

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE

MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE ENERGETIQUE

OPTION

PHOTOTHERMIQUE

Thème :

**Corrélation Du Transfert De Chaleur Par Convection Mixte
Dans Un Conduit Cylindrique**

Par

MOKRANE Noureddine

Soutenu le : 21 /10 /2010

Devant le jury :

Président	Mr L. BAH	Prof.	Univ. Mentouri Cne
Rapporteur	Mr T. BOUFENDI	M. C. A	Univ. Mentouri Cne
Examineurs	Mr A. BELHAMRI	Prof.	Univ. Mentouri Cne
	Mr K. TALBI	M. C. A	Univ. Mentouri Cne

Je dédie ce travail

A mes parents

A mes frères et sœurs

Témoignage de ma profonde affection.

Remerciement

Je désire tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux à Monsieur BOUFENDI Toufik, Maître de Conférence à l'université Mentouri Constantine pour son aide appréciable, pour ses conseils précieux, pour ses idées originales qui ont enrichi cette thèse, pour sa disponibilité permanente et pour m'a fait profiter de son expérience dans le domaine de la convection mixte.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur BAHIL. Professeur à l'université Mentouri Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen malgré ces nombreuses occupations.

Monsieur BELHAMRI A., Professeur à l'université Mentouri Constantine, et Monsieur TALBI K., Maître de Conférence à l'université Mentouri Constantine, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

Sommaire

REMERCIEMENT

SOMMAIRE

NOMENCLATURE

CHAPITRE 1 : Etude Bibliographique

1.1 Introduction	1
1.2 Mécanisme de la convection mixte	2
1.3 Etude bibliographique	3

CHAPITRE 2 : Modélisation Mathématique

2.1 Introduction	15
2.2 Géométrie du modèle.....	15
2.3 Equations de conservation	17
2.4 Les conditions aux limites	19
2.5 Le nombre de Nusselt	22

CHAPITRE 3 : Résolution Numérique

3.1 Introduction	24
3.2 Le maillage	25
3.3 Discrétisation des équations du modèle.....	27
3.4 Définition.....	27
3.4.1 La discrétisation temporelle du second ordre	27
3.4.2 La discrétisation spatiale du second ordre	28
3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale.....	29
3.6 iscrétisation de l'équation de la quantité de mouvement azimutale	39
3.7 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement axiale	47
3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie	53
3.9 Discrétisation de l'équation de la continuité	58
3.10 Discrétisation des conditions aux limites	58
3.10.1 A l'entrée du tube	59

3.10.2 A la sortie du tube.....	59
3.10.3 A la paroi	61
3.10.4 Sur l'axe du conduit.....	61
3.11 Equation de la pression et de correction de pression.....	64
3.12 Algorithme de calcul SIMPLER.....	67
3.13 Technique numérique de résolution d'un système d'équation de discrétisation	69
3.14 Validation du code de calcul	69
3.15 Détails sur le calcul numérique	70

CHAPITRE 4 : Résultats Et Discussion

4.1 Introduction.	72
4.2 Le cas de référence : la convection forcée ($Gr^* = 0$)	73
4.2.1 Le champ d'écoulement.....	73
4.2.2 Le champ thermique	74
4.2.3 Le nombre de Nusselt	79
4.3 Convection mixte pour $Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$	81
4.3.1 L'écoulement secondaire.....	81
4.3.2 Champ dynamique axial	84
4.3.3 Champ thermique	87
4.3.4 Le nombre de Nusselt	93
4.4 La corrélation empirique $Nu = f(Gr / Re^2)$	95

CONCLUSION GENERALE..... 99

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

ABSTRACT

RESUME EN ARABE

RESUME EN FRANÇAIS

Nomenclature

NOMENCLATURE

A	coefficient de l'équation de discrétisation
b^*	terme du source adimensionnelle
D	diamètre du conduit [m]
g	accélération de la pesanteur [m/s ²]
G	source de chaleur volumique [W/m ³]
Gr	nombre de Grashof défini par $(g\beta GD^5/k_s V^2)$
h_∞	coefficient de transfert convectif (conduit –air ambiant) [W/m ² K]
h_{ra}	coefficient de transfert radiatif (conduit- air ambiant) [W/m ² K]
k	conductivité thermique du fluide [W/mK]
k^*	conductivité thermique du fluide adimensionnelle (k/k_0)
k_s^*	conductivité thermique du solide adimensionnelle (k_s/k_0)
L	longueur du conduit [m]
V	volume du conduit [m ³]
$Nu(\theta, z)$	nombre de Nusselt local ($h(\theta, z)/k_0$)
$Nu(z^*)$	nombre de Nusselt local axial ($h(z)/k_0$)
P	pression [Pa]
P^*	pression adimensionnelle $((p - p_0)/(\rho_0 V_0^2))$
Pr	nombre de Prandtl (ν/α)
q	densité de flux de chaleur [W/m ²]
r	coordonnée radiale [m]
r^*	coordonnée radiale adimensionnelle (r/D_i)
R	rayon de conduit [m]
Ra	nombre de Rayleigh $[g\beta(T(R_0, \theta, z) - T_\infty)/\alpha_{air} \nu_{air}]$

Re	nombre de Reynolds
S	terme de source
t	temps [s]
t*	temps adimensionnel ($V_0 t / D_i$)
T	température [$^{\circ}\text{K}$]
T*	température adimensionnel $(T - T_0) / (GD_i^2 / k_s)$
T _b	température moyenne de mélange [$^{\circ}\text{K}$]
T _b *	température moyenne adimensionnelle $(T_b - T_0) / (GD_i^2 / k_s)$
V ₀	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit [m/s]
U	composante radiale de la vitesse [m/s]
U*	composante radiale de la vitesse adimensionnelle U / V_0
W	composante azimutale de la vitesse [m/s]
W*	composante azimutale de la vitesse adimensionnelle W / V_0
V	composante axiale de la vitesse [m/s]
V*	composante axiale de la vitesse adimensionnelle V / V_0
Z	coordonnée axiale [m]
Z*	coordonnée axiale adimensionnelle (z / D_i)

Symboles grecs

α	diffusivité thermique [m^2/s]
β	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide (K^{-1})
Γ	coefficient de diffusion
ν	viscosité cinématique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
ρ	masse volumique du fluide $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
τ	tenseur des contraintes visqueuses [N/m]

τ^*	tenseur des contraintes visqueuses adimensionnelle
μ	viscosité dynamique [kg.m/s]
μ^*	viscosité dynamique adimensionnelle (μ/μ_0)
θ	coordonnée angulaire [rad]
φ	variable dépendante généralisée

Indices

C	relatif à la position de la face d'un volume fini typique
d	désigne la paroi du conduit
i,0	fait référence aux surfaces interne et externe du conduit respectivement
m	moyen
P	fait référence au nœud P d'un volume fini typique
n, s, e, w, t, b	fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E, W, T, B	fait référence aux nœud entourant un volume fini typique respectivement Nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
nb	désigne les nœuds voisins à P
r, θ , z	référence aux directions radiale, tangentielle et axiale respectivement
∞	fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	entrée du conduit

Exposants

*	variable adimensionnelle
t	désigne l'instant t
t + Δt	désigne l'instant t + Δt
t - Δt	désigne l'instant t - Δt

Chapitre 1

Etude Bibliographique

Chapitre 1

Etude Bibliographique

1.1 Introduction

Ce travail s'inscrit dans la continuité d'une étude menée par Boufendi et al. [1] au laboratoire de physique énergétique de l'université Mentouri Constantine. Cette étude concernait une simulation numérique tridimensionnelle et transitoire d'une convection mixte au sein d'un fluide newtonien, en écoulement laminaire, dans un conduit cylindrique dont l'épaisseur de sa paroi est le siège d'un chauffage uniforme produit par effet Joule. Dans cette étude de convection mixte, le fluide est caractérisé par des propriétés physiques variables, une épaisseur solide finie et des pertes thermiques de nature radiatives et convectives vers le milieu ambiant. Les codes développés, basés sur une discrétisation spatiotemporelle du premier ordre, ont parfaitement été validés [1] par comparaison avec les résultats analytiques, numériques et expérimentaux. Leurs résultats montrent que les champs thermiques et dynamiques sont tridimensionnels, que la non-uniformité angulaire du flux thermiques à l'interface paroi-fluide est significative et que le nombre de Nusselt axial dans le tube est augmenté par la convection naturelle.

Ainsi, à l'issue de ce travail des perspectives avaient été ouvertes dont l'une des plus importantes porte sur l'influence des paramètres de contrôle sur la convection mixte. C'est de là, qu'a été définie la problématique de ce sujet : elle concerne à explorer l'influence du nombre de Reynolds sur la convection mixte pour différents nombres de

Grashof. Des campagnes de résultats seront présentées pour illustrer les champs dynamiques et thermiques ainsi que les nombres de Nusselt qui caractérisent le transfert thermique du système paroi-fluide. La particularité de ce travail réside dans le mode de transfert qui combine une convection mixte dans le fluide ainsi qu'une conduction thermique dans le solide, dit transfert conjugué. Il sera ponctué par des corrélations empiriques du nombre de Nusselt en fonction des nombres de Reynolds et du Grashof.

1.2 Mécanisme de la convection mixte

D'une manière générale, on appelle convection les mouvements de circulation présents au sein d'un fluide. Lorsque ces mouvements sont occasionnés par des forces internes aux fluides on parle de convection naturelle. Ces forces sont les plus souvent les forces de la poussée d'Archimède associée à la gravité. Les sources dominantes des mouvements convectifs sont alors issues de la thermo dépendance de certaines propriétés physique du fluide (la masse volumique, la tension superficielle, la concentration des espèces...).

Souvent, la convection naturelle coexiste avec la convection forcée. Dans le cas de la convection forcée, le mouvement du fluide est induit par une source externe : une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide par exemple. Quand les mouvements ont pour origine à la fois des sources internes et externes, on parle de convection mixte. Nous pouvons citer comme exemples les écoulements lents dans les canalisations (comme dans les radiateurs à eau), les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumées), les écoulements atmosphériques et les courants marins. Un autre aspect apparaît, c'est-à-dire les deux mécanismes peuvent aller dans le même sens comme ils peuvent s'opposer selon la direction relative du mouvement forcée par rapport au mouvement gravitaire. Le transfert peut être fortement influencé par cet aspect. Ainsi, si l'effet de la pesanteur s'oppose au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique est diminué et dans ce cas la convection mixte est dite contrariée. Pour le cas contraire, on parlerait de convection mixte aidée.

Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur et dans ce cas les échanges de chaleur sont améliorés. La convection mixte dans un canal horizontal correspond à la superposition d'un écoulement forcé (écoulement principale associé à une vitesse axiale du fluide) et à la convection naturelle transverse (appelée écoulement secondaire associé à des composantes transverse de la vitesse dans

une section droite de la conduite). Ainsi, dans l'étude de cette convection mixte, des termes moteurs vont être apparus tel que le terme $g\beta\Delta T$ qui traduit la mise en mouvement du fluide sous l'action de la gravité.

Dans notre étude, l'écoulement considéré à l'entrée de la conduite sera de type laminaire et hydrodynamiquement développé. Pour cela, nous rappelons que dans un conduit cylindrique, le régime laminaire est géré par les forces de cisaillement entre filets fluides induisant, selon une section droite, un profil de vitesse de forme parabolique. L'écoulement est caractérisé ainsi par le nombre adimensionnel de Reynolds (Re). Ce profil de vitesse peut être modifié dès que des gradients de température sont imposés selon une section. La convection à l'intérieur des conduites intervient dans plusieurs applications pratiques telles que les capteurs solaires, les échangeurs de chaleurs, le refroidissement des composants électroniques et des procédés chimiques et nucléaires.

1.3 Etude bibliographique

La convection mixte en milieu fluide dans les conduites cylindriques a fait l'objet de très nombreuses investigations théoriques, numériques et expérimentales. Une large part de ces études sur la convection mixte s'intéressent aux problèmes liés aux diverses conditions aux limites en particulier celles relatives à une température pariétale imposée ou à un flux de chaleur pariétal imposé ainsi qu'aux problèmes liés à l'orientation de la conduite, horizontale, verticale ou inclinée. Parmi cette synthèse nous nous sommes concentrés sur la géométrie cylindrique horizontale.

Boufendi [1] a fait une étude numérique de la convection mixte tridimensionnelle sur un conduit cylindrique horizontal chauffé uniformément. Il a considéré deux modèles : un modèle de base définie par un conduit à épaisseur nulle et des propriétés du fluide constantes excepté la densité, et un modèle conjugué où on tient compte de l'épaisseur de conduit et la variation des propriétés du fluide avec la température. Les résultats numériques ont été obtenus avec un code à 3-D basé sur le schéma numérique d'ordre un et l'algorithme de SIMPLER.

Mori et al. [2] ont fait une étude expérimentale sur le transfert de chaleur pour un écoulement d'air entièrement développé à l'intérieur d'un tube circulaire et horizontal chauffé uniformément pour les deux régimes laminaire et turbulent et pour les grandes

valeurs de produit $Re Ra$. Ils ont trouvé que pour le cas d'un flux de chaleur constant à la paroi, et lorsque le produit $Re Ra$ est supérieur à 10^4 l'écoulement secondaire est plus fort et il forme une paire de tourbillons avec un axe horizontal et symétrique à un plan vertical. Et quand la valeur du produit $Re Ra$ est grande ($Re Ra \geq 10^5$) la distribution de vitesse et la distribution de température sont essentiellement différentes de celles connus auparavant ; comme par exemple le profil de vitesse de l'écoulement de poiseuille. Ils ont montré aussi que l'effet de flottabilité sur le nombre de Nusselt local apparaît à partir de $Re Ra = 10^3$, et le nombre de Nusselt augmente considérablement en raison de l'écoulement secondaire ; il devient deux fois plus grand que le nombre de Nusselt sans l'écoulement secondaire quand $Re Ra = 4 \cdot 10^5$.

Ils ont obtenu une corrélation qui donne le nombre de Nusselt en fonction de $Re Ra$:

$$Nu = 0,61(Re Ra)^{1/5} \left[1 + \frac{1,8}{(Re Ra)^{1/5}} \right]$$

Pour le cas de l'écoulement turbulent ils ont fait des expériences similaires et ils ont trouvé que l'effet de flottabilité sur la distribution de vitesse de température était très faible et sans effet sur le nombre de Nusselt ; ils ont aussi étudié expérimentalement l'effet de flottabilité sur le nombre de Reynolds critique qui diminue avec l'augmentation de nombre de Reynolds tandis qu'avec un haut niveau de la turbulence le Reynolds critique augmente avec le nombre de Rayleigh.

Kupper et al. [3] ont présenté des résultats expérimentaux de l'effet d'une convection libre sur une convection forcée ; le cas étudié consiste en un tube circulaire horizontal avec un flux de chaleur uniforme sur la paroi, l'eau est le milieu utilisé. Les nombres de Reynolds s'échelonnent de 100 à 2000, les nombres de Grashof de 300 à 30000 et ceux de Prandtl de 4 à 9; ils concluent que le profil de température a besoin d'une certaine distance axiale pour devenir pleinement développé. Le profil de température du fluide et la température moyenne de paroi ne sont pas parallèles même dans la région de l'écoulement pleinement développé, cela est dû à des changements, dans les propriétés de fluide causé par l'évolution de la température de fluide. Au début de la section de chauffage, le taux de transfert de chaleur est élevé, ensuite le nombre de Nusselt diminue rapidement, jusqu'à un certain point, tel que ce point coïncide avec le point où le profil de température de fluide devienne pleinement développé. A partir de ce moment là, le nombre de Nusselt augmente

avec un taux constant, et ils ont obtenu une corrélation qui donne le nombre de Nusselt en fonction de Pr et $Re Ra$; pour les petits nombres de Grashof :

$$Nu = \frac{48}{11} + 0,048 Pr^{1/3} (Re Ra)^{1/5}$$

Cette expression corrèle de l'ordre de 53% des données dans la région entièrement développée.

Siegwarth et al. [4] ont fait une analyse sur l'effet de l'écoulement secondaire sur le champ de température et sur l'écoulement primaire (champ de vitesse principal) à la sortie d'un long tube chauffé électriquement ayant des parois épaisses de conductivité élevées, dans le cas d'un nombre de Grashof et Prandtl élevés ($Pr = 70.7$ et $(Gr Pr)^{1/4} = 51.3$), pour lesquels il existe près de la paroi une couche limite thermique mince ; ils ont trouvé à partir d'un raisonnement dimensionnel que l'écoulement secondaire contrôle le flux de chaleur. Et pour le nombre de Prandtl $Pr = 1$, l'écoulement primaire montre aussi un comportement de couche limites tandis que pour $Pr \rightarrow \infty$, l'écoulement primaire est indépendant de l'écoulement secondaire. Ils ont trouvé pour une viscosité constante et un nombre de Prandtl infini, que le nombre de Nusselt est directement proportionnel à la racine quatrième du produit du nombre de Grashof par le nombre de Prandtl

$Nu = C_1 (Gr.Pr)^{1/4}$ Dans leur article les auteurs précisent que le coefficient C_1 est calculé par les méthodes intégrales et sa valeur est : $C_1 = 0,471$. Un bon accord est obtenu entre les calculs basés sur le modèle proposé et l'expérience.

Hwang et Lai [5] ont présenté des résultats d'une étude numérique sur la convection mixte à l'intérieur d'un conduit cylindrique, horizontal isotherme pour de grands nombres de Rayleigh ($Ra > 10^5$), avec un écoulement laminaire, incompressible et sans dissipation visqueuse ; les propriétés thermophysiques sont constantes et l'approximation de Boussinesque est utilisée. Le nombre de Grashof est grand mais par contre les nombres de Prandtl et de Péclet sont faibles ; les résultats obtenus ont permis d'établir une corrélation donnant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, avec une erreur de l'ordre de 1,4% :

$$Nu = 0,626.Ra^{0,269} \quad \text{Pour } Ra \geq 10^5$$

Shome et Jensen [6] ont fait une étude numérique sur la convection mixte dans un tube cylindrique horizontal et isotherme, pour deux cas : le refroidissement ou le chauffage du fluide ; La viscosité du fluide est considérée une fonction de la température selon une loi, exprimée comme suit : $\nu(T) = \text{Ln} \left[\text{Ln} \left(\frac{\nu}{10^{-6}} - c \right) \right] - a \text{Ln} T + b$ Les constantes a, b et c sont calculées pour l'eau, l'éthylène glycol et le paratherm-NF. Les résultats obtenus ont permis d'établir des corrélations pour le nombre de Nusselt pour deux cas :

1^{er} cas : La convection forcée est dominante.

$$\frac{Num}{Nu_{TD,CP}} = \begin{cases} (v^+)^{0,18} & \text{Thermiquement développé} \\ (v^+)^{0,22} \left[1 + 0,067(Z^+ \text{Pr})^{-0,62} \right]^{0,27} & \text{Simultanément développé} \end{cases}$$

Où :

$Nu_{TD,CP}$ est le nombre de Nusselt moyen dans le cas où les propriétés sont constantes et la convection forcée est développée. La coordonnée axiale étant Z^+

2^{ème} cas : La convection libre est dominante

$$Num = 7,93 Ra^{0,21} f^{-0,05} \text{Ln}(1 + 0,13\Delta) / \Delta$$

Où :

$$f = \left(1 + \hat{\nu} \right) / \nu^+ \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{\delta_{t,FC}}{\delta_{t,NC}} = Ra^{1/4} f^{1/4} (Z^+)^{1/2}$$

Les résultats obtenus sont validés par des résultats expérimentaux, et ils ont donné une erreur de 10,6% et 16,6% pour le 1^{er} cas et le 2^{ème} cas respectivement.

Orfi et al. [7] ont présenté une étude numérique sur le comportement d'un écoulement permanent et laminaire à l'intérieur d'un tuyau incliné par rapport à l'horizontal ($0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). En régime de convection mixte, la forme des équations de conservation utilisée est parabolique et la condition aux limites est un flux de chaleur constant et uniforme sur la circonférence et sur la longueur de la conduite. Le fluide est newtonien et incompressible, ses propriétés sont constantes sauf pour les termes générateur de la convection libre où une variation linéaire avec la température est adoptée. La dissipation visqueuse due à la friction dans le fluide ainsi que le rayonnement sont négligeables ; le nombre de Reynolds égal 500, et le nombre de Grashof prend les valeurs 10^4 , 10^5 et 10^6 . Ils ont utilisé une méthode des volumes finis pour résoudre sous forme adimensionnelle les équations parabolique de la convection mixte. Ils ont trouvé pour l'eau que pour les différentes valeurs du nombre de Grashof et de l'inclinaison du tuyau, qu'il y

a une amélioration du transfert de chaleur moyen et une augmentation de la contrainte de cisaillement pariétal par rapport à un écoulement forcé pur.

Ouzane et al. [8] ont étudié l'effet de la conduction pariétale et la répartition du flux thermique sur quatre configurations différentes : un flux thermique uniforme sur toute la circonférence ou seulement sur la moitié supérieure de celle-ci et un flux thermique appliqué sur l'interface ou sur sa moitié supérieure, l'autre moitié est isolé. Leurs objectif est de démontrer l'existence des limites et la possibilité de négliger la conduction thermique dans la paroi de la conduite notamment quand une condition de flux non uniforme est appliquée. Ils ont utilisé un maillage non uniforme dont la direction radiale et axiale plus serré dans les régions où les variations de température et de vitesses sont relativement importantes à l'entrée de tube et à l'interface fluide-solide. Ils aboutissent à une conclusion, est que la modélisation des écoulements dans une conduite chauffée doit être réalisé avec beaucoup de soin en ce qui concerne la condition du flux thermique. Bien qu'il soit facile de négliger la conduction dans la paroi en appliquant le flux thermique directement à l'interface fluide-solide, ceci peut conduire à des résultats erronés notamment quand le nombre de Grashof est élevé. Ces erreurs se produisent tant au niveau des paramètres moyen (Nu) qu'à celui des valeurs locales (distribution circumférentielle de la température à l'interface fluide-solide, profil de vitesse axiale et intensité de l'écoulement secondaire).

Ouzzane et al. [9] ont aussi publié une autre étude qui se rapporte au transfert thermique dans les écoulements en développement à l'intérieur des conduits avec et sans ailette. L'auteur a étudié l'effet de la conduction pariétale sur les évolutions des champs thermique et hydrodynamique. Il ressort de cette étude, que dans le cas où les matériaux présente une bonne conductivité thermique, la température de l'interface solide-fluide à tendance à s'uniformiser. Cependant un écart de température relativement important a été observé entre les deux positions extrêmes (le haut et le bas), dans le cas d'un matériau à faible conductivité thermique. Dans le cas d'un conduit horizontal ou incliné, pour l'amélioration de l'échange thermique, l'auteur recommande de placer plus d'ailettes sur la partie supérieure de la section dans le cas de refroidissement et sur la partie inférieure dans le cas du chauffage.

Hwang et al. [10] ont développé une technique de CAPA « computer-Aided Parametric Analysis » pour obtenir des corrélations simples et exacts à l'aide de quelques données numériques ou expérimentales d'un problème de convection mixte, en régime laminaire dans une conduite cylindrique horizontal et chauffé uniformément, pour des nombres de Prandtl allant de 0 jusqu'à 500 et un produit $Re Ra = 0 - 10^5$; les résultats obtenus sont comme suit :

$$\frac{Nu}{(Nu)_0} = 1 + A_6 Pr \psi$$

Où ψ est la fonction de courant adimensionnelle et le coefficient A_6 représente des constantes données dans un tableau pour chaque nombre de Prandtl.

L'écart maximal entre cette corrélation et les données numériques n'est que de quelque % pour un nombre de Prandtl qui varie de 0 à 500 et $Re Ra = 0 - 10^5$.

Abid et al. [11] ont fait une étude expérimentale sur la convection mixte dans un écoulement d'eau dans une conduite cylindrique horizontal uniformément chauffé. Ils ont trouvé que pour les faibles nombres de Reynolds et de Rayleigh, le régime est stable, mais si le nombre de Reynolds ou le nombre de Rayleigh augmente le régime devient instable ; Ils ont conclu que l'instabilité thermique induit dans le cas d'un phénomène de convection mixte est le résultat d'un changement dans le mode de transfert de chaleur, dans la partie inférieure de la section transversale à partir d'une convection à un mode de diffusion. Ce changement se produit en raison d'une concurrence entre les composantes verticales et axiales de la vitesse à l'advection de la chaleur fournie par le mur.

Boufendi et al. [12] ont fait une simulation numérique, tridimensionnelle d'un transfert de chaleur en convection mixte laminaire conjuguée à une conduction dans une conduite horizontale dont la paroi est de faible épaisseur. Au sein de cette paroi se produit un chauffage volumique constant et uniforme. Les propriétés physiques du fluide sont thermodépendantes et les pertes thermiques entre la surface extérieure du conduit et le milieu ambiant sont considérés. Les équations modélisantes sont résolues par la méthode des volumes finis discrétisées au premier ordre. Les résultats montrent que les champs, thermique et dynamique, sont tridimensionnels, que la non-uniformité du flux thermique à l'interface paroi-fluide est significative et que le nombre de Nusselt moyen dans le tube augmente considérablement à cause de l'effet de la convection naturelle qui égal à 24,80 à

la sortie de la conduite. Les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec ceux d'une étude expérimentale produite avec les mêmes paramètres géométriques, dynamiques et thermiques.

Hussein et Yasin [13] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection mixte pour un écoulement d'air en régime laminaire dans une conduite cylindrique inclinée, hydrodynamiquement développé et en développement. Ils ont utilisé un cylindre en Aluminium de section de 30 mm de diamètre et 900 mm de longueur qui est soumis à un flux de chaleur constante, le nombre de Reynolds allant de 400 à 1600, le flux de chaleur varie de $70W/m^2$ à $400W/m^2$, les angles d'inclinaison sont : 30^0 , 45^0 et 60^0 . Ils ont présenté la distribution de température le long de surface de conduite, la distribution de Nuesselt local et moyenne en fonction de la distance axiale Z^+ , ou $Z^+ = x/D.Re.Pr$. Ils ont trouvé que la température de surface augmente si le flux de chaleur augmente pour le même nombre de Reynolds, et la température à la surface pour les faibles nombres de Reynolds est supérieure à celui à nombre de Reynolds élevé pour le même flux de chaleur, à cause de la domination de la convection libre. La température de surface de la conduite est réduite lorsque l'orientation passe de cylindre à cylindre horizontal lorsque la convection libre est dominante, mais la température de surface augmente quand l'orientation passe de cylindre incliné à cylindre horizontal lorsque la convection forcé et dominante. Pour le même flux de chaleur et des nombres de Reynolds élevés le Nu_x se déplace vers la gauche de Nu_x prévu pour TPFC (pure convection forcé théorique), parce que la convection forcée est dominante, mais pour le même flux de chaleur et le faible nombre de Reynolds, Nu_x se déplace vers la droite de Nu_x prévu pour TPFC, parce que la convection naturelle est dominante. Pour le même flux de chaleur et de haute nombre de Reynolds, la valeur de Nu_x augmente à mesure que le cylindre se déplace d'un angle d'inclinaison vers un cylindre horizontal ; la valeur minimal de Nu_x se produit pour $\theta = 60^0$, et la valeur la plus élevée se produit pour le cas ou $\theta = 60^0$ (horizontal) lorsque la convection libre est le facteur dominant sur le processus de transfert de chaleur. Ils ont aussi obtenu des corrélations qui donnent le nombre de \overline{Nu} en fonction de \overline{Ra} et \overline{Re} pour les trois inclinaisons ($\theta = 30^0$, 45^0 et 60^0) comme suit:

$$\overline{Nu} = 3,25(\overline{Ra}/\overline{Re})^{0,187} \text{ Pour } \theta = 30^0$$

$$\overline{Nu} = 3,37 \left(\overline{Ra} / \overline{Re} \right)^{0,152} \text{ Pour } \theta = 45^\circ$$

$$\overline{Nu} = 3,55 \left(\overline{Ra} / \overline{Re} \right)^{0,134} \text{ Pour } \theta = 60^\circ$$

La précision est de l'ordre de $\pm 7\%$

Hussein et Selman [14] ont effectué un travail expérimental sur la convection mixte pour étudier le transfert de chaleur local et moyen pour un écoulement d'air, laminaire et hydrodynamiquement développé dans un cylindre horizontal. Le cylindre soumis à un flux de chaleur surfacique variant de $60W/m^2$ à $400W/m^2$ et un nombre de Reynolds allant de 400 à 1600. La distribution de la température de surface le long du cylindre et la variation du nombre de Nusselt local et moyen avec la distance axial Z^+ ont été présentée. Ils ont observé que pour toutes les sections d'entrée, une augmentation du nombre de Nusselt a été constatée, lorsque le flux de chaleur augmente. Ils ont conclu que la convection libre diminue le transfert de chaleur à cause du faible nombre de Reynolds ($Re = 400$) et augmente le transfert de chaleur à cause du nombre de Reynolds ($Re = 1600$). Le nombre de Richardson obtenu se situe entre 0,1171 et 7,125. Les valeurs de Nusselt sont corrélées dans une équation empirique en fonction de nombre du rapport des deux nombres de Rayleigh et du nombre de Reynolds, comme suit :

$$\overline{Nu} = 3,18935 \left(\overline{Ra} / \overline{Re} \right)^{0,26352}$$

Hussein et Yassin [15] ils ont effectué une étude expérimentale sur la convection mixte dans un écoulement d'air laminaire et entièrement développé hydrodynamiquement et en développement thermique, , il ont utilisé un tube circulaire horizontal d'un diamètre intérieure de 30mm et un longueur de 900mm (L/D) = 30, la condition aux limite c'est un flux de chaleur constante le long da la conduit, le nombre de Reynolds varie de 400 à 1600, et le flux de chaleur varie de $60W/m^2$ à $400W/m^2$; Ils ont conclu que la température de surface le long du tube serait plus élevé pour le cas ou les valeurs de Reynolds sont faible que pour le cas ou les valeurs de Reynolds sont grand, par conséquent, la température de surface augmente à mesure que le longueur de section augmente du fait de la résistance de l'écoulement et le débit massique. Les valeurs du nombre de Nusselt local se déplacent vers la gauche de la Nu_x prévu pour (TPFC) pour le même flux de chaleur et les valeurs élevé de nombre de Re, en raison de la domination de la convection forcée ; par contre,

pour le même flux de chaleur et le faible nombre de Re , les valeurs de Nu_x se déplacent vers la droite de la Nu_x prévu pour (TPFC) à cause de la domination de la convection naturelle ; Ils ont obtenu une corrélation qui donne le nombre de Nu moyenne en fonction de Gr , Pr , Re et (L/D) comme suite :

$$\overline{Nu} = 3,1894 \left(\overline{Gr} \cdot \overline{Pr} / \overline{Re} \cdot L/D \right)^{0,264}$$

La corrélation a montré un accord satisfaisant avec les résultats précédente et la convection forcée laminaire.

Kholai et al. [16] ont étudié numériquement la convection mixte dans un tube circulaire incliné par rapport à l'horizontale et chauffé à l'aide d'un flux de chaleur constant et uniforme sur toute sa surface circonférentielle. L'écoulement à l'intérieur du tube est supposé laminaire pour un fluide newtonien et incompressible (l'eau). Les équations différentielles elliptiques régissant sont résolues à l'aide de la méthode aux volumes finis dans un maillage de $30 \times 70 \times 80$. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds égale à 500 et différentes combinaisons du nombre de Grashof (10^4 , 10^5 et 10^6) et de l'angle d'inclinaison ($0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Ils ont trouvé que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation du nombre de Grashof et la diminution de l'angle d'inclinaison.

Hussein [17] a fait une étude expérimentale de l'effet de différentes géométries d'entrée sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un écoulement d'air laminaire à l'intérieur d'une conduite circulaire, horizontal avec un flux de chaleur constant sur la paroi. Il a effectué 130 essais pour trois géométries d'entrée : calming section entrance, Bell mouth entrance and sharp edged entrance. La gamme du nombre de Grashof varie de $3,12 \cdot 10^5$ à $1,72 \cdot 10^6$, et le nombre de Reynolds est varié de 400 à 1600. L'auteur a constaté que les valeurs de la température de surface de la conduite suivant la distance axiale ont été plus élevées pour les faibles nombre de Reynolds que pour les nombres de Reynolds élevés, en raison de la domination de la convection libre sur le processus de transfert de chaleur. Il a observé que, pour le même nombre de Grashof, la température de surface pour le cas « calming section entrance » avec $L/D = 80$, a été plus élevé que d'autre géométries d'entrée, en raison de la résistance à l'écoulement, et la baisse du débit massique. L'auteur

conclu que les valeurs de Nu_x seraient plus élevées pour « Bell mouth entrance » que pour d'autres géométries d'entrée en raison de différences dans la température moyenne et de la densité de l'air. Une corrélation empirique a été développée qui donne le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Grashof, du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds, avec une précision globale de l'ordre de 10% :

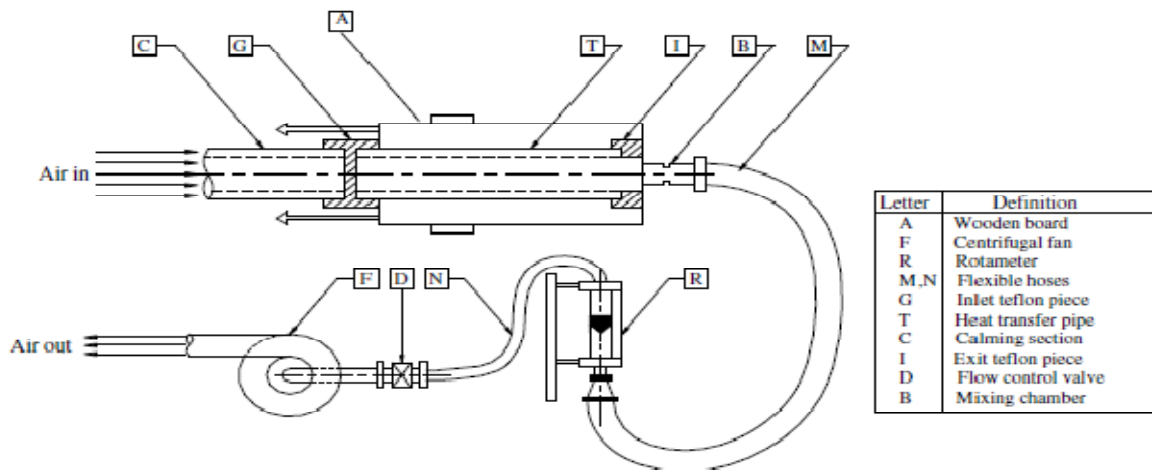
$$\overline{Nu} = 3.2284(\overline{Gr Pr} / \overline{Re})^{0.368}$$


Fig. 1. Schematic diagram of experimental setup.

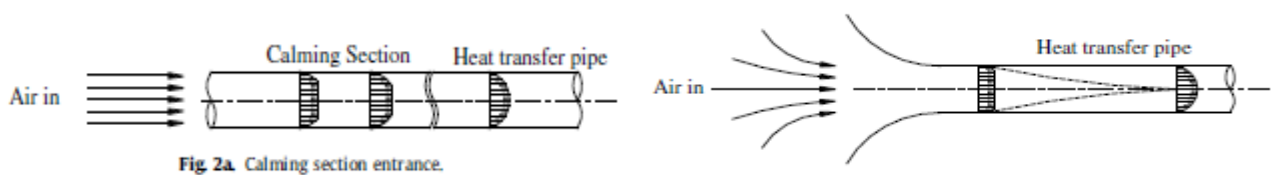


Fig. 2a. Calming section entrance.

Fig. 2b. Bell-mouth entrance.

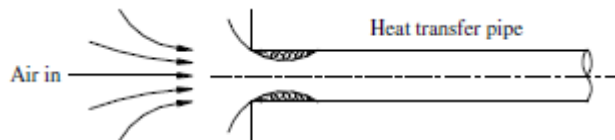


Fig. 2c. Sharp-edged entrance.

Guimarães et Menon [18] ont effectué une étude numérique sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un canal rectangulaire incliné avec trois sources de chaleur sur la paroi inférieure. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis et la technique de Petrov-

Galerkin. Ils ont fait une comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques, un bon accord est trouvé. Les effets sur le nombre de Nusselt le long des sources de chaleur ainsi que les vecteurs de vitesse sont vérifiées pour les différents paramètres suivants : Angle d'inclinaison γ ($0^0, 45^0, 90^0$) , nombre de Reynolds $Re(1, 10, 50, 100, 1000)$, et le nombre de Grashof $Gr(10^3, 10^4, 10^5)$. Ils ont trouvé que l'angle d'inclinaison a une forte influence sur l'écoulement et le transfert thermique, surtout dans le cas où le canal est entre 0^0 et 45^0 , des recirculations primaire et secondaire, et l'écoulement d'inversion sont présents dans certaines situations telles que $Re = 10$, $\gamma = 45^0$ et 90^0 .

Cette synthèse bibliographique montre que le domaine des transferts conjugués faisant intervenir le système fluide-paroi est riche en enseignement et en développement scientifique. A l'issue de cette recherche bibliographique et conformément à la problématique exposée dans l'introduction, ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la compréhension du mécanisme de la convection mixte dans une conduite cylindrique et à la présentation d'une synthèse bibliographique récente apportée sur ce sujet.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du problème physique considéré. Ensuite, écrites sous leurs formes adimensionnelles, les équations modélisantes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les conditions aux limites appropriées seront présentées. Dans ces équations, la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide sont thermodépendantes. L'adimensionnalisation de ces équations de conservation fera apparaître les paramètres de contrôle du problème.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode numérique utilisée qui est celle des volumes finis, le maillage dans sa globalité ainsi que dans des espaces de projection sera présenté. Puis, tous les termes obtenus dans les équations modélisantes seront discrétisés un par un jusqu'à l'obtention finale des équations algébriques linéarisées pour toutes les variables dépendantes de ce problème. Les algorithmes de calcul utilisés seront présentés.

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude. Les comparaisons et les interprétations des divers résultats seront présentées à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

Chapitre 2

Modélisation Mathématique

Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la géométrie et le système d'équations de conservation du problème, sous leur forme adimensionnelle régissant les transferts thermoconvectifs au sein d'un fluide dans un conduit cylindrique horizontal à section circulaire constante. Ces équations seront soumises aux conditions spatio-temporelles dynamiques et thermiques appropriées.

La particularité de cette modélisation réside dans la thermo dépendance des propriétés physiques du fluide ainsi que la prise en compte simultanée des deux milieux (solide et fluide) d'un point de vue transfert thermique et écoulement de fluide permettant de classer ce problème dans la classe des problèmes de transfert conjugué. Ainsi, ce sont les mêmes équations qui seront appliquées simultanément aux domaines fluide et solide. Par ailleurs le milieu solide sera le siège d'une source de chaleur volumétrique uniforme à travers toute l'épaisseur de la paroi du conduit.

2.2 La géométrie du modèle

La figure 2.1 illustre la géométrie du problème étudié. Il s'agit d'un long conduit horizontal de longueur $L = 1$ m, de diamètres, intérieur $D_i = 0.96$ cm et extérieur $D_o = 1$ cm. L'épaisseur de la paroi solide est égale à 0.02cm. Ce thermophysiques telles sa

conductivité thermique $K_w = 20 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ et sa résistance conduit est en Inconel qui est un alliage constitué de 72% de Nickel, de 14-17% Chrome et de 6-10% Fer. Ses propriétés électrique $R_w = 0.16 \Omega$ font que c'est un matériau recommandé pour le chauffage d'un fluide caloporteur par contact direct. Une génération de chaleur interne uniforme est produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi. Cette génération interne d'énergie est directement dépendante de l'intensité électrique traversant le solide.

A l'entrée du conduit se présente un écoulement laminaire d'un fluide incompressible, l'eau distillée, avec un profil de type Poiseuille et d'une température constante égale à 15°C . Les propriétés thermophysiques telles la viscosité et la conductivité thermique du fluide sont fonctions de la température tandis que pour la masse volumique du fluide l'approximation de Boussinesq est adoptée.

La surface externe du tube est non isolée avec un coefficient d'émissivité $\varepsilon = 0.9$. Les pertes par convection et par rayonnement avec le milieu environnant et l'air ambiant sont prises en compte.

Ce problème qui combine les deux modes de transfert simultanément, la convection dans le domaine fluide et la conduction dans le solide, rentre dans la classe des modes de transfert conjugué. Il sera modélisé par les équations de conservation adimensionnelles avec leurs conditions aux limites suivantes :

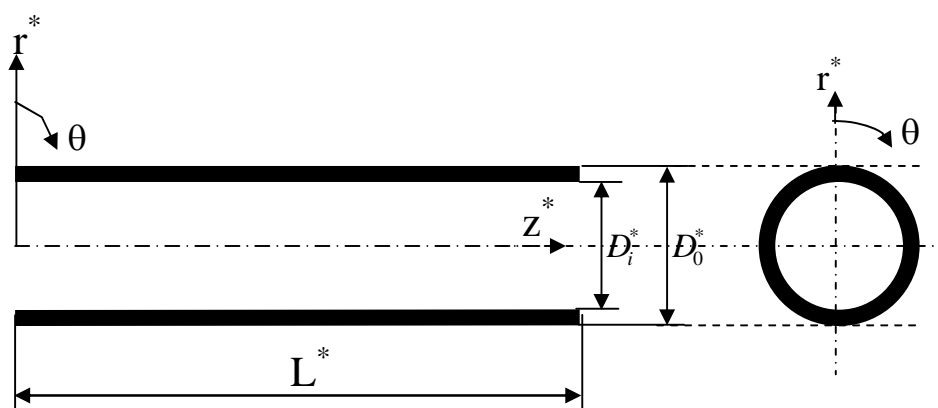


Figure 2.1 : géométrie et dimensions : $D_i^* = 1$, $D_o^* = 1.04$, $L^* = 104.17$

2.3 Equations de conservation

Ecrites en termes de contraintes et de flux, les équations de conservation adimensionnelles modélisantes traduisant les principes physiques qui régissent ce problème sont :

$$\text{A } t^* = 0, \quad U^* = W^* = V^* = T^* = 0 \quad (2.1)$$

Pour $t^* > 0$:

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement radiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* U^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* U^*) - \frac{V_{\theta}^{*2}}{r^*} = - \frac{\partial P^*}{\partial r^*} \\ + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* W^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* W^*) - \frac{U^* W^*}{r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \\ - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement axiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* V^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* V^*) = - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* T^*) = G^* - \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right] \quad (2.6)$$

$$\text{Avec } G^* = \begin{cases} K_s^*/(\text{Re}_0 \text{Pr}_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Les composants du tenseur des contraintes visqueuses sont :

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^* &= 2\mu^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*}, & \tau_{rz}^* &= \tau_{zr}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] \\ \tau_{\theta\theta}^* &= 2\mu^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*} + \frac{U^*}{r^*} \right], & \tau_{r\theta}^* &= \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{zz}^* &= 2\mu^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*}, & \tau_{\theta z}^* &= \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\left(\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Et les densités de flux thermique sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (2.8)$$

Les nombres adimensionnels qui caractérisent ce problème de convection mixte sont évalués à la température du fluide à l'entrée. Cette dernière est la température de référence utilisée dans l'évaluation des propriétés physiques du fluide servant à calculer les groupements adimensionnels du problème :

$$\text{Le nombre de Prandtl : } \text{Pr}_0 = \frac{v_0}{a_0}$$

$$\text{Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre interne de la conduite : } \text{Re}_0 = \frac{V_0 D_i}{v_0}$$

Le nombre de **Grashof** modifié basé sur la production volumique est donné par

l'expression suivante :

$$\text{Gr}_0^* = \frac{g\beta_0 D_i^3 \Delta T}{\nu_0^2} = \frac{g\beta_0 D_i^3 (GD_i^2/k_w)}{\nu_0^2}$$

Le nombre de **Richardson** : $\text{Ri}_0 = \frac{\text{Gr}_0^*}{\text{Re}_0^2}$ qui mesure, relativement, les deux modes de convection, forcée et naturelle.

2.4 Les conditions aux limites :

A l'entrée du tube : $z^* = 0$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad U^* = W^* = T^* = 0, \quad V^* = 2(1 - 4r^{*2}) \quad (2.9)$$

Domaine solide :

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad U^* = W^* = V^* = T^* = 0 \quad (2.10)$$

A la sortie du tube : $z^* = 104.17$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Domaine solide :

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \quad U^* = W^* = V^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

Les conditions dynamiques sont considérées et les variables dépendantes sont correctement interpolées au voisinage de l'axe. Cette interpolation permet de lever la singularité en ce point :

Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 104.17$:

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Sur la paroi extérieure, la condition de non-glisement est imposée tandis que la condition aux limites thermiques est de troisième type (condition de Fourier).

$$r^* = 0.5208 \text{ pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \begin{cases} U^* = W^* = V^* = 0 \\ -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{(h_r + h_c) D_i}{K_0} T^* \end{cases} \quad (2.14)$$

avec :

$$h_r = \varepsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty) \quad (2.15)$$

L'émissivité de la surface extérieure est de $\varepsilon = 0.9$ et $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzman. Le coefficient de transfert convectif h_c entre la paroi cylindrique externe et l'air environnant est donné par la corrélation de Churchill et Chu [20] valable pour tous les nombres de Prandtl et de Rayleigh dans l'intervalle $10^{-6} \leq Ra \leq 10^9$:

$$Nu = [h_c D_i / K_{\text{air}}] = \left[0.6 + \left(0.387 Ra^{1/6} / \left(1 + (0.559 / Pr_{\text{air}})^{9/16} \right)^{8/27} \right) \right]^2 \quad (2.16)$$

Bien que cette corrélation exprime un Nu moyen, elle peut être approximativement utilisée pour déterminer localement le nombre de Nusselt.

Les nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl sont définis par :

$$\text{Ra} = \frac{g\beta[T(R_0, \theta, z) - T_\infty]D_0^3}{\alpha_{\text{air}} \nu_{\text{air}}}, \quad \text{Pr}_{\text{air}} = \nu_{\text{air}} / \alpha_{\text{air}} \quad (2.17)$$

Les propriétés thermophysiques de l'air sont évaluées à la température locale du film :

$$T_{\text{film}} = [T(R_0, \theta, z) + T_\infty] / 2 \quad (2.18)$$

Suivant la direction angulaire les conditions périodiques sont imposées pour l'ensemble du domaine radial et axial.

$$\text{Pour } 0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \begin{cases} U^*(r^*, 0, z^*, t^*) = U^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ W^*(r^*, 0, z^*, t^*) = W^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ V^*(r^*, 0, z^*, t^*) = V^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ T^*(r^*, 0, z^*, t^*) = T^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \end{cases} \quad (2.19)$$

Le nombre de Prandtl $\text{Pr}_0 = 8.082$ est calculé avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température de référence ($T_0 = 288^\circ \text{K}$, à l'entrée du tube).

Les fonctions $\mu^*(T^*)$ et $K^*(T^*)$ ont été obtenues par un ajustement (« fitting ») précis des valeurs tabulées citées dans Baehr [21]. Ces fonctions sont :

$$\mu^*(T^*) = 0.23087 + 0.78727 \exp(-T^*/0.11386) \quad (2.20)$$

$$K^*(T^*) = 1.00111 + 0.80477 T^* - 1.06002 T^{*2} \quad (2.21)$$

Ces ajustements représentent de bonnes approximations dans le domaine des températures relatives à cette étude. La conductivité thermique adimensionnelle du solide est finie et constante dans l'intervalle des températures de cette étude :

$$K_s^*(T^*) = K_s / K_0 = 20 / 0.5893 = 33.94 \quad (2.22)$$

La viscosité dynamique adimensionnelle du solide est infinie, égale à :

$$\mu_s^*(T^*) = 10^{30} \quad (2.23)$$

Cette très grande valeur attribuée à la viscosité permet d'assurer des vitesses nulles représentatives du domaine solide. Le transfert thermique dans cette partie ne s'effectuera donc que par conduction. Cette procédure alliant les mêmes équations pour le domaine global (fluide + solide) est discutée dans Patankar [22].

2.5 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par :

$$\text{Nu}(\theta, z) = \frac{h(\theta, z)D_i}{K_0} = \left[\frac{\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] \quad (2.24)$$

La température moyenne adimensionnelles dans une section $T_b^*(z^*)$ étant définie par :

$$T_b^*(z^*) = \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} V^*(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} V^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta} \quad (2.25)$$

Le nombre de Nusselt local axial et moyen circonférentiel est :

$$\text{Nu}(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Nu}(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] d\theta \quad (2.26)$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide-fluide par la relation suivante :

$$\text{Nu} = \frac{1}{(2\pi)(104.17)} \int_0^{2\pi} \int_0^{104.17} \text{Nu}(\theta, z^*) dz^* d\theta \quad (2.27)$$

Chapitre 3

Résolution Numérique

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Introduction

Une fois le problème physique modélisé mathématiquement, Eq. (2.1) jusqu'à (2.6) avec les conditions aux limites spatio-temporelles appropriées Eq. (2.9) jusqu'à (2.14) et (2.19), nous présentons dans ce chapitre la méthode numérique de résolution de ces équations modélisantes de conservation de la masse, des quantités de mouvement radial, azimutale et axiale et de l'énergie dans un système de coordonnées cylindriques. Il est évident qu'au vu de la complexité des systèmes d'équations, causé par la non-linéarité des termes, par la tridimensionnalité du problème ainsi que par le fort couplage inter-équations, leur solution ne peut être que de type numérique. Nous utilisons à cet effet la méthode numérique des volumes finis dont l'intérêt dans le domaine des CFD (Computational Fluid Dynamic) n'est plus à prouver. Globalement la démarche numérique s'initie par le maillage, puis la discrétisation des équations modélisantes et enfin la résolution des systèmes d'équations discrétisées.

Aussi, il est nécessaire de faire rappeler que la discrétisation qui sera développée dans ce chapitre et rentant dans le cadre de ce travail est du second ordre dans le temps et dans l'espace. Celle du premier ordre ayant déjà fait l'objet d'une étude antérieure, Boufendi [1] et Boufendi et Afrid [12].

3.2 Le maillage

Le domaine physique compris entre $0 \leq r^* \leq R_e/D_i$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq L/D_i$ est transformé en un domaine discret constitué d'un nombre fini de volumes de contrôle élémentaires cylindriques, contigus et sans discontinuité d'interface, de dimensions Δr^* , $r^* \Delta \theta$ et Δz^* suivant les directions respectives r^* , θ et z^* . A l'intérieur et au centre de chaque volume sera défini un point (ou un nœud) représentatif de l'ensemble du volume. Les figures 3.1 (a-c) schématisent successivement le domaine numérique et un volume de contrôle typique ($\Delta v^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*$) dont le centre géométrique est associé au nœud **P** et limité par ses six faces : les faces Nord et Sud dans la direction radiale dont leurs centres sont (**n**) et (**s**), Est et Ouest dans la direction angulaire dont leurs centres sont (**e**) et (**w**) et Frontale et Dorsale dans la direction axiale dont leurs centres sont (**t**) et (**b**). Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes, dans la direction radiale deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction angulaire deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et en fin dans la direction axiale les deux volumes adjacents aux faces Frontale et Dorsale contenant en leurs centres les nœuds **T** et **B**.

Dans le maillage les différentes dimensions sont importantes à connaître et elles seront bien explicitées dans les figures qui suivent et qui présentent différents plans de vue du volume considéré. Les angles et les distances entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **T** et **B** sont $d\theta_e$, $d\theta_w$, dr_n , dr_s , dz_t et dz_b , respectivement tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement Δr_N , Δr_S , $\Delta \theta_E$, $\Delta \theta_W$, Δz_T et Δz_B .

Les fonctions scalaires, température et pression, sont stockées dans le nœud **P** du volume typique tandis que les fonctions vectorielles telles les composantes de vitesse, sont situées au centre et perpendiculairement à travers les six faces de chaque volume entourant **P**.

Ainsi, les équations de Navier-Stokes sont intégrées dans des volumes finis décalés, Patankar [22]. Tandis que les équations de continuité et de l'énergie seront discrétisées dans un volume typique. Cette localisation faciale des composantes de vitesses entraînera un décalage de leur volume correspondant par rapport au volume de contrôle principal. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour l'obtention de solutions

physiquement acceptables [22]. Ainsi, c'est à travers la totalité de ce domaine numérique maillé que seront intégrées sur chaque volume de contrôle les équations modélisantes écrites sous la forme conservative.

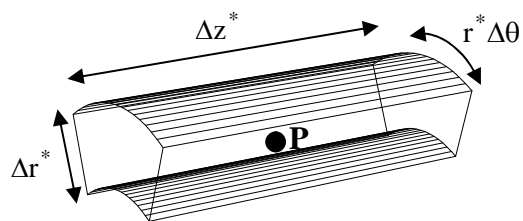
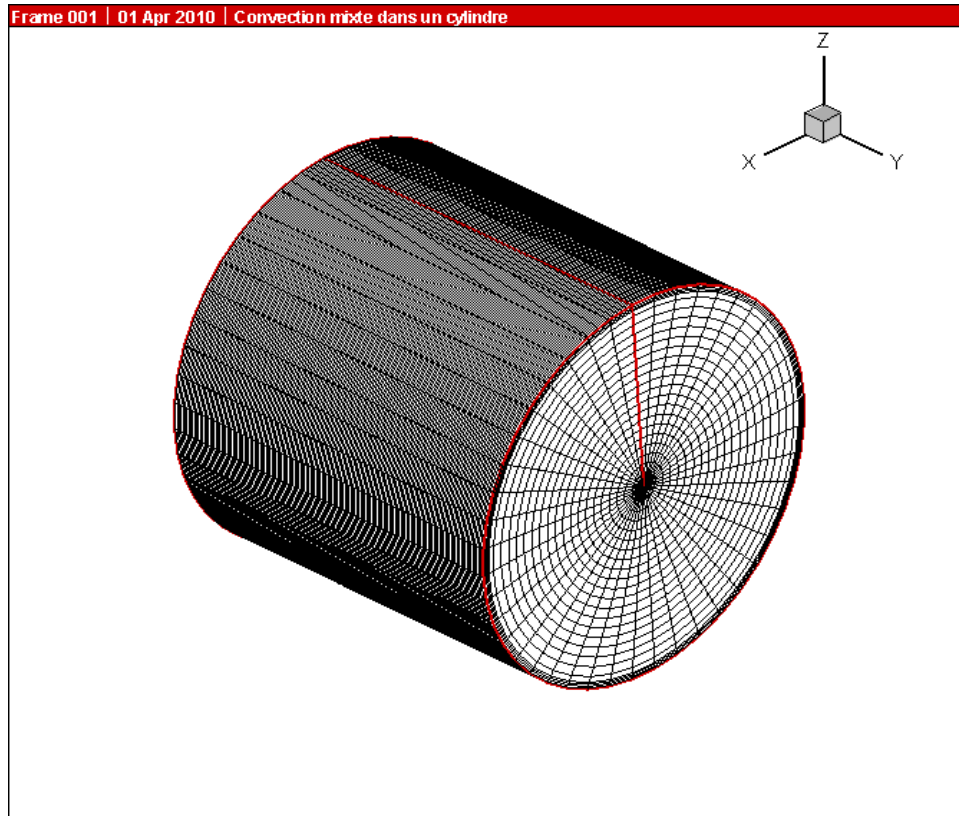


Figure 3.1 (a) Le maillage du domaine physique en 3D.
(b) Le volume typique.

3.3 Discrétisation des équations du modèle

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques. C'est dans cette voie nous avons fait le choix d'une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. On rappelle que les équations de conservation peuvent être écrites sous la forme générale conservative suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* \phi) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* \phi) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* \phi) = \\ \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\Gamma_\phi r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma_\phi \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \right] + S_\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où ϕ est la variable généralisée, S_ϕ est le terme de source, Γ_ϕ est le coefficient de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur dans notre cas).

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans son volume fini typique ou décalé selon le cas. Pour simplifier l'écriture, on élimine les étoiles dans les exposants des variables non dimensionnelles.

3.4 Définitions

3.4.1 La discrétisation temporelle au second ordre

Elle est obtenue à partir de manipulations mathématiques dans les développements en séries de Taylor d'une variable ϕ par rapport au temps :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \Big|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \Big|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.3)$$

Si l'équation (3.3) est diminuée de l'équation (3.2) multipliée par 4, on peut montrer que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.5)$$

Aussi, si on multiplie l'équation (3.2) par 2 et retranche du produit l'équation (3.3), on peut montrer que :

$$\phi^{t+\Delta t} \approx 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} + (\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

Et donc, une approximation, avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ d'une variable $\phi^{t+\Delta t}$ est :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} \quad (3.7)$$

Cette discrétisation est celle d'**Adam-Bashforth**.

3.4.2 La discrétisation spatiale au second ordre

Les discrétisations spatiales se feront selon le schéma des différences centrées qui est un schéma d'une précision du second ordre.

Considérons, dans la direction axiale, les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_P = \phi_t - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \dots \quad (3.8)$$

$$\phi_T = \phi_t - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \dots \quad (3.9)$$

En soustrayant l'équation (3.9) de (3.8), on trouve :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t \approx \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t (dz_t)^2 \quad (3.10)$$

Et donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t = \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dz_t)^2 \quad (3.11)$$

Dans tous les cas on utilise des discrétisations du second ordre : une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre $(\Delta t)^2$ et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta r)^2$, $(\Delta \theta)^2$ et $(\Delta z)^2$.

La forme d'Euler retardée du second ordre donnée par l'équation (3.5) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation d'Adam-Bashforth, équation (3.7) sera appliquée d'une part à tout les termes non linéaires tels les termes advectifs et d'autre part à tous les termes hybrides et les termes de force de poussée thermique qui se retrouvent dans les différents sources. Enfin la discrétisation selon un schéma totalement implicite au temps $(t + \Delta t)$ sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression. Quant à la discrétisation dans l'espace, il lui sera appliqué le schéma des différences centrées qui est d'ordre deux (comme on l'a vu précédemment).

3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale

On rappelle que cette équation (2.3) vue dans le chapitre 2, est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* U^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* U^*) - \frac{W^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^*} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*}, \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right]$$

et

$$\tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta^*} + \frac{U^*}{r^*} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé $r_n^* dr_n^* \Delta \theta \Delta z_p^*$ suivant la direction radiale (voir les figures (3.2.a) et (3.2.b))

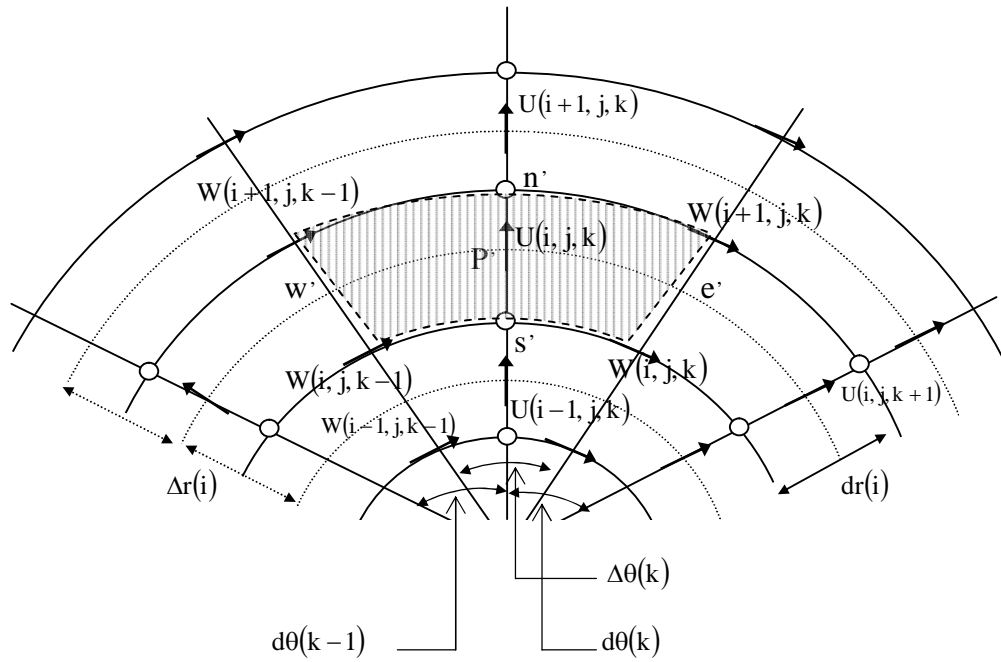


Figure 3.2(a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale dans le plan (r, θ)

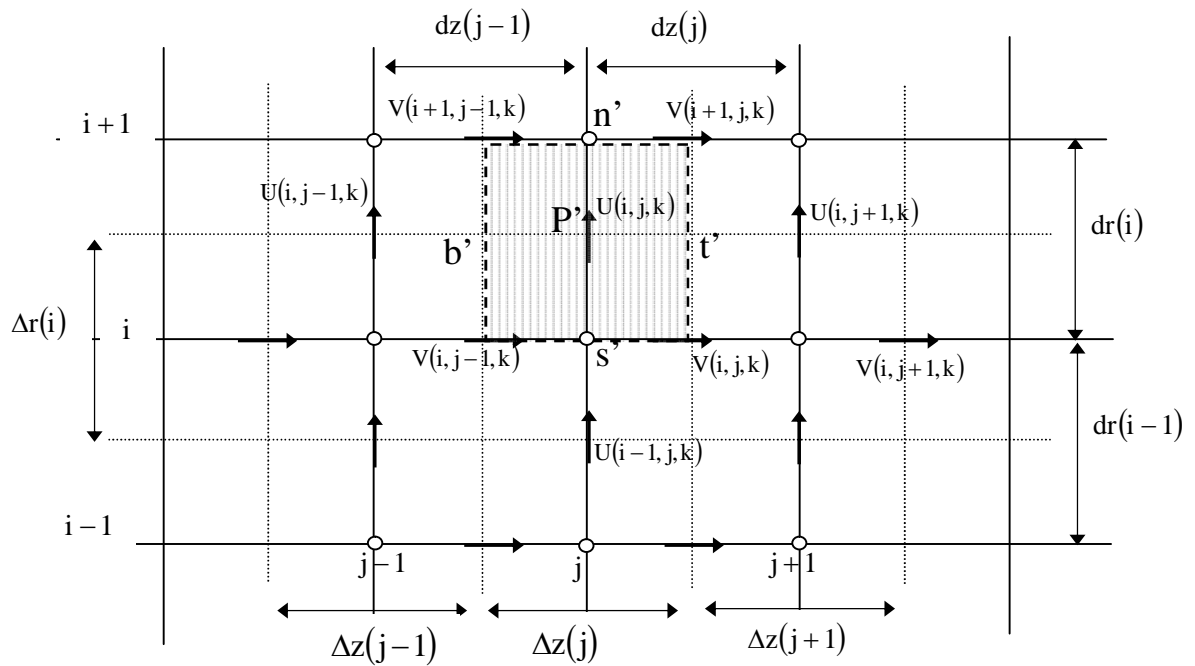


Figure 3.2(b) Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale dans le plan (r, z)

- **Terme transitoire :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial U}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n d\theta_p dz_p$$

- **Termes advectifs :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^t - \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t-\Delta t} \right]_{s_u}^{n_u} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(r_{n_u} U_{n_u}^t U_{n_u}^t - r_{s_u} U_{s_u}^t U_{s_u}^t) - (r_{n_u} U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - r_{s_u} U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t}) \right] \Delta\theta_p \Delta z_p$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (WU) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(W_{e_u}^t U_{e_u}^t - W_{w_u}^t U_{w_u}^t) - (W_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - W_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} (VU) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(V_{t_u}^t U_{t_u}^t - V_{b_u}^t U_{b_u}^t) - (V_{t_u}^{t-\Delta t} U_{t_u}^{t-\Delta t} - V_{b_u}^{t-\Delta t} U_{b_u}^{t-\Delta t}) \right] r_n dr_n \Delta\theta_p$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{W^2}{r} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \left(2[W_{P_u}^t]^2 - [W_{P_u}^{t-\Delta t}]^2 \right) dr_n \Delta\theta_p \Delta z_p =$$

$$2 \left[\frac{W_{n_u}^t e_u + W_{n_u}^t w_u + W_{s_u}^t e_u + W_{s_u}^t w_u}{4} \right]^2 dr_n \Delta\theta_p \Delta z_p -$$

$$\left[\frac{W_{n_u}^{t-\Delta t} + W_{n_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n \Delta\theta_p \Delta z_p$$

- **Terme de pression :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} -\frac{\partial P}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta\theta_p \Delta z_p$$

• Termes diffusifs :

- Le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr})$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) r dr d\theta dz =$$

$$2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r\mu^t \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r\mu^{t-\Delta t} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz =$$

$$\left(4r\mu^t \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right)_{|s_u}^{n_u} \Delta\theta_p \Delta z_p - \left(2r\mu^{t-\Delta t} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right)_{|s_u}^{n_u} \Delta\theta_p \Delta z_p =$$

$$2 \left(2\mu_{n_u}^t - \mu_{n_u}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{n_u} \frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dr_{n_u}} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p - 2 \left(2\mu_{s_u}^t - \mu_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{s_u} \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{dr_{s_u}} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_{n_u} &= \mu_N = \mu(i+1, j, k) & , & & \mu_{s_u} &= \mu_P = \mu(i, j, k) \\ r_{n_u} &= r_P(i+1) & , & & r_{s_u} &= r_P(i) \\ dr_{n_u} &= \Delta r_N = \Delta r(i+1) & , & & dr_{s_u} &= \Delta r_P = \Delta r(1) \\ U_{N_u} &= U(i+1, j, k) & , & & U_{P_u} &= U(i, j, k) \quad \text{et} \quad U_{S_u} = U(i-1, j, k) \end{aligned}$$

- le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta})$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \\
& 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right] \right\} r dr d\theta dz - \\
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{t-\Delta t} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right] \right\} r dr d\theta dz = \\
& \left[2\mu^t \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \Big|_{w_u}^{e_u} \right] dr_n \Delta z_p - \left[\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \Big|_{w_u}^{e_u} \right] dr_n \Delta z_p = \\
& \left[\left(2\mu^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t + \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \right) \Big|_{w_u}^{e_u} \right] dr_n \Delta z_p + \left[\left(2\mu^t - \mu^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{w_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta z_p = \\
& \left[\left(2\mu^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t \Big|_{e_u} - 2\mu^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t \Big|_{w_u} + \right. \\
& \left. \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \Big|_{w_u} - \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \Big|_{e_u} \right] dr_n \Delta z_p + \left[\left(2\mu^t - \mu^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|_{w_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta z_p = \\
& \left[\left(2 \left(\mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - \mu_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - \mu_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right) \right] dr_n \Delta z_p - \\
& \left(2\mu_{e_u}^t - \mu_{e_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}} \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{d\theta_{e_u}} \right) dr_n \Delta z_p - \left(2\mu_{w_u}^t - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}} \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{d\theta_{w_u}} \right) dr_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{e_u} = \frac{d\theta_e}{\Delta\theta_N + \Delta\theta_{NE}} + \frac{d\theta_e}{\Delta\theta_P + \Delta\theta_E}, \quad \mu_{w_u} = \frac{d\theta_w}{\Delta\theta_N + \Delta\theta_{NW}} + \frac{d\theta_w}{\Delta\theta_P + \Delta\theta_W}$$

$$\mu_N = \mu(i+1, j, k), \quad \mu_P = \mu(i, j, k), \quad \mu_E = \mu(i, j, k+1), \quad \mu_W = \mu(i, j, k-1)$$

$$\mu_{NE} = \mu(i+1, j, k+1), \quad \mu_{NW} = \mu(i+1, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k), \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k), \quad \Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1), \quad \Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$r_{n_u} = r_P(i+1), \quad dr_{n_u} = \Delta r_N = \Delta r(i+1)$$

$$W_{n_u e_u} = W(i, j, k+1), \quad W_{n_u w_u} = W(i+1, j, k-1), \quad W_{s_u e_u} = W(i, j, k), \quad W_{s_u w_u} = W(i, j, k-1)$$

$$U_{E_u} = U(i, j, k+1), \quad U_{P_u} = U(i, j, k), \quad U_{W_u} = U(i, j, k-1)$$

• le terme $\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left| \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \tau_{\theta\theta} \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz -$$

$$2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2\mu^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^t + \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr d\theta dz -$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr d\theta dz =$$

$$\left\{ 2 \left[2\mu^t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^t - \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^{t-\Delta t} \right]_{P_u} + \left[2 \left(2\mu^t - \mu^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right]_{P_u} \right\} dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p =$$

$$2 \left[\left(2\mu_{P_u}^t \right) \frac{1}{2r_n} \left(\frac{W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t}{\Delta \theta_{P_u}} + \frac{W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{\Delta \theta_{P_u}} \right) - \right.$$

$$\left. \left(\mu_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \frac{1}{2r_n} \left(\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t}}{\Delta \theta_{P_u}} + \frac{W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{\Delta \theta_{P_u}} \right) \right] dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + 2 \left(2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t}}{r_n} \right] dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p =$$

$$2 \left[\frac{\left(\mu_{P_u}^t \right)}{r_n} \left(W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t \right) - \frac{\left(\mu_{P_u}^{t-\Delta t} \right)}{2r_n} \left(W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta z_p +$$

$$2 \left(2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t}}{r_n} \right] dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

Avec :

$$\mu_{P_u} = \frac{2dr_n}{\frac{\Delta r_p}{\mu_p} + \frac{\Delta r_n}{\mu_n}}$$

$$\Delta \theta_{P_u} = d\theta_e = d\theta(k), \quad r_n = r_e(i)$$

$$W_{n_u e_u} = W(i+1, j, k), \quad W_{n_u w_u} = W(i+1, j, k-1), \quad W_{s_u e_u} = W(i, j, k), \quad W_{s_u w_u} = W(i, j, k-1)$$

$$U_{P_u} = U(i, j, k)$$

$$\mu_n = \mu(i+1, j, k), \quad \mu_p = \mu(i, j, k)$$

- le terme $\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz})$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^t \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \\
& 2 \left[\mu^t \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^t + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta \theta_p - \left[\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta \theta_p = \\
& \left[2\mu^t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^t - \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t-\Delta t} \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta \theta_p + \left[(2\mu^t - \mu^{t-\Delta t}) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]_{b_u}^{t+\Delta t} \Big|^{t_u} r_n dr_n \Delta \theta_p = \\
& \left[\left(2\mu_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - \mu_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{b_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - \mu_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right) \right] r_n dr_n \Delta \theta_p + \\
& (2\mu_{t_u}^t - \mu_{t_u}^{t-\Delta t}) \left(\frac{U_{T_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) r_n dr_n \Delta \theta_p - (2\mu_{b_u}^t - \mu_{b_u}^{t-\Delta t}) \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) r_n dr_n \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\mu_{t_u} &= \frac{dz_{t_u}}{\frac{\Delta z_N}{\mu_N} + \frac{\Delta z_{NT}}{\mu_{NT}}} + \frac{dz_{t_u}}{\frac{\Delta z_P}{\mu_P} + \frac{\Delta z_T}{\mu_T}}, & \mu_{b_u} &= \frac{dz_{b_u}}{\frac{\Delta z_N}{\mu_N} + \frac{\Delta z_{NB}}{\mu_{NB}}} + \frac{dz_{b_u}}{\frac{\Delta z_P}{\mu_P} + \frac{\Delta z_B}{\mu_B}} \\
\mu_{n_u} &= \mu_N = \mu(i+1, j, k), & \mu_{s_u} &= \mu_P = \mu(i, j, k), \\
\mu_T &= \mu(i, j+1, k), & \mu_B &= \mu(i, j+1, k) \\
\mu_{NB} &= \mu(i+1, j-1, k), & \mu_{NT} &= \mu(i+1, j+1, k) \\
dr_n &= dr(i), & dz_t &= dz(j), & r_n &= rc(i) \\
V_{n_u t_u} &= V(i+1, j, k), & V_{s_u t_u} &= V(i, j, k), & V_{n_u b_u} &= V(i+1, j-1, k), & V_{s_u b_u} &= V(i, j-1, k) \\
U_{T_u} &= U(i, j+1, k), & U_{P_u} &= U(i, j, k), & U_{B_u} &= U(i, j-1, k)
\end{aligned}$$

- le terme $\left(\frac{Gr}{Re^2} \cos \theta\right) T$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos \theta\right) T \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \\ & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos \theta\right) T \Big|^t r dr d\theta dz - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos \theta\right) T \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz = \\ & \frac{Gr}{Re^2} \cos \theta \left\{ \left[2(T)_{P_u} \Big|^t - (T)_{P_u} \Big|^{t-\Delta t} \right] \right\} r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p = \\ & \frac{Gr}{Re^2} \cos \theta (T_N^t + T_P^t) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \frac{Gr}{Re^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + S_u^{t+\Delta t} \quad (3.12)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{2}{Re_0} (2\mu_{n_u}^t - \mu_{n_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_{n_u} \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_{n_u}} \quad , \quad A_S = ds = \frac{2}{Re_0} (2\mu_{s_u}^t - \mu_{s_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_{s_u} \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_{s_u}}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0} (2\mu_{e_u}^t - \mu_{e_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta z_p}{r_n d\theta_e} \quad , \quad A_W = dw = \frac{1}{Re_0} (2\mu_{w_u}^t - \mu_{w_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta z_p}{r_n d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} (2\mu_{t_u}^t - \mu_{t_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_n dr_n \Delta \theta_p}{dz_t} \quad , \quad A_B = db = \frac{1}{Re_0} (2\mu_{b_u}^t - \mu_{b_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_n dr_n \Delta \theta_p}{dz_b}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B +$$

$$\frac{3}{2} \frac{r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{\Delta t} + \frac{1}{Re_0} (2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{r_n} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
S_u^{t+\Delta t} &= \frac{4U_{p_u}^t}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta p \Delta z_p - \frac{U_{p_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta p \Delta z_p + \\
&\left[\left(U_{n_u}^{t-\Delta t} \right)^2 - 2 \left(U_{n_u}^t \right)^2 \right] r_{n_u} \Delta \theta p \Delta z_p + \left[\left(U_{s_u}^t \right)^2 - 2 \left(U_{s_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \right] r_{s_u} \Delta \theta p \Delta z_p + \\
&\left[\left(W_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} \right) - 2 \left(W_{e_u}^t U_{e_u}^t \right) \right] dr_n \Delta z_p + \left[\left(W_{w_u}^t U_{w_u}^t \right) - 2 \left(W_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
&\left[\left(V_{t_u}^{t-\Delta t} U_{t_u}^{t-\Delta t} \right) - 2 \left(V_{t_u}^t U_{t_u}^t \right) \right] r_n dr_n \Delta \theta p + \left[\left(V_{b_u}^t U_{w_u}^t \right) - 2 \left(V_{b_u}^{t-\Delta t} U_{b_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_n dr_n \Delta \theta p + \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - \mu_{w_u}^t \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{dr_{n_u}} \right) + \right. \\
&\left. \left(\mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - \mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} - \mu_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{2} \right) + \right. \\
&\left. \left(\mu_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] dr_n \Delta z_p - \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \frac{\left(\mu_{p_u}^t \right)}{r_n} \left(W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t \right) - \right. \\
&\left. \frac{\left(\mu_{p_u}^{t-\Delta t} \right)}{r_n} \left(W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - \mu_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \right. \\
&\left. \left(\mu_{b_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - \mu_{t_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right) \right] r_n dr_n \Delta \theta p + \\
&2 \left[\frac{W_{n_u e_u}^t + W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t + W_{s_u w_u}^t}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta p \Delta z_p - \\
&\left[\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta p \Delta z_p + \\
&\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \cos \theta \left(T_N^t + T_P^t \right) r_n dr_n \Delta \theta p \Delta z_p - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta \theta p \Delta z_p + \\
&\left(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_n \Delta \theta p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_u^{t+\Delta t} &= \frac{4U_{p_u}^t}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \frac{U_{p_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\
& \left[fn_u^{t-\Delta t} - fn_u^t \right] + \left[fs_u^t - fs_u^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_u^{t-\Delta t} - fe_u^t \right] + \left[fw_u^t - fw_u^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_u^{t-\Delta t} - ft_u^t \right] + \left[fb_u^t - fb_u^{t-\Delta t} \right] + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - \mu_{w_u}^t \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{dr_{n_u}} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - \mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} - \mu_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] dr_n \Delta z_p - \\
& \frac{1}{Re_0} \left[2 \frac{(\mu_{p_u}^t)}{r_n} (W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t) - \right. \\
& \left. \frac{(\mu_{p_u}^{t-\Delta t})}{r_n} (W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[2 \left(\mu_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - \mu_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{b_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - \mu_{t_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right) \right] r_n dr_n \Delta \theta_p + \\
& 2 \left[\frac{W_{n_u e_u}^t + W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t + W_{s_u w_u}^t}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \\
& \left[\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\
& \frac{Gr}{Re^2} \cos \theta (T_N^t + T_P^t) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \frac{Gr}{Re^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\
& \left(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_u^{t+\Delta t} = b_u + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned}
A_P U_{p_u}^{t+\Delta t} &= A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + b_u + \\
& \left(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme $U_{P_u}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse U à l'interface n du volume typique ($U_n^{t+\Delta t}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $U_n^{t+\Delta t}$:

$$A_P U_n^{t+\Delta t} = A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + b_u + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.15)$$

3.6 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit : (2.4)

$$\frac{\partial W^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* W^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* W^*) + \frac{U^* W^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{\theta \theta}^* = 2\mu^* \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} + \frac{U^*}{r^*} \right) \right] \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[\left(r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\left(\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (voir les figures (3.3.a) et (3.3.b)).

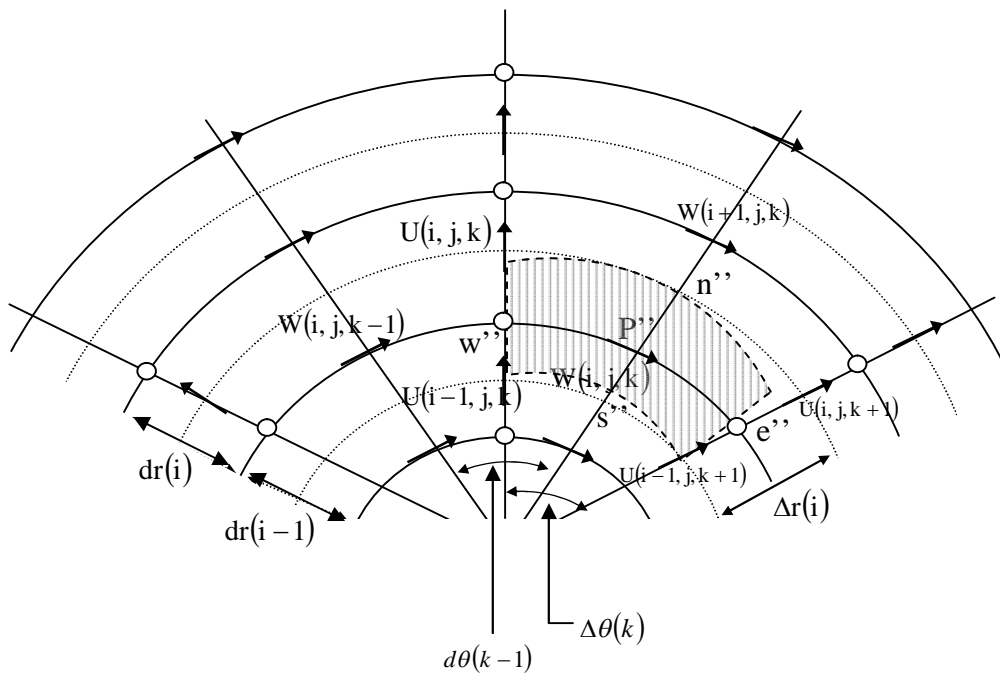


Figure 3.3(a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction angulaire dans le plan (r, θ)

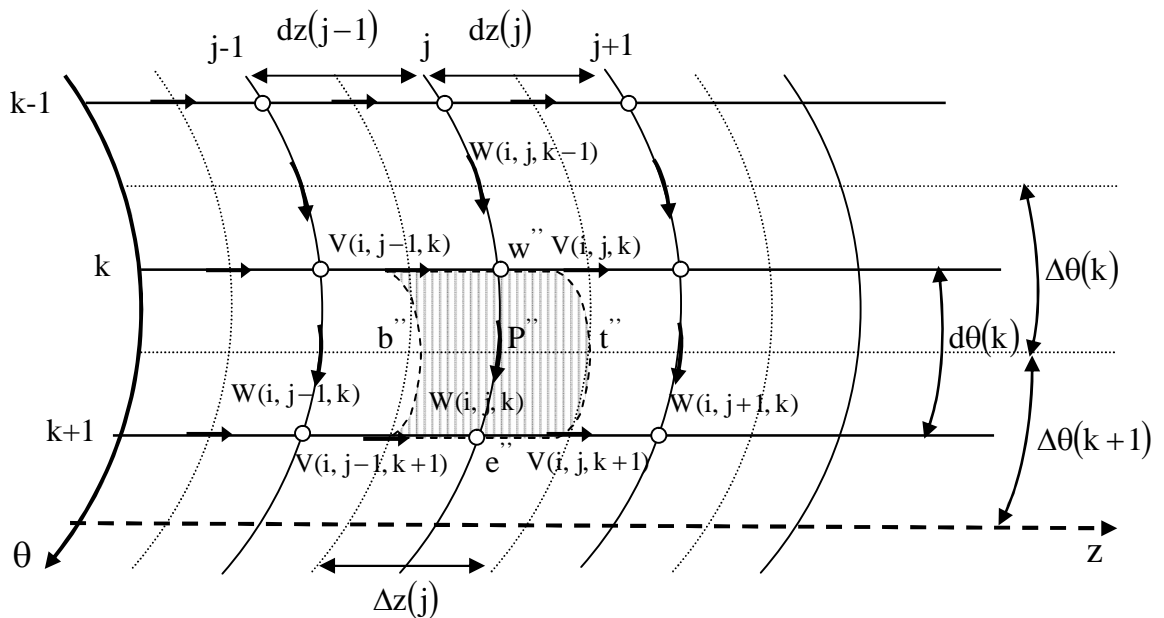


Figure 3.3.b les faces dans le plan $\theta - z$, des volumes finis décalés suivant la direction azimutale.

➤ **Terme transitoire :**

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial W}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \frac{3W_{P_w}^{t+\Delta t} - 4W_{P_w}^t + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p d\theta_e dz_p$$

• **Termes advectifs :**

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^t - \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr d\theta dz =$$

$$\left[2 \left(r_{n_w}^t U_{n_w}^t W_{n_w}^t - r_{s_w}^t U_{s_w}^t W_{s_w}^t \right) - \left(r_{n_w}^{t-\Delta t} U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t} - r_{s_w}^{t-\Delta t} U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (W W) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (W W) \Big|^t - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (W W) \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr d\theta dz =$$

$$\left[2 \left(W_{e_w}^t W_{e_w}^t - W_{w_w}^t W_{w_w}^t \right) - \left(W_{e_w}^{t-\Delta t} W_{e_w}^{t-\Delta t} - W_{w_w}^{t-\Delta t} W_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{UW}{r} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[2 \frac{UW}{r} \Big|^t - \frac{UW}{r} \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr d\theta dz =$$

$$\left(2U_{P_w}^t W_{P_w}^t - U_{P_w}^{t-\Delta t} W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p =$$

$$\left(\frac{U_{n_w}^t e_w + U_{n_w}^t w_w + U_{s_w}^t e_w + U_{s_w}^t w_w}{2} W_{P_w}^t - \frac{U_{n_w}^{t-\Delta t} e_w + U_{n_w}^{t-\Delta t} w_w + U_{s_w}^{t-\Delta t} e_w + U_{s_w}^{t-\Delta t} w_w}{2} W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \left(P_p^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta z_p$$

➤ **Termes diffusifs :**

- **Le terme** $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{\theta r} \right)$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{\theta r} \right) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{\theta r} \right) \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz = \\
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz = \\
& \frac{2}{r_p} \left[r^2 \mu^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_w}^{n_w} d\theta_e \Delta z_p - \\
& \frac{1}{r_p} \left[r^2 \mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_w}^{n_w} d\theta_e \Delta z_p = \\
& \frac{1}{r_p} \left[2r^2 \mu^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right)^t + r^2 \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \right) \right]_{s_w}^{n_w} d\theta_e \Delta z_p - \\
& \frac{1}{r_p} \left[2r^2 \mu^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} - r^2 \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right]_{s_w}^{n_w} d\theta_e \Delta z_p = \\
& \left[\begin{aligned} & 2\mu_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^t - U_{n_w w_w}^t}{r_p} d\theta_e - 2\mu_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^t - U_{s_w w_w}^t}{r_p} d\theta_e - \\ & \mu_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} (W_{N_w}^t + W_{P_w}^t) + \mu_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} (W_{S_w}^t + W_{P_w}^t) + \\ & \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} d\theta_e - \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{n_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} d\theta_e + \\ & \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{W_{N_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} - \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{W_{S_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p + \\
& \left(2\mu_{n_w}^t - \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{r_{n_w}^2}{r_p} \left(\frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p - \\
& \left(2\mu_{s_w}^t - \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{r_{s_w}^2}{r_p} \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec

$$\mu_{n_w} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{e_w}} + \frac{1}{\mu_{NE}}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P} + \frac{1}{\mu_N}}, \quad \mu_{s_w} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{e_w}} + \frac{1}{\mu_{SE}}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P} + \frac{1}{\mu_S}}$$

$$\mu_{n_w} = \mu_N = \mu(i+1, j, k), \quad \mu_{s_w} = \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$r_{n_w} = r_P(i+1), \quad r_{s_w} = r_P(i)$$

$$\begin{aligned} dr_{n_w} = \Delta r_N = \Delta r(i+1) & , & dr_{s_w} = \Delta r_p = \Delta r(1) \\ U_{N_w} = U(i+1, j, k) & , & U_{P_w} = U(i, j, k) \quad \text{et} \quad U_{S_w} = U(i-1, j, k) \end{aligned}$$

• le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta})$

$$\begin{aligned} \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz &= \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}) \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz = \\ \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz &= \left[2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p = \\ 2 \left[2\mu^t \left(\left(\frac{U}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p &- \left[2\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{U}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p = \\ 2\mu_{e_w}^t \left(\frac{U_{n_w e_w}^t - U_{s_w e_w}^t}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p &- 2\mu_{w_w}^t \left(\frac{U_{n_w w_w}^t - U_{s_w w_w}^t}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p - \\ \mu_{e_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w e_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p &+ 2\mu_{w_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p + \\ 2 \left[\left(2\mu_{e_w}^t - \mu_{e_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_p} \frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{d\theta_{e_w}} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p &- \left[\left(2\mu_{w_w}^t - \mu_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_p} \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{d\theta_{w_w}} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mu_{w_w} = \mu_p = \mu(i, j, k) & , & \mu_{e_w} = \mu_E = \mu(i, j, k+1) \\ d\theta_{e_w} = \Delta\theta(k+1) & , & d\theta_{w_w} = \Delta\theta(k) \quad , \quad r_p = r_p(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n_w e_w} = U(i, j, k+1), U_{n_w w_w} = U(i, j, k), U_{s_w e_w} = U(i-1, j, k+1), U_{s_w w_w} = U(i-1, j, k) \\ W_{E_w} = W(i, j, k+1) \quad , \quad W_{P_w} = W(i, j, k) \quad , \quad W_{W_w} = W(i, j, k-1) \end{aligned}$$

- le terme $\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{\theta z})$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{\theta z}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \\
& \left\{ 2 \left[\mu^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^t + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_w}^{t_w} - \left[\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_w}^{t_w} \right\} r_p \Delta r_p d\theta_e = \\
& \left[2\mu_{t_w}^t \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w t_w}^t - V_{w_w t_w}^t}{d\theta_e} \right) - 2\mu_{b_w}^t \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w b_w}^t - V_{w_w b_w}^t}{d\theta_e} \right) \right] r_p \Delta r_p d\theta_e - \\
& \left[\mu_{t_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w t_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w t_w}^{t-\Delta t}}{d\theta_e} \right) - \mu_{b_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w b_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w b_w}^{t-\Delta t}}{d\theta_e} \right) \right] r_p \Delta r_p d\theta_e + \\
& \left[\left(2\mu_{t_w}^t - \mu_{t_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{W_{T_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) \right] r_p \Delta r_p d\theta_e - \left[\left(2\mu_{b_w}^t - \mu_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] r_p \Delta r_p d\theta_e
\end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{t_w} = \frac{dz_t}{\frac{\Delta z_E}{\mu_{e_w}} + \frac{\Delta z_T}{\mu_{TE}}} + \frac{dz_t}{\frac{\Delta z_P}{\mu_P} + \frac{\Delta z_T}{\mu_T}}, \quad \mu_{b_w} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_E}{\mu_{e_w}} + \frac{\Delta z_T}{\mu_{BE}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{\mu_P} + \frac{\Delta z_B}{\mu_B}}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{e_w} &= \mu_E = \mu(i, j, k+1) & , & & \mu_P &= \mu(i, j, k), \\
\mu_T &= \mu(i, j+1, k) & , & & \mu_B &= \mu(i, j-1, k) \\
\mu_{BE} &= \mu(i, j-1, k+1) & , & & \mu_{TE} &= \mu(i, j+1, k+1) \\
dz_b &= dz(j-1) & , & & dz_t &= dz(j) & , \\
d\theta_e &= d\theta(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{e_w t_w} &= V(i, j, k+1), \quad V_{e_w b_w} = V(i, j-1, k+1), \quad V_{w_w t_w} = V(i, j, k), \quad V_{w_w b_w} = V(i, j-1, k) \\
W_{T_w} &= W(i, j+1, k) & , & & W_{P_w} &= W(i, j, k) & , & & U_{B_w} &= W(i, j-1, k)
\end{aligned}$$

• le terme $\left(\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta\right) T$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta\right) T \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta\right) T \Big|^t r dr d\theta dz - \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta\right) T \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta \left\{ \left[2(T)_{P_w} \Big|^t - (T)_{P_w} \Big|^{t-\Delta t} \right] \right\} r_p \Delta r d\theta_e \Delta z_p =$$

$$\frac{Gr}{Re^2} \sin \theta (T_E^t + T_P^t) r_p \Delta r d\theta_e \Delta z_p - \frac{Gr}{Re^2} \sin \theta \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \Delta r d\theta_p \Delta z_p$$

L'ensemble des termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P W_{P_w}^{t+\Delta t} = A_N W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W W_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T W_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B W_{B_w}^{t+\Delta t} + S_w^{t+\Delta t} \tag{3.16}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{n_w}^t - \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{n_w}^2 d\theta_e \Delta z_p}{r_p dr_n} \quad , \quad A_S = ds = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{s_w}^t - \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{s_w}^2 d\theta_e \Delta z_p}{r_p dr_s}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{e_w}^t - \mu_{e_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_{e_w}} \quad , \quad A_W = dw = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_{w_w}^t - \mu_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_{w_w}}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{t_w}^t - \mu_{t_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p d\theta_e}{dz_t} \quad , \quad A_B = db = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_{b_w}^t - \mu_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_e}{dz_b}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p}{\Delta t} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
S_w^{t+\Delta t} &= \frac{4W_{P_w}^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p + \\
& \left[fn_w^{t-\Delta t} - fn_w^t \right] + \left[fs_w^t - fs_w^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_w^{t-\Delta t} - fe_w^t \right] + \left[fw_w^t - fw_w^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_w^{t-\Delta t} - ft_w^t \right] + \left[fb_w^t - fb_w^{t-\Delta t} \right] + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^t - U_{n_w w_w}^t}{d\theta_e} - 2\mu_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^t - U_{s_w w_w}^t}{d\theta_e} \\ & \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{d\theta_e} - \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{n_w w_w}^{t-\Delta t}}{d\theta_e} \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & \mu_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} (W_{N_w}^t + W_{P_w}^t) + \mu_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} (W_{S_w}^t + W_{P_w}^t) + \\ & \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{W_{N_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} - \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{W_{S_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{e_w}^t \left(\frac{U_{n_w e_w}^t + U_{s_w e_w}^t}{r_p} \right) - 2\mu_{w_w}^t \left(\frac{U_{n_w w_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{r_p} \right) \\ & \mu_{e_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) - 2\mu_{w_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \end{aligned} \right] \Delta r_p \Delta z_p + \\
& \frac{1}{Re_0} \left[\begin{aligned} & 2 \left(\mu_{t_w}^t \frac{V_{e_w t_w}^t - V_{w_w t_w}^t}{r_p d\theta_e} - \mu_{b_w}^t \frac{V_{e_w b_w}^t - V_{w_w b_w}^t}{r_p d\theta_e} \right) + \\ & \left(\mu_{t_w}^{t-\Delta t} \frac{V_{e_w t_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w t_w}^{t-\Delta t}}{r_p d\theta_e} - \mu_{b_w}^{t-\Delta t} \frac{V_{e_w b_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w b_w}^{t-\Delta t}}{r_p d\theta_e} \right) \end{aligned} \right] r_p \Delta r_p d\theta_e + \\
& \left(\frac{U_{n_w e_w}^t + U_{n_w w_w}^t + U_{s_w e_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{2} W_{P_w}^t - \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{4} W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p + \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \sin \theta (T_E^t + T_P^t) r_p \Delta r_p \Delta \theta_e \Delta z_p + \frac{Gr}{Re^2} \sin \theta \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_e \Delta z_p + \\
& \quad \quad \quad (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La source peut s'écrire :

$$S_w^{t+\Delta t} = b_w + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned}
A_P U_{P_w}^{t+\Delta t} &= A_N U_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_w}^{t+\Delta t} + b_w + \\
& \quad \quad \quad (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme $W_{P_w}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse W à l'interface e du volume typique

($W_e^{t+\Delta t}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $W_e^{t+\Delta t}$:

$$\begin{aligned}
A_P W_e^{t+\Delta t} &= A_N W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W W_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T W_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B W_{B_w}^{t+\Delta t} + \\
& \quad \quad \quad b_w + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.7 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit : (2.5)

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* V^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* V^*) = - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{zz}^* = 2\mu^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*}, \quad \tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (voir les figures (3.4.a) et (3.4.b)).

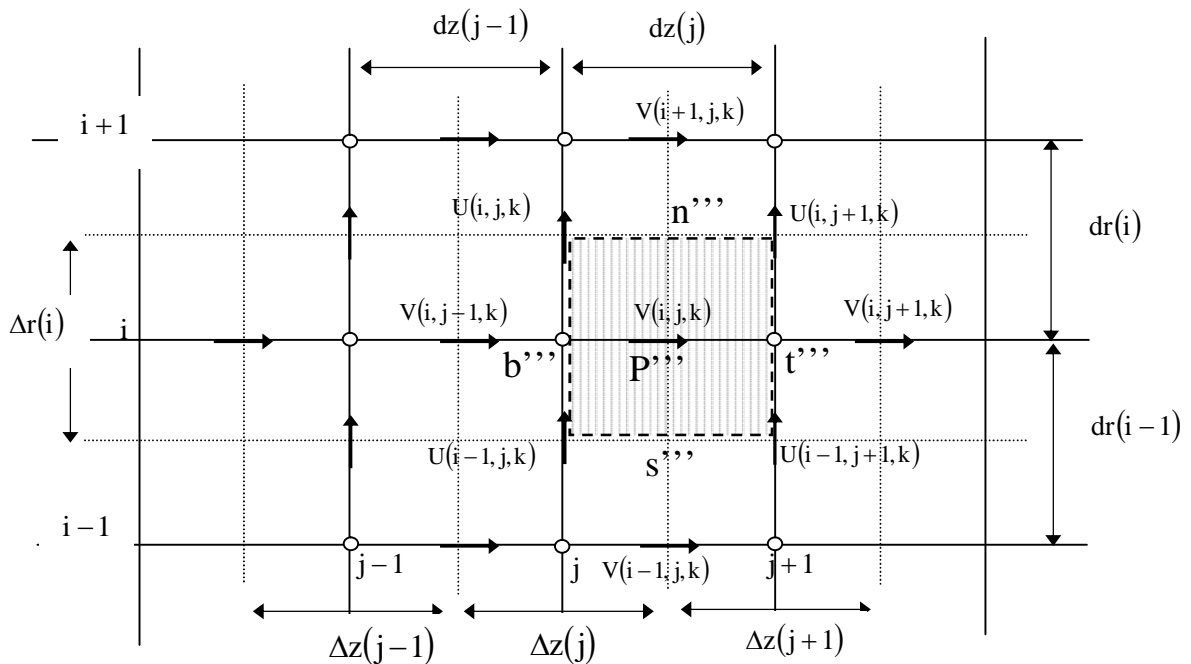


Figure 3.4.a les faces, dans le plan $r - z$, des volumes finis décalés suivant la direction axiale

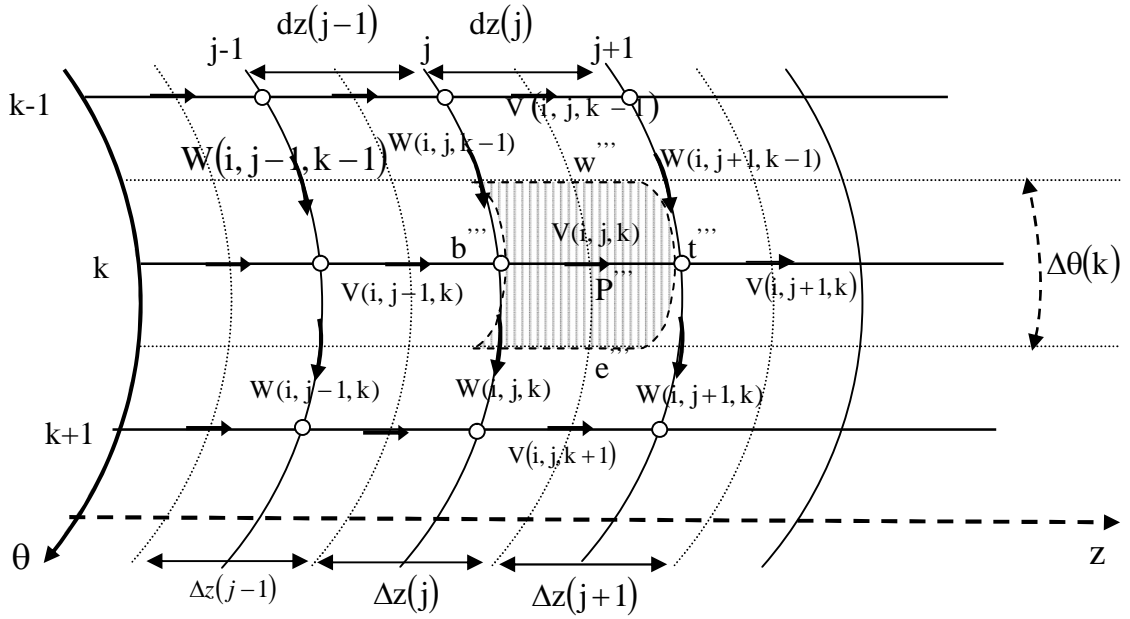


Figure 3.4.b les faces, dans le plan $\theta - z$, des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

• **Terme transitoire :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial V}{\partial t} \Big| r dr d\theta dz = \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t} - 4V_{P_v}^t + V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_p$$

• **Termes advectifs :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^{t} r dr d\theta dz - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(r_{n_v} U_{n_v}^t V_{n_v}^t - r_{s_v} U_{s_v}^t V_{s_v}^t) - (r_{n_v} U_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - r_{s_v} U_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t}) \right] \Delta \theta_p dz_t$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (WV) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (WV) \Big|^{t} r dr d\theta dz - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (WV) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(W_{e_v}^t V_{e_v}^t - W_{w_v}^t V_{w_v}^t) - (W_{e_v}^{t-\Delta t} V_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} V_{w_v}^{t-\Delta t}) \right] \Delta r_p dz_t$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v}\mathbf{v}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v}\mathbf{v}) \Big|^t r dr d\theta dz - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v}\mathbf{v}) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left[2(\mathbf{v}_{t_v}^t \mathbf{v}_{t_v}^t - \mathbf{v}_{b_v}^t \mathbf{v}_{b_v}^t) - (\mathbf{v}_{t_v}^{t-\Delta t} \mathbf{v}_{t_v}^{t-\Delta t} - \mathbf{v}_{b_v}^{t-\Delta t} \mathbf{v}_{b_v}^{t-\Delta t}) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

• Terme de pression :

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} - \frac{\partial P}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta z_p$$

• Termes diffusifs :

• Le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz})$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz =$$

$$2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu^t \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr d\theta dz -$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr d\theta dz =$$

$$\left\{ 2 \left[r\mu^t \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_v}^{n_v} - \left[r\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_v}^{n_v} \right\} \Delta \theta_p dz_t =$$

$$\left[2\mu_{n_v}^t r_{n_v} \left(\frac{U_{n_v t_v}^t - U_{n_v b_v}^t}{dz_t} \right) - 2\mu_{s_v}^t r_{s_v} \left(\frac{U_{s_v t_v}^t - U_{s_v b_v}^t}{dz_t} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t -$$

$$\left[\mu_{n_v}^{t-\Delta t} r_{n_v} \left(\frac{U_{n_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{n_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} r_{s_v} \left(\frac{U_{s_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{s_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) \right] \Delta \theta_p dz_t +$$

$$\left(2\mu_{n_v}^t - \mu_{n_v}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{n_v} \frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) \Delta \theta_p dz_t - \left(2\mu_{s_v}^t - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{s_v} \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \Delta \theta_p dz_t$$

Avec

$$\mu_{n_v} = \frac{dr_n}{\frac{\Delta r_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta r_N}{\mu_{NT}}} + \frac{dr_n}{\frac{\Delta r_P}{\mu_P} + \frac{\Delta r_N}{\mu_N}}, \quad \mu_{s_v} = \frac{dr_s}{\frac{\Delta r_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta r_S}{\mu_{ST}}} + \frac{dr_s}{\frac{\Delta r_P}{\mu_P} + \frac{\Delta r_S}{\mu_S}}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{t_v} &= \mu_T = \mu(i, j+1, k) & , & & \mu_P &= \mu(i, j, k) \\
 \mu_{NT} &= \mu(i+1, j+1, k) & , & & \mu_N &= \mu(i+1, j, k) \\
 \mu_{ST} &= \mu(i-1, j+1, k) & , & & \mu_S &= \mu(i-1, j, k) \\
 dr_{n_u} &= \Delta r_N = \Delta r(i+1) & , & & dr_{s_u} &= \Delta r_P = \Delta r(1) \\
 U_{n_v t_v} &= U(i, j+1, k) & , & U_{s_v t_v} &= U(i-1, j+1, k) & , & U_{n_v b_v} &= U(i, j, k) & , & U_{s_v b_v} &= U(i-1, j, k) \\
 V_{N_v} &= V(i+1, j, k) & , & V_{P_v} &= V(i, j, k) & , & V_{S_v} &= V(i-1, j, k) \\
 r_{n_v} &= r_c(i) & , & r_{s_v} &= r_c(i-1) & , & dr_s &= dr(i-1) & , & dr_n &= dr(i) \\
 \Delta r_N &= \Delta r(i+1) & , & \Delta r_P &= \Delta r(i) & , & \Delta r_S &= \Delta r(i-1)
 \end{aligned}$$

• le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z})$

$$\begin{aligned}
 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz &= \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}) \Big|^{t+\Delta t} dr d\theta dz = \\
 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right] \right\} dr d\theta dz &- \\
 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{t-\Delta t} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right] \right\} dr d\theta dz &= \\
 \left\{ \left[2\mu^t \left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_v}^{e_v} - \left[\mu^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_v}^{e_v} \right\} \Delta r_p dz_t &= \\
 \left[\left(2\mu^t \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^t + \mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} \right) \right]_{w_v}^{e_v} \Delta r_p dz_t + \left[\left(2\mu^t - \mu^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right]_{w_v}^{e_v} \Delta r_p dz_t &= \\
 \left[2\mu_{e_v}^t \left(\frac{W_{e_v t_v}^t - W_{P_v}^t}{dz_t} \right) - 2\mu_{w_v}^t \left(\frac{W_{w_v t_v}^t - W_{w_v b_v}^t}{dz_t} \right) \right] \Delta r_p dz_t &- \\
 \left[\mu_{e_v}^{t-\Delta t} \left(\frac{W_{e_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{P_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) - \mu_{w_v}^t \left(\frac{W_{w_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) \right] \Delta r_p dz_t &+ \\
 \left(2\mu_{e_v}^t - \mu_{e_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{r_p d\theta_e} \right) \Delta r_p dz_t - \left(2\mu_{w_v}^t - \mu_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - U_{W_v}^{t+\Delta t}}{r_p d\theta_w} \right) \Delta r_p dz_t &
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_{e_v} = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_{ET}}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E}}, \quad \mu_{w_w} = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_{WT}}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W}}$$

$$\mu_{t_v} = \mu_T = \mu(i, j+1, k), \quad \mu_w = \mu(i, j, k-1),$$

$$\mu_E = \mu(i, j, k+1), \quad \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$\mu_{ET} = \mu(i, j+1, k+1), \quad \mu_{WT} = \mu(i, j+1, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k), \quad d\theta_w = d\theta(k-1), \quad r_p = r_p(i)$$

$$\Delta\theta_P = \Delta\theta(k), \quad \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad \text{et} \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$W_{e_v, t_v} = W(i, j+1, k), \quad W_{w_v, t_v} = W(i, j+1, k-1), \quad W_{w_v, b_v} = W(i, j, k-1), \quad W_{P_v} = W(i, j, k),$$

$$V_{E_v} = V(i, j, k+1), \quad V_{P_v} = V(i, j, k), \quad V_{W_v} = V(i, j, k-1)$$

• le terme $\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})$

$$\int_{w_v, s_v, b_v}^{e_v, n_v, t_v} \int_{s_v, b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \int_{w_v, s_v, b_v}^{e_v, n_v, t_v} \int_{s_v, b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz =$$

$$\left\{ 2 \left[2\mu^t \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \Big|_{b_v}^{t+\Delta t, t_v} - \left[2\mu^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \Big|_{b_v}^{t+\Delta t, t_v} \right] \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p =$$

$$\left[2 \left(2\mu_{t_v}^t - \mu_{t_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{T_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta z_T} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p - \left[2 \left(2\mu_{b_v}^t - \mu_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta z_P} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

Avec :

$$\mu_{t_v} = \mu_T = \mu(i, j+1, k), \quad \mu_{b_v} = \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$\Delta z_T = \Delta z(j+1), \quad \Delta z_P = \Delta z(j)$$

$$V_{T_v} = V(i, j+1, k), \quad V_{P_v} = V(i, j, k), \quad V_{B_v} = V(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t} + S_v^{t+\Delta t}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A_N = dn &= \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{n_v}^t - \mu_{n_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{n_v} \Delta\theta_p dz_t}{dr_n} & , \quad A_S = ds &= \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{s_v}^t - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{s_v} \Delta\theta_p dz_t}{dr_s} \\
 A_E = de &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{e_v}^t - \mu_{e_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p dz_t}{r_p d\theta_e} & , \quad A_W = dw &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{w_v}^t - \mu_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p dz_t}{r_p d\theta_w} \\
 A_T = dt &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{t_v}^t - \mu_{t_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p \Delta\theta_p}{\Delta Z_T} & , \quad A_B = db &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_{b_v}^t - \mu_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p \Delta\theta_p}{\Delta Z_P}
 \end{aligned}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta\theta_p dz_t}{\Delta t} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
 S_v^{t+\Delta t} &= \frac{4V_{p_v}^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta\theta_p dz_t - \frac{V_{p_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta\theta_p dz_t + \\
 & \left[fn_v^{t-\Delta t} - fn_v^t \right] + \left[fs_v^t - fs_v^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_v^{t-\Delta t} - fe_v^t \right] + \left[fw_v^t - fw_v^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_v^{t-\Delta t} - ft_v^t \right] + \left[fb_v^t - fb_v^{t-\Delta t} \right] + \\
 & \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{n_v}^t r_{n_v} \frac{U_{n_v t_v}^t - U_{n_v b_v}^t}{dz_t} - 2\mu_{s_v}^t r_{s_v} \frac{U_{s_v t_v}^t - U_{s_v b_v}^t}{dz_t} - \\ & \mu_{n_v}^{t-\Delta t} r_{n_v} \frac{U_{n_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{n_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} + \mu_{s_v}^{t-\Delta t} r_{s_v} \frac{U_{s_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{s_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \end{aligned} \right] \Delta\theta_p dz_t + \\
 & \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_{e_v}^t \frac{W_{e_v t_v}^t - W_{p_v}^t}{dz_t} - 2\mu_{w_v}^t \frac{W_{w_v t_v}^t - W_{w_v b_v}^t}{dz_t} - \\ & \mu_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{W_{w_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} + \mu_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{W_{e_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{p_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \end{aligned} \right] \Delta r_p dz_t + (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p
 \end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_v^{t+\Delta t} = b_v + (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P U_{p_v}^{t+\Delta t} = A_N U_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_v}^{t+\Delta t} + b_v + (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p \quad (3.21)$$

Comme $U_{p_v}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse V à l'interface t du volume typique ($V_t^{t+\Delta t}$),

on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_t^{t+\Delta t}$:

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t} + b_v + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.22)$$

3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie

Cette équation exprimée en termes de flux thermiques s'écrit : (2.6)

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* U^* T^* \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(W^* T^* \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(V^* T^* \right) = G^* - \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* q_r^* \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_\theta^* \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(q_z^* \right) \right]$$

$$\text{Avec } G^* = \begin{cases} K_s^* / (Re_0 Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Et les densités de flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation de l'énergie est discrétisée dans un volume de contrôle typique, donc :

- **Terme transitoire :**

$$\int_{w_s b}^e \int_{s b}^n \int \frac{\partial T}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = \frac{3T_{P_v}^{t+\Delta t} - 4T_{P_v}^t + T_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_p$$

- **Termes advectifs :**

$$\begin{aligned} \int_{w_s b}^e \int_{s b}^n \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz &= 2 \int_{w_s b}^e \int_{s b}^n \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^t r dr d\theta dz - \int_{w_s b}^e \int_{s b}^n \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz = \\ & \left\{ 2 \left[(rUT)_n^t - (rUT)_s^t \right] - \left[(rUT)_n^{t-\Delta t} - (rUT)_s^{t-\Delta t} \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p = \\ & \left\{ 2 \left[\left(r_n U_n \frac{T_N + T_P}{2} \right) - \left(r_s U_s \frac{T_P + T_S}{2} \right) \right]^t - \left[\left(r_n U_n \frac{T_N + T_P}{2} \right) - \left(r_s U_s \frac{T_P + T_S}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p = \\ & \left\{ r_n U_n^t (T_N^t + T_P^t) - r_s U_s^t (T_P^t + T_S^t) \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p - \\ & \left[\left(r_n U_n^{t-\Delta t} \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(r_s U_s^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Avec :

$$T_N = T(i+1, j, K), \quad T_P = T(i, j, K), \quad T_S = T(i-1, j, K)$$

$$U_n = U(i, j, K), \quad U_s = U(i-1, j, K)$$

$$r_n = r_c(i) \quad \text{et} \quad r_s = r_c(i-1)$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{WT}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz &= 2 \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{WT}) \Big|^t r dr d\theta dz - \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{WT}) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz = \\ & \left\{ 2 \left[\left(W_e \frac{T_E + T_P}{2} \right) - \left(W_w \frac{T_P + T_W}{2} \right) \right]^t - \left[\left(W_e \frac{T_E + T_P}{2} \right) - \left(W_w \frac{T_P + T_W}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} \Delta r_p \Delta z_p = \\ & \left\{ W_e^t (T_E^t + T_P^t) \right\} - \left\{ W_w^t (T_P^t + T_W^t) \right\} \Delta r_p \Delta z_p - \\ & \left[\left(W_e^{t-\Delta t} \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(W_w^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} T_E &= T(i, j, K+1) \quad , \quad T_P = T(i, j, K) \quad , \quad T_W = T(i, j, K-1) \\ W_e &= W(i, j, K) \quad \text{et} \quad W_w = W(i, j, K-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{VT}) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz &= 2 \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{VT}) \Big|^t r dr d\theta dz - \int \int \int_{w \ s \ b}^e \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{VT}) \Big|^{t-\Delta t} r dr d\theta dz = \\ & \left\{ 2 \left[(\mathbf{VT})_t^t - (\mathbf{VT})_b^t \right] - \left[(\mathbf{VT})_t^{t-\Delta t} - (\mathbf{VT})_b^{t-\Delta t} \right] \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = \\ & \left\{ 2 \left[\left(V_t \frac{T_T + T_P}{2} \right) - \left(V_b \frac{T_P + T_B}{2} \right) \right]^t - \left[\left(V_t \frac{T_T + T_P}{2} \right) - \left(V_b \frac{T_P + T_B}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = \\ & \left\{ V_t^t (T_T^t + T_P^t) \right\} - \left\{ V_b^t (T_P^t + T_B^t) \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p - \\ & \left[\left(V_t^{t-\Delta t} \frac{T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(V_b^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} T_T &= T(i, j+1, K) \quad , \quad T_P = T(i, j, K) \quad , \quad T_B = T(i, j-1, K) \\ V_t &= V(i, j, K) \quad \text{et} \quad V_b = V(i, j-1, K) \end{aligned}$$

• Termes diffusifs

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) r dr d\theta dz = \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) dr d\theta dz = \\
& \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial r} \left(2r K^t \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz - \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial r} \left(r K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz = \\
& \left(2r K^t \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s^{t+\Delta t} \right)^n \Delta\theta \Delta z - \left(r K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s^{t+\Delta t} \right)^n \Delta\theta \Delta z = \left[(2K^t - K^{t-\Delta t}) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s^{t+\Delta t} \right) \right]^n \Delta\theta \Delta z = \\
& \left\{ (2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}) \left(r_n \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - (2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}) \left(r_s \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right\} \Delta\theta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
K_n &= \frac{2dr_n}{\frac{\Delta r_p}{K_p} + \frac{\Delta r_N}{K_N}} \quad , \quad K_s = \frac{2dr_s}{\frac{\Delta r_p}{K_p} + \frac{\Delta r_S}{K_S}} \\
K_N &= K(i+1, j, K) \quad , \quad K_p = K(i, j, K) \quad , \quad K_S = K(i-1, j, K) \\
dr_n &= dr(i) \quad , \quad dr_s = dr(i-1) \\
\Delta r_N &= \Delta r(i+1) \quad , \quad \Delta r_p = \Delta r(i) \quad , \quad \Delta r_S = \Delta r(i-1) \\
r_n &= r_c(i) \quad \text{et} \quad r_s = r_c(i-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) r dr d\theta dz = \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) dr d\theta dz = \\
& \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2K^t \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz - \int_w^e \int_s^b \int_r^t \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K^{t-\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr d\theta dz = \\
& \left(2K^t \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right)^e \Delta r_p \Delta z_p - \left(K^{t-\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right)^e \Delta r_p \Delta z_p = \left[(2K^t - K^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right) \right]^e \Delta r_p \Delta z_p = \\
& \left\{ (2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r_p} \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\theta_e} \right) - (2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r_p} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\theta_w} \right) \right\} \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
K_e &= \frac{2d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p} + \frac{\Delta\theta_E}{K_E}} \quad , \quad K_w = \frac{2d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p} + \frac{\Delta\theta_W}{K_W}} \\
K_E &= K(i, j, k+1) \quad , \quad K_W = K(i, j, k-1) \\
d\theta_e &= d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1)
\end{aligned}$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad \text{et} \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{w\ s\ b}^e \int\limits{s\ b}^n \int\limits{b}^t \frac{\partial}{\partial z} (q_z) \ rdrd\theta dz &= \int\limits_{w\ s\ b}^e \int\limits{s\ b}^n \int\limits{b}^t \frac{\partial}{\partial z} \left(2K^t \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \ rdrd\theta dz - \int\limits_{w\ s\ b}^e \int\limits{s\ b}^n \int\limits{b}^t \frac{\partial}{\partial z} \left(K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \ rdrd\theta dz = \\ & \left(2K^t \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \Big|_b^t \ r_p \Delta r_p \ \Delta\theta_p - \left(K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \Big|_b^t \ r_p \Delta r_p \ \Delta\theta_p = \left[\left(2K^t - K^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \right] \Big|_b^t \ r_p \Delta r_p \ \Delta\theta_p = \\ & \left\{ \left(2K_t^t - K_t^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{T_T^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) - \left(2K_b^t - K_b^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right\} \ r_p \Delta r_p \ \Delta\theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$K_t = \frac{2dz_t}{\frac{\Delta z_p}{K_p} + \frac{\Delta z_T}{K_T}} \quad , \quad K_b = \frac{2dz_b}{\frac{\Delta z_p}{K_p} + \frac{\Delta z_B}{K_B}}$$

$$K_T = K(i, j+1, k) \quad , \quad K_P = K(i, j, k) \quad , \quad K_B = K(i, j-1, k)$$

$$dz_t = dz(j) \quad , \quad dz_b = dz(j-1)$$

$$\Delta z_T = \Delta z(j+1) \quad , \quad \Delta z_P = \Delta z(j) \quad \text{et} \quad \Delta z_B = \Delta z(j-1)$$

- **Termes de production d'énergie**

$$\int\limits_{w\ s\ b}^e \int\limits{s\ b}^n \int\limits{b}^t G^* \ rdrd\theta dz = G^* \int\limits_{w\ s\ b}^e \int\limits{s\ b}^n \int\limits{b}^t \ rdrd\theta dz = G^* \ r_p \Delta r_p \ \Delta\theta_p \ \Delta z_p$$

La production G^* est constante $\left(G^* = \frac{K_s^*}{Re_0 Pr_0} \right)$.

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P T_P^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_T T_T^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S^{t+\Delta t} \quad (3.23)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_n^t - K_n^{t-\Delta t} \right) \frac{r_n \Delta\theta_p \Delta z_p}{dr_n} \quad , \quad A_S = ds = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_s^t - K_s^{t-\Delta t} \right) \frac{r_s \Delta\theta_p \Delta z_p}{dr_s}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_e^t - K_e^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_e} \quad , \quad A_W = dw = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_w^t - K_w^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left(2K_t^t - K_t^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_P}{dz_t} \quad , \quad A_B = db = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left(2K_b^t - K_b^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_P}{dz_b}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_P dz_t}{\Delta t} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} S^{t+\Delta t} &= \frac{4T_p^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p - \frac{T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p + G^* r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p \\ &+ [fn_v^{t-\Delta t} - fn_v^t] + [fs_v^t - fs_v^{t-\Delta t}] + [fe_v^{t-\Delta t} - fe_v^t] + [fw_v^t - fw_v^{t-\Delta t}] + [ft_v^{t-\Delta t} - ft_v^t] + [fb_v^t - fb_v^{t-\Delta t}] + \\ &\left[\left(U_n^{t-\Delta t} \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - U_n^t (T_N^t + T_P^t) \right] r_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\ &\left[U_s^t (T_P^t + T_S^t) - \left(U_s^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_s \Delta \theta_p \Delta z_p + \\ &\left[\left(W_e^{t-\Delta t} \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - W_e^t (T_E^t + T_P^t) \right] \Delta r_p \Delta z_p + \\ &\left[W_w^t (T_P^t + T_W^t) - \left(W_w^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p + \\ &\left[\left(V_t^{t-\Delta t} \frac{T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - V_t^t (T_T^t + T_P^t) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p + \\ &\left[V_b^t (T_P^t + T_B^t) - \left(V_b^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{t+\Delta t} &= \frac{4T_p^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p - \frac{T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p + G^* r_p \Delta r_p \Delta \theta p \Delta z_p \\ &+ [fn^{t-\Delta t} - fn^t] + [fs^t - fs^{t-\Delta t}] + [fe^{t-\Delta t} - fe^t] + [fw^t - fw^{t-\Delta t}] + [ft^{t-\Delta t} - ft^t] + [fb^t - fb^{t-\Delta t}] \end{aligned}$$

Ou

$$f_n^t = U_n^t (T_N^t + T_P^t) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad , \quad f_n^{t-\Delta t} = \frac{U_n^{t-\Delta t}}{2} (T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$f_s^t = U_s^t (T_S^t + T_P^t) r_s \Delta \theta_p \Delta z_p \quad , \quad f_s^{t-\Delta t} = \frac{U_s^{t-\Delta t}}{2} (T_S^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_s \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$f_e^t = W_e^t (T_E^t + T_P^t) \Delta r_p \Delta z_p \quad , \quad f_e^{t-\Delta t} = \frac{W_e^{t-\Delta t}}{2} (T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$f_w^t = W_w^t (T_W^t + T_P^t) \Delta r_p \Delta z_p \quad , \quad f_w^{t-\Delta t} = \frac{W_w^{t-\Delta t}}{2} (T_W^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$f_t^t = V_t^t (T_T^t + T_P^t) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p, \quad f_t^{t-\Delta t} = \frac{V_t^{t-\Delta t}}{2} (T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

$$f_b^t = V_b^t (T_B^t + T_P^t) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p, \quad f_b^{t-\Delta t} = \frac{V_b^{t-\Delta t}}{2} (T_B^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

3.9 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est discrétisée dans un volume fini typique, donc : (2.2)

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right] r dr d\theta dz = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = (r_n U_n^{t+\Delta t} - r_s U_s^{t+\Delta t}) \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial V}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} r dr d\theta dz = (V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

Et on obtient l'équation de continuité discrétisée :

$$\begin{aligned} & (r_n U_n^{t+\Delta t} - r_s U_s^{t+\Delta t}) \Delta \theta_p \Delta z_p + (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p + \\ & (V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.10 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites sous la même forme générale de l'équation de discrétisation et les coefficients (A_I tel que $I=P, N, S, E, T, B$) des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants seront identifiés. Il y a lieu de signaler que puisque la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques, tandis que les autres conditions seront directement données.

3.10.1 A l'entrée du tube : $z = 0$

Le domaine numérique correspondant est : $j = 1$, $1 \leq i \leq IL$, $1 \leq k \leq KL$

Domaine fluide :

a) pour la composante axiale, par exemple, $V(r^*, \theta, 0, t) = 2(1 - 4r^{*2})$ elle doit vérifier

l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t}(i, j, k)V_p^{t+\Delta t}(i, j, k) = \\ A_N^{t+\Delta t}(i, j, k)V_N^{t+\Delta t}(i+1, j, k) + A_S^{t+\Delta t}(i, j, k)V_S^{t+\Delta t}(i-1, j, k) + \\ A_E^{t+\Delta t}(i, j, k)V_E^{t+\Delta t}(i, j, k+1) + A_W^{t+\Delta t}(i, j, k)V_W^{t+\Delta t}(i, j, k-1) + \\ A_T^{t+\Delta t}(i, j, k)V_T^{t+\Delta t}(i, j+1, k) + A_B^{t+\Delta t}(i, j, k)V_B^{t+\Delta t}(i, j-1, k) + S_v^{t+\Delta t}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Qui devra donc s'écrire :

$$1.V_p^{t+\Delta t} = 0.V_N^{t+\Delta t} + 0.V_S^{t+\Delta t} + 0.V_E^{t+\Delta t} + 0.V_W^{t+\Delta t} + 0.V_T^{t+\Delta t} + 0.V_B^{t+\Delta t} + 2[1 - 4r_p^{*2}(i)]$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t} &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t} &= A_S^{t+\Delta t} = A_E^{t+\Delta t} = A_W^{t+\Delta t} = A_T^{t+\Delta t} = A_B^{t+\Delta t} = 0 \\ S_v^{t+\Delta t} &= 2[1 - 4r_p^{*2}(i)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

b) de même pour les autres variables U, W et la température T, qui sont nulles à l'entrée,

les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t} &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t} &= A_S^{t+\Delta t} = A_E^{t+\Delta t} = A_W^{t+\Delta t} = A_T^{t+\Delta t} = A_B^{t+\Delta t} = 0 \\ S_u^{t+\Delta t} &= 0 \text{ (pour U)}, \quad S_w^{t+\Delta t} = 0 \text{ (pour W)}, \quad S^t = 0 \text{ (pour T)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.10.2 A la sortie du tube : $z = 104.17$

Domaine fluide :

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

Ces conditions sont équations discrétisées à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

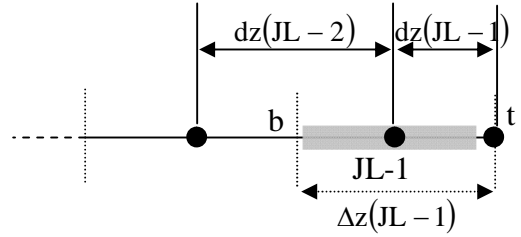
$$\begin{aligned} A_{p_u}^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 1, \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \\ A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$S_u^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0$$

La condition sur la température : $\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=L/Di} = 0$ se discrétise autour de **JL-1**

selon les différences centrées à l'ordre 2 :

$$K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_t - K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b = 0 \Rightarrow$$



$$K_t \frac{T(i, JL, k) - T(i, JL-1, k)}{dz(JL-1)} - K_b \frac{T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)}{dz(JL-2)} = 0$$

$$T(i, JL, k) = T(i, JL-1, k) + \frac{K_b}{K_t} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)]$$

Sachant que dans la partie solide la conductivité est constante $K_n = K_s = K_t = K_b$ donc

$$T(i, JL, k) = T(i, JL-1, k) + \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)]$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approché par l'approximation d'Adam-Bashforth et on déduit les différents coefficients :

$$A_p^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 2 \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T^t(i, JL-1, k) - T^t(i, JL-2, k)] - \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T^{t-\Delta t}(i, JL-1, k) - T^{t-\Delta t}(i, JL-2, k)] \quad (3.30)$$

Dans la partie fluide la conductivité en **t** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

$$A_p^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0$$

$$S^t(i, JL, k) = 2 \frac{K_b^t}{K_t^t} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T^t(i, JL-1, k) - T^t(i, JL-2, k)] \\ - \frac{K_b^{t-\Delta t}}{K_t^{t-\Delta t}} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T^{t-\Delta t}(i, JL-1, k) - T^{t-\Delta t}(i, JL-2, k)]$$

3.10.3 A la paroi

La condition thermique à la paroi est :

$$-K_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r^* = R_0/D_i} = \frac{(h_r + h_c)D_i}{K_o} T \Big|_{r^* = R_0/D_i}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$A_p^{t+\Delta t}(IL, J, K) = 1 + \frac{(h_r + h_c)D_i}{K_o} \frac{dr(IL-1)}{\text{cof}}$$

$$\text{cof} = 2K(IL-1, j, k)^t - K(IL-1, j, k)^{t-\Delta t}$$

$$A_s^{t+\Delta t}(IL, j, k) = 1 \tag{3.31}$$

$$A_N^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_W^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(IL, j, k) = 0$$

$$S^{t+\Delta t}(IL, j, k) = 0$$

3.10.4 Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

$$\left(i=1, \quad 1 \leq j \leq JL, \quad 1 \leq k \leq KL \right)$$

Le problème traité n'est pas axisymétrique, les gradients des variables ne sont pas nuls, ils sont supposés constants à l'axe :

Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 104.17$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

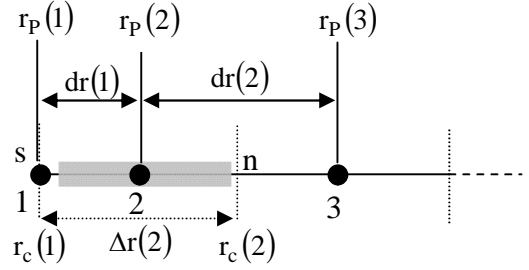
La discrétisation spatiale est celle des différences progressives.

$$\text{a) La condition sur la température est : } \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$$

Une intégration autour du nœud 2 donne :

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_n - \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_s = 0$$

$$\frac{T(3, j, k) - T(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{T(2, j, k) - T(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$



Ou $dr(2) = r_p(3) - r_p(2)$ et $dr(1) = r_p(2) - r_p(1)$

On peut donc en déduire la température au nœud 1 (sur l'axe) sous la forme :

$$T(1, j, k) = (1 + F)T(2, j, k) - FT(3, j, k)$$

$$F = \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} \tag{3.32}$$

Cette approximation est utilisée pour l'interpolation des températures à l'axe. Les températures interpolées seront imposées comme conditions aux limites à l'axe, mais avec la discrétisation d'Adam-Bashforth pour les termes à droite de l'équation (3.32). Les coefficients de l'équation de discrétisation de la condition à l'axe sont :

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = \tag{3.33}$$

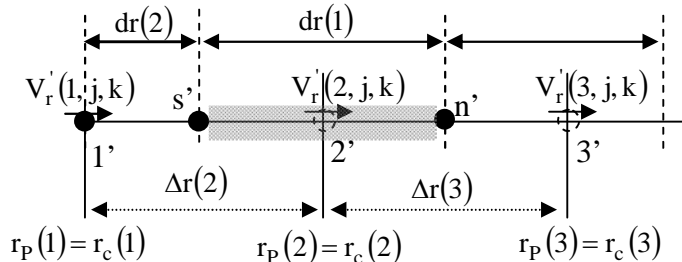
$$A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(1, j, k) = 0$$

$$S^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2[(1 + F)T^t(2, j, k) - FT^t(3, j, k)] - [(1 + F)T^{t-\Delta t}(2, j, k) - FT^{t-\Delta t}(3, j, k)] \tag{3.34}$$

b) La condition à l'axe de la composante U est : $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$

Le maillage étant décalé suivant la direction radiale, l'intégration se fait entre les faces $s \equiv s_u$ et $n \equiv n_u$ du le volume de contrôle décalé :

$$\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{n_u} - \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{s_u} = 0$$



$$\frac{U(3, j, k) - U(2, j, k)}{\Delta r(3)} - \frac{U(2, j, k) - U(1, j, k)}{\Delta r(2)} = 0$$

$$\text{ou } \Delta r(3) = r_c(3) - r_c(2) \quad \text{et} \quad \Delta r(2) = r_c(2) - r_c(1)$$

On obtient :

$$U(1, j, k) = (1 + F)U(2, j, k) - FU(3, j, k) \quad \text{avec } F = \frac{r_c(2) - r_c(1)}{r_c(3) - r_c(2)} \quad (3.35)$$

Les coefficients de discrétisation sont :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = \\ A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(1, j, k) = 0 \\ S^{t+\Delta t}(1, j, k) &= 2[(1 + F)U^t(2, j, k) - FU^t(3, j, k)] - [(1 + F)U^{t-\Delta t}(2, j, k) - FU^{t-\Delta t}(3, j, k)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

c) La condition à l'axe de la composante W est : $\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \right|_{r=0} = 0$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_n - \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_s = 0 \Rightarrow \frac{W(3, j, k) - W(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{W(2, j, k) - W(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$

On déduit, donc :

$$W(1, j, k) = (1 + F)W(2, j, k) - FW(3, j, k)$$

$$F = \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$\begin{aligned} A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = \\ A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(1, j, k) = 0 \end{aligned}$$

$$S_w^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2[(1+F)W^t(2, j, k) - FW^t(3, j, k)] - [(1+F)W^{t-\Delta t}(2, j, k) - FW^{t-\Delta t}(3, j, k)]$$

d) la condition à l'axe de la composante V est : $\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \right|_{r=0} = 0$

L'équation de discrétisation est similaire à celle de la composante W, et ses coefficients sont :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = \\ A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) &= A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(1, j, k) = 0 \\ S_V^{t+\Delta t}(1, j, k) &= 2[(1+F)V^t(2, j, k) - FV^t(3, j, k)] - [(1+F)V^{t-\Delta t}(2, j, k) - FV^{t-\Delta t}(3, j, k)] \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.11 Equations de la pression et de correction de la pression

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.14), (3.16) et (3.18) nécessite la connaissance du champ de pression qui apparaît dans les termes sources. Malheureusement, ce champ est généralement inconnu. Une équation de discrétisation de la pression, à chaque point du calcul, est nécessaire pour une estimation de la pression. Cette estimation doit être corrigée. L'utilisation des équations de discrétisation des vitesses (3.14), (3.16) et (3.18) dans l'équation de discrétisation de continuité permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la pression. On réécrit les équations de discrétisation des quantités de mouvement sous la forme suivant :

$$U_n^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{t+\Delta t} + b_u(i, j, k)}{A_p} + d_n [P_p^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] \quad \text{avec} \quad d_n = \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{A_p}$$

$$W_e^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{t+\Delta t} + b_w(i, j, k)}{A_p} + d_e [P_p^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] \quad \text{avec} \quad d_e = \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{A_p}$$

$$V_t^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{t+\Delta t} + b_v(i, j, k)}{A_p} + d_t [P_p^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}] \quad \text{avec} \quad d_t = \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{A_p}$$

On définit à ce niveau des **pseudos vitesses** $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$, sans les termes de pression, telles que :

$$\hat{U}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{t+\Delta t} + b_u(i, j, k)}{A_p} \quad (3.43)$$

$$\hat{W}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{t+\Delta t} + b_w(i, j, k)}{A_p} \quad (3.44)$$

$$\hat{V}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{t+\Delta t} + b_v(i, j, k)}{A_p} \quad (3.45)$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudos vitesses sous la forme suivante :

$$U^{t+\Delta t} = \hat{U}^{t+\Delta t} + d_n [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] \quad (3.46)$$

$$W^{t+\Delta t} = \hat{W}^{t+\Delta t} + d_e [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] \quad (3.47)$$

$$V^{t+\Delta t} = \hat{V}^{t+\Delta t} + d_t [P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}] \quad (3.48)$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que :

$$U_n^{t+\Delta t} = \hat{U}_n^{t+\Delta t} + d_n [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] \quad , \quad U_s^{t+\Delta t} = \hat{U}_s^{t+\Delta t} + d_s [P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}]$$

$$W_e^{t+\Delta t} = \hat{W}_e^{t+\Delta t} + d_e [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] \quad , \quad W_w^{t+\Delta t} = \hat{W}_w^{t+\Delta t} + d_w [P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}]$$

$$V_t^{t+\Delta t} = \hat{V}_t^{t+\Delta t} + d_t [P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}] \quad , \quad V_b^{t+\Delta t} = \hat{V}_b^{t+\Delta t} + d_b [P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}]$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est :

$$\left(U_n^{t+\Delta t} r_n - U_s^{t+\Delta t} r_s \right) \Delta \theta_p \Delta z_p + \left(W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta z_p + \left(V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0 \quad (3.49)$$

Et en remplaçant les vitesses par leurs expressions précédentes qui introduisent le champ de pression entre les faces du volume de contrôle, on obtient l'équation de pression discrétisée au nœud typique P, qui s'écrit dans sa forme final :

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_T P_T^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S_p \quad (3.50)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad , \quad A_S = r_s dr_s \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.51)$$

$$A_E = d\theta_e \Delta r_p \Delta z_p \quad , \quad A_W = d\theta_w \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.52)$$

$$A_T = r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t \quad , \quad A_B = r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_b \quad (3.53)$$

$$S_p^{t+\Delta t} = \left[r_s \hat{U}_s^{t+\Delta t} - r_n \hat{U}_n^{t+\Delta t} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p + \left[\hat{W}_w^{t+\Delta t} - \hat{W}_e^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta z_p + \left[\hat{V}_b^{t+\Delta t} - \hat{V}_t^{t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.54)$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. On peut comprendre qu'il faudrait des séquences successives d'estimation et de correction de la vitesse et de la pression pour aboutir à un champ de vitesses corrects.

Supposons que :

$$P = P^* + P' \quad \text{et} \quad U = U^* + U' \quad , \quad V = V^* + V' \quad , \quad W = W^* + W'$$

U^*, V^*, W^* sont les vitesses estimées associées à la pression estimée P^*

U', V', W' sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression P' .

Les estimations des vitesses sont corrigées suit :

$$U_n^{t+\Delta t} = U_n^{*t+\Delta t} + d_n \left[P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right] \quad U_s^{t+\Delta t} = U_s^{*t+\Delta t} + d_s \left[P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right]$$

$$W_e^{t+\Delta t} = W_e^{*t+\Delta t} + d_e \left[P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t} \right] \quad W_w^{t+\Delta t} = W_w^{*t+\Delta t} + d_w \left[P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right]$$

$$V_t^{t+\Delta t} = V_t^{*t+\Delta t} + d_t \left[P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right] \quad V_b^{t+\Delta t} = V_b^{*t+\Delta t} + d_b \left[P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right]$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront d'une équation de discrétisation de la correction de pression P' avec des vitesses estimées : U^*, V^*, W^* .

$$A_P P_p^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_T P_T^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S'_p$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = d_n r_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad , \quad A_S = d_s r_s \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.55)$$

$$A_E = d_e \Delta r_p \Delta z_p \quad , \quad A_W = d_w \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.56)$$

$$A_T = d_t r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad , \quad A_B = d_b r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.57)$$

$$S_p^{t+\Delta t} = \left[r_s U_s^{*t+\Delta t} - r_n U_n^{*t+\Delta t} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p + \left[W_w^{*t+\Delta t} - W_e^{*t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta z_p + \left[V_b^{*t+\Delta t} - V_t^{*t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.58)$$

3.12 Algorithme de calcul SIMPLER

La résolution des systèmes d'équations de discrétisation des champs de vitesse, de pression et de la température suit l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) [22] qui est la forme révisée de la version SIMPLE, [22]. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

- 1/ - initialisation (estimation) d'un champ de vitesse.
- 2/ - calcul des coefficients des équations de discrétisation des équations des quantités de mouvement et des pseudo-vitesses $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$.
- 3/ - utilisation des pseudo-vitesses calculées pour calculer la source de l'équation de la pression.
 - calcul des coefficients de discrétisation de cette équation de pression.
 - Résolution de l'équation de pression pour tirer la pression P.
- 4/ - considérer cette solution P comme étant une pression estimée P^* et calculer les vitesses estimées U^{**}, V^{**}, W^{**} .
- 5/ - utilisation de ces vitesses estimées U^{**}, V^{**} et W^{**} pour calculer la source de l'équation de correction de la pression.
 - résolution de l'équation de correction de la pression pour tirer la correction de pression P' .
- 6/ a l'aide de la pression corrigée P' corriger par les vitesses par le biais des équations de correction des vitesses.
- 7/ Résolution de l'équation de discrétisation de l'énergie pour déterminer le champ des températures.
- 8/ vérification de la convergence des calculs (l'atteinte du régime permanent). On arrête les calculs si ce régime est atteint et on stocke les résultats. Sinon, on revient à l'étape 2/ pour effectuer un autre cycle en démarrant avec les vitesses calculées (corrigées) comme une

nouvelle estimation (ou initialisation). On continue cette procédure jusqu'à la convergence des calculs.

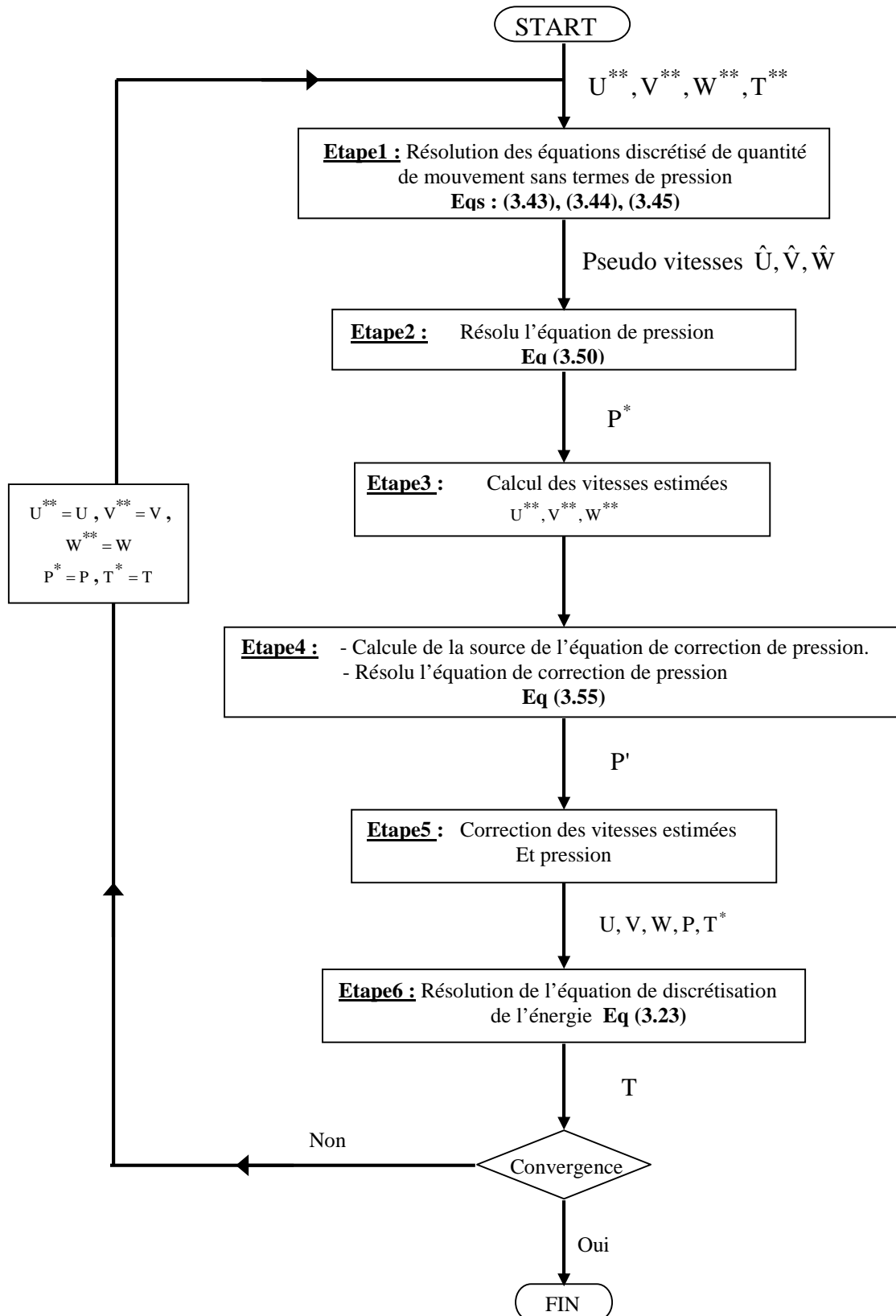


Figure 3.5 : Algorithme SIMPLER

3.13 Technique numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative. Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$\begin{aligned} A_p(i, j, k)\phi_{i,j,k} = & A_N(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + A_S(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\ & A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ & A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions z et θ sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.59) est réécrite :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad (3.60)$$

$$a_i = A_p(i, j, k)$$

$$b_i = A_N(i, j, k) \quad (3.61)$$

$$c_i = A_S(i, j, k)$$

$$d_i = A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k)$$

Le système d'équation (3.60) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA.

Le balayage suivant la direction z est similaire à celui de balayage suivant la direction radiale ; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique.

3.14 La validation du code de calcul

Pour rappel ce code de simulation des écoulements tridimensionnels dans un conduit cylindrique a été validé lors de l'accomplissement de la thèse de Doctorat d'Etat de Boufendi [1]. Nous présentons une des validations effectuées. Elle concerne une comparaison avec la corrélation analytique publiée par Polyakov [23] qui exprime le nombre de Nusselt axial pour un écoulement hydrodynamiquement développé en convection forcée pure dans une conduite cylindrique : $Nu = 4.36 + 1.31(z^+)^{1/3} \exp(-13(z^+)^{1/2})$ où $z^+ = z^*/RePr$. Sur la Figure 3.6, on remarque un bon accord entre les résultats.

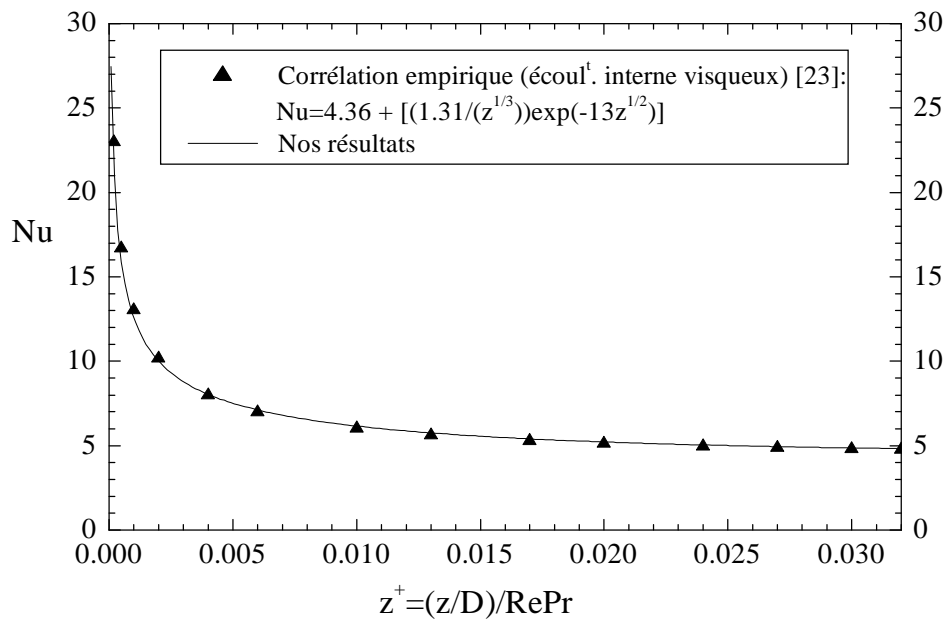


Figure 3.6 Validation du code de calcul (modèle de base) pour la convection forcée ; comparaison avec les valeurs du Nu moyen calculées par la relation de Polyakov [23]

3.15 Détails sur le calcul numérique

Toutes les exécutions de ce code de calcul numérique ont été effectuées sur PC. Les caractéristiques techniques du matériel informatique utilisé sont : Processeur Intel Pentium 4 Dual de fréquence 2.20 GHz, et 1 Go de RAM. En temps réel, le code consomme 30h pour exécuter 10000 itérations. La convergence est atteinte après un nombre total d'itérations égal à 200000 soit environ une durée de 25 jours. La convergence est atteinte lorsqu'il n'y a plus de variations temporelles de toutes les variables dépendantes et lorsque les bilans massiques, dynamiques et thermiques sont satisfaits.

Chapitre 4

Résultats et Discussion

Chapitre 4

Résultats et Discussion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente et on discute les résultats du transfert thermique par convection forcée et mixte, dans un conduit cylindrique horizontal en inconel de conductivité thermique $k_w=20\text{ W/m}^\circ\text{K}$. La paroi, d'épaisseur 0.02 cm et de volume $V = 6.1575 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, est le siège d'une génération interne de chaleur produite par effet Joule suite au passage d'un courant électrique. Dans le cadre de ce travail, différentes puissances ont été considérées pour différentes intensités électriques. Un courant de 45 Ampères fournit un taux de puissance égal à $5.26 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$. Pour des courants de 55 et 65 Ampères les puissances volumiques seraient égales à $7.86 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ et $10.98 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ respectivement. Le fluide de travail étant de l'eau distillée le nombre de Prandtl correspondant, évalué à la température d'entrée fixée à 15°C , est $Pr_0=8.082$.

Dans ce problème, les paramètres de contrôle fixés sont le rapport d'aspect géométrique $A = L/D_i = 104.17$ et le nombre de Prandtl. Les paramètres de contrôle variables sont les nombres de Reynolds et le nombre de Grashof. Différents nombres de Reynolds du régime laminaire ont été considérés : $Re= 400, 600, 800$ et 1000 pour différents nombres de Grashof : $0.0, 2.75 \cdot 10^5, 3.65 \cdot 10^5, 5.1 \cdot 10^5$. Les variations du nombre de Grashof interviennent implicitement dès qu'il y a variation de l'intensité du courant électrique à travers toute l'épaisseur du conduit. Le premier de ces nombres $Gr^* = 0.0$, correspond évidemment à la convection forcée qui est considérée comme un

cas de référence par rapport aux trois autres cas : $Gr^* = 2.58 \cdot 10^5$, $Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$ et $Gr^* = 5.1 \cdot 10^5$.

Aussi, afin d'être efficace dans la rédaction de ce chapitre et ne pas trop se répéter au risque de surcharger le texte par des figures qui se ressemblent qualitativement, on a jugé de présenter un cas complet qui est celui correspondant à : $Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$. Mais, dès qu'il y aura nécessité on introduira les résultats obtenus pour les autres valeurs du nombre de Nusselt

4.2 Le cas de référence : la convection forcée ($Gr^* = 0$)

4.2.1 Le champ d'écoulement

En convection forcée les champs thermique et dynamique sont axisymétriques. L'écoulement imposé à l'entrée est de type Poiseuille dont la seule composante axiale est celle d'un écoulement hydrodynamiquement développé tandis que les composantes angulaire et radiale sont nulles. Ces dernières resteront nulles à travers l'ensemble du conduit car la condition de non-glissement à la paroi qui est une condition aux limites citée précédemment (Chap. 2) ainsi qu'un nombre de Grashof nul sont appliqués. Le profil parabolique à l'entrée imposé comme condition à l'entrée sera donc conservé sur tout le conduit. On peut voir cela sur la figure 4.1 qui représente le champ de vitesse axial à la sortie de conduit pour chaque nombre de Reynolds. Il est clair que le profil est axisymétrique et radialement parabolique. La vitesse axiale augmente de zéro à la paroi, jusqu'à sa valeur maximum (2) au centre du conduit.

4.2.2 Le champ thermique

A l'entrée le fluide se présente avec une température constante. Il est soumis à un chauffage uniformément réparti et produit dans toute l'épaisseur solide du conduit. On peut associer ce régime à celui d'un écoulement hydrodynamiquement développé et en développement thermique. Le nombre de Grashof étant nul ce qui correspond à une convection forcée et de ce fait la distribution des températures du fluide qui subira une augmentation tout le long du conduit devra préserver son caractère axisymétrique en toute

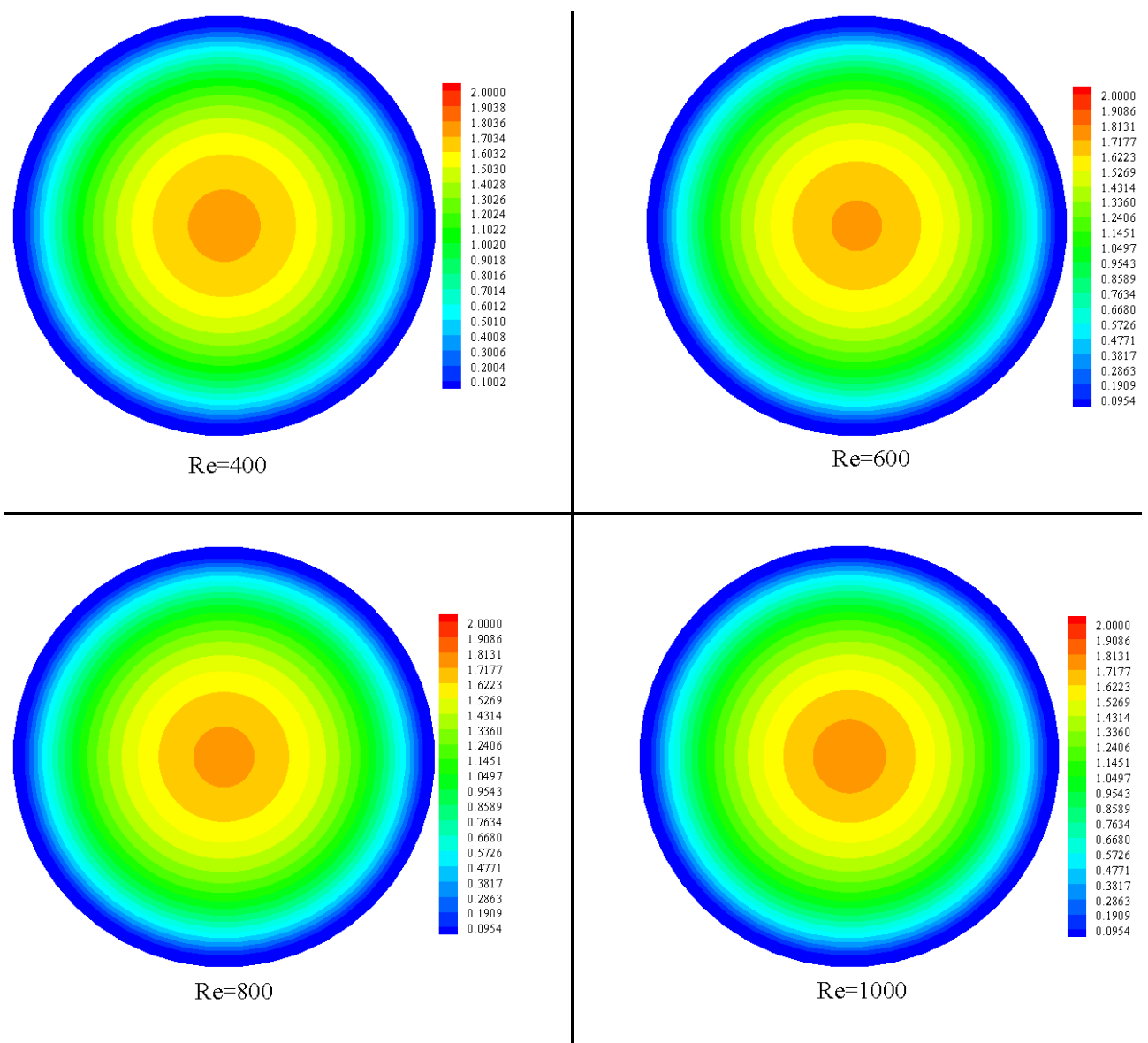


Figure4.1 Champs de vitesse axiale à la sortie du conduit pour les différents nombres de Reynolds

section droite du tube. La Figure 4.2 illustre cette distribution thermique à travers une section à la sortie. On remarque que les isothermes sont des cercles concentriques caractérisées par une répartition ou une stratification radiale des températures dont la température maximale se situe sur la paroi et la minimale sur l'axe du cylindre. L'influence du nombre de Reynolds apparaît sur les niveaux quantitatifs des valeurs de la température. L'augmentation du nombre de Reynolds, qui correspond dans ce cas à une augmentation de la vitesse du fluide (débit massique) se traduit par une diminution du niveau des valeurs de la température. L'illustration de la température moyenne de mélange dans la Figure 4.3 met nettement en évidence cette augmentation axiale et linéaire de la température depuis l'entrée jusqu'à la sortie. C'est le résultat d'un chauffage continu vers le fluide tout au long de son écoulement à travers le conduit. Cette chaleur diffuse radialement depuis la paroi jusqu'au centre du conduit. On remarque aussi la variation de cette température avec la variation du nombre de Reynolds. En effet, la température moyenne de mélange diminue avec l'augmentation de ce dernier. Dans la Figure 4.4 sont représentés pour les différents nombres de Reynolds étudiés, les évolutions axiales de la température de la paroi extérieure du conduit à laquelle on a rajouté la température moyenne de mélange. Sur une faible distance proche de l'entrée, la croissance de cette température de paroi est importante mais ensuite cette croissance est caractérisé par une évolution monotone jusqu'à la sortie. Il est évident que cette évolution des températures le long du conduit est représentative du chauffage continu entre l'entrée et la sortie. Afin de mieux cerner l'influence du nombre de Reynolds on a regroupé dans un même tableau les valeurs des températures moyennes du fluide et celle de la paroi au niveau de la sortie ainsi que les différents écarts atteints. La température pariétale à la sortie est la température qui correspond à la température la plus élevée. La lecture de ces valeurs montre qu'au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, l'écart entre les températures de la paroi et moyennes diminue mais en gardant, d'un nombre de Reynolds à un autre, approximativement un pas égal.

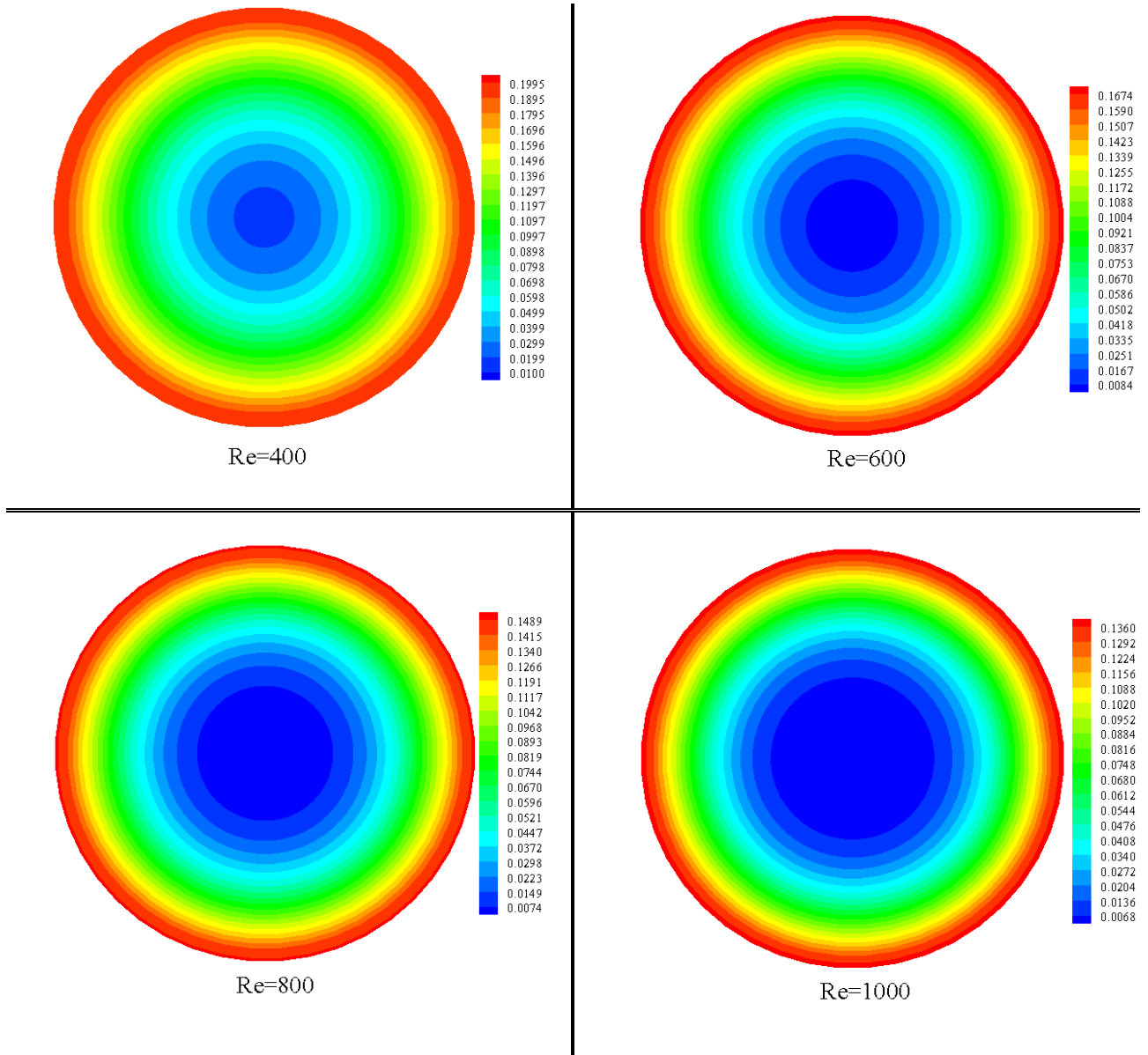


Figure4.2 Champs de température à la sortie du conduit pour les différents nombres de Reynolds

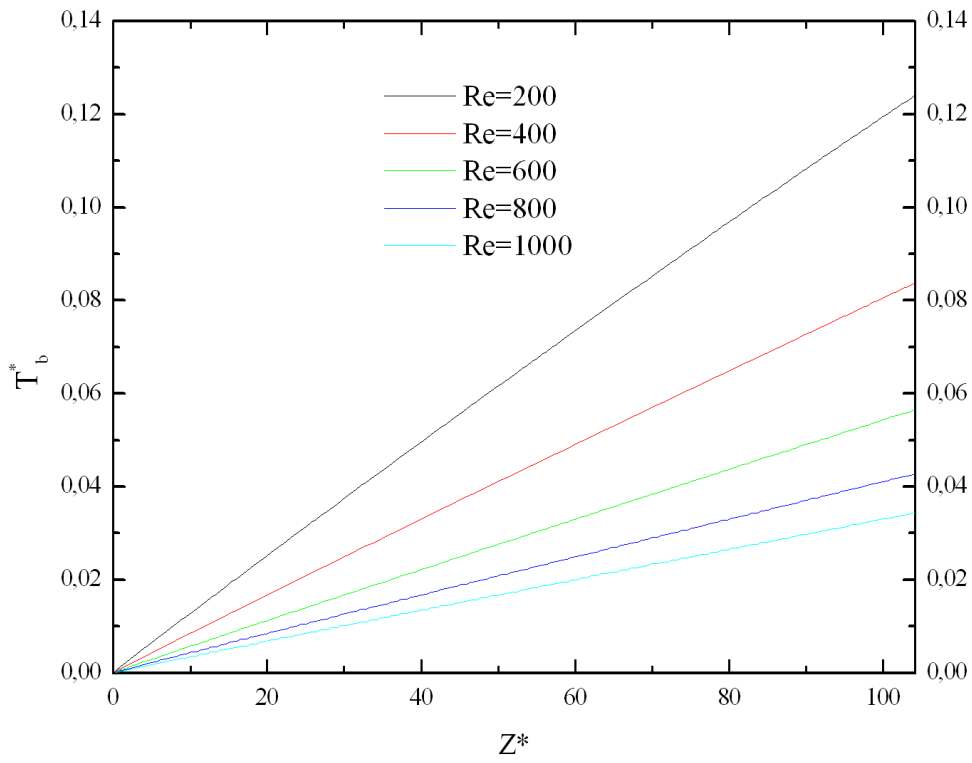
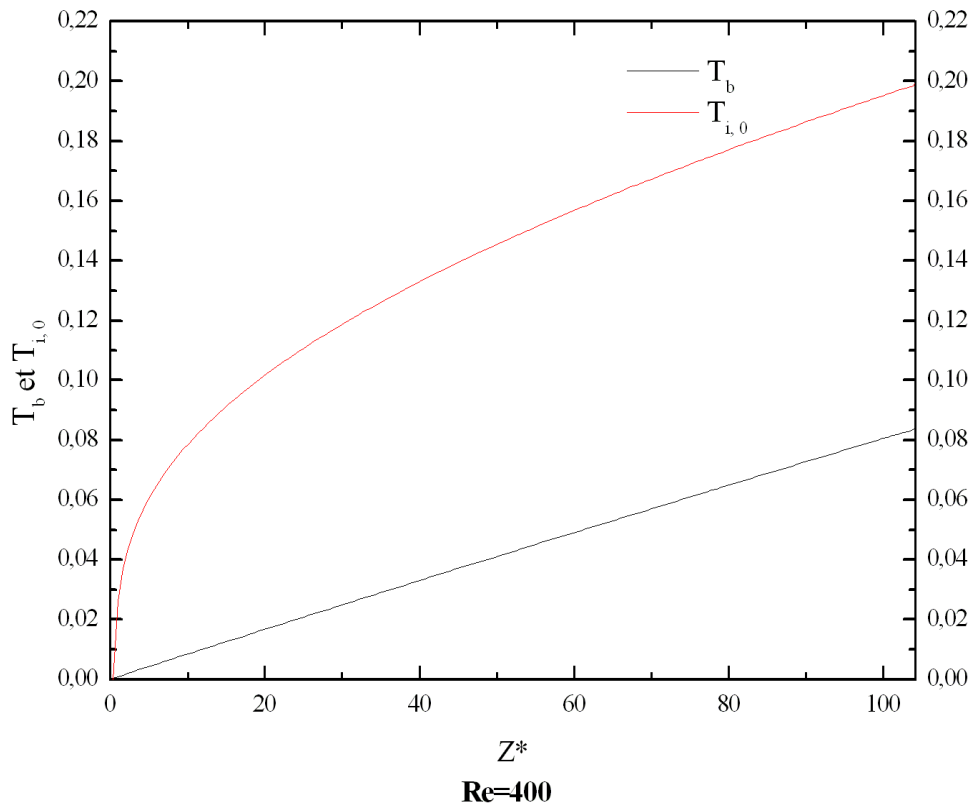
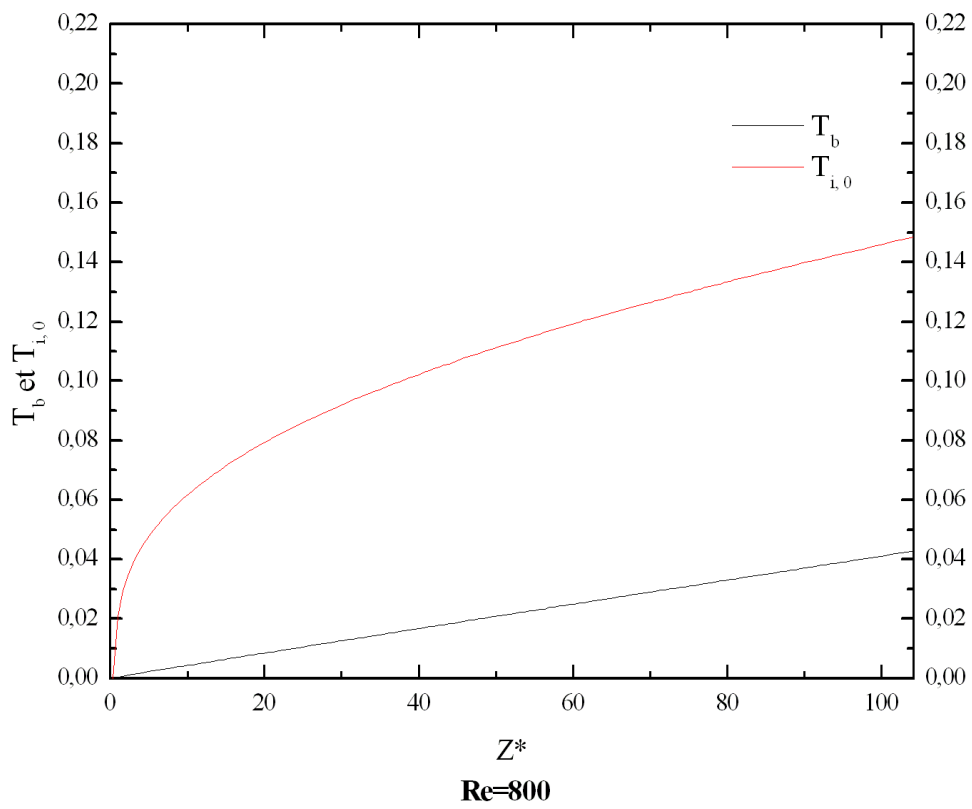
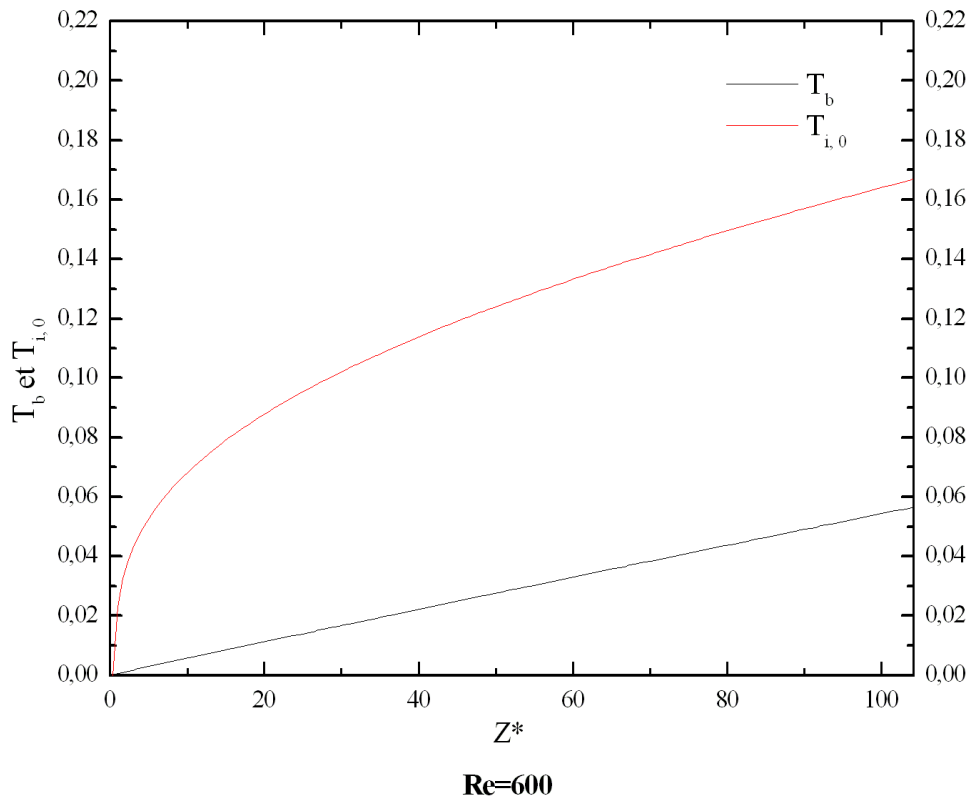


Figure4.3 Evolution axiale de la température moyenne du fluide





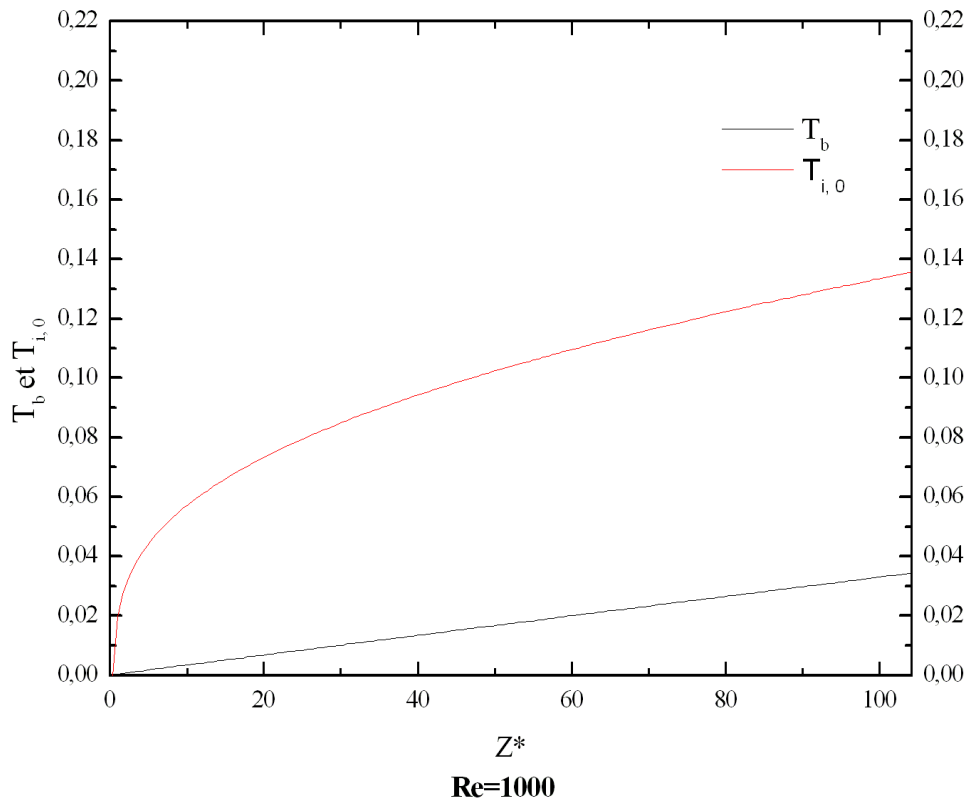


Figure 4.4 Variation axiale de la température de la paroi du conduit et la température moyenne du fluide

Tableau 4.1 : Ecart entre les températures pariétales et moyennes adimensionnelles du fluide

Nombre de Reynolds	Temp. de paroi T_w	Temp. moyenne T_b	Ecart
400	0.20	0.083	0.117
600	0.168	0.056	0.112
800	0.149	0.042	0.107
1000	0.135	0.034	0.101

4.2.3 Le nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt axial défini par $Nu(z^*) = \frac{1}{T_w^*(z^*) - T_b^*(z^*)}$ (éq. 2.26) est représenté dans la Figure 4.5, pour chaque nombre de Reynolds. Ces profils du nombre de Nusselt montrent une diminution axiale continue expliquée par l'augmentation axiale de la

différence des températures de la paroi $T_w^*(z^*)$ et moyenne du fluide $T_b^*(z^*)$ comme l'a montré la Figure 4.4. Cette décroissance est brutale sur de faibles distances à partir de l'entrée mais devient modérée progressivement pour amorcer un comportement quasi-asymptotique suivant la direction axiale. Ce comportement est représentatif du transfert thermique en mode de convection forcée dans un conduit et il indique dans sa zone asymptotique l'atteinte du régime complètement établi de la convection forcée. Les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt à la sortie ainsi que les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur tout le conduit sont reportés dans le tableau 4.2.

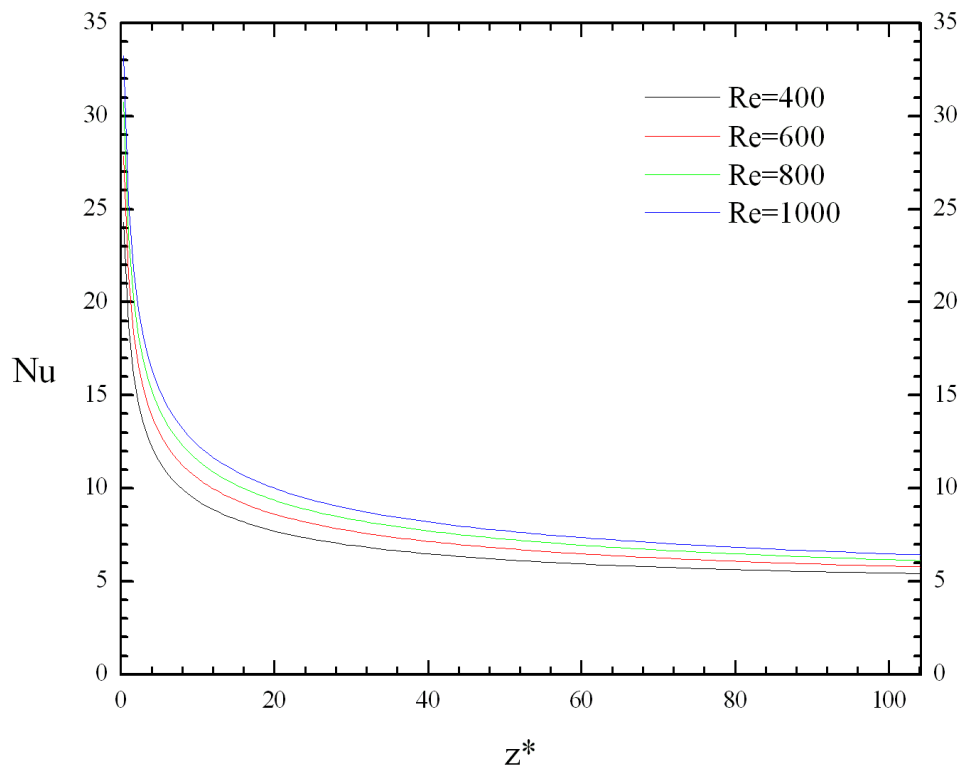


Figure 4.5 Distribution du nombre de Nusselt axial pour la convection forcée et les différents nombres de Reynolds.

Tableau 4.2 : Valeurs des nombres de Nusselt en fonction des nombres de Reynolds

Nombre de Re	400	600	800	1000
Nombre de Nu à la sortie	5.40796	5.76856	6.1054	6.4162
Nu_m	6.98	7.71	8.31	8.84

4.3 Convection mixte pour $Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$

L'augmentation du nombre de Grashof de la valeur zéro vers la valeur $Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$ modifie complètement la structure de l'écoulement. Avec ce nombre de Grashof différent de zéro nous passons d'un mode de transfert de chaleur paroi-fluide de convection forcée vers un mode de convection mixte dont les champs dynamiques et thermiques sont bien spécifiques. Pour rappel une convection mixte est la combinaison simultanée des deux modes de convection : forcée et naturelle. On caractérise souvent la convection mixte par son nombre de Richardson (Ri) qui est le rapport du nombre de Grashof au carré du nombre de Reynolds. Donc pour les différents nombres de Reynolds étudiés, le nombre de Ri sera associé à différentes valeurs comme l'indique le tableau 4.3.1.

Tableau 4.3.1 : Nombres de Richardson associés

$Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$				
<i>Re</i>	400	600	800	1000
<i>Ri</i>	2.28	1.01	0.57	0.37

4.3.1 Ecoulement secondaire

Nous avons regroupés dans les Figures 4.3.1a et 4.3.1b deux phases importantes de l'évolution de cet écoulement secondaire à travers la longueur du conduit pour les quatre nombres de Reynolds étudiés.

La première qui est représentée dans la Figure 4.3.1a illustre l'état où cet écoulement secondaire atteint un niveau de développement très intense. Dès l'entrée du conduit l'écoulement secondaire commence à se développer progressivement pour atteindre après une certaine distance une intensité maximum caractérisée par des valeurs finies des composantes angulaires et radiales de la vitesse. Ces valeurs où la composante angulaire W^* est maximale ainsi que la composante radiale V^* associée sont explicitées dans le tableau 4.3.2 La structure de l'écoulement secondaire présente une symétrie par rapport au diamètre vertical et une formation de deux cellules contrarotatives et symétriques par rapport à ce diamètre vertical. Chaque cellule occupe la moitié de la section droite du tube. Dans chaque cellule il y a clairement la formation de vortex de telle sorte que les vitesses les plus importantes sont au voisinage de la paroi entraînant le fluide dans un mouvement ascendant antihoraire tandis qu'au voisinage de la partie centrale le fluide suit un mouvement descendant. Le même phénomène a lieu par symétrie dans l'autre moitié de la section droite mais dans un sens horaire de l'écoulement. Il est important de préciser que l'influence du nombre de Reynolds apparaît dans la distance parcourue par le fluide pour atteindre son niveau maximum d'intensité de l'écoulement secondaire. On voit que la distance parcourue n'est pas du tout la même. Plus on augmente le nombre de Reynolds plus cette distance augmente.

Tableau 4.3.2 : Vitesses angulaires maximales et vitesses radiales associées lorsque l'écoulement secondaire est le plus intense

$Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$				
Re (Ri)	400 (2.28)	600 (1.01)	800 (0.57)	1000 (0.37)
z^*	14.64891	20.52847	25.71697	32.22759
W^*	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$
U^*	$-3.9 \cdot 10^{-3}$	$-2.64 \cdot 10^{-3}$	$-1.96 \cdot 10^{-3}$	$-1.56 \cdot 10^{-3}$

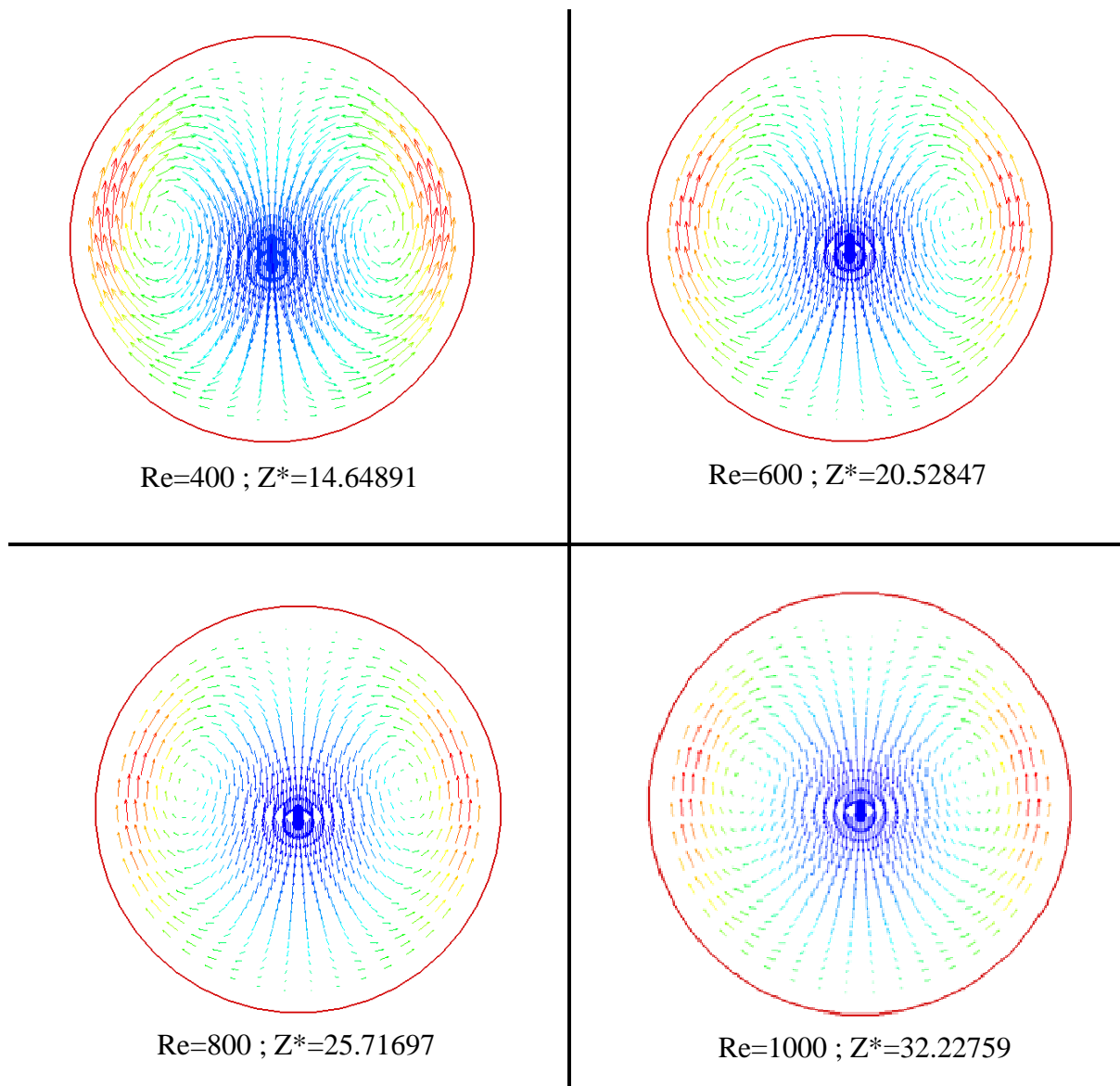
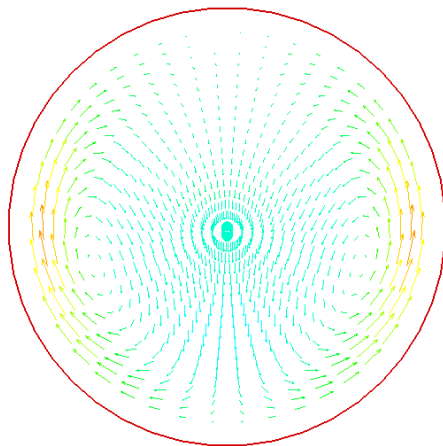


Figure 4.3.1a Ecoulement secondaire en différentes stations axiales et pour différents nombres de Reynolds

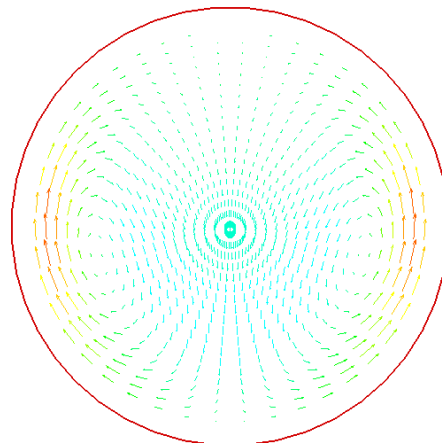
La deuxième phase se rapporte plutôt à l'évolution de cet écoulement secondaire après qu'il ait atteint son niveau d'intensité maximum. Il a été remarqué qu'au delà de cette position axiale un renversement de situation prend effet caractérisé par une diminution progressive de l'intensité de l'écoulement secondaire. Après une certaine distance parcourue par le fluide cette diminution s'estompe de telle sorte que le régime secondaire est complètement établi comme le montre la Figure 4.3.1b. Ici aussi, il faut remarquer que les distances axiales atteintes pour l'installation de ce régime augmentent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Nous avons représenté dans le tableau 4.3.3 les valeurs des composantes de vitesses angulaire et radiale atteintes pour chaque z^* .

Tableau 4.3.3 : Vitesses angulaires et vitesses radiales associées en régime établi

$Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$				
$Re (Ri)$	400 (2.28)	600 (1.01)	800 (0.57)	1000 (0.37)
Z^{**}	14.64891	20.52847	25.71697	32.22759
W^*	$4.44 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$2.60 \cdot 10^{-2}$	$2.14 \cdot 10^{-2}$
U^*	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$



Re=400 ; $Z^*=45.89991$



Re=600 ; $Z^*=53.71266$

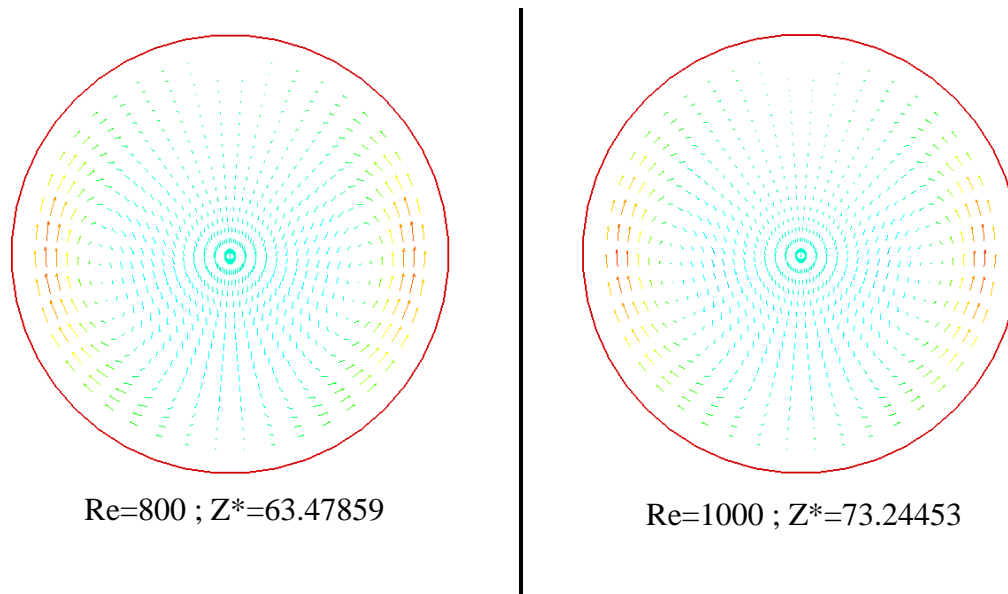


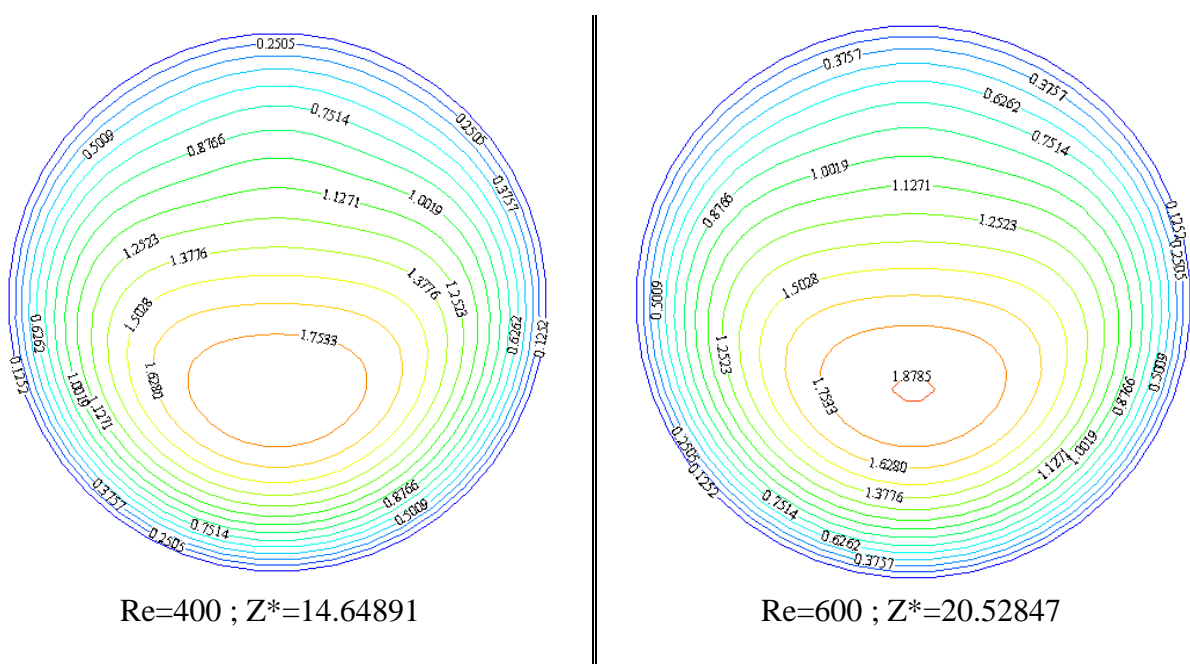
Figure 4.3.1b Structures de l'écoulement secondaire en régime établi pour les différents nombres de Reynolds étudiés.

4.3.2 Champ dynamique axial

Le champ dynamique axial se rapporte à l'évolution de l'écoulement dans la direction axiale sous l'effet de la convection mixte. A l'entrée du conduit ($z^* = 0$) l'écoulement se présente sous une forme parabolique dont le maximum de la composante de la vitesse axiale, $U^* = 2.0$, est situé au centre ($r^* = 0$) du conduit et bien sûr le minimum de vitesse se trouve à la paroi ($r^* = 0.5$) à cause de la condition aux limites cinématique qui est la condition d'adhérence et que le conduit est au repos. En mode de convection mixte, l'écoulement secondaire induit par la contribution de la convection naturelle a une influence directe sur l'écoulement axial. Il provoque des variations angulaires et radiales de la vitesse axiale à travers une section droite et entraîne un déplacement du maximum de la vitesse axiale vers la moitié inférieure à l'axe du conduit. Il est atteint à la valeur angulaire, $\theta = \pi$. Cette structure est représentée dans les Figures 4.3.2a et 4.4.2b pour les différents nombres de Reynolds étudiés où on voit les distributions polaires de la vitesse axiale en ces différentes positions. La Figure 4.3.2a représente ces distributions aux positions correspondantes à l'écoulement secondaire maximum tandis que la Figure 4.3.2b aux positions où l'écoulement est établi. L'inspection de ces figures distingue clairement les distorsions des lignes iso vitesses. Ces lignes montrent un profil

circulaire juste au voisinage de la paroi. Mais en allant dans le sens décroissant de la direction radiale le corps du fluide présente un aplatissement des iso vitesses dans toute la partie supérieure ainsi que des gradients de vitesse qui vont en augmentant dans le sens de diminution radiale. En deçà du maximum de vitesse, dans la partie inférieure du conduit on remarque que des portions des iso vitesses exhibent des profils nettement circulaires et des lignes très rapprochées l'une de l'autre caractérisées par des gradients de vitesse. Pour tous les nombres de Reynolds étudiés les maximums de la vitesse axiale atteints sont : $U^* = 1.88741, 1.885, 1.886, 1.886$ pour $Re = 400, 600, 800$ et 1000 respectivement et leurs positions respectives sont: $r^* = 0.1625, 0.1625, 0.1625, 0.1625$.

Dans la zone d'établissement du régime d'écoulement les lignes iso vitesses ont perdu leur profil aplati de la partie supérieure comme l'illustre la Figure 4.3.2b. Elles ont subi une distorsion dont une bonne partie proche de la paroi à une tendance vers des lignes circulaires. Cela est dû à la diminution de l'intensité de l'écoulement secondaire. Pour satisfaire l'équation de continuité, le comportement de la vitesse axiale doit contrecarrer le comportement polaire des composantes angulaire et radiale de la vitesse. Une répercussion immédiate sur la position du maximum de la vitesse axiale fait que ce maximum remonte vers la partie centrale du conduit. Pour les différentes positions axiales les lieux du maximum sont : $r^* = 0.08750, 0.1375, 0.1625, 0.1625$.



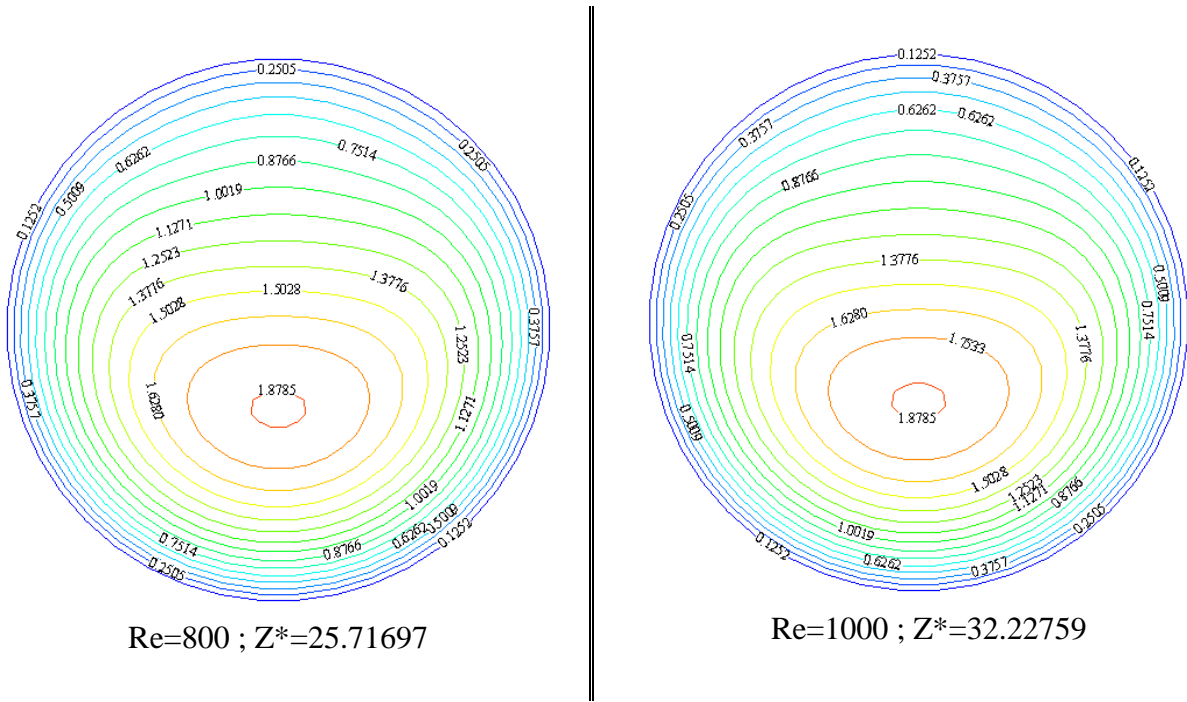


Figure 4.3.2a Iso vitesses axiales dans des sections droites correspondantes à l'écoulement secondaire le plus intense

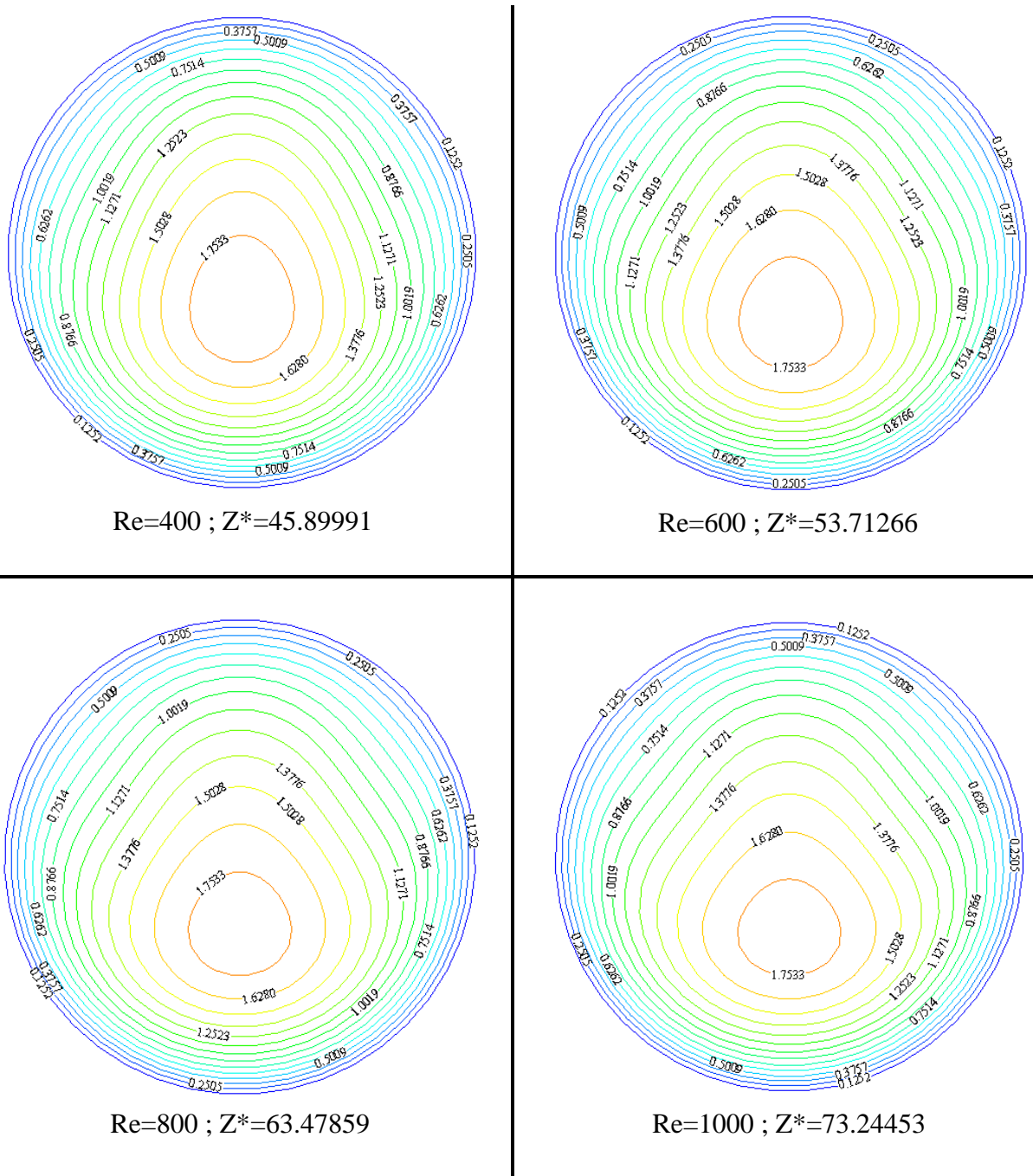


Figure 4.3.2b Iso vitesses axiales dans des sections droites correspondantes à l'écoulement secondaire établi

4.3.3 Champ thermique

Les transferts de chaleur en mode de convection mixte modifient complètement le champ thermique tout particulièrement les distributions des températures du système fluide-paroi dans la direction axiale de l'écoulement ainsi que dans la direction transversale

à travers toute section droite du conduit. Pour rappel, en mode de convection forcée la variation du champ des températures est radiale et axiale uniquement comme cela a été vu précédemment (paragraphe 4.2). La topographie présente des isothermes circulaires dont le maximum est à la paroi et le minimum est sur l'axe. Cette topographie est complètement différente en convection mixte. En gardant les mêmes positions axiales choisies lors de la représentation de l'écoulement secondaire et l'écoulement axial, on représente le champ des températures en mode de convection mixte dans les Figures 4.3.3a et 4.3.3b ainsi que dans les Figures 4.3.4 et 4.3.5 pour traduire des évolutions axiales du champ des températures.

La source interne d'énergie uniformément produite dans la paroi sera à l'origine de la création de courants convectifs transversaux dans le fluide. Dans la partie la plus basse du conduit ($\theta = \pi$), au voisinage de la paroi, le fluide se réchauffe et amorce son mouvement ascendant jusqu'en haut du conduit ($\theta = 0$). A partir de ce point, le mouvement du fluide s'inverse. Il devient un mouvement descendant vers la zone centrale du conduit où il se refroidit. Le fluide froid occupe la zone centrale tandis que le fluide chaud occupe la zone au voisinage de la paroi. Cette distribution angulaire et radiale de la température fait que le maximum des températures est toujours en haut du conduit $\theta = 0$ tandis que le minimum est en $\theta = \pi$. Pour les différents nombres de Reynolds étudiés les lieux des minimums de température sont toujours en $\theta = \pi$ mais en des positions radiales distinctes : $r^* = 0.0375, 0.0875, 0.01625, 0.01875$ pour $Re = 400, 600, 800$ et 1000 successivement. Ce phénomène est illustré dans les Figures 4.3.3a et 4.3.3b.

Tableau 4.3.4 : Températures maximales adimensionnelles sur tout le conduit

$Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$				
$Re (Ri)$	400 (2.28)	600 (1.01)	800 (0.57)	1000 (0.37)
T^*	0.2025	0.1740	0.1584	0.1501

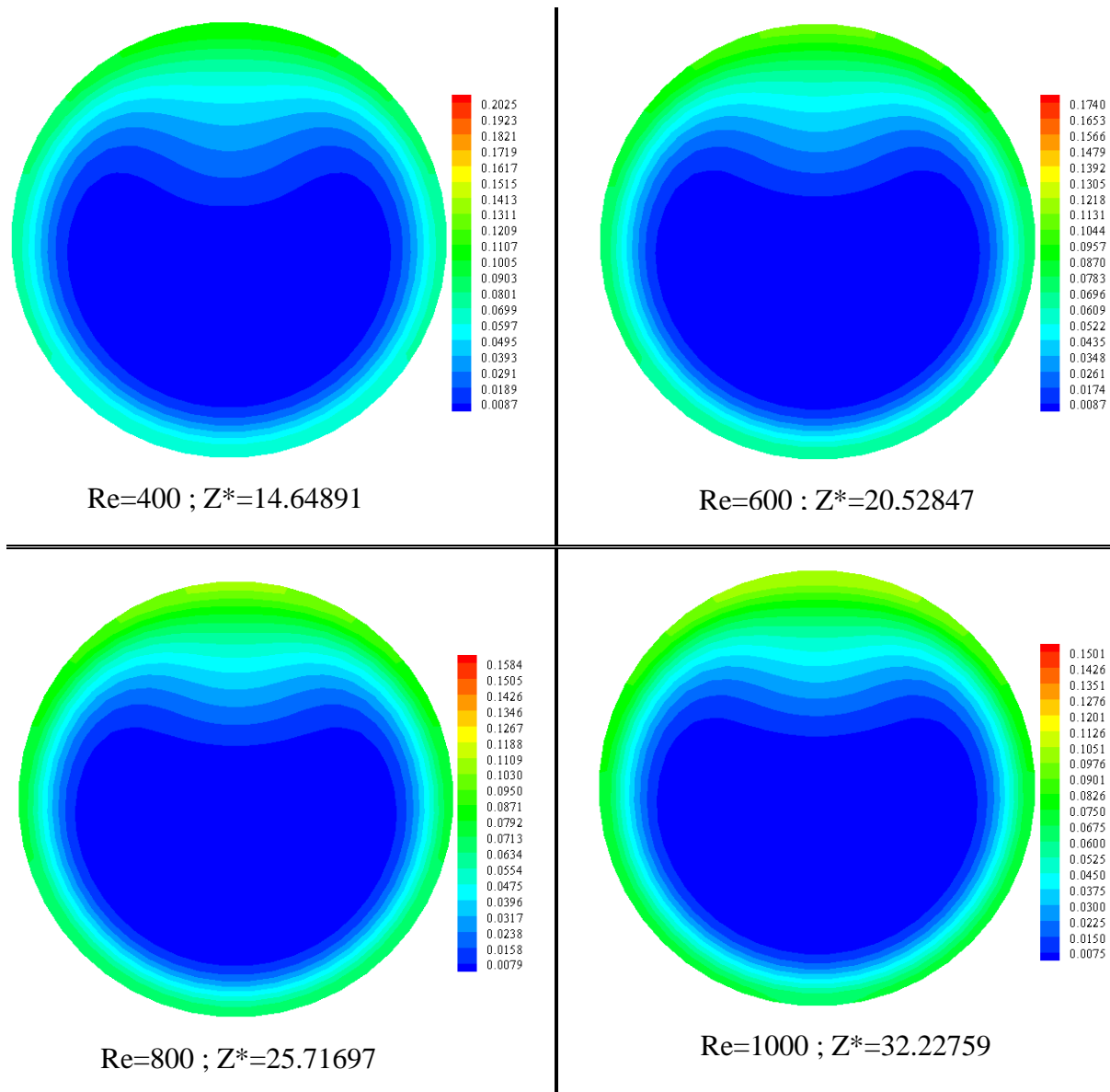


Figure 4.3.3a Isothermes dans des sections droites correspondantes à l'écoulement secondaire le plus intense

Qualitativement, la distribution des températures dans le fluide est similaire à travers toute section droite du conduit que ce soit en zone où l'écoulement secondaire est à son maximum où en zone où l'écoulement est établi. On distinguera dans tous les cas une symétrie par rapport au diamètre vertical et on aura toujours un maximum en haut du conduit et un minimum des températures dans la moitié inférieure du conduit. Mais, quantitativement il apparaît d'importantes différences de températures à travers une même section droite pour un même nombre de Reynolds et entre différents nombres de Reynolds. Il est important de faire remarquer que le niveau des températures diminue d'une façon appréciable lorsque le nombre de Reynolds augmente. Mais pour un même nombre de

Reynolds le niveau des températures du système fluide-paroi subit une augmentation appréciable dans la direction axiale comme le montre les Figures 4.3.3a et b. Cette augmentation axiale de la température du fluide est bien représentée dans la Figure 4.3.4 où la température moyenne de mélange est tracée le long de la direction axiale. On remarque une augmentation linéaire rectiligne depuis l'entrée jusqu'à la sortie du conduit.

Cependant, plus on augmente le nombre de Reynolds plus les pentes de ces droites subissent une décroissance. A titre indicatif, entre les nombres de Reynolds $Re=400$ et 1000 la température moyenne à la sortie du conduit est réduite de moitié.

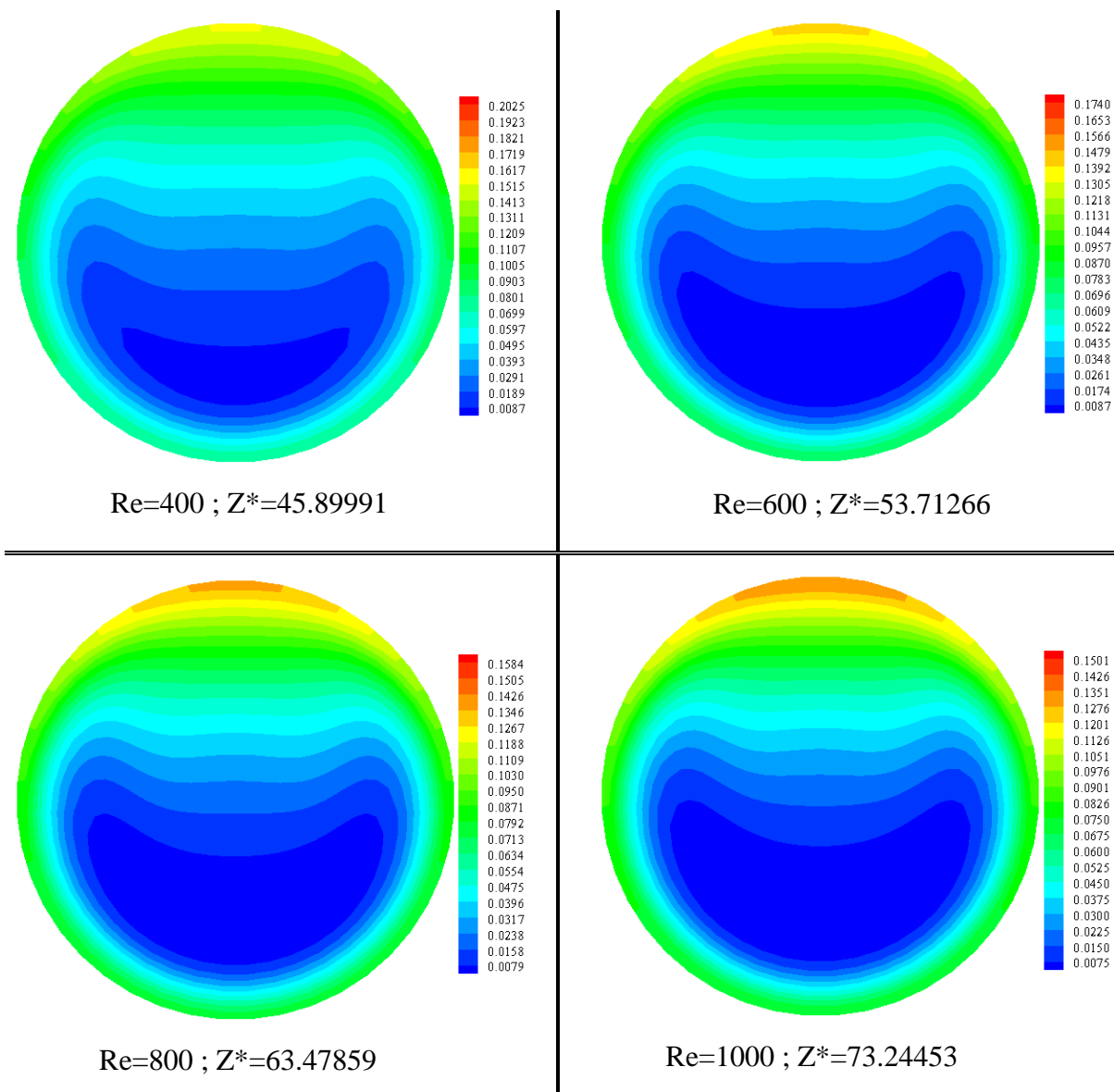


Figure 4.3.3b Isothermes dans des sections droites correspondantes à l'écoulement secondaire établi

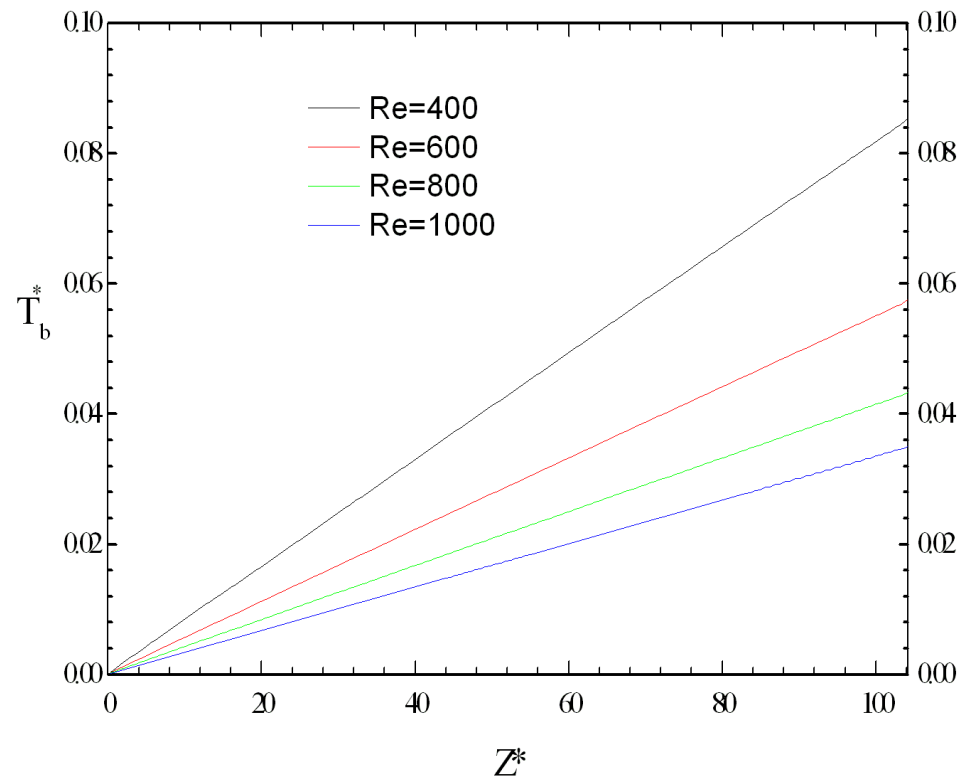


Figure 4.3.4 Evolution axiale de la température moyenne du fluide pour différents nombres de Reynolds

Dans la Figure 4.3.5 nous présentons les variations axiales des températures de la paroi extérieure du conduit $r^* = 0.5208$ en haut $\theta = 0$ et en bas du conduit $\theta = \pi$ pour les différents nombres de Reynolds étudiés. Les variations angulaires et axiales entre les températures de la paroi sont importantes. Au voisinage de l'entrée les températures augmentent rapidement d'une manière identique permettant de dire que dans cette très courte zone la convection est de type forcée. Mais cela ne dure presque pas du tout puisque juste après ces températures se séparent l'une de l'autre. La température en haut du conduit développe une croissance monotone alors que celle du bas elle subit un comportement assez spécifique puisque avec l'augmentation du nombre de Reynolds cette température ne change presque pas et devient constante. Ce comportement prône à l'existence d'un palier dont la distance varie avec le nombre de Reynolds. Il faut distinguer aussi que l'écart des températures entre le haut et le bas du conduit varie quasiment à pas égal en passant successivement d'un nombre de Reynolds à un autre. C'est quasiment le même comportement thermique lorsqu'il s'agit des deux autres nombres de Grashof soit : $2.58 \cdot 10^5$ et $5.1 \cdot 10^5$ dont la Figure 4.4.6 en est représentative.

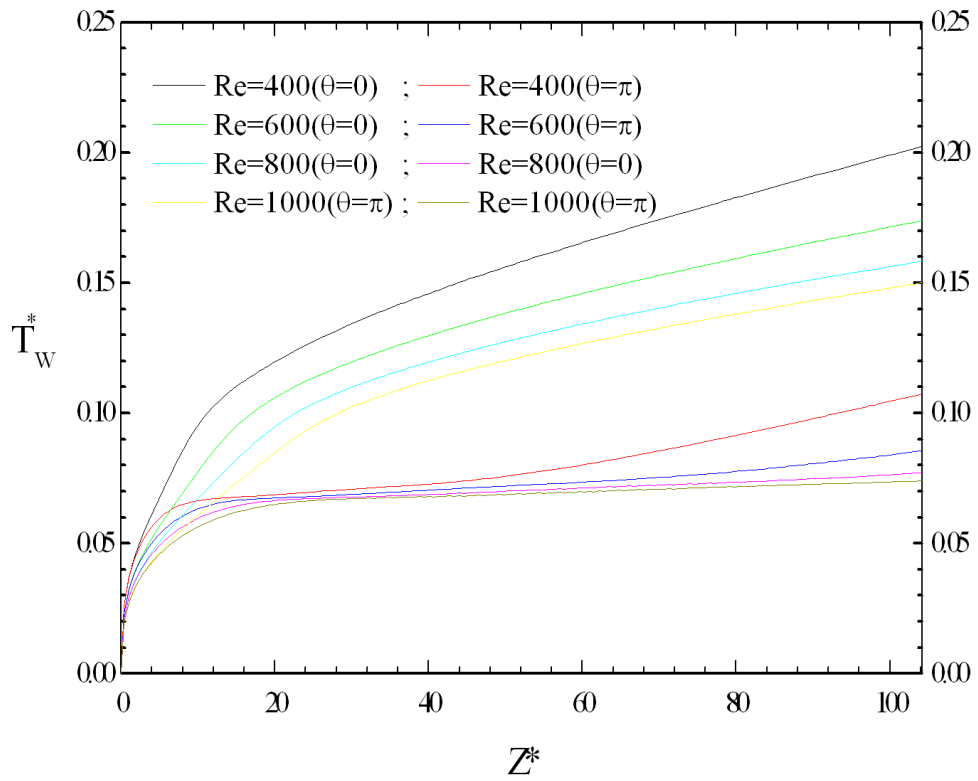


Figure 4.3.5 Evolution axiale de la température de paroi en haut ($\theta=0$) et en bas ($\theta=\pi$) du conduit pour un nombre de Grashof $Gr=3.65 \cdot 10^5$ et différents nombres de Reynolds.

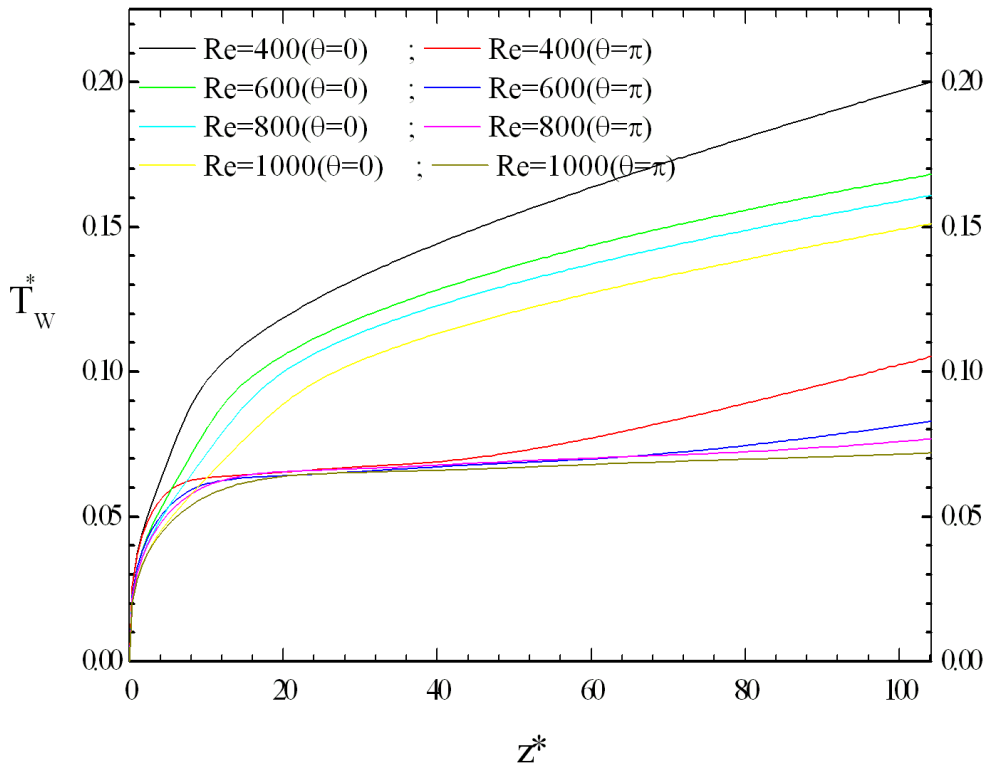


Figure 4.3.6 Evolution axiale de la température de la paroi de conduit, $Gr=5.1 \cdot 10^5$

4.3.4 Nombre de Nusselt

Le transfert thermique paroi-fluide est quantifié par le nombre de Nusselt. Ce dernier qui est défini par l'équation (2.26) traduit la variation axiale du nombre Nusselt moyen circonférentiel. Il est représenté en fonction de la coordonnée axiale dans les Figures pour les nombres de Reynolds étudiés. Les profils des différentes courbes sont caractéristiques des transferts thermiques en mode de convection dans une zone proche de l'entrée puisque le nombre de Nusselt diminue et ensuite il amorce une augmentation sur une zone plus importante du conduit jusqu'à la sortie conformément au transfert de chaleur par convection mixte. Il faut préciser que l'influence du nombre de Reynolds intervient dans les deux zones citées. Dans la zone proche de l'entrée où la convection forcée est prédominante, la diminution du nombre de Nusselt dépend du nombre de Reynolds : plus ce dernier est élevé, plus la diminution est lente et plus la zone de décroissance s'agrandit relativement. Au-delà, d'une certaine distance minimale, le nombre de Nusselt amorce une augmentation axiale caractéristique de la convection mixte. C'est à ce stade qu'intervient aussi l'influence du nombre de Reynolds. Plus il est faible, plus le Nusselt augmente ce qui est conforme au transfert thermique convectif en mode mixte. Dans le tableau 4.4.5, on regroupe les différentes valeurs des nombres de Nusselt minimums et leur distance correspondantes ainsi que les Nusselt à la sortie et les Nusselt moyens.

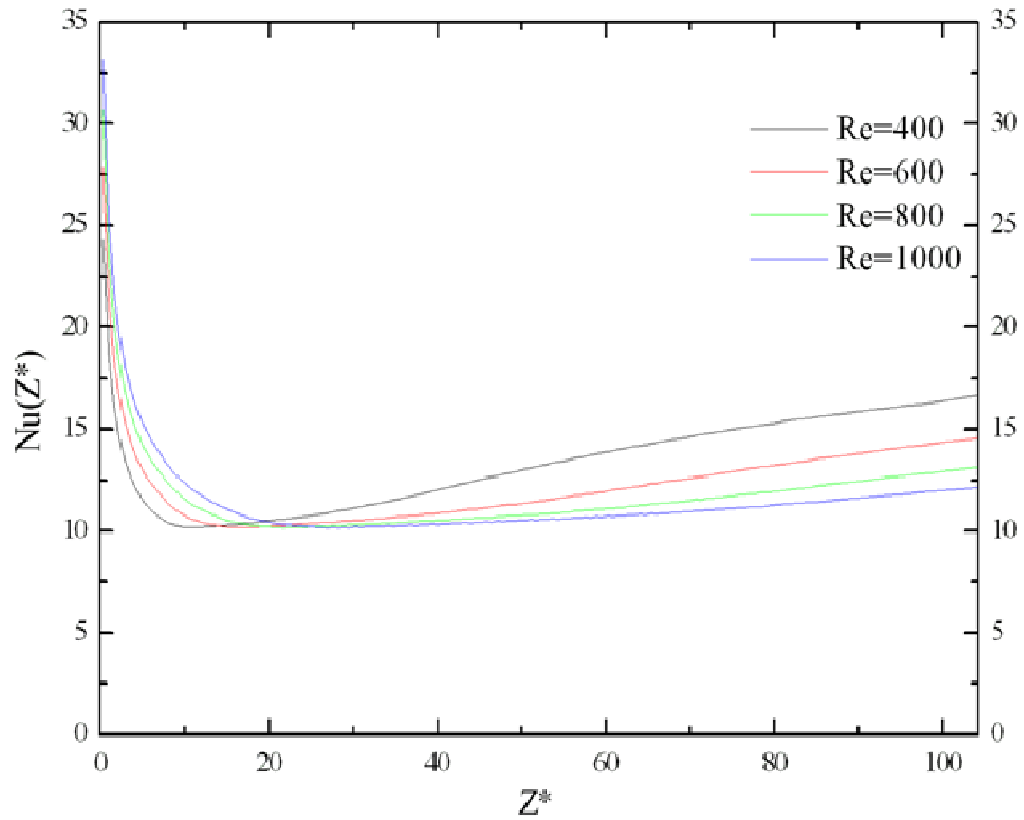


Figure 4.3.7 Profils axiaux du nombre de Nusselt moyen pour $Gr=3.65 \cdot 10^5$ et différents nombres de Reynolds.

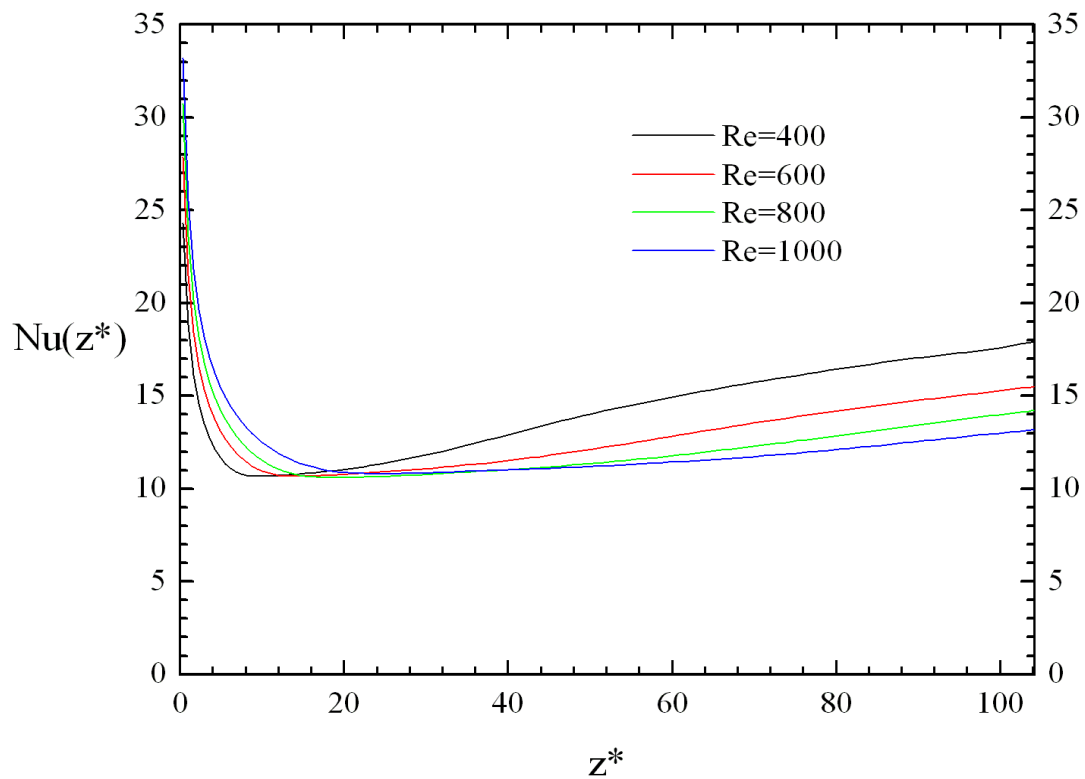


Figure 4.3.8 Profils axiaux de nombre de Nusselt moyen pour $Gr=5.1 \cdot 10^5$

Tableau 4.3.5 : distance correspondant à Nusselt minimal, et les Nusselt à la sortie et les Nusselt moyens.

$Gr^* = 2.58 \cdot 10^5$				
Re	400	600	800	1000
Ri	2.28	1.01	0.57	0.37
z_{min}^*	15.299969	21.810594	25.716969	30.274406
$Nu(z^*)$	14.32457	13.43403	12.41231	11.28945
Nu	11.778010	11.58767	11.179370	11.060810
$Gr^* = 3.65 \cdot 10^5$				
Ri	2.28125	1.01389	0.57031	0.356
z_{min}^*	10.742531	16.602094	21.810594	28.32121
$Nu(z^*)$	16.66015	14.57726	13.13338	12.15118
Nu	13.44670	12.29994	11.77917	11.579570
$Gr^* = 5.1 \cdot 10^5$				
Ri	3.1875	1.4167	0.7969	0.51
z_{min}^*	9.440406	14.648906	19.206344	24.414844
$Nu(z^*)$	17.89688	15.49281	14.21417	13.18125
Nu	14.328580	12.67763	12.519090	12.246120

4.4 La corrélation empirique $Nu = f(Gr/Re^2)$

L'influence du nombre de Reynolds sur le transfert thermique conjugué dans le conduit pour les différents nombres de Grashof explorés peut aboutir à des fonctionnels établissant des relations entre le nombre de Nusselt qui est le quantificateur des transferts solide-fluide et les différents nombres de Reynolds étudiés ainsi que les nombres de Grashof associés. Ces derniers sont implicitement reliés aux intensités électriques par le biais des puissances volumiques internes produites.

Il est évident que ces corrélations sont propres aux conditions géométriques et physiques du problème posé. Ainsi dans les domaines de variations du nombre de Reynolds de 400 à 1000 et des nombres de Grashof allant de $2.58 \cdot 10^5$ à $5.1 \cdot 10^5$ ainsi que le nombre de Prandtl fixé à 8.082 (eau distillée), nous proposons les corrélations correspondantes aux trois nombres de Grashof de notre étude. Les tableaux 4.4.1-4.4.3 comparent les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur tout le conduit fournis par le code et ceux calculés par les différentes corrélations.

➤ pour $Gr = 2.58 \cdot 10^5$

Tableau 4.4.1 : Comparaison entre le nombre de Nuesselt moyenne fournis par le code et ceux calculés par la corrélation 4.1

Re	Ri	Nu	Nu(corrélation)	Nu-Nu _{corrélation}	Erreur (%)
400	1.6098	11.77801	11.839123	-0.061113	0.52
600	0.7155	11.58767	11.50368	0.08399	0.73
800	0.4025	11.17937	11.271477	-0.092107	0.82
1000	0.2576	11.06081	11.094575	-0.033765	0.31

$$Nu = 11.641 (Gr/Re^2)^{0.035446} \quad (4.1)$$

➤ pour $Gr = 3.65 \cdot 10^5$

Tableau 4.4.2 : Comparaison entre le nombre de Nuesselt moyenne fournis par le code et ceux calculés par la corrélation 4.2

Re	Ri	Nu	Nu(corrélation)	Nu-Nu _{corrélation}	Erreur (%)
400	2.28125	13.4467	12.9741	0.4726	3.52
600	1.01389	12.29994	12.21379	0.08615	0.7
800	0.57031	11.77918	11.70151	0.07767	0.66
1000	0.365	11.57957	11.31901	0.26056	2.25

$$Nu = 12.20125 (Gr/Re^2)^{0.07447} \quad (4.2)$$

➤ pour $Gr = 5.1 \cdot 10^5$

Tableau 4.4.3 : Comparaison entre le nombre de Nuesselt moyenne fournis par le code et ceux calculés par la corrélation 4.3

Re	Ri	Nu	Nu(corrélation)	Nu-Nu _{corrélation}	Erreur (%)
400	3.1875	14.32858	13.53725	0.79133	5.5
600	1.4167	12.67763	12.74803	-0.0704	0.6
800	0.7969	12.51909	12.216122	0.30307	2.4
1000	0.51	12.24612	11.81884	0.42728	3.5

$$Nu = 12.4233 (Gr/Re^2)^{0.074076} \quad (4.3)$$

Nous regroupons dans le tableau 4.4.4 l'ensemble des valeurs obtenus pour les trois nombres de Grashof étudiés en fonction des différents nombres de Reynolds. On en déduit la corrélation globale du nombre de Nusselt moyen sur toute la longueur du conduit en fonction de Gr et Re^2 ou en fonction du nombre de Richardson:

$$Nu = 12.0885 (Gr/Re^2)^{0.06133} = 12.0885 Ri^{0.06133} \quad (4.4)$$

Cette corrélation retrouve nos résultats avec de faibles marges d'erreur. Le maximum d'erreur ne dépasse pas 10%. Elle est représentée dans la Figure 4.4

La comparaison avec une des corrélations retrouvées en bibliographie exemple Hussein [15] donne des résultats très proches.

Tableau 4.4.4 : Comparaison entre le nombre de Nusselt moyenne fournis par le code et ceux calculés par la corrélation 4.4

Gr	Re	Ri	Nu	Nu [15]	Nu(corrélation)	Nu-Nu _{corrélation}	Erreur (%)
$2.58 \cdot 10^5$	400	1.6098	11.77801	8.96	12.4467	-0.66869	5.68
	600	0.7155	11.58767	8.051	11.8428	-0.25513	2.2
	800	0.4025	11.17937	7.46	11.4323	-0.25293	2.3
	1000	0.2576	11.06081	7.036	11.1236	-0.06279	0.57
$3.65 \cdot 10^5$	400	2.28125	13.4467	9.82	12.71567	0.73103	5.44
	600	1.01389	12.29994	8.0823	12.0987	0.20124	1.64
	800	0.57031	11.77918	8.177	11.6792	0.09998	1.18
	1000	0.365	11.57957	7.71	11.3639	0.21567	1.86
$5.1 \cdot 10^5$	400	3.1875	14.32858	10.73	12.9792	1.34938	9.42
	600	1.4167	12.67763	9.64	12.3495	0.32813	2.59
	800	0.7969	12.51909	8.933	11.92135	0.59774	4.78
	1000	0.51	12.24612	7.71	11.5995	0.64662	5.28

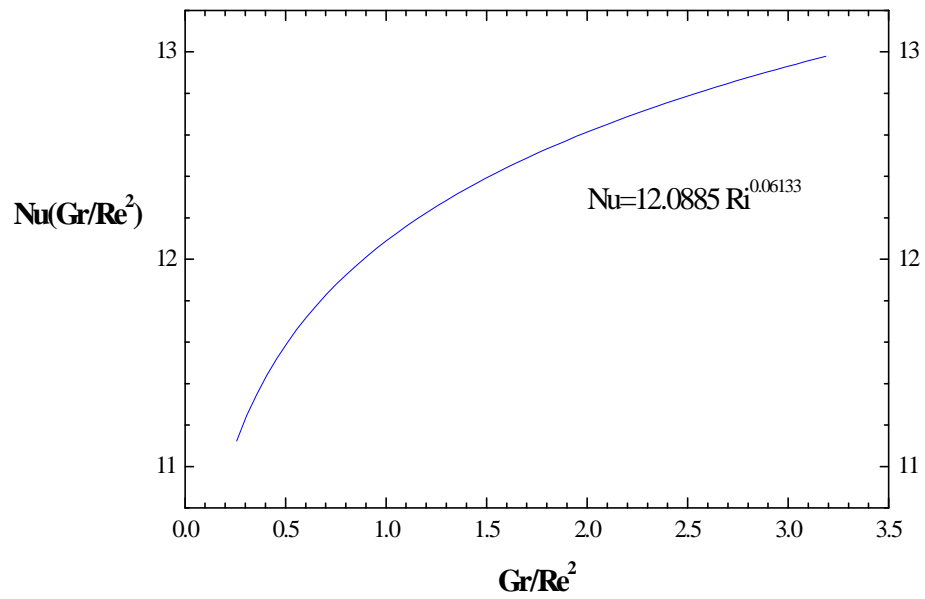


Figure 4.4 Corrélation du nombre de Nusselt en fonction des nombres de Grashof et de Reynolds pour une convection mixte à propriétés variables dans un conduit soumis à un chauffage volumique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail de recherche est basé sur une simulation numérique de la convection mixte d'un écoulement d'eau laminaire, tridimensionnelle dans un conduit cylindrique horizontal, chauffé par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi du conduit. Les propriétés thermophysiques du fluide sont thermodépendantes et les pertes thermiques radiatives et convectives avec le milieu ambiant sont prises en compte. Nous avons considéré quatre intensités électrique : 0, 45, 55 et 65 Ampères, qui produisent des taux de chaleur volumiques de $5.26 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$, $7.86 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ et $10.98 \cdot 10^7 \text{ W m}^3$ successivement. Avec ces données, le nombre de Grashof $Gr=0$ correspond à un cas de convection forcée qui sera un cas de référence alors que les trois autres nombres de Grashofs correspondent à $2.58 \cdot 10^5$, $3.65 \cdot 10^5$ et $5.1 \cdot 10^5$ respectivement. Parmi les paramètres de contrôle de notre problème restants le rapport d'aspect géométrique fixé à 104.17 et le nombre de Prandtl est fixé à 8.082, tandis que le nombre de Reynolds varie de 400, 600, 800 et 1000.

La méthode numérique des volumes finis avec un maillage uniforme de $26 \times 44 \times 162$ nœuds dans les directions radiale, azimutale et axiale, respectivement, est utilisée pour résoudre les équations modélisantes instationnaires, la discrétisation de ces équations se fait en second ordre dans le temps et dans l'espace, en fin la résolution des systèmes d'équations de discrétisation des champs de vitesse, de pression et de la température suit l'algorithme SIMPLER, on utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative pour résoudre le système d'équations de discrétisation.

L'écoulement transversal secondaire (dans les sections droites) est induit par la poussée thermique (convection naturelle) le long du conduit. En chaque section droite, il est représenté par deux cellules contrarotatives identiques, séparées par le plan diamétral vertical de symétrie. Les centres de ces cellules se déplacent vers le bas le long de la direction axiale. Le maximum des températures est toujours en haut du conduit tandis que le minimum est en dans la partie inférieure.

Les principaux résultats sont :

- L'écoulement fluide a besoin d'une certaine distance axiale pour devenir pleinement développé.
- Le profil de température du fluide et la température moyenne de paroi ne sont pas parallèles même dans la région de l'écoulement pleinement développé, cela est dû à un chauffage constant depuis l'entrée jusqu'à la sortie.
- la température moyenne de fluide diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds.
- la distance entre l'entrée du conduit et la section où l'écoulement secondaire devient intense augmente avec l'augmentation de nombre de Reynolds pour le même nombre de Grashof.
- Au début de la section de chauffage le nombre de Nusselt diminue rapidement, jusqu'à un certain point. A partir de ce moment là, le nombre de Nusselt augmente d'une manière monotone.
- La distance critique pour laquelle le Nusselt est minimum croît avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ce résultat est retrouvé dans les références examinées, [14 ;17]
- Le nombre de Nusselt moyen augmente avec la diminution de nombre de Reynolds.
- Les résultats ont été corrélés par l'équation (4.4) dont le maximum d'erreur avec celles du code ne dépasse pas les 10%.

$$Nu = 12.0885 (Gr Re^2)^{0.06133} = 12.0885 Ri^{0.06133}$$

Références

Bibliographique

- [1] Boufendi. T, Contribution à l'étude théorique du transfert de chaleur dans les conduits cylindriques horizontaux soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat en Physique Energétique, Départ. De Physique, Fac. Science Exactes, Université Mentouri, Septembre 2005

- [2] Mori. Y, Futagami. K, Tokuda. S, Nakamura. M, Forced convective heat transfer in uniformly heated horizontal tube; 1st report experimental study on the effect of buoyancy Int. J. Heat Transfer. Vol. 9, pp. 453-463, (1966)

- [3] Kupper. A, Hauptmann. E. G, Iqbal. M, Combined free and forced convection in a horizontal tube under uniform heat flux Solar Energy, Vol. 12, pp. 439-446, Pergamon Press, (1969)

- [4] Siegwarth. D. P, Miicesell. R. D, Rbadals. T. C et Hanratty. T. J, Effect of Secondary Flow on the Temperature Field and Primary Flow in a Heated Horizontal Tube. Int. J. Heat Mass Transfert, vol. 12, pp. 1535-1552 (1969)

- [5] Hwang. G. J et Lai. H. C, Laminar convective heat transfer in a horizontal isothermal tube for high Rayleigh numbers. Int. J. Heat Mass Transfert, vol. 37, No. 11, pp. 1631-1640 (1994)

- [6] Shome. B et Jensen. M. K, Mixed convection laminar flow and heat transfer of liquids in isothermal horizontal circular ducts Int. Heat Mass Transfer, Vol. 38, No. 11, pp. 1945-1956 (1995)

- [7] Orfi. J, Calanis. N et Nguyen. C. T, Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans un tube incliné en régime de convection mixte. Rev Gen Therm, vol. 36, pp. 83-92 (1997)

- [8] Ouzzane. M et Galanis. N, Effets de la conduction pariétale et de la répartition de flux thermique sur la convection mixte près de l'entrée d'une conduite inclinée, Int. J. Thermal. Sc., vol. 38, pp. 622-633 (1999)

- [9] Ouzzane. M, Développement simultané en convection mixte laminaire dans une conduite avec un flux de chaleur non uniforme sur sa surface externe : cas avec et sans ailettes Thèse de doctorats, Sherbrooke (2000)

- [10] Hwang. G. J, Tzeng. S.C et Soong. C.Y, A computer-aided parametric analysis of mixed convection in ducts Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 44, pp. 1857-1867 (2001)

- [11] Abid. C, Martin. R et Papini. F, Thermal instabilities in a horizontal cylindrical duct: a physical approach Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 45, pp. 2153-2157 (2002)

- [12] Boufendi. T et Afrid. M, Three-Dimensional Conjugate Conduction-Mixed convection with Variable Fluid Properties in a Heated Horizontal Pipe
Rev. Energ. Ren, Vol. 8, pp. 1-18 (2005)
- [13] Hussein. A. M et Salman. Y. K, Combined convection heat transfer for thermally developing aiding flow in an inclined circular cylinder with constant heat flux
Applied Thermal Engineering, vol. 27, pp. 1236–1247(2007)
- [14] Hussein. A. M et Salman. Y. K, Free and forced convection heat transfer in the thermal entry region for laminar flow inside a circular cylinder horizontally oriented
Energy Conversion and Management, vol. 48, pp. 2185–2195(2007)
- [15] Hussein. A. M et Salman. Y. K, The effects of different entrance sections lengths and heating on free and forced convective heat transfer inside a horizontal circular tube
International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 34, pp. 769–784(2007)
- [16] Kholai. O, Bellaouar. A et Kadja. M, Etude Numérique De La Convection Mixte Dans Un Tube Incline
13èmes Journées Internationales de Thermique, Albi, France (2007)
- [17] Hussein. A. M, The effect of different inlet geometries on laminar flow combined convection heat transfer inside a horizontal circular pipe
Applied Thermal Engineering, vol. 29, pp. 581–590 (2009)
- [18] Guimarães. P.M.et Menon. G.J, Combined free and forced convection in an inclined channel with discrete heat sources
International Communications in Heat and Mass Transfer, vol.35, pp. 1267–1274 (2008)
- [19] Abid. C, F. Papini, D, Veyret Etude de la convection mixte dans un conduit cylindrique, Approche analytique, numérique et détermination expérimentale de la température de paroi par thermographie infrarouge
J. Phys. III France 3 pp. 255-266 (1993)
- [20] Churchill. S. D, Chu. H. S, Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder
Int. J. Heat Transfer, vol. 18, pp. 1049-1053 (1975)
- [21] Baehr. H. D, Stephan. K, Heat and masse transfert, Dringer-Verlag, Berlin, (1998)
- [22] Patankar S. V, Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw-Hill, New-York, (1980)
- [23] Polyakov. A. F, Mixed convection in single phase flows, in O. G. Marynenko and A. A. Zukanskas (eds), Heat Transfer: Soviet Reviews, convective heat transfer, Vol. 1, pp. 1-95, Hemisphere, Washington D. C., (1989)

Abstract

We present a numerical simulation of the three-dimensional conjugate heat transfer in a horizontal duct heated by Joule an effect throughout its thickness. The mixed convection in the fluid domain is combined with heat conduction in the thickness of the solid duct. The fluid physical properties are temperature dependent and the heat losses from the outer surface of the duct to the ambient are taken into account. At the entrance of the duct, the fluid comes with a parabolic profile and a constant temperature. The model equations of conservation of mass, momentum and energy are solved by the finite volume method with a spatiotemporal discretization of second order. The electrical currents are considered $I = 45, 55$ and 65 Amperes, which correspond to Grashof numbers: $2.58 \cdot 10^5$, $3.65 \cdot 10^5$ and 5.110^5 , respectively. In this problem the control parameters such as the aspect ratio geometry and the Prandtl number are set at 104.17 and 8.082 respectively, while the Reynolds number is varied from 400, 600, 800 and 1000. The results have been conducted so as to show the influence of the Reynolds number on the dynamic and thermal fields and on the Nusselt number in forced convection ($Gr = 0$) and mixed convection modes. An empirical correlation expressing the Nusselt number versus the ratio Gr / Re^2 (or Richardson number $Ri = Gr / Re^2$) is proposed:

$$Nu = 12.089 Ri^{0.06133} .$$

ملخص

ندرس التحاكي الرقمي للتبادل الحراري الثلاثي الأبعاد بالحمل المختلط داخل قناة أسطوانية أفقية مسخنة بفعل جول عبر كامل سمكها. الحمل المختلط في المائع مرافق للتوصيل الحراري في سمك جدار القناة . الخصائص الفيزيائية للمائع متعلقة بدرجة الحرارة، والضياع الحراري للجدار الخارجي للقناة باتجاه الوسط الخارجي غير مهم. عند مدخل القناة، المائع يكون موجود على شكل قطع مكافئ ، و درجة حرارة ثابتة . معادلات الإنحفاظ النموذجية للكتلة، كمية الحركة و الطاقة تحل بطريقة الحجم المنتهية و باستعمال التقسيمات في الزمن و المكان من الدرجة الثانية . شدة التيار المستعملة هي : $I = 45$ ، 55 و 65 أمبير، هذه القيم موافقة لأعداد غراشوف (Gr): $2.58 \cdot 10^5$ ، $3.65 \cdot 10^5$ و $5.1 \cdot 10^5$ على الترتيب. في هذه المسألة عناصر المراقبة مثل النسبة الهندسية (L/D) و عدد برونديل (Pr) مثبتين عند 104.17 و 8.082 على الترتيب، أما عدد رينولدس (Re) فيأخذ القيم التالية 400، 600، 800 و 1000. النتائج المتحصل عليها أنجزت وذلك من أجل إظهار تأثير عدد رينولدس على الحقول الديناميكية والحرارية و كذلك على عدد نوسالت في وضع الحمل القسري (Gr=0) والحمل المختلط. هناك علاقة مقترحة تعطي عدد نوسالت بدلالة النسبة Gr/Re^2 (أو عدد ريشاردسون $Ri=Gr/Re^2$) العلاقة هي: $Nu = 12.089 Ri^{0.06133}$.

Résumé

On présente une simulation numérique du transfert thermique tridimensionnel et conjugué dans un conduit horizontal chauffé par effet Joule à travers toute son épaisseur. La convection mixte dans le domaine fluide est conjuguée à la conduction thermique dans l'épaisseur solide du conduit. Les propriétés physiques du fluide sont thermo dépendantes et les pertes thermiques, de la surface extérieure du conduit vers le milieu ambiant, sont prises en considération. A l'entrée du conduit, le fluide se présente avec un profil parabolique et une température constante. Les équations modélisantes de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie sont résolues par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. Les intensités électriques considérées sont $I = 45, 55$ et 65 Ampères qui correspondent aux nombres de Grashof: $2.58 \cdot 10^5, 3.65 \cdot 10^5$ et $5.1 \cdot 10^5$, respectivement. Dans ce problème les paramètres de contrôle tel le rapport d'aspect géométrique et le nombre de Prandtl sont fixés à 104.17 et 8.082 respectivement, alors que le nombre de Reynolds est varié de : $400, 600, 800$ et 1000 . Les résultats produits ont été conduits de telle sorte à faire apparaître l'influence du nombre de Reynolds sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur le nombre de Nusselt en modes de convection forcée ($Gr=0$) et en convection mixte. Une corrélation empirique exprimant le nombre de Nusselt en fonction du rapport Gr/Re^2 (ou du nombre de Richardson $Ri=Gr/Re^2$) est proposée :

$$Nu = 12.089 Ri^{0.06133} .$$