorsque  $r$  varie de  $r'_{SchüS}$  à  $r'_p$  que lorsque  $r$  varie de  $r'_p$  à  $r'_{SchüE}$ , nous avons

$$\varphi'_{SchüE} - \varphi'_{SchüS} = \int_{r'_p}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr + \int_{r'_p}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr, \quad (3.207)$$

d'où

$$\varphi'_{SchüS} = \varphi'_{SchüE} - \int_{r'_p}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr - \int_{r'_p}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr, \quad (3.208)$$

où  $\frac{d\varphi'}{dr}$  est donnée par (3.194). A l'ordre linéaire en  $\left(\frac{s}{r'_p}\right)$

$$\frac{d\varphi'}{dr} \simeq \frac{1}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_p^2} - 1}} \left( 1 + \frac{s}{2r} + \frac{s}{2r'_p} \frac{r}{r + r'_p} \right).$$

En effectuant le changement de variable  $u = \frac{r}{r'_p}$ , et en faisant usage des intégrales élémentaires (2.80) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{r'_p}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr &\simeq -\arcsin \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \frac{\left( \frac{r'^2_{SchüE}}{r_p^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{r'_{SchüE}}{r'_p}} + \\ &\frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \left( \frac{\frac{r'_{SchüE}}{r'_p} - 1}{\frac{r'_{SchüE}}{r'_p} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} \sqrt{\frac{r'^2_{SchüE}}{r_p^2} - 1} + \\ &\frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_p}{r'_{SchüE} + r'_p}}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

De même

$$\int_{r'_p}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr \simeq \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r'_p}{r'_{SchüS}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüS}} \sqrt{\frac{r'^2_{SchüS}}{r_p^2} - 1} + \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_p}{r_{SchüS} + r'_p}}. \quad (3.210)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \varphi'_{SchüS} \sim \varphi'_{SchüE} - \pi + \arcsin \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüE}} \right) + \arcsin \left( \frac{r'_p}{r'_{SchüS}} \right) - \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüE}} \sqrt{\frac{r'^2_{SchüE}}{r_p^2} - 1} - \\ \frac{1}{2} \frac{s}{r'_{SchüS}} \sqrt{\frac{r'^2_{SchüS}}{r_p^2} - 1} - \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_p}{r'_{SchüE} + r'_p}} - \frac{1}{2} \frac{s}{r'_p} \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_p}{r'_{SchüS} + r'_p}}. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Comme l'angle polaire de la trajectoire du bas décroît continuellement aussi bien lorsque  $r$  décroît de  $r_{SchüS}$  à  $r_p$  que lorsque  $r$  croît de  $r_p$  à  $r_{SchüE}$

$$\varphi_{SchüE} - \varphi_{SchüS} = - \int_{r_p}^{r_{SchüE}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr - \int_{r_p}^{r_{SchüS}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr. \quad (3.212)$$

En procédant comme pour  $\varphi'_{SchüS}$

$$\begin{aligned} \varphi_{SchüS} \sim \varphi_{SchüE} + \pi - \arcsin \left( \frac{r_p}{r_{SchüE}} \right) - \arcsin \left( \frac{r_p}{r_{SchüS}} \right) + \frac{1}{2} \frac{s}{r_{SchüE}} \sqrt{\frac{r^2_{SchüE}}{r_p^2} - 1} + \\ \frac{1}{2} \frac{s}{r_{SchüS}} \sqrt{\frac{r^2_{SchüS}}{r_p^2} - 1} + \frac{1}{2} \frac{s}{r_p} \sqrt{\frac{r_{SchüE} - r_p}{r_{SchüE} + r_p}} + \frac{1}{2} \frac{s}{r_p} \sqrt{\frac{r_{SchüS} - r_p}{r_{SchüS} + r_p}}. \end{aligned} \quad (3.213)$$

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin des temps de  $t'_{SchüS}$  et  $t_{SchüS}$  qui correspondent à l'entrée des photons du haut et du bas à l'intérieure de la sphère de Schücking. On montre [18] que la différence entre les temps  $t'_{SchüS}$  et  ${}^{\circ}t_{SchüS}$ , qui correspond dans l'entrée du photon à la sphère de Schücking lorsque l'intérieur de la sphère de Schücking aura été remplacé par la poussière, identique à celle régnant à l'extérieur de la sphère de Schücking, est de second ordre. Donc si on se limite aux termes du premier ordre

$$t'_{SchüS} \simeq {}^{\circ}t_{SchüS}, \quad (3.214)$$

Il vaut la peine de noter que les approximations sont justifiées tant qu'on se limite à la déflexion de la lumière et deviennent bien sûr obsolètes lorsque on s'attache à calculer des temps de retard.

A l'entrée de la sphère de Schücking, du côté interne, la vitesse du photon de la trajectoire du haut est donnée par

$$\dot{T}'_{SchüS} = \frac{1}{B_{Schü}(t'_{SchüS})}, \quad (3.215)$$

$$\dot{r}'_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r'_p{}^2}{r'^2_{SchüS}} \frac{B_{Schü}(t'_{SchüS})}{B(r'_p)}}, \quad (3.216)$$

$$\dot{\varphi}'_{SchüS} = \frac{r'_p}{r'^2_{SchüS} \sqrt{B(r'_p)}}, \quad (3.217)$$

où  $B_{Schü}(t'_{SchüS}) = 1 - \frac{A}{a(t'_{SchüS})} \chi^2_{Schü} - \frac{\Lambda}{3} a^2(t'_{SchüS}) \chi^2_{SchüS}$ .

Pour  $\dot{r}'_{SchüS}$  on a fait le choix de signe  $-$  car  $r$  est décroissant à l'entrée de la sphère de Schücking pour le photon de la trajectoire du haut. Nous allons maintenant traduire cette vitesse dans les coordonnées de Friedmann.

En faisant usage du Jacobien de la transformation de coordonnées  $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$

$$\dot{\chi}'_{SchüS} = \frac{-1}{a(t'_{SchüS}) B_{Schü}(t'_{SchüS})} \sqrt{1 - \frac{r'^2_p}{a^2(t'_{SchüS}) \chi^2_{Schü}} \frac{B_{Schü}(t'_{SchüS})}{B(r'_p)}} - \frac{C_{Schü}(t'_{SchüS})}{a(t'_{SchüS})} \frac{1}{B_{Schü}(t'_{SchüS})}. \quad (3.218)$$

En considérant le triangle ayant pour sommets la lentille, la source et le point d'entrée du photon de la trajectoire du haut dans la sphère de Schücking Fig. 8. Nous avons les relations

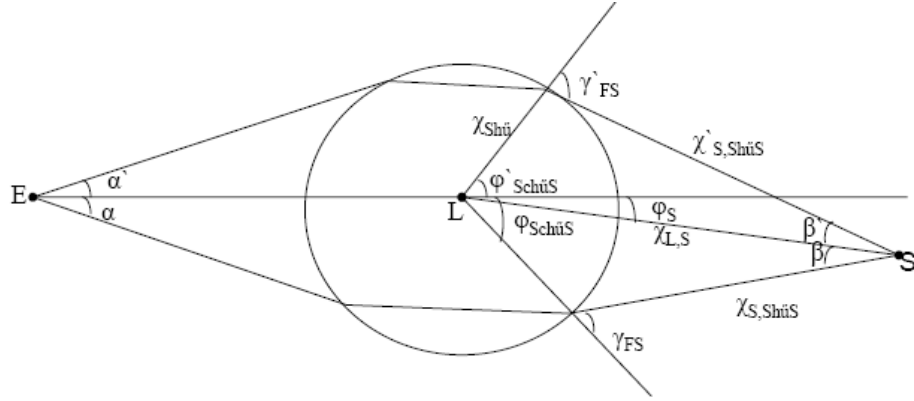


Fig. 8 : Trajectoire des rayons lumineux émis par la source (S) jusqu'à leur entrée dans la sphère de Schücking.

$$\frac{\sin \beta'}{\chi_{Schü}} = \frac{\sin(\varphi'_{SchüS} - \varphi'_S)}{\chi'_{SchüS,S}} = \frac{\sin(\pi - \gamma'_{FS})}{\chi_{L,S}}, \quad (3.219)$$

où  $\chi_{L,S}$  est la distance géodésique entre la source et la lentille, qui peut être approximée de manière très précise par

$$\chi_{L,S} \simeq \chi_S - \chi_L, \quad (3.220)$$

où  $\chi_L$  est la distance géodésique terre-lentille et  $\chi_S$  est la distance géodésique terre-source.

Comme il est bien connu, la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$ , ce qui signifie, appliqué au triangle dont il est question plus haut, que

$$\pi - \gamma'_{FS} + \beta' + \varphi'_{SchüS} - \varphi'_S = \pi, \quad (3.221)$$

d'où

$$\varphi'_S = \varphi'_{SchüS} - \gamma'_{FS} + \beta'. \quad (3.222)$$

De (3.219)

$$\sin \beta' = \frac{\sin(\pi - \gamma'_{FS})}{\chi_{L,S}} \chi_{Schü} = \frac{\sin \gamma'_{FS}}{\chi_{L,S}} \chi_{Schü}, \quad (3.223)$$

d'où

$$\beta' = \arcsin \left( \frac{\sin(\gamma'_{FS}) \chi_{Schü}}{\chi_{L,S}} \right). \quad (3.224)$$

En substituant à  $\beta'$  son expression ci-dessus dans l'expression précédente de  $\varphi'_S$ , on obtient

$$\varphi'_S = \varphi'_{SchüS} - \gamma'_{FS} + \arcsin \left( \frac{\chi_{Schü}}{\chi_{L,S}} \sin(\gamma'_{FS}) \right). \quad (3.225)$$

D'autre part,  $\gamma'_{FS}$  est donné par

$$\gamma'_{FS} = \arctan \left( \left| \frac{\chi_{Schü} \dot{\varphi}'_{SchüS}}{\dot{\chi}_{SchüS}} \right| \right) = \arctan \left( -\chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}'_{SchüS}}{\dot{\chi}_{SchüS}} \right). \quad (3.226)$$

De même à l'entrée de la sphère de Schücking du côté interne, la vitesse du photon de la trajectoire du bas est donnée par

$$\dot{T}_{SchüS} = \frac{1}{B_{Schü}(t_{SchüS})}, \quad (3.227)$$

$$\dot{r}_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r_{SchüS}^2} \frac{B_{Schü}(t_{SchüS})}{B(r_p)}}, \quad (3.228)$$

$$\dot{\varphi}_{SchüS} = -\frac{r_p}{r_{SchüS}^2 \sqrt{B(r_p)}}, \quad (3.229)$$

Pour  $\dot{r}_{SchüS}$  on a également fait le choix du signe  $-$  car  $r$  est décroissant à l'entrée de la sphère de Schücking pour le photon de la trajectoire du bas. La traduction de la vitesse dans les coordonnées de Friedmann donne, en tenant de nouveau compte du Jacobien de la transformation de coordonnées  $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ ,

$$\dot{\chi}_{SchüS} = \frac{-1}{a(t_{SchüS}) B_{Schü}(t_{SchüS})} \sqrt{1 - \frac{r_p^2}{a^2(t_{SchüS}) \chi_{Schü}^2} \frac{B_{Schü}(t_{SchüS})}{B(r_p)}} - \frac{C_{Schü}(t_{SchüS})}{a(t_{SchüS})} \frac{1}{B_{Schü}(t_{SchüS})}. \quad (3.230)$$

En procédant de manière similaire à celle utilisée pour obtenir l'expression de  $\varphi'_S$  (3.225), on obtient pour  $\varphi_S$  l'expression suivante

$$\varphi_S = \varphi_{SchüS} + \gamma_{FS} - \arcsin\left(\frac{\chi_{Schü}}{\chi_{L,S}} \sin(\gamma_{FS})\right), \quad (3.231)$$

où

$$\gamma_{FS} = \arctan\left(\left|\frac{\chi_{Schü} \dot{\varphi}_{SchüS}}{\dot{\chi}_{SchüS}}\right|\right) = \arctan\left(\chi_{Schü} \frac{\dot{\varphi}_{SchüS}}{\dot{\chi}_{SchüS}}\right). \quad (3.232)$$

En faisant usage des expressions pour  $\dot{\varphi}_{SchüS}$  et  $\dot{\chi}_{SchüS}$  (3.229) et (3.230), nous obtenons

$$\gamma_{FS} = \arctan\left(\frac{r_p B_{Schü}(t_{SchüS})}{r_{SchüS} \sqrt{B(r'_p)} \left(C_{SchüS}(t_{SchüS}) + \sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r_{SchüS}^2} \frac{B_{Schü}(t_{SchüS})}{B(r_p)}}\right)}\right) \quad (3.233)$$

On est alors en position de calculer  $\varphi_S$ .

Pour un couple de valeurs  $(\Lambda, M)$ , nous obtenons successivement  $\varphi'_{SchüE}$ ,  $\varphi_{SchüE}$ ,  $\varphi'_{SchüS}$ ,  $\varphi_{SchüS}$ ,  $\varphi'_S$  et  $\varphi_S$ . En général  $\varphi_S(\Lambda, M) \neq \varphi'_S(\Lambda, M)$ . Pour réaliser l'égalité  $\varphi_S = \varphi'_S$ , qui correspond au fait que les deux photons sont émis par la même source, il faut ou bien ajuster  $M$ , en gardant  $\Lambda$  fixe, ou bien ajuster  $\Lambda$  en gardant  $M$  fixe. D'ailleurs l'ajustement ne marche pas (à tous les coups) toujours. Si on s'en tient à la valeur de  $M$  favorisé par l'expérience, il n'y a pas pour le système  $SDSSJ1004+4112$ , de valeur acceptable de  $\Lambda$ ,  $\Lambda \prec 3$ , pour assurer l'égalité  $\varphi_S(\Lambda, M) \neq \varphi'_S(\Lambda, M)$ . Cependant, il faut dire qu'il y'a plusieurs méthodes de détermination observationnelle de la masse qui ne donnent pas forcément les mêmes valeurs pour la masse : Les estimations peuvent même aller du simple au double.

Nous avons essayé de faire une ajustement numérique pour obtenir l'égalité des angles d'émissions  $\varphi'_S$  et  $\varphi_S$  pour les deux trajectoires du haut et du bas respectivement. Nous avons pris  $\Lambda$  et les angles de réceptions  $\alpha$  et  $\alpha'$  fixes, et on prend  $M$  comme paramètre. Malheureusement les résultats obtenus ne sont pas en accord avec les observation expérimentales : Les masses obtenus ne sont pas réalistes pour une densité de poussière positive.

Nous avons calculé l'angle d'émission pour une valeur maximale de  $\Lambda = 3 \times 0.995$  et on est obtenu le tableau suivant

$\alpha \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S (")$	8.229	7.404	9.055	9.879	9.055	10.684	6.579	5.754	7.404
$M [10^{13} M_{\odot}]$	1.731	1.904	1.558	1.904	2.095	1.714	1.558	1.714	1.403

Tableau 2 : L'angle d'émission et la masse  $M$  pour une valeur maximale de la constante cosmologique  $\Lambda$ .

# Chapitre 4

## Conclusion générale

Nous avons étudié l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière émise par une source  $S$ , un quasar, par une lentille gravitationnelle  $L$ , un amas de galaxies.

Nous avons entrepris cette étude dans le cadre de deux modèles différents : les solutions de Kottler et d'Einstein-Straus.

Le calcul de la déflexion dans le cas du modèle de Kottler est basé sur les hypothèses suivantes :

-On néglige toutes les masses de l'univers par rapport à la masse de la lentille. C'est en particulier le cas des masses de la terre et de source.

-L'observateur aussi bien que la source sont considérés comme étant au repos par rapport à la lentille.

Nous avons repris les calculs de Schücker et retrouvé les mêmes résultats qui concordent avec ceux de Rindler et Ishak et abouti donc la même conclusion : La constante cosmologique a un effet sur la déflexion de la lumière.

La solution d'Einstein-Straus, qui résulte du raccordement de la métrique de Kottler à l'intérieur de la sphère de Schücker avec la métrique de Friedmann (modèle  $\Lambda$ CDM) à l'extérieur, nous permet de nous affranchir des hypothèses ci-dessus mentionnées.

On permet à l'observateur et à la source de se déplacer par rapport à la lentille. Seule l'hypothèse de sphéricité est maintenue.

On tient compte de la masse des autres galaxies sous forme de poussière homogène et isotrope.

Nous avons repris également les calculs de Schücker et retrouvé les résultats de l'auteur. La constante cosmologique a toujours un effet sur la déflexion de la lumière, mais cet effet est atténué comparativement au cas de Kottler.

Bien sûr, les résultats obtenus dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus sont plus réalistes que les résultats obtenus dans le cadre de la solution de Kottler.

Que reste-il à faire ?

L'hypothèse de sphéricité est difficilement contournable. Il y'a également une hypothèse implicite. On ne fait l'usage que de la solution de Kottler (aussi bien dans le modèle de Kottler que dans le modèle d'Einstein-Straus) dans le vide, c'est à dire hors de la distribution de masse, ce qui suppose qu'on néglige la pénétration des photons à l'intérieur de la distribution de masse. Il serait intéressant de reconsidérer le problème en tenant compte du fait que les photons peuvent pénétrer à l'intérieur de la distribution de masse. Ceci nécessite la mise en oeuvre de la solution interne de Kottler.



# Bibliographie

- [1] W. Rindler and M. Ishak, The Contribution of the Cosmological Constant to the Relativistic Bending of Light Revisited, Phys. Rev. D76 043006 [arXiv :0709.2948 [astro-ph]] (2007).
- [2] M. Sereno, On the influence of the cosmological constant on gravitational lensing in small systems., Phys. Rev. D77, 043004 [arXiv :0711.1802 [astro-ph]] (2008).
- [3] M. Sereno, The role of Lambda in the cosmological lens equation. [arXiv :0807.5123 [astro-ph]](2008).
- [4] T. Schücker, Cosmological constant and lensing. [arXiv :0712.1559 [astro-ph]], Gen. Relativ. Gravit. DOI :10.1007/s10714-008-0652-2.
- [5] T. Schücker, Strong lensing with positive cosmological constant. [arXiv :0805.1630 [astro-ph]]. Moriond Proceedings Cosmology (2008).
- [6] H. Miraghaei, M. Nouri-Zonoz, Classical tests of general relativity in the Newtonian limit of Schwarzschild-de-Sitter spacetime. [arXiv :0810.2006 [gr-qc]].
- [7] R. Kantowski, B. Chen and X. Dai, Gravitational lensing corrections in flat CDM cosmology. [arXiv :0909.3308v1 [astro-ph.CO]].
- [8] I.B. Khriplovich, A.A. Pomeransky, Does cosmological term influence gravitational lensing?[arXiv :0801.1764 [gr-qc]].
- [9] M. Park, Rigorous approach to the gravitational lensing. [arXiv :0804.4331 [astro-ph]].
- [10] G.W. Gibbons, C.M. Warnick, M.C. Werner, Light-bending in Schwarzschild-de-Sitter : projective geometry of the optical metric. [arXiv :0808.3074 [gr-qc]].
- [11] F. Simpson, J.A. Peacock, A.F. Heavens, On lensing by a cosmological constant.[arXiv :0809.1819 [astro-ph]].

- [12] S. Weinberg, “Gravitation and cosmology : Principle and application of the general theory of relativity,” John Wiley & Sons (1971).
- [13] I. Zouzou, “Géométrie Riemannienne et univers presque symétrique ,” thèse de doctorat, université de Constantine, Algérie (2007).
- [14] Leite Lopes, “Théorie relativiste de la gravitation,” Masson, Paris, (1993) .
- [15] C. Schomblond et G. Bernich “Introduction à la Relativité Générale,” Université Libre de Bruxelles, Campus de la plaine C. P. 231, B-1050 Bruxelles, Belgique. Février-Mars (2003) .
- [16] S. Pireaux, “Etude de la déflexion de la lumière comme test d’une théorie de la gravitation,” mémoire d’obtenir le diplôme d’Etudes Approfondies en Sciences Physiques, université de Catholique de Louv Ain ; Juin (1998) .
- [17] S. Weinberg, “Cosmology ,” Oxford university press (2008) .
- [18] T. Schücker, “Strong lensing in the Einstein-Straus solution” arXiv :0807.0380v1 [astro-ph]. Jul (2008).
- [19] N. Inada et al. [SDSS Collaboration], “A Gravitationally Lensed Quasar with Quadruple Images Separated by 14.62 Arcseconds,” Nature 426 (2003).
- [20] N. Ota et al., “Chandra Observations of SDSS J1004+4112 : Constraints on the Lensing Cluster and Anomalous X-Ray Flux Ratios of the Quadruply Imaged Quasar,” Astrophys. J. 647 (2006).
- [21] R. Kantowski, B. Chen, X. “Gravitational Lensing Corrections in Flat CDM Cosmology,” arXiv :0909.3308v1 (2009) .
- [22] D. McMahon “Relativity Demystified,” McGraw-Hill Companies, (2006) .
- [23] J. Plebański and A Krasinski “An intriduction to general relativity and cosmology,” Cambridge University press, (2006) .
- [24] Jean Eistenstaedt “Einstein et la relativité générale,” CNRS ÉDITION, Paris, (2007).
- [25] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer, and C. Allison “A New Independent Limit on the Cosmological Constant/Dark Energy from the Relativistic Bending of Light by Galaxies and Clusters of Galaxies” arXiv :0710.4726v3 [astro-ph]. Jul (2008) .

- [26] M. Sereno “On the influence of the cosmological constant on gravitational lensing in small systems,” 0711.1802v2 [astro-ph]. Jan (2008) .
- [27] M. Ishak “Light Deflection, Lensing, and Time Delays from Gravitational Potentials and Fermat’s Principle in the Presence of a Cosmological Constant,” arXiv :0801.3514v2 [astro-ph].Dec (2008) .

## **General Relativity and Cosmology**

### **Abstract**

This memory is devoted to the effect of the cosmological constant on the deflexion of light emitted by a source S, a quasar, by a gravitational lens L, a cluster of galaxies.

We have considered two models: the Kottler and Einstein-Straus models.

The study performed in the framework of the Kottler solution, which is the metric appropriate in the static, spherical case in presence of a cosmological constant  $\Lambda$ , makes use of the following assumptions: all the masses of the universe, including the masses of the source and of the local group, are neglected and the source and observer are supposed to be at rest with respect to the lens L.

The study performed in the framework of Einstein-Straus solution that matches the Kottler solution at the inside of the Schüking sphere to the Friedmann solution ( $\Lambda$ CDM) at the outside, allows us to relax the above mentioned hypotheses except that of sphericity. First, the observer is allowed to move with respect to the cluster. Second, the masses of the other clusters are included in the form of homogenous, isotropic dust, the observer being taken commoving with respect to the dust.

Without any doubt, the cosmological constant plays a role in the deflexion of light. However the effect of the cosmological constant in the framework of Einstein-Straus solution is reduced comparatively to the Kottler case.

### **Key words:**

General Relativity, Cosmology, Deflection of Light, Gravitational Lens, Schwarzschild Metric, Kottler Metric, Cosmological Principle, Friedmann Metric, Scale Factor, ( $\Lambda$ CDM) Model, Friedmann Metric, Einstein-Straus Metric.

## النسبية العامة والكوسمولوجيا

مذكرة الماجستير هذه مخصصة لمفعول الثابت الكوسمولوجي على انحراف الضوء الصادر من منبع S، كوازار، من طرف عدسة جاذبية L، مجموعة مجرات.

اعتبرنا في هذه الدراسة نموذجان: نموذج Kottler ونموذج Einstein-Straus. الدراسة التي أجريت في إطار حل Kottler، المترية الملائمة للحالة الساكنة، ذات تناظر كروي، بحضور الثابت الكوسمولوجي  $\Lambda$ ، أن كل كتل الكون، بالخصوص كتلتي المنبع والمجموعة المحلية مهمة بالمقارنة مع كتلة العدسة. نفترض كذلك أن الملاحظ والمنبع في حالة سكون بالنسبة للعدسة.

الدراسة أجريت في إطار حل Einstein-Straus، الذي يربط مترية Kottler، داخل كرة Schücking، بمترية Friedmann، نموذج  $(\Lambda\text{CDM})$ ، خارج الكرة، تسمح لنا بالتحرك من الفرضيات المشار إليها آنفاً، ماعدا فرضية التناظر الكروي. لم نعد نفترض أن الملاحظ والمنبع ساكنان بالنسبة للعدسة L. من جهة أخرى، نأخذ بعين الاعتبار مفعول المجرات الأخرى على شكل غبار موحد الخواص ومتجانس، مع الملاحظ في حركة مع الغبار. يلعب الثابت الكوسمولوجي بدون شك دوراً في انحراف الضوء، لكن مفعول الثابت الكوسمولوجي في إطار نموذج Einstein-Straus أقل مما هو عليه في نموذج Kottler.

### الكلمات المفتاحية:

النسبية العامة، الكوسمولوجيا، انحراف الضوء، مفعول العدسة الجاذبية، مترية Schwarzschild، مترية Kottler، المبدأ الكوسمولوجي، مترية Friedmann، معامل السلم، نموذج  $\Lambda\text{CDM}$ ، مترية Einstein-Straus.

## Relativité Générale et Cosmologie

### Résumé

Ce mémoire est consacré à l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière émise par une source  $S$ , un quasar, par une lentille  $L$ , consistant en un amas de galaxies. L'étude est faite dans le cadre de deux modèles: le modèle de Kottler et le modèle d'Einstein-Straus.

L'étude dans le cadre du modèle de Kottler, métrique appropriée au cas statique, à symétrie sphérique, en présence d'une constante cosmologique  $\Lambda$  suppose que toutes les masses de l'univers, en particulier les masses de la source et du groupe local, sont négligeables vis-à-vis de la masse de la lentille.

On fait également l'hypothèse que l'observateur et la source sont au repos par rapport à la lentille.

L'étude dans le cadre de la solution de d'Einstein-Straus, où la métrique de Kottler à l'intérieur de la sphère de Schücking est raccordée à la métrique de Friedmann (modèle  $\Lambda$ CDM) à l'extérieur, nous permet de nous affranchir de toutes les hypothèses ci-dessus mentionnées, à part l'hypothèse de sphéricité. On ne suppose plus que l'observateur et la source sont au repos par rapport à la lentille  $L$ . D'autre part, on tient compte de l'effet des autres galaxies sous la forme d'une poussière isotrope et homogène, l'observateur étant pris comobile par rapport la poussière.

La constante cosmologique joue indiscutablement un rôle dans la déflexion de lumière. Cependant, l'effet de la constante cosmologique dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus, est atténué moindre comparativement au modèle de Kottler.

### Mots clés :

Relativité générale, Cosmologie, Déflexion de la lumière, Lentille gravitationnelle, métrique de Schwarzschild, métrique de Kottler, principe cosmologique, métrique de Friedmann, facteur d'échelle, modèle  $\Lambda$ CDM, métrique d'Einstein-Straus.