

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEINGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE**  
**FACULTE DES SCIENCES**  
**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :.....  
Série :.....

## **MEMOIRE**

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister  
**En Physique**  
**Option: Physique Théorique**

Par

**Lamine KHODJA**

Intitulé

**Théories des Supercordes et des Cordes Hétérotiques  
dans le Formalisme de la Paraquantification**

Soutenu le : 22/03/2005

Devant le jury composé de :

<b>Mr. A. DJEMEL</b>	Prof. Univ. Mentouri Constantine	Président
<b>Mr. N. BELALOU</b>	M.C. Univ. Mentouri Constantine	Rapporteur
<b>Mr. L. CHETOUANI</b>	Prof. Univ. Mentouri Constantine	Examineur
<b>Mr. N. MEBARKI</b>	Prof. Univ. Mentouri Constantine	Examineur
<b>Mr. K. AIT MOUSSA</b>	M.C. Univ. Mentouri Constantine	Examineur

## **Remerciements**

*Ce travail a fait l'objet d'un mémoire de magister réalisé au département de Physique Théorique de l'Université Mentouri de Constantine sous la direction du Dr Nadir BELALOUI que je tiens à remercier vivement. Il m'a bien suivi, dirigé et m'a permis avec gentillesse, compétence et patience de mener à terme ce travail.*

*J'ai le plaisir de remercier tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en y participant :*

*Mr. A. DJEMEL, professeur à l'université Mentouri de Constantine a bien voulu présider ce jury.*

*Mrs L.CHETOUANI et N.MEBARKI, professeurs à l'université Mentouri de Constantine pour avoir bien voulu juger ce travail.*

*Mr K. AIT MOUSSA, Maître de conférences à l'université Mentouri de Constantine pour l'intérêt porté à ce travail.*

*Enfin, je ne saurais terminer sans adresser mes remerciements à mes enseignants, collègues et amis de physique théorique avec lesquels j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions, et tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.*

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>6</b>
<b>1 Introduction à la théorie des cordes et supercordes</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Cordes bosoniques . . . . .	11
1.2.1 Quantification . . . . .	14
1.2.2 Cordes fermées . . . . .	19
1.3 Cordes fermioniques . . . . .	20
1.3.1 Quantification . . . . .	22
1.4 Supercordes . . . . .	27
1.4.1 Quantification dans la jauge transverse : . . . . .	29
1.5 Formalisme paraquantique . . . . .	34
1.5.1 Introduction . . . . .	34
1.5.2 Paraquantification . . . . .	35
1.5.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs . . . . .	38
<b>2 Théorie des paracordes</b>	<b>40</b>
2.1 Introduction . . . . .	40
2.2 Jauge covariante . . . . .	40
2.2.1 Formalisme paraquantique . . . . .	40
2.2.2 Algèbre de Poincaré paraquantique . . . . .	42
2.3 Jauge transverse . . . . .	44
2.3.1 Formalisme . . . . .	44

2.3.2	Dimensions critiques de l'espace-temps . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Parasupercordes</b>	<b>48</b>
3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Formalisme paraquantique . . . . .	49
3.2.1	La jauge transverse . . . . .	49
3.2.2	Décomposition de Green . . . . .	50
3.3	Algèbre des générateurs supersymétriques . . . . .	52
3.4	Condition de "Mass shell" . . . . .	54
3.4.1	Opérateur de masse . . . . .	54
3.4.2	Quelques exemples : . . . . .	55
3.5	Fonction de Partition . . . . .	56
3.6	Spectre . . . . .	60
3.7	Cas Boson-Parafermion . . . . .	69
3.7.1	Formalisme . . . . .	69
3.7.2	Parasuper-algèbre de Poincaré . . . . .	69
3.8	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Cordes hétérotiques dans le cadre paraquantique</b>	<b>72</b>
4.1	Introduction . . . . .	72
4.2	Formalisme . . . . .	73
4.3	Propriétés du réseau . . . . .	75
4.3.1	Invariance modulaire . . . . .	76
4.4	Algèbre des générateurs supersymétriques . . . . .	82
4.5	Condition de "Mass-Shell" et fonction de partition . . . . .	83
4.5.1	Condition de "Mass-Shell" . . . . .	83
4.5.2	Fonction de partition . . . . .	83
4.6	Spectre . . . . .	87
4.7	Conclusion . . . . .	93
	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

<b>A Propriétés</b>	<b>97</b>
<b>B Cas Paraboson-Parafermion pour <math>D = 6</math></b>	<b>100</b>
B.1 Calcul de $[Q^a, Q^b]_+$	100
B.2 Calcul de $[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+$	101
B.3 Calcul de $[Q^a, Q^{\dot{a}}]_+$	103
<b>C Cas des Paraboson-Parafermion pour <math>D = 4</math></b>	<b>105</b>
C.1 Calcul de $[Q_1^a, \bar{Q}_1^b]_+$	105
C.2 Calcul de $[Q_1^a, \bar{Q}_2^b]_+ + [Q_2^a, \bar{Q}_1^b]_+$	106
C.3 Calcul de $[Q_2^a, \bar{Q}_2^b]_+$	107
<b>D Calcul de quelques masses</b>	<b>110</b>
<b>E Cas Boson-Parafermion pour <math>D = 6</math></b>	<b>115</b>
E.1 Calcul de $[Q^a, [Q^b, Q^c]_-]$	115
E.2 Calcul de $[Q^a, [Q^b, Q^{\dot{a}}]_-]$	116
E.3 Calcul de $[Q^{\dot{a}}, [Q^a, Q^b]_-]$	116
E.4 Calcul de $[Q^{\dot{a}}, [Q^{\dot{b}}, Q^a]_-]$	117
E.5 Calcul de $[Q^a, [Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_-]$	119
E.6 Calcul de $[Q^{\dot{a}}, [Q^{\dot{b}}, Q^{\dot{c}}]_-]$	122
<b>F Cas Boson-Parafermion pour <math>D = 4</math></b>	<b>126</b>
<b>G Propriétés des fonctions <math>\Theta</math></b>	<b>128</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>

# Préface

La théorie des cordes bosoniques est formulée dans un espace-temps de dimension  $D = 26$  alors que les théories des cordes fermioniques et des supercordes sont formulées dans un espace-temps de dimension  $D = 10$ . L'extension des deux premières dans le formalisme de la paraquantification conduit à la possibilité de leur existence à des dimensions  $D$  autres que 26 ou 10 [1], [2], [3].

La première étude de l'algèbre de Poincaré pour les cordes parabosoniques (resp. parafermioniques) a été faite par F.Ardalan and F.Mansouri [1]. Cette étude est basée sur l'hypothèse qui consiste à considérer que la coordonnée du centre de masse  $x^\mu$  et son moment conjugué  $p^\mu$  vérifient des relations de commutation ordinaires. Ceci est réalisé par le choix d'une direction spécifique dans le para-espace de Green, caractérisée par l'hypothèse :  $x^{\mu(\beta)} = x^\mu \delta_{\beta 1}$  et  $p^{\mu(\beta)} = p^\mu \delta_{\beta 1}$  où  $x^{\mu(\beta)}$  (resp  $p^{\mu(\beta)}$  ) sont les composantes de Green de  $x^\mu$  (resp.  $p^\mu$ ). La conséquence de cette hypothèse est que les variables de la corde  $X^\mu(\sigma, \tau)$ ,  $\mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)$  et  $\psi^\rho(\sigma'', \tau)$  ne satisfont plus des relations trilinéaires qui traduisent un système paraquantique. La séparation entre  $\beta = 1$  et  $\beta \neq 1$  nous conduit à écrire des relations du type anormal (en termes de composantes de Green) entre les coordonnées du centre de masse et les modes de vibration de la corde et en aucun cas, on peut les ramener à des relations trilinéaires qui sont la base de la paraquantification. Sous cette hypothèse, les auteurs démontrent que la théorie des cordes bosoniques (resp. fermioniques) est invariante de Poincaré si la dimension  $D$  de l'espace-temps et l'ordre  $Q$  de la paraquantification sont reliés par l'expression  $D = 2 + \frac{24}{Q}$  (resp.  $D = 2 + \frac{8}{Q}$ ).

Dans ce travail, paraquantifier cette théorie consiste à réinterpréter les variables classiques bosoniques et fermioniques  $X^\mu(\sigma, \tau)$ ,  $\mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)$ , et  $\psi^\rho(\sigma'', \tau)$  comme des opérateurs qui vérifient des relations de commutation trilinéaires ( $\tau$  représente le paramètre d'évolution,  $\sigma$  le paramètre qui dénombre les points de la corde). A la différence des travaux de Ardalan et Mansouri, ceci impose aux coordonnées du centre de masse et les modes d'excitation de la corde de vérifier des relations de commutation trilinéaires.

Dans le chapitre introduction, on donnera une idée générale sur la théorie des cordes et le formalisme paraquantique.

Dans le deuxième chapitre, nous reprendrons, les résultats des travaux [2], [3] qui consistent

à l'étude de l'algèbre de Poincaré pour les cas des cordes parabosoniques et parafermioniques (secteur de Neveu-Schwarz). On rappellera le formalisme des cordes parabosoniques (resp. parafermioniques), on discutera les 3 commutateurs de l'algèbre de Poincaré, à l'exception de  $[p^\mu, p^\nu]$  qui conduit à une discussion des propriétés de l'espace-temps, les autres commutateurs de l'algèbre sont satisfaits. Malgré notre hypothèse, qui consiste à traiter de la même façon le centre de masse et les modes de vibration de la corde, les relations entre la dimension critique de l'espace-temps  $D$  et l'ordre de la paraquantification  $Q$  restent inchangées.

En particulier, on peut avoir des cordes parafermioniques à des dimensions critiques  $D = 10, 6, 4, 3$  respectivement pour les ordres de la paraquantification  $Q = 1, 2, 4, 8$ . Celles ci coïncident justement avec les dimensions pour lesquelles sont formulées les supercordes classiques. Le chapitre 3 consiste à faire une investigation sur la possibilité d'existence des parasupercordes à  $D = 3, 4, 6$  [4]. En connexion avec certains travaux sur l'extension de la mécanique quantique supersymétrique (SSQM) à la mécanique quantique parasupersymétrique PSSQM (voir par exemple [5], [6], [7] et les références qu'elles contiennent), notre système correspond à un système supersymétrique du type parabosonique-parafermionique, dans le sens où, malgré la structure algébrique parastatistique des variables dynamiques, l'ensemble des générateurs des symétries forme l'algèbre de la SSQM. Dans ce cas, une étude du spectre a été élaborée à travers les fonctions de partition pour  $D = 3, 4, 6$ . Enfin, et en connexion avec certains travaux sur les supercordes fractionnaires basées sur un système du type bosonique-fermionique fractionnaire, qui sont aussi formulées à  $D = 2, 3, 4, 6, 10$  (voir par exemple [8], [9] et les références qu'elles contiennent), un modèle de théorie des supercordes du type bosonique-parafermionique a été considéré. A la différence du premier cas, l'ensemble des générateurs des symétries forme l'algèbre de la PSSQM, dans le sens de Beckers et Debergh. Ceci conduit à étudier les conséquences de tous ces résultats sur les paracordes hétérotiques. C'est l'objet du chapitre 4.

En effet, à partir des cordes parabosoniques fermées définies à  $D = 2 + \frac{24}{Q}$  et des parasupercordes définies à  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$ , on cherchera d'autres possibilités de compactification de  $D$  à  $D'$  autres que celle de 26 à 10 (cas ordinaire). On construira le formalisme paraquantique et l'algèbre des générateurs supersymétriques, on définira le réseau et son groupe et confirmera la consistance de la théorie par le calcul de la "one-loop amplitude". Enfin, on calculera la fonction de partition et on déterminera les premiers niveaux du spectre en vérifiant la consistance

avec la fonction de partition calculée. On cloturera enfin par une conclusion. Un aperçu sur les propriétés des matrices de Dirac par rapport au types de spineurs, des propriétés des fonctions  $\vartheta$  et de nombreux détails de calcul fastidieux sont laissés aux annexes.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des cordes et supercordes

### 1.1 Introduction

Pour décrire les phénomènes observés dans la nature, 4 forces fondamentales sont nécessaires : les interactions électromagnétiques (E.M), faibles (f), fortes (F) et la gravitation (G).

A l'origine, les 3 premières concernaient des systèmes à l'échelle microscopique que décrit le théorie quantique des champs. L'introduction de notions de symétries locales dans les théories de Yang-Mills (Y.M) a conduit à des modèles d'unification (théories de jauge) qui se basent sur le formalisme de la mécanique quantique. La gravitation était par contre destinée à décrire les phénomènes à l'échelle macroscopique à travers la théorie de la relativité générale d'Einstein qui se base sur une manifestation géométrique de l'espace-temps.

Le mystère de ces théories en est qu'elles sont indépendantes, que ce soit du point de vue formalisme mathématique ou des principes.

Au fur et à mesure que se précisent les connaissances, la gravitation s'avère jouer un rôle primordial au niveau microscopique. Il surgit alors d'une façon naturelle le problème suivant : comment adapter la théorie de la gravitation pour décrire le monde microscopique ?, en d'autres termes, comment construire une théorie quantique de la gravitation ?

C'est un des problèmes majeurs aux quels sont confrontés les physiciens du 20<sup>ème</sup> siècle.

Plusieurs tentatives (parfois osées) ont conduit à des échecs. Face à ces échecs et aux prob-

lèmes associés à l'idéalisation de la particule ponctuelle, certains physiciens ont opté à l'abandon de cette dernière et la substituer par l'idée qui consiste à concevoir une particule comme le résultat de la vibration d'une corde dans l'espace-temps. Cette option était le fruit de plusieurs années de recherche sur les modèles duaux [10] qui, à l'origine, étaient destinées à décrire les interactions fortes, puis, abandonnés par la suite dès l'apparition de la Q.C.D.

En effet, la théorie des modèles duaux conduit à deux résultats étranges :

1. L'existence d'une nouvelle particule sans masse de spin 2.
2. La dimension de l'espace-temps est supérieure à 4.

Ces deux résultats sont le point de départ de plusieurs recherches, J. Schwartz et J. Scherck et d'autres [11, 12, 13] ont associé le graviton à la particule sans masse de spin 2, et la dimension  $D > 4$  inspire la théorie de Kaluza-Klein [14, 15]. Ceci a conduit au développement d'une nouvelle théorie d'unification basée sur une nouvelle définition de la particule : la corde et la vibration de cette corde détermine le type de la particule.

Une autre notion est venue conforter l'option de la théorie des cordes : c'est la supersymétrie (SUSY). En effet, sur la base des propriétés géométriques très différentes des bosons et des fermions, on a passé longtemps à croire qu'il est impossible de trouver une symétrie entre eux. Pourtant, cette symétrie existe belle et bien, c'est la supersymétrie. Elle consiste à donner une description unifiée des bosons et des fermions, cette idée est apparue au début des années soixante-dix, mais prit véritablement son essor avec les travaux de Ferrara, Van Nieuwenhuizen, Zumino et d'autres.

Le plus beau dans cette théorie est que l'invariance locale nous conduit à la relativité générale. Voir surgir la gravitation sans l'avoir explicitement incluse est un résultat très attrayant. C'est la supergravité.

Cette théorie est formulée pour la dimension  $D = 11$  qui nous inspire une autre fois la théorie de Kaluza-Klein. Malheureusement, cette théorie n'est pas finie.

Le moment est venu de mixer toutes les idées, ce qui conduit plusieurs chercheurs [16-20] à développer ce qu'on appelle la théorie des cordes supersymétriques ou supercordes qui offre beaucoup d'avantages par la résolution de certains problèmes aux quels sont confrontés les premiers modèles de la théorie des cordes. En plus, la théorie des cordes étant une théorie renormalisable, implique une théorie renormalisable de la supergravité.

Malgré ces avantages, la théorie des supercordes est confrontée à des problèmes par la présence de certaines anomalies, des recherches conduites par Gross, Harvey, Martinec et Rohm ont amené à une théorie hybrides des cordes : C'est la théorie des cordes hétérotiques qui est construite à partir des groupe  $E_8 \otimes E_8$  et  $SO(32)$  (voir chp. 4).

La construction de plusieurs théories des cordes indépendantes pose le problème d'unicité. Des recherches ont évolué dans ce sens et ont donné naissance à d'autres théories : La M-théory, les branes....

Dans ce qui suit, on propose de donner une brève description de la théorie des cordes. Pour de plus amples détails, on peut par exemple consulter [21, 22, 23].

## 1.2 Cordes bosoniques

La corde est un objet à une dimension, elle se présente comme une extension du point de telle sorte que, de la même façon que l'évolution d'un point dans l'espace-temps décrit une ligne, l'évolution de la corde va d'écrire une surface. Il est donc légitime que la théorie des cordes découle de la théorie du point.

Nous commencerons cette partie par une brève description de la particule ponctuelle sans spin.

Dans ce cas l'action est donnée par

$$S = -m \int_{s_0}^{s_1} ds = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[ -\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta^{\mu\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

où  $\tau$  est un paramètre arbitraire de la ligne d'univers dans l'espace-temps à  $D$  dimension,  $x^\mu(\tau)$  décrit la position pour chaque valeur de  $\tau$ , avec  $\mu, \nu = \overline{0, D-1}$  et la convention  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- + + \dots +)$ .

Cette action est invariante par  $\tau$ -reparamétrisation

Le moment conjugué est défini par :

$$P_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (1.2)$$

La présence de cette symétrie a pour conséquence la présence de la contrainte :

$$P^2 + m^2 = 0 \quad (1.3)$$

De la même façon que l'action de la particule ponctuelle est proportionnelle à la longueur de la ligne d'univers, en 1970, Nambu postule que celle de la corde devrait être proportionnelle à l'aire de la surface d'univers, ce qui permet d'introduire l'action sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\sigma d\tau \left[ (\dot{X} X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Où  $X^\mu(\sigma, \tau)$  est la coordonnée de la corde,  $\tau$  est le paramètre d'évolution et  $\sigma$  est un paramètre qui dénombre les points de la corde.

$$\dot{X} = \frac{dX^\mu}{d\tau} \quad \text{et} \quad X' = \frac{dX^\mu}{d\sigma} \quad (1.5)$$

avec  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$  est le facteur de normalisation appelé aussi tension de la corde. Expérimentalement  $\alpha'$  représente la constante de Regge.

Cette action est invariante par reparamétrisation de la surface d'univers et par transformation de Lorentz.

D'après le principe de moindre action, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial X'_\mu} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = 0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = \pi, \tau) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

La deuxième relation représente ce qu'on appelle, la condition aux bords de la corde.

Le moment conjugué est donné par :

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} \quad (1.7)$$

la conséquence de l'invariance par reparamétrisation est la présence des contraintes :

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{\pi^2} = 0 \\ \mathcal{P}^\mu X'_\mu = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

On définit aussi le moment énergie total de la corde par :

$$P^\mu = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) \quad (1.9)$$

et le moment angulaire total par :

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}^\mu X^\nu - \mathcal{P}^\nu X^\mu) \quad (1.10)$$

Les équations (1.8) ne sont pas linéaires, un choix convenable de la jauge (jauge orthogonale) permet de les linéariser sous la forme :

$$\ddot{X}_\mu(\sigma, \tau) - X''_\mu(\sigma, \tau) = 0 \quad (1.11)$$

En tenant compte de la condition aux bords, la solution générale prend la forme :

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \{a_n^\mu(0) \exp(-in\tau) - a_n^{\mu*}(0) \exp(in\tau)\} \cos n\sigma \quad (\text{I-12})$$

qui, en posant :

$$\begin{aligned} a_n^\mu &= a_n^\mu(0) \exp(-in\tau) \quad , \quad a_n^{\mu*} = a_n^{\mu*}(0) \exp(in\tau) \\ \alpha_0^\mu &= 2\alpha' p^\mu \quad , \quad \alpha_n^\mu = \sqrt{2n\alpha'} a_n^\mu(0) \\ \alpha_{-n}^\mu &= \alpha_n^{\mu*} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

se réécrit sous la forme :

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \alpha_0^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp(-in\tau) \cos n\sigma \quad (1.13)$$

les  $\alpha_n^\mu$  représentent les modes de vibration de la corde.

Les générateurs de Virasoro dans cette jauge sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\pi\alpha' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \exp in(\tau + \sigma) \left( \mathcal{P}^2 + \frac{(X^\mu)^2}{2\pi\alpha'} \right) \\ &= \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m \equiv 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

En particulier  $L_0 = H$ , où  $H$  est le Hamiltonien qui s'écrit

$$H = -\pi \int_0^\pi d\sigma \left[ \alpha' \mathcal{P}^2 + \frac{(X^\mu)^2}{4\pi^2\alpha'} \right] = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m \quad (1.15)$$

Ceci conduit à écrire la condition de masse de la corde en fonction des modes :

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m \quad (1.16)$$

D'autre part le moment angulaire peut s'écrire :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (1.17)$$

### 1.2.1 Quantification

Notre théorie est riche en symétries, la présence des contraintes nous conduit à utiliser ce qu'on appelle la méthode de quantification de Dirac.

Il existe deux méthodes de quantification :

1. La première consiste à traiter toutes les variables comme indépendantes et les contraintes seront considérées comme des conditions initiales. Par la suite, seuls les états soumis à ces contraintes (conditions de Virasoro) seront physiques. C'est ce qu'on appelle la quantification covariante
2. La deuxième consiste à résoudre les équations des contraintes, ceci nous permet d'éliminer les variables superflues pour avoir uniquement des variables dynamiques effectivement indépendantes. C'est la quantification dans la jauge tranverse.

## Jauge covariante

On réinterprète les variables dynamiques  $x^\mu$ ,  $p^\nu$  et  $\alpha_n^\mu$  en termes d'opérateurs qui vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[x^\mu, p^\nu] = i g^{\mu\nu} \quad (1.18.a)$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = 2\alpha' n \delta_{n+m,0} g^{\mu\nu} \quad (1.18.b)$$

le moment angulaire garde la même forme en terme d'opérateurs :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (1.19)$$

les générateurs de Virasoro s'écrivent comme :

$$L_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n-m}^\mu \alpha_{n,m}^\mu : \quad (1.20)$$

Mais à cause des ambiguïtés d'ordes dans  $L_0$ , on ajoute une constante qui nous permet d'enlever cette ambiguïté

Donc on pose  $L_0 \longrightarrow L_0 - \alpha(0)$

ce qui nous permet d'écrire

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m} \alpha_m - \alpha(0) \quad (1.21)$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m} \alpha_m - \frac{\alpha(0)}{\alpha'} \quad (1.22)$$

Comme pour l'électrodynamique quantique (QED), les états physiques sont déterminés par :

$$L_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad n \geq 1 \quad (1.22.a)$$

$$[L_0 - \alpha(0)] |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad (1.22.b)$$

Remarquons ici que l'état  $|0\rangle$  (état du vide) est un état tachyonique et que la composante temporelle nous donne un état de ghost, dû au fait que la métrique n'est pas définie positive.

Dans le cadre du “No-ghost theorem” (NGT), on montre que la théorie est libre des “ghost” pour  $(\alpha(0) \leq 1, D \leq 25)$  ou  $(\alpha(0) = 1, D = 26)$ .

Les générateurs  $L_n$  satisfont l’algèbre de Virasoro :

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{D}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n,-m} \quad (1.23)$$

L’algèbre de Poincaré est décrite par les relations :

$$[p^\mu, p^\nu] = 0 \quad (1.24.a)$$

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = i (g^{\mu\nu} p^\rho - g^{\mu\rho} p^\nu) \quad (1.24.b)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i (g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \quad (1.24.c)$$

Notons ici que la covariance de Lorentz est manifeste.

### Jauge transverse

Il est plus commode d’utiliser les coordonnées du cône de lumière :

$$U^\mu \rightarrow U^\pm, U^{D-1} \quad \text{avec } i = \overline{1, D-2} \quad (1.25)$$

$$U^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (U^0 \pm U^{D-1}) \quad (1.26)$$

avec la métrique de Minkowski :

$$\eta_{ij} = 1, \eta_{+-} = \eta_{-+} = -1 \quad (1.27)$$

le produit de 2 vecteurs est défini par :

$$U.V = U^i V^i - U^+ V^- - U^- V^+ \quad (1.28)$$

où

$$U^\pm = -U_\mp, \quad U^i = U_i \quad (1.29)$$

Les opérateurs  $x^-$ ,  $p^+$ ,  $x^i$ ,  $p^i$  et  $\alpha_n^i$  ( $i = \overline{1, D-2}$ ) vérifient les relations de commutation :

$$[x^-, p^+] = +i \quad (1.30.a)$$

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij} \quad (1.30.b)$$

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = 2\alpha' n \delta^{ij} \delta_{n+m,0} \quad (1.30.c)$$

Les composantes  $\alpha_n^-$  s'écrivent :

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} [L_n^{tr} - \alpha(0) \delta_{n,0}] \quad (1.31)$$

où

$$L_n^{tr} = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n-m}^i \alpha_n^i : \quad (1.32)$$

L'opérateur de masse dans cette jauge est donné par :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \alpha(0)) \quad (1.33)$$

Pour l'algèbre de Poincaré, on peut facilement montrer qu'elle est satisfaite sauf pour le commutateur  $[M^{i-}, M^{j-}]$  qui nous donne :

$$[M^{i-}, M^{j-}] = \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i) \left[ \frac{1}{m} \left( \alpha(0) - \frac{D-2}{24} \right) - m^2 \left( 1 - \frac{D-2}{24} \right) \right] \quad (1.34)$$

il est clair que ce commutateur s'annule pour les seules valeurs

$$\begin{cases} D = 26 \\ \alpha(0) = 1 \end{cases} \quad (1.35)$$

Condition qui est bien satisfaite par le (NGT). Donc notre théorie est bien libre de "ghost".

L'étude du spectre est basée sur la construction d'une fonction génératrice. En effet, la dégénérescence des états pour chaque niveau de masse augmente exponentiellement et peut

être obtenue à partir de cette fonction génératrice appelée : fonction de partition.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = Tr x^N \quad (1.36)$$

où  $d(n)$  est la dégénérescence au niveau excité.

Pour les cordes bosoniques, la fonction est définie par :

$$f_b(x) = \sum_{N=0}^{\infty} d_b(N) x^N \quad (1.37)$$

avec

$$\begin{aligned} d_b(N) &\rightarrow \text{nombre d'états pour chaque niveau.} \\ N &= \alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i \\ \text{avec } i &= \overline{1, 24} \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à écrire :

$$f_b(x) = Tr x^{\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i} \quad (1.38)$$

nous avons

$$Tr A = \sum_n \langle n | A | n \rangle \quad (1.39)$$

On montre facilement que :

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | x^{\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i} | n' \rangle \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^n} \right)^{24} \\ &= 1 + 24x + 324x^2 + 3200x^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

L'utilité de cette fonction apparaîtra dans les chapitres 3 et 4.

### 1.2.2 Cordes fermées

Si on impose la périodicité pour les coordonnées  $X^\mu(\sigma, \tau)$  de telle sorte que :

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + \pi, \tau) \quad (1.41)$$

en suivant les mêmes démarches que dans le cas des cordes ouvertes, la solution est donnée (en fonction des modes) par :

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu \quad (1.42)$$

avec

$$X_R^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp[-2in(\tau - \sigma)] \quad (1.43.a)$$

$$X_L^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu \exp[-2in(\tau + \sigma)] \quad (1.43.b)$$

Pour quantifier, en plus des relations de commutation (1.18) nous avons :

$$[\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = 2\alpha' n \delta_{n+m, 0} g^{\mu\nu} \quad (1.44.a)$$

$$[\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = 0 \quad (1.44.b)$$

les états physiques sont données par :

$$L_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad n \geq 1 \quad (1.45.a)$$

$$\tilde{L}_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad n \geq 1 \quad (1.45.b)$$

$$[L_0 - \alpha(0)] |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad (1.45.c)$$

$$[\tilde{L}_0 - \alpha(0)] |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad (1.45.d)$$

avec en plus la condition :

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |\psi\rangle_{ph} = 0 \quad (1.46)$$

avec les  $\tilde{L}_n$  vérifient les mêmes relations que (1.20), en termes des modes gauches.

la condition de “mass-shell” est traduite par

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} p^\mu p_\mu = M_L^2 + M_R^2 \quad (1.47)$$

où

$$\alpha' M_L^2 = 2[N - \alpha(0)] = 2 \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n - \alpha(0) \right] \quad (1.48.a)$$

$$\alpha' M_R^2 = 2[\tilde{N} - \alpha(0)] = 2 \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n - \alpha(0) \right] \quad (1.48.b)$$

la condition (1.46) signifie que la théorie est indépendante du choix de l'origine du paramètre  $\sigma$ , ce qui nous conduit à la condition de “mass-shell” donnée par :

$$\frac{1}{4} \alpha' M^2 = N = \tilde{N} \quad (1.49)$$

Cette théorie est libre de ghost pour  $D = 26$  et  $\alpha(0) = 2$ , et libre de tachyons, ce qui est intéressant. La particularité de la corde fermée est la présence d'un état tensoriel sans masse dont la partie symétrique peut être assimilée au graviton.

### 1.3 Cordes fermioniques

Les cordes fermioniques sont construites pour décrire les particules spinorielles.

Pour cela on a ajouté des champs fermioniques à ceux de la théorie bosonique.

Le champ fermionique est un spineur de Majorana à 2 dimensions  $\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_0^\mu \\ \psi_1^\mu \end{pmatrix}$ .

On écrit l'action sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\rho \left[ \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu \right] \quad (1.50)$$

avec

$$\rho^0 = \tau \quad , \quad \rho^1 = \sigma \quad (1.51)$$

et les matrices  $\gamma$  à 2 dimensions sont données par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\eta^{ab} \quad (1.52)$$

Cette action est invariante sous les transformations susy globales :

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon} \psi^\mu \quad (1.53.a)$$

$$\delta \psi^\mu = -i\gamma^a \partial_a X^\mu \varepsilon \quad (1.53.b)$$

On vérifie la fermeture de l'algèbre supersymétrique, en montrant que :

$$[\delta_1, \delta_2] X^\mu = (2i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^a \varepsilon_2) X^\mu \quad (1.54.a)$$

$$[\delta_1, \delta_2] \psi^\mu = (2i\bar{\varepsilon}_1 \gamma^a \varepsilon_2) \psi^\mu \quad (1.54.b)$$

les équations du mouvement sont donnée par :

$$\square X = 0 \quad (1.55.a)$$

$$\gamma^a \partial_a \psi = 0 \quad (1.55.b)$$

$$\partial_1 X (\rho^1 = 0) = \partial_1 X (\rho^1 = \pi) = 0 \quad (1.55.c)$$

le choix

$$\psi_0 (\rho^0 = 0) = \psi_1 (\rho^0 = 0) \quad (1.56)$$

conduit aux possibilités

$$\psi_0 (\rho^0 = \pi) = \pm \psi_1 (\rho^0 = \pi) \quad (1.57)$$

qui correspondent aux deux modèles :

$$\text{avec } \begin{cases} + & \text{modèle de Ramond (R)} \\ - & \text{modèle de Neveu-Schwarz (N-S)} \end{cases}$$

les solutions sont :

$$X^\mu = x^\mu + \alpha_0^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp(-in\tau) \cos n\sigma \quad (1.58.a)$$

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (1.58.b)$$

$$\psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in(\tau-\sigma)} \quad \text{avec} \quad C_{-n} = C_n^* \quad (1.58.c)$$

avec les conditions  $\psi_0(\tau, 0) = \psi_1(\tau, 0)$ .

$n \in \mathbb{Z}$  pour le secteur de Ramond et  $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  pour le secteur de (N-S).

### 1.3.1 Quantification

#### Jauge covariante

On impose les règles de commutation :

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \partial_0 X^\nu(\sigma', \tau)] = -\pi g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (1.59.a)$$

$$[\psi_a^\mu(\sigma, \tau), \partial_0 \psi_b^\nu(\sigma', \tau)]_+ = -\pi g^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta(\sigma - \sigma') \quad (1.59.b)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \psi^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad (1.59.c)$$

$$[\partial_0 X^\mu(\sigma, \tau), \partial_0 \psi^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad (1.59.d)$$

qui, réécrites en fonction des modes, sont données par :

$$[x^\mu, \alpha_0^\nu] = -2\alpha' g^{\mu\nu} \quad (1.60.a)$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = -2\alpha' n g^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \quad (1.60.b)$$

$$[C_n^\mu, C_m^\nu]_+ = -g^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} \quad (1.60.c)$$

les autres commutateurs et anticommutateurs sont nuls.

#### Modèle de Ramond

On pose

$$C_0^\mu = \frac{i}{2} \gamma^\mu, \quad C_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{D+1} d_n^\mu \quad (1.61)$$

la superalgèbre de Virasoro est donnée par :

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m+n,0} \quad (1.62.a)$$

$$[L_m, F_n] = \left( \frac{1}{2} m - n \right) F_{m+n} \quad (1.62.b)$$

$$[F_m, F_n]_+ = 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m+n,0} \quad (1.62.c)$$

avec :

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} : \alpha_{-n} \alpha_{m+n} : + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( n + \frac{1}{2} m \right) : d_{-n} d_{m+n} : \quad (1.63)$$

$$F_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} d_{m+n} \quad (1.64)$$

Le Hamiltonien dans ce cas est

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m} d_m \quad (1.65)$$

les états physiques dans cette jauge sont définis par :

$$L_n |\psi\rangle = 0 \quad n > 0 \quad (1.66.a)$$

$$(L_0 - a) |\psi\rangle = 0 \quad (1.66.b)$$

$$F_n |\psi\rangle = 0 \quad (1.66.c)$$

$$F_0 |\psi\rangle = 0 \quad (1.66.d)$$

On peut montrer que  $F_0^2 = L_0$  qui nous conduit à montrer que  $a = 0$ .

La condition de la couche de masse (1.3) nous donne la forme de la masse en fonction des modes par :

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m} d_m \quad (1.67)$$

Ce modèle correspond au secteur fermionique

Modèle de Neveu-Schwarz

De la même manière on pose :

$$C_r^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} b_r^\mu \quad , \quad C_{-r}^+ = C_r \quad (\text{I-68})$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} [b_r^\mu, b_s^\nu]_+ &= -g^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} \\ \text{avec } r, s &\in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.69)$$

On définit les générateurs de la superalgèbre de Virasoro :

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} : \alpha_{-m}^\mu \alpha_{m+n, \mu} : + \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left( r + \frac{1}{2} m \right) : b_{-r} b_{m+r} : \quad (1.70)$$

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} b_{r+n} \quad (1.71)$$

qui vérifient les relations suivantes :

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{D}{8} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad (1.72.a)$$

$$[L_m, G_r] = \left( \frac{1}{2} m - n \right) G_{m+r} \quad (1.72.b)$$

$$[G_r, G_s]_+ = 2L_{r+s} + \frac{1}{2} D \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s,0} \quad (1.72.c)$$

Les états physiques doivent satisfaire les conditions :

$$L_n |\psi\rangle = 0 \quad n > 0 \quad (1.73.a)$$

$$(L_0 - a) |\psi\rangle = 0 \quad a > 0 \quad (1.73.b)$$

$$G_r |\psi\rangle = 0 \quad r > 0 \quad (1.73.c)$$

De la même façon, on définit le Hamiltonien :

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty} r b_{-r} b_r \quad (1.74)$$

et l'opérateur de masse :

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty} r b_{-r} b_r \quad (1.75)$$

Tous les états de ce secteur sont des bosons.

Remarquons aussi que l'état fondamental représente un tachyon.

Pour l'algèbre de Poincaré le générateur  $M^{\mu\nu}$  s'écrit sous la forme :

$$M^{\mu\nu} = M_0^{\mu\nu}(x) + K^{\mu\nu} \quad (1.76)$$

avec  $M_0^{\mu\nu}(x)$  représentant la partie bosonique, et où l'opérateur  $K^{\mu\nu}$  est défini par :

$$K^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (b_{-r}^\mu, b_r^\nu - b_{-r}^\nu, b_r^\mu) \quad (NS) \quad (1.77)$$

$$K^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (d_{-m}^\mu, d_m^\nu - d_{-m}^\nu, d_m^\mu) \quad (R) \quad (1.78)$$

ces générateurs vérifient l'algèbre de Poincaré c-à-d :

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = -i g^{\mu\nu} p^\rho + i g^{\mu\rho} p^\nu \quad (1.79)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} - i g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - i g^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} + i g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} \quad (1.80)$$

### Jauge transverse

Comme on déjà vu dans le cas des cordes bosoniques, cette jauge nous permet de déterminer la dimension critique.

Les relations de commutation et d'anticommutation vérifiées par les opérateurs  $x^-$ ,  $p^+$ ,  $x^i$ ,  $p^i$ ,  $\alpha_n^i$  et  $b_r^i$  ou  $d_n^i$  sont :

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = \delta^{ij} n \delta_{n+m} \quad (1.81.a)$$

$$[x^-, p^+] = i \quad (1.81.b)$$

$$[d_n^i, d_m^j]_+ = \delta^{ij} \delta_{n+m} \quad (R) \quad (1.81.c)$$

$$[b_r^i, b_s^j] = \delta^{ij} \delta_{r+s} \quad (NS) \quad (1.81.d)$$

avec  $\overline{i = 1, D - 2}$

De la même façon, on définit les générateurs de Lorentz :

$$M^{i-} = M_0^{i-}(x) + K^{i-} \quad (1.82)$$

(où  $M_0^{i-}(x)$  représente la partie bosonique).

avec

$$K^{i-} = -\frac{\imath}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_n^i \left( b_{n-r}^i b_r^j - b_{n-r}^j b_r^i \right) \quad (1.83)$$

et

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-l}^i \alpha_l^i : + \frac{1}{2p^+} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left( r - \frac{n}{2} \right) : b_{n-r}^i b_r^i : - \frac{a}{2p^+} \delta_{n,0} \quad (1.84)$$

$$b_r^- = \frac{1}{p^+} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_{s-r}^i b_r^i \quad (1.85)$$

L'algèbre de Lorentz est satisfaite à l'exception du commutateur  $[M^{i-}, M^{j-}]$  qui nous donne :

$$[M^{i-}, M^{j-}] = -\frac{\imath}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \right) \left[ n \left( \frac{D-2}{8} \right) + \frac{1}{n} \left( 2a - \frac{D-2}{8} \right) \right] \quad (1.86)$$

Ce commutateur est nul uniquement pour  $D = 10$  et  $a = \frac{1}{2}$  dans le secteur de Ramond ( $D = 10$  et  $a = 0$  dans le secteur de N-S)

Pour déterminer le nombre d'états physiques pour chaque niveau excité, il est plus commode de passer par la fonction de partition.

Le calcul explicite de cette fonction nous donne :

$$\begin{aligned} f_R(x) &= \sum_{N=0}^{\infty} d_R(N) x^N \\ &= 8 T r x^{\sum_{n=1}^{\infty} n (a_{-n}^i a_n^i + d_{-n}^i d_n^i)} \\ &= 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 \\ &= 8 (1 + 8x + 16x^2 + 144x^3 + 960x^4 + \dots) \end{aligned} \quad (1.87)$$

les différents coefficients dans ce développement correspondent aux degrés de dégénérescence pour chaque niveau excité.

Pour N-S

$$\begin{aligned}
f_{NS}(x) &= \sum_{N=0}^{\infty} d_{NS}(N) x^N \\
&= \frac{1}{2x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^8} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{n-1/2})^8 - \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{n-1/2})^8 \right\} \\
&= 8(1+8x+16x^2+144x^3+960x^4+\dots)
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Remarquons que la fonction de partition a le même développement pour les deux secteurs ce qui veut dire qu'il y a autant de bosons que de fermions pour chaque niveau excité. Ceci suggère la construction d'un modèle supersymétrique qui donnerait une description unifiée des bosons et des fermions. La théorie des supercordes répond à ces préoccupations.

## 1.4 Supercordes

Le principal handicap de la théorie des cordes fermioniques est l'introduction de deux espaces de Fock indépendants pour décrire les bosons et les fermions (ceci est une conséquence du fait que la supersymétrie se manifeste sur le "world sheet" et non pas sur l'espace-temps). Cette théorie est baptisée "ancienne" théorie des supercordes.

La nouvelle théorie des supercordes qui est basée sur une SUSY sur l'espace-temps nous conduit à un seul espace de Fock décrivant à la fois les bosons et les fermions.

Pour les cordes bosoniques l'action de Polyakov s'écrit :

$$S_{bos} = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{1.89}$$

où  $g^{\alpha\beta}$  est la métrique de l'espace-temps,  $\mu = \overline{0, D-1}$ .

Par analogie au cas de la théorie supersymétrique du point, supersymétriser cette action revient à faire la correspondance :

$$S_{bos} \rightarrow S_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta \tag{1.90}$$

avec

$$\Pi_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A \quad (1.91)$$

où  $\theta^A$  est un spineur dont les composantes sont données par  $\theta^{Aa}$  avec  $a = 1, \dots, 2^{[D/2]}$  ([ ] représente la partie entière et  $D$  est la dimension de l'espace-temps),  $A = 1, \dots, N$  ( $N$  entier)

Cette action est invariante sous les transformations supersymétriques globales.

L'invariance locale exige l'introduction d'un deuxième terme  $S_2$ .

$$S = S_1 + S_2 \quad (1.92)$$

de telle sorte que

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \int d\sigma d\tau \left\{ -i\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right) + \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right\} \quad (1.93)$$

$\epsilon^{\alpha\beta}$  est le tenseur de Levi-Civita et  $(\alpha, \beta) = (\sigma, \tau)$ .

L'invariance de  $S_2$  sous les transformations SUSY nous conduit à l'identité :

$$\epsilon^{\alpha\beta} \left[ \Gamma^\mu \theta \partial_\alpha \bar{\theta} \Gamma_\mu \partial_\beta \theta + \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta \partial_\beta \bar{\theta} \Gamma_\mu \theta + \Gamma^\mu \partial_\beta \theta \bar{\theta} \Gamma_\mu \partial_\alpha \theta \right] = 0 \quad (1.94)$$

avec  $\theta = \theta^1$  ou  $\theta^2$ . En posant  $\psi_1 = \theta$ ,  $\psi_2 = \partial_\sigma \theta = \theta'$  et  $\psi_3 = \partial_\tau \theta = \dot{\theta}$ , l'équation (1.94) est réécrite sous une forme compacte :

$$\Gamma^\mu \psi_{[1} \psi_2 \Gamma_\mu \psi_3] = 0 \quad (1.95)$$

(le symbole [ ] représente l'antisymétrisation des spineurs  $\psi$ ).

dont la principale conséquence est que seules les 4 valeurs  $D = 3, 4, 6, 10$  de la dimension de l'espace-temps sont possibles, avec des exigences sur le type de spineurs (modèle de superYang-Mills). La quantification de cette théorie conduit à la survie d'une seule possibilité ( $D = 10$ ). Ce résultat est fondamental pour la suite de notre travail.

### 1.4.1 Quantification dans la jauge transverse :

Le défaut majeur de l'action de Green-Schwarz est qu'une quantification covariante naïve, comme pour la particule ponctuelle, n'existe pas, dans le sens où les relations de commutation sont hautement non linéaires!. La solution à ce problème est de quantifier directement dans la jauge transverse (du cône de lumière).

Le modèle à traiter est un modèle supersymétrique. Nous devons donc équilibrer les degrés de liberté bosoniques et fermioniques. Un spineur de Dirac a  $2^{[D/2]}$  composantes complexes, c-à-d pour  $\theta^1$  et  $\theta^2$  à  $D = 10$  nous avons 32+32 composantes complexes, par contre, pour les bosons, nous avons uniquement 8 composantes transverses. Pour arriver à réduire ce surplus, on doit tenir compte de certaines conditions décrites comme suit :

Condition	Nombre de composantes
Dirac	(32 + 32) <i>C.Complexes</i>
Majorana-Weyl	(16 + 16) <i>C.Complexes</i>
Light cone	(8 + 8) <i>C.Réelles</i>
On-Shell	8 <i>C.Réelles</i>

la condition de la jauge transverse est donnée par

$$\Gamma^+ \theta^A = 0 \quad \text{avec } A = 1, 2 \quad (1.96)$$

les propriétés des matrices  $\Gamma$  sont décrite dans l'annexe A.

Dans cette jauge l'action est donnée par (avec la substitution  $\sqrt{p^+} \theta \rightarrow S$ ) :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left( \partial_a X^i \partial^a X_i - i \bar{S}^{Aa} \rho^B \partial_B S^{Aa} \right) \quad (1.97)$$

avec  $i, a = \overline{1, 8}$ ,  $A, B = 1, 2$  et la convention  $2\alpha' = 1$ .

Où  $S^A$  est un spineur à deux composantes et  $\bar{S}^{Aa} = (S^+)^{Bb} (\Gamma^0)^{ba} (\rho^0)^{BA}$

les matrices  $\rho^A$  verifient l'algèbre de Clifford où :

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & \iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\rho^A, \rho^B\} = -2\eta^{AB} \quad (1.98)$$

Les équation du mouvement sont :

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma) S^{1a} = 0 \quad (1.99.a)$$

$$(\partial_\tau - \partial_\sigma) S^{2a} = 0 \quad (1.99.b)$$

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X^i = 0 \quad (1.99.c)$$

remarquons que se sont des équations linéaires faciles à résoudre.

Différents types de supercordes sont construits. On peut les classer comme suit :

Supercordes :Type I

Les conditions aux limites sont données par

$$S^{1a}(0, \tau) = S^{2a}(0, \tau) \quad (1.100.a)$$

$$S^{1a}(\pi, \tau) = S^{2a}(\pi, \tau) \quad (1.100.b)$$

ce qui nous donne la solution sous la forme :

$$S^{1a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^a \exp[-in(\tau - \sigma)] \quad (1.101.a)$$

$$S^{2a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^a \exp[-in(\tau + \sigma)] \quad (1.101.b)$$

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp(-in\tau) \cos n\sigma \quad (1.101.c)$$

les modes vérifiant les relations d'anticommuation :

$$\left[ S_n^a, S_m^b \right]_+ = \delta^{ab} \delta_{n+m} \quad (1.102)$$

alors que les  $X^i$  vérifient les mêmes relations que pour les cordes bosoniques ouvertes.

Supercordes fermées :Type II (fermées)

Les conditions de périodicité sont :

$$S^{Aa}(\sigma, \tau) = S^{Aa}(\sigma + \pi, \tau) \quad (1.103)$$

Le développement en modes donne :

$$S^{1a}(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^a \exp[-2in(\tau - \sigma)] \quad (1.104.a)$$

$$S^{2a}(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_n^a \exp[-2in(\tau + \sigma)] \quad (1.104.b)$$

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left\{ \alpha_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau + \sigma)} \right\} \cos n\sigma \quad (1.104.c)$$

Pour les supercordes fermées  $N = 2$ , on distingue deux types, selon la chiralité des champs spinoriels (1.104.a) et (1.104.b) :

- chiralité opposée  $\longrightarrow$  supercordes type IIA.
- même chiralité  $\longrightarrow$  supercordes type IIB.

Les règles de commutations et d'anticommution sont analogues à celle du type I. En effet, en plus des relations (1.25) et (1.102) nous avons les relations suivantes :

$$\left[ \tilde{S}_n^a, \tilde{S}_m^b \right]_+ = \delta^{ab} \delta_{n+m} \quad (1.105.a)$$

$$\left[ \tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j \right] = \delta^{ij} \delta_{n+m} \quad (1.105.b)$$

et tous les autres commutateurs sont nuls.

Dans la jauge transverse, les générateurs supersymétriques sont définis par :

$$Q^a = (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a \quad (1.106)$$

$$Q^{\dot{a}} = (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{\dot{a}a}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^a \alpha_n^i \quad (1.107)$$

et vérifient les relations d'anticommution :

$$\left[ Q^a, Q^b \right]_+ = 2p^+ \delta^{ab} \quad (1.108)$$

$$\left[ Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}} \right]_+ = 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} H \quad (1.109)$$

$$\left[ Q^a, Q^{\dot{a}} \right]_+ = \sqrt{2} \gamma_{\dot{a}a}^i p^i \quad (1.110)$$

où  $H$  est le Hamiltonien défini par

$$H = \frac{1}{p^+} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n s_{-n}^a s_n^a) + \frac{1}{2} p_i^2 \right\} \quad (1.111)$$

(les propriétés des matrices  $\gamma_{aa}^i$  sont données dans l'annexe A).

## Spectre

La condition de la couche de masse nous permet de définir l'opérateur de masse :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n s_{-n}^a s_n^a \quad (1.112)$$

L'état fondamental est une particule vectorielle sans masse avec 8 composantes transverses donné par  $|i\rangle$  qui représente le photon et son partenaire fermionique représenté par  $|a\rangle$  qui est le photino .

On définit l'état du spineur par :

$$|a\rangle = \frac{i}{8} (\gamma_i S_0)^a |i\rangle \quad (1.113)$$

on vérifie alors :

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \quad (1.114.a)$$

$$\langle a | b \rangle = \frac{1}{2} (h\gamma^+)^{ab} \quad (1.114.b)$$

$$|i\rangle = \frac{i}{8} (\bar{S}_0 \gamma_{i+})^a |a\rangle \quad (1.114.c)$$

On peut construire les états physiques des quatres premiers niveaux excités et déterminer leurs nombre. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

$\alpha' M^2$	<i>états</i>	<i>nombre</i>	<i>total</i>
0	$ 0\rangle$	$8 \times 2$	16
3	$s_{-1}^a \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j  0\rangle$ $\alpha_{-1}^i s_{-1}^a s_{-1}^b  0\rangle$ $s_{-1}^a s_{-1}^b s_{-1}^c  0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k  0\rangle$ $\alpha_{-1}^i s_{-2}^a  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i s_{-1}^a  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j  0\rangle$ $s_{-2}^a s_{-1}^b  0\rangle$ $s_{-3}^a  0\rangle$ $\alpha_{-3}^i  0\rangle$	$2304 \times 2$ $1792 \times 2$ $448 \times 2$ $960 \times 2$ $512 \times 2$ $512 \times 2$ $512 \times 2$ $512 \times 2$ $64 \times 2$ $64 \times 2$	15360
4	$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l  0\rangle$ $s_{-1}^a \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k  0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j s_{-1}^a s_{-1}^b  0\rangle$ $\alpha_{-1}^i s_{-1}^a s_{-1}^b s_{-1}^c  0\rangle$ $s_{-1}^a s_{-1}^b s_{-1}^c s_{-1}^d  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \alpha_{-2}^j  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j s_{-1}^a  0\rangle$ $s_{-2}^a \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i s_{-2}^a  0\rangle$ $s_{-2}^a \alpha_{-1}^i s_{-1}^b  0\rangle$ $s_{-2}^a s_{-1}^b s_{-1}^c  0\rangle$ $\alpha_{-2}^i s_{-1}^a s_{-1}^b  0\rangle$ $s_{-2}^a s_{-2}^b  0\rangle$ $s_{-3}^a s_{-1}^b  0\rangle$ $s_{-3}^a \alpha_{-1}^i  0\rangle$ $\alpha_{-3}^i s_{-1}^a  0\rangle$ $\alpha_{-3}^i \alpha_{-1}^j  0\rangle$ $s_{-4}^a  0\rangle$ $\alpha_{-4}^i  0\rangle$	$330 \times 16$ $960 \times 16$ $1008 \times 16$ $448 \times 16$ $70 \times 16$ $288 \times 16$ $36 \times 16$ $512 \times 16$ $288 \times 16$ $64 \times 16$ $512 \times 16$ $224 \times 16$ $224 \times 16$ $28 \times 16$ $64 \times 16$ $64 \times 16$ $64 \times 16$ $64 \times 16$ $8 \times 16$ $8 \times 16$	84224
	33		

où  $|0\rangle$  représente les deux états  $|i\rangle$  et  $|a\rangle$ .

Pour la fonction de partition

$$\begin{aligned} f_{ss}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{ss}(n) x^n \\ &= 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 \\ &= 16 (1 + 16x + 144x^2 + 960x^3 + 5264x^4 + 25\,056x^5 + \dots) \end{aligned}$$

Remarquons bien que cette fonction est équivalente à la somme des deux secteurs (R) et (N-S).

## 1.5 Formalisme paraquantique

### 1.5.1 Introduction

La mécanique quantique (M.Q) configure presque toutes les théories de la physique moderne.

Son importance est due à son succès à unifier le double aspect de la matière (onde-corpuscule)

Ces deux aspects sont bien déterminés par :

La condition de Bohr

$$h\nu = E_1 - E_2 \quad (1.115)$$

Et la relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{|p|} \quad (1.116)$$

où  $\nu$  et  $\lambda$  représentent l'aspect onde de la matière et  $E$  et  $|p|$  la partie corpusculaire.

Dans le cas relativiste on peut montrer que ces deux relations sont une conséquence directe des équations du mouvement de Heisenberg :

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial A}{\partial q_\mu} &= [A, P_\mu] \\ \mu &= \overline{0, 3} \end{aligned} \quad (1.117)$$

avec  $A$  est une observable arbitraire et  $P_\mu$  le quadrivecteur énergie-impulsion où  $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H, P_x, P_y, P_z)$  et  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (t, q_x, q_y, q_z)$ .

Nous savons que dans un système classique, on peut écrire le Hamiltonien en fonction des coordonnées  $q_i$  et leurs conjugués  $p_i$  avec ( $i = \overline{1, d}$  ;  $d = \text{DDL}$ )

Ce que nous appelons le principe de correspondance de la M.Q est que toutes les variables deviennent des opérateurs et que les équations du mouvement restent valables avec la condition que l'équation de Heisenberg (1.104) soit vérifiée.

Il existe des contraintes sur les opérateurs  $q_i$  et  $p_i$  :

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (1.118.a)$$

$$[q_i, p_j] = \imath \hbar \delta_{ij} \quad (1.118.b)$$

Le point essentiel de la MQ est l'équation de Heisenberg (1.118) mais les équations de commutations (1.118) ne sont pas uniques [24], ce qui nous conduit à faire une généralisation de la M.Q qu'on appellera paraquantification (P.Q).

Pour mieux voir ce formalisme nous étudions le cas simple d'un oscillateur harmonique [25]

### 1.5.2 Paraquantification

L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'écrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (1.119)$$

les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

Le principe de correspondance avec l'équation de Heisenberg nous donnent

$$\begin{aligned} \imath \dot{q} &= [q, H] = \imath p \\ \imath \dot{p} &= [p, H] = -\imath q \end{aligned}$$

Mais avec la restriction  $[q, p] = \imath$ , on montre que cette condition n'est pas unique

Pour cela, on utilisera les opérateurs définis par :

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad (1.120.a)$$

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \quad (1.120.b)$$

Ces relations nous donnent :

$$H = \frac{1}{2}(a^+a + aa^+) \equiv N \quad (1.121.a)$$

$$[a, N] = a, \quad [a^+, N] = -a^+ \quad (1.121.b)$$

Pour le spectre de N on le définit comme suit :

$$\begin{cases} N |n\rangle = N_n |n\rangle \\ \langle n | n'\rangle = \delta_{n,n'} \end{cases} \quad (1.122)$$

et

$$N_n = N_0 + n \quad \text{avec} \quad N_0 \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{I-123})$$

D'après les équations (1.108), (1.109) et (1.110) on montre facilement que :

$$N_0 + n = \frac{1}{2}(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2) \quad (1.124)$$

Avec

$$a_{n,n'} \equiv \langle n | a | n'\rangle$$

On peut alors résoudre cette équation par récurrence sur  $n$  pour obtenir :

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^+ = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc on arrive à montrer

$$\begin{aligned}\langle n | [a, a^+] | n' \rangle &= \sum_{n''} \{ \langle n | a | n'' \rangle \langle n'' | a^+ | n' \rangle - \langle n | a^+ | n'' \rangle \langle n'' | a | n' \rangle \} \\ &= \delta_{nn'} \left( |a_{n,n+1}|^2 - |a_{n,n-1}^+|^2 \right)\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à écrire

$$\langle n | [a, a^+] | n' \rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1 - N_0) & n \text{ impair} \end{cases} \quad (1.125)$$

Nous définissons l'ordre de la paraquantification de telle sorte que  $N_0 = \frac{Q}{2}$  où  $Q$  est l'ordre de la PQ.

Remarquons que seule la valeur  $Q = 1$  nous conduit à la relation de commutation ordinaire  $[a, a^+] = 1$  qui représente le cas d'un oscillateur harmonique (bosonique) dans le cadre quantique.

Pour  $Q = 2$  c-à-d  $N_0 = 1$  nous aurons une relation du type :

$$aaa^+ - a^+aa = 2a$$

De même, le Hamiltonien d'un oscillateur fermionique est défini par :

$$H = \frac{1}{2} (b^+b - bb^+) \equiv N. \quad (1.126)$$

on peut alors montrer que

$$N = \frac{1}{2} (|b_{n-1,n}|^2 - |b_{n,n+1}|^2) \quad (1.127)$$

De la même manière, on montre que  $Q = 1$  conduit aux relations d'anticommutation

$$\{b, b^+\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0 \quad (1.128)$$

donc  $b^2 = (b^+)^2 = 0$

Pour  $Q = 2$  nous aurons les relations

$$bb^+b = 2b, \quad bbb^+ + b^+bb = 2b \quad (1.129)$$

et

$$b^3 = (b^+)^3 = 0$$

### 1.5.3 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs

Soit un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques

Dans le cadre paraquantique, les opérateurs  $a_k$  et  $a_k^+$  (bosoniques ou fermioniques) vérifient des relations trilineaires de telle sorte que

$$\left[ a_k, [a_l^+, a_n]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n \quad (1.130.a)$$

$$\left[ a_k, [a_l^+, a_n^+]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n^+ \mp 2\delta_{kn}a_l^+ \quad (1.130.b)$$

$$[a_k, [a_l, a_n]_{\mp}] = 0 \quad (1.130.c)$$

Le signe en haut est associé aux parafermions, celui en bas pour les parabosons  
notre vide est défini par

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (1.131.a)$$

$$a_k | 0 \rangle = 0 \quad \forall k \quad (1.131.b)$$

avec la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification

$$a_k a_l^+ | 0 \rangle = Q \delta_{kl} | 0 \rangle \quad (1.132)$$

Ces relations dépendent du vide, mais on peut trouver des relations qui se suffisent à elles seules (“self-contained”).

Le problème qui se pose est que lorsque l'ordre de la paraquantification augmente les relations se compliquent.

L'une des solutions de ce problème est d'utiliser la décomposition de Green [26], qui est

définie comme suit :

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)} \quad , \quad a_k^+ = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)+}$$

où  $a_k^{(\alpha)}$  est la composante de Green qui agit dans le para-espace de Green..

les relations (1.130) deviennent bilinéaires :

$$\left[ a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+} \right]_{\pm} = \delta_{kl} \quad (1.133.a)$$

$$\left[ a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)} \right]_{\pm} = 0 \quad (1.133.b)$$

$$\left[ a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+} \right]_{\mp} = \left[ a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)} \right]_{\mp} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (1.133.c)$$

le vide  $|0\rangle'$  vérifie :

$$a_k^{(\alpha)} |0\rangle' = 0, \quad \forall k, \alpha$$

Donc

$$a_k |0\rangle' = 0, \quad \forall k$$

et :

$$a_k a_l^+ |0\rangle' = r \delta_{kl} |0\rangle'$$

Ce qui implique que  $|0\rangle'$  et  $|0\rangle$  sont équivalents.

# Chapitre 2

## Théorie des paracordes

### 2.1 Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des théories des supercordes et des cordes hétérotiques dans le formalisme de la paraquantification basée sur l'hypothèse de N. Belaloui et H. Bennacer [2-3] qui consiste à traiter de la même façon les coordonnées du centre de masse et les modes de vibration de la cordes. Il nous a semblé donc important de rappeler brièvement ces deux travaux, c'est l'objet de ce chapitre.

### 2.2 Jauge covariante

#### 2.2.1 Formalisme paraquantique

##### Cas parabosonique

La paraquantification de la théorie est menée par la reinterpretation des variables dynamiques classiques  $X^\mu(\sigma, \tau)$  et  $P^\mu(\sigma, \tau)$  comme opérateurs satisfaisant les relations de commutation trilineaires [2].

$$\left[ X^\mu(\sigma, \tau), [P^\nu(\sigma', \tau), P^\rho(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2ig^{\mu\nu} P^\rho \delta(\sigma - \sigma') + 2ig^{\mu\rho} P^\nu \delta(\sigma - \sigma'') \quad (2.1)$$

$$\left[ P^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), X^\rho(\sigma'', \tau)]_+ \right] = -2ig^{\mu\nu} X^\rho \delta(\sigma - \sigma') - 2ig^{\mu\rho} X^\nu \delta(\sigma - \sigma'') \quad (2.2)$$

$$\left[ X^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), P^\rho(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2i g^{\mu\rho} X^\nu \delta(\sigma - \sigma'') \quad (2.3)$$

$$\left[ P^\mu(\sigma, \tau), [X^\nu(\sigma', \tau), P^\rho(\sigma'', \tau)]_+ \right] = 2i g^{\mu\nu} P^\rho \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.4)$$

Reécrites en termes des variables du centre de masse  $x^\mu$ ,  $p^\mu$  et des modes d'excitation  $\alpha_n^\mu$  de la cordes, les équations (2.1 à 2.4) sont équivalents à :

$$[x^\mu, [x^\nu, p^\rho]_+] = 2i g^{\mu\rho} x^\nu \quad (2.5)$$

$$[x^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+] = 2i (g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\mu\rho} p^\nu) \quad (2.6)$$

$$[x^\mu, [p^\nu, \alpha_n^\rho]_+] = 2i g^{\mu\nu} \alpha_n^\rho \quad (2.7)$$

$$[p^\mu, [x^\nu, p^\rho]_+] = -2i g^{\mu\nu} p^\rho \quad (2.8)$$

$$[p^\mu, [x^\nu, x^\rho]_+] = -2i (g^{\mu\nu} x^\rho + g^{\mu\rho} x^\nu) \quad (2.9)$$

$$[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho]_+] = 2 (g^{\mu\nu} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^\rho + g^{\mu\rho} n \delta_{n+l,0} \alpha_m^\nu) \quad (2.10)$$

$$[\alpha_n^\mu, [p^\nu, \alpha_m^\rho]_+] = 2n g^{\mu\rho} \delta_{n+m,0} p^\nu \quad (2.11)$$

$$[\alpha_n^\mu, [x^\nu, \alpha_m^\rho]_+] = 2n g^{\mu\rho} \delta_{n+m,0} x^\nu \quad (2.12)$$

et tous les autres commutateurs sont nuls .

En termes de composantes de Green, les relations de commutation trilineaires (2.5 à 2.12) se transforment en relations de commutation bilinéaires du type anormal

$$[x^{\mu(\sigma)}, p^{\nu(\sigma)}] = i g^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

$$[x^{\mu(\sigma_1)}, p^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (2.14)$$

$$[p^{\mu(\sigma)}, p^{\nu(\sigma)}] = [x^{\mu(\sigma)}, x^{\nu(\sigma)}] = 0 \quad (2.15)$$

$$[p^{\mu(\sigma_1)}, p^{\nu(\sigma_2)}]_+ = [x^{\mu(\sigma_1)}, x^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (2.16)$$

$$[\alpha_n^{\mu(\sigma)}, \alpha_m^{\nu(\sigma)}] = n g^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \quad (2.17)$$

$$[\alpha_n^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_l^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (2.18)$$

$$[x^{\mu(\sigma)}, \alpha_n^{\nu(\sigma)}] = [p^{\mu(\sigma)}, \alpha_n^{\nu(\sigma)}] = 0 \quad (2.19)$$

$$[x^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_n^{\nu(\sigma_2)}]_+ = [p^{\mu(\sigma_1)}, \alpha_n^{\nu(\sigma_2)}]_+ = 0 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (2.20)$$

## Cas parafermionique

De la même façon, on reinterprète les variables dynamiques classiques  $\alpha_n^\mu$ ,  $p^\mu$ ,  $x^\mu$  et  $b_r^\mu$  comme opérateurs satisfaisant les relations de commutation trilineaires [3] :

$$[x^\mu, [p^\nu, A]_+] = 2i g^{\mu\nu} A \quad (2.21)$$

$$[x^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+] = 2i (g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\mu\rho} p^\nu) \quad (2.22)$$

$$[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho]_+] = 2 (g^{\mu\nu} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^\rho + g^{\mu\rho} n \delta_{n+l,0} \alpha_m^\nu) \quad (2.23)$$

$$[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, B]_+] = 2n g^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} B \quad (2.24)$$

$$[b_r^\mu, [b_s^\nu, b_q^\rho]_-] = 2 (g^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} b_q^\rho - g^{\mu\rho} \delta_{r+q,0} b_s^\nu) \quad (2.25)$$

$$[b_r^\mu, [b_s^\nu, C]_+] = 2g^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} C \quad (2.26)$$

et tout les autres commutateurs sont nuls .

Ici  $l, n \in \mathbb{Z}$  et  $r, s, q \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)$  et  $A, B$ , et  $C$  représentent les opérateurs suivants :

$$A = \alpha_n^\rho, x^\rho \text{ ou } b_r^\rho$$

$$B = p^\rho, x^\rho \text{ ou } b_r^\rho$$

$$C = p^\rho, x^\rho \text{ ou } \alpha_n^\rho$$

### 2.2.2 Algèbre de Poincaré paraquantique

#### Introduction

On réécrit les générateurs  $M^{\mu\nu}$  en se basant sur une symétrisation adéquate qui prend la forme  $M^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}$  dans le cas paraquantique avec :

$$l^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [x^\mu, p^\nu]_+ - [x^\nu, p^\mu]_+ \quad (2.27)$$

et

$$E^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( [\alpha_{-n}^\mu, \alpha_n^\nu]_+ - [\alpha_{-n}^\nu, \alpha_n^\mu]_+ \right) \quad (2.28)$$

et dans le cas parafermionique, prennent la forme :

$$M^{\mu\nu} = M_0^{\mu\nu}(x) + K^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

avec

$$M_0^{\mu\nu}(x) = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

et

$$K^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left( [b_{-r}^{\mu}, b_r^{\nu}]_- - [b_{-r}^{\nu}, b_r^{\mu}]_- \right) \quad (2.31)$$

Maintenant, si cette écriture permet l'élimination des ambiguïtés d'ordre, elle permet aussi le traitement paraquantique du problème avec la seule utilisation des relations trinéaires (2.5 à 2.12), (2.21 à 2.26) et sans avoir recours à la représentation de Green (2.13 à 2.20) .

On peut néanmoins retrouver les mêmes résultats avec l'utilisation de la décomposition de Green .

### Application directe des relations trinéaires :

On se propose de calculer le deuxième et le troisième commutateur de l'algèbre de Poincaré.

En utilisant les relations (2.5 à 2.12) pour le cas parabosonique et (2.21 à 2.26) pour le cas parafermionique, on trouve :

$$[p^{\mu}, M^{\nu\rho}] = -ig^{\mu\nu} p^{\rho} + ig^{\mu\rho} p^{\nu} \quad (2.32)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = ig^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} - ig^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - ig^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} + ig^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} \quad (2.33)$$

Résultat qui satisfait l'algèbre de Poincaré .

Maintenant, pour le premier commutateur  $[p^{\mu}, p^{\nu}]$  de l'algèbre, on peut seulement écrire  $[p^{\mu}, [p^{\nu}, p^{\sigma}]_+] = 0$  de la même façon pour les coordonnées  $x^{\mu}$  où on peut seulement écrire  $[x^{\mu}, [x^{\nu}, x^{\sigma}]_+] = 0$ .

Ces relations sont équivalentes à écrire  $[p^{\mu}, p^{\nu}] = \Theta^{\mu\nu}$  et  $[x^{\mu}, x^{\nu}] = \Lambda^{\mu\nu}$  où, en termes de composantes de Green ,  $\Theta^{\mu\nu} = 2 \sum_{\alpha \neq \beta} p^{\mu(\alpha)} p^{\nu(\beta)} \neq 0!$  et  $\Lambda^{\mu\nu} = 2 \sum_{\alpha \neq \beta} x^{\mu(\alpha)} x^{\nu(\beta)} \neq 0!$  pour  $Q \neq 1$ .

Ceux-ci sont des coordonnées et des moments non commutatifs, de telle sorte que, pour  $Q \neq 1$  , on travaille dans un espace-temps non commutatif .

## 2.3 Jauge transverse

### 2.3.1 Formalisme

#### Cas parabosonique

De même que précédemment, paraquantifier la théorie dans cette jauge revient à réinterpréter les variables dynamiques classiques indépendantes  $x^-$ ,  $p^+$ ,  $x^i$ ,  $p^i$  et  $\alpha_n^i$  comme opérateurs satisfaisant les relations de paracommutation [2] :

$$\left[ x^i, [p^j, p^k]_+ \right] = 2\iota \left( g^{ij} p^k + g^{ik} p^j \right) \quad (2.34)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, \alpha_l^k]_+ \right] = 2 \left( g^{ij} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^k + g^{ik} n \delta_{n+l,0} \alpha_m^j \right) \quad (2.35)$$

$$\left[ x^i, [p^j, A]_+ \right] = 2\iota \delta^{ij} A \quad (2.36)$$

$$\left[ x^-, [p^+, B]_+ \right] = 2\iota B \quad (2.37)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, C]_+ \right] = 2n \delta_{n+m,0} \delta^{ij} C \quad (2.38)$$

où  $A, B$ , et  $C$  sont données par :

$$A = x^-, p^+, x^k, \text{ ou } \alpha_n^k.$$

$$B = x^-, x^k, p^k \text{ ou } \alpha_n^k.$$

$$C = x^-, p^+, x^k \text{ ou } p^k.$$

et qui sont équivalentes à :

$$\left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\alpha)} \right] = \iota \delta^{ij} \quad ; \quad \left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (2.39)$$

$$\left[ x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)} \right] = \iota \quad ; \quad \left[ x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (2.40)$$

$$\left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\alpha)} \right] = n \delta^{ij} \delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (2.41)$$

et tous les autres commutateurs (et anticommutateurs) du type  $[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}] = 0$  (et  $[A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}]_+ = 0$ , pour  $\alpha \neq \beta$ )

## Cas parafermionique

Dans cette jauge, les opérateurs paraquantiques  $x^-$ ,  $p^+$ ,  $x^i$ ,  $p^j$ ,  $\alpha_n^i$  et  $b_r^i$  vérifient les relations trilineaires :

$$\left[ b_r^i, [b_s^j, b_q^k]_- \right] = 2 \left( \delta^{ij} \delta_{r+s} b_q^k - \delta^{ik} \delta_{r+q} b_s^j \right) \quad (2.42)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, \alpha_l^k]_+ \right] = 2(\delta^{ij} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^k + n \delta^{ik} \delta_{n+l,0} \alpha_m^j) \quad (2.43)$$

$$\left[ x^i, [p^j, p^k]_+ \right] = 2i \left( \delta^{ij} p^k + \delta^{ik} p^j \right) \quad (2.44)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, D]_+ \right] = 2\delta^{ij} n \delta_{n+m} D \quad (2.45)$$

$$\left[ b_r^i, [b_s^j, E]_+ \right] = 2\delta^{ij} \delta_{r+s} E \quad (2.46)$$

$$\left[ x^i, [p^j, F]_+ \right] = 2i \delta^{ij} F \quad (2.47)$$

$$\left[ x^-, [p^+, G]_+ \right] = 2iG \quad (2.48)$$

et tous les autres commutateurs sont nuls .

Ici ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , et  $G$  représentent les opérateurs suivants

$$D = x^-, p^+, x^k, p^k \text{ ou } b_q^k.$$

$$E = x^-, p^+, x^k, p^k \text{ ou } \alpha_n^k.$$

$$F = x^-, p^+, x^k, \alpha_n^k \text{ ou } b_r^k$$

$$G = x^-, x^k, p^k, \alpha_n^k \text{ ou } b_r^k$$

### 2.3.2 Dimensions critiques de l'espace-temps

#### Cas parabosonique

Introduisons, dans la jauge transverse, les générateurs  $M^{i-}$  sous la forme :

$$M^{i-} = l^{i-} + E^{i-} \quad (2.49)$$

où

$$l^{i-} = \frac{1}{2} \left[ x^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \alpha_0^- - \frac{1}{2} [x^-, p^i]_+ \quad (2.50)$$

et

$$E^{i-} = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \left[ \alpha_{-n}^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \left[ \alpha_n^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \right) \quad (2.51)$$

Si on prend les valeurs moyennes sur les états physiques ( $\alpha_{-m}^k |0\rangle$ ), par la seule utilisation des relations trilinéaires (2.34 à 2.38), après un calcul long et fastidieux, l'équation : :

$$\langle 0 | \alpha_m^l [M^{i-}, M^{j-}] \alpha_{-m}^k |0\rangle = 0 \quad (2.52)$$

conduit à :

$$[M^{i-}, M^{j-}] = -\frac{1}{2(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^j]_+ - [\alpha_{-n}^j, \alpha_n^i]_+ \right) \left[ -2n + Q \frac{D-2}{12} \left( n - \frac{1}{n} \right) + 2\alpha(0) \frac{1}{n} \right] \quad (2.53)$$

En conclusion pour avoir ( $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$ ), l'équation (2.53) donne :

$$\begin{cases} D = 2 + \frac{24}{Q} \\ \alpha(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{II-54})$$

### Cas parafermionique

Introduisons, dans la jauge transverse, les générateurs  $M^{i-}$  sous la forme :

$$M^{i-} = M_0^{i-}(x) + K^{i-} \quad (2.55)$$

où

$$M_0^{i-}(x) = l^{i-} + E^{i-} \quad (2.56)$$

$$l^{i-} = \frac{1}{2} \left[ x^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \alpha_0^- - \frac{1}{2} [x^-, p^i]_+ \quad (2.57)$$

$$E^{i-} = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \left[ \alpha_{-n}^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \left[ \alpha_n^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \right) \quad (2.58)$$

avec

$$\alpha_{-n}^- = -\frac{1}{4} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\alpha_{n-l}^i, \alpha_l^i]_+ - \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(r - \frac{n}{2}\right) [b_{n-r}^i, b_r^i] - \frac{a}{2} \delta_{n,0} \quad (2.59)$$

et

$$K^{i-} = -\frac{i}{4} \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \left( \left[ b_{-r}^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ G_r - G_{-r} \left[ b_r^i, \frac{1}{p^+} \right]_+ \right) \quad (2.60)$$

avec

$$G_r = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\alpha_n^i, b_r^i]_+ \quad (2.61)$$

Maintenant, et de la même façon, en projetant l'équation  $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$  sur les états physiques  $\alpha_{-m}^k |0\rangle$  et  $b_{-s}^k |0\rangle$  et par la seule utilisation des relations trilineaires (2.42 à 2.48) l'équation :

$$\langle 0 | \alpha_m^l [M^{i-}, M^{j-}] \alpha_{-m}^k |0\rangle + \langle 0 | b_s^l [M^{i-}, M^{j-}] b_{-s}^k |0\rangle = 0 \quad (2.62)$$

conduit au résultat

$$\begin{aligned} [M^{i-}, M^{j-}] = & \frac{1}{2(p^+)^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^j]_+ - [\alpha_{-n}^j, \alpha_n^i]_+ \right) \left[ Q \frac{D-2}{8} \left( n - \frac{1}{n} \right) + \frac{2a}{n} - n \right] \right. \\ & \left. - \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \left( [b_{-r}^i, b_r^j]_- - [b_{-r}^j, b_r^i]_- \right) \left[ \left( Q \frac{D-2}{8} - 1 \right) \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) + 2a - 1 \right] \right\} \quad (2.63) \end{aligned}$$

On est donc conduit à conclure que, pour avoir  $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$ , on doit avoir :

$$\begin{cases} D = 2 + \frac{8}{Q} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.64)$$

En particulier, on peut avoir des cordes parafermioniques dans les dimensions  $D = 10, 6, 4, 3$  respectivement pour les ordres  $Q = 1, 2, 4, 8$ .

Ceci coincide avec les dimensions dans lesquelles sont formulées les supercordes classiques .

On se propose donc de faire une investigation sur les possibilités d'existence des parasupercordes à  $D = 3, 4, 6$  .

# Chapitre 3

## Parasupercordes

### 3.1 Introduction

L'intérêt que nous portons à la paraquantification de la théorie des supercordes est la conséquence de différents résultats qui ont permis l'ouverture de plusieurs fenêtres d'exploration sur ce sujet.

En effet, un premier résultat porte sur le fait que les dimensions d'espace-temps pour lesquelles les paracordes fermioniques sont définies [1, 4] correspondent justement à celles dans lesquelles sont formulées les supercordes classiques, ce qui nous a conduit à une investigation sur les possibilités d'existence des parasupercordes à des dimensions d'espace-temps  $D = 3, 4, 6$  à travers l'étude du formalisme paraquantique et du spectre .

Le deuxième résultat est en rapport avec plusieurs travaux sur l'extension paraquantique de la mécanique quantique supersymétrique [5, 6, 7].

En connexion avec ces travaux, notre système correspond à un système susy parabosonique-parafermionique et donc la question soulevée est la superalgèbre de Poincaré que doivent satisfaire les générateurs susy.

Enfin, et en connexion avec certains travaux sur les supercordes fractionnaires [8, 9], qui sont basées sur des systèmes susy bosoniques et fermioniques fractionnaires et qui sont également formulées à des dimensions d'espace temps  $D = 3, 4, 6, 10$ , le cas des supercordes bosoniques-parafermioniques a été considéré et la superalgèbre vérifiées par les générateurs susy a été construite.

## 3.2 Formalisme paraquantique

Vu les problèmes de quantification de la théorie des supercordes dans le formalisme covariant et de la même façon que dans le cas ordinaire, la théorie paraquantique des supercordes sera construite directement dans la jauge transverse

L'action sera décrite par :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left( \partial_a X^i \partial^a X_i - i \bar{S}^{Aa} \rho^B \partial_B S^{Aa} \right) \quad (3.1)$$

Où :

$A, B = 1, 2$  et  $a$  est l'indice des composantes du spineur  $S^A$

avec

$$S = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{S} = S^T \rho^1$$

et

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\rho^A, \rho^B\} = -2\eta^{AB}$$

Les solutions sont :

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i(0) \exp(-in\tau) \cos n\sigma \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} S^{1a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^{1a} \exp[-in(\tau - \sigma)] \\ S^{2a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^{2a} \exp[-in(\tau + \sigma)] \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $i, a = \overline{1, D-2}$

### 3.2.1 La jauge transverse

L'étude des cordes parabosoniques et parafermioniques [2, 3] nous conduit à l'évolution naturelle de ce problème pour les supercordes qui consiste à réinterpréter les variables dynamiques

$x^-, p^+, x^i, p^i, \alpha_n^i$  et  $s_n^a$ , en termes d'opérateurs vérifiant les relations trilineaires :

$$\left[ s_n^a, \left[ s_m^b, s_l^c \right]_- \right] = 2 \left( \delta^{ab} \delta_{n+m} s_l^c - \delta^{ik} \delta_{n+l} s_m^b \right) \quad (3.4)$$

$$\left[ \alpha_n^i, \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_+ \right] = 2(\delta^{ij} n \delta_{n+m,0} \alpha_l^k + n \delta^{ik} \delta_{n+l,0} \alpha_m^j) \quad (3.5)$$

$$\left[ x^i, \left[ p^j, p^k \right]_+ \right] = 2i \left( \delta^{ij} p^k + \delta^{ik} p^j \right) \quad (3.6)$$

$$\left[ \alpha_n^i, \left[ \alpha_m^j, A \right]_+ \right] = 2\delta^{ij} n \delta_{n+m} A \quad (3.7)$$

$$\left[ s_n^a, \left[ s_m^b, B \right]_+ \right] = 2\delta^{ab} \delta_{n+m} B \quad (3.8)$$

$$\left[ x^i, \left[ p^j, C \right]_+ \right] = 2i \delta^{ij} C \quad (3.9)$$

$$\left[ x^-, \left[ p^+, D \right]_+ \right] = 2i D \quad (3.10)$$

Toutes les autres relations sont nulles.  $A, B, C$ , et  $D$  représentent les opérateurs suivants :

$$A = x^-, p^+, x^k, p^k \text{ ou } s_l^a .$$

$$B = x^-, p^+, x^i, p^i \text{ ou } \alpha_n^i .$$

$$C = x^-, p^+, x^k, \alpha_n^k \text{ ou } s_n^a$$

$$D = x^-, x^i, p^i, \alpha_n^i \text{ ou } s_n^a$$

Notre modèle de supercordes paraquantiques correspond donc à un système susy du type paraboson-parafermion.

Le signe (+) dans la relation (3.8) vient du fait que notre modèle est supersymétrique [5]

### 3.2.2 Décomposition de Green

Il est souvent plus pratique d'utiliser directement les relations trilineaires (3.4) à (3.10) dans les différents calculs à développer, il est cependant parfois nécessaire d'avoir recours à la représentation de Green définie par la décomposition :

$$\begin{aligned} x^i &= \sum_{\alpha=1}^Q x^{i(\alpha)} ; & p^i &= \sum_{\alpha=1}^Q p^{i(\alpha)} ; & \alpha_n^i &= \sum_{\beta=1}^Q \alpha_n^{i(\beta)} \\ x^- &= \sum_{\alpha=1}^Q x^{-(\alpha)} ; & p^+ &= \sum_{\alpha=1}^Q p^{+(\alpha)} ; & s_n^a &= \sum_{\beta=1}^Q s_n^{a(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

de telle sorte que les relations trilineaires (3.4) à (3.10) soient équivalentes aux relations bilinéaires suivantes :

$$\left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\alpha)} \right] = i\delta^{ij} \quad ; \quad \left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (3.12)$$

$$\left[ x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)} \right] = i \quad ; \quad \left[ x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (3.13)$$

$$\left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\alpha)} \right] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (3.14)$$

$$\left[ s_n^{a(\alpha)}, s_m^{b(\alpha)} \right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ s_n^{a(\alpha)}, s_m^{b(\beta)} \right] = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (3.15)$$

$$\left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\alpha)} \right] = 0 \quad ; \quad \left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (3.16)$$

et tous les autres commutateurs (anticommutateurs) de type  $[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}] = 0$  ( $[A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}]_+ = 0$ , pour  $\alpha \neq \beta$ ).

Un spineur de Dirac à  $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$  composantes complexes, par contre les champs parabosoniques ont  $(D - 2)$  composantes transverses (physiques). Pour arriver à équilibrer les degrés de liberté parabosoniques et parafermioniques, on doit tenir compte de certaines conditions :

Le type de spineur : Pour les dimensions paires, le spineur est du type Weyl qui restreint le nombre de moitié, pour une métrique de Lorentz (espace-temps de Minkowski), un spineur de Majorana existe pour  $D = 2, 3, 4 \pmod 8$  [27 28], cette condition réduit aussi le nombre de composantes de moitié.

Si  $D = 2 \pmod 8$ , on impose au spineur d'être du type de Majorana et de Weyl à la fois, donc le nombre sera divisé par quatre. Dans notre modèle supersymétrique qui existe pour  $D = 3, 4, 6, 10$  nous avons :

<i>Dimensions</i>	<i>Type de spineur</i>
$D = 3$	<i>Majorana</i>
$D = 4$	<i>Majorana ou Weyl</i>
$D = 6$	<i>Weyl</i>
$D = 10$	<i>Majorana – Weyl</i>

En plus, la condition du cône de lumière, nous réduit le nombre de moitié, et enfin, la condition de la couche de masse, nous permet de le diminuer encore de moitié.

Le résultat de cette analyse est récapitulé dans le tableau ci après :

Condition	$D = 3$	$D = 4$	$D = 6$
Dirac	$(2 + 2)$ <i>C.Complexes</i>	$(4 + 4)$ <i>C.Complexes</i>	$(8 + 8)$ <i>C.Complexes</i>
Type du spineur	$(1 + 1)$ <i>C.Complexes</i>	$(2 + 2)$ <i>C.Complexes</i>	$(4 + 4)$ <i>C.Complexes</i>
Light cone	2 <i>C.Réelles</i>	$(2 + 2)$ <i>C.Réelles</i>	$(4 + 4)$ <i>C.Réelles</i>
On-Shell	1 <i>C.Réelles</i>	2 <i>C.Réelles</i>	4 <i>C.Réelles</i>
Transverses $D - 2$	1 <i>C.Réelles</i>	2 <i>C.Réelles</i>	4 <i>C.Réelles</i>

ce qui confirme l'équilibre des degrés de liberté bosoniques et fermioniques.

### 3.3 Algèbre des générateurs supersymétriques

Avant d'aborder l'étude de la possibilité d'existence des parasupercordes à  $D = 3, 4, 6$  ( par l'étude de la cohérence de la fonction de partition avec le spectre), nous nous proposons d'abord de déterminer l'algèbre satisfaite par les générateurs supersymétriques .

L'importance de cette question réside dans le fait que notre système correspond à l'extension paraquantique d'un modèle susy

Dans la littérature, on peut trouver une liste très riche des travaux [5, 6, 7] sur l'extension de la MQSUSY à la MQ paraSUSY. Les résultats de ces travaux s'accordent sur les deux points suivants :

- (a). Un système susy du type paraboson-parafermion correspondrait à un système susy ordinaire, dans le sens où la superalgèbre de Poincaré reste inchangée (algèbre des générateurs susy est du type bilinéaire).
- (b). Un système susy du type boson-parafermion correspondrait à un un système parasusy, dans le sens où nous avons affaire à la parasuperalgèbre de Poincaré ( l'algèbre des générateurs susy et du type trinéaires! ) .

Il est donc nécessaire de vérifier si nos résultats n'échappent pas à cette règle .

Pour définir les générateurs susy, commençons par remarquer que si les expressions (1.107),

(1.108) et (1.111) ne posent pas de problème d'ambiguïtés d'ordre en MQ, à cause des relations :

$$\left[ p^+, [s_n^a, \alpha_m^i]_+ \right] = 0 \quad (3.17.a)$$

$$\left[ p^+, [\alpha_n^i, \alpha_m^j]_+ \right] = 0 \quad (3.17.b)$$

$$\left[ p^+, [s_n^a, s_m^b]_- \right] = 0 \quad (3.17.c)$$

$$\left[ p^+, [p_i, p_i]_+ \right] = 0 \quad (3.17.d)$$

ce n'est plus le cas dans le cadre paraquantique .

La théorie des parasupercordes étant formulée à  $D = 3, 4, 6, 10$ , pour écrire l'algèbre des générateurs susy, introduisons les remarques suivantes :

Dans le cas ordinaire ( $D = 10$ ), les 16 charges sont décrites par le groupe  $Spin(8)$  qui comprend 3 représentations : une vectorielle et deux spinorielles. Ceci permet la description des charges  $Q^a$  et  $Q^{\dot{a}}$  dans les deux représentations spinorielles ce qui se traduit par une deuxième alternative qui consiste à l'éclatement de l'algèbre susy en 3 pièces selon (1.108-1.110), il en est de même pour  $D = 6$  [29, 30]. Par contre, pour  $D = 3$  et 4 il n'y a qu'une seule représentation spinorielle.

Donc pour  $D = 6$  on définit les générateurs supersymétriques basée sur une symétrisation adéquate par :

$$Q^a = \frac{1}{2} \left[ (2p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a \right]_+ \quad (3.18)$$

$$Q^{\dot{a}} = (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\dot{a}a}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+ \quad (3.19)$$

de la même façon, le Hamiltonien sera défini par :

$$H = \frac{1}{p^+} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) + \frac{1}{2} p_i^2 \right\} \quad (3.20)$$

Maintenant, par la seule utilisation des relations trilineaires (3.4) à (3.10) et (3.17) on peut montrer que les générateurs supersymétriques vérifient les relations d'anticommutations

suivantes (annexe B).

$$[Q^a, Q^b]_+ = 2p^+ \delta^{ab} \quad (3.21)$$

$$[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+ = 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} H \quad (3.22)$$

$$[Q^a, Q^{\dot{a}}]_+ = \sqrt{2} \gamma_{\dot{a}a}^i p^i \quad (3.23)$$

Donc à cause de la symétrisation on retrouve la même algèbre que dans le cas ordinaire (MQ). Ce qui est en accord avec le résultat (a).

Pour  $D = 4$ , les charges supersymétriques s'écrivent sous la forme

$$Q^a = \frac{i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma^+ s_0)^a \right]_+ + \frac{i}{2} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+ \quad (3.24)$$

On montrera alors que l'algèbre est donnée par (annexe C)

$$[Q^a, \bar{Q}^b]_+ = -2 (h \gamma_{\mu} p^{\mu})^{ab} \quad (3.25)$$

avec  $h = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5)$

avec les mêmes démarches, on montre que pour  $D = 3$ , l'algèbre des générateurs supersymétriques est

$$[Q, \bar{Q}]_+ = -2\gamma \cdot p \quad (3.26)$$

## 3.4 Condition de “Mass shell”

### 3.4.1 Opérateur de masse

Dans le cas classique l'expression de la masse est donnée par

$$M^2 = -P^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\mu n}^* \alpha_n^{\mu} + n s_{\mu n}^* s_n^{\mu} \quad (3.27)$$

L'expression quantique de l'opérateur de masse s'écrit

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ \alpha_n + n s_n^+ s_n \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_n^+ &= \alpha_{-n} \\ s_n^+ &= s_{-n} \quad n \geq 1\end{aligned}$$

En utilisant les lois de la symétrisation on écrit l'expression paraquantique de l'opérateur de masse de la manière suivante :

$$M^2 = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) \quad (3.29)$$

### 3.4.2 Quelques exemples :

Dans le cas des supercordes de type I, l'état fondamental est donné par  $|i\rangle$  qui représente un vecteur sans masse avec  $(D - 2)$  polarisations qui décrit le photon et son partenaire fermionique  $|a\rangle$  avec  $D - 2$  composantes qui est le photino.

En utilisons les relations trilineaires et les décompositions de Green, on calcule quelques masses pour certains niveaux. On vérifie alors que la masse ne dépend pas de la dimension de l'espace-temps.

1<sup>er</sup> exemple :  $\alpha_{-1}^j |0\rangle$

(  $|0\rangle$  représente l'état fondamental  $\begin{matrix} \nearrow |i\rangle \rightarrow \text{paraboson} \\ \searrow |a\rangle \rightarrow \text{parafermion} \end{matrix}$  )

La masse pour cet état est

$$M^2 \alpha_{-1}^j |0\rangle = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ \alpha_{-1}^j |0\rangle + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle \right)$$

on peut vérifier directement que (annexe D)

$$\frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ \alpha_{-1}^j |0\rangle = \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n + 2 \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad (3.30)$$

et

$$\frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle = -Q \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad (3.31)$$

Donc la valeur de la masse pour cet état est :

$$\alpha' M^2 \alpha_{-1}^j |0\rangle = \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad (3.32)$$

qui est la même masse que dans le cas ordinaire ( $D = 10$ ).

2<sup>ème</sup> exemple :  $s_{-1}^b |0\rangle$

$$\alpha' M^2 s_{-1}^b |0\rangle = s_{-1}^b |0\rangle \quad (3.33)$$

3<sup>ème</sup> exemple :  $s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle$  et  $\alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle$

$$\alpha' M^2 s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle = 2 s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad (3.34)$$

$$\alpha' M^2 \alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle = 2 \alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle \quad (3.35)$$

remarquons qu'en MQ, ces 2 états sont équivalents et ont la même masse.

Cependant, dans le cadre paraquantique, bien qu'ils soient à priori différents, nous avons montré qu'il ont la même masse. Nous suggérons alors de généraliser la forme de ces états en les écrivant de la façon suivante :

$$s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \text{ ou } \alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-1}^j, s_{-1}^b \right]_+ |0\rangle \quad (3.36)$$

Avec :

$$\alpha' M^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-1}^j, s_{-1}^b \right]_+ |0\rangle \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-1}^j, s_{-1}^b \right]_+ |0\rangle \right) \quad (3.37)$$

Avec le même raisonnement, on adopte une forme plus générale pour les autres états physiques .

### 3.5 Fonction de Partition

Pour étudier le spectre, on se propose de déterminer la forme générale de la fonction de partition dans le cas paraquantique pour ensuite, la spécifier pour les différentes dimensions d'espace temps  $D = 3, 4, 6$ . Pour ce faire, on adopte la même démarche que celle dans le cas

quantique.

En l'occurrence, on traitera séparément les cas parabosoniques et parafermioniques, on postulera alors la fonction de partition relative aux parasupercordes .

### Oscillateur harmonique Parabosonique :

L'Hamiltonien est donné par :

$$H_{pb} = \frac{1}{2} [a^+, a]_+$$

On peut montrer que :

$$\begin{aligned} \langle n | [a, a^+]_+ | n \rangle &= \sum_{n'} \{ \langle n | a | n' \rangle \langle n' | a^+ | n \rangle + \langle n | a^+ | n' \rangle \langle n' | a | n \rangle \} \\ &= |a_{n,n+1}|^2 + |a_{n,n-1}^+|^2 \end{aligned}$$

qui nous conduit à :

$$\langle n | [a^+, a]_+ | n \rangle = Q + 2n \quad (3.38)$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | x^{\frac{1}{2}} [a_{-n}^+, a_n^+]_+ | n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{1}{2}Q+n} \\ &= x^{\frac{1}{2}Q} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^{\frac{1}{2}Q} \frac{1}{1-x} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### Oscillateur harmonique Parafermionique :

Dans ce cas, le Hamiltonien est donné par :

$$H_{pf} = \frac{1}{2} [b^+, b]_-$$

de la même façon, on peut montrer que :

$$\langle n | [b^+, b]_- | n \rangle = |b_{n,n-1}^+|^2 - |b_{n,n+1}|^2$$

Un raisonnement par récurrence conduit alors à :

$$b_{n,n+1} = b_{n+1,n}^+ = [(n+1)(Q-n)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

avec

$$n = 0, 1, 2, \dots, Q$$

ce qui nous donne

$$\langle n | [b^+, b]_- | n \rangle = 2n - Q$$

on déduit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | x^{\frac{1}{2}[s_{-n}^a, s_n^a]}_- | n \rangle &= \sum_{n=0}^Q x^{n-\frac{1}{2}Q} \\ &= x^{-\frac{1}{2}Q} (1 + x + x^2 + \dots + x^Q) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, Q$$

### La fonction de partition pour les Parasupercordes :

La fonction de partition pour les parasupercordes est définie comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= Tr x^N = Tr x^{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ([\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n[s_{-n}^a, s_n^a]_-)} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | x^{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n ([a_{-n}^i, a_n^i]_+ + [s_{-n}^a, s_n^a]_-)} | n' \rangle, \quad 2\alpha' = 1 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_n = \sqrt{n}a_n$ ,  $\alpha_n^+ = \sqrt{n}a_n^+$  et  $2\alpha' = 1$

En utilisant les relations (3.39) et (3.41), nous obtenons la forme générale de la fonction de partition

$$f(x) = 2(D-2) \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{nQ}}{1 - x^n} \right)^{D-2} \quad (3.42)$$

On peut alors déterminer les formes explicites pour les différentes dimensions critiques

En l'occurrence :

$$\underline{D = 3 \quad Q = 8}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{8n}}{1 - x^{2n}} \right) \\ &= 2[1 + 2x + 5x^2 + 10x^3 + 20x^4 + 30x^5 + 56x^6 \\ &\quad + 84x^7 + 134x^8 + 194x^9 + O(x^{10})] \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\underline{D = 4 \quad Q = 4}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n}}{1 - x^{2n}} \right)^2 \\ &= 4\{1 + 4x + 14x^2 + 40x^3 + 105x^4 + 196x^5 + 486x^6 \\ &\quad + 876x^7 + 1779x^8 + 3124x^9 + O(x^{10})\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\underline{D = 6 \quad Q = 2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n + x^{2n}}{1 - x^n} \right)^4 \\ &= 8[1 + 8x + 44x^2 + 188x^3 + 694x^4 + 1640x^5 + 5688x^6 \\ &\quad + 12224x^7 + 33542x^8 + 71188x^9 + O(x^{10})] \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\underline{D = 10 \quad Q = 1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n}{1 - x^n} \right)^8 \\ &= 16[1 + 16x + 144x^2 + 960x^3 + 5264x^4 + 25\,056x^5 + 106\,944x^6 \\ &\quad + 418\,176x^7 + 1520\,784x^8 + 5201\,232x^9 + O(x^{10})] \end{aligned} \quad (3.46)$$

expression qui correspond bien au cas ordinaire.

Maintenant, nous pouvons décrire le spectre à travers l'état fondamental et les premiers niveaux excités et vérifier la consistance du développement dans les relations (3.33), (3.34) et (3.35).

Pour ce faire, commençons par calculer le nombre d'états pour chaque niveau considéré.

## 3.6 Spectre

### Etat fondamental

On pose l'état  $|0\rangle$  pour représenter les états  $|i\rangle$  ou  $|a\rangle$  où :

- $|i\rangle$  : représente les  $(D - 2)$  polarisations transverses du champs vectoriel sans masse.
- $|a\rangle$  : représente le partenaire spinoriel avec  $(D - 2)$  composantes indépendantes.

Le nombre total est  $2(D - 2)$  états, donc :

	$D = 3$	$D = 4$	$D = 6$
<i>l'état fondamental</i>	2	4	8

Tab.3.1 : Etat fondamental

### 1<sup>er</sup> niveau excité

De la même façon, les états du 1<sup>er</sup> niveau excité sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 s_{-1}^a |i\rangle &\rightarrow (D - 2)^2 \text{ parafermions} \\
 s_{-1}^a |b\rangle &\rightarrow (D - 2)^2 \text{ parabosons} \\
 \alpha_{-1}^i |j\rangle &\rightarrow (D - 2)^2 \text{ parabosons} \\
 \alpha_{-1}^i |a\rangle &\rightarrow (D - 2)^2 \text{ parafermions}
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

Le nombre total des états parabosoniques et parafermioniques est  $4(D - 2)^2$ .

Donc

	$D = 3$	$D = 4$	$D = 6$
<i>1<sup>er</sup> niveau excité</i>	4	16	64

Tab.3.2 : Nombre d'états du 1<sup>er</sup> niveau

### 2<sup>ème</sup> niveau excité

Le 2<sup>ème</sup> niveau excité est représenté par les états suivants :

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle \longrightarrow \begin{cases} |i\rangle \rightarrow \text{parafermions} \\ |c\rangle \rightarrow \text{parabosons} \end{cases} \quad (a.1)$$

$$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+ \longrightarrow \begin{cases} |k\rangle \rightarrow \text{parabosons} \\ |a\rangle \rightarrow \text{parafermions} \end{cases} \quad (a.2)$$

$$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, s_{-1}^a]_+ \longrightarrow \begin{cases} |j\rangle \rightarrow \text{parafermions} \\ |b\rangle \rightarrow \text{parabosons} \end{cases} \quad (a.3)$$

$$\alpha_{-2}^i \longrightarrow \begin{cases} |j\rangle \rightarrow \text{parabosons} \\ |a\rangle \rightarrow \text{parafermions} \end{cases} \quad (a.4)$$

$$s_{-2}^a \longrightarrow \begin{cases} |i\rangle \rightarrow \text{parafermions} \\ |b\rangle \rightarrow \text{parabosons} \end{cases} \quad (a.5)$$

où l'ensemble des états (a.1) est donné par

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} [s_{-1}^a, s_{-1}^b]_-, (s_{-1}^a)^2 \right\}$$

Remarquons que dans le cas ordinaire

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle \rightarrow s_{-1}^a s_{-1}^b \quad \text{puisque } (s_n^a)^2 = 0$$

On peut facilement montrer que pour chaque type, le nombre d'état est donné par :

Type d'état	Nombre
$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle  0\rangle$	$\begin{cases} \frac{1}{2} [s_{-1}^a, s_{-1}^b]_-  0\rangle \rightarrow \frac{(D-2)(D-3)}{2} [2(D-2)] \\ (s_{-1}^a)^2  0\rangle \rightarrow (D-2) \underbrace{[2(D-2)]}_{\text{dim des 2 états fond.}} \end{cases}$
$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+  0\rangle$	$\left[ (D-2) + \frac{(D-2)(D-3)}{2} \right] [2(D-2)]$
$\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, s_{-1}^a]_+  0\rangle$	$(D-2)^2 [2(D-2)]$
$\alpha_{-2}^i  0\rangle$	$(D-2) [2(D-2)]$
$s_{-2}^a  0\rangle$	$(D-2) [2(D-2)]$

Tab.3.3 :Types d'états du 2<sup>ème</sup> niveau et leurs nombres

On remarque que l'ensemble  $\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle$  a le même nombre que pour l'état  $[\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+$  avec la condition  $(s_n^a)^{Q+1} = 0$

Le nombre total des états est :

$$[(D-2)^2 + 4(D-2) + (D-2)(D-3)] [2(D-2)] \quad (3.48)$$

On obtient finalement :

<i>Etat</i>	<i>D = 3</i>	<i>D = 4</i>	<i>D = 6</i>
(a.1)	1 × 2	3 × 4	10 × 8
(a.2)	1 × 2	3 × 4	10 × 8
(a.3)	1 × 2	4 × 4	16 × 8
(a.4)	1 × 2	2 × 4	4 × 8
(a.5)	1 × 2	2 × 4	4 × 8
<i>2<sup>ème</sup> niveau excité</i>	10	56	352

Tab.3.4 : Nombre total des états du 2<sup>ème</sup> niveau

### 3<sup>ème</sup> niveau excité

Les états sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 (b.1) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \alpha_{-1}^i \left[ \alpha_{-1}^j, s_{-1}^a \right]_+ |0\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2} s_{-1}^a \left[ \alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j \right]_+ |0\rangle & (b.6) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-2}^i, s_{-1}^a \right]_+ |0\rangle \\
 (b.2) \dots\dots\dots \frac{1}{2} s_{-1}^a \left[ \alpha_{-1}^i, s_{-1}^b \right]_+ |0\rangle &\leftrightarrow \alpha_{-1}^i \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle |0\rangle & (b.7) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-2}^i, \alpha_{-1}^j \right]_+ |0\rangle \\
 (b.3) \dots\dots\dots \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c \rangle |0\rangle & & (b.8) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \left[ s_{-2}^a, s_{-1}^b \right]_- |0\rangle \\
 (b.4) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \alpha_{-1}^i \left[ \alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k \right]_+ |0\rangle & & (b.9) \dots\dots\dots 3.s_{-3}^a |0\rangle \\
 (b.5) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \left[ \alpha_{-1}^i, s_{-2}^a \right]_+ |0\rangle & & (b.10) \dots\dots\dots \alpha_{-3}^i |0\rangle
 \end{aligned}$$

La notation  $\langle ., ., . \rangle$  dans (b.3) est définie par :

$$\left\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c \right\rangle \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} s_{-1}^a \left[ s_{-1}^b, s_{-1}^c \right]_-, \frac{1}{2} \left[ (s_{-1}^a)^2, s_{-1}^b \right]_-, (s_{-1}^a)^3 \right\} \quad (3.49)$$

où on a tenu compte de l'équivalence entre

$$\left[ (s_{-1}^a)^2, s_{-1}^b \right]_- |0\rangle \leftrightarrow s_{-1}^a \left[ s_{-1}^a, s_{-1}^b \right]_- |0\rangle$$

On peut donc déterminer le nombre des états pour chaque cas et obtenir les résultats listés dans le tableau 3.5

<i>Etat</i>	<i>Nombre</i>
(b.1)	$(D-2) \left[ (D-2) + \frac{(D-2)(D-3)}{2} \right] [2(D-2)]$
(b.2)	$(D-2) \left[ (D-2) + \frac{(D-2)(D-3)}{2} \right] [2(D-2)]$
(b.3)	$\left\{ \begin{array}{l} s_{-1}^a [s_{-1}^b, s_{-1}^c]_-  0\rangle \rightarrow \left[ \frac{1}{2}(D-2)(D-3) + \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!} \right] [2(D-2)] \\ \left[ (s_{-1}^a)^2, s_{-1}^b \right]_-  0\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(D-2)(D-3) [2(D-2)] \\ (s_{-1}^a)^3  0\rangle \begin{cases} \leftarrow \frac{(D-2)[2(D-2)]}{0} & D \neq 6 \\ \leftarrow 0 & \text{pour } D=6 \end{cases} \end{array} \right.$
(b.4)	$\left[ (D-2) + (D-2)(D-3) + \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!} \right] [2(D-2)]$
(b.5)	$[(D-2)^2 2(D-2)] [2(D-2)]$
(b.6)	$[(D-2)^2 2(D-2)] [2(D-2)]$
(b.7)	$[(D-2)^2 2(D-2)] [2(D-2)]$
(b.8)	$[(D-2)^2 2(D-2)] [2(D-2)]$
(b.9)	$(D-2) [2(D-2)]$
(b.10)	$(D-2) [2(D-2)]$

Tab.3.5 : Nombre d'états pour chaque type.

Remarquons ici que pour déterminer le nombre des états, on a tenu compte de l'équivalence entre les membres de gauche et de droit des formules (b.1) et (b.2) et du fait que, à l'ordre  $Q = 2$ ,  $(s_{-1}^a)^3 = 0$

Le nombre total des états est donnée par la formule générale :

$$\text{pour } Q \neq 1, 2 \quad N = \left\{ 4(D-2) + 2(D-2)(D-3) + \frac{1}{3}(D-2)(D-3)(D-4) + 6(D-2)^2 + (D-2)^2(D-3) \right\} [2(D-2)] \quad (3.50)$$

$$\text{pour } Q = 2 \quad N = 188 \times 8 = 1504 \text{ états} \quad (3.51)$$

Finalement, on récapitule dans le tableau 3.6, le nombre total des états dans le 3<sup>ème</sup> niveau excité comme suit :

<i>Etat</i>	$D = 3$	$D = 4$	$D = 6$
(b.1)	$1 \times 2$	$6 \times 4$	$40 \times 8$
(b.2)	$1 \times 2$	$6 \times 4$	$40 \times 8$
(b.3)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$16 \times 8$
(b.4)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$20 \times 8$
(b.5)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$16 \times 8$
(b.6)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$16 \times 8$
(b.7)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$16 \times 8$
(b.8)	$1 \times 2$	$4 \times 4$	$16 \times 8$
(b.9)	$1 \times 2$	$2 \times 4$	$4 \times 8$
(b.10)	$1 \times 2$	$2 \times 4$	$4 \times 8$
3 <sup>ème</sup> niveau excité	20	160	1504

Tab.3.6 : Nombre total des états du 3<sup>ème</sup> niveau excité

#### 4<sup>ème</sup> niveau excité

Pour mieux faire apparaître l'intérêt et la nécessité de la nouvelle notation  $\langle \dots, \dots, \dots \rangle$  et en même temps, conforter le développement de la fonction de partition, on se propose d'étendre l'étude du spectre au 4<sup>ème</sup> niveau excité ; introduisons alors les notations

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} [s_{-1}^a, s_{-1}^b]_-, (s_{-1}^a)^2 \right\} \quad (3.52)$$

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c \rangle \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} s_{-1}^a [s_{-1}^b, s_{-1}^c]_-, \frac{1}{2} [(s_{-1}^a)^2, s_{-1}^b]_-, (s_{-1}^a)^3 \right\} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c, s_{-1}^d \rangle &\rightarrow \left\{ \frac{1}{4} [s_{-1}^a, s_{-1}^b]_- [s_{-1}^c, s_{-1}^d]_-, \frac{1}{2} s_{-1}^a [(s_{-1}^b)^2, s_{-1}^c]_- \right. \\ &\quad \left. , \frac{1}{2} [(s_{-1}^a)^3, s_{-1}^b]_-, (s_{-1}^a)^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il est clair que dans le cas ordinaire on retrouve facilement les résultats :

(la condition imposée sur les spineurs  $(s_n^a)^2 = 0$ )

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle \rightarrow s_{-1}^a s_{-1}^b$$

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c \rangle \rightarrow s_{-1}^a s_{-1}^b s_{-1}^c$$

$$\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c, s_{-1}^d \rangle \rightarrow s_{-1}^a s_{-1}^b s_{-1}^c s_{-1}^d$$

les états possibles sont :

<p>(c.1) ..... <math>\frac{1}{4} [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+ [\alpha_{-1}^k, \alpha_{-1}^l]_+</math></p> <p>(c.2) ..... <math>\frac{1}{2} s_{-1}^a \left( \alpha_{-1}^i [\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k]_+ \right)</math></p> <p>(c.3) ..... <math>\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+ \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle</math></p> <p>(c.4) ..... <math>\alpha_{-1}^i \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c \rangle</math></p> <p>(c.5) ..... <math>\langle s_{-1}^a, s_{-1}^b, s_{-1}^c, s_{-1}^d \rangle</math></p> <p>(c.6) ..... <math>\frac{1}{2} \alpha_{-2}^i [\alpha_{-1}^j, \alpha_{-1}^k]_+</math></p> <p>(c.7) ..... <math>\frac{1}{2} [\alpha_{-2}^i, \alpha_{-2}^j]_+</math></p> <p>(c.8) ..... <math>\frac{1}{2} \alpha_{-2}^i [\alpha_{-1}^j, s_{-1}^a]_+</math></p> <p>(c.9) ..... <math>\frac{1}{2} s_{-2}^a [\alpha_{-1}^i, \alpha_{-1}^j]_+</math></p> <p>(c.10) ..... <math>\frac{1}{2} [\alpha_{-2}^i, s_{-2}^a]_+</math></p>	<p>(c.11) ..... <math>\frac{1}{2} s_{-2}^a [\alpha_{-1}^i, s_{-1}^b]_+</math></p> <p>(c.12) ..... <math>s_{-2}^a \langle s_{-1}^b, s_{-1}^c \rangle</math></p> <p>(c.13) ..... <math>\alpha_{-2}^i \langle s_{-1}^a, s_{-1}^b \rangle</math></p> <p>(c.14) ..... <math>\langle s_{-2}^a, s_{-2}^b \rangle</math></p> <p>(c.15) ..... <math>\frac{1}{2} [s_{-3}^a, s_{-1}^b]_-</math></p> <p>(c.16) ..... <math>\frac{1}{2} [s_{-3}^a, \alpha_{-1}^i]_+</math></p> <p>(c.17) ..... <math>\frac{1}{2} [\alpha_{-3}^i, s_{-1}^a]_+</math></p> <p>(c.18) ..... <math>\frac{1}{2} [\alpha_{-3}^i, \alpha_{-1}^j]_+</math></p> <p>(c.19) ..... <math>s_{-4}^a</math></p> <p>(c.20) ..... <math>\alpha_{-4}^i</math></p>
---	---

le nombre des états du type (c.5) est déterminé de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [s_{-1}^a, s_{-1}^b]_- [s_{-1}^c, s_{-1}^d]_- &\rightarrow \frac{1}{2} (D-2)(D-3) + \frac{2}{3!} (D-2)(D-3)(D-4) \\ &\quad + \frac{1}{4!} (D-2)(D-3)(D-4)(D-5) \\ \frac{1}{2} s_{-1}^a \left[ (s_{-1}^b)^2, s_{-1}^c \right]_- &\rightarrow \frac{1}{2} (D-2)(D-3) + \frac{1}{3!} (D-2)(D-3)(D-4) \\ \frac{1}{2} [(s_{-1}^a)^3, s_{-1}^b]_- &\rightarrow \frac{1}{2} (D-2)(D-3) \\ (s_{-1}^a)^4 &\rightarrow (D-2) \end{aligned}$$

Avec la condition  $(s)^{Q+1} = 0$ , il y a des termes qui ne contribuent pas. Explicitement, le

nombre total d'états du type (c.5) et donné par les résultats :

$$\begin{aligned}
 Q = 1 &\rightarrow \frac{1}{4!} \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 70 \quad \text{avec } (s^a)^2 = 0 \\
 Q = 2 &\rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 2 + \frac{1}{4!} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 19 \quad \text{avec } (s^a)^3 = 0 \\
 Q = 4 &\rightarrow 2 + \frac{3}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4!} \times 0 = 5 \\
 Q = 8 &\rightarrow 1 + 0 + 0 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

De même pour le nombre total des états du type (c.4) :

$$(c.4) \rightarrow \begin{cases} (D-2) [(D-2) + (D-2)(D-3) + \frac{1}{3!}(D-2)(D-3)(D-4)] & Q \neq 1, 2 \\ 4 \times [4 \times 3 + \frac{1}{3!} \times 4 \times 3 \times 2] = 64 & \text{pour } Q = 2 \end{cases}$$

On peut maintenant donner le nombre pour chaque type d'état dans le 4<sup>ème</sup> niveau excité en fonction de  $D$  :

<i>Etats</i>	<i>Nombre</i>
(c.1)	$(D-2) + \frac{3}{2}(D-2)(D-3) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)(D-4) + \frac{(D-2)(D-3)(D-4)(D-5)}{4!}$
(c.2)	$[(D-2) + (D-2)(D-3) + \frac{1}{3!}(D-2)(D-3)(D-4)](D-2)$
(c.3)	$[(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)] [(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)]$
(c.4)	$\begin{cases} (D-2) [(D-2) + (D-2)(D-3) + \frac{1}{3!}(D-2)(D-3)(D-4)] & Q \neq 1, 2 \\ 64 & \text{pour } Q = 2 \end{cases}$
(c.5)	$\begin{cases} (D-2) + \frac{3}{2}(D-2)(D-3) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)(D-4) \\ + \frac{1}{4!}(D-2)(D-3)(D-4)(D-5) & Q \neq 1, 2 \\ 19 & \text{pour } Q = 2 \end{cases}$
(c.6)	$(D-2) [(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)]$
(c.7)	$(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)$
(c.8)	$(D-2)^3$
(c.9)	$(D-2) [(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)]$
(c.10)	$(D-2)^2$
(c.11)	$(D-2)^3$
(c.12)	$(D-2) [(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)]$
(c.13)	$(D-2) [(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)]$
(c.14)	$(D-2) + \frac{1}{2}(D-2)(D-3)$
(c.15)	$(D-2)^2$
(c.16)	$(D-2)^2$
(c.17)	$(D-2)^2$
(c.18)	$(D-2)^2$
(c.19)	$(D-2)$
(c.20)	$(D-2)$

Tab.3.7 : Nombre d'états pour chaque type du 4<sup>ème</sup> niveau excité.

Remarquons que pour  $Q = 1$  ( $(s^a)^2 = 0$  et  $D = 10$ ), il y a des termes qui ne contribuent

pas dans les relations (c.3), (c.4), (c.12), (c.13) et (c.14)

$$(c.3) \rightarrow 36 \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 7\right) = 1008$$

$$(c.4) \rightarrow 8 \times \left(\frac{1}{3!} \times 8 \times 7 \times 6\right) = 448$$

$$(c.12) \rightarrow 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 7\right) = 224$$

$$(c.13) \rightarrow 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 7\right) = 224$$

$$(c.14) \rightarrow \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28$$

qui est le cas ordinaire déjà étudié (voir le tableau du premier chapitre).

Finalement, on donne le nombre total d'états physiques pour le 4<sup>ème</sup> niveau excité, pour les dimensions  $D = 3, 4, 6$ , dans le tableau 3.8.

<i>états</i>	(c.1)	(c.2)	(c.3)	(c.4)	(c.5)	(c.6)	(c.7)	(c.8)	(c.9)	(c.10)
$D = 3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$D = 4$	5	8	9	8	5	6	3	8	6	4
$D = 6$	35	80	100	64	19	40	10	64	40	16

(c.11)	(c.12)	(c.13)	(c.14)	(c.15)	(c.16)	(c.17)	(c.18)	(c.19)	(c.20)	<i>Total.  0⟩</i>
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$20 \times 2$
8	6	6	3	4	4	4	4	2	2	$105 \times 4$
64	40	40	10	16	16	16	16	4	4	$694 \times 8$

Tab.3.8 : 4<sup>ème</sup> niveau excité

On peut, enfin, regrouper dans la tableau (3.9) les résultats obtenus pour les 4 niveaux et la fonction de partition pour les différentes valeurs de  $D$ , le parfait accord du spectre avec les différents développements des fonctions de partition confirme la cohérence de cette étude.

$\alpha' M^2$	0	1	2	3	4	fonction de partition
$D = 3$	2	4	10	20	40	$2 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 40x^4 \dots$
$D = 4$	4	16	56	160	420	$4 + 16x + 56x^2 + 160x^3 + 420x^4 \dots$
$D = 6$	8	64	352	1504	5552	$8 + 64x + 352x^2 + 1504x^3 + 5552x^4 \dots$

Tab.3-9 : Niveaux excités et fonction de partition

## 3.7 Cas Boson-Parafermion

En connexion avec certains travaux sur les supercordes fractionnaires [8-9] basées sur des systèmes bosoniques et fermioniques fractionnaires qui sont encore formulés à des dimensions d'espace-temps  $D = 3, 4, 6, 10$ , le dernier point de ce chapitre traite des supercordes du type bosonique-parafermionique. A la différence du premier cas, l'ensemble des générateurs mixtes des systèmes forme l'algèbre de la mécanique quantique parasupersymétrique dans le sens de Beckers et Debergh.

### 3.7.1 Formalisme

Dans la jaue transverse les opérateurs  $x^-, p^+, x^i, p^i, \alpha_n^i$  et  $s_n^a$  vérifient les relations suivantes :

$$\left[ s_n^a, \left[ s_m^b, s_l^c \right]_- \right] = 2 \left( \delta^{ab} \delta_{n+m} s_l^c - \delta^{ac} \delta_{n+l} s_m^b \right) \quad (3.55)$$

$$\left[ s_n^a, \left[ s_m^b, A \right]_+ \right]_+ = 2 \delta^{ab} \delta_{n+m} A \quad (A : \text{tous sauf } s_l^c) \quad (3.56)$$

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n \delta^{ij} \delta_{n+m,0} \quad (3.57)$$

$$[x^i, p^j] = i \delta^{ij} \quad (3.58)$$

$$[x^-, p^+] = i \quad (3.59)$$

et les autres commutateurs sont nuls.

### 3.7.2 Parasuper-algèbre de Poincaré

Pour  $D = 6$ , on se propose donc de déterminer l'algèbre vérifiée par les générateurs supersymétriques  $Q^a$  et  $Q^{\dot{a}}$  définis par :

$$Q^a = (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a \quad (3.60)$$

$$Q^{\dot{a}} = (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{\dot{a}a}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^a \alpha_n^i \quad (3.61)$$

le Hamiltonien  $H$  est donné par :

$$H = \frac{1}{2p^+} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2} n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) \right\} \quad (3.62)$$

Maintenant, par la seule utilisation des relations (3.55-3.59), on peut montrer que (annexe E)

$$\left[ Q^a, [Q^b, Q^c]_- \right] = 2(2p^+) [\delta^{ab} Q^c - \delta^{ac} Q^b] \quad (3.63)$$

$$\left[ Q^a, [Q^b, Q^{\dot{a}}]_- \right] = 2 \left( 2p^+ \delta^{ab} Q^{\dot{a}} - \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i Q^b \right) \quad (3.64)$$

$$\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^a, Q^b]_- \right] = 2 \left( \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i Q^b - \sqrt{2} \gamma_{b\dot{a}}^i p^j Q^a \right) \quad (3.65)$$

$$\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^{\dot{b}}, Q^a]_- \right] = 2 \left( 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} H Q^a - \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i Q^{\dot{b}} \right) \quad (3.66)$$

$$\left[ Q^a, [Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_- \right] = 2 \left( \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i Q^{\dot{b}} - \sqrt{2} \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^i p^j Q^a \right) \quad (3.67)$$

$$\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^{\dot{b}}, Q^c]_- \right] = 2 \left( 2H \delta^{\dot{a}\dot{b}} Q^c - 2H \delta^{\dot{a}c} Q^{\dot{b}} \right) \quad (3.68)$$

Ceci correspond bien à l'algèbre de la MQPS, et donc, est en accord avec le résultat (b).

Pour  $D = 3, 4$ , on définit les générateurs supersymétriques dans ce cas de la manière suivantes :

$$Q^a = i(p^+)^{\frac{1}{2}} (\gamma^+ s_0)^a + i(p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_i s_{-n})^a \alpha_n^i \quad (3.69)$$

qui nous conduit à

$$\left[ Q^a, [\bar{Q}^b, \bar{Q}^c]_- \right] = 2 \left[ -2 (h\gamma_{\mu} p^{\mu})^{ab} \bar{Q}^c + 2 (h\gamma_{\mu} p^{\mu})^{ac} \bar{Q}^b \right] \quad (3.70)$$

Ceci correspond aussi à l'algèbre de la MQPS.

### 3.8 Conclusion

Le premier résultat obtenu ici est la cohérence entre la forme générale suggérée des états physiques et la fonction de partition à  $D = 3, 4, 6$ .

Le second résultat est en accord avec ce qu'on peut lire dans la littérature .

En effet, deux types de systèmes sont considérés, un système supersymétrique du type parabose-parafermi et l'autre supersymétrique du type bose-parafermi. Les résultats (3.21-3.23), (3.25) et (3.26) impliquent que le premier correspond à un système supersymétrique ordinaire alors que les relations (3.63) à (3.68) et (3.70) impliquent que le second correspond à un système parasupersymétrique.

Bien sûr, on peut vérifier ici, que l'ensemble des résultats (3.63) à (3.68) et (3.70) impliquent celle de (3.21-3.23) 3.25) et (3.26), mais l'inverse n'est en général pas vrai. Ceci est complètement consistant avec le fait que les bosons sont des parabosons particuliers.

## Chapitre 4

# Cordes hétérotiques dans le cadre paraquantique

### 4.1 Introduction

La théorie des supercordes a fait considérablement progresser la théorie des cordes, seulement elle présente des anomalies. Green et Schwarz considèrent le cas des anomalies de jauge pour les supercordes ouverte de type I et découvrent qu'à une boucle, les anomalies sont éliminées pour les groupes de jauge  $SO(32)$  ou  $E_8 \otimes E_8$ . Cependant la théorie des supercordes ne peut incorporer de tels groupes, ce qui a amené D.Gross [31-32] à introduire la notion de corde hétérotique qui est en fait une ingénieuse idée qui permet d'introduire ces groupes de jauge. En effet une corde hétérotique est une combinaison des modes droits des supercordes fermées à  $D' = 10$  dimensions et des modes gauches des cordes bosoniques fermées à  $D = 26$  dimensions. C'est alors par compactification des 16 dimensions internes (par un mécanisme de Kaluza-Klein [14, 15] généralisé, adapté à la théorie des cordes) que l'on produit le groupe de symétrie de Yang-Mills  $E_8 \otimes E_8$  ou  $SO(32)$ .

En effet, les 16 dimensions compactifiées sont représentées sur un réseau, sa nature nous permet d'introduire le groupe  $E_8 \otimes E_8$ .

Les cordes hétérotiques sont des cordes fermées, par conséquent, le réseau doit être pair. D'un autre côté, pour que la théorie soit finie à une boucle, l'invariance modulaire nous permet de faire le calcul d'intégrale sur un domaine libre de pôles appelé domaine fondamental. Cependant

cette invariance modulaire exige que le réseau soit self dual. Sachant que les réseaux self duaux pairs ne peuvent exister que dans des dimensions multiples de 8, à 16 dimensions, le réseau est celui des racines du groupe  $E_8 \otimes E_8$ .

On montre alors qu'à une boucle cette théorie est finie, libre d'anomalies, sans tachyons et libre de ghosts.

Les résultats des chapitres 2 et 3 nous conduisent à étudier l'extension de toutes les questions soulevées sur les cordes hétérotiques dans le cadre de la paraquantification, en considérant la compactification de  $D = 2 + \frac{24}{Q}$  pour les modes gauches des cordes parabosoniques à  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$  pour les modes droits des parasupercordes fermées.

Après construction du formalisme, on fixera le type de réseau, son groupe et on étudiera la cohérence de la théorie par l'étude du spectre et la construction de l'algèbre des générateurs supersymétriques.

## 4.2 Formalisme

Dans la jauge transverse, tous les degrés de libertés sont physiques et transverses, le secteur des modes droits des cordes hétérotiques paraquantiques est constitué des déplacements droits des parasupercordes fermées orientées à  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$  c-à-d  $\frac{8}{Q}$  coordonnées parabosoniques transverses  $X^i(\tau - \sigma)$  ( $i = 1, \overline{\frac{8}{Q}}$ ) et des coordonnées parafermioniques du types Majorana-Weyl ou de type Majorana,  $S^a(\tau - \sigma)$  où ( $a = 1, \overline{\frac{D'}{2}}$ ). Le secteur des modes gauches est constitué par les  $D = 2 + \frac{24}{Q}$  dimensions des cordes parabosoniques fermées orientées c-à-d  $\frac{24}{Q}$  coordonnées transverses  $X^i(\tau + \sigma)$  et  $X^I(\tau + \sigma)$  avec ( $i = 1, \overline{\frac{8}{Q}}$ ) et ( $I = 1, \overline{\frac{16}{Q}}$ ) où  $X^I$  sont les coordonnées de l'espace interne compactifié.

L'action s'écrit alors

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \left( \partial_a X^i \partial^a X^i + \sum_{I=1}^{D-D'} \partial_a X^I \partial^a X^I + i\bar{S}\gamma^- (\partial_\tau + \partial_\sigma) S \right) \quad (4.1)$$

les solutions pour les différents champs sont données par :

$$X^i(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau - \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp[-2in(\tau - \sigma)] \quad (4.2)$$

$$X^i(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^i \exp[-2in(\tau + \sigma)] \quad (4.3)$$

$$S^a(\tau - \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a \exp[-2in(\tau - \sigma)] \quad (4.4)$$

$$X^I(\tau + \sigma) = x^I + p^I(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I \exp[-2in(\tau + \sigma)] \quad (4.5)$$

En terme de modes, les variables dynamiques indépendantes vérifient les relations trilineaires suivantes

$$\left[ x^i, [p^j, p^k]_+ \right] = 2i \left( \delta^{ij} p^k + \delta^{ik} p^j \right) \quad (4.6)$$

$$\left[ x^i, [p^j, A]_+ \right] = 2i \delta^{ij} A \quad (4.7)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, \alpha_l^k]_+ \right] = 2(n\delta^{ij} \delta_{n+m,0} \alpha_l^k + n\delta^{ik} \delta_{n+l,0} \alpha_m^j) \quad (4.8)$$

$$\left[ \alpha_n^i, [\alpha_m^j, B]_+ \right] = 2\delta^{ij} n \delta_{n+m} B \quad (4.9)$$

$$\left[ \tilde{\alpha}_n^I, [\tilde{\alpha}_m^J, \tilde{\alpha}_l^K]_+ \right] = 2(n\delta^{IJ} \delta_{n+m,0} \tilde{\alpha}_l^K + n\delta^{IK} \delta_{n+l,0} \tilde{\alpha}_m^J) \quad (4.10)$$

$$\left[ \tilde{\alpha}_n^I, [\tilde{\alpha}_m^J, C]_+ \right] = 2\delta^{IJ} n \delta_{n+m} C \quad (4.11)$$

$$\left[ s_n^a, [\bar{s}_m^b, \bar{s}_l^c]_- \right] = 2 \left[ (\gamma^+ h)^{ab} \delta_{n+m} \bar{s}_l^c - (\gamma^+ h)^{ac} \delta_{n+l} \bar{s}_m^b \right] \quad (4.12)$$

$$\left[ s_n^a, [\bar{s}_m^b, D]_+ \right] = 2(\gamma^+ h)^{ab} \delta_{n+m} D \quad (4.13)$$

$$\left[ x^I, [p^J, p^K]_+ \right] = i(\delta^{IJ} p^K + \delta^{IK} p^J) \quad (4.14)$$

$$\left[ x^I, [p^J, E]_+ \right] = i\delta^{IJ} E \quad (4.15)$$

$$i, j, k, \dots = \overline{1, D' - 2} \quad (4.16)$$

$$a, b, c, \dots = \overline{1, D' - 2} \quad (4.17)$$

$$\text{et } I, J, K, \dots = \overline{1, D - D' = 1, \frac{16}{Q}} \quad (4.18)$$

les opérateurs  $A, B, C, D, E$  sont données par :

$$A = x^k, \alpha_n^k, \tilde{\alpha}_n^I, s_n^a, x^I, p^I$$

$$B = x^k, p^k, \tilde{\alpha}_n^I, s_n^a, x^I, p^I$$

$$C = x^i, p^i, \alpha_n^i, s_n^a, x^K, p^K$$

$$D = x^i, p^i, \alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^I, x^I, p^J$$

$$E = x^i, p^i, \alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^K, s_n^a, x^K$$

et l'hélicité  $h$  est définie comme suit :

$$h = \frac{1}{2} (1 + \gamma_{D'+1})$$

*Remarque* : Dans les deux dernières relations trilineaires, nous avons un facteur  $1/2$  qui apparaît par rapport aux autres relations, ceci est dû au fait que, dans la partie compactifiée  $X^I$ , nous n'avons que les modes gauches par contre pour les  $X^i$  nous avons les modes gauches et droits.

En utilisant la décomposition de Green, on obtient les relations de commutations et d'anti-commutations suivantes :

$$\left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\alpha)} \right] = i\delta^{ij} \quad ; \quad \left[ x^{i(\alpha)}, p^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.19)$$

$$\left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\alpha)} \right] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.20)$$

$$\left[ \tilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \tilde{\alpha}_m^{J(\alpha)} \right] = n\delta^{IJ}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ \tilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \tilde{\alpha}_m^{J(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.21)$$

$$\left[ s_n^{a(\alpha)}, \bar{s}_m^{b(\alpha)} \right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[ s_n^{a(\alpha)}, \bar{s}_m^{b(\beta)} \right] = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.22)$$

$$\left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\alpha)} \right] = 0 \quad ; \quad \left[ \alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.23)$$

$$\left[ x^{I(\alpha)}, p^{J(\alpha)} \right] = \frac{1}{2}i\delta^{IJ} \quad ; \quad \left[ x^{I(\alpha)}, p^{J(\beta)} \right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (4.24)$$

### 4.3 Propriétés du réseau

les cordes parabosoniques existent pour  $D = 2 + \frac{24}{Q}$  ( $Q = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ), les supercodes existent pour  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$  ( $Q = 1, 2, 4, 8$ )

Pour le même ordre paraquantique, les seules possibilités d'existence pour les cordes hétéro-

tiques sont :

$$Q = 1 \longrightarrow (D, D') = (26, 10)$$

$$Q = 2 \longrightarrow (D, D') = (14, 6)$$

$$Q = 4 \longrightarrow (D, D') = (8, 4)$$

$$Q = 8 \longrightarrow (D, D') = (5, 3)$$

La construction d'une théorie finie à une boucle conduit à imposer l'invariance modulaire. On montrera alors qu'en plus du cas ordinaire  $(D, D') = (26, 10)$ , et vu les propriétés du réseau, seul subsiste le cas  $(D, D') = (14, 6)$ .

### 4.3.1 Invariance modulaire

On se propose de dériver l'expression de l'amplitude à une boucle dans le formalisme de la paraquantification. En termes de vertex et de propagateurs, cette amplitude s'écrit sous la forme

$$A_{Loop} = Tr [\Delta V(N) \dots \Delta V(1)] \quad (4.25)$$

$N$  : nombre de vertex.

$V$  : vertex.

$\Delta$  : propagateur.

Le principe de cette construction consiste à faire une comparaison formelle entre l'amplitude établit par Ardalan et Mansouri [34] dans le cadre d'une théorie des cordes parabosoniques et celle correspondante dans le cas ordinaire, pour ensuite procéder par analogie pour formuler l'expression de cette amplitude dans le cas des paracordes hétérotiques à partir de celle des cordes hétérotiques qui, dans le cas de 4 particules, est donnée par [32]

$$A_{Loop} \sim \int \prod_{i=1}^4 d^2 z_i |\omega|^{-2} \left[ -\frac{4\pi}{\ln |\omega|} \right]^5 \bar{\omega}^{-1} [f(\bar{\omega})]^{-24} \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq 4} [\chi(C_{JI}, \omega)]^{\frac{1}{2} k_i k_j} [\psi(\bar{C}_{ij}, \bar{\omega})]^{K_i K_j} L(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) \quad (4.26)$$

avec

$$\chi(z, \omega) = \exp \left[ \frac{\ln^2 |z|}{2 \ln \bar{\omega}} \right] \left| \frac{1-z}{\sqrt{z}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\omega^m z) \left(1 - \frac{\omega^m}{z}\right)}{(1-\omega^m)^2} \right| \quad (4.27)$$

$$\psi(\bar{z}, \bar{\omega}) = \exp \left[ \frac{\ln^2 \bar{z}}{2 \ln \bar{\omega}} \right] \frac{1-\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}}} \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{(1-\bar{\omega}^m \bar{z}) \left(1 - \frac{\bar{\omega}^m}{\bar{z}}\right)}{(1-\bar{\omega}^m)^2} \right) \quad (4.28)$$

$$L(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) = \sum_{P \in \Lambda} \exp \left[ \frac{1}{2} \ln \bar{\omega} \left( P - \sum_{i=1}^4 \frac{\ln \bar{z}_i}{\ln \bar{\omega}} Q_i \right)^2 \right] \quad (4.29)$$

et

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i-1} K_j \quad (4.30)$$

$$\nu_i = \sum_{j=1}^i \frac{\ln z_j}{2\pi i} \quad (4.31)$$

$$\tau = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \quad (4.32)$$

$$C_{ji} = z_i z_{i+1} \dots z_j \quad (4.33)$$

$$f(\omega) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \omega^m) \quad (4.34)$$

Dans le cas d'une théorie des cordes parabosoniques ; Ardanian et Mansouri [34] ont déterminé cette amplitude pour M particules et ont obtenu :

$$\begin{aligned} A_{Loop}(1, 2, \dots, M) &\sim \int \prod_{I=1}^{M-1} [\vartheta(\nu_{I+1} - \nu_I) d\nu_I] \int dq q^{-1-Q(D-2)/12} \omega^{-1-Q(2-D)/24} \left[ -\frac{2\pi^2}{\ln q} \right]^M \\ &\times [f(q^2)]^{(2-D)Q} \prod_{I < J} [\psi(c_{IJ}, \omega)]^{k_I k_J} \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec  $\ln q \ln \omega = 2\pi^2$

les propriétés des fonctions  $\vartheta$  (annexe F) nous permettent d'écrire la fonction de partition sous la forme

$$f(\omega) = \left[ -\frac{2\pi}{\ln \omega} \right] \omega^{1/24} q^{1/12} f(q^2) \quad (4.36)$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} A_{Loop}(1, 2, \dots, M) &\sim \int \prod_{I=1}^{M-1} [\vartheta(\nu_{I+1} - \nu_I) d\nu_I] \int dq q^{-1-Q(D-2)/12} \omega^{-1-Q(2-D)/24} \left[ -\frac{2\pi^2}{\ln q} \right]^M \\ &\quad \times [f(\omega)]^{(2-D)Q} \left[ -\frac{2\pi}{\ln \omega} \right]^{Q(D-2)/2} \omega^{Q(2-D)/24} q^{Q(D-2)/12} \prod_{I<J} [\psi(c_{IJ}, \omega)]^{k_I k_J} \\ &= \int \prod_{I=1}^{M-1} [\vartheta(\nu_{I+1} - \nu_I) d\nu_I] \int dq q^{-1} \omega^{-1} \left[ -\frac{2\pi^2}{\ln q} \right]^M \\ &\quad \times \left[ -\frac{2\pi}{\ln \omega} \right]^{Q(D-2)/2} [f(\omega)]^{(2-D)Q} \prod_{I<J} [\psi(c_{IJ}, \omega)]^{k_I k_J} \end{aligned} \quad (4.37)$$

mais [33]

$$\prod_{I=1}^M dx_I = \frac{1}{2\pi^2} \omega (-\ln \omega)^{M+1} \frac{dq}{q} \prod_{I=1}^{M-1} \vartheta(\nu_{I+1} - \nu_I) d\nu_I \quad (4.38)$$

alors

$$A_{Loop}(1, 2, \dots, M) \sim \int \prod_{I=1}^M dx_I \omega^{-2} [f(\omega)]^{(2-D)Q} \left[ -\frac{2\pi}{\ln \omega} \right]^{Q(D-2)/2+1} \prod_{I<J} [\psi(c_{IJ}, \omega)]^{k_I k_J} \quad (4.39)$$

d'un autre côté, dans le cas d'une théorie des cordes bosoniques, l'expression de l'amplitude est donnée par [33]

$$A_{Loop}(1, 2, \dots, M) \sim \int \prod_{I=1}^M dx_I \omega^{-2} [f(\omega)]^{2-D} \left[ -\frac{2\pi}{\ln \omega} \right]^{D/2} \prod_{I<J} [\psi(c_{IJ}, \omega)]^{k_I k_J} \quad (4.40)$$

l'analogie formelle entre (4.39) et (4.40) nous conduit à interpréter l'opération de paraquantification comme l'éclatement de l'espace physique à  $(D-2)$  dimensions au para-espace physique de Green de dimension  $Q(D-2)$ , ce qui se traduit par la substitution de  $(D-2) \rightarrow Q(D-2) \Rightarrow \frac{D}{2} \rightarrow \frac{Q(D-2)}{2} + 1$ .

Sur cette base, et dans le cas d'une théorie des paracordes hétérotiques, l'expression (4.26) nous permet d'écrire l'amplitude en fonction des dimensions  $D$  et  $D'$  et de l'ordre de la paraquantification  $Q$  de la façon suivante [35] :

$$A_{Loop} \sim \int \prod_{i=1}^4 d^2 z_i |\omega|^{-2} \left[ -\frac{4\pi}{\ln |\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} \times \prod_{1 \leq i \leq 4} [\chi(C_{JI}, \omega)]^{\frac{1}{2} k_i k_j} B(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) \quad (4.41)$$

où

$$B(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) = \bar{\omega}^{-1} f(\bar{\omega})^{-Q(D-2)} [\psi(\bar{C}_{JI}, \bar{\omega})]^{K_i K_j} L(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) \quad (4.42)$$

Maintenant, pour des considérations géométriques, l'amplitude est finie si et seulement si elle est invariante modulaire. Considérons alors la transformation modulaire

$$\tau = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \rightarrow \tau' = -\frac{1}{\tau} = -\frac{2\pi i}{\ln \omega'} \quad (4.43)$$

et le Jacobien suivant

$$\prod_{i=1}^4 d^2 z_i |\omega|^{-2} \sim d^2 \tau \prod_{i=1}^3 d^2 \nu_i \quad (4.44)$$

à partir de la transformation (4.43) on peut écrire

$$d^2 \tau \rightarrow \frac{1}{|\tau|^4} d^2 \tau \quad (4.45)$$

$$d^2 \nu_i \rightarrow \frac{1}{|\tau|^2} d^2 \nu_i \quad (4.46)$$

$$\ln |\omega| \rightarrow \frac{\ln |\omega|}{|\tau|^2} \quad (4.47)$$

et donc

$$\prod_{i=1}^4 d^2 z_i |\omega|^{-2} \left[ -\frac{4\pi}{\ln |\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} \rightarrow \frac{1}{|\tau|^4} d^2 \tau \frac{1}{|\tau|^6} \prod_{i=1}^3 d^2 \nu_i \left[ -\frac{4\pi}{\ln |\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} |\tau|^{2 \frac{Q(D'-2)+2}{2}} \quad (4.48)$$

Ce facteur est invariant si et seulement si

$$D' = 2 + \frac{8}{Q} \quad (4.49)$$

Remarquons aussi que puisque [32]

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} k_i k_j = 0 \quad (4.50)$$

alors

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} [\chi(C_{JI}, \omega)]^{\frac{1}{2} k_i k_j} = \chi(C_{JI}, \omega)^{\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} k_i k_j} = 1 \quad (4.51)$$

Une relation essentielle à l'invariance modulaire et qui exige la self-dualité du réseau  $\Lambda$  est celle qui donne la transformation de  $L(\bar{\omega}, \bar{z}_i, k_i)$ . En effet, en accord avec [32] on peut écrire

$$L(\bar{\omega}, \bar{z}_i, K_i) \rightarrow \left[ -\frac{2\pi}{\ln \bar{\omega}} \right]^{\frac{Q(D-D')}{2}} \sum_{P \in \Lambda} \exp \left[ \frac{2\pi^2}{\ln \bar{\omega}} \left( P - \sum_{i=1}^N \frac{\ln \bar{z}_i}{2\pi i} Q_i \right)^2 + \frac{1}{2 \ln \bar{\omega}} \left( \sum_{i=1}^N Q_i \ln \bar{z}_i \right)^2 \right] \quad (4.52)$$

De même, une autre transformation importante est celle de  $f(\omega)$ . En effet, on peut écrire

$$f(\omega) \rightarrow \left( \frac{i}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{1}{Q(D-2)}} \omega'^{-\frac{1}{Q(D-2)}} f(\omega') \quad (4.53)$$

Maintenant, si on considère ces facteurs ensemble et toujours en accord avec [32], on peut écrire

$$\begin{aligned} & \bar{\omega}^{-1} f(\bar{\omega})^{-Q(D-2)} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} [\psi(\bar{\nu}_{ji}, \tau)]^{K_i K_j} \\ & \rightarrow \bar{\omega}'^{-1} f(\bar{\omega}')^{-Q(D-2)} \bar{\tau}^{\frac{Q(D-2)}{2}} \times \prod_{1 \leq i < j \leq 4} \left[ \psi(\bar{\nu}'_{ij}, \tau') \bar{\tau} \exp \left( \frac{i\pi \bar{\nu}'_{ij}}{\bar{\tau}} \right) \right]^{K_i K_j} \\ & \quad \times L(\tau', \nu'_i) \bar{\tau}^{-\frac{Q(D-D')}{2}} \exp \left( -\frac{i\pi}{\bar{\tau}} \left( \sum_{i=1}^N Q_i \bar{\nu}_i \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

A priori, il y a deux facteurs qui violeraient l'invariance modulaire, à savoir le facteur  $\bar{\tau}$  et l'exponentielle contenant  $\bar{\tau}$ . En utilisant les identités suivantes [32]

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} \bar{\tau}^{K_i K_j} = \bar{\tau}^{-4} \quad (4.55)$$

et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \bar{\nu}_{ij}^2 K_i K_j = \left( \sum_{i=1}^N Q_i \bar{\nu}_i \right)^2 \quad (4.56)$$

On remarque que les deux facteurs en exponentielle s'annihilent et le facteur en  $\bar{\tau}$  donne

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \frac{Q(D-2)}{2} - 4 - \frac{Q(D'-D)}{2} = 1 \quad (4.57)$$

$$\iff D' = 2 + \frac{8}{Q} \quad (4.58)$$

qui est analogue à la condition des parasupercordes. Notons ici que dans le cas ordinaire  $(D, D') = (26, 10)$ , cette condition est vérifiée implicitement, seule la condition de self dualité du réseau est mise en évidence. Par contre, dans le cas paraquantique, en plus de la condition de self dualité, la condition  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$  vient conforter la théorie des parasupercordes.

Finalement l'amplitude (4.41) est invariante modulaire (donc finie) si et seulement si

$$\Lambda = \Lambda^* \quad \text{reseau self-dual} \quad (4.59)$$

$$D' = 2 + \frac{8}{Q} \quad (4.60)$$

les cordes hétérotiques étant des cordes fermées le réseau doit en plus être pair

En conclusion, on peut construire une théorie des cordes hétérotiques paraquantiques finie à 1 boucle dont le réseau des racines du groupe de jauge est self-dual. On peut avoir deux possibilités de l'ordre de la paraquantification  $Q$

$$Q = 2 \implies (D, D') = (14, 6) \quad (4.61)$$

$$Q = 4 \implies (D, D') = (8, 4) \quad (4.62)$$

$$Q = 8 \implies (D, D') = (5, 3) \quad (4.63)$$

en plus du cas

$$Q = 1 \implies (D, D') = (26, 10) \quad (4.64)$$

Ce résultat est très intéressant par le fait qu'il démontre qu'on ne peut avoir une théorie des

cordes hétérotique paraquantique finie à une boucle que si la dimension critique des modes droits vérifie la relation établie par [2-3] :  $D' = 2 + \frac{8}{Q}$ . D'un autre coté, par rapport au paramètre  $Q$ , cette équation donne une condition plus forte sur  $Q$  que celle donnée par la dimension critique des modes gauches  $D = 2 + \frac{24}{Q}$ , à savoir  $Q$  ne peut prendre que les valeurs 1, 2 et 4.

Maintenant, si en plus on exige que le réseau soit pair et puisque les réseaux self-duaux pairs ne peuvent exister que dans des dimensions

$$(D - D') = 8n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (4.65)$$

alors, en plus du cas ordinaire, seule la possibilité où

$$Q = 2 \implies (D, D') = (14, 6) \quad (4.66)$$

existe et où le réseau est celui des racines du groupes  $E_8$ .

## 4.4 Algèbre des générateurs supersymétriques

Le modèle des cordes hétérotiques considéré est du type parabosonique-parafermionique. On se propose de déterminer l'algèbre des générateurs supersymétriques. On vérifie alors que cette algèbre est bien analogue à celle du cas ordinaire.

Les générateurs supersymétriques sont définis comme suit :

$$Q^a = \frac{i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma^+ s_0)^a \right]_+ + i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\gamma_i s_{-n})^a \alpha_n^i]_+ \quad (4.67)$$

En utilisant les relations (4.8, 4.9), (4.12, 4.13), (4.20) et (4.22), avec les mêmes démarches que dans le cas  $D = 4$  ((3.24), (3.25) et annexe C) un calcul direct conduit à l'expression

$$\left[ Q^a, \overline{Q}^b \right]_+ = -2 (h\gamma_{\mu} p^{\mu})^{ab} \quad (4.68)$$

analogue à celle du cas ordinaire  $(D, D') = (26, 10)$ , et est en accord avec le résultat (b) (chap.3).

## 4.5 Condition de “Mass-Shell” et fonction de partition

### 4.5.1 Condition de “Mass-Shell”

Notre intérêt se porte donc sur le cas  $(D, D') = (14, 6)$ .

**Remarque** : Pour  $D' = 6$ , le spineur  $S$  est du type Weyl, pour  $Q = 2$  il doit vérifier  $S^3 = 0$

Le fait de compactifier nous permet de définir la masse par :

$$\frac{1}{4}M^2 = N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^8 (p^I)^2$$

les opérateurs de nombre  $N$  et  $\tilde{N}$  sont données par :

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left( \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + \frac{1}{2} \bar{s}_{-n}^{(\alpha)} \gamma^- s_n^{(\alpha)} \right)$$

$$\tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left( \tilde{\alpha}_{-n}^{i(\alpha)} \tilde{\alpha}_n^{i(\alpha)} + \tilde{\alpha}_{-n}^{I(\alpha)} \tilde{\alpha}_n^{I(\alpha)} \right)$$

Notons ici la présence d’une contrainte supplémentaire qui découle du fait que nous avons affaire à une corde fermée, par conséquent, la théorie devrait être indépendante du choix de l’origine du paramètre  $\sigma$ . Ceci est traduit par la relation[19-20] :

$$\tilde{N} + \frac{1}{2}p_L^2 - 1 = N \tag{4.69}$$

avec  $p_L^2 = \sum_{I=1}^8 (p^I)^2$

- $\tilde{N} + \frac{1}{2}p_L^2 - 1$  : représente l’opérateur de nombre de particule pour les modes gauches
- $N$  : représente l’opérateur de nombre de particule pour les modes droits → parasupercordes

### 4.5.2 Fonction de partition

Le réseau étant pair et self dual [20, 22, 23], le seul groupe qui nous permet de le représenter est le groupe  $E_8$  ( $g_{ii} \in 2\mathbb{Z}$  et  $\det g = 1$  avec  $g_{ij}$  la métrique de Cartan).

En effet, on peut voir que pour que le réseau soit pair, la diagonale de la métrique doit être

paire

$$\begin{aligned}
 p_L^2 &= p_L \cdot p_L = \sum_{ij} (p_L)_i g_{ij} (p_L)_j \\
 &= \sum_i (p_L)_i g_{ii} + 2 \sum_{i < j} (p_L)_i g_{ij} (p_L)_j
 \end{aligned}$$

Puisque  $p_L^2 \in 2Z$  il est clair que  $g_{ii} \in 2Z$

D'un autre côté, en utilisant la transformée de Fourier et les transformations T et S introduites dans [20-21], on peut voir que la self dualité conduit à  $\det g = 1$ . Le seul groupe qui vérifie ces conditions est le groupe  $E_8$  qui est défini par la métrique de Cartan

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs Poids

$$w = \begin{cases} (n_1, n_2, n_3, \dots, n_8) \\ (n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

avec  $\sum_{i=1}^8 n_i \in 2N$

Pour calculer la fonction de partition qui nous permet de déterminer les nombres des états dégénérés, le plus important est de voir la partie des 8 dimensions compactifiée qui est représentée par le groupe  $E_8$ .

La fonction de partition pour cette partie est définie par :

$$P_{E_8} = \sum_w e^{i\pi\tau|w|^2} = \sum_w q^{\frac{1}{2}|w|^2}$$

Insérons le facteur  $\frac{1}{2}(1 + e^{i\pi\sum_i n_i})$  ou  $\frac{1}{2}(1 + e^{i\pi\sum_i(n_i + \frac{1}{2})})$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{E_8} &= \sum_{n_i} \frac{1}{2} \left(1 + e^{i\pi\sum_i n_i}\right) e^{i\pi\tau n_i^2} + \sum_{n_i} \frac{1}{2} \left(1 + e^{i\pi\sum_i(n_i + \frac{1}{2})}\right) e^{i\pi\tau(n_i + \frac{1}{2})^2} \\ P_{E_8} &= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^8 \sum_{n_i} \left\{ e^{i\pi n_i} e^{i\pi\tau n_i^2} + e^{i\pi\tau n_i^2} + e^{i\pi(n_i + \frac{1}{2})} e^{i\pi\tau(n_i + \frac{1}{2})^2} + e^{i\pi\tau(n_i + \frac{1}{2})^2} \right\} \end{aligned}$$

Les propriétés des fonctions  $\vartheta$  (annexe G) nous permettent d'avoir une écriture plus compacte

En effet :

$$P_{E_8} = \frac{1}{2} (\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8)$$

en utilisant les séries d'Eisenstein [36], cette relation peut s'écrire :

$$E_4 = \frac{1}{2} (\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^3}{1 - q^3} \equiv 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \quad (4.70)$$

avec la fonction  $\sigma_\alpha(n)$  caractérisée par

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \quad (d \text{ diviseur de } n) \quad (4.71)$$

pour les modes gauches des paracordes fermés, l'opérateur nombre  $\tilde{N}$  nous conduit à décrire la fonction de partition comme suit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n d(n) x^n = \text{Tr} x^{\tilde{N}} \\ &= \text{Tr} x^{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q (\tilde{\alpha}_{-n}^{i(\alpha)} \tilde{\alpha}_n^{i(\alpha)} + \tilde{\alpha}_{-n}^{I(\alpha)} \tilde{\alpha}_n^{I(\alpha)})} \end{aligned}$$

(remarquons que  $\tilde{N} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\tilde{\alpha}_{-n}^i, \tilde{\alpha}_n^i]_+ + [\tilde{\alpha}_{-n}^I, \tilde{\alpha}_n^I]_+ - 2Q \right)$ )

Utilisons les relations (3.38) et (3.39), on peut écrire

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^n} \right)^{12} \quad (4.72)$$

(12 représente  $i + I = (D' - 2) + (D - D') = D - 2 = 12$ )

donc la fonction de partition pour les modes gauches s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_N d_L(N) x^N &= \frac{1}{x} \left( 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) x^n \right) \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{-12} \\ \frac{1}{x} &\rightarrow \text{représente le } (-1) \text{ dans (4.69)} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Pour les modes droits des parasupercordes fermées, on a déjà montré que

$$\begin{aligned} \sum_{N=-1}^{\infty} d_R(N) x^N &= 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+x^n+x^{2n}}{1-x^n} \right)^4 \\ &= 8 [1 + 8x + 44x^2 + 188x^3 + 694x^4 + 1640x^5 + 5688x^6 \\ &\quad + 12224x^7 + 33542x^8 + 71188x^9 + O(x^{10})] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Donc la fonction de partition totale est donnée par le produit de la fonction de partition des modes gauches par celle des modes droits.

Le développement en séries de (4.72) nous donne

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{-12} &= 1 + 12x + 90x^2 + 520x^3 + 2535x^4 + 10908x^5 + 42614x^6 \\ &\quad + 153960x^7 + 521235x^8 + 1669720x^9 + O(x^{10}) \end{aligned} \quad (4.75)$$

de même

$$\begin{aligned}
\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) x^n\right) &= 1 + 240 [x + (1 + 2^3) x^2 + (1 + 3^3) x^3 + (1 + 2^3 + 4^3) x^4 \\
&\quad + (1 + 5^3) x^5 + (1 + 2^3 + 3^3 + 6^3) x^6 + (1 + 7^3) x^7 \\
&\quad + (1 + 2^3 + 4^3 + 8^3) x^8 + (1 + 3^3 + 9^3) x^9 + O(x^{10})] \\
&= 1 + 240 [x + 9x^2 + 28x^3 + 73x^4 + 126x^5 + 252x^6 \\
&\quad + 344x^7 + 585x^8 + 763x^9 + O(x^{10})] \\
&= 1 + 240x + 2160x^2 + 6720x^3 + 17520x^4 + 30240x^5 + 60480x^6 \\
&\quad + 82560x^7 + 140400x^8 + 183120x^9 + O(x^{10}) \tag{4.76}
\end{aligned}$$

on peut finalement écrire (en utilisant le Mapple)

$$\begin{aligned}
\sum_N^{\infty} d_L(N) x^N &= 252 + 5130x + 54\,760x^2 + 419\,895x^3 + 2587\,788x^4 + 13\,630\,694x^5 \\
&\quad + 63\,618\,120x^6 + 269\,531\,955x^7 + 1054\,200\,280x^8 + \dots \tag{4.77}
\end{aligned}$$

## 4.6 Spectre

Pour les différents niveaux, les états physiques sont représentés comme suit :

### Niveau fondamental

Puisque nous avons deux secteurs différents (gauche et droit), l'espace de Fock se construit à partir du produit tensoriel des deux états suivants  $|0\rangle_L \times |i \text{ ou } a\rangle_R$ . à  $D = 6$ ,  $i, a = \overline{1, 4}$ .

L'écriture générale des états du niveau fondamental est donnée par

#### Secteur gauche

Pour les modes gauches, on dénombre les états :

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L &\rightarrow 4 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L &\rightarrow 8 \\
|p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 240
\end{aligned} \tag{4.78}$$

ce qui nous donne pour les "left"  $240 + 8 + 4 = 252$  (qui confirme le développement de la

fonction de partition).

Secteur droit

Pour les "right" on dénombre 8

Donc nous avons  $8 \times 252 = 2016$  états

Par analogie à la description donnée à l'état fondamental dans le cas ordinaire, au niveau fondamental, cette théorie décrit la (para)supergravité (PSG) et la (para)superYang-Mills (PSYM) à  $D = 6$  en associant les états construits aux particules (graviton, gravitino) pour la PSG et (photon, photino) pour la PSYM. En effet :

Pour ces états, on peut voir la théorie de la (Para)SuperGravité (PSG) et la théorie de la (para)SuperYang-Mills (PSYM) à  $D = 6$ .

– (Para)Supergravité : elle est donnée par  $|0\rangle_L \times |i \text{ ou } a\rangle_R$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |j\rangle_R + \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle_L \times |i\rangle_R &\longrightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + 4 = 10 \rightarrow \textit{graviton} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |j\rangle_R - \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle_L \times |i\rangle_R &\longrightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \rightarrow \textit{tenseur antisymétrique} \\ \tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle_L \times |a\rangle_R &\longrightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 16 \rightarrow \textit{gravitino} \end{aligned}$$

Donc la PSG donne  $10 + 6 + 16 = 32$  états

– (Para)SuperY-M : On définit le multiplet  $(A, \psi)$  comme suit ( $A$  vecteur,  $\psi$  son partenaire supersymétrique)

$$\left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L + \left| p^I; (p^I)^2 = 2 \right\rangle \right] \times |i \text{ ou } a\rangle_R$$

On peut donc établir la correspondance

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L + \left| p^I; (p^I)^2 = 2 \right\rangle \right] \times |i\rangle_R &\longrightarrow 248 \times 4 = 992 \text{ états} \longrightarrow (\textit{photon}) \\ \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle_L + \left| p^I; (p^I)^2 = 2 \right\rangle \right] \times |a\rangle_R &\longrightarrow 248 \times 4 = 992 \text{ états} \longrightarrow (\textit{photino}) \end{aligned}$$

Enfin, pour la PSYM nous avons  $992 \times 2 = 1984$  états.

Le total est  $1984 + 32 = 2106$  états.

**Le 1<sup>er</sup> niveau**

Pour les modes gauches, les états physiques sont :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 + \frac{8 \times 7}{2} = 36 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^I |0\rangle_L &\rightarrow 8 \\
|p^I; (p^I)^2 = 4\rangle &\rightarrow 2160 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times 240 = 1920 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^i |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 240 = 960 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^i |0\rangle_L &\rightarrow 4 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 = 32 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 + \frac{4 \times 3}{2} = 10
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Le nombre global est :  $36 + 8 + 2160 + 1920 + 960 + 4 + 32 + 10 = 5130$

Pour les modes droits on trouve 64

Le total est donné par  $64 \times 5130 = 328320$

**Le 2<sup>ème</sup> niveau excité**

Les états sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{-1}^I [\tilde{\alpha}_{-1}^J, \tilde{\alpha}_{-1}^K]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 + 8 \times 7 + \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 120 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-2}^J]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times 8 = 64 \\
\tilde{\alpha}_{-3}^I |0\rangle_L &\rightarrow 8 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I |p^I; (p^I)^2 = 4\rangle &\rightarrow 8 \times 2160 = 17280 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow \left(8 + \frac{8 \times 7}{2}\right) \times 240 = 8640 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^I |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times 240 = 1920 \\
\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{-1}^i [\tilde{\alpha}_{-1}^j, \tilde{\alpha}_{-1}^k]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 + 4 \times 3 + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = 20 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^j]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \\
\tilde{\alpha}_{-3}^i |0\rangle_L &\rightarrow 4 \\
\tilde{\alpha}_{-3}^i |p^I; (p^I)^2 = 4\rangle &\rightarrow 4 \times 2160 = 8640 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow \left(4 + \frac{4 \times 3}{2}\right) \times 240 = 2400 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^i |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 240 = 960 \\
\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{-1}^I [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times \left(4 + \frac{4 \times 3}{2}\right) = 80 \\
\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{-1}^i [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times \left(8 + \frac{8 \times 7}{2}\right) = 144 \\
|p^I; (p^I)^2 = 6\rangle &\rightarrow 6720 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I]_+ |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times 4 \times 240 = 7680 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^I]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 = 32 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-2}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times 4 = 32
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Le total des états pour les modes gauches est 54760

Ainsi que pour les supercordes nous avons 352 états

Nous obtenons pour le 2<sup>ème</sup> niveau :  $352 \times 54760 = 19\,275\,520$  états

**Le 3<sup>ème</sup> niveau excité**

De même, les états sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ [\tilde{\alpha}_{-1}^K, \tilde{\alpha}_{-1}^L]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 + \frac{3}{2} \times 8 \times 7 + \frac{3}{2} \times 8 \times 7 \times 6 + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} = 330 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-2}^I [\tilde{\alpha}_{-1}^J, \tilde{\alpha}_{-1}^K]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times \left(8 + \frac{8 \times 7}{2}\right) = 288 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-2}^I, \tilde{\alpha}_{-2}^J]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 + \frac{8 \times 7}{2} = 36 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-3}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times 8 = 64 \\
\tilde{\alpha}_{-4}^I |0\rangle_L &\rightarrow 8 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I |p^J; (p^J)^2 = 6\rangle &\rightarrow 8 \times 6720 = 53760 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^I |p^J; (p^J)^2 = 4\rangle &\rightarrow 8 \times 2160 = 17280 \\
\frac{1}{2} [\tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |p^J; (p^J)^2 = 4\rangle &\rightarrow \left(8 + \frac{8 \times 7}{2}\right) \times 2160 = 77760 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-1}^I [\tilde{\alpha}_{-1}^J, \tilde{\alpha}_{-1}^K]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow \left(8 + 8 \times 7 + \frac{8 \times 7 \times 6}{3!}\right) \times 240 = 28800 \\
|p^J; (p^J)^2 = 8\rangle &\rightarrow 17520 \\
\tilde{\alpha}_{-3}^I |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times 240 = 1920 \\
[\tilde{\alpha}_{-2}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times 8 \times 240 = 15360
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^k, \tilde{\alpha}_{-1}^l \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 + \frac{3}{2} \times 4 \times 3 + \frac{3}{2} \times 4 \times 3 \times 2 + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 35 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-2}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^j, \tilde{\alpha}_{-1}^k \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times \left( 4 + \frac{4 \times 3}{2} \right) = 40 \\
\left[ \tilde{\alpha}_{-2}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^j \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 + \frac{4 \times 3}{2} = 10 \\
\left[ \tilde{\alpha}_{-3}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \\
\tilde{\alpha}_{-4}^i |0\rangle_L &\rightarrow 4 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^i |p^I; (p^I)^2 = 6\rangle &\rightarrow 4 \times 6720 = 26880 \\
\tilde{\alpha}_{-2}^i |p^I; (p^I)^2 = 4\rangle &\rightarrow 4 \times 2160 = 8640 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ |p^I; (p^I)^2 = 4\rangle &\rightarrow \left( 4 + \frac{4 \times 3}{2} \right) \times 2160 = 21600 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-1}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^j, \tilde{\alpha}_{-1}^k \right]_+ |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow \left( 4 + 4 \times 3 + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} \right) \times 240 = 4800 \\
\tilde{\alpha}_{-3}^i |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 240 = 960 \\
\left[ \tilde{\alpha}_{-2}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ |p^I; (p^I)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 4 \times 240 = 3840 \\
\frac{1}{4} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow \left( 4 + \frac{4 \times 3}{2} \right) \left( 8 + \frac{8 \times 7}{2} \right) = 360 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-2}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times \left( 8 + \frac{8 \times 7}{2} \right) = 144 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-2}^I \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times \left( 4 + \frac{4 \times 3}{2} \right) = 80 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-1}^J \right]_+ |p^K; (p^K)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times \left( 8 + \frac{8 \times 7}{2} \right) \times 240 = 34560 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^j \right]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 8 \times \left( 4 + \frac{4 \times 3}{2} \right) \times 240 = 19200 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-2}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^I \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 = 32 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-3}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 = 32 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-3}^I \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 = 32 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I \right]_+ |p^J; (p^J)^2 = 4\rangle &\rightarrow 4 \times 8 \times 2160 = 69120 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-1}^i \left( \tilde{\alpha}_{-1}^I \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^J, \tilde{\alpha}_{-1}^K \right]_+ \right) |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times \left( 8 + 8 \times 7 + \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} \right) = 480 \\
\tilde{\alpha}_{-1}^I \left( \tilde{\alpha}_{-1}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^j, \tilde{\alpha}_{-1}^k \right]_+ \right) |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times \left( 4 + 4 \times 3 + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} \right) = 160 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-2}^i, \tilde{\alpha}_{-1}^I \right]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 8 \times 240 = 7680 \\
\frac{1}{2} \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^I \right]_+ |p^J; (p^J)^2 = 2\rangle &\rightarrow 4 \times 8^2 \times 240 = 7680 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-1}^I \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^i, \tilde{\alpha}_{-2}^j \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 8 \times 4 \times 4 = 128 \\
\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{-1}^i \left[ \tilde{\alpha}_{-1}^I, \tilde{\alpha}_{-2}^J \right]_+ |0\rangle_L &\rightarrow 4 \times 8 \times 8 = 256
\end{aligned}$$

Pour les modes gauches le nombre total d'états est : 419895

Tandis que pour les modes droits, qui représentent les parasupercordes à  $D = 6$ , le nombre d'états est comme on l'a déjà vu dans le chapitre précédent : 1504 *états*

Finalement le nombre d'états pour le 3<sup>ème</sup> niveau est :  $419895 \times 1504 = 631\,522\,080$  *états* !!

Nous remarquons que le spectre pour les paracordes hétérotiques est très riche par rapport à celui des parasupercordes.

## 4.7 Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré qu'en plus du cas ordinaire  $(D, D') = (26, 10)$ , les paracordes hétérotiques survivent uniquement pour  $(D, D') = (14, 6)$  et que nous avons une seule théorie des paracordes hétérotiques à  $D = 6$  qui est la théorie décrite par le groupe  $E_8$ , à la différence du cas ordinaire  $(D, D') = (26, 10)$  où il y a deux théories apparemment différentes  $E_8 \otimes E_8$  et  $SO(32)$ .

On a vérifié la consistance de cette théorie par le calcul de la "one-loop amplitude" en exigeant l'invariance modulaire, on a construit l'algèbre des générateurs supersymétriques et montré qu'elle est équivalente à celle d'un système SUSY ordinaire.

Enfin, on a étudié le spectre, et vérifié la consistance des états construits avec la fonction de partition totale développée.

# Conclusion

Ce travail a consisté à faire l'étude de l'extension des théories des supercordes et des cordes hétérotiques dans le formalisme de la paraquantification.

- Le premier résultat obtenu est, à la différence de la théorie quantique des supercordes qui est définie dans un espace-temps à  $D = 10$ , la survie, dans le cas des parasupercordes, des quatre dimensions d'espace-temps ( $D = 3, 4, 6, 10$ ) pour lesquelles sont formulées les supercordes classiques, en particulier pour la dimension  $D = 4$  de l'espace de Minkowski, malgré les difficultés associées à l'ordre  $Q = 4$  (comme la complexité des relations de commutation et l'introduction du para-espace de Green).

En effet, pour cette étude, deux points ont été développés :

1. L'étude du spectre : La généralisation de la notion des états créés dans l'espace de Fock a permis de démontrer la consistance de la fonction de partition qui a été construite pour les différentes valeurs de  $D$ .
2. L'étude de l'algèbre des générateurs supersymétriques : Deux types de systèmes supersymétriques ont été considérés, les résultats obtenus s'accordent avec ce qui a été établi dans la littérature, à savoir :

Un système supersymétrique du type "parabose-parafermi" est équivalent à un système SUSY ordinaire, alors qu'un système SUSY du type "bose-parafermi" est équivalent à un système paraSUSY. Ceci se traduit par le fait que le boson est un paraboson particulier.

- le second résultat est que, en plus du cas ordinaire  $(26, 10)$  pour les dimensions d'espace-temps dans lesquelles sont formulées les cordes hétérotiques, seule survit, le cas  $(14, 6)$  pour la théorie des paracordes hétérotiques qui est construite à partir du seul groupe possible  $E_8$ . Pour cela, plusieurs points ont été développés :

L'invariance modulaire : qui a permis d'affirmer que le réseau doit être self-dual, la corde fermée exige en plus que ce réseau doit être pair, d'où l'unique groupe  $E_8$ .

La consistance entre le spectre et le développement de la fonction de partition.

La consistance de l'algèbre des générateurs basée sur des relations bilinéaires.

Comme perspectives, il serait intéressant de voir l'impact de ces résultats sur la M-theory. En effet, la particularité de cette étude est l'unicité de la théorie des cordes hétérotiques à

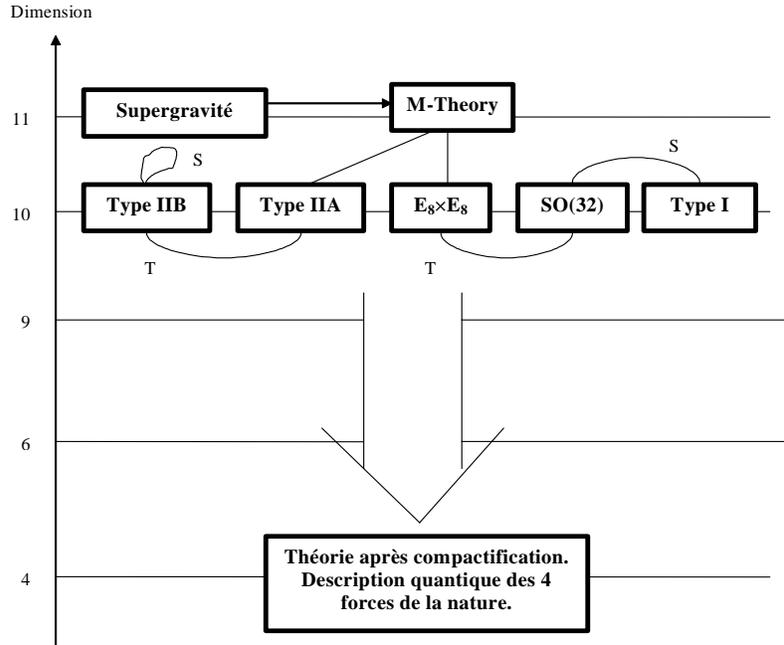


FIG. 4-1 – Théorie d’unification dans le cadre quantique

$D = 6 \rightarrow$  hétérotiques  $E_8$ , alors que dans le cas ordinaire nous avons deux possibilités  $E_8 \otimes E_8$  et  $SO(32)$ .

Le handicap de la théorie des cordes est le problème de l’unicité. En effet cinq types de théories des cordes à  $D = 10$  sont possibles types I, IIA, IIB,  $SO(32)$  et  $E_8 \otimes E_8$ . La M-theory consiste à résoudre le problème de l’unicité en proposant une théorie plus générale qui englobe ces 5 théories. Dans le même esprit de Kaluza-Klein, l’opération d’unification a eu pour conséquence l’augmentation de la dimension de l’espace-temps qui est passée à  $D = 11$  et qui correspond justement à celle de la supergravité. Ceci est schématisé dans la Fig.4-1 (T et S représentent les dualités).

Dans le cas des paracordes à  $D = 6$ , on a affaire à 4 types de théories des paracordes : types I, IIA, IIB, et  $E_8$ . Dans le même esprit, les questions suivantes s’imposent : Quelle serait alors la théorie qui pourrait les unifier ?, la dimension de l’espace-temps pour laquelle elle sera formulée ?, peut-on alors parler de la parasupergravité ? et quel sera l’avantage de l’opération de compactification ? (Fig.4-2)

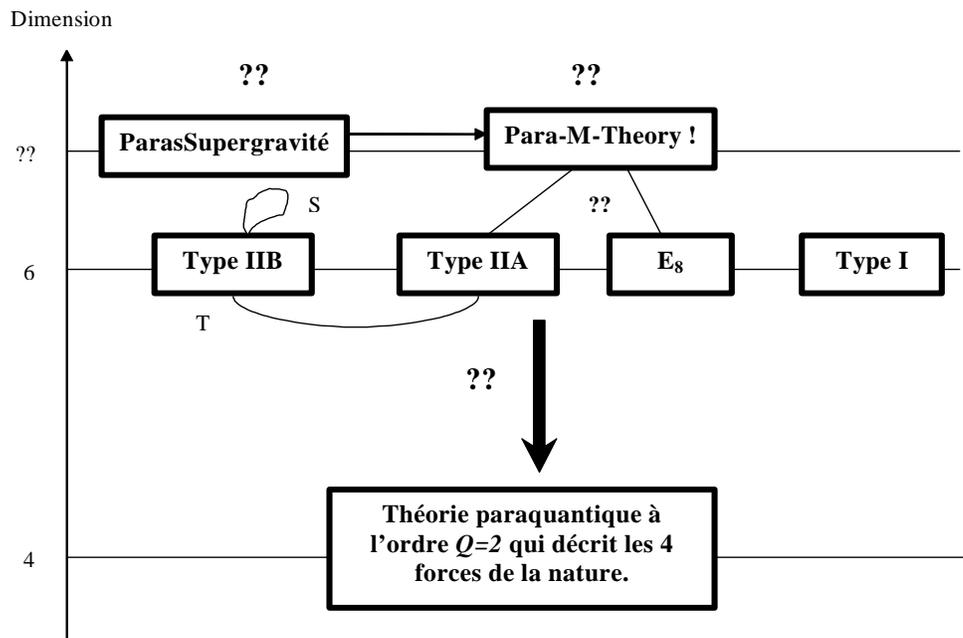


FIG. 4-2 – Modèle d'unification suggéré pour l'ordre de la paraquantification  $Q = 2$

# Annexe A

## Propriétés

1. Dans la jauge transverse les matrices  $\gamma$  vérifient

$$\begin{aligned}\gamma^i &= \gamma_i \quad i = \overline{1, D-2} \\ \gamma^\pm &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \pm \gamma^{D-1}) \\ &= \frac{1}{2} (-\gamma_0 \pm \gamma_{D-1}) = -\gamma_\mp\end{aligned}$$

$$\{\gamma^+, \gamma^-\} = 2$$

$$(\gamma^\pm)^T = -\gamma_\mp$$

$$\gamma^+ \gamma^- = \sqrt{2} \gamma^0 \gamma^- = \sqrt{2} \gamma^+ \gamma^0$$

$$\gamma^- \gamma^+ = \sqrt{2} \gamma^0 \gamma^+ = \sqrt{2} \gamma^- \gamma^0$$

2. Les matrices  $\gamma^i$  dans la jauge transverse vérifient les relations suivantes

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{aa}^i \\ \gamma_{bb}^i & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\gamma_{aa}^i = (\gamma_{aa}^i)^T$$

$$i = \overline{1, D-2}$$

Pour l'algèbre de Clifford

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$$

1. Elle est satisfaite si :

$$\gamma_{aa}^i \gamma_{ab}^j + \gamma_{aa}^j \gamma_{ab}^i = 2\delta^{ij} \delta_{ab}$$

$$i, j = \overline{1, D-2}$$

3 Les matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac verifient l'algebre de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad \mu, \nu = \overline{1, D-1}$$

avec  $\eta^{\mu\nu} = (-, +, +, \dots, +)$

Remarquons que pour les matrices  $\gamma^{D+1}$

$$D \text{ paire} \longrightarrow \gamma^{D+1} \sim \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{D-1}$$

$$D \text{ impaire} \longrightarrow \gamma^{D+1} = 1 \text{ et } \gamma^{D-1} \sim \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{D-2}$$

on peut classifier ces matrices par rapport au type de spineurs et la dimension de l'espace-temps  $D$  selon le tableau suivant :

D	Spineur	Matrices de Dirac
3	Majorana	$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
4	M ou W	$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Weyl	$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_2 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \Gamma^{4,5} = \gamma_5 \otimes i\sigma^{1,2} \quad \Gamma^7 = \gamma_5 \otimes \sigma^3$
10	M -W	$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_8 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \Gamma^{ij} = \gamma_5 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \rho^{ij} \\ \rho_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad i, j = 0, 1, 2, 3$

avec les matrices  $\sigma^i$  sont les matrices de Pauli et les matrices  $\Gamma^{ij}$  sont antisymétriques pour

i et j .

aussi ces matrices remplacent les matrices  $\Gamma^4 \Gamma^5 \dots \Gamma^9$

avec  $(\rho^{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}$  et  $(\rho_{ij})_{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijmn}(\rho^{mn})_{kl} = \epsilon_{ijkl}$

## Annexe B

# Cas Paraboson-Parafermion pour

$$D = 6$$

### B.1 Calcul de $[Q^a, Q^b]_+$

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b]_+ &= \left[ \frac{1}{2} [(2p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a]_+, \frac{1}{2} [(2p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ \\ &= \frac{1}{2} \left[ [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a]_+, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ \\ &= \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a + s_0^a (p^+)^{\frac{1}{2}}, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ \\ &= \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ + \left[ s_0^a (p^+)^{\frac{1}{2}}, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ \end{aligned}$$

à partir des relations :

$$[AB, C]_+ = A[B, C]_+ - [A, C]B \text{ ou } A[B, C] + [A, C]_+ B$$

$$[A, BC]_+ = [A, B]_+ C - B[A, C] \text{ ou } [A, B]C + B[A, C]_+$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}
[Q^a, Q^b]_+ &= \frac{1}{2} (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ s_0^a, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ - \frac{1}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right] s_0^a \\
&\quad + \frac{1}{2} s_0^a \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right] + \frac{1}{2} \left[ s_0^a, [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^b]_+ \right]_+ (p^+)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ 2 (p^+)^{\frac{1}{2}} \delta^{ab} \right] + \frac{1}{2} \left[ 2 (p^+)^{\frac{1}{2}} \delta^{ab} \right] (p^+)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2p^+ \delta^{ab}
\end{aligned}$$

finalement :

$$[Q^a, Q^b]_+ = 2p^+ \delta^{ab} \quad (\text{B.1})$$

## B.2 Calcul de $[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+$

$$\begin{aligned}
[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+ &= \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{aa}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{bb}^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+
\end{aligned}$$

calculons d'abords

$$\begin{aligned}
B_{nm} &= \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&\quad - \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}}, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right] [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+ \\
&= (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right] [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \\
&\quad + (p^+)^{-1} \left[ [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&\quad - \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}}, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \right] [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+ \\
&\quad - (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}}, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right] [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+ \\
&= (p^+)^{-1} \left[ [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \alpha_n^i]_+, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= (p^+)^{-1} \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i + \alpha_n^i \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= (p^+)^{-1} \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ + (p^+)^{-1} \left[ \alpha_n^i \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= (p^+)^{-1} \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \alpha_n^i, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ + (p^+)^{-1} \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \alpha_n^i \\
&\quad + (p^+)^{-1} \alpha_n^i \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ - (p^+)^{-1} \left[ \alpha_n^i, [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
B_{nm} &= (p^+)^{-1} \gamma_{\dot{a}a}^i \gamma_{\dot{b}b}^j \{ s_{-n}^a [\alpha_n^i, [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+] + [s_{-n}^a, [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+]_+ \alpha_n^i \\
&\quad + \alpha_n^i [s_{-n}^a, [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+]_+ - [\alpha_n^i, [s_{-m}^b, \alpha_m^j]_+] s_{-n}^a \} \\
&= (p^+)^{-1} \gamma_{\dot{a}a}^i \gamma_{\dot{b}b}^j s_{-n}^a (2\delta^{ij} n \delta_{n+m} s_{-m}^b) + (p^+)^{-1} \gamma_{\dot{a}a}^i \gamma_{\dot{b}b}^j (2\delta^{ab} \delta_{n+m} \alpha_m^j) \alpha_n^i \\
&\quad + (p^+)^{-1} \gamma_{\dot{a}a}^i \gamma_{\dot{b}b}^j \alpha_n^i (2\delta^{ab} \delta_{n+m} \alpha_m^j) - (p^+)^{-1} \gamma_{\dot{a}a}^i \gamma_{\dot{b}b}^j (2\delta^{ij} n \delta_{n+m} s_{-m}^b) s_{-n}^a \\
[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+ &= \frac{1}{4} \sum_{nm} B_{nm} \\
&= \frac{1}{2} \delta^{\dot{a}\dot{b}} (p^+)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) \\
&= \delta^{\dot{a}\dot{b}} \frac{1}{p^+} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) + (\alpha_0^i)^2 \right\} \\
&= \delta^{\dot{a}\dot{b}} \frac{1}{p^+} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) + (p^i)^2 \right\} \\
&= 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} \frac{1}{p^+} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \right) + \frac{1}{2} (p^i)^2 \right\} \\
&= 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} H
\end{aligned}$$

finalement

$$[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}]_+ = 2\delta^{\dot{a}\dot{b}} H \quad (\text{B.2})$$

### B.3 Calcul de $[Q^a, Q^{\dot{a}}]_+$

$$\begin{aligned}
[Q^a, Q^{\dot{a}}]_+ &= \left[ \frac{1}{2} [(2p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a]_+, (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\dot{a}b}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [s_{-n}^b, \alpha_n^i]_+ \right]_+ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ [(p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a]_+, (p^+)^{-\frac{1}{2}} [\gamma_{\dot{a}b}^i s_{-n}^b, \alpha_n^i]_+ \right]_+
\end{aligned}$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
C_n &= \left[ \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a \right]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\
&= \left[ \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a \right]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \right] \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ + (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, s_0^a \right]_+, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\
&= (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ + (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ s_0^a (p^+)^{\frac{1}{2}}, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\
&= - (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right] s_0^a + (p^+)^{\frac{-1}{2}} (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\
&\quad + (p^+)^{\frac{-1}{2}} s_0^a \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right] + (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right] (p^+)^{\frac{1}{2}} \\
&= (p^+)^{-1} \gamma_{ba}^i \left[ s_0^a, \left[ s_{-n}^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\
&= 4\delta^{ab} \delta_{n,0} \alpha_n^i \\
\left[ Q^a, Q^{\dot{a}} \right]_+ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \\
&= \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} \alpha_n^i = \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i \alpha_0^i \\
&= \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i
\end{aligned}$$

finalement

$$\left[ Q^a, Q^{\dot{a}} \right]_+ = \sqrt{2} \gamma_{a\dot{a}}^i p^i \tag{B.3}$$

## Annexe C

# Cas des Paraboson-Parafermion pour $D = 4$

Posons

$$Q_1^a = \frac{i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma_+ s_0)^a \right]_+$$

$$Q_2^a = i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+$$

### C.1 Calcul de $[Q_1^a, \overline{Q}_1^b]_+$

$$\begin{aligned} [Q_1^a, \overline{Q}_1^b]_+ &= \left[ \frac{i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma_+ s_0)^a \right]_+, \frac{-i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\overline{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right]_+ \\ &= \frac{1}{4} (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ (\gamma_+ s_0)^a, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\overline{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right]_+ \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\overline{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right] (\gamma_+ s_0)^a \\ &\quad + \frac{1}{4} (\gamma_+ s_0)^a \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\overline{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ (\gamma_+ s_0)^a, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\overline{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right] (p^+)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Utilisons les propriétés des matrices  $\gamma$  (annexe A) et les relations trilineaires suivantes qui

sont équivalentes aux (3.4) et (3.8)

$$\left[ s_n^a, \left[ \bar{s}_m^b, \bar{s}_l^c \right]_- \right] = 2 \left[ (\gamma^+ h)^{ab} \delta_{n+m} \bar{s}_l^c - (\gamma^+ h)^{ac} \delta_{n+l} \bar{s}_m^b \right] \quad (\text{C.1})$$

$$\left[ s_n^a, \left[ \bar{s}_m^b, A \right]_+ \right]_+ = 2 (\gamma^+ h)^{ab} \delta_{n+m} A \quad (\text{C.2})$$

avec  $A = x^i, p^i, \alpha_n^i$

avec nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[ Q_1^a, \bar{Q}_1^b \right]_+ &= \frac{1}{4} (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ -4 (h\gamma_+)^{ab} (p^+)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{4} \left[ -4 (h\gamma_+)^{ab} (p^+)^{\frac{1}{2}} (p^+)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \left[ Q_1^a, \bar{Q}_1^b \right]_+ &= -2 (h\gamma_+)^{ab} p^+ = 2 (h\gamma^-)^{ab} p^+ \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

## C.2 Calcul de $\left[ Q_1^a, \bar{Q}_2^b \right]_+ + \left[ Q_2^a, \bar{Q}_1^b \right]_+$

$$\begin{aligned} \left[ Q_1^a, \bar{Q}_2^b \right]_+ + \left[ Q_2^a, \bar{Q}_1^b \right]_+ &= \left[ \frac{i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma_+ s_0)^a \right]_+, \frac{-i}{2} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (\bar{s}_{-n} \gamma_i)^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\ &\quad + \left[ \frac{i}{2} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (\gamma_j s_{-m})^a, \alpha_m^j \right]_+, \frac{-i}{2} \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\bar{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right]_+ \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\gamma_+ s_0)^a \right]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (\bar{s}_{-n} \gamma_i)^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (\gamma_j s_{-m})^a, \alpha_m^j \right]_+, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}}, (\bar{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ \right]_+ \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ (\gamma_+ s_0)^a, \left[ (\bar{s}_{-n} \gamma_i)^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ + (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (\gamma_+ s_0)^a, \left[ (\bar{s}_{-n} \gamma_i)^b, \alpha_n^i \right]_+ \right]_+ (p^+)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left[ (\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i \right]_+, (\bar{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ + (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i \right]_+, (\bar{s}_0 \gamma_+)^b \right]_+ (p^+)^{\frac{1}{2}} \left. \right\} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} -8 (h\gamma_i)^{ab} \delta_{n,0} \alpha_n^i = -2 (h\gamma_i)^{ab} \alpha_0^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[Q_1^a, \overline{Q}_2^b\right]_+ + \left[Q_2^a, \overline{Q}_1^b\right]_+ &= -2 (h\gamma_i)^{ab} p^i \\
&= -2 (h\gamma^i)^{ab} p^i
\end{aligned} \tag{C.4}$$

### C.3 Calcul de $\left[Q_2^a, \overline{Q}_2^b\right]_+$

$$\begin{aligned}
\left[Q_2^a, \overline{Q}_2^b\right]_+ &= \left[ \frac{i}{2} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+, \frac{-i}{2} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= \frac{1}{4} \sum_{nm} \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} [(\overline{s}_{-n} \gamma_i)^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= \frac{1}{4} \sum_{nm} \left\{ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \right]_- [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right. \\
&\quad + (p^+)^{-1} \left[ [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+, [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&\quad - \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}}, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \right] [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ [(\overline{s}_{-n} \gamma_i)^a, \alpha_n^i]_+ \\
&\quad \left. - (p^+)^{\frac{-1}{2}} \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}}, [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right] [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+ \right\} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{nm} (p^+)^{-1} \left[ [(\gamma_i s_{-n})^a, \alpha_n^i]_+, [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&= \frac{1}{4} \sum_{nm} \left\{ (p^+)^{-1} (\gamma_i s_{-n})^a \left[ 2n (\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b \delta_{n+m} \delta^{ij} \right] \right. \\
&\quad + (p^+)^{-1} \left[ (\gamma_i s_{-n})^a, [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \alpha_n^i + (p^+)^{-1} \alpha_n^i \left[ (\gamma_i s_{-n})^a, [(\overline{s}_{-m} \gamma_j)^b, \alpha_m^j]_+ \right]_+ \\
&\quad \left. - (p^+)^{-1} \left[ 2n (\gamma_j s_{-m})^b \delta_{n+m} \delta^{ij} \right] (\gamma_i s_{-n})^a \right\}
\end{aligned}$$

Utilisons la décomposition de Green , le rearrangement de Fierz et les relations bilinéaires (3.12)-(3.16) avec les relations suivantes qui sont équivalentes aux suivantes équivalentes à (3.15)

$$\left[ s_n^{a(\alpha)}, \overline{s}_m^{b(\alpha)} \right]_+ = (h\gamma^+)^{ab} \delta_{n+m,0} \tag{C.5}$$

$$\left[ s_n^{a(\alpha)}, \overline{s}_m^{b(\beta)} \right] = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
\left[Q_2^a, \overline{Q}_2^b\right]_+ &= (p^+)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q n \delta_{n+m,0} \left\{ \left[ \gamma_i s_{-n}^{(\alpha)} \right]^a \left[ \overline{s}_{-m}^{(\alpha)} \gamma_i \right]^b - (h\gamma_-)^{ab} \right\} \\
&\quad - (p^+)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q (h\gamma_-)^{ab} \left[ \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + n \right] \\
&= (p^+)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q n \delta_{n+m,0} \left\{ \frac{1}{2} n (h\gamma_-)^{ab} : \overline{s}_{-n}^{(\alpha)} \gamma^+ s_n^{(\alpha)} : - (h\gamma_-)^{ab} : \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} : \right\} \\
&= -2 (p^+)^{-1} (h\gamma_-)^{ab} \alpha_0^-
\end{aligned}$$

où en termes de composantes de Green,  $\alpha_0^-$  s'écrit :

$$\alpha_0^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left( \frac{1}{2} : \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} : - \frac{1}{4} : \overline{s}_{-n}^{(\alpha)} \gamma^+ s_n^{(\alpha)} : \right)$$

remarquons maintenant qu'à partir de la condition de la couche de masse et des équations d'évolution

$$[A, H] = i \frac{dA}{d\tau}$$

on peut montrer que

$$\alpha_0^- = H = \frac{1}{2} p_i^2 + N = p^+ p^- \tag{C.7}$$

qui est la même expression dans la mécanique quantique ordinaire sauf, que  $N$  et  $H$  on une forme symétrisées

on obtient alors

$$\left[Q_2^a, \overline{Q}_2^b\right]_+ = -2 (h\gamma_-)^{ab} p^- = 2 (h\gamma^+)^{ab} p^- \tag{C.8}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\left[Q^a, \overline{Q}^b\right]_+ &= 2(h\gamma^-)^{ab} p^+ - 2(h\gamma^i)^{ab} p^i + 2(h\gamma^+)^{ab} p^- \\
&= -2\left[h(-\gamma^- p^+ - \gamma^+ p^- + \gamma^i p^i)^{ab}\right] \\
&= -2(h\gamma_\mu p^\mu)^{ab}
\end{aligned}$$

donc

$$\left[Q^a, \overline{Q}^b\right]_+ = -2(h\gamma_\mu p^\mu)^{ab} \tag{C.9}$$

## Annexe D

# Calcul de quelques masses

Pour cette annexe, on se propose de vérifier qu'effectivement la masse ne dépend pas de la dimension de l'espace-temps

dans le cadre paraquantique, la masse est définie par la relation (3.29)  
calculons la, alors pour l'état  $\alpha_{-1}^j |0\rangle$ , ( $|0\rangle$  représente  $|a\rangle$  ou  $|i\rangle$ )

La masse pour cet état est

$$M^2 \alpha_{-1}^j |0\rangle = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ \alpha_{-1}^j |0\rangle + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle \right)$$

le premier terme donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ \alpha_{-1}^j |0\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_{-1}^j [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ - 2(-\delta^{ji}\delta_{-1-n}\alpha_n^i - \delta^{ji}\delta_{-1+n}\alpha_{-n}^i) \right] |0\rangle \\
&= \alpha_{-1}^j \left( \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + 2\delta^{ji}\alpha_{-1}^i \right) |0\rangle \\
&= \alpha_{-1}^j \left( \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ + 2 \right) |0\rangle \\
&= \alpha_{-1}^j \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q [\alpha_{-n}^{i(\alpha)}, \alpha_n^{i(\alpha)}]_+ + 2 \right) |0\rangle \\
&= \alpha_{-1}^j \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q 2\alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + n + 2 \right) |0\rangle \\
&= \alpha_{-1}^j \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n + 2 \right) |0\rangle
\end{aligned}$$

Le second donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle$$

Utilisons la décomposition de Green

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q n [s_{-n}^{a(\alpha)}, s_n^{a(\alpha)}]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\alpha=1}^Q (2s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} - 1) \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= -Q \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_{-1}^j |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle
\end{aligned}$$

et calculons le terme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \sum_{\beta=1}^Q \alpha_{-1}^{j(\beta)} |0\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \left( \alpha_{-1}^{j(\alpha)} + \sum_{\beta \neq \alpha}^Q \alpha_{-1}^{j(\beta)} \right) |0\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \alpha_{-1}^{j(\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{\beta \neq \alpha}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \alpha_{-1}^{j(\beta)} \right] |0\rangle
\end{aligned}$$

à partir des relations (3.16), on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \sum_{\alpha=1}^Q s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-1}^{j(\alpha)} [s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)}] + \sum_{\alpha=1}^Q \sum_{\beta \neq \alpha}^Q \alpha_{-1}^{j(\beta)} s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} \right] |0\rangle = 0$$

finalemt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle = -Q \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_{-1}^j |0\rangle$$

soit, enfin :

$$\alpha' M^2 \alpha_{-1}^j |0\rangle = \alpha_{-1}^j |0\rangle$$

C'est donc la même masse que dans le cas ordinaire (résultat attendu).

De la même façons, on montre que :

$$\alpha' M^2 s_{-1}^b |0\rangle = s_{-1}^b |0\rangle$$

Une autre question importante, c'est de montrer que les deux états  $s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle$  et  $\alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle$  ont la même masse dans le cadre paraquantique, (étant donné qu'en MQ, ils représentent le même état).

$$M^2 s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left( [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle + n [s_{-n}^a, s_n^a]_- s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \right)$$

le premier terme donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left( 2\alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} + n \right) s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^Q s_{-1}^{b(\beta)} \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \left( s_{-1}^{b(\alpha)} + \sum_{\beta \neq \alpha}^Q s_{-1}^{b(\beta)} \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&\quad + s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right)
\end{aligned}$$

Utilisons les relations de commutation et d'anticommutation (3.14-3.16), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{-n}^i, \alpha_n^i]_+ s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle &= s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right) + 2s_{-1}^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right) + 2s_{-1}^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \sum_{\beta=1}^Q \alpha_{-1}^{j(\beta)} |0\rangle \\
&= s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right) + 2s_{-1}^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \left( \alpha_{-n}^{i(\alpha)} \alpha_n^{i(\alpha)} \right) \alpha_{-1}^{j(\alpha)} |0\rangle \\
&= s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n \right) + 2s_{-1}^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^Q \alpha_{-n}^{i(\alpha)} n \delta^{ij} \delta_{n-1} |0\rangle \\
&= \left( Q \sum_{n=1}^{\infty} n + 2 \right) s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n [s_{-n}^a, s_n^a]_- s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ s_{-1}^b [s_{-n}^a, s_n^a]_- - 2 \left( \delta^{ba} \delta_{-1-n} s_{-n}^a - \delta^{ba} \delta_{-1+n} s_n^a \right) \right] \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n s_{-1}^b [s_{-n}^a, s_n^a]_- \alpha_{-1}^j |0\rangle + 2s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n s_{-1}^b \sum_{\alpha=1}^Q \left( 2s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)} - 1 \right) \alpha_{-1}^j |0\rangle + 2s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle \\
&= \left( -Q \sum_{n=1}^{\infty} n |0\rangle + 2 \right) s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle
\end{aligned}$$

Finalement

$$\alpha' M^2 s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle = 2s_{-1}^b \alpha_{-1}^j |0\rangle$$

Qui representent la même masse que dans le cas ordinaire

De la même façon on montre que

$$\alpha' M^2 \alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle = 2\alpha_{-1}^j s_{-1}^b |0\rangle$$

Donc les deux ont la même masse malgré qu'ils ne representent pas le même état dans le cadre paraquantique (  $[\alpha_n^i, s_m^a]_- \neq 0$  ).Ceci nous suggère d'écrire l'état  $\alpha_{-1}^j s_{-1}^b$  qui est décrit en MQ par l'état  $\frac{1}{2} [\alpha_{-1}^j, s_{-1}^b]_+$ .

D'après ce raisonnement on doit donc symétriser (antisymétriser) tous les états, c'est un résultat très logique et qui est en accord avec le principe de correspondance de la paraquantification.

## Annexe E

# Cas Boson-Parafermion pour

$$D = 6$$

### E.1 Calcul de $\left[Q^a, [Q^b, Q^c]_-\right]$

$$\begin{aligned} \left[Q^a, [Q^b, Q^c]_-\right] &= \left[(2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, \left[(2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^b, (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^c\right]_-\right] \\ &= (2p^+)^{\frac{1}{2}} 2 \left[\delta^{ab} (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^c - \delta^{ac} (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^b\right] \\ &= (2p^+)^{\frac{3}{2}} \left[s_0^a, \left[s_0^b, \frac{1}{2} s_0^c\right]_-\right] \\ &= (2p^+)^{\frac{3}{2}} 2 \left(\delta^{ab} s_0^c - \delta s_0^b\right) \\ &= (2p^+) 2 \left[\delta (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^c - \delta^{ac} (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^b\right] \\ &= 2 (2p^+) \left[\delta^{ab} Q^c - \delta^{ac} Q^b\right] \end{aligned}$$

finalement :

$$\left[Q^a, [Q^b, Q^c]_-\right] = 2 (2p^+) \left[\delta^{ab} Q^c - \delta^{ac} Q^b\right] \quad (\text{E.1})$$

## E.2 Calcul de $\left[Q^a, \left[Q^b, Q^a\right]_-\right]$

$$\begin{aligned}
\left[Q^a, \left[Q^b, Q^a\right]_-\right] &= \left[ (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, \left[ (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^b, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{ac}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^c \alpha_n^i \right]_-\right] \\
&= 2 (p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^i \left[ s_0^a, \left[ s_0^b, \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \right]_-\right] \\
\text{posons } A_n &= \left[ s_0^a, \left[ s_0^b, \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \right]_-\right] \alpha_n^i \\
&= \left( 2\delta^{ab} \gamma_{ac}^i s_{-n}^c - 2\delta^{ac} \delta_{n,0} \gamma_{ca}^i s_0^b \right) \alpha_n^i \\
\left[Q^a, \left[Q^b, Q^a\right]_-\right] &= 2 (p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \\
&= 4 (p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( 2\delta^{ab} \gamma_{ac}^i s_{-n}^c - 2\delta^{ac} \delta_{n,0} \gamma_{ca}^i s_0^b \right) \alpha_n^i \\
&= 2 \left[ 2p^+ \delta^{ab} \gamma_{ac}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^c \alpha_n^i - \sqrt{2} (2p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{ca}^i s_0^b \alpha_n^i \right] \\
&= 2 \left( 2p^+ \delta^{ab} Q^a - \sqrt{2} \gamma_{aa}^i p^i Q^b \right)
\end{aligned}$$

finalement

$$\left[Q^a, \left[Q^b, Q^a\right]_-\right] = 2 \left( 2p^+ \delta^{ab} Q^a - \sqrt{2} \gamma_{aa}^i p^i Q^b \right) \tag{E.2}$$

## E.3 Calcul du $\left[Q^a, \left[Q^a, Q^b\right]_-\right]$

$$\begin{aligned}
\left[Q^a, \left[Q^a, Q^b\right]_-\right] &= \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{ac}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^c \alpha_n^i, \left[ (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^b \right] \right] \\
&= 2 (p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^i \left[ \gamma_{ac}^i s_{-n}^c, \left[ s_0^a, s_0^b \right] \right]
\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned}
B_n &= \left[ \gamma_{\dot{a}c}^i s_{-n}^c, [s_0^a, s_0^b] \right] \alpha_n^i \\
&= \left( 2\gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \delta^{ca} \delta_{n,0} s_0^b - 2\gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \delta^{cb} \delta_{n,0} s_0^a \right) \alpha_n^i \\
&= 2\gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \left( \delta^{ca} s_0^b - \delta^{cb} s_0^a \right) \delta_{n,0} \alpha_n^i
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^a, Q^b]_- \right] &= 2(p^+)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \\
&= 4(p^+)^{\frac{1}{2}} \gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \left( \delta^{ca} s_0^b - \delta^{cb} s_0^a \right) \alpha_0^i \\
&= 2\sqrt{2} (2p^+)^{\frac{1}{2}} \left( \gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \delta^{ca} s_0^b p^i - \gamma_{\dot{c}\dot{a}}^i \delta^{cb} s_0^a p^i \right)
\end{aligned}$$

finalement

$$\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^a, Q^b]_- \right] = 2\sqrt{2} \left( \gamma_{\dot{a}\dot{a}}^i Q^b - \gamma_{\dot{b}\dot{a}}^i Q^a \right) p^i \quad (\text{E.3})$$

#### E.4 Calcul de $\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^b, Q^a]_- \right]$

$$\begin{aligned}
\left[ Q^{\dot{a}}, [Q^b, Q^a]_- \right] &= \left[ (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\dot{a}c}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^c \alpha_n^i, \left[ (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\dot{b}d}^j \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{-m}^d \alpha_m^j, (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a \right] \right] \\
&= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \gamma_{\dot{a}c}^i s_{-n}^c \alpha_n^i, \left[ \gamma_{\dot{b}d}^j s_{-m}^d \alpha_m^j, s_0^a \right]_- \right]
\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned}
D_{nm} &= \left[ \gamma_{ac}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \alpha_m^j, s_0^a \right]_- \right] \\
&= \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \alpha_m^j, s_0^a \right]_- \right] + \left[ \gamma_{ac}^i s_{-n}^c, \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \alpha_m^j, s_0^a \right]_- \right] \alpha_n^i \\
&= \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \alpha_n^i, \alpha_m^j \right] \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d, s_0^a \right]_- + \left[ \gamma_{ac}^i s_{-n}^c, \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d, s_0^a \right]_- \right] \alpha_m^j \alpha_n^i \\
&= \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d, s_0^a \right]_- (n \delta^{ij} \delta_{n+m}) \\
&\quad + \left( 2 \delta^{cd} \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^j \delta_{n+m} s_0^a - \delta^{ca} \delta_{n,0} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \right) \alpha_m^j \alpha_n^i
\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{nm} D_{nm} = \sum_{nm} (D_1 + D_2 - D_3)_{nm}$$

avec

$$\begin{aligned}
\sum_{nm} D_1 &= \sum_{nm} \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \gamma_{bd}^j s_{-m}^d, s_0^a \right]_- (n \delta^{ij} \delta_{n+m}) = \sum_n n \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \gamma_{bd}^j s_n^d, s_0^a \right]_- \\
\sum_{nm} D_2 &= \sum_{nm} 2 \delta^{cd} \delta_{n+m} \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^j s_0^a \alpha_m^j \alpha_n^i = \sum_n 2 \delta^{cd} \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^j s_0^a \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \\
\sum_{nm} D_3 &= \sum_{nm} 2 \delta^{ca} \delta_{n,0} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \alpha_m^j \alpha_n^i = \sum_m 2 \delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-m}^d \alpha_m^j \alpha_0^i \\
&= \sum_n 2 \delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_n^j \alpha_0^i = \sum_n 2 \delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d (\alpha_0^i \alpha_n^j + n \delta_{n,0} \delta^{ji}) \\
&= \sum_n 2 \delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_0^i \alpha_n^j
\end{aligned}$$

soit enfin

$$\begin{aligned}
\sum_{nm} D_{nm} &= \sum_n n \gamma_{ac}^i s_{-n}^c \left[ \gamma_{bd}^j s_n^d, s_0^a \right]_- + \sum_n 2 \delta^{cd} \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^j s_0^a \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \\
&\quad - \sum_n 2 \delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_0^i \alpha_n^j
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left[ Q^a, [Q^b, Q^a]_- \right] &= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \sum_n (n \gamma_{ac}^i s_{-n}^c [\gamma_{bd}^i s_n^d, s_0^a]_- + 2\delta^{cd} \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^j s_0^a \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \\
&\quad - 2\delta^{ca} \gamma_{ca}^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_0^i \alpha_n^j) \\
&= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \sum_n \gamma_{ac}^i \gamma_{db}^i [s_{-n}^c, s_n^d]_- s_0^a + 2\delta^{ab} s_0^a \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \\
&\quad - \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{aa}^i \sum_n 2 \alpha_0^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_n^j \\
&= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \delta^{ab} \sum_n \left( [s_{-n}^c, s_n^c]_- s_0^a + 2\alpha_{-n}^i \alpha_n^i s_0^a \right) \\
&\quad - \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{aa}^i \sum_n 2 \alpha_0^i \gamma_{bd}^j s_{-n}^d \alpha_n^j \\
&= 4\sqrt{2} (p^+)^{\frac{1}{2}} \delta^{ab} H s_0^a - 2\sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \alpha_0^i \gamma_{aa}^i \gamma_{bd}^j \sum_n s_{-n}^d \alpha_n^j \\
&= 2 \left( 2\delta^{ab} H Q^a - \sqrt{2} \gamma_{aa}^i p^i Q^b \right)
\end{aligned}$$

finalement

$$\left[ Q^a, [Q^b, Q^a]_- \right] = 2 \left( 2\delta^{ab} H Q^a - \sqrt{2} \gamma_{aa}^i p^i Q^b \right) \quad (\text{E.4})$$

## E.5 Calcul de $\left[ Q^a, [Q^a, Q^b]_- \right]$

$$\begin{aligned}
\left[ Q^a, [Q^a, Q^b]_- \right] &= \left[ (2p^+)^{\frac{1}{2}} s_0^a, \left[ (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{ab}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^b \alpha_n^i, (p^+)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{bc}^j \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{-m}^c \alpha_m^j \right]_- \right] \\
&= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ s_0^a, \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_n^i, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \right]_- \right]
\end{aligned}$$

$$\text{posons } E_{nm} = \left[ s_0^a, \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_n^i, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \right]_- \right]$$

$$\begin{aligned} E_{nm} &= \left[ s_0^a, \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_n^i, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \right]_- \right] \\ &= \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \left[ \alpha_n^i, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \right] + \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \right] \alpha_n^i \right] \\ &= \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \left[ \alpha_n^i, \alpha_m^j \right] \right] + \left[ s_0^a, \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \right] \alpha_m^j \alpha_n^i \right] \\ &= \left[ \alpha_n^i, \alpha_m^j \right] \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \right]_- + \left[ s_0^a, \left[ \gamma_{ab}^i s_{-n}^b, \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \right]_- \right] \alpha_m^j \alpha_n^i \\ &= (n \delta^{ij} \delta_{n+m}) \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \right] + 2 \left( \delta^{ab} \delta_{n,0} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-m}^c - \delta^{ac} \delta_{m,0} \gamma_{cb}^j \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \right) \alpha_m^j \alpha_n^i \end{aligned}$$

calculons alors

$$\sum_{nm} E_{nm} = \sum_{nm} (E_1 + E_2 - E_3)_{nm}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{nm} E_1 &= \sum_{nm} (n \delta^{ij} \delta_{n+m}) \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \right] = \sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] \\ \sum_{nm} E_2 &= \sum_{nm} 2 \delta^{ab} \delta_{n,0} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \alpha_n^i = \sum_m 2 \delta^{ab} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-m}^c \alpha_m^j \alpha_0^i \\ &= \sum_n 2 \delta^{ab} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-n}^c \alpha_n^j \alpha_0^i = \sum_n 2 \delta^{ab} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-n}^c (\alpha_0^i \alpha_n^j + n \delta^{ji} \delta_{n,0}) \\ &= \sum_n 2 \delta^{ab} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-n}^c \alpha_0^i \alpha_n^j \\ \sum_{nm} E_3 &= \sum_{nm} 2 \delta^{ac} \delta_{m,0} \gamma_{cb}^j \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_m^j \alpha_n^i = \sum_n 2 \delta^{ac} \gamma_{cb}^j \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_0^j \alpha_n^i \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{nm} E_{nm} &= \sum_n \left( n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] + 2 \delta^{ab} \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j s_{-n}^c \alpha_0^i \alpha_n^j - 2 \delta^{ac} \gamma_{cb}^j \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \alpha_0^j \alpha_n^i \right) \\ &= \sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] + 2 \delta^{ab} p^i \gamma_{ba}^i \gamma_{bc}^j \sum_n s_{-n}^c \alpha_n^j - 2 \delta^{ac} p^j \gamma_{cb}^j \gamma_{ab}^i \sum_n s_{-n}^b \alpha_n^i \end{aligned}$$

developpons le terme  $\sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right]$

$$\sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] = \delta^{ab} \sum_n n \left[ s_0^a, s_{-n}^b s_n^b \right]$$

avec

$$\begin{aligned}
\sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] &= \delta^{ab} \sum_n n \left[ s_0^a, s_{-n}^b s_n^b \right] \\
\sum_n n \left[ s_0^a, s_{-n}^b s_n^b \right] &= \sum_n n s_{-n}^b \left[ s_0^a, s_n^b \right] + \sum_n n \left[ s_0^a, s_{-n}^b \right] s_n^b \\
&= \sum_n n s_{-n}^b \left[ s_0^a, s_n^b \right] - \sum_{n \rightarrow -n} n \left[ s_0^a, s_n^b \right] s_{-n}^b \\
&= \sum_n n \left[ s_{-n}^b \left[ s_0^a, s_n^b \right] \right] \\
&= 2 \sum_n n \left( \delta^{ba} \delta_{n,0} s_n^b - s_0^a \right) \\
&= 2 \sum_n n \delta^{ba} \delta_{n,0} s_n^b - 2 s_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_n n \delta^{ij} \left[ s_0^a, \gamma_{ab}^i s_{-n}^b \gamma_{bc}^j s_n^c \right] = 0$$

enfin

$$\begin{aligned}
\left[ Q^a, \left[ Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}} \right]_- \right] &= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} \sum_{nm} E_{nm} \\
&= \sqrt{2} (p^+)^{-\frac{1}{2}} 2 \left( p^i \gamma_{a\dot{a}}^i \gamma_{bc}^j \sum_n s_{-n}^c \alpha_n^j - p^j \gamma_{ab}^j \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^i \sum_n s_{-n}^b \alpha_n^i \right) \\
&= 2\sqrt{2} \left( p^i \gamma_{a\dot{a}}^i Q^{\dot{b}} - p^j \gamma_{ab}^j Q^{\dot{a}} \right)
\end{aligned}$$

finalement

$$\left[ Q^a, \left[ Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}} \right]_- \right] = 2\sqrt{2} \left( p^i \gamma_{a\dot{a}}^i Q^{\dot{b}} - p^j \gamma_{ab}^j Q^{\dot{a}} \right) \quad (\text{E.5})$$

## E.6 Calcul de $\left[ Q^a, \left[ Q^b, Q^c \right]_- \right]$

$$\begin{aligned} \left[ Q^a, \left[ Q^b, Q^c \right]_- \right] &= \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{aa}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{bb}^j \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{-m}^b \alpha_m^j, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{cc}^k \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \right] \\ &= (p^+)^{\frac{-3}{2}} \sum_{nml} \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_m^j, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \right] \end{aligned}$$

posons  $F_{nml} = \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_m^j, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \right]$

$$\begin{aligned} F_{nml} &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_m^j, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \right] \\ &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \left[ \alpha_m^j, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \right] + \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \right]_- \alpha_m^j \\ &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] + \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \\ &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \right] \end{aligned}$$

on peut mettre  $F_{nml}$  sous la forme  $F_{nml} = (F_1 + F_2)_{nml}$

avec

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] \\ F_2 &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \right] \end{aligned}$$

calculons alors explicitement ces deux termes :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \alpha_n^i, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] \alpha_n^i \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \left[ \alpha_n^i, \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right] \left[ \alpha_m^j, \alpha_l^k \right]_- \alpha_n^i \\
&= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right] \left( m \delta^{jk} \delta_{m+l} \right) \alpha_n^i \\
&= m \delta^{jk} \delta_{m+l} \alpha_n^i \left( \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \right] \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_2 &= \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \right] \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \alpha_n^i, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \alpha_l^k \alpha_m^j \right] \alpha_n^i \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \left[ \alpha_n^i, \alpha_l^k \alpha_m^j \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \right] \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \left( \alpha_l^k \left[ \alpha_n^i, \alpha_m^j \right] + \left[ \alpha_n^i, \alpha_l^k \right] \alpha_m^j \right) \\
&\quad + 2 \left( \gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab} \delta_{n+m} \gamma_{cc}^k s_{-l}^c - \gamma_{aa}^i \delta^{ac} \delta_{n+l} \gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \right) \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i \\
&= \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \left( n \delta^{ij} \delta_{n+m} \alpha_l^k + n \delta^{ik} \delta_{n+l} \alpha_m^j \right) \\
&\quad + 2 \left( \gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab} \delta_{n+m} \gamma_{cc}^k s_{-l}^c - \gamma_{aa}^i \delta^{ac} \delta_{n+l} \gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \right) \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
F_{nml} &= m \delta^{jk} \delta_{m+l} \alpha_n^i \left( \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right] + \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \right] \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right) \\
&\quad + \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \right]_- \left( n \delta^{ij} \delta_{n+m} \alpha_l^k + n \delta^{ik} \delta_{n+l} \alpha_m^j \right) \\
&\quad + 2 \left( \gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab} \delta_{n+m} \gamma_{cc}^k s_{-l}^c - \gamma_{aa}^i \delta^{ac} \delta_{n+l} \gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \right) \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{nml}^{\infty} F_{nml} &= \sum_{nml}^{\infty} (m\delta^{jk}\delta_{m+l}\alpha_n^i\gamma_{bb}^j s_{-m}^b\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c + m\delta^{jk}\delta_{m+l}\alpha_n^i [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b] \gamma_{cc}^k s_{-l}^c \\
&\quad + n\delta^{ij}\delta_{n+m}\alpha_l^k \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c]_- + n\delta^{ik}\delta_{n+l}\alpha_m^j \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c]_- \\
&\quad + 2\gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab}\delta_{n+m}\gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i - 2\gamma_{aa}^i \delta^{ac}\delta_{n+l}\gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_l^k \alpha_m^j \alpha_n^i) \\
&= \sum_{nm}^{\infty} m\delta^{jk}\alpha_n^i \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \gamma_{cc}^k \\
&\quad + \left( \sum_{nm}^{\infty} m\delta^{jk}\alpha_n^i [\gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^j s_{-m}^b] \gamma_{cc}^k s_{-l}^c = - \sum_{nm}^{\infty} n\delta^{jk}\alpha_{-m}^i [\gamma_{aa}^i s_m^a, \gamma_{bb}^j s_n^b] \gamma_{cc}^k s_{-n}^c \right) \\
&\quad + \sum_{nl}^{\infty} n\delta^{ij}\alpha_l^k \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_n^b, \gamma_{cc}^k s_{-l}^c]_- + \sum_{nm}^{\infty} n\delta^{ik}\alpha_m^j \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_n^c]_- \\
&\quad + \sum_{nl}^{\infty} 2\gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab}\gamma_{cc}^k s_{-l}^c \alpha_l^k \alpha_{-n}^j \alpha_n^i - \sum_{nm}^{\infty} 2\gamma_{aa}^i \delta^{ac}\gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_{-n}^k \alpha_m^j \alpha_n^i) \\
&= (n \rightarrow m \text{ et } m \rightarrow n) \sum_{nm}^{\infty} n\delta^{jk}\alpha_m^i \gamma_{bb}^j s_{-n}^b [\gamma_{aa}^i s_{-m}^a, \gamma_{cc}^k s_n^c] \\
&\quad - \sum_{nm}^{\infty} n\delta^{jk}\alpha_{-m}^i [\gamma_{aa}^i s_m^a, \gamma_{bb}^j s_n^b] \gamma_{cc}^k s_{-n}^c + (l \rightarrow m) \sum_{nl}^{\infty} n\delta^{ij}\alpha_m^k \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_n^b, \gamma_{cc}^k s_{-m}^c]_- \\
&\quad + \sum_{nm}^{\infty} n\delta^{ik}\alpha_m^j \gamma_{aa}^i s_{-n}^a [\gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^k s_n^c] + (l \rightarrow m) \sum_{nl}^{\infty} 2\gamma_{aa}^i \gamma_{bb}^j \delta^{ab}\gamma_{cc}^k s_{-m}^c \alpha_m^k \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \\
&\quad - \sum_{nm}^{\infty} 2\gamma_{aa}^i \delta^{ac}\gamma_{cc}^k \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_{-n}^k \alpha_m^j \alpha_n^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{nml}^{\infty} F_{nml} &= \left( \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^i \gamma_{bb}^j s_{-n}^b \left[ \gamma_{aa}^i s_{-m}^a, \gamma_{cc}^j s_n^c \right] = - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^i \gamma_{aa}^i s_{-m}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-n}^b, \gamma_{cc}^j s_n^c \right] \right) \\
&- \left( \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_{-m}^i \left[ \gamma_{aa}^i s_m^a, \gamma_{bb}^j s_n^b \right] \gamma_{cc}^j s_{-n}^c = - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_{-m}^i \left[ \gamma_{cc}^j s_{-n}^c, \gamma_{bb}^j s_n^b \right] \gamma_{aa}^i s_m^a \right) \\
&+ \left( \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^k \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^i s_n^b, \gamma_{cc}^k s_{-m}^c \right] = \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^k \gamma_{cc}^k s_{-m}^c \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{bb}^i s_n^b \right] \right) \\
&+ \left( \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^j \gamma_{aa}^i s_{-n}^a \left[ \gamma_{bb}^j s_{-m}^b, \gamma_{cc}^i s_n^c \right] = - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^j \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \left[ \gamma_{aa}^i s_{-n}^a, \gamma_{cc}^i s_n^c \right] \right) \\
&+ \sum_{nl}^{\infty} 2 \gamma_{aa}^i \gamma_{ab}^i \gamma_{cc}^k s_{-m}^c \alpha_m^k \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \sum_{nm}^{\infty} 2 \gamma_{aa}^i \gamma_{ac}^i \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_{-n}^i \alpha_m^j \alpha_n^i \\
&= - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^i \gamma_{aa}^i s_{-m}^a \delta^{bc} \delta^{bc} \left[ s_{-n}^b, s_n^c \right] + (p^+)^{\frac{-3}{2}} \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_{-m}^i \delta^{bc} \delta^{bc} \left[ s_{-n}^c, s_n^b \right] \gamma_{aa}^i s_m^a \\
&+ \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^k \gamma_{cc}^k s_{-m}^c \delta^{ab} \delta^{ab} \left[ s_{-n}^a, s_n^b \right] - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^j \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \delta^{ac} \delta^{ac} \left[ s_{-n}^a, s_n^c \right] \\
&+ \delta^{ab} \gamma_{cc}^k \sum_{nm}^{\infty} 2 s_{-m}^c \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \alpha_m^k - \delta^{ac} \gamma_{bb}^j \sum_{nm}^{\infty} 2 s_{-m}^b \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \alpha_m^j \\
&= \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^k \delta^{ab} \left[ s_{-n}^a, s_n^a \right] \gamma_{cc}^k s_{-m}^c - \sum_{nm}^{\infty} n \alpha_m^j \delta^{ac} \left[ s_{-n}^a, s_n^a \right] \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \\
&+ 2 \delta^{ab} \sum_{nm}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \gamma_{cc}^k s_{-m}^c \alpha_m^k - 2 \delta^{ac} \sum_{nm}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_m^j
\end{aligned}$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\left[ Q^a, \left[ Q^b, Q^c \right]_- \right] &= (p^+)^{\frac{-3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{nml} \\
&= (p^+)^{\frac{-3}{2}} \delta^{ab} \sum_{nm}^{\infty} \left( n \left[ s_{-n}^a, s_n^a \right]_- + 2 \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \right) \gamma_{cc}^k \alpha_m^k s_{-m}^c \\
&\quad - (p^+)^{\frac{-3}{2}} \delta^{ac} \sum_{nm}^{\infty} \left( n \left[ s_{-n}^a, s_n^a \right]_- + 2 \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \right) \gamma_{bb}^j s_{-m}^b \alpha_m^j \\
\left[ Q^a, \left[ Q^b, Q^c \right]_- \right] &= 4H \delta^{ab} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{cc}^k \sum_{nm}^{\infty} \alpha_m^k s_{-m}^c - 4H \delta^{ac} (p^+)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{bb}^j \sum_{nm}^{\infty} s_{-m}^b \alpha_m^j
\end{aligned}$$

soit enfin

$$\left[ Q^a, \left[ Q^b, Q^c \right]_- \right] = 2 \left( 2H \delta^{ab} Q^c - 2H \delta^{ac} Q^b \right) \quad (\text{E.6})$$

## Annexe F

### Cas Boson-Parafermion pour $D = 4$

$$Q^a = i (p^+)^{\frac{1}{2}} (\gamma_+ s_0)^a + i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_i s_{-n})^a \alpha_n^i$$

Calculons

$$\left[ Q^a, [\bar{Q}^b, \bar{Q}^c]_- \right] = \left[ i (p^+)^{\frac{1}{2}} (\gamma_+ s_0)^a + i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_i s_{-n})^a \alpha_n^i \right.$$

$$\left. \left[ -i (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^b - i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m} \gamma_j)^b \alpha_m^j, -i (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^c - i (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l} \gamma_k)^c \alpha_l^k \right]_- \right]$$

$$= - \left[ Q^a, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^b, (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^c \right]_- \right] \quad (\text{F.1})$$

$$- \left[ Q^a, \left[ (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^b, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l} \gamma_k)^c \alpha_l^k \right]_- \right] \quad (\text{F.2})$$

$$- \left[ Q^a, \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m} \gamma_j)^b \alpha_m^j, (p^+)^{\frac{1}{2}} (\bar{s}_0 \gamma_+)^c \right]_- \right] \quad (\text{F.3})$$

$$- \left[ Q^a, \left[ (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m} \gamma_j)^b \alpha_m^j, (p^+)^{\frac{-1}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l} \gamma_k)^c \alpha_l^k \right]_- \right] \quad (\text{F.4})$$

En utilisant les relations (3.55-3.57), (C.1-C.2), et la décomposition de Green, un calcul long

et fastidieux nous donne

$$\begin{aligned}
\text{(F.1)} &= -i (p^+)^{\frac{3}{2}} 4 \left[ (h\gamma^-)^{ab} (\bar{s}_0\gamma_+)^c - (h\gamma^-)^{ac} (\bar{s}_0\gamma_+)^b \right] \\
&\quad + 2i (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ (h\gamma^i)^{ab} (\bar{s}_0\gamma_+)^c - (h\gamma^i)^{ac} (\bar{s}_0\gamma_+)^b \right] \\
\text{(F.2)} &= -i (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ 4 (h\gamma^-)^{ab} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l}\gamma_k)^c \alpha_l^k + 2 (h\gamma^k)^{ac} p^k (\bar{s}_0\gamma_+)^b \right] \\
&\quad + 4i (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ (h\gamma^i)^{ab} p^i \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l}\gamma_k)^c \alpha_l^k - (h\gamma^+)^{ac} \alpha_0^- (\bar{s}_0\gamma_+)^b \right] \\
\text{(F.3)} &= -i (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ -4 (h\gamma^-)^{ac} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m}\gamma_j)^b \alpha_m^j - 2 (h\gamma^j)^{ac} p^j (\bar{s}_0\gamma_+)^c \right] \\
&\quad - 4i (p^+)^{\frac{1}{2}} \left[ (h\gamma^i)^{ac} p^i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m}\gamma_j)^b \alpha_m^j - (h\gamma^+)^{ac} \alpha_0^- (\bar{s}_0\gamma_+)^c \right] \\
\text{(F.4)} &= -i (p^+)^{\frac{1}{2}} 2 \left[ 4 (h\gamma^-)^{ab} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l}\gamma_k)^c \alpha_l^k - 4 (h\gamma^-)^{ac} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m}\gamma_j)^b \alpha_m^j \right] \\
&\quad + 4i (p^+)^{\frac{-3}{2}} \left[ (h\gamma^+)^{ac} \alpha_0^- \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-m}\gamma_j)^b \alpha_m^j - (h\gamma^+)^{ab} \alpha_0^- \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\bar{s}_{-l}\gamma_k)^c \alpha_l^k \right]
\end{aligned}$$

où

$$\alpha_0^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : - \sum_{\alpha=1}^4 \frac{1}{4} : \bar{s}_{-n}^{(\alpha)} \gamma^- s_n^{(\alpha)} : \right) \quad \text{(F.5)}$$

avec la condition de couche de masse  $\alpha_0^- = p^+ p^-$ , un calcul direct donne

$$\left[ Q^a, \left[ \bar{Q}^b, \bar{Q}^c \right]_- \right] = 2 \left[ -2 (h\gamma_\mu p^\mu)^{ab} \bar{Q}^c + 2 (h\gamma_\mu p^\mu)^{ac} \bar{Q}^b \right] \quad \text{(F.6)}$$

## Annexe G

# Propriétés des fonctions *Theta* $\vartheta$

Les fonctions  $\vartheta$  avec caractéristiques sont définies par :

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i(v-\tau)n} \quad (\text{G.1})$$

avec  $q = e^{2\pi i\tau}$

*Périodicité*

$$\vartheta \begin{bmatrix} a+2 \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) \quad , \quad \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b+2 \end{bmatrix} (v|\tau) = e^{i\pi a} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{G.2})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} (v|\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (-v|\tau) = e^{i\pi ab} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{Z} \quad (\text{G.3})$$

il est plus commode d'utiliser la notation de Jacobi-Erderlyi :

$$\vartheta_1 = \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vartheta_2 = \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \vartheta_3 = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \vartheta_4 = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

sous les transformations modulaires les fonctions  $\vartheta$  s'écrivent :

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}a(a-2)} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ a+b+1 \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{G.5})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \left( \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right) = \sqrt{-i\tau} e^{\frac{i\pi}{2}ab + i\pi \frac{v^2}{\tau}} \vartheta \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{G.6})$$

*Forme produit*

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \sin(\pi v) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 - q^n e^{2\pi i v}) (1 - q^n e^{-2\pi i v}) \quad (\text{G.7})$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \cos(\pi v) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^n e^{2\pi i v}) (1 + q^n e^{-2\pi i v}) \quad (\text{G.8})$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \left(1 + q^{n-1/2} e^{2\pi i v}\right) \left(1 + q^{n-1/2} e^{-2\pi i v}\right) \quad (\text{G.9})$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \left(1 - q^{n-1/2} e^{2\pi i v}\right) \left(1 - q^{n-1/2} e^{-2\pi i v}\right) \quad (\text{G.10})$$

on définit aussi la fonction  $\eta$  (fonction de Dedekind)

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (\text{G.11})$$

# Bibliographie

- [1] F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. D9 (1974) 3341.
- [2] N. Belaloui and H. Bennacer : Czech. J. Phys. 53 (2003) 769.
- [3] N. Belaloui and H. Bennacer : Czech. J. Phys. 54 (2004) 621..
- [4] N. Belaloui, L. Khodja and H. Bennacer : JINR, Dubna, 2004 ISBN 5-9530-0069-3.
- [5] J. Beckers and N.Debergh : J. Math. Phys. 31 (1990) 1513.
- [6] Z. Symenoh : Nonlinear Math. Phys. 3 (1996) 181.
- [7] A. Mostafazadeh : arXiv : hep-th/9508106 v1.
- [8] Keith R. Dienes : Nucl. Phys. B 413 (1994) 103.
- [9] Philip C. Argyres and Keith R. Dienes : Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 819.
- [10] V.Alessandrini, D.Amati, M.le Bellac and D.I. Olive, *The operator Approach to Dual multiparticle Theory*, Physics reports 1C (1971).
- [11] J.H Schwarz, *Dual Resonance Theory*, Physics Reports 8C (1973) 269.
- [12] Dual Theory, Physics Reports reprint vol.I, ed. M.Jacob(North- Holland, Amsterdam, 1974).
- [13] J.Sherk, *An Introduction to The Theory of Dual Models and Strings*, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 123.
- [14] Th.Kaluza, Sitzungsher, Press. Akad.Wiss.berlin, Math.Phys. K1 (1921) 966.
- [15] O.Klein, Z.Phys. 37(1926) 895.
- [16] M.B.Green and J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B181 (1981) 502.
- [17] M.B.Green and J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B198 (1982) 252.

- [18] M.B.Green and J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B198 (1982) 441.
- [19] M.B.Green, J.H.Schwarz and L.Brink, Nucl.Phys. B198(1982) 474.
- [20] M.B.Green and J.H.Schwarz, Phys.Lett. 109B (1982) 444.
- [21] M.Kaku, *Introduction to Superstrings*, Spinger-Verlag 1990.
- [22] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, *Superstring Theory*, Vol.I, Cambridge University Press 1987.
- [23] J.Polchinski, *Sting Theory*, Vol.I, II; Cambridge University Press 1998.
- [24] E.P.Wigner, Phys.Rev. 77, (1950) 711.
- [25] Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.
- [26] H.S Green, Phys.Rev. 90, (1953) 270.
- [27] P.Van Nieuwenhuizen, Les Houches, (1984).
- [28] L.Brink, J.H.Schwarz and J.Sherk, Nucl.Phys. B121 (1977) 77.
- [29] J.C.Boez, arXiv : math.RA/0105155 v4.
- [30] A.Baker, Matrix Groups “*An introduction to Lie Group Theory*”, Springer-Verlag 2002.
- [31] D.J. Gross, J.A.Harvey, E.Martinec and R.Rohni, Nucl.Phys.B256 (1985) 253.
- [32] D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec and R.Rohni, ”*Heterotic String Theory, II-the interacting heterotic string*” Princeton preprint, june 85; Nucl.Phys. B267(1986)75-124.
- [33] J.H.Schwarz, *Superstring Theory*, Physics Reports, Vol.89. (1982) 224.
- [34] F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2456.
- [35] N.Belaloui, Thèse de Doctorat d’état, Novembre 1998, Constantine.
- [36] Elias Kiritsis, CERN-TH/97-218 (1997), arXiv : hep-th/9709062 v2.

## Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'extension des théories des supercordes et des cordes hétérotiques dans le formalisme de la paraquantification. Deux résultats essentiels ont été obtenus :

- A la différence de la théorie quantique des supercordes qui est uniquement définie à  $D=10$ , dans le cas des parasupercordes, les quatre dimensions d'espace-temps ( $D=3, 4, 6, 10$ ), pour lesquelles sont formulées les supercordes classiques, survivent.
- En plus du cas ordinaire  $(26,10)$  pour les dimensions d'espace-temps pour lesquelles sont formulées les cordes hétérotiques, pour la théorie des paracordes hétérotiques, seul survit le cas  $(14,6)$  qui est construit à partir du seul groupe possible  $E_8$ .

Mots clés : générateurs supersymétriques- fonction de partition- invariance modulaire- spectre.

## Summary

The object of this memorandum is the study of the extension of the superstring and the heterotic string theories in the formalism of the paraquantization. Two essential results are obtained :

- Unlike the superstring quantum theory which is only defined in  $D=10$ , in the case of the parasuperstring theory, the four space-time dimensions ( $D=3, 4, 6, 10$ ), in which the classical superstring can be formulated, survive.
- In addition to the ordinary case  $(26,10)$  of the space-time dimension in which the heterotic string can be formulated, in the case of the heterotic parastrings, only survives the case  $(14,6)$  which is constructed from the only possible group  $E_8$ .

Key words : supersymmetric generators- partition function-modular invariance- spectrum