REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : ………..

Série : ………..

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

Spécialité

PHYSIQUE THEORIQUE

OPTION

MECANIQUE QUANTIQUE

THEME

La pseudo hermiticité et sa généralisation aux systèmes dépendants du temps

Présenté par

Khantoul Boubakeur

Soutenu le : / /2010

Devant le jury :

Président :	**F. BENAMIRA**	**Prof.**	**Univ. Mentouri – Constantine**
Rapporteur :	**M. Maamache**	**Prof.**	**Univ. Ferhat Abbes – Sétif**
Examinateur :	**L. Guechi**	**Prof.**	**Univ. Mentouri – Constantine**

REMERCIEMENTS

Avant de vous présenter mon travail de thèse, je me dois de saisir l'occasion qui m'est présentée de saluer et remercier encore une fois les personnes sans qui ce travail n'aurait pas été possible.

En premier lieu, j'exprime ma profonde gratitude à Monsieur :
***M. MAAMACHE** mon directeur de thèse du laboratoire de Physique quantique et systèmes dynamiques de l'université Ferhat Abbes Sétif. Ces quelques lignes sont insuffisantes à exprimer ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée.*

*Je remercie vivement Monsieur : **F. BENAMIRA**, Professeur au Département de Physique à l'université Mentouri – Constantine, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.*

*J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur : **L. GUECHI**, Professeur à l'université Mentouri – Constantine, d'avoir bien voulu juger ce travail.*

*Je remercie vivement Monsieur **O. CHERBAL** Docteur à l'USTHB – Alger qui m'a aidé et dirigé pour réaliser ce travail.*

Je suis également reconnaissant à mes nombreux amis et collègues pour l'aide morale qu'ils m'ont accordée. Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La mécanique quantique est la description du comportement de la matière et de la lumière, à l'échelle atomique. En effet, les phénomènes qui ont lieu, à très petite échelle, sont tout à fait différents de ceux qui se produisent à l'échelle macroscopique. L'accumulation progressive d'informations sur le comportement microscopique des objets atomiques, durant le premier quart du dernier siècle, précisément entre1925 et 1930, a donné quelques indications sur la façon dont ces objets se comportent et a conduit à la formulation de la théorie quantique par Schrödinger, Heisenberg et Dirac.

La mécanique quantique est aujourd'hui une discipline établie dont les applications se retrouvent dans différents domaines de la physique ; entre autres, la physique atomique et moléculaire, l'interaction lumière-matière, la physique de l'état solide et liquide et la science des matériaux, ...

Nous rappellons que les concepts de la mécanique classique subissent une transcription en termes d'observables en mécanique quantique. Autrement dit, à chaque quantité classique mesurable, on associe un operateur linéaire Hermitien qui agit sur la fonction d'onde. En outre, cet operateur pourrait nous renseigner sur son équvalent classique.

L'équation fondamentale de la mécanique quantique est l'équation de Schrödinger. Cette équation prescrit les états stationnaires, et dans sa forme dépendante du temps, l'évolution temporelle de l'état du système. Cette équation s'écrit comme

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t), \tag{1}$$

où l' opérateur linéaire H est l'Hamiltonien du système dont les valeurs propres représentent les énergies du système considéré. Dans le cas d'une particule neutre, sans spin, de masse m en mouvement dans un potentiel V, cet Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V,$$

où P est l'opérateur impulsion.

Les postulats de la mécanique quantique affirment que pour chaque mesure d'une observable (associée à un operateur) $\mathcal{A}$, les seuls résultats possibles sont des valeurs propres de $\hat{A}$. La solution de l'équation (1) qui évolue aux cours du temps par l'opérateur d'évolution $U(t)$, est donnée par $\psi(t) = U(t)\psi(0)$. La norme de cette solution est conservée aux cours du temps c'est-à-dire :

$$\langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \langle \psi(0), \psi(0) \rangle .$$

Si l'Hamiltonien H est indépendant du temps, alors l'opérateur d'évolution est donné par $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, et $\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(0)$ où $\psi(0)$ est une fonction propre de H avec la valeur propre E, c'est-à-dire une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

L'un des postulats élémentaires de la mécanique quantique, stipule que si un Hamiltonien H est Hermitien, alors les valeurs propres de ce dernier sont réelles, impliquant que l'opérateur d'évolution $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ est unitaire, c'est-à-dire que les normes des fonctions propres (les probabilités) sont conservées.

En 1998, Bender et Boettcher [1] ont présenté une alternative à ce postulat, où la condition de l'Hermiticité de l'Hamiltonien pour avoir un spectre réel n'est pas exigée, et est remplacée par la symétrie de réflexion d'espace-temps ($\mathcal{PT}$-symétrie) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique. Ils ont montré que le spectre de l'Hamiltonien non-Hermitien à une dimension : $H = p^2 + x^2 (ix)^\nu$ avec $\nu \geq 0$, est réel, positif et discret, la réalité de ce spectre est une conséquence de la $\mathcal{PT}$-symétrie de l'Hamiltonien H.

Par définition [1], un Hamiltonien non-Hermitien H est dit $\mathcal{PT}$-symétrique s'il satisfait la relation $H = (\mathcal{PT})H\mathcal{PT}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont respectivement les opérateurs de parité et d'inversion du temps, définis comme suit :

$$\mathcal{P}x\mathcal{P} = -x, \mathcal{P}p\mathcal{P} = -p,$$

$$\mathcal{T}x\mathcal{T} = x, \mathcal{T}p\mathcal{T} = -p, \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i,$$

où i est le nombre imaginaire pur, x et p sont respectivement les opérateurs position, impulsion.

La différence majeure entre les théories quantiques non-Hermitienne et Hermitienne, réside dans l'orthogonalité des fonctions propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique. Pour ce faire, Bender [1] a introduit un produit scalaire dit "$\mathcal{PT}$-produit scalaire" associé aux Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques. Mais ce dernier s'est avéré insuffisant pour formuler une théorie quantique valable, car la norme d'un état n'est pas nécessairement positive, d'où la probabilité de présence n'est pas définie positive et par conséquent il ne peut être physiquement acceptable.

Pour dépasser le problème des normes négatives, Bender a construit un nouvel opérateur dénoté par $\mathcal{C}$, "nous employons la notation $\mathcal{C}$ parce que les propriétés de cet opérateur sont presque identiques à ceux de l'opérateur de conjugaison de charge dans la théorie quantique des champs", dans le but de construire un produit scalaire défini positif. Il a montré qu'en fait tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique possède une autre symétrie cachée, qui est la $\mathcal{CPT}$-symétrie. Cette dernière permet de définir un produit scalaire où toutes les normes sont alors positives, ce produit scalaire est dénommé "$\mathcal{CPT}$-produit scalaire".

Quelques années plus tard, Mostafazadeh (2002) a introduit la notion de pseudo-Hermiticité [2, 3, 4] dans le but d'établir une relation mathématique avec la notion de $\mathcal{PT}$-symétrie. Il a exploré la structure de base qui est responsable de la réalité du spectre des Hamiltoniens non-Hermitiens. Il a établit que tous les Hamiltoniens qui sont $\mathcal{PT}$-symétriques sont pseudo-Hermitiens. Il a montré aussi qu'un opérateur diagonalisable quelconque est dit pseudo-Hermitien si et seulement si ses valeurs propres sont réelles où sont groupées en paires de complexes conjuguées (avec la même multiplicité). Par définition un Hamiltonien H est dit pseudo-Hermitien s'il satisfait la relation $H^{+} = \eta H \eta^{-1}$, où η est un opérateur linéaire, inversible et Hermitien.

Le travail de ce mémoire de magistère s'articule sur les thèmes cités plus haut. Dans le chapitre 1, nous donnons les outils mathématiques nécessaires et les postulats de la mécanique quantique Hermitienne.

Le chapitre 2 est consacré à une brève présentation des propriétés des Hamiltoniens non Hermitiens et invariants par renversement du temps et inversion de l'espace ($\mathcal{PT}$ symétrique).

On y trouve les développements récents qui tentent de mettre les fondements et bases d'une nouvelle théorie quantique pour cette classe d'Hamiltoniens.

Le chapitre 3 est une introduction des Hamiltoniens pseudo-Hermitien où nous donnons une brève présentation historique, les définitions et les propriétés de ce type d'Hamiltoniens et nous finissons ce chapitre par une comparaison avec les Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique.

Le travail original, réalisé dans ce mémoire, fait l'objet des chapitres quatre et cinq. Dans le chapitre 4 nous traitons la pseudo Hermiticité des systèmes dépendant du temps suivant les points de vue de Ali Mostafazadeh et Milozlav Znojil sur la dépendance du temps de l'opérateur métrique.

Dans le chapitre 5 nous avons fait des applications simples mais essentielles pour un Hamiltonien pseudo Hermitien. Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Formalisme général de mécanique quantique

Conçu comme préalable à la lecture du reste du document, ce chapitre introductif a pour mission de présenter les bases de la mécanique quantique nécessaires à la compréhension de ce travail. Il est bien sûr impossible de donner en quelques pages une introduction exhaustive à la mécanique quantique ; j'encourage le lecteur en quête d'informations plus étendues à consulter [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] et les références qui s'y trouvent. Le lecteur familier avec ces concepts peut se reporter directement au chapitre suivant.

1.1 Outils mathématiques

Nous examinons dans cette section les outils mathématiques nécessaires, et nous élaborons un certain nombre de concepts, qui seront utiles dans la clarification de diverses idées existantes dans ce manuscrit. Nous offrons également une discussion qui nous permettra de considérer une formulation plus générale de mécanique quantique.

Un des axiomes de la mécanique quantique est que les états physiques purs d'un système quantique sont des vecteurs dans l'espace Hilbert $\mathcal{H}$. Chaque vecteur peut être déterminé d'une façon unique par un élément ψ de $\mathcal{H}$, ce dernier s'appel vecteur d'état. Les quantités physiques liées à un état pur sont calculées en utilisant le vecteur d'état correspondant et le produit scalaire de l'espace de Hilbert. Nous commençons notre discussion par une description précise d'espaces de Hilbert, des opérateurs, des produits scalaires,bases Hilbertiennes, systèmes bi-orthonormés, et leur importance dans notre présent travail [7, 8, 9, 10, 11].

Nous emploierons les notations et les conventions suivantes $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+,\ \mathbb{C},\ \mathbb{N}$ sont les ensembles de nombres réels, nombres réels positifs, nombres complexes, et nombres entiers non négatifs, respectivement. Le symbole " $:=$ " signifie que le côté à gauche est défini pour être le côté droit," $=:$ " et que l'inverse est vraie. " $\in$ " et " $\subset$ " signifient "est un élément de" et "est a sous-ensemble de " respectivement. Dans ce chapitre nous considérerons seulement les opérateurs Hamiltoniens indépendants du temps.

1.1.1 L'espace de Hilbert

Un espace vectoriel normé $(\mathcal{H},\|.\|\ )$ sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) est dit de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet. Nous nous plaçons dans tout ce qui suit, dans le cas d'un espace vectoriel complexe, tous les résultats étant immédiatement adaptables au cas réel. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x, y \in \mathbb{R})$, nous notons z^* son conjugué.

Nous rappelons que le produit scalaire $\langle , \rangle$ est défini positif, c'est-à-dire qu' il possède les propriétés suivantes pour tous $f, g, h \in \mathcal{H}$ et tout $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \langle g, f\rangle^*, & (1.1)\\ \langle f+g, h\rangle &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle, & (1.2)\\ \langle af, g\rangle &= a\langle f, g\rangle, \langle f, ag\rangle = a^*\langle f, g\rangle, & (1.3)\\ \langle f, f\rangle &\geq 0, \forall f \in \mathcal{H}, & (1.4)\\ \langle f, f\rangle &= 0 \Rightarrow f = 0, & (1.5) \end{aligned}$$

grâce à (1.4), on peut poser

$$\|f\| = (\langle f, f\rangle)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

par (1.3) on a l'homogénéité

$$\|af\| = (a^*a)\|f\| = |a|\,\|f\|. \tag{1.7}$$

Les propriétés (1.3) et (1.4) impliquent classiquement l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\| \,, \tag{1.8}$$

de cette inégalité on déduit la sous-additivité de $\|.\|$:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \,. \tag{1.9}$$

1.1.2 Opérateurs linéaires

On dit qu'un opérateur $\hat{O}$ est linéaire si $\forall \left|\psi\right\rangle, \left|\varphi\right\rangle \in \mathcal{H}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\hat{O}\left(\lambda \left|\psi\right\rangle\right) = \lambda\left(\hat{O}\left|\psi\right\rangle\right), \tag{1.10}$$

et

$$\hat{O}\left(\left|\psi\right\rangle + \left|\varphi\right\rangle\right) = \hat{O}\left|\psi\right\rangle + \hat{O}\left|\varphi\right\rangle. \tag{1.11}$$

Propriétés et remarques

L'ensemble des opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ forment un espace vectoriel, noté $\mathbb{L}(\mathcal{H})$.

- Si $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ sont deux opérateurs linéaires, alors $\hat{O}_1\hat{O}_2$ est aussi linéaire.

- L'opérateur qui transforme un vecteur en lui-même est un opérateur linéaire appelé opérateur identité

$$\forall \left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}, I\left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle. \tag{1.12}$$

1.1.3 Opérateurs adjoints

Si $\hat{O}$ est un opérateur linéaire, l'opérateur adjoint de $\hat{O}$ est un opérateur linéaire, noté $\hat{O}^+$, vérifiant

$$\left\langle \hat{O}\varphi \mid \psi \right\rangle = \left\langle \varphi \mid \hat{O}^+\psi \right\rangle, \forall \left|\varphi\right\rangle, \left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}. \tag{1.13}$$

Propriétés et remarques

- La relation ci-dessus définit bien l'opérateur adjoint de façon unique.

$$\left(\hat{O}^{+}\right)^{+} = \hat{O}, \tag{1.14}$$

on a

$$\left(\hat{O}_1\hat{O}_2\right)^{+} = \hat{O}_2^{+}\hat{O}_1^{+}, \tag{1.15}$$

$$\left(\hat{O}_1 + \hat{O}_2\right)^{+} = \hat{O}_1^{+} + \hat{O}_2^{+}, \tag{1.16}$$

$$\left(\hat{O}^{n}\right)^{+} = \left(\hat{O}^{+}\right)^{n}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Notation de Dirac :

Pour un opérateur linéaire $\hat{O}$, on note que

$$\left\langle \varphi \middle| \hat{O} \middle| \psi \right\rangle = \left\langle \varphi \mid \hat{O}\psi \right\rangle = \left\langle \hat{O}^{+}\varphi \mid \psi \right\rangle. \tag{1.18}$$

1.1.4 Les opérateurs hermitiens (ou auto adjoints)

L'opérateur linéaire $\hat{O}$ est auto-adjoint ou hermétique si $\hat{O} = \hat{O}^{+}$ c'est à dire si

$$\left\langle \hat{O}\varphi \mid \psi \right\rangle = \left\langle \varphi \mid \hat{O}\psi \right\rangle, \forall \left|\varphi\right\rangle, \left|\varphi\right\rangle \in \mathcal{H}. \tag{1.19}$$

1.1.5 l'évolution temporelle

L'équation de Schrödinger spécifie comment la fonction l'onde $\psi\left(x,t\right)$ de la particule évolue au cours du temps. En notation de Dirac, cette équation donne la loi d'évolution d'un vecteur $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle. \tag{1.20}$$

Remarque

L'équation de Schrödinger donne précisément la modification instantanée de l'onde à un instant précis. Cette modification dépend de la masse de la particule, et aussi des forces qu'elle subit à travers le potentiel $V(x)$. Pour cette raison on dit que l'opérateur Hamiltonien H est le générateur de l'évolution temporelle.

1.1.6 Base orthonormée

Une suite de vecteurs $|V_i\rangle \in \mathcal{H}, i = 1, 2, ...$ forme une base orthonormée de l'espace $\mathcal{H}$ si

$$\langle V_i \mid V_j\rangle = \delta_{ij} \ , \ (\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j) \, , \tag{1.21}$$

tout vecteur $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ se décompose sous la forme :

$$|\varphi\rangle = \sum_i \varphi_i \, |V_i\rangle \, , \tag{1.22}$$

où $\varphi_i \in \mathbb{C}$ est une composante.

Si la suite de vecteur est infinie, on dit que l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ est de dimension infinie. Sinon, on dit que $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Propriétés et remarques

- L'espace des fonctions d'onde est de dimension infinie $\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
- Les composantes $\varphi_i \in \mathbb{C}$ du vecteur $|\varphi\rangle$ dans la base $|V_i\rangle$ sont obtenues par le produit scalaire $\varphi_i = \langle V_i \mid \varphi\rangle$

En effet :

$$\langle V_i \mid \varphi\rangle = \sum_i \varphi_j \, \langle V_i \mid V_j\rangle = \varphi_j \delta_{ij} = \varphi_i . \tag{1.23}$$

On a alors

$$\langle \varphi \mid \varphi\rangle = \sum_i |\varphi_i|^2 . \tag{1.24}$$

Relation de fermeture

D'après les équations (1.22) et (1.23) on a :

$$|\varphi\rangle = \sum_i (\langle V_i \mid \varphi\rangle) |V_i\rangle , \tag{1.25}$$

que l'on écrit de la façon suivante :

$$|\varphi\rangle = \left(\sum_i |V_i\rangle \langle V_i| \right) |\varphi\rangle . \tag{1.26}$$

La somme

$$\sum_i |V_i\rangle \langle V_i| = I. \tag{1.27}$$

qui laisse le vecteur inchangé est l'opérateur identité. Cette expression donnant l'opérateur identité à partir des vecteurs d'une base orthonormée, s'appelle la relation de fermeture.

Remarque :

La notation $I = \sum_i |V_i\rangle \langle V_i|$ peut être vue d'une façon précise avec la notion du vecteur dual $\langle V_i|$. En effet un terme de la somme , $P_i = |V_i\rangle \langle V_i|$ correspond à un opérateur qui transforme le vecteur $|\varphi\rangle$ en $P_i |\varphi\rangle = |V_i\rangle \langle V_i \mid \varphi\rangle = (\langle V_i \mid \varphi\rangle) |V_i\rangle$, c'est-à-dire en sa projection orthogonale sur le vecteur de base $|V_i\rangle$.

P_i satisfait les relations :

$$P_i^2 = P_i, \tag{1.28}$$

$$P_i^+ = P_i, \tag{1.29}$$

l'opérateur identité I est alors égal à

$$I = \sum_i P_i. \tag{1.30}$$

Expression d'un opérateur dans une base

Plus généralement, à un opérateur $\hat{O}$, on associe ses éléments de matrice dans une base orthonormée $(|V_i\rangle)$:

$$O_{ij} = \left\langle V_i \middle| \hat{O} \middle| V_j \right\rangle, \tag{1.31}$$

les coefficients $i, j = 1, 2, \ldots$ forment une matrice de taille infinie.

Si $|\psi\rangle = \hat{O}\,|\varphi\rangle$ alors la composante ψ_i s'obtient à partir de la composante φ_j par la multiplication du vecteur par la matrice

$$\psi_i = O_{ij}\varphi_j. \tag{1.32}$$

En effet, par l'intermédiaire de la relation de fermeture, on a

$$\begin{aligned}
\langle V_i \mid \psi\rangle &= \langle V_i|\,\hat{O}I\,|\varphi\rangle \\
&= \langle V_i|\,\hat{O}\sum_j |V_j\rangle\,\langle V_j \mid \varphi\rangle \\
&= \sum_j \langle V_i|\,\hat{O}\,|V_j\rangle\,\langle V_j \mid \varphi\rangle\,,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

ainsi, étant donné une base n.o., il y a une correspondance parfaite entre les vecteurs et le tableaux colonne d'une part, et les opérateurs et les matrices d'autre part.

1.2 Postulats de la mécanique quantique

Nous avons vu qu'il n'est pas possible de déterminer exactement la trajectoire des particules. On peut cependant accéder à la probabilité de trouver le système en un point donné de l'espace. Cet aspect probabiliste de la théorie quantique conduit à une formulation mathématique totalement différente de celle de la mécanique déterministe de Newton. Au lieu de parler de la position des particules, on introduit une fonction de distribution de leurs positions possibles : la fonction d'onde. Cette fonction d'onde est une fonction de probabilité qui représente en quelque sorte la généralisation de la notion d'onde aux particules matérielles.Elle est définie dans le premier postulat de la mécanique quantique.

Les postulats initiaux de la mécanique quantique : existence d'une onde associée, longueur d'onde de de Broglie, équation de Schrödinger, interprétation statistique des fonctions d'onde et de leur développement en série, vont être formalisés afin d'obtenir un cadre mathématique bien défini.

On va considérer, pour l'énoncé des postulats, un système de N particules quantiques, et on note $q = (x_1, x_2, ..., x_{3N})$ les coordonnées du système.

1.2.1 État d'un système

Par définition on appelle *amplitude de probabilité* $\psi(x,t)$ une fonction d'onde dont le carré du module donne la densité de probabilité de présence du système. La fonction doit être de carré sommable, uniforme, continue, dérivable, et sa dérivée première doit être également continue.

Postulat 1 :

Toute particule, ou plus généralement tout système quantique, est complètement défini à l'instant t par une fonction complexe $\psi(t)$ appelée fonction d'onde. Toutes les informations accessibles concernant le système à l'instant t se déduisent de la connaissance de ψ à cet instant.

1.2.2 Opérateur représentant une grandeur physique

Nous avons vu que diverses grandeurs physiques peuvent être représentées par des opérateurs. C'est le cas, par exemple, de l'énergie, de l'impulsion, du potentiel,... etc. A l'énergie, on fait correspondre l'opérateur Hamiltonien ; l'impulsion classique, correspond à l'opérateur $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Ces opérateurs sont Hermitiens. En mécanique quantique, tous les grandeurs physiques $\mathcal{A}$ susceptibles d'être mesurées sont représentées par des opérateurs $\hat{A}$ Hermitien.

Postulat 2 :

Á toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$, on fait correspondre un opérateur hermitien $\hat{A}$ qui agit sur les amplitudes de probabilité $\psi(q,t)$.

1.2.3 Mesure des grandeurs physiques

On a vu que les énergies sont les valeurs propres de l'opérateur hermitien. Toutes les grandeurs physiques mesurables sont les valeurs propres de l'opérateur correspondant. Á chaque valeur propre correspond une ou plusieurs fonctions propres qui représentent les états stationnaires du système.

Postulat 3 :

Les valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$, correspondant à une grandeur physique $\mathcal{A}$, sont les seuls valeurs mesurables.

1.2.4 Équation de Schrödinger

Pour un système quelconque, l'équation de Schrödinger est obtenue à partir de l'expression classique de l'Hamiltonien en utilisant les règles de correspondance.

Postulat 4 :

L'opérateur Hamiltonien H d'un système est celui associé à l'énergie totale de ce système. L'évolution dans le temps de l'amplitude $\psi(q,t)$ de probabilité est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} = H\psi(q,t). \tag{1.34}$$

1.2.5 Probabilité d'obtention d'une valeur propre lors d'une mesure

a) Valeurs propres non dégénérées

Considérons un opérateur $\hat{A}$ dont le spectre ne comporte que des valeurs propres non dégénérées, et soit la fonction propre normé . Une fonction d'onde quelconque peut être développée sur la base des fonctions propres :

$$\psi(q,t) = \sum_n c_n(t)\,\psi_n(q), \tag{1.35}$$

on postule que la probabilité d'obtenir la valeur propre de $\hat{A}$ comme résultat d'une mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$, notée par $P(\alpha_n)$

Postulat 5

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique d'un système quantique, et $\hat{A}$ l'opérateur correspondant dont le spectre ne comporte que des valeurs propres non dégénérées α_n associées aux fonctions propres normées $\psi_n(q)$. Lorsqu'on mesure $\mathcal{A}$ l'état quelconque $\psi(q,t)$ de norme unité, la probabilité $P(\alpha_n)$ d'obtenir comme résultat de mesure la valeur α_n est donnée par :

$$P(\alpha_n) = |\langle\psi_n(q)|\,\psi(q,t)\rangle|^2. \tag{1.36}$$

b) Valeurs propres dégénérées

Dans le cas d'un spectre comportant des valeurs propres α_n dégénérées g_n fois, il correspond à chaque valeur propre g_n les fonctions d'onde $\psi_n^k(q,t)\,, k = 1, 2, ..., g_n$.

La probabilité d'un résultat d'une mesure doit être égale à la somme des probabilités relatives à chaque fonction d'onde $\psi_n^k(q,t)$ normée.

Postulat 6

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique d'un système quantique, et $\hat{A}$ l'opérateur correspondant dont le spectre comporte des valeurs propres α_n dégénérées g_n fois, associées aux fonctions propres normées $\psi_n(q)$. Lorsqu'on mesure $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état quelconque $\psi(q,t)$ de norme unité, la probabilité $P(\alpha_n)$ d'obtenir comme résultat de mesure est donnée par :

$$P(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{g_n} \left| \left\langle \psi_n^k(q) \middle| \psi(q,t) \right\rangle \right|^2 . \tag{1.37}$$

c) Valeur moyenne d'un opérateur

La valeur moyenne de l'énergie est donnée par l'expression :

$$W = \langle \psi(r,t) | H\psi(r,t) \rangle, \tag{1.38}$$

elle sert de point de départ à l'interprétation probabiliste des coefficients du développement d'une fonction d'onde de l'Hamiltonien. Inversement, partant de cette interprétation, on peut retrouver l'expression (1.38).

Une démonstration identique est valable pour n'importe quel opérateur $\hat{A}$ correspondant à une grandeur physique $\mathcal{A}$, puisque l'interprétation probabiliste s'effectue à partir de la seule notion de valeurs et fonctions propres. Partant des postulats 5 et 6 , on peut retrouver l'expression de la valeur moyenne des mesures associées à un opérateur $\hat{A}$ qui a pour expression :

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_\psi = \langle \psi(r,t) | \hat{A}\psi(r,t) \rangle, \tag{1.39}$$

lorsqu'un système se trouve dans un état quelconque de norme unité, la valeur moyenne de $\hat{A}$ est donnée par l'expression (1.39).

Chapitre 2

$\mathcal{PT}$ symétrie et $\mathcal{CPT}$ symétrie

2.1 Introduction

La théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, qui est une formulation alternative à la théorie quantique conventionnelle, a été principalement développée par Bender et ses collaborateurs [1, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. L'idée centrale de la théorie quantique $\mathcal{PT}$–symétrique, est de remplacer l'Hermiticité par la symétrie de réflexion d'espace-temps (symétrie $\mathcal{PT}$) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique.

Nous présenterons dans ce chapitre cette nouvelle théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique.

2.2 Définitions et propriétés de $\mathcal{PT}$-symétrie

Un Hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$-symétrique s'il satisfait la relation [1, 12, 19, 20, 21],

$$H = H^{\mathcal{PT}}, \tag{2.1}$$

où

$$H^{\mathcal{PT}} = (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT}). \tag{2.2}$$

Ainsi, si un Hamiltonien H est $\mathcal{PT}$-symétrique, il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$,

$$[H;\mathcal{PT}] = 0, \tag{2.3}$$

où le symbole $\mathcal{P}$ est un opérateur linéaire appelé opérateur de parité (ou réflexion d'espace) et $\mathcal{T}$ est l'opérateur d'inversion du temps dont leurs actions sur les opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}$ sont données respectivement comme

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}, \quad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}, \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}, \quad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \tag{2.5}$$

Notons que l'effet de l'opérateur linéaire $\mathcal{P}$ change les signes des opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}$, tandis que l'opérateur anti-linéaire $\mathcal{T}$ n'affecte que le signe de l'opérateur impulsion $\hat{p}$, en changeant le signe du nombre complexe imaginaire pure i. En outre, puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont des opérateurs de réflexion, leurs carrés donnent l'opérateur unité

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = \mathcal{I}. \tag{2.6}$$

Nous avons aussi

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0. \tag{2.7}$$

Si toutes les fonctions propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H sont simultanément des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, on dit que la $\mathcal{PT}$-symétrie est non-brisée. Elle est dite brisée, s'il existe des fonctions propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique qui ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$.

Ainsi, pour construire une théorie quantique à partir des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, nous exigeons de plus que la symétrie ne soit pas brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas triviale car il n'existe aucun moyen pour affirmer à priori qu'une telle symétrie d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est brisée ou pas. Il faut tout d'abord déterminer les fonctions propres pour en tirer une conclusion. Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique.

En effet, soit $\{\phi_n(x), n = 1, 2...\}$, l'ensemble des fonctions propres communes à H et $\mathcal{PT}$.

On a

$$H\phi_n = E_n\phi_n, \tag{2.8}$$

et

$$\mathcal{PT}\phi_n = \lambda_n\phi_n, \tag{2.9}$$

où E_n et λ_n sont respectivement les valeurs propres correspondantes à H et $\mathcal{PT}$, qui sont à priori complexes. Puisque

$$(\mathcal{PT})^2 = \mathcal{I},$$

il en résulte que

$$|\lambda_n|^2 = 1,$$

pour toutes les valeurs de n possibles. Ainsi λ_n est une phase pure qui peut être absorbiée dans la fonction propre $\phi_n(x)$ de sorte que [22], sans perte de généralité

$$\lambda_n = e^{i\alpha_n}, \tag{2.10}$$

pour α_n réel.

Nous remplaçons l'état propre ϕ par $e^{i\alpha_n}\phi$ de sorte que sa valeur propre donne l'opérateur $\mathcal{PT}$ soit égale à l'unité,

$$\mathcal{PT}\phi = \phi. \tag{2.11}$$

Puisque H et $\mathcal{PT}$ commutent, nous pouvons écrire

$$\mathcal{PT}H = H\mathcal{PT}.$$

En multipliant les deux cotés du membre de droite de cette équation par $\mathcal{PT}$, nous obtenons

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT} = H. \tag{2.12}$$

Maintenant nous écrivons l'équation de Schrödinger indépendante du temps sous la forme

$$H\phi_n = E_n\phi_n.$$

Cette forme se transforme, par application de la transformation (2.10) sur l'équation (2.8), en

$$\mathcal{PT}H\mathcal{PT}\phi_n = \mathcal{PT}E_n\mathcal{PT}\phi_n. \tag{2.13}$$

Nous en déduisons alors que

$$\mathcal{T}E_n\mathcal{T} = E_n^*,$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\mathcal{P}^2 = 1.$$

Nous pouvons écrire

$$H\phi_n = E_n\phi_n = \mathcal{PT}H\mathcal{PT}\phi_n = E_n^*\phi_n. \tag{2.14}$$

qui dit que la valeur propre E est réelle.

Dans la mécanique quantique usuelle, la norme d'un vecteur dans l'espace de Hilbert doit être positive. En outre, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques dans l'espace de Hilbert doit être constant au cours de l'évolution du temps comme l'est la probabilité (unitarité), ces deux exigences constituent une propriété fondamentale pour que la théorie quantique soit valable.

Bien entendu, ces deux exigences sont satisfaites dans la théorie quantique usuelle, avec des Hamiltoniens Hermitiens. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme une probabilité, qui doit être définie positive, alors que la deuxième condition garantie justement l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps.

Dans ce sens, Bender [12, 13, 14] a introduit dans un premier temps un produit scalaire dit "$\mathcal{PT}$-produit scalaire" associé aux Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, défini par

$$(f, g) = \int_c dx[\mathcal{PT}f\,(x)]g(x), \tag{2.15}$$

où

$$\mathcal{PT}f\,(x) = f^*\,(-x)\,, \tag{2.16}$$

et c est un contour dans le plan complexe.

L'avantage de ce choix pour le produit scalaire, est que la norme $\mathcal{PT}$ associée, (f, f), est indépendante de la phase globale de $f(x)$ et elle est conservée dans le temps.

En ce qui concerne le produit scalaire, les fonctions propres $\phi_m(x)$ et $\phi_n(x)$ de H doivent être orthogonales pour $n \neq m$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_n \rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx [\mathcal{PT} \phi_m(x)] \phi_n(x) \\
&= \int_c dx [\phi_m(-x)]^* \phi_n(x) \\
&= (-1)^n \, \delta_{mn}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Cependant, quand $m = n$ nous voyons que les $\mathcal{PT}$-normes des fonctions propres ne sont pas toujours positives [23, 24].

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = \int_c dx [\phi_n(-x)]^* \phi_n(x) = (-1)^n \,. \tag{2.18}$$

La relation de fermeture s'écrit en fonction de ces fonctions propres comme,

$$\sum_n (-1)^n \, |\phi_n\rangle \, \langle \phi_n| = 1. \tag{2.19}$$

La norme $(-1)^n$ d'un état n'est pas nécessairement positive, c'est à dire que la relation (2.16) définissant le produit scalaire est insuffisante pour formuler une théorie quantique valable [25, 26].

Donc il est nécessaire de construire un nouveau produit scalaire où la norme est positive. Ceci a incité Bender à construire un nouveau produit scalaire avec une norme positive ; c'est le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire.

2.3 L'opérateur $\mathcal{C}$ et le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire

Pour résoudre ce problème de norme négative, Bender [15, 27] a montré que tous les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques dont la symétrie n'est pas brisée, possèdent une autre symétrie engendrée par un nouveau opérateur linéaire dénoté $\mathcal{C}$.

Nous utilisons la notation $\mathcal{C}$ parce que les propriétés de cet opérateur sont presque identiques à ceux de l'opérateur de la conjugaison de la charge dans la théorie quantique des champs.

L'opérateur $\mathcal{C}$ est une observable qui représente la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$ des états propre, par exemple l'opérateur linéaire $\mathcal{C}$ est représenté dans l'espace des coordonnées par la somme des fonctions propres de l'Hamiltonien,

$$\mathcal{C}(x,y) = \sum_n \phi_n(x)\,\phi_n(y)\,, \tag{2.20}$$

nous pouvons vérifier que le carré de $\mathcal{C}$ est égal à l'unité :

$$\int dx\mathcal{C}(x,y)\mathcal{C}(y,z) = \delta(x-z)\,, \tag{2.21}$$

$\mathcal{C}$ commute avec l'Hamiltonien H et l'opérateur $\mathcal{PT}$.

$$[\mathcal{C}, H] = [\mathcal{C}, PT] = 0, \tag{2.22}$$

par conséquent,

$$\mathcal{C}^2 = 1,$$

ainsi les valeurs propres de $\mathcal{C}$ sont ± 1. L'action de $\mathcal{C}$ sur les fonctions propres de H est donnée par :

$$\mathcal{C}\phi_n(x) = (-1)^n\,\phi_n(x)\,. \tag{2.23}$$

Nous pouvons également construire l'opérateur de parité $\mathcal{P}$ en termes des fonctions propres de H. L'opérateur linéaire $\mathcal{P}$ est représenté dans l'espace des coordonnées par [15, 28] :

$$P(x,y) = \delta(x+y) = \sum_n (-1)^n\,\phi_n(x)\,\phi_n(-y)\,, \tag{2.24}$$

comme l'opérateur $\mathcal{C}$, le carré de l'opérateur du parité est également unité, $\mathcal{P}^2 = 1$ et $\mathcal{C}^2 = 1$, mais $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ne sont pas identiques. En effet, l'opérateur de parité $\mathcal{P}$ est réel, tandis que $\mathcal{C}$ est complexe (somme des produits des fonctions complexes). En outre, ces deux opérateurs ne commutent pas ; spécifiquement, dans la représentation de position

$$(\mathcal{CP})\,(x,y)=\sum_n \phi_n\,(x)\,\phi_n\,(-y)\,, \tag{2.25}$$

et

$$(\mathcal{PC})\,(x,y)=\sum_n \phi_n\,(-x)\,\phi_n\,(y)\,, \tag{2.26}$$

donc il est clair que [15]

$$(\mathcal{CP})=(\mathcal{PC})^{*}, \tag{2.27}$$

d'où $\mathcal{C}$ commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$, qui signifie que l'opérateur linéaire $\mathcal{CPT}$ résout le problème des normes négatives.

Le $\mathcal{CPT}$ produit scalaire est définit par [15, 29, 30, 31, 32] :

$$\langle\phi \mid \psi\rangle_{\mathcal{CPT}}=\int_c dx[\mathcal{CPT}\phi(x)]\psi(x), \tag{2.28}$$

où

$$\mathcal{CPT}\phi(x)=\int dy\mathcal{CPT}\,(x,y)\,\phi(-y)^{*}, \tag{2.29}$$

ce $\mathcal{CPT}$-produit scalaire est définit positif, et les fonctions propres de H sont orthonormées,

$$\langle\phi_m \mid \phi_n\rangle_{\mathcal{CPT}}=\int_c dx[\mathcal{CPT}\phi_m(x)]\phi_n(x)=\delta_{mn}. \tag{2.30}$$

Chapitre 3

pseudo Hermiticité

3.1 Brève présentation historique

La pseudo-Hermiticité a vu le jour dans les années quarantes grâce à Dirac et Pauli [33, 34, 35] puis elle etait vise en valeur par Lee et Sudarshan [36, 37],dans la quantification en électrodynamique et tas de théories quantiques de champ. Une autre notion liée à la pseudo-Hermiticité est la quasi-Hermiticité a été fortement discutée en 1992 par Scholtz et ses collaborateurs [38] qui ont montré comment construire une transformation similaire des opérateurs Hermitiens vers les opérateurs quasi-Hermitiens correspondants, ainssi les transformations correspondantes des produits scalaires sur l'espace de Hilbert de dimension infinie.

En 2002 Mostafazadeh a publié trois articles [2, 3, 4], dans lesquels il a présenté une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, dans laquelle les Hamiltoniens sont "pseudo-hermitiens". Le but de ce nouveau cadre de pseudo-Hermiticité est de trouver la relation mathématique avec la notion de $\mathcal{PT}$-symétrie, qui a été déjà introduite par Bender et ses collaborateurs [1] quatre années auparavent.

3.2 Définitions et propriétés de pseudo-Herméticité

Par définition [2], un opérateur linéaire $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit pseudo-Hermitien, s'il existe un opérateur linéaire, Hermitien et inversible $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tel que :

$$H=\eta^{-1}H^{+}\eta, \tag{3.1}$$

après, Mostafazadeh a introduit le η-produit scalaire défini positif dénoté par $\langle\langle,\rangle\rangle_\eta$ et défini par [2, 39, 40] :

$$\langle\langle\psi_1,\psi_2\rangle\rangle_\eta:=\langle\psi_1\left|\eta\right|\psi_2\rangle\,,\qquad\forall\left|\psi_1\right\rangle,\left|\psi_2\right\rangle\in\mathcal{H}, \tag{3.2}$$

ce dernier est invariant sous la translation du temps généré par l'Hamiltonien H si et seulement si H est η-pseudo hermitien

Preuve :

A partir de l'équation (3.2) et l'équation de Schrödinger on a :

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle\psi_1,\psi_2\rangle\rangle_\eta=\left\langle\psi_1\left|\eta H-H^{+}\eta\right|\psi_2\right\rangle, \tag{3.3}$$

par conséquent, $\langle\langle\psi_1,\psi_2\rangle\rangle_\eta$ est une constante si et seulement si l'équation (3.1) est vrais.

Notons que le choix de $\eta=\mathcal{I}$ réduit l'équation (3.1) à l'Herméticité ordinaire, par conséquent la pseudo-Herméticité est une généralisation de l'Herméticité.

Nous énumérons un certain nombre de propriétés conséquences de la pseudo-Hermiticité [2] :

$$\mathcal{I}^\sharp=\mathcal{I}, \tag{3.4}$$

$$\left(\mathcal{O}^\sharp\right)^\sharp=\mathcal{O}, \tag{3.5}$$

$$(z_1\mathcal{O}_1+z_2\mathcal{O}_2)^\sharp=z_1^*\mathcal{O}_1^\sharp+z_2^*\mathcal{O}_2^\sharp, \tag{3.6}$$

$$(\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1)^\sharp=\mathcal{O}_1^\sharp\mathcal{O}_2^\sharp, \tag{3.7}$$

Où $\mathcal{I}$ est l'opérateur d'identité, $\mathcal{O}_i:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ des opérateurs, $z_i\in\mathbb{C}$ et le symbole $\sharp$ exprime le pseudo-adjoint.

3.3 L'origine du Pseudo-hermiticité

La notion du pseudo-Hermiticité est basée complètement sur l'Hermiticité de l'Hamiltonien équivalent de l'Hamiltonien pseudo-hermitien de système physique étudié, car tout Hamiltonien pseudo-hermitien a un Hamiltonien Hermitien équivalent, et les deux ont le même spectre d'énergie c.-à-d qu' ils sont iso-spectraux.

A partir d'un Hamiltonien Hermitien h, on peut définir un Hamiltonien pseudo Hermitien équivalent H par la relation :

$$h = \rho H \rho^{-1}, \tag{3.8}$$

avec ρ est un opérateur linéaire, invertible et Hermitien.

L'Hamiltonien Hermitien h est diagonalisable (symétrique) et préserve le produit scalaire standard c à d :

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}, \tag{3.9}$$

et les vecteurs propres de h satisfont les relations suivantes

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | h\varphi_m \rangle &= \varepsilon_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle, \\ \langle h\varphi_n | \varphi_m \rangle &= \varepsilon_n \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'Hamiltonien Pseudo Hermitien H ne préserve pas le produit scalaire standard mais préserve un nouveau produit scalaire défini par

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle_\eta := \langle \phi_n | \eta \phi_m \rangle, \tag{3.11}$$

avec $\eta = \rho^2$, et les vecteurs propres de h et H sont liés par la relation suivante :

$$\phi = \rho^{-1} \varphi, \tag{3.12}$$

avec ϕ et φ sont les vecteurs propres de H et h respectivement

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | \phi_m \rangle_\eta &= \langle \phi_n | \eta \phi_m \rangle \\ &= \left\langle \rho^{-1} \varphi_n \right| \rho \varphi_m \rangle \\ &= \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle,\end{aligned} \tag{3.13}$$

donc les deux produits scalaires sont équivalents.

D'autre part h est Hermitien alors

$$\begin{aligned} h &= \rho H \rho^{-1} \\ &= h^{+} \\ &= \rho^{-1} H^{+} \rho,\end{aligned}$$

donc

$$\rho H \rho^{-1} = \rho^{-1} H^{+} \rho \Longrightarrow H^{+} = \rho^2 H \left[\rho^{-1}\right]^2 = \eta H \eta^{-1}, \tag{3.14}$$

cette relation s'appelle la relation de pseudo Hermiticité.

3.4 Démonstration du réalité de spectre d'un Hamiltonien pseudo-hermitien

Si nous utilisons le produit scalaire pseudo hermitien pour déterminer les valeurs propres de H, On trouve

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi | H\Psi \rangle_\eta &= \langle \Psi | \eta H \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | \rho^2 H \Psi \rangle \\
&= \langle \psi | \rho H \rho^{-1} \psi \rangle \\
&= \langle \psi | h\psi \rangle \\
&= \langle h\psi | \psi \rangle \\
&= \langle \rho H \rho^{-1} \psi | \psi \rangle \\
&= \langle H\Psi | \Psi \rangle_\eta , \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

donc H est Hermitien par rapport au produit scalaire $\langle \Psi | \Psi \rangle_\eta$, et les valeurs propres de H sont réelles.

3.5 Hamiltoniens pseudo-Hermitiens ayant une base bi-orthonormée complète

Soit H un Hamiltonien pseudo-Hermitien avec une base des vecteurs propres bi-orthonormée complète $\{|\phi_n\rangle , |\psi_n\rangle\}$ et un spectre discret et non dégénéré. Par définition [3, 41, 42] :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle , \qquad (3.16)$$

$$H^+ |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle , \qquad (3.17)$$

$$\langle \phi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \qquad (3.18)$$

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \phi_n| = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \psi_n| = 1, \qquad (3.19)$$

où E_n sont les valeurs propres de H. Dans cette base H et H^+ sont donnés respectivement par :

$$H = \sum_n |\psi_n\rangle E_n \langle \phi_n| , \qquad (3.20)$$

$$H^{+} = \sum_{n} |\phi_n\rangle E_n \langle\psi_n| .$$

Par définition, dans le cas des valeurs propres non dégénérées on a [3, 43, 44]

$$\eta = \sum_{n} |\phi_n\rangle \langle\phi_n| , \tag{3.21}$$

et son inverse est donné par,

$$\eta^{-1} = \sum_{n} |\psi_n\rangle \langle\psi_n| , \tag{3.22}$$

Théorème

Soit H un Hamiltonien non-Hermitien avec un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres $\{|\phi_n\rangle, |\psi_n\rangle\}$, alors H est pseudo Hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite [2] :

1. le spectre de H est réel

2. les valeurs propres complexes sont classées en paires de complexes conjuguées avec la même multiplicité.

Une implication directe de ce théorème sont les corollaires suivants :

Corollaire 1 :

Chaque Hamiltonien non-Hermitien avec un spectre réel et discret qui possède un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitien.

Corollaire 2 :

Tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique qui possède un spectre discret et un système bi-orthonormé complet des vecteurs propres est pseudo-Hermitien [2].

3.6 Comparaison de pseudo-Hermiticité et $\mathcal{PT}$ -symétrie

Dans cette partie de ce chapitre nous avons prouvé que la réalité du spectre des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques suivent leurs pseudo-Hermiticité. Mais avant ça nous rappellons qu'un Hamiltonien diagonalisable est pseudo Hermitien s'il y a une symétrie anti linéaire c'est à dire une symétrie produite par un opérateur anti linéaire et anti Hermitien τ

$$H^{+}=\tau H\tau^{-1}, \tag{3.23}$$

on dit qu'un opérateur est anti linéaire et anti Hermitien s'il satisfait les deux relations suivantes [45]

$$\tau\left(a\left|\zeta\right\rangle+b\left|\xi\right\rangle\right)=a^{*}\left|\zeta\right\rangle+b^{*}\left|\xi\right\rangle, \tag{3.24}$$

et

$$\left\langle\zeta\right|\tau\left|\xi\right\rangle=\left\langle\xi\right|\tau\left|\zeta\right\rangle,\forall\left|\zeta\right\rangle,\left|\xi\right\rangle\in\mathcal{H}. \tag{3.25}$$

Dans [30] Mostafazadeh montre que chaque Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique implique la présence de pseudo-Hermiticité, par ce que la $\mathcal{PT}$-symétrie est une symétrie anti linéaire , ceci mène alors aux coollaires donnés dans le hout. Le resultat principale faite par cet article est

$$\eta=\tau\mathcal{PT}, \tag{3.26}$$

d'autre part on a

$$\eta^{-1}=\sum_{n}\left|\Psi_{n}\right\rangle\left\langle\Psi_{n}\right|,$$

et

$$\mathcal{P}=\sum_{n}(-1)^{n}\left|\Phi_{n}\right\rangle\left\langle\Phi_{n}\right|,$$

donc

$$\eta^{-1}\mathcal{P}=\sum_{n}(-1)^{n}\left|\Psi_{n}\right\rangle\left\langle\Phi_{n}\right|, \tag{3.27}$$

dans la représentation des positions $\eta^{-1}\mathcal{P}$ a la forme suivante

$$\begin{aligned}\left\langle x\right|\eta^{-1}\mathcal{P}\left|y\right\rangle &= \sum_{n}(-1)^{n}\,\Psi_{n}(x)^{*}\,\Phi(y)\\ &= \sum_{n}\Psi_{n}(x)\,\Phi(y),\end{aligned} \tag{3.28}$$

nous voyons que cette relation coïncide avec l'équation (2.21) qui défini l'opérateur $\mathcal{C}$, donc nous avons [44]

$$\mathcal{C} = \eta^{-1}\mathcal{P}, \tag{3.29}$$

c'est un calcul très intéressant parce que l'opérateur $\mathcal{C}$ détermine le produit scalaire de l'espace de Hilbert physique dans la mécanique quantique $\mathcal{CPT}$-symétrique, de même que les opérateurs linéaires hermitiens dans la mécanique quantique pseudo-Hermitienne.

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\ \Psi\rangle_{CPT} &= \int_{\mathbb{R}} dx\left[\mathcal{CPT}\Phi\left(x\right)\right]\Psi\left(x\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx\Phi\left(x\right)\left[\eta\Psi\left(x\right)\right] \\ &= \langle\Phi|\ \eta\Psi\rangle = \langle\Phi|\ \Psi\rangle_{\eta}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

On peut résumer les résultats des deux dernier chapitres par le diagramme suivant

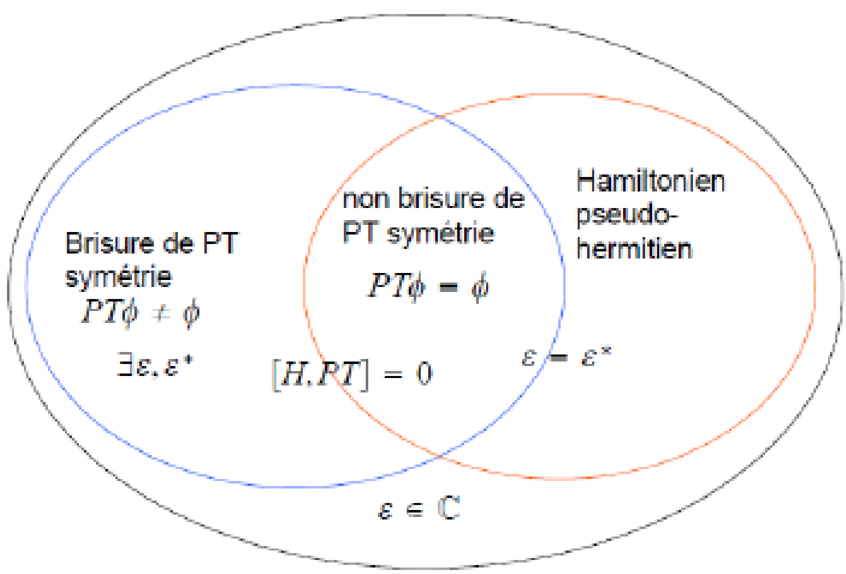


Figure 3.1 : Diagramme de l'intersection entre la classe des Hamiltoniens pseudo hermitien et PT-symétrique

Chapitre 4

La pseudo hermiticité dans les systèmes dépendants du temps

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de l'évolution du temps dans la mécanique quantique pseudo hermitienne avec une dépendance manifeste du temps de l'opérateur Hamiltonien $H(t)$.

Dans le cas où l'Hamiltonien H est dépendant du temps, il y a deux points de vue différents pour la dépendance du temps de l'opérateur métrique. L'un est celui de Ali Mostafazadeh qui dit que : l'indépendance du temps de l'opérateur métrique est une condition nécessaire pour assurer la pseudo herméticité de l'Hamiltonien $H(t)$, et l'autre celui de Milozlav Znojil qui dit que l'indépendance du temps n'est pas une condition nécessaire pour garantir la pseudo Hermiticité de $H(t)$.

4.2 Point de vue d'Ali Mostafazadeh

Dans les références [46, 47, 48] Mostafazadeh donne un point de vue très intéressant pour l'indépendance du temps de l'opérateur métrique, il est résumé ici :

Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire défini positif dépendant du temps pour l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ que nous pouvons écrire en termes d'opérateur métrique dépendant du temps $\eta\,(t)$

$$\langle .,. \rangle = \langle . | \, \eta(t) \, . \rangle. \tag{4.1}$$

Nous dénotons l'opérateur d'évolution du temps du système $U(t)$, c.-à-d., l'opérateur satisfaisant les relations de définition suivantes

$$i\frac{d}{dt}U(t) = H(t)\,U(t)\,, U(0) = I, \tag{4.2}$$

supposons que $\psi(t)$ et $\phi(t)$ sont des vecteurs d'état évolués arbitraires

$$\psi(t) = U(t)\,\psi(0)\,, \quad \phi(t) = U(t)\,\phi(0)\,, \tag{4.3}$$

ainsi l'unitarité de l'évolution en fonction du temps confère au produit scalaire $\langle \psi(t), \phi(t) \rangle$ son indépendance par-rapport au temps.

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t), \phi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \, \eta(t)\,\phi(t) \rangle \\
&= \left\langle \psi(0) \left| U^{+}(t)\,\eta(t)\,U(t) \right| \phi(0) \right\rangle \\
&= \langle \psi(0) \, | \eta(0) | \, \phi(0) \rangle\,,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donc

$$U^{+}(t)\,\eta(t)\,U(t) = \eta(0)\,,$$

$$\eta(t) = \left[U^{+}(t)\right]^{-1}\eta(0)\,U(t)^{-1}\,, \tag{4.5}$$

en inversant cette relation on obtient :

$$\eta(t)^{-1} = U(t)\,\eta(0)^{-1}\,U(t)^{+}\,, \tag{4.6}$$

différenciant les deux côtés de (4.6) et en utilisant (4.2) nous trouvons

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\eta(t)^{-1} &= \left[i\frac{d}{dt}U(t)\right]\eta(0)^{-1}U(t)^{+}+U(t)\eta(0)^{-1}\left[i\frac{d}{dt}U^{+}(t)\right] \\ &= H(t)\eta(t)^{-1}-\eta(t)^{-1}H^{+}(t), \end{aligned}$$

donc on a comme résultat

$$H^{+}(t)=\eta(t)H(t)\eta(t)^{-1}-i\eta(t)\frac{d}{dt}\eta(t)^{-1}. \tag{4.7}$$

L'équation (4.7) montre que $H(t)$ est $\eta-$pseudo-Hermitien si et seulement si η est indépendant du temps.

4.3 Point de vue de Milozlav Znojil

M. Znojil [49, 50, 51] a affirmé que l'évolution des systèmes quantiques quasi hermitiens est généré le générateur d'évolution H_{gen} qui n'est pas égal à H .

L'équation de Schrödinger dépendante du temps associée à l'Hamiltonien $h(t)$ l'équivalent hermitien de l'Hamiltonien non hermitien $H(t)$ est définie par

$$i\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle=h(t)|\varphi(t)\rangle, \qquad |\varphi(t)\rangle=u(t)|\varphi(0)\rangle \tag{4.8}$$

qui en terme d'opérateur d' évolution $u(t)$ s'écrit

$$i\frac{d}{dt}u(t)=h(t)u(t), \qquad \hbar=1 \tag{4.9}$$

où

$$h(t)=\rho(t)H(t)\rho^{-1}(t), \tag{4.10}$$

La solution formelle de l'equation de Schrödinger ci dessus s'écrit alors

$$|\varphi(t)\rangle=u(t)|\varphi(0)\rangle, \tag{4.11}$$

et par conséquent elle satisfait à la relation

$$\langle\varphi(t)\,|\varphi(t)\rangle = \langle\varphi(0)\,|\varphi(0)\rangle\,, \tag{4.12}$$

qui montre que la norme reste constante à tout instant.

A partir des relations entres vecteurs d'états [49, 50, 51]

$$|\phi\,(t)\rangle = \rho^{-1}\,(t)\,|\varphi(t)\rangle\,, \qquad \text{et} \quad \langle\langle\phi(t)\,| = \langle\varphi(t)|\,\rho\,(t)$$

M Znojil est alors en mesure de faire la distinction entre les deux évolutions formelles définies par

$$|\phi\,(t)\rangle = U_D\,(t)\,|\phi\,(0)\rangle\,, \qquad U_D\,(t) = \;\rho^{-1}\,(t)\,u\,(t)\,\rho\,(o)\,, \tag{4.13}$$

$$\langle\langle\phi\,(t)| = \langle\langle\phi\,(0)|\,U_G\,(t)\,, \qquad U_G\,(t) = \;\rho^{-1}\,(0)\,u^{+}\,(t)\,\rho\,(t)\,, \tag{4.14}$$

où les opérateurs $U_D\,(t)$ et $U_G\,(t)$ agissent sur le ket $|\phi\rangle$ et le bra $\langle\langle\phi|$ respectivement.

Les équations différentielles relatives aux deux opérateurs d'évolution (à savoir, droite $U_D\,(t)$ et gauche $U_G\,(t)$) sont obtenues facilement

$$i\partial_t U_D\,(t) = -i\rho^{-1}\,(t)\,[\partial_t\rho\,(t)]\,U_D\,(t) + H\,(t)\,U_D\,(t)\,, \tag{4.15}$$

et

$$i\partial_t U_G^{+}\,(t) = H^{+}\,(t)\,U_G^{+}\,(t) + \left[i\partial_t\rho^{+}\,(t)\right]\left[\rho^{-1}\,(t)\right]^{+}U_G^{+}\,(t)\,.$$

Par conséquent les états $|\phi\rangle$ et $|\phi\rangle\rangle$ satisfont séparément à l'équation de Schrödinger

$$i\frac{d}{dt}\,|\phi(t)\rangle = H_{(gen)}\,(t)\,|\phi(t)\rangle\,, \tag{4.16}$$

$$i\frac{d}{dt}\,|\phi(t)\rangle\rangle = H_{(gen)}^{+}\,(t)\,|\phi(t)\rangle\rangle, \tag{4.17}$$

où

$$H_{gen}(t) = H(t) - i\rho^{-1}(t)\,\partial_t\rho(t)\,. \tag{4.18}$$

Nous voyons que l'évolution par rapport au temps est unitaire.

Comme nous venons de constater deux points opposées émergent lorsqu'on traite les systèmes quantiques dépendants du temps et quasi hermitiens. A notre avis, le point de vue de M. Znojil est le mieux adapté pour l'étude des systèmes quantiques dépendants du temps et quasi hermitiens.

Chapitre 5

Traitement de quelque Hamiltoniens pseudo hermitiens

5.1 Introduction

Les Hamiltoniens non-Hermitien ayant des spectres réels peuvent être employés en physique nucléaire, en physique de la matière condensée , en mécanique quantique relativiste, en théorie quantique des champs, ...

Dans la première partie de ce chapitre nous allons résoudre l'équation de Schrödinger associé à un Hamiltonien pseudo Hermitien dont l'équivalent Hermitien est $h = \frac{p^2}{2m} + v(x)$ pour un cas particulier $v(x)$. Comme applications de ce travail, deux exemples seront considérés :

- l'Hamiltonien pseudo Hermitiens dont l'équivalent Hermitien est l'oscillateur harmonique

- l'Hamiltonien pseudo Hermitien dont l' équivalent à Hermitien est celui de Swanson [52].

Dans la deuxième partie, nous allons construire un nouvel Hamiltonien Hermitien $\tilde{H}$ équivalent à l'Hamiltonien h de la première partie, $\tilde{H}$ est défini par $\tilde{H} = \tilde{\rho}^{-1} h \tilde{\rho}$, ou $\tilde{\rho}$ est un opérateur unitaire, après nous allons résoudre l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien pseudo Hermitien équivalent à $\tilde{H}$.

5.2 Hamiltonien pseudo Hermitien équivalent à un Hamiltonien Hermitien

5.2.1 présentation du modèle :

Considérons l'Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + iF(x)\,p + \chi(x)\,, \tag{5.1}$$

l'équation de Schrödinger de cet Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$\left[\frac{p^2}{2m} + iF(x)\,p + \chi(x)\right]\Phi(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) = E\Phi(x,t)\,. \tag{5.2}$$

en général H n'est pas hermitien.

5.3 $1^{\grave{e}r}$ cas $F(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions réelles

Dans ce cas l'Hamiltonien H s'exprime sous la forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + f(x)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x)\,, \tag{5.3}$$

avec $F(x) = f(x)\,, \chi(x) = \beta(x)$, $f(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions réelles.

L'Hamiltonien adjoint de H est

$$H^{+} = \frac{p^2}{2m} - f(x)\frac{\partial}{\partial x} - f'(x) + \beta(x)\,.$$

5.3.1 Calcul de l'opérateur métrique pour que H soit pseudo hermitique

On a la relation de pseudo hermiticité suivante

$$H^{+} = \eta H\ \eta^{-1}, \tag{5.4}$$

on pose

$$\eta = e^{\gamma(x)}, \tag{5.5}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
H^{+}\Phi(x,t) &= \left[e^{\gamma(x)}H\ e^{-\gamma(x)}\right]\Phi(x,t) \\
&= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\gamma'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\gamma'^2(x)}{2m}+\frac{\gamma''(x)}{2m}\right. \\
&\quad \left.+f(x)\frac{\partial}{\partial x}-f(x)\gamma'(x)+\beta(x)\right]\Phi(x,t) \qquad (5.6)\\
&= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-f(x)\frac{\partial}{\partial x}-f'(x)+\beta(x)\right]\Phi(x,t), \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

cette relation est vraie si

$$\gamma'(x)=-2m\ f(x)\Longrightarrow\gamma(x)=-2m\int dx\ f(x), \qquad (5.8)$$

donc

$$\eta=e^{-2m\int dx\ f(x)}, \qquad (5.9)$$

H est pseudo-hermitien $\Longrightarrow H$ a un spectre réel.

5.3.2 Résolution de l'équation de Schrödinger de l'hamiltonien H

On a l'équation de Schrödinger suivante

$$H\Phi(x,t)=i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t),$$

on pose

$$\Phi(x,t)=e^{\lambda(x)}\ \psi(x,t), \qquad (5.10)$$

alors on a

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{\lambda(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\lambda'}{m}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\lambda'^2}{2m}-\frac{\lambda''}{2m}\right. \\
&\quad \left.+f(x)\frac{\partial}{\partial x}+f(x)\lambda'+\beta(x)\right]\psi(x,t). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs on pose

$$\frac{\lambda'}{m} = f(x) \Longrightarrow \lambda = m\int dx\ f(x),$$

alors l'équation de Schrödinger devient

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{m\int dx\ f(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\ f^2(x) - \frac{1}{2}f'(x) + \beta(x)\right]\psi(x,t) \\
&= e^{m\int dx\ f(x)} h\psi(x,t) \\
&= e^{m\int dx\ f(x)} i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t), \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

nous voyons que H et $h = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x)$ avec

$$v(x) = \frac{1}{2}mf^2(x) - \frac{1}{2}f'(x) + \beta(x),$$

sont isospectraux.

Les fonctions propres de H préservent le produit scalaire pseudo-hermitien

$$\left\langle \Phi \left| e^{-2m\int dx\ f(x)} \right| \Phi \right\rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \qquad (5.13)$$

5.3.3 Hamiltonien pseudo-hermitien équivalent à l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique

Considérons l'Hamiltonien suivant :

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\omega, \qquad (5.14)$$

l'opérateur Hamiltonien adjoint de H est

$$H^{+} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\omega, \qquad (5.15)$$

donc H n'est pas hermitien.

Calcul de l'opérateur métrique pour que H soit pseudo hermitien

$$H^{+} = \eta H \ \eta^{-1},$$

on pose

$$\eta = e^{\alpha(x)}, \tag{5.16}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
H^{+}\Phi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\omega\right]\Phi(x,t) &(5.17)\\
&= e^{\alpha(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\omega\right]e^{-\alpha(x)}\Phi(x,t) &(5.18)\\
&= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha'^2(x)}{2m} - \omega x\frac{\partial}{\partial x}\right.\\
&\quad \left. -\alpha'(x)\,\omega x - \frac{1}{2}\omega + \frac{\alpha''(x)}{2m}\right]\Phi(x,t), &(5.19)
\end{aligned}$$

cette relation est vraie si

$$\alpha'(x) = 2m\omega x \Longrightarrow \alpha(x) = m\omega x^2, \tag{5.20}$$

donc l'opérateur métrique dans ce cas est égal à

$$\eta = e^{m\omega x^2}. \tag{5.21}$$

Résolution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien H

L'équation de Schrödinger de cet hamiltonien est la suivante

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\omega\right]\Phi(x,t),\\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t). &(5.22)
\end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation on pose

$$\Phi(x,t) = e^{\gamma(x)}\ \psi(x,t), \tag{5.23}$$

donc

$$H\Phi(x,t) = e^{\gamma(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\gamma'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\gamma'^2(x)}{2m} - \frac{\gamma''(x)}{2m} - \omega x\frac{\partial}{\partial x} - \omega\gamma'(x)\,x - \frac{1}{2}\omega\right]\psi(x,t), \tag{5.24}$$

pour simplifier les calculs on pose

$$\gamma'(x) = -m\omega x \Longrightarrow \gamma(x) = -\frac{m}{2}\omega x^2, \tag{5.25}$$

alors

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{-\frac{m}{2}\omega x^2}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi(x,t) \\
&= ie^{-\frac{m}{2}\omega x^2}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \qquad (5.26)\\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t), \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

$\psi(x,t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique avec $\hbar = 1$ [53]

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2^n n\,!}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$

où $H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$ est le polynôme d'Hermite.

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{\frac{m}{2}\left(\sqrt{i\omega^2}+\sqrt{-i\omega^2}\right)x^2}h\psi(x,t) \\
&= e^{\frac{m}{2}\left(\sqrt{i\omega^2}+\sqrt{-i\omega^2}\right)x^2}i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\ \Phi(x,t), \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

il est claire que H et h sont iso-spectraux.

5.3.4 Hamiltonien pseudo-hermitien équivalent à l'Hamiltonien de Swanson

Considérons l'Hamiltonien non hermitien suivant :

$$H_{n,m} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}} + gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}-1} + g\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{m-2} - \sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}, \quad (5.29)$$

où α et g sont des paramètres réels.

L'Hamiltonien adjoint de $H_{n,m}$ est

$$\begin{aligned} H^{+}_{n,m} &= \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}} + gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}-1} - g\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{m-2}\right. \\ &\quad \left. -\sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}\right] \neq H_{n,m}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

donc $H_{n,m}$ n'est pas hermitien

Calcul de l'opérateur métrique pour que H soit pseudo hermitien

On a la relation de pseudo hermiticité

$$H^{+}_{n,m} = \eta H_{n,m}\ \eta^{-1},$$

nous posons

$$\eta = e^{\beta(x)}, \quad (5.31)$$

alors

$$\begin{aligned}
H^{+}_{n,m}\Phi_{n,m}(x,t) &= \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}} + gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}-1}\right. \\
&\quad \left. -g\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{m-2} - \sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}\right]\Phi_{n,m}(x,t) \qquad (5.32) \\
&= e^{\beta(x)}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}} + gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}-1}\right. \\
&\quad \left. +gx^{m-2}\left(\frac{m-1}{2}\right) - \sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}\right]e^{-\beta(x)}\Phi_{n,m}(x,t) \\
&= \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta'(x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta'^2(x) + \frac{1}{2}\beta''(x) + \left(\sqrt{\alpha}x^{n/2} + gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right. \\
&\quad -\left(\sqrt{\alpha}x^{n/2} + gx^{m-1}\right)\beta'(x) + \frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{n/2-1} + \left(\frac{m-1}{2}\right)gx^{m-2} \\
&\quad \left. -\sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}\right]\Phi_{n,m}(x,t), \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

cette relation est vraie si

$$\beta' = -2\sqrt{\alpha}x^{n/2} + 2gx^{m-1} \longrightarrow \beta = \frac{-4\sqrt{\alpha}}{n+2}x^{(n+2)/2} - \frac{2g}{m}x^m, \qquad (5.34)$$

donc l'opérateur métrique dans ce cas est égal à

$$\eta = e^{-\frac{4\sqrt{\alpha}}{n+2}x^{(n+2)/2} - \frac{2g}{m}x^m}, \qquad (5.35)$$

donc $H_{n,m}$ est η-pseudo-hermitien.

Résolution de l'équation de Schrödinger de cet hamiltonien :

L'équation de Schrödinger dans ce cas est donnée par

$$H_{n,m}\Phi_{n,m}(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{n,m}(x,t), \qquad (5.36)$$

on pose

$$\Phi_{n,m}(x,t) = e^{\gamma(x)}\ \psi_{n,m}(x,t), \qquad (5.37)$$

l'équation de Schrödinger se transforme sous la forme suivante

$$\begin{aligned}H_{n,m}\Phi_{n,m}(x,t) &= e^{\gamma(x)}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\gamma'(x)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\gamma'^2(x)}{2}-\frac{\gamma''(x)}{2}+\left(\sqrt{\alpha}x^{n/2}+gx^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right.\\ &\quad+\left(\sqrt{\alpha}x^{n/2}+gx^{m-1}\right)\gamma'(x)+\frac{n}{4}\sqrt{\alpha}x^{\frac{n}{2}-1}+g\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{m-2}\\ &\quad\left.-\sqrt{\alpha}gx^{\frac{n}{2}+m-1}\right]\psi_{n,m}(x,t),\end{aligned}\tag{5.38}$$

afin d' éliminer les termes de l'opérateur non hermitien $\frac{\partial}{\partial x}$ on pose

$$\gamma'=\left(\sqrt{\alpha}x^{n/2}+gx^{m-1}\right)\Longrightarrow\gamma=\frac{2}{n+2}\sqrt{\alpha}x^{(n+2)/2}+\frac{g}{m}x^m,\tag{5.39}$$

donc on trouve

$$\begin{aligned}H_{n,m}\Phi_{n,m}(x,t) &= e^{\frac{2}{n+2}\sqrt{\alpha}x^{(n+2)/2}+\frac{g}{m}x^m}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{2}x^n+\frac{g^2}{2}x^{2m-2}\right]\psi_{n,m}(x,t)\\ &= e^{\frac{2}{n+2}\sqrt{\alpha}x^{(n+2)/2}+\frac{g}{m}x^m}i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{n,m}(x,t)\\ &= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{n,m}(x,t),\end{aligned}\tag{5.40}$$

où $\psi(x,t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien hermitien de Swanson [52, 54]

$$h_{n,m}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{2}x^n+\frac{g^2}{2}x^{2m-2},\tag{5.41}$$

les énergies propres de $H_{n,m}$ et $h_{n,m}$ sont les mêmes.

Cas particulier Pour $n=m=2$

$$H_{2,2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\sqrt{\alpha}+g\right)x\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\alpha}gx^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha}+g\right),\tag{5.42a}$$

$$h_{2.2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\alpha+g^2\right)x^2,\tag{5.43}$$

$$\Phi_{2.2}(x,t)=e^{\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}x^2+\frac{g}{2}x^2}\psi_{2.2}(x,t),\tag{5.44}$$

où $\Phi_{2.2}(x,t)$ et $\psi_{2.2}(x,t)$ sont les fonctions propres de $H_{2,2}$ et $h_{2.2}$ respectivement, avec les mêmes valeurs propres.

5.4 2^{eme} cas : $F(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions complexes

On a l'Hamiltonien non hermitien suivant

$$H = \frac{p^2}{2m} + F(x)\frac{\partial}{\partial x} + \chi(x) = \frac{p^2}{2m} + (f(x) + ig(x))\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x) + i\alpha(x), \tag{5.45}$$

avec $F(x) = f(x) + ig(x)$, $\chi(x) = \beta(x) + i\alpha(x)$, où $f(x), g(x), \beta(x)$ et $\alpha(x)$ sont des fonctions réelles.

$$H^+ = \frac{p^2}{2m} - (f(x) - ig(x))\frac{\partial}{\partial x} - f'(x) + ig'(x) + \beta(x) - i\alpha(x),$$

5.4.1 Calcul de l'opérateur métrique pour que H soit pseudo hermitien

Si H est un Hamiltonien pseudo hermitien alors on a

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}. \tag{5.46}$$

On pose

$$\eta = e^{\lambda(x)},$$

ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} H^+ &= \frac{p^2}{2m} - f(x)\frac{\partial}{\partial x} + ig(x)\frac{\partial}{\partial x} - f'(x) + ig'(x) + \beta(x) - i\alpha(x) && (5.47) \\ &= e^{\lambda(x)}\left[\frac{p^2}{2m} + f(x)\frac{\partial}{\partial x} + ig(x)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x) + i\alpha(x)\right]e^{-\lambda(x)} \\ &= \frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda^2}{2m} + \frac{\lambda''}{2m} + f(x)\frac{\partial}{\partial x} - f(x)\lambda' \\ &\quad + ig(x)\frac{\partial}{\partial x} - ig(x)\lambda'(x) + \beta(x) + i\alpha(x), && (5.48) \end{aligned}$$

cette dernière relation est vraie si et seulement si

$$\frac{1}{m}\lambda'(x) = -2f(x) \Longrightarrow \lambda(x) = -2m\int dx f(x), \tag{5.49}$$

et

$$\alpha(x) = \frac{g'(x)}{2} - mf(x)g(x)$$

alors H, H^{+} et η donnes par

$$H = \frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (f(x) + ig(x))\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{g'(x)}{2} - imf(x)g(x) + \beta(x)$$

$$H^{+} = \frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (f(x) - ig(x))\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{g'(x)}{2} + imf(x)g(x) + \beta(x)$$

$$\eta = e^{-2m\int dx f(x)}. \tag{5.50}$$

5.4.2 Résolution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien H

L'équation de Schrödinger de cet Hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} H\Phi(x,t) &= \left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (f(x) + ig(x))\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{g'(x)}{2} - imf(x)g(x) + \beta(x)\right]\Phi(x,t) \\ &= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Pour résoudre cette équation on pose

$$\Phi(x,t) = e^{\gamma(x)}\psi(x,t),$$

donc

$$\begin{aligned} H\Phi(x,t) &= \left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (f(x) + ig(x))\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{g'(x)}{2} - imf(x)g(x) + \beta(x)\right]e^{\gamma(x)}\psi(x,t) \\ &= e^{\gamma(x)}\left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\gamma'}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\gamma'^2}{2m} - \frac{\gamma''}{2m} + f(x)\frac{\partial}{\partial x} + f(x)\gamma'(x) + ig(x)\frac{\partial}{\partial x}\right. \\ &\quad \left. + ig(x)\gamma'(x) + \beta(x) + i\frac{g'(x)}{2} - imf(x)g(x)\right]\psi(x,t). \end{aligned} \tag{5.52}$$

pour simplifier les calculs nous éliminons l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ et on définit

$$\frac{\gamma'}{m} = f(x) \Longrightarrow \gamma(x) = m\int dx f(x), \tag{5.53}$$

alors

$$
\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{\gamma(x)}\left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+ig(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}mf^2(x)-\frac{1}{2}f'(x)+i\frac{g'(x)}{2}+\beta(x)\right]\psi(x,t) \\
&= e^{\gamma(x)}\tilde{H}\ \psi(x,t) \\
&= e^{\gamma(x)}E\psi(x,t) \qquad (5.54)\\
&= E\Phi(x,t), \qquad (5.55)
\end{aligned}
$$

donc H et $\tilde{H}$ sont isospectraux avec $\psi(x,t)$ est la fonction propre de $\tilde{H}$.

5.4.3 Produit scalaire

Les solutions de l'équation de Schrödinger Φ et Ψ des Hamiltoniens non hermitiens H et H^+ respectivement, préservent le produit scalaire pseudo hermitien

$$
\langle\Psi|\eta|\Phi\rangle=\langle\psi\mid\psi\rangle=1, \qquad (5.56)
$$

où ψ est une fonction normée, $\Phi=\rho^{-1}\psi$,$\Psi^*=\rho^{-1}\psi^*$ et $\eta=\rho^2=e^{-2m\int dx f(x)}$.

5.4.4 Résolution de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien $\tilde{H}$

L'équation de Schrödinger de cet Hamiltonien est

$$
\tilde{H}\psi(x,t)=\left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+ig(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}mf^2(x)-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{i}{2}g'(x)+\beta(x)\right]\psi(x,t).
$$

On pose

$$
\psi(x,t)=e^{i\theta(x)}\sigma(x,t), \qquad (5.57)
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}\psi(x,t) &= e^{i\theta(x)}\left[\frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{i}{m}\theta'(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2m}\theta'^2(x)-\frac{i}{2m}\theta''(x)+\frac{1}{2}mf^2(x)\right. \\
&\left.-\frac{1}{2}f'(x)+ig(x)\frac{\partial}{\partial x}-g(x)\theta'(x)+\beta(x)+\frac{i}{2}g'(x)\right]\sigma(x,t). \qquad (5.58)
\end{aligned}
$$

Pour simplifier les calculs nous prenons

$$\theta'(x) = mg(x) \Longrightarrow \theta(x) = m \int dxg(x), \tag{5.59}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\psi(x,t) &= e^{\theta(x)} \left[\frac{-1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \left(f^2(x) - g^2(x) \right) - \frac{1}{2} f'(x) + \beta(x) \right] \sigma(x,t) && (5.60) \\
&= e^{\theta(x)} h\sigma(x,t) \\
&= E\psi(x,t) && (5.61) \\
&= e^{\theta(x)} E\sigma(x,t), && (5.62)
\end{aligned}$$

avec

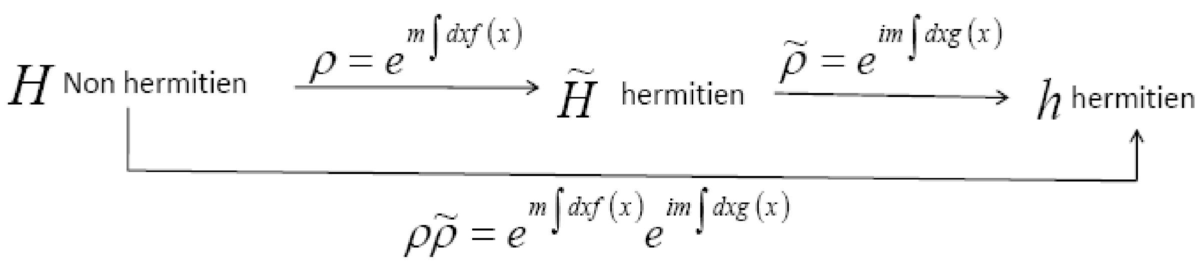
$$h = \frac{p^2}{2m} + v(x), \tag{5.63}$$

où

$$v(x) = \frac{1}{2} m \left(f^2(x) - g^2(x) \right) - \frac{1}{2} f'(x) + \beta(x), \tag{5.64}$$

et $\sigma(x,t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien hermitien h, donc H, $\tilde{H}$, h sont iso-spectraux.

5.4.5 Résumé



et

$$\langle \Psi(x,t) |\eta| \Phi(x,t)\rangle = \langle \psi(x,t)| \psi(x,t)\rangle = \langle \sigma(x,t)| \sigma(x,t)\rangle, \tag{5.65}$$

avec

$$\Phi(x,t) = e^{m\int dx f(x)}\psi(x,t) = e^{m\int dx f(x)} e^{im\int dx g(x)}\sigma(x,t). \tag{5.66}$$

5.4.6 Hamiltonien pseudo hermitien équivalent à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique

On a l'Hamiltonien non hermitien suivant

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right), \tag{5.67}$$

alors

$$H^{+} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega\left(\sqrt{2}+i\right)x\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{2}im\omega^2x^2 - \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}+i\right) \tag{5.68}$$

Calcul de l'opérateur métrique pour que H soit pseudo hermiten

H est pseudo hermitien c à d

$$H^{+} = \eta H \eta^{-1}, \tag{5.69}$$

on pose

$$\eta = e^{\beta(x)},$$

alors

$$\begin{aligned}
H^{+} &= -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega\left(\sqrt{2}+i\right)x\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{2}im\omega^2x^2 - \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}+i\right) && (5.70)\\
&= e^{\beta(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]e^{-\beta(x)}\\
&= -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta'^2(x)}{2m} + \frac{\beta''(x)}{2m} + \omega\left(\sqrt{2}+i\right)x\frac{\partial}{\partial x}\\
&\quad -\omega\left(\sqrt{2}+i\right)x\beta'(x) + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right), && (5.71)
\end{aligned}$$

cette relation est vraie si et seulement si

$$\frac{\beta'(x)}{m} = -2\sqrt{2}m\omega x \Longrightarrow \beta(x) = -\sqrt{2}m\omega x^2, \tag{5.72}$$

d'où l'opérateur métrique est

$$\eta = e^{\beta(x)} = \eta = e^{-\sqrt{2}m\omega x^2}. \tag{5.73}$$

5.4.7 Résolution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien H

L'équation de Scgrödinger de l'Hamiltonien H s'écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} H\Phi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]\Phi(x,t) \\ &= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t), \end{aligned} \tag{5.74}$$

pour résoudre cette équation on pose

$$\Phi(x,t) = e^{\gamma(x)}\psi(x,t), \tag{5.75}$$

donc l'équation de Schrödinger se transforme en

$$\begin{aligned} H\Phi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]e^{\gamma(x)}\psi(x,t) \\ &= e^{\gamma(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\gamma'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\gamma'^2(x)}{2m} - \frac{\gamma''(x)}{2m} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x}\right. \\ &\quad \left. +\omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\gamma'(x) + \sqrt{2}im\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]\psi(x,t), \end{aligned} \tag{5.76}$$

pour éliminer l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ on pose

$$\frac{\gamma'(x)}{m} = \sqrt{2}\omega x \Longrightarrow \gamma(x) = \frac{m\omega}{\sqrt{2}}x^2, \tag{5.77}$$

donc

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= e^{\frac{m\omega}{\sqrt{2}}x^2}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\gamma'(x)}{m}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\gamma'^2(x)}{2m}-\frac{\gamma''(x)}{2m}+\omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x}\right.\\
&\left.+\omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\gamma'(x)+\sqrt{2}im\omega^2x^2+\frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]\psi(x,t)\\
&= e^{\frac{m\omega}{\sqrt{2}}x^2}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\omega x\frac{\partial}{\partial x}+m\omega^2x^2-\frac{i}{2}\omega\right]\psi(x,t) \qquad (5.78)\\
&= e^{\frac{m\omega}{\sqrt{2}}x^2}\tilde{H}\psi(x,t)\\
&= e^{\frac{m\omega}{\sqrt{2}}x^2}i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \qquad (5.79)\\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t), \qquad (5.80)
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{H}=-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\omega x\frac{\partial}{\partial x}++m\omega^2x^2-\frac{i}{2}\omega, \qquad (5.81)$$

et sa solution de l'équation de Schrödinger est $\psi(x,t)$.

Il est clair que $\tilde{H}$ est Hermitien, donc a un spectre réel, ce qui implique que H aussi a un spectre réel.

Resolution de l'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien $\tilde{H}$

L'équation de Schrödinger de l'Hamiltonien $\tilde{H}$ s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\psi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\omega x\frac{\partial}{\partial x}+m\omega^2x^2-\frac{i}{2}\omega\right]\psi(x,t)\\
&= i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t), \qquad (5.82)
\end{aligned}$$

on pose

$$\psi(x,t)=\tilde{\rho}\sigma(x,t)=e^{i\theta(x)}\sigma(x,t), \qquad (5.83)$$

alors l'équation de Schrödinger se transforme en

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\psi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\omega x\frac{\partial}{\partial x} + m\omega^2 x^2 - \frac{i}{2}\omega\right] e^{i\theta(x)}\sigma(x,t) = e^{i\theta(x)} i\frac{\partial}{\partial t}\sigma(x,t) \\
&= e^{i\theta(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{i}{m}\theta'(x)\frac{\partial}{\partial x} - i\omega x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2m}\theta'^2(x) - \frac{i}{2m}\theta''(x)\right. \\
&\quad \left. +\omega x\theta'(x) + m\omega^2 x^2 - \frac{i}{2}\omega\right]\sigma(x,t), \\
&= e^{i\theta(x)} i\frac{\partial}{\partial t}\sigma(x,t) \qquad (5.84)
\end{aligned}$$

pour éliminer les termes de l'opérateur p nous choisissons

$$\frac{\theta'(x)}{m} = -\omega x \Longrightarrow \theta(x) = -\frac{m\omega}{2}x^2, \qquad (5.85)$$

alors

$$\tilde{\rho} = e^{-\frac{i}{2}m\omega x^2}, \qquad (5.86)$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\psi(x,t) &= e^{i\theta(x)}\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\sigma x, t \qquad (5.87) \\
&= e^{i\theta(x)} h\sigma(x,t) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega e^{i\theta(x)}\sigma(x,t) \qquad (5.88) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\psi(x,t), \qquad (5.89)
\end{aligned}$$

$\tilde{H}$ et h sont isospectraux.

L'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien H est

$$\begin{aligned}
H\Phi(x,t) &= \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega\left(\sqrt{2}-i\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sqrt{2}i - 1\right)m\omega^2 x^2 + \frac{\omega}{2}\left(\sqrt{2}-i\right)\right]\Phi(x,t) \\
&= E\Phi(x,t),
\end{aligned}$$

où

$$\Phi(x,t) = e^{\sqrt{2}\omega x^2} e^{-\frac{i}{2}m\omega x^2}\sigma(x,t), \qquad (5.90)$$

et $\sigma\,(x,t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique.

Conclusion

Ce mémoire concerne des sujets d'actualité ayant pour but d'apporter une contribution à l'étude des systèmes pseudo hermitiens.

Nous rappelons dans le premier chapitre les outils mathématiques et les postulats de la mécanique quantique, tout en mettant l'accent sur ceux que nous avons utilisé par la suite dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons quelque notions de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$ symétrique, une théorie applicable aux systèmes décrits par des Hamiltoniens non hermitiens mais $\mathcal{PT}$ symétrique.

Dans le troisième chapitre nous présentons une théorie quantique pseudo hermiticitienne qui est plus générale que la $\mathcal{PT}$ symétrie. Elle est applicable aux systèmes décrits par des Hamiltoniens non hermitiens mais satisfaisant à la relation $H^{+} = \eta H \eta^{-1}$ où η est un opérateur hermitien invertible nommé opérateur métrique.

Dans le quatrième chapitre nous avons étudié l'indépendance du temps de l'opérateur métrique dans les systèmes pseudo hermitiens dépendant du temps suivant deux points de vue : - l'un de Ali Mostafazadeh qui dit que l'indépendance du temps de l'opérateur métrique est une condition nécessaire pour obtenir la pseudo hermiticité de l'Hamiltonien dépendant du temps , - et l'autre de Milozlav Znojil qui assure la pseudo hermiticité du Hamiltonien même si l'opérateur métrique est dépendant du temps.

Le cinquième chapitre concerne des applications pour les Hamiltoniens pseudo hermitiens, se basant sur l'Hamiltonien hermitien de l'oscillateur harmonique, et celui basé sur l'Hamiltonien hermitien de Swanson.

Dans toutes ces applications, nous cherchons les opérateurs hermitiens équivalents aux Hamiltoniens pseudo hermitiens, et nous démontrons que les spectres de ces derniers sont réels.

Annexe

Annexe A

Parité en mécanique quantique

Mathématiquement, la symétrie $\mathcal{P}$ consiste à remplacer chacune des coordonnées spatiales par son opposé, parfois, appelée inversion de l'espace, parité ou encore transformation miroir. Le rôle de cette transformation sur une équation de la physique est donc de renverser le signe des coordonnées spatiales de l'espace. Les vecteurs polaires comme la position, l'impulsion ou le champ électrique changent de signe, les pseudo-vecteurs comme le moment cinétique ou le champ magnétique sont invariants, En effet, si $r \longrightarrow -r$, $p = \frac{\hbar}{i}\nabla_r \longrightarrow -p$ et $L = r \wedge p \longrightarrow L$. De la même manière, les équations de Maxwell $\nabla.E = \rho$ et $\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, montrent que si on admet que ρ est invariant par parité, alors $E \longrightarrow -E$ et $B \longrightarrow B$. On admet que le spin se comporte comme un moment cinétiqueet donc $J = L + S \longrightarrow J$. On a donc les trasformations

$$\mathcal{P} \equiv \begin{cases} r \longrightarrow \tilde{r} = \mathcal{P}r\mathcal{P}^{+} = -r \\ p \longrightarrow \tilde{p} = \mathcal{P}p\mathcal{P}^{+} = -p \\ E \longrightarrow \tilde{E} = \mathcal{P}E\mathcal{P}^{+} = -E \\ J \longrightarrow \tilde{J} = \mathcal{P}J\mathcal{P}^{+} = J \\ B \longrightarrow \tilde{B} = \mathcal{P}B\mathcal{P}^{+} = B \end{cases} . \tag{A.1}$$

L'action de $\mathcal{P}$ sur le vecteur d'état $|\psi\rangle$ d'un système physique le transforme en un autre vecteur d'état $\left|\tilde{\psi}\right\rangle$ où

$$\left|\tilde{\psi}\right\rangle = \mathcal{P}\,|\psi\rangle\,, \tag{A.2}$$

et

$$\left\langle \tilde{\psi} \right| = \langle \psi | \, \mathcal{P}^{+}, \tag{A.3}$$

où $\mathcal{P}^{+}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{P}$

Physiquement, l'inversion de l'espace doit être définie de telle sorte que $\psi\left(r\right)$ étantla fonction d'onde d'une particule, sa fonction après inversion de l'espace devrait être proportionnelle à $\psi(-r)$. Ceci signifie alors qu'on devrait avoir

$$\tilde{\psi}\left(r\right) = \alpha\psi\left(-r\right), \tag{A.4}$$

où α est une constante.

Si on inverse deux fois de suite l'espace, on revient à la situation initiale de sorte que

$$\approx\!\!\!\!\!\psi\left(r\right) = \mathcal{P}^{2}\psi\left(r\right) = \alpha\tilde{\psi}\left(-r\right) = \alpha^{2}\psi\left(r\right) = \psi\left(r\right), \tag{A.5}$$

donc

$$\mathcal{P}^{2} = 1, \tag{A.6}$$

$$\alpha^{2} = 1 \Longrightarrow \alpha = \pm 1, \tag{A.7}$$

et

$$\tilde{\psi}\left(r\right) = \pm\psi\left(-r\right). \tag{A.8}$$

Montrons que l'opérateur $\mathcal{P}$ associé à cette transformation est unitaire. On a

$$\left\langle \varphi \left| \mathcal{P}^{+}\mathcal{P} \right| \psi \right\rangle = \left\langle \varphi \left| \mathcal{P}^{+} \right| \tilde{\psi} \right\rangle, \tag{A.9}$$

En appliquant la définition de l'adjoint d'un opérateur

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi \left| \mathcal{P}^{+} \right| \tilde{\psi} \right\rangle &= \left(\left\langle \tilde{\psi} \left| \mathcal{P} \right| \varphi \right\rangle \right)^{*} \\ &= \left(\left\langle \tilde{\psi} \right| \tilde{\varphi} \right\rangle \right)^{*} \\ &= \langle \tilde{\varphi} | \, \tilde{\psi} \rangle, \end{aligned} \tag{A.10}$$

et si on explicite les intégrales

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{\varphi}(r)|\,\tilde{\psi}(r)\rangle &= \left\langle\varphi(r)\left|\mathcal{P}^{+}\mathcal{P}\right|\psi(r)\right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(r)\,\mathcal{P}^{+}\mathcal{P}\psi(r) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(-r)\,\psi(-r)\,,
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

mais avec le changement de variable $r' = -r$ on a

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} d^3r\varphi^*(-r)\,\psi(-r) &= -\int_{+\infty}^{-\infty} d^3r'\varphi^*\left(r'\right)\psi\left(r'\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r'\varphi^*\left(r'\right)\psi\left(r'\right),
\end{aligned} \tag{A.12}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{\varphi}(r)|\,\tilde{\psi}(r)\rangle &= \left\langle\varphi(r)\left|\mathcal{P}^{+}\mathcal{P}\right|\psi(r)\right\rangle \\
&= \langle\varphi(r)|\,\psi(r)\rangle,
\end{aligned} \tag{A.13}
$$

Alors cette équation donne

$$\mathcal{P}^{+}\mathcal{P} = 1. \tag{A.14}$$

En comparant $(A.6)$ et $(A.10)$, on en déduit que :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}^{-1}. \tag{A.15}$$

Action de $\mathcal{P}$ sur l'opérateur $\hat{r}$

$$\begin{aligned}
\tilde{r} \quad : \quad &= \mathcal{P}\hat{r}\mathcal{P} \\
&= \int\int dr'dr'' \left|r'\right\rangle \left\langle r'\right| \mathcal{P}\hat{r}\mathcal{P} \left|r''\right\rangle \left\langle r''\right| \\
&= \int\int dr'dr'' \left|r'\right\rangle \left\langle -r'\right| \hat{r} \left|-r''\right\rangle \left\langle r''\right| \\
&= -\int\int dr'dr''\hat{r}'\delta\left(r'-r''\right) \left|r'\right\rangle \left\langle r''\right| \\
&= -\int dr'\hat{r}' \left|r'\right\rangle \left\langle r'\right| \\
&= -\hat{r}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

alors par conséquent

$$\mathcal{P}\hat{r}\mathcal{P} = -\hat{r}. \tag{A.17}$$

Action de $\mathcal{P}$ sur l'opérateur $\hat{p}$

Puisque $\hat{p}$ est représenté dans la représentation $|r\rangle$ par $\frac{\hbar}{i}\nabla_r$, on peut montrer par un calcul similaire que

$$\mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}. \tag{A.18}$$

Annexe B

Renversement du temps en mécanique quantique

Dans cette annexe, nous allons envisager une opération de symétrie : le renversement du temps, désignée par l'opérateur $\mathcal{T}$, appelée également opérateur de conjugaison complexe en mécanique quantique c'est-à-dire qui effectue le changement suivant sur la coordonnée de temps $(t) \longrightarrow (-t)$. Par l'action de cet opérateur sur l'espace des états, la coordonnée de position reste inchangée, et l'impulsion est renversée.

En mécanique classique, le renversement du temps est une opération qui, à tout mouvement d'un système physique décrit par les fonctions $q_i(t)$, associe à un autre mouvement décrit par les fonctions $q_i(-t)$.

En d'autres termes, à tout instant t, les valeurs des cordonnées généralisées après une opération de renversement du temps sont celles qu'avaient les mêmes cordonnées à l'instant $-t$ pour le mouvement initial.

$$q_i\left(t\right) = f\left(t\right) \overset{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} q_i\left(t\right) = f\left(-t\right),$$

il est clair que les dérivées de q se transforment suivant :

$$\dot{q}_i\left(t\right) = \frac{d}{dt} f\left(t\right) \overset{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \dot{q}_i\left(t\right) = -\frac{d}{dt} f\left(-t\right).$$

Action de $\mathcal{T}$ sur l'opérateur $\hat{r}$ et $\hat{p}$

$$\widetilde{\hat{r}} = \mathcal{T}\hat{r}\mathcal{T}^{-1} = \hat{r}, \tag{B.1}$$

et

$$\widetilde{\hat{p}} = \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T}^{-1} = -\hat{p}, \tag{B.2}$$

il découle immédiatement que

$$\mathcal{T}^2 = 1. \tag{B.3}$$

Bibliographie

[1] C. M. Bender, S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998).

[2] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. 43, 205 (2002).

[3] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. 43, 2814 (2002).

[4] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. 43, 3944 (2002).

[5] E. Cancès, M. Defranceschi, W. Kutzelnigg, C. Le Bris, and Y. Maday. Computational chemistry : A primer. In Ph. G. Ciarlet, editor, Computational Chemistry, Special Volume of Handbook of Numerical Analysis, vol X, pages 3 (2003).

[6] Herschel Rabitz, Gabriel Turinici, and Eric Brown. Control of quantum dynamics : Concepts, procedures and future prospects. In Ph. G. Ciarlet, editor, Computational Chemistry, Special Volume of Handbook of Numerical Analysis, vol X, pages 833 (2003).

[7] C. Piron , *Mécanique quantique, Bases et applications ,* Presses polytechniques et universtaitres romandes, Lausanne (1998).

[8] J. L Bas devant, J. Dalibard, *Physique quantique*, école polytecnique, edition marcoting ELLIPSES (1997).

[9] H. Bouchriha, *Introduction à la physique quantique cours et applications*, centre de publication universitaire Tunis (2002).

[10] A. Messiah, *Mécanique quantique Tome1*, Dunod Paris (1995).

[11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. laloë, *Mécanique Quantique*, nouvelle édition, Herman (1977).

[12] C. M. Bender and S. Boettcher, and V. M. Savage, Conjecture on the interlacing of zeros in complex Sturm–Liouville problems, J. Math. Phys. (N.Y) 41, 6381 (2000).

[13] C. M. Bender and Q Wang, Comment on " Some properties of eigenvalues and eigenfunctions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant" J. Phys. A 34, 3325 (2001).

[14] C. M. Bender and S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Two-point Green's function in -symmetric theories, Phys. Lett. A 302, 286 (2002).

[15] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics,Phys. Rev. Lett. 89, 270401 (2002).

[16] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. 70, 947 (2007).

[17] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Must a Hamiltonian be Hermitian ?, Am. J. Phys. 71, 1905 (2003)

[18] C. M. Bender and H. F. Jones, Semiclassical Calculation of the C Operator in PT-Symmetric Quantum Mechanics, Phys. Lett. A 328, 102 (2004).

[19] M. Znojil, Solvable simulation of a double-well problem in Script PT-symmetric quantum mechanics , J. Phys. A 36, 7639 (2003).

[20] C. M. Bender, The complex pendulum, Physics Reports 315, 27 (1999).

[21] C. M. Bender , S. Boettcher and Peter N. Meisinger, J.Math.Phys 40, 2201(1999).

[22] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, Supersymmetry and the spontaneous breakdown of symmetry, J. Phys. A 34, L391 (2001).

[23] G. A. Mezincescu, Some properties of eigenvalues and eigenfunctions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant, J. Phys. A 33, 4911 (2000).

[24] A. Mostafazadeh, Exact PT-Symmetry Is Equivalent to Hermiticity, J. Phys. A : Math. Gen. 36, 7081 (2003).

[25] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity for a Class of Nondiagonalizable Hamiltonians, J. Math. Phys. 43, 6343 (2002).

[26] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Description of PT-Symmetric Systems Defined on a Complex Contour, J. Phys. A 38, 3213 (2005).

[27] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Erratum : Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett. 92, 119902 (2002).

[28] Jones H. F, On pseudo-Hermitian Hamiltonians and their Hermitian counterparts J. Phys. A : Math. Gen. 38, 1741 (2005).

[29] A. Mostafazadeh and Batal, Ahmet, Physical Aspects of Pseudo-Hermitian and PT-Symmetric Quantum Mechanics, J. Phys. A : Math. Gen. 37, 11645 (2004).

[30] A. Mostafazadeh, PT-Symmetric Cubic Anharmonic Oscillator as a Physical Model, J. Phys. A : 38 ,6557 (2005).

[31] Q. Wang, Calculation of C Operator in PT-Symmetric Quantum Mechanics, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine Vol. 50, Part 2, 986 (2004).

[32] A. Zafer, C-, PT- and CPT-invariance of pseudo-Hermitian Hamiltonians, J. Phys. A : Math. Gen. 36 9711 (2003).

[33] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys.15, 175 (1943).

[34] S. N. Gupta, On the Calculation of Self-Energy of Particles, Phys. Rev. 77, 294 (1950).

[35] S. N. Gupta, Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics, Proc. Phys. Soc. Lond 63, 681 (1950).

[36] T. D. Lee, G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B9, 209 (1969).

[37] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric. I, Phys.Rev. 123, 2183 (1961).

[38] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Phys. 213, 74 (1992).

[39] A. Mostafazadeh, Application of Pseudo-Hermitian Quantum Mechanics to a PT-Symmetric Hamiltonian with a Continuum of Scattering States, J. Math. Phys. 46, 102108 (2005).

[40] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian description of PT-symmetric systems defined on a complex contour, J. Phys. A : Math. Gen. 38, 3213 (2005).

[41] J.Wong, Results on Certain Non-Hermitian Hamiltonians, J. Math. Phys.8, 2039 (1967).

[42] F. H. M. Faisal, J. V. Moloney, Time-dependent theory of non-Hermitian Schrodinger equation : Application to multiphoton-induced ionisation decay of atoms, J. Phys. B : Cond. Mat. 14, 3603 (1981).

[43] A. Mostafazadeh, Pseudo-supersymmetric quantum mechanics and isospectral pseudo-Hermitian Hamiltonians, Nucl. Phys. B 640, 419 (2002).

[44] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity and generalized PT and CPT-symmetries, J.Math. Phys. 44, 974 (2003).

[45] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge,1995).

[46] A.Mostafazadeh, Time-Dependent Pseudo-Hermitian Hamiltonians Defining a Unitary Quantum System and Uniqueness of the Metric Operator, Phys Lett B 650, 208 (2007)

[47] A. Mostafazadeh, Comment on "Reply to Comment on Time-dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution" 0711.1078v2 [quant-ph] (2007)

[48] A. Mostafazadeh, Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution" 0711.0137v1 [quant-ph] (2007)

[49] M. Znojil, Which operator generates time evolution in Quantum Mechanics ? , 0711.0535v1 [quant-ph] (2007).

[50] M. Znojil, Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution, 0710.5653v1 [quant-ph] (2007).

[51] M. Znojil, Reply to Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution, 0711.0514v1 [quant-ph] (2007).

[52] A Sinha, P Roy, Generalized Swanson models and their solutions, J. Phys. A : Math. Theor. 40 10599 (2007).

[53] A. de Souza Dutra, M. B. Hott, Non-Hermitian time-dependent quantum systems with real energies, Europhys. Lett. 71, 166 (2005).

[54] C. Figueira de Morisson Faria, A. Fring, Time evolution of non-Hermitian Hamiltonian systems, J. Phys. A : Math. Gen. 39, 9269 (2006).

SUMMARY

– This memory is devoted to the study of quantum systems described by non-Hermitians Hamiltonians having real spectra. We begin this work with a general presentation of quantum Hermitian theory. We then introduce a non-Hermitian quantum theory called the $\mathcal{PT}$ -Symmetry, developed by C. M. Bender and S. Boettcher in 1998. They showed that the spectrum of the one dimension non-Hermitian Hamiltonian : $H = p^2 - (ix)^\nu$ with $\nu \geq 2$, is real, positive and discrete. Here $\mathcal{P}$ and $\mathcal{T}$ are respectively the operators parity and time reversal.

  A few years later A. Mostafazadeh introduced the concept of pseudo hermiticity and showed that each Hamiltonian which satisfies the relation $H^+ = \eta H \eta^{-1}$ admits a real spectrum, where the metric η is an hermitien invertible operator. A. Mostafazadeh also showed that each Hamiltonian $\mathcal{PT}$ symmetric is a pseudo-hermitian Hamiltonian.

  In order to geralize the concept of pseudo-hermiticity for the time dependent systems, we examine the points of view of A. Mostafazadeh and of M. Znojil.

  In the last part of this work some applications are reported.

– Keyword : non-hermitian Hamiltonian, $\mathcal{PT}$ -Symmetry, pseudo-hemiticity, metric operator

– Ce mémoire est consacré à l'étude des systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens non-Hermitiens ayant des spectres réels.

Nous commençons ce travail par une présentation générale de la théorie quantique Hermitienne. Nous introduisons ensuite une théorie quantique non Hermitienne qui s'appelle $\mathcal{PT}$ -Symétrie, developpée par C. M. Bender and S. Boettcher en1998, ces derniers ayant montré que le spectre de l'Hamiltonien à une dimension : $H = p^2 - (ix)^\nu$ où $\nu \geq 2$ est réel, positif et discret. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont respectivement les opérateurs de parité et de renversement du temps.

Quelques années plus tard A. Mostafazadeh a introduit la notion de pseudo-Hermiticité, et montré que chaque Hamiltonien satisfaisant la relation $H^+ = \eta H \eta^{-1}$ admet un spectre réel, où l'opérateur métrique η est un opérateur Hermitien et inversible. A. Mostafazadeh a montré aussi que chaque Hamiltonian $\mathcal{PT}$ symétrique est un Hamiltonian pseudu-hermitien.

Dans le but de généraliser la notion de pseudo-Hermiticité aux systèmes dépendant du temps nous examinons les deux points de vue de A. Mostafazadeh et M. Znojil.

Dans la dernière partie de ce travail des applications son reportées.

– Mots- clés :

Hamiltoniens non -hermitiens, $\mathcal{PT}$ -symétrie, pseudo-hemiticité, opérateur métrique.