REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'Ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de
Magister en physique

Spécialité
Physique Théorique

Par

LYNDA GHEGAL

THEME

Particule sur une sphère et une pseudo -sphère à n dimensions :
Problème de Coulomb - Oscillateur

Soutenu le : 02 / 07 / 2005

Devant le jury :

Président :	M. Denneche	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	A. Lecheheb	M. C. Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	L. Chetouani	Prof. Univ. Mentouri Constantine
	T. Boudjedaa	M. C. Univ. Jijel
	K. Ait. Moussa	M. C. Univ. Mentouri Constantine

Table des matières

Introduction générale :

Parmi les plus importants formalismes mathématiques de la théorie quantique non relativiste, qui décrivent l'évolution des systèmes, on trouve la formulation de Schrödinger et le formalisme de Feynman. Schrödinger a proposé une équation différentielle basée sur la théorie Hamiltonienne, et la formulation de Feynman qui est une intégrale fonctionnelle est basée sur la théorie Lagrangienne. Cette formulation dite intégrale de chemins a permis tout d'abord de calculer le propagateur relatif à des systèmes où le Lagrangien a une forme quadratique en x et $\dot{x}$. L'un des succès de l'intégrale de chemins est la résolution exacte du propagateur de l'atome d'hydrogène. Duru et Kleinert ont pu transformer au moyen des transformations canoniques non linéaires l'intégrale de chemins de l'atome d'hydrogène, en coordonnées polaires dans R^3, en une intégrale de chemins dans l'espace R^4 relative à deux Oscillateurs Harmoniques indépendants à 2 dimensions [1]. Cette idée a ouvert un vaste champ d'application des intégrales de chemins en mécanique quantique dans divers systèmes de coordonnées. Les transformations spatio-temporelles de Duru et Kleinert a permis alors de résoudre des problèmes assez complexes de la mécanique quantique non relativiste.

La symétrie dynamique des groupes $SU(2)$ et $SU(1,1)$, ainsi que les générateurs des groupes de Lie, ont beaucoup servi comme techniques récentes et outils de calcul menant à l'expression analytique de nombreux potentiels tels que le potentiel de Coulomb [2, 3, 4], le potentiel de Hulthén [5] et le potentiel de Rosen Morse [6].

L'objet de ce travail concerne l'application du formalisme de Feynman des intégrales de chemins aux potentiels de l'Oscillateur et de Coulomb sur la sphère et la pseudo-sphère à n dimensions.

Dans le premier chapitre nous allons présenter des généralités sur ce formalisme où nous allons rassembler des notions de base concernant le propagateur dans l'espace des configurations à une dimension, détailler la méthode des transformations spatio-temporelles dans le cas simple des systèmes à une

dimension, et développer l'intégrale de chemins sur la variété $SU(2)$ [6] et $SU(1,1)$ [7, 8, 9].

Le second chapitre est consacré à l'étude du potentiel de l'Oscillateur et de Coulomb sur une sphère à n dimensions S^n par la méthode Path Integral. Nous allons directement calculer le propagateur relatif au potentiel de l'Oscillateur en l'identifiant à celui de Pöschl-Teller, et par le moyen d'une transformation spatio-temporelle appliquée au propagateur relatif au potentiel de Coulomb, nous retrouverons la même forme du propagateur obtenu dans le problème de l'Oscillateur. Les fonctions d'onde et les énergies sont déduites directement. En utilisant les propriétés des représentations du groupe $SU(2)$.

Le dernier chapitre est consacré au traitement du potentiel de l'Oscillateur et de Coulomb sur une pseudo-sphère à n dimensions H^n via l'intégrale de chemins. Nous calculerons le propagateur relatif au potentiel de l'Oscillateur qui s'identifiera directement au cas du potentiel de Pöschl-Teller modifié, mais par contre celui de Coulomb nécessitera l'introduction d'une transformation spatio-temporelle, appliquée au propagateur qui réduira le propagateur a celui obtenu dans le problème de l'Oscillateur. Les spectres d'énergies et les fonctions d'onde sont alors obtenus, en utilisant les propriétés des représentations du groupe $SU(1,1)$.

Je finalise ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Le formalisme Path Integral :

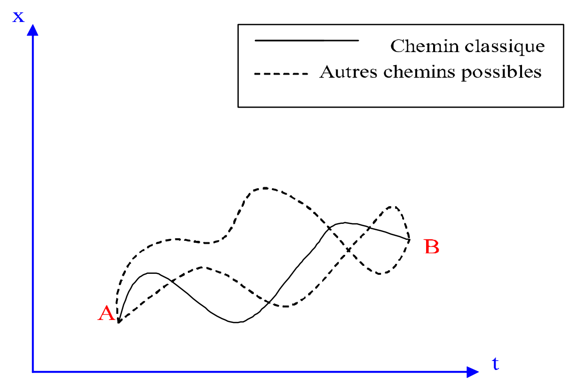
1.1 Introduction :

Dans ce qui suit, nous allons exposer les outils mathématique et physiques nécessaires aux développements des chapitres suivants. Nous commencerons d'abord par une brève exposition de l'intégrale de chemin et de la technique des transformations spatio-temporelles, puis quelques propriétés, formules et théorèmes utiles des groupes de Lie $SU(2)$ et $SU(1,1)$, ainsi qu'une présentation de l'intégrale de Feynman sur ces groupes.

1.2 Propagateur :

La méthode de Feynman, est un formalisme qui se base essentiellement sur des notions connues de la mécanique classique comme : les chemins, le Lagrangien et l'action. L'élément de base de cette formulation est le propagateur, qui est une solution fondamentale de l'équation de Schrödinger. Depuis la naissance des transformations spatio-temporelles, le formalisme de Feynman est devenu une méthode alternative à la méthode de Schrödinger et a permis d'avoir les mêmes résultats.

Soit une particule de masse M se déplaçant d'un point de l'espace temps $A(x_a, t_a)$ à un autre point $B(x_b, t_b)$.



L'amplitude de transition dite propagateur selon Feynman est une somme d'une infinité d'amplitudes partielles associées à chacun des chemins de l'espace-temps reliant A et B :

$$K(x_b, x_a, t_b - t_a) = \sum_{\substack{\text{sur tous les chemins} \\ \text{de } A \text{ à } B}} \Phi\left[x(t)\right]$$

L'amplitude $\Phi\left[x(t)\right]$ est donnée par :

$$\Phi\left[x(t)\right] = C \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\left(x\left(t\right)\right)\right\}$$

C : est une constante de la normalisation.

S : correspond à l'action classique évaluée entre t_a et t_b.

Comme on somme sur tous les chemins, on peut remplacer cette somme par une intégrale. Cette expression formelle de Feynman est définie comme suit :

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a, t_b - t_a) &= \int Dx(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\left(x\left(t\right)\right)\right\} \\ &= \int Dx(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L\left(x, \dot{x}, t\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec l'action :

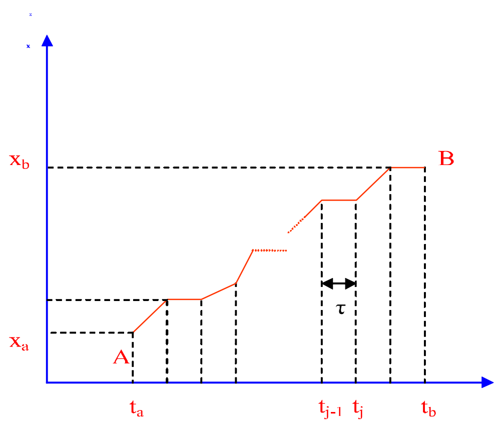
$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L\left(x, \dot{x}, t\right) \tag{1.2}$$

où $L\left(x, \dot{x}, t\right)$ est le Lagrangien classique de la particule. Il est donné par :

$$L\left(x, \dot{x}, t\right) = \frac{M}{2}\dot{x}^2 - V(x). \tag{1.3}$$

Subdivisons l'intervalle de temps en N intervalles égaux de longueur τ, tel que $\tau = t_j - t_{j-1} = \frac{t_b - t_a}{N}$ avec $t_N = t_b$, $t_0 = t_a$, $x_N = x(t_N)$ et $x_0 = x(t_0)$, $j = 1, ..., N$.

Après la discrétisation des chemins, $\left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ t \in [t_a, t_b] \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_j \equiv x(t_j) \\ t_a \leq t_1 \leq \cdots \leq t_b \end{array} \right.$



Le propagateur s'écrira comme :

$$K(x_b, x_a, t_b - t_a) = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ N \to \infty}} C_N \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\left(x_j\right)\right\} \tag{1.4}$$

où $S\left(x_j\right)$ représente l'action donné par la forme discrète suivante :

$$S\left(x_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \tau_j \left\{\frac{M}{2\tau_j^2}\Delta x_j^2 - V(x_j)\right\} \tag{1.5}$$

avec :

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

et la constante de normalisation C_N est définie par :

$$C_N = \left[\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi i\hbar\tau}{M}}}\right]^N .$$

Par conséquent, le propagateur de cette particule se mouvant dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$ en coordonnées cartésiennes, s'écrit sous la forme suivante :

$$K(x_b, x_a, t_b - t_a) = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ N\to\infty}} \left[\sqrt{\frac{M}{2\pi i\hbar\tau}}\right]^N \int \prod_{j=1}^{N-1} [dx_j] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x_j)\right\} \tag{1.6}$$

1.3 Transformation spatio-temporelle :

La reparamétrisation des chemins dépendants du temps et la transformation des coordonnées ont été utilisées, pour transformer des intégrales de chemins de formes inconnues à des intégrales de chemins de formes connues. Pour avoir une intégrale de chemins stable avec un propagateur bien défini il faut éliminer les singularités à l'aide de transformations adéquates. Nous allons détailler cette méthode de transformation dans le cas simple des systèmes à une dimension [**10**].

Tout d'abord introduisons une transformation spatiale qui est définie par la forme générale suivante :

$$x = h(q). \tag{1.7}$$

Voyons comment se transforme $S(x_j)$ en $S(q_j)$. Dans la version discrète, on exprime $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ en termes de $\Delta q_j = q_j - q_{j-1}$. Selon la prescription du mid-point $\tilde{q}_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1})$, $q_j = \tilde{q}_j + \frac{1}{2}\Delta q_j$ et $q_{j-1} = \tilde{q}_j - \frac{1}{2}\Delta q_j$ et en développant $h(q_j)$ et $h(q_{j-1})$ en séries de Taylor jusqu'à l'ordre quatre en Δq_j ; on obtient :

$$\Delta x_j = h'_j \, \Delta q_j \left[1 + \frac{1}{24}\frac{h'''_j}{h'_j}(\Delta q_j)^2\right] \tag{1.8}$$

avec $h'_j = h'(\tilde{q}_j)$.

Sachant que les seuls chemins qui contribuent dans l'intégrale de chemins sont pour lesquels on a $(\Delta q_j)^2 \approx \tau$, lors de cette transformation spatiale, l'énergie cinétique se transforme en :

$$\frac{M}{2\tau}(\Delta x_j)^2 = \frac{M}{2\tau}(h'_j)^2 \quad (\Delta q_j)^2\left[1 + \frac{h'''_j}{12\ h'_j}(\Delta q_j)^2\right] \tag{1.9}$$

et le potentiel prend la forme simple suivante :

$$\tau V(x_j) = \tau\ V\left[h(\tilde{q}_j)\right] + 0(\tau^2) = \tau V(f_j). \tag{1.10}$$

Voyons maintenant comment se transforme la mesure de l'intégrale de chemins.

En substituant la première dérivée dans la mesure :

$$C_N \prod_{n=1}^{N-1} dx_j = C_N \prod_{n=1}^{N-1} h'(q_j)dq_j \tag{1.11}$$

sous sa forme symétrique elle devient :

$$C_N \prod_{n=1}^{N-1} dx_j = C_N\left[h'(q_b)h'(q_a)\right]^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N}\left[h'(q_j)h'(q_{j-1})\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dq_j. \tag{1.12}$$

En développant $h'(q_j)$ et $h'(q_{j-1})$ jusqu'à l'ordre deux en (Δq_j), on obtient alors :

$$\left[h'(q_j)h'(q_{j-1})\right]^{\frac{1}{2}} \quad = h'_j\left[1 + \frac{1}{4}(\Delta q_j)^2\left\{\frac{h'''_j}{h'_j} - \left(\frac{h''_j}{h'_j}\right)^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

Substituons (1.13) dans (1.12) on aura :

$$\begin{aligned} C_N \prod_{n=1}^{N-1} dx_j \quad &= \quad C_N\left[h'(q_b)h'(q_a)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\prod_{n=1}^{N} h'_j\left[1 + \frac{1}{4}(\Delta q_j)^2\left\{\frac{h'''_j}{h'_j} - \left(\frac{h''_j}{h'_j}\right)^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \prod_{n=1}^{N-1} dq_j. \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'introduction de la transformation spatiale a induit un terme cinétique de forme non conventionnelle (*terme cinétique qui contient une masse variable*). Et pour redonner une forme conventionnelle au terme cinétique nous passons à une transformation temporelle :

$$\frac{dt}{ds} = [h'(q(s))]^2 \;; t(s_b) = t_b \;,\; t(s_a) = t_a \;, \tag{1.15}$$

qui s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$\tau = \sigma_j h'(q_j) h'(q_{j-1}) \tag{1.16}$$

où : $\sigma_j = s_j - s_{j-1}$, et sous sa forme symétrique, elle devient :

$$\tau = \sigma_j \, h'^2 \left[1 + \frac{1}{4} (\Delta q_j)^2 \left\{ \frac{h_j'''}{h_j'} - \left(\frac{h_j''}{h_j'} \right)^2 \right\} \right]. \tag{1.17}$$

Et insérant l'expression (1.17) dans (1.14), alors la mesure prend la forme suivante :

$$C_N \prod_{n=1}^{N-1} dx_j = [h'(q_a) h'(q_b)]^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{M}{2\pi i \hbar \sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dq_j. \tag{1.18}$$

Substituons l'expression (1.17) de τ dans (1.9) et en développant les calculs en ne gardant que les termes qui contribuent jusqu'à l'ordre quatre en $(\Delta q_j)^4$, nous aurons :

$$\frac{M}{2\tau} (\Delta x_j)^2 = \frac{M}{2\sigma_j} (\Delta q_j)^2 + \frac{M}{8\sigma_j} (\Delta q_j)^4 \lambda_j \tag{1.19}$$

avec :

$$\lambda_j = \left(\frac{h_j''}{h_j'} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{h_j'''}{h_j'}. \tag{1.20}$$

Ainsi le potentiel devient :

$$\tau V(x_j) = \sigma_j \, (h_j')^2 V(h_j) = \sigma_j (h_j')^2 V_j. \tag{1.21}$$

Cette transformation permet d'écrire l'action sous forme :

$$\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S(x_j) \right\} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{M}{2\sigma_j} (\Delta q_j)^2 + \frac{M}{8\sigma_j}^4 \lambda_j (\Delta q_j)^4 - \; \sigma_j (h_j')^2 V_j \right\} \right], \tag{1.22}$$

à l'aide de la formule suivante($pour\ a : grand$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ax^2 - bx^4\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-ax^2 - \frac{3b}{4a^2}\right] + 0\left(\frac{1}{a^3}\right) \tag{1.23}$$

où : $a = \frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}$ et $b = \frac{M\lambda_j}{8i\hbar\ \sigma_j}$, on obtient alors le résultat suivant :

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{M}{2\sigma_j}\ (\Delta q_j)^2 -\ \sigma_j\left((h'_j)^2 V_j + \frac{3\hbar^2}{8M}\lambda_j\right)\right\}\right]. \tag{1.24}$$

Nous passons maintenant aux nouveaux paramètres s_b et s_a par la relation :

$$T = t_b - t_a\ = \int_{s_a}^{s_b} ds\left[h'\left(q\left(s\right)\right)\right]^2 \tag{1.25}$$

et en introduisant une identité définie par la fonction δ de Dirac ayant la forme suivante :

$$[h'(q_b)h'(q_a)]\int_0^{\infty} ds\delta\left(T - \int_{s_a}^{s_b} ds\left[h'\left(q\left(s\right)\right)\right]^2\right) = 1 \tag{1.26}$$

alors on peut écrire le propagateur comme suit :

$$K\left(h(q_b), h(q_a); T\right) = \lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\delta\left(T - \int_{s_a}^{s_b} ds\left[h'\left(q\left(s\right)\right)\right]^2\right) K_s ds \tag{1.27}$$

où K_s s'écrit :

$$K_s = [h'(q_b)h'(q_a)]^{\frac{1}{2}}\int\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\ \prod_{n=1}^{N-1} dq_j\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \tag{1.28}$$

Soit la transformée de Fourier suivante :

$$K = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}ET\right\}\ G(x_b, x_a; E)dE \tag{1.29}$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que via cette transformation spatio-temporelle on a :

$$G(x_b, x_a; E) = [h'(q_a)h'(q_b)]^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} dsP(q_b, q_a; s) \tag{1.30}$$

où $P(q_b, q_a; s)$ est le promoteur :

$$P(q_b, q_a; s) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dq_j \ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \tilde{S} \right\} \tag{1.31}$$

avec la nouvelle action $\tilde{S}$ qui est définie par :

$$\tilde{S} \ = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{M}{2\sigma_j} \ (\Delta q_j)^2 - \ \sigma_j \left((h'_j)^2 \, (V - E) + \frac{3\hbar^2}{8M} \lambda_j \right) \right\} \tag{1.32}$$

avec :

$$\lambda_j = \left(\frac{h''_j}{h'_j} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{h'''_j}{h'_j}$$

et le nouveau potentiel :

$$\tilde{V}(q_j) = (h'_j)^2 \, (V - E) + \frac{3\hbar^2}{8M} \left[\left(\frac{h''_j}{h'_j} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{h'''_j}{h'_j} \right]. \tag{1.33}$$

1.4 Groupe SU(2) :

Le groupe de Lie $SU(2)$ joue un rôle important en physique. Dans ce qui suit nous donnerons une liste des propriétés les plus importantes.

1.4.1 Paramétrisation :

Soit $SU(2)$ l'ensemble des matrices unitaires et unimodulaires du second ordre, de la forme suivante :

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

telle que $u^+ = u^{-1}$ et $\det u = 1$ (u^+ *étant l'adjointe de la matrice* u).

L'ensemble $SU(2)$ se trouve donc muni d'une structure de groupe.

puisque :

$$u^+ = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$$

et :

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

alors la relation $u^{+} = u^{-1}$ est équivalente aux relation $\delta = \overline{\alpha}$ et $\gamma = -\overline{\beta}$.

Ainsi toute matrice de $SU(2)$ est en fait de la forme :

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

Puisque $\det u = 1$, on a $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$. Inversement si u est une matrice de la forme (1.34) avec $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$, elle appartient au groupe $SU(2)$.

Ainsi chaque élément du groupe $SU(2)$ est défini par la donnée de deux nombres complexes (α, β) , tels que $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$ et réciproquement .

Si l'on pose $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, alors l'égalité :

$$|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$$

devient :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$$

Il s'ensuit que $SU(2)$ comme espace topologique, est homéomorphe à la sphère unité de l'espace réel à quatre dimensions.

Les nombres complexes (α, β), $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$, dépendent en fait de trois paramètres réels ; par exemple :

$|\alpha^2|$, $\arg \alpha$ et $\arg \beta$.

Si $\alpha\beta \neq 0$ il sera plus commode de prendre d'autre paramètres, appelés angles d'Euler.

Ce sont les paramètres φ, θ, ψ définis par :

$$|\alpha| = \cos \frac{\theta}{2} \ , \ \arg \alpha = \frac{\varphi + \psi}{2} \ , \ \arg \beta = \frac{\varphi - \psi + \pi}{2} \tag{1.35}$$

Les valeurs de φ, θ, ψ ne sont pas définies binuvoquement par les égalités (1.35).

Nous supposons de plus, que nous avons :

$$\begin{cases} 0 \leq \ddot{\varphi} < 2\pi, \\ 0 < \theta < \pi, \\ -2\pi \leq \psi < 2\pi. \end{cases} \tag{1.36}$$

Il est facile de vérifier qu'à tout couple de complexe (α, β) , $|\alpha^2| + |\beta^2| = 1$, $\alpha\beta \neq 0$ correspond un triplet (φ, θ, ψ) , satisfaisant aux conditions (1.36) , et un seul.

Des formules (1.35) on tire $|\beta| = \sin\frac{\theta}{2}$; d'où u s'écrira :

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) & i\sin\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \\ i\sin\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\exp -i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

Puis, il vient :

$$\cos\theta = 2\left|\alpha\right|^2 - 1$$

$$\exp(i\varphi) = -\frac{\alpha\beta i}{|\alpha|\,|\beta|}$$

$$\exp(\frac{i\psi}{2}) = \frac{\alpha\exp(-\frac{i\varphi}{2})}{|\alpha|}$$

Dans la suite, un rôle important sera joué par la décomposition suivante des matrices de $SU(2)$:

$$U = \begin{pmatrix} \exp(\frac{i\varphi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(\frac{i\psi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\psi}{2}) \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

1.4.2 La mesure invariante :

Puisque le groupe $SU(2)$ est compact, alors il possède une mesure invariante du, c'est à dire une mesure telle que :

$$\int f\left(u\right)du = \int f\left(u_0 u\right)du = \int f\left(u u_0\right)du = \int f\left(u^{-1}\right)du$$

pour toute fonction continue $f\left(u\right)$ et tout u_0 de $SU(2)$. Nous allons exprimer cette mesure au moyen des paramètres du groupe .

Considérons d'abord le groupe G des matrices non dégénérées :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

il dépend des deux paramètres complexes α et β. Par multiplication à droite d'un élément

$u_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\overline{\beta}_0 & \overline{\alpha}_0 \end{pmatrix}$ de $SU(2)$, les paramètres α et β subissent la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \acute{\alpha} = & \alpha_0\alpha - \overline{\beta}_0\beta \\ \acute{\beta} = & \beta_0\alpha + \overline{\alpha}_0\beta \end{cases}$$

de déterminant égal à un. Il s'ensuit que la mesure sur G $dg = d\alpha\ d\overline{\alpha}d\beta d\overline{\beta}$ oŭ $\alpha = i\alpha_2$, $d\alpha d\overline{\alpha} = -2id\alpha_1 d\alpha_2$ est invariante relativement à la multiplication à droite par des éléments de $SU(2)$.

Au lieu des paramètre $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, introduisons les paramètres r , φ , θ , ψ tels que :

$$\begin{cases} \alpha = r\ \cos\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \\ \beta = ir\ \sin\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \end{cases}$$

Par l'égalité (1.37), il suit que pour $r = 1$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ appartient au sous-groupe $SU(2)$, tandis que φ , θ , ψ sont les angles d'Euler de cette matrice.

Par un calcul simple, on écrit :

$$d\alpha d\overline{\alpha}d\beta d\overline{\beta} = \frac{1}{2}r^3\sin\theta dr d\theta d\varphi d\psi$$

Mais les éléments du groupe $SU(2)$ sont caractérisés par cette condition $r = 1$. Par conséquent, l'intégrale invariante sur $SU(2)$ s'exprime avec les angles d'Euler par la formule :

$$\int\limits_{SU(2)} f(u)\,du = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta d\theta d\varphi d\psi$$

$\left(\text{le facteur } \frac{1}{16\pi^2} \text{ permet de donner la mesure unité au groupe } SU(2) \text{ tout entier}\right)$.

Remarquons qu'en vertu de la compacité de $SU(2)$, l'intégrale est invariante non seulement à droite, mais aussi à gauche :

$$\int f(u)\,du = \int f(uu_0)\,du = \int f(u_0u)\,du = \int f\left(u^{-1}\right)du$$

L'expression :

$$\frac{1}{16\pi^2}\sin\theta d\theta d\varphi d\psi$$

de la mesure invariante sur $SU(2)$ a une interprétation géométrique simple. Elle ne diffère que du facteur $\frac{1}{2}$du produit de la mesure euclidienne normée $\frac{1}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$ sur la sphère à deux dimensions par la mesure euclidienne normée $\left(\frac{1}{2\pi}\right)d\psi$ sur le cercle.

1.4.3 L'algèbre de Lie du groupe SU(2) notée su(2) :

Puisque tout élément du groupe $SU(2)$ dépend de trois paramètres réels φ , θ et ψ ce groupe est donc une variété linéaire à trois dimensions dans l'espace des matrices $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ du second ordre .

Construisons l'espace tangent à $SU(2)$ au point $e = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Faisons pour cela passer trois courbes par le point e et déterminons leurs vecteurs tangents.

Si ces courbes ont été choisies de façon que leurs vecteurs tangents soient linéairement indépendants, alors ces vecteurs formeront une base de l'espace tangent à $SU(2)$ au point e .

Parmi les courbes qui passent par e, nous avons $g(t)$ telles que :

$$g(t+s) = g(t)\,g(s)\,,$$

avec :

$$-\infty \leq t, s \leq \infty.$$

Nous considérerons donc les trois sous-groupes, à un paramètre, Ω_1, Ω_2 , Ω_3, composés respectivement des matrices $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ et $\omega_3(t)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{t}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp -i\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Après un calcul simple, on montre que les matrices tangentes a_1 , a_2 et a_3à ces sous-groupes sont :

$$a_1 = \left.\frac{d\omega_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{i}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = \left.\frac{d\omega_2(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = \left.\frac{d\omega_3(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{i}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices a_1, a_2, a_3 sont linéairement indépendantes et forment une base de l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$, qui se compose ainsi des matrices $x_1a_1+ x_2a_2+ x_3a_3$, x_1, x_2, x_3 sont des réels.

Les crochets des matrices a_1, a_2, a_3 sont :

$$[a_1, a_2] = a_3 \quad ; \qquad [a_2, a_3] = a_1 \;\; ; \;\; [a_3, \sigma_2] = a_1 \tag{1.39}$$

1.5 Intégrale de chemin sur la variété SU(2) :

La représentation du groupe $SU(2)$ est donné par :

$$g(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{i\varphi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\varphi}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(\frac{i\psi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\psi}{2}) \end{pmatrix}$$

avec les domaines de variations :

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ -2\pi \leq \psi \leq 2\pi \end{cases}$$

Les éléments de matrice de la représentation unitaire irréductible à $(2J+1)$ dimensions dans l'espace de Hilbert sont les fonctions de Wigner :

$$\begin{aligned} d^J_{m,n}(g) &= \exp(-im\varphi)\, d^J_{m,n}(\tau) \exp(-in\psi) \\ J &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ..., \quad -J \leq m, n \leq J \end{aligned} \tag{1.40}$$

La fonction caractère :

$$\chi^J(\mathrm{g}) = \sum_{m=-J}^{J} d^J_{m,n}(g) = \frac{\sin(2J+1)\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \tag{1.41}$$

avec :

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(\varphi+\psi)}{2}\right) \tag{1.42}$$

La mesure invariante :

$$dg_j = \frac{1}{16\pi^2}\sinh\tau_j d\tau_j d\varphi_j d\psi_j \tag{1.43}$$

Soient (x^1, x^2, x^3, x^4) les coordonnées dans E_4, définies par :

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \quad , \quad x^3 = r\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \\ x^2 = r\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \quad , \quad x^4 = r\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \end{cases} \tag{1.44}$$

avec les domaines de variations :

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \psi \leq 4\pi \end{cases}$$

le propagateur est donné par la relation suivante :

$$K(r_b, r_a, t_b - t_a) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_j\right) \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^2 \prod_{j=1}^{N-1} r_j^3 dr_j 2\pi^2 dg_j \tag{1.45}$$

avec :

$$S_j = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right) \Delta r_j^2 + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) r_j r_{j-1} \left[1 - \frac{1}{2} tr \widehat{g}_j\right]. \tag{1.46}$$

En utilisant la relation asymptotique suivante :

$$\exp\left\{zTr\left(g\right)\right\} = \sum_J \left(2J+1\right) \frac{1}{z} I_{2j+1}\left(2z\right) \chi^{(J)}\left(g\right) \tag{1.47}$$

pour :

$$2z = \frac{mr_j r_{j-1}}{i\varepsilon\hbar}.$$

Substituons dans l'action :

$$\exp\left\{\frac{imr_j r_{j-1}}{\varepsilon\hbar}\left[1 - Tr\left(\widehat{g}_j\right)\right]\right\} \approx \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{mr_j r_{j-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_J \left(2J+1\right)$$

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left[J\left(J+1\right) + \frac{3}{16}\right]\frac{2\hbar^2\varepsilon}{mr_j r_{j-1}}\right\} \chi^{(J)}\left(\widehat{g}_j\right) \tag{1.48}$$

on obtient le propagateur suivant :

$$K(r_b, r_a, t_b - t_a) = \sum_J \frac{(2J+1)}{2\pi^2} K_J(r_b, r_a, t_b - t_a) \chi^{(J)}\left(g_a^{-1} g_b\right) \tag{1.49}$$

et la forme finale suivante :

$$K(r_b, r_a, t_b - t_a) = \left(r_b r_a\right)^{-\frac{3}{2}} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_j^J\right\} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

avec l'action :

$$S_j^J = \frac{m}{2\varepsilon}\Delta r_j^2 - \left[J\left(J+1\right) + \frac{3}{16}\right]\frac{2\hbar^2\varepsilon}{mr_j r_{j-1}} \tag{1.50}$$

1.6 Groupe SU(1,1) :

Comme le groupe $SU(2)$, le groupe de Lie $SU(1,1)$ qui en est une continuation analytique, joue aussi un rôle important dans les symétries physique. Nous donnerons dans ce qui suit les principales propriétés.

1.6.1 Paramétrisation :

$SU(1,1)$ est l'ensemble des matrices du second ordre de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\left|\alpha^2\right| - \left|\beta^2\right| = 1$$

$SU(1,1)$ muni de la multiplication des matrices, forme un groupe appelé groupe des matrices unimodulaires et quasi-unitaires du second ordre .

Il est facile de vérifier que, si $g \in SU(1,1)$ alors :

$$gsg^+ = s$$

oŭ :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $g\ s\ g^+ = s$ et $\det g = +1$ alors $g \in SU(1,1)$.

Comme il existe entre $SU(2)$ et $SO(3)$ " groupe de rotations dans E_4 réalisé sur une sphère " un épimorphisme, il existe aussi un épimorphisme entre $SU(1,1)$ et $SH(3)$ " groupe de rotations dans E_4 réalisé sur une hyperboloïde ou un cône ".

Ceci laisse voir beaucoup d'applications du groupe $SU(1,1)$, surtout en physique.

Une paramétrisation plus adéquate utilise les angles d'Euler qui sont dans le cas générale des nombres complexes.

Comment : puisque presque toute matrice de $SL(2,C)$ " groupe des matrices complexes unimodulaires du second ordre " se présente sous la forme suivante $SL(2,C)$:

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp -i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) & i\sin\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right) \\ i\sin\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\exp i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

ou θ , φ , ψ sont les angles d'Euler complexe .

Il est facile d'en retrouver celle de $SU(1,1)$ sachant que :

pour $u \in SU(1,1)$; $u \in SL(2,C)$

avec :

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne après identification θ imaginaire pur, φ et ψ réels. Remplaçons alors θ par $\tau = i\theta$ réel, alors u prend la forme suivante $u \in SU(1,1)$:

$$u = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\tau}{2}\exp -i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) & \sinh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right) \\ \sinh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) & \cosh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

avec les domaines de variations :

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \tau < \infty \\ -2\pi \leq \psi < 2\pi \end{cases}$$

qui assurent des relations binuvoques entre les paramètres et les éléments de $SU(1,1)$.

La formule (1.50) peut être écrite aussi sous la forme :

$$u = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{i\varphi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\tau}{2} & \sinh\frac{\tau}{2} \\ \sinh\frac{\tau}{2} & \cosh\frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp-(\frac{i\psi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\psi}{2}) \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

1.6.2 Mesure invariante :

Le groupe $SU(1,1)$ étant localement compact, il possède une mesure invariante, c'est a dire :

$\int \mathrm{f}(g)\ dg = \int \mathrm{f}(g, g_0)\ dg$; g_0 et $g \in SU(1,1)$

oŭ f est une fonction continue à support compact définie sur $SU(1,1)$.

Soit $g \in SU(1,1)$,

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

multiplions-le à droite par l'élément $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \overline{\beta}_0 & \overline{\alpha}_0 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$

il vient :

$$\acute{g} = gg_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \overline{\beta}_0 & \overline{\alpha}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha\ \alpha_0 + \beta\ \overline{\beta}_0 \\ \beta = \alpha\ \beta_0 + \beta\overline{\alpha}_0 \end{cases}$$

$g_0 \in SU(1,1)$, la transformation précédente a pour déterminant 1, il s'ensuit que sur $SU(1,1)$,

$dg = d\alpha\ d\overline{\alpha}\ d\beta\ d\overline{\beta}$ est invariante relativement à la multiplication à droite par des éléments de $SU(1,1)$.

La formule (1.50) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \alpha = r\cosh\frac{\tau}{2}\exp -i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) & , \quad \overline{\alpha} = r\sinh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right) \\ \beta = r\sinh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) & , \quad \overline{\beta} = r\cosh\frac{\tau}{2}\exp i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \end{cases}$$

avec la contrainte $r = 1$ qui est équivalente à $\det g = 1$.

Après un calcul simple on arrive à :

$$dg = \frac{1}{16\pi^2}\sinh\tau d\tau d\varphi d\psi. \qquad (1.53)$$

Ceci est retrouvé après l'introduction de la contrainte $\delta(r-1)$.

Ici le facteur $\frac{1}{16\pi^2}$ est choisi arbitrairement puisque le volume du groupe est infini .

1.6.3 L'algèbre de Lie du groupe SU(1,1) notée su(1,1) :

L'algèbre de Lie associée à $SU(1,1)$ est réalisée par les trois sous groupes à un paramètre respectivement composés des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & -\sinh\frac{t}{2} \\ -\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & i\sinh\frac{t}{2} \\ -i\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \exp -i\left(\frac{t}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp i\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

dont les matrices tangentes sont respectivement :

$$\left(\frac{i}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \left(\frac{i}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \left(\frac{i}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle peuvent être réduites aux matrices :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

appelées matrices de Pauli relatives au groupe $SU(1,1)$.

Ces matrices étant linéairement indépendantes, elles forment une base de l'algèbre de Lie associée à $SU(1,1)$. Leur relations de commutation sont données par :

$$[\sigma_1;\sigma_2] = -2i\sigma_3 \quad ; \quad [\sigma_2;\sigma_3] = -2i\sigma_1 \quad ; \quad [\sigma_3;\sigma_2] = -2i\sigma_1 \tag{1.55}$$

1.6.4 Représentations unitaires irréductibles de SU(1,1) :

Il est bien connu que les représentations unitaires irréductibles, $D^{l,\sigma}(g)$ de $SU(1,1)$ où l complexe et σ vaut 0 ou un demi, peuvent être divisées en deux séries fondamentales et une série dite complémentaire " *dans un certain espace de Hilbert*". On sait en plus, que la décomposition d'une fonction définie sur $SU(1,1)$ et de carré sommable, il ne figure que des éléments de représentations unitaires irréductibles. De plus, elles n'appartiennent qu'aux séries fondamentales. Ce fait ne nous laisse s'intéresser qu'à ces dernières :$D^{l,\sigma}(g)$

Séries continues :

$$l = -\frac{1}{2} + i\rho \begin{cases} \rho \geq 0 & m = 0, \pm 1, \pm 2, \text{....pour } \sigma = 0 \\ \rho \geq 0 & m = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \text{....pour } \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Séries discrètes :

$$l = -\frac{1}{2}, 0, \ldots\ldots \begin{cases} m = l+1, l+2, \ldots. \text{ pour } \sigma = + \\ m = -l-1, -l-2, \text{....pour } \sigma = - \end{cases}$$

Quand aux éléments de matrices de représentation, en utilisant la décomposition (1.51) des éléments de $SU(1,1)$ et l'action de $D^{l,\sigma}(g)$ sur l'espace de Hilbert "*espace de la représentation* ", il est possible de montrer que ces éléments de matrices sont donnés par :

$$d^{l,\sigma}_{m,n}(g) = \exp(-im\varphi)\, d^{l,\sigma}(\tau) \exp(-in\psi) \tag{1.56}$$

où $d^{l,\sigma}_{m,n}(\tau)$ sont les fonctions de Bargmann obtenues par une continuation analytique, en θ et en indice l, des fonctions de Wigner $d^{l,\sigma}_{m,n}(\theta) \in SU(2)$. Cette propriété découle du fait que $SU(1,1)$ est considéré comme continuation de $SU(2)$.

Pour $m \geq n$:

$$\begin{aligned} d^{l,+}_{m,n}(\tau) &= \left[\frac{1}{(m-n)}\right]\left[\frac{\Gamma(1+m+l)\,\Gamma(m-l)}{\Gamma(1+n+l)\,\Gamma(n-l)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^{-m-n}\left[\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^{m-n} \\ &\quad {}_2F_1\left(1-n+l, -n-l, 1+m-n; -\sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned} d^{l,-}_{m,n}(\tau) &= \left[\frac{1}{(m-n)}\right]\left[\frac{\Gamma(1-n+l)\,\Gamma(-n-l)}{\Gamma(1-m+l)\,\Gamma(-m-l)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^{m+n}\left[\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^{m-n} \\ &\quad {}_2F_1\left(1+m+l, m-l, 1+m-n; -\sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.58}$$

Pour $m \geq n$ on a : $d^{l,\sigma}_{m,n}(\tau) = (-1)^{m-n}\, d^{l,\sigma}_{n,m}(\tau)$

avec $d^{l,+}_{m,m}(\tau) = d^{l,-}_{m,m}(\tau)$

Les séries continues s'obtiennent par continuation analytique :

$$l \longrightarrow -\frac{1}{2} + i\rho$$

1.6.5 Analyse de Fourier sur le groupe SU(1,1) :

Toute fonction de carré sommable définie sur $SU(1,1)$ admet une décomposition en éléments matriciels de représentations, essentiellement constituée des séries fondamentales continues et discrètes . "*les séries* $D^{-\frac{1}{2},\sigma}(g)$ *sont exclues* ". Ces éléments matriciels forment ainsi un système orthogonal sur $SU(1,1)$.

Une telle orthogonalisation s'exprime par les relations suivantes :

$$\int\limits_{SU(1,1)} d^{\acute{l},\sigma}_{\acute{m},\acute{n}}(g)\, d^{l,\sigma}_{m,n}(g)\, dg = \begin{cases} \frac{\delta_{l,\acute{l}}\delta_{m,\acute{m}}\delta_{n,\acute{n}}}{(2l+1)} & \text{pour } \sigma = \pm \\ \frac{\delta(\rho-\acute{\rho})\delta_{m,\acute{m}}\delta_{n,\acute{n}}}{2\rho\tanh\pi(\rho+i\sigma)} & \text{pour } \sigma = 1, \frac{1}{2} \end{cases}$$

De la sorte, on aura la décomposition en séries de Fourier de toute fonction de carré sommable définie sur $SU(1,1)$ comme suit :

$$f(g) = \sum \left\{ \left[\sum_{2l=0} (2l+1) + \int_0^\infty d\rho 2\rho \tanh\pi(\rho+i\sigma) \right] \sum_{m,n} \widehat{\mathrm{f}}^{\sigma}_{m,n}(g)\, d^{l,\sigma}_{m,n}(g) \right\}$$

où

$$\widehat{\mathrm{f}}^{\sigma}_{m,n}(g) = \int\limits_{SU(1,1)} f(g)\, d^{l,\sigma*}_{m,n}(g)\, dg$$

et pour la partie continue, on effectue le remplacement :

$l \longrightarrow -\frac{1}{2} + i\rho$.

1.7 Intégrale de chemin sur la variété SU(1,1) :

Dans le but de construire le propagateur défini sur la variété $SU(1,1)$, nous utiliserons l'isomorphisme existant entre $SU(1,1)$ et la sphère définie dans l'espace pseudo euclidien $E_{2.2}$, muni de la métrique $g_{\mu\nu} = diag\{+1,+1,-1,-1\}$, et donc d'un produit scalaire :

$(x,x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2$.

En outre, pour la régularisation des intégrales, on ajoutera :

- une petite partie imaginaire positive à la masse, pour les composantes compactes (x^1, x^2)

- une petite partie imaginaire négative à la masse, pour les composantes non compactes (x^3, x^4)

Soient (x^1, x^2, x^3, x^4) les coordonnées dans $E_{2.2}$, définies par :

$$\begin{cases} x^1 = r\cosh\frac{\tau}{2}\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) & , \quad x^3 = r\sinh\frac{\tau}{2}\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \\ x^2 = r\sinh\frac{\tau}{2}\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) & , \quad x^4 = r\cosh\frac{\tau}{2}\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \end{cases} \tag{1.59}$$

où

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \tau \leq \infty \\ 0 \leq \psi \leq 4\pi \end{cases}$$

Ainsi définies, il est aisé de voir que ces relations établissent l'isomorphisme entre $SU(1,1)$ et la sphère unité définie dans $E_{2.2}$ par : $(x,x) = 1$.

L'action élémentaire d'une particule libre est définie dans $E_{2.2}$ par :

$$S(j, j-1) = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)\left[\left(x_j^1\right)^2 + \left(x_j^2\right)^2 - \left(x_j^3\right)^2 - \left(x_j^4\right)^2\right] \tag{1.60}$$

Le propagateur de Feynman relatif à cette particule dans cet espace est donné par l'intégrale fonctionnelle suivante :

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(b,a)\right\} \tag{1.61}$$

où

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}, t)$$

s'écrit sous la forme discrète, comme suit :

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)\left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1}d^4x_j \\ & \prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left(j,j-1\right)\right\}, \end{aligned} \tag{1.62}$$

$S\left(j,j-1\right)$ est l'action donnée par la formule (1.59) et la constante de normalisation est choisie de manière à satisfaire la condition :

$$\lim_{t_a\to t_b}K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\delta\left(x_b-x_a\right). \tag{1.63}$$

Exprimant le propagateur en fonction des paramètres définis par les relations (1.58), il vient :

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)\left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)$$

$$\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{8}r_j^3dr_j\sinh\tau_jd\tau_jd\varphi_jd\psi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(j,j-1\right)\right) \tag{1.64}$$

où $S\left(j,j-1\right)$ est exprimée aussi comme

$$S\left(j,j-1\right)=\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)\Delta r_j^2-\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)r_jr_{j-1}\left[1-\left(e_j.e_{j-1}\right)\right]. \tag{1.65}$$

Le vecteur position est représenté en coordonnées sphériques relatives à l'espace pseudo euclidien $E_{2.2}$ par : $x=\left(r,\tau,\varphi,\psi\right)$.

En vertu de l'isomorphisme existant entre $SU(1,1)$ et la pseudo sphère unité, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} g\left(\varphi,\tau,\psi\right) &= \begin{pmatrix} e^1-ie^2 & e^3-ie^4 \\ e^3+ie^4 & e^1+ie^2 \end{pmatrix} \\ &= e^1 1-i\left(e^2\sigma_3+e^3\sigma_1+e_4\sigma_2\right) \end{aligned} \tag{1.66}$$

où e^1, e^2 , e^3, e^4 sont les composantes de e dans $E_{2.2}$, et 1, σ_1, σ_2 , σ_3 sont les générateurs de l'algèbre de Lie de $SU(1,1)$. Par un simple calcul, il est aisé de vérifier que le produit scalaire s'écrit :

$$(e,\acute{e}) = \frac{1}{2}tr\left[g\left(\varphi,\tau,\psi\right)g^{-1}\left(\acute{\varphi},\acute{\tau},\acute{\psi}\right)\right]. \tag{1.67}$$

Ainsi donc s'écrira l'action élémentaire :

$$S\left(j,j-1\right) = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)\Delta r_j^2 + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)r_j r_{j-1}\left[1-\frac{1}{2}tr\widehat{g}_j\right] \tag{1.68}$$

où $g_j = g\left(\varphi_j,\tau_j,\psi_j\right)$ et $g_j = g_j g_{j-1}^{-1}$.

Pour qu'on puisse réaliser le propagateur sur la variété $SU(1,1)$, on doit tenir compte de la contrainte $r=1$, c-à-d, se situer sur la pseudo sphère unité de $E_{2.2}$. Une manière de le faire est de poser :

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\exp\left[\left(\frac{im}{2\varepsilon}\right)\Delta r_j^2\right] = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\delta\left(r_j,r_{j-1}\right). \tag{1.69}$$

Alors, en intégrant évidement l'expression (1.63) sur les variables r_j, on obtient :

$$\begin{aligned}\underset{pseudo-sph\grave{e}re\ unit\acute{e}}{K(x_b,t_b;x_a,t_a)} &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)\left(\frac{im}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)\\ &\prod_{j=1}^{N-1}2\pi^2 dg_j\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(j,j-1\right)\right),\end{aligned} \tag{1.70}$$

avec dg_j la mesure définie sur $SU(1,1)$:

$$dg_j = \frac{1}{16\pi^2}\sinh\tau_j d\tau_j d\varphi_j d\psi_j \tag{1.71}$$

et

$$S\left(j,j-1\right) = \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)\left[1-\frac{1}{2}tr\widehat{g}_j\right] \tag{1.72}$$

où l'on voit maintenant que l'action peut être considérée comme fonction définie sur

$SU(1,1)$. De ce fait, elle admettra le développement suivant :

$$f(g) = \sum_{\sigma} \left\{ \left[\sum_{2l=0} (2l+1) + \int_0^{\infty} d\rho 2\rho \tanh \pi (\rho + i\sigma) \right] \right.$$

$$\left. \sum_{m,n} \widehat{\mathrm{f}}^{\sigma}_{m,n}(g)\, d^{l,\sigma}_{m,n}(g) \right\}. \tag{1.73}$$

En outre, elle est fonction centrale, c-à-d :

$$f\left(g_0^{-1} g g_0\right) = f(g).$$

Le développement est restreint alors aux caractères des représentations notés $\chi^{l,\sigma}(g)$.

On aura alors :

$$\exp\left[\left(\frac{iz}{2}\right) tr(g)\right] = \sum \left\{ \left[\sum_{2l=0} (2l+1) + \int_0^{\infty} d\rho 2\rho \tanh \pi (\rho + i\sigma) \right] \right.$$

$$\left. \sum_{m,n} \left(\frac{2}{\pi z}\right) \left[K_{2l+1}(-iz) + (-1)^m K_{2l+1}(-iz)\right] d^{l,\sigma}_{m,n}(g) \right\} \tag{1.74}$$

L'expression précédente se déduit à :

$$\widehat{\mathrm{f}}^{\sigma}_{m,n}(l) = \left(\frac{2}{\pi z}\right) \left[K_{2l+1}(-iz) + (-1)^m K_{2l+1}(-iz)\right] \delta_{m,n} \tag{1.75}$$

où les K_l représentent les fonctions de Bessel modifiées.

Profitons du fait que $\varepsilon \longrightarrow 0$, pour ne garder que le développement :

$$\widehat{\mathrm{f}}^{\sigma}_{m,n}(l) = \left(\frac{\delta_{m,n}}{2\pi^2}\right) \left(\frac{2\pi}{iz}\right) \left(\frac{2i\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -iz - i\frac{(2l+1)^2 - \frac{1}{4}}{2z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\} \tag{1.76}$$

il est à noter que pour cette formule, il y a distinction entre les séries discrètes et continues

.

1) Les séries discrètes sont la conséquence des composantes compactes, la masse régularisante est alors $m + i\eta$ donc $\operatorname{Im} z \geq 0$.

2) Les séries continues sont la conséquence des composantes non compactes, la masse régularisante est alors $m - i\eta$ donc $\operatorname{Im} z \leq 0$.

On obtient immédiatement l'expression suivante, en appliquant (1.73) :

$$\exp\left[-\left(\frac{im}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{1}{2}tr\left(g\right)\right)\right] = \sum\left[\sum_{2l=0}^{\infty}(2l+1)\right. .$$

$$\left.+\int_0^{\infty} d\rho 2\rho \tanh\pi\left(\rho+i\sigma\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi^2}\right)\left(\frac{2\pi\varepsilon}{im}\right)\left(\frac{2i\pi\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.\exp\left\{-i\frac{(2l+1)^2-\frac{1}{4}}{2m}\varepsilon\right\}\chi^{l,\sigma}\left(g\right)\right] \tag{1.77}$$

A ce stade, insérons ce développement dans la formule (1.70) on aura :

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N-1} dg_j \prod_{j=1}^{N}\left\{\sum\left\{\left[\sum_{2l_j=0}^{\infty}(2lj+1)\right]\right\}\right\}$$

$$+\int_0^{\infty} d\rho_j 2\rho_j \tanh\pi\left(\rho_j+i\sigma_j\right)\left(\frac{1}{2\pi^2}\right)\exp\left\{-i\frac{(2l+1)^2-\frac{1}{4}}{2m}\varepsilon\right\}\chi^{l_j,\sigma_j}\left(g_j g_{j-1}\right) \tag{1.78}$$

De l'orthogonalité de la fonction caractère, il vient :

$$\int\limits_{SU(1,1)} \chi^{\lambda,\sigma}\left(\H{g}\acute{g}^{-1}\right)\chi^{\acute{\lambda},\acute{\sigma}}\left(\acute{g}g^{-1}\right)d\acute{g} = \frac{\delta_{\sigma,\acute{\sigma}}\delta\left(\lambda,\acute{\lambda}\right)}{d_\lambda}\chi^{\lambda,\sigma}\left(\H{g}g^{-1}\right) \tag{1.79}$$

où

$$\delta\left(\lambda,\acute{\lambda}\right) = \begin{cases} \delta_{\lambda,\acute{\lambda}} & \text{cas discret} \\ \delta\left(\lambda,\acute{\lambda}\right) & \text{cas continu} \end{cases}$$

et

$$d_\lambda = \begin{cases} 2l+1 & \text{cas discret} \\ 2\rho \tanh \pi \left(\rho + i\sigma\right) & \text{cas continu} \end{cases}$$

.

Il est clair que l'expression (1.78) se simplifie à :

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{1}{2\pi^2}\right) \sum_\sigma \left\{ \sum_{2l_j=0}^{\infty} (2l+1)\, \chi^{l,\sigma}\left(g_a g_b^{-1}\right) \exp\left\{-iE_l\left(t_a - t_b\right)\right\} \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty d\rho 2\rho \tanh \pi \left(\rho + i\sigma\right) \chi^{-\frac{1}{2}+i\rho,\sigma}\left(g_a g_b^{-1}\right) \exp\left\{-iE_{-\frac{1}{2}+i\rho}\left(t_a - t_b\right)\right\} \right\} \tag{1.80}$$

avec :

$$E_l = \frac{(2l+1)^2 - \frac{1}{4}}{2m}$$

et

$$E_{-\frac{1}{2}+i\rho} = E_{l=-\frac{1}{2}+i\rho} = \frac{(2l+1)^2 - \frac{1}{4}}{2m}.$$

Finalement, il ne reste que la séparation des parties initiales et finales. Elle résulte essentiellement de l'orthogonalité des éléments matriciels des représentations du groupe $SU(1,1)$:

$$\chi^{\lambda,\sigma}\left(g_a g_b^{-1}\right) = \sum_{m,n} d_{m,n}^{l,\sigma}\left(g_b\right) d_{m,n}^{l,\sigma *}\left(g_a\right)$$

Chapitre 2

Le problème de l'Oscillateur et de Coulomb sur S^n via la variété $SU(2)$:

2.1 Introduction :

Lorsqu'un système physique possède une symétrie sphérique (*potentiel central*), c'est à dire qu'il est invariant par les rotations spatiales, il est nécessaire d'introduire les coordonnées sphériques qui nous permettent d'écrire le propagateur sous une forme plus simple où les variables angulaires sont séparées de la variable radiale. Dans ce chapitre nous allons établir une relation entre les deux systèmes de **Coulomb** et de l'**Oscillateur** sur une sphère à n dimensions. Par un calcul direct, on montre que le propagateur relatif au potentiel de l'**Oscillateur** se ramène au propagateur du potentiel de Pöschl-Teller. Par une transformation spatio-temporelle appliquée au propagateur relatif au potentiel de **Coulomb**, on obtient une forme du propagateur équivalente à celle du problème de l'**Oscillateur** ($potentiel\ de\ Pöschl - Teller$).

En exprimant le propagateur du potentiel de Pöschl-Teller en termes d'intégrale de chemin définie sur la variété $SU(2)$; le spectre d'énergie et la fonction d'onde de chaque problème sont déduits directement.

2.2 Le propagateur en coordonnées hypersphériques :

Le mouvement quantique non relativiste d'une particule de masse M, soumise à un potentiel central $V(\mathrm{r})$ dans un espace Euclidien à n dimensions, est décrit par un propagateur qui a la forme suivante :

$$K(r_b, r_a; t_b - t_a) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_j\right\} \prod_{j=1}^{N} (\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j})^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d^n r_j \tag{2.1}$$

avec l'action discrète suivante :

$$S_j = \frac{M}{2\tau_j}(\Delta r_j)^2 - V(\mathrm{r}_j)\tau_j. \tag{2.2}$$

Dans ce chapitre nous allons traiter le problème de **Coulomb** et de l'**Oscillateur** dans un espace sphérique, qui est un espace courbe avec une courbure constante et positive noté S^n.

L'élément de ligne de cet espace est donné en coordonnées sphériques par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(\mathrm{r})d\mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^2[d\theta_{(1)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}d\theta_{(2)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}\sin^2\theta_{(2)}d\theta_{(3)}^2 + .. \\ &\quad ... + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-4)}d\theta_{(n-3)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-3)}d\theta_{(n-2)}^2 \\ &\quad + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-2)}d\varphi^2] \end{aligned}$$

où $f(\mathrm{r}) = (1 - \frac{\mathrm{r}^2}{R^2})^{-1}$.

On peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 d\chi^2 + R^2\sin^2\chi[d\theta_{(1)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}d\theta_{(2)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}\sin^2\theta_{(2)}d\theta_{(3)}^2 + .. \\ &\quad ... + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-4)}d\theta_{(n-3)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-3)}d\theta_{(n-2)}^2 \\ &\quad + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-2)}d\varphi^2] \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec $\sin\chi = \frac{r}{R}$; avec les domaines de variations de χ et $\theta_{(1)}, ..., \theta_{(n-2)} \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Le propagateur dans l'espace courbé est donné par :

$$\begin{aligned} K(r_b, r_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \prod_{j=1}^{N} (\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j})^{\frac{n}{2}} \\ & \prod_{j=1}^{N-1} R^n \sin^{n-1}\chi_j d\chi_j \sin^{n-2}\theta_{(1)j} d\theta_{(1)j}.. \\ & ... \sin^2\theta_{(n-3)j} d\theta_{(n-3)j} \sin\theta_{(n-2)j} d\theta_{(n-2)j} d\varphi_{j.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'élément de volume infinitesimal dans cet espace courbe est donné par :

$$\begin{aligned} d^n r &= \sqrt{|g|} d^n q \\ &= R^n \sin^{n-1}\chi d\chi \sin^{n-2}\theta_{(1)} d\theta_{(1)} ... \sin^2\theta_{(n-3)} d\theta_{(n-3)} \sin\theta_{(n-2)} d\theta_{(n-2)} d\varphi \end{aligned}$$

avec $g = det \left\| g_{\mu\nu} \right\|$ et $g_{\mu\nu}$la métrique de cet espace et S_j est l'expression discrète de l'action dans cet espace :

$$S_j = \frac{M}{2\tau_j}(\Delta s_j)^2 - V(\chi_j)\tau_j. \quad (2.5)$$

L'expression discrète de l'élément de ligne dans un espace courbe avec une courbure constante et positive à n dimensions, est [**11**] :

$$(\Delta s_j)^2 = 2R^2(1 - \cos\omega_j) + n(n-2)\frac{\hbar^2\tau_j^2}{4M^2R^2}. \quad (2.6)$$

Substituons(2.6)dans (2.5), l'action prend la forme suivante :

$$S_j = \frac{MR^2}{\tau_j}(1 - \cos\omega_j) + \frac{n(n-2)\hbar^2}{8MR^2}\tau_j - V(\chi_j)\tau_j \quad (2.7)$$

avec : $\cos\omega_j = \frac{1}{R^2}\left(\overrightarrow{r}_j . \overrightarrow{r}_{j-1}\right)$,et :

$$r_j = \begin{pmatrix} R\cos\chi_j \\ R\sin\chi_j\cos\theta_{(1)j} \\ R\sin\chi_j\sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(2)j} \\ \vdots \\ R\sin\chi_j\sin\theta_{(1)j}...\sin\theta_{(n-2)j}\cos\varphi_j \\ R\sin\chi_j\sin\theta_{(1)j}...\sin\theta_{(n-2)j}\sin\varphi_j \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

alors :

$$\cos\omega_j = \cos\chi_j\cos\chi_{j-1} + \sin\chi_j\sin\chi_{j-1}\cos\Theta_{(1)(j,(j-1))} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \cos\Theta_{(1)(j,(j-1))} &= \cos\theta_{(1)j}\cos\theta_{(1)(j-1)} + \sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(1)(j-1)}\cos\Theta_{(2)(j,(j-1))} \\ &\vdots \\ \cos\Theta_{(\rho)(j,(j-1))} &= \cos\theta_{(\rho)j}\cos\theta_{(\rho)(j-1)} + \sin\theta_{(\rho)j}\sin\theta_{(\rho)(j-1)}\cos\gamma_{(\rho+1)(j,(j-1))} \qquad (2.10) \\ &\vdots \qquad\qquad (1 \leq \rho \leq n-3) \\ \cos\Theta_{(n-2)(j,(j-1))} &= \cos\theta_{(n-2)j}\cos\theta_{(n-2)(j-1)} + \sin\theta_{(n-2)j}\sin\theta_{(n-2)(j-1)}\cos\Delta\varphi \end{aligned}$$

oŭ :

$$\begin{aligned} \cos\Delta\varphi &= \cos(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \\ &= \cos\varphi_j\cos\varphi_{j-1} + \sin\varphi_j\sin\varphi_{j-1} \end{aligned}$$

A partir de (2.9) on peut écrire $\cos\omega_j$ comme suit :

$$\cos\omega_j = \cos\Delta\chi_j - \sin\chi_j\sin\chi_{j-1}\left(1 - \cos\Theta_{j,(j-1)}\right),$$

notons : $\Theta_{(1)(j,(j-1))} = \Theta_{j,(j-1)}$.

Alors l'action devient :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{\tau_j}\left[(1-\cos\Delta\chi_j)+\sin\chi_j\sin\chi_{j-1}(1-\cos\Theta_{j,j-1})\right] \\ &\quad -V(\chi_j)\tau_j+\left(\frac{n(n-2)\hbar^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant le développement de la fonction cosinus jusqu'à l'ordre 4 :

$$\cos\Delta\chi_j \simeq 1-\frac{1}{2!}(\Delta\chi_j)^2+\frac{1}{4!}(\Delta\chi_j)^4,$$

autrment dit :

$$(1-\cos\Delta\chi_j) \simeq \frac{1}{2}(\Delta\chi_j)^2-\frac{1}{24}(\Delta\chi_j)^4. \tag{2.12}$$

En remplaçant (2.12)dans (2.11) ,on aura :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{\tau_j}\left[\frac{1}{2}(\Delta\chi_j)^2-\frac{1}{24}(\Delta\chi_j)^4\right]+\frac{MR^2}{\tau_j}\sin\chi_j\sin\chi_{j-1}(1-\cos\Theta_{j,j-1}) \\ &\quad -V(\chi_j)\tau_j+\left(\frac{n(n-2)\hbar^2}{8MR^2}\right)\tau_j \end{aligned} \tag{2.13}$$

et pour $Re\ a>0$ (a : $grand$), on a la formule suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx \simeq \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx.$$

Remplaçons le terme d'ordre quatre $(\Delta\chi_j)^4$ par un terme équivalent :

$$bx^4 \sim \frac{3b}{4a^2} \quad \text{dans notre cas} \begin{cases} b=\left(-\frac{iMR^2}{24\hbar\tau_j}\right) \\ a=\left(\frac{MR^2}{2i\hbar\tau_j}\right) \end{cases}$$

alors :

$$-\left(\frac{MR^2}{24\tau_j}\right)(\Delta\chi_j)^4 \sim \left(\frac{\hbar^2\tau_j}{8MR^2}\right)$$

Nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 + \left(\frac{MR^2}{\tau_j}\right)\sin^{\Lambda 2}\chi_j - \left(\frac{MR^2}{\tau_j}\right)\sin^{\Lambda 2}\chi_j\cos\Theta_{j,(j-1)} \\ & -V(\chi_j)\tau_j + \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \end{aligned} \tag{2.14}$$

oŭ l'on a posé : $\sin^{\Lambda 2}\chi_j = \sin\chi_j \sin\chi_{j-1}$.

La présence du terme composé $\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{MR^2}{\tau_j}\right)\sin^{\Lambda 2}\chi_j\cos\Theta_{j,(j-1)}\right]$dans l'expression de l'action, rend les intégrations sur les variables χ, $\theta_{(1)}$, $\theta_{(2)}$, ..., $\theta_{(n-2)}$ et φ difficiles. Pour cela décomposons ce terme à l'aide de la formule [**12**, **13**] :

$$\exp(z\cos\Theta) = \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{l=0}^{\infty}(l+\nu)I_{l+\nu}(z)C_l^{\nu}(\cos\Theta), \;\; \nu \neq 0, -1, -2, ..,$$

où $I_{l+\nu}(z)$ sont les fonctions de Bessel modifiées [**14**] et $C_l^{\nu}(\cos\Theta)$ sont les polynômes de Gegenbauer [**15**] qui sont les polynômes de Legendre généralisés.

Dans notre cas :

$$z = \frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j},$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\cos\Theta\right) &= \left(\frac{2i\hbar\tau_j}{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\nu}\Gamma(\nu) \\ & \sum_{l=0}^{\infty}(l+\nu)I_{l+\nu}\left(\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\right)C_l^{\nu}(\cos\Theta). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituons (2.15) dans (2.14), l'expression du propagateur est la suivante :

$$\begin{aligned} K(r_b,r_a;t_b-t_a) &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{Nn}{2}} \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_N=0}^{\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} R^n \sin^{n-1}\chi_j d\chi_j \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \\ & \left[\prod_{j=1}^{N} I_{l_j+\nu}\left(\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\right)\left(\frac{2i\hbar\tau_j}{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\nu}\right] \\ & \int\prod_{j=1}^{N-1}\left(d\theta_{1j}\sin{}_{1j}^{n-2}\theta_{1j}\right)\left(d\theta_{2j}\sin{}^{n-3}\theta 2j\right)\ldots \\ & ..\left(d\theta_{(n-3)j}\sin^2\theta_{(n-3)j}\right)\left(d\theta_{(n-2)j}\sin\theta_{(n-2)j}\right)d\varphi_j \\ & \prod_{j=1}^{N}\underbrace{\Gamma(\nu)\left(l_j+\nu\right)C_{l_j}^{\nu}(\cos\Theta_{i,j-1})}_{\overline{C}_{l_j}^{\nu}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

avec :

$$S_j=\frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2+\frac{MR^2}{\tau_j}\sin^{\Lambda 2}\chi_j-V(\chi_j)\tau_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \tag{2.17}$$

Notons :

$$\overline{C}_l^{\nu}(\cos\Theta_{i,j-1})=\Gamma(\nu)\left(l+\nu\right)C_l^{\nu}(\cos\Theta_{i,j-1})$$

et

$$\widetilde{C}_n^{\nu}(\cos\alpha)=\left(\frac{n!\,(n+\nu)\,2^{2\nu-1}}{\pi\Gamma(2\nu+n)}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)C_n^{\nu}(\cos\alpha).$$

En appliquant le théorème d'addition [**16**], on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{C}_{l_j}^{\nu}(\cos\Theta_{j,j-1}) &= 2\pi\pi^{\nu}\sum_{k_1=0}^{l_j}\sum_{k_2=0}^{k_1}\ldots\sum_{k_{(n-2)}=0}^{k_{(n-3)}}\sum_{m=-k_{(n-2)}}^{k_{(n-2)}}\left(\sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(1)(j-1)}\right)^{k_1} \\ & \left(\sin\theta_{(2)j}\sin\theta_{(2)(j-1)}\right)^{k_2}\ldots\left(\sin\theta_{(n-3)j}\sin\theta_{(n-3)(j-1)}\right)^{k_{2(n-2)}} \\ & \tilde{C}_{l_j-k_1}^{\nu+k_1}(\cos\theta_{(1)j})\tilde{C}_{l_j-k_1}^{\nu+k_1}(\cos\theta_{(1)(j-1)}) \\ & \tilde{C}_{k_1-k_2}^{\nu-\frac{1}{2}+k_2}(\cos\theta_{(2)j})\tilde{C}_{k_1-k_2}^{\nu-\frac{1}{2}+k_2}(\cos\theta_{(2)(j-1)}) \\ & \ldots\tilde{C}_{k_{(n-3)}-k_{(n-2)}}^{1+k_{(n-2)}}(\cos\theta_{(n-3)j})\tilde{C}_{k_{(n-3)}-k_{(n-2)}}^{1+k_{(n-2)}}(\cos\theta_{(n-3)(j-1)}) \\ & Y_{k_{(n-2)}}^{m*}(\theta_{(n-2)j};\varphi_j)Y_{k_{(n-2)}}^{m}(\theta_{(n-2)(j-1)},\varphi_{(j-1)}) \end{aligned}$$

et grâce aux relations d'orthogonalité des fonctions $\tilde{C}_m^\nu$ et $Y_l^m(\Omega)$ suivantes :

$$\int_0^\pi d\alpha \sin^{2\nu}\alpha \tilde{C}_n^\nu(\cos\alpha)\tilde{C}_m^\nu(\cos\alpha) = \delta_{n,m}$$

et

$$\int Y_l^{m^*}(\Omega)\, Y_{\grave{l}}^{\grave{m}}(\Omega)\, d\Omega = \delta_{l\grave{l}}\delta_{m\grave{m}}$$

Nous donnons à ν la valeur fixe $\frac{p}{2}$ (avec $p = (n-2)$)et en intégrant la partie angulaire dans l'expression :

$$\begin{aligned} &\int \prod_{j=1}^{N-1} \left(d\theta_{(1)j} \sin^p \theta_{(1)j}\right) \left(d\theta_{(2)j} \sin^{p-1}\theta_{(2)j}\right) ...d\varphi_j \prod_{j=1}^{N} \overline{C}_{l_j}^{\frac{p}{2}}(\cos\Theta_{j,j-1}) \\ = \quad & \left(2\pi\pi^{\frac{p}{2}}\right)^{N-1} \overline{C}_l^{\frac{p}{2}}(\cos\Theta_{a,b}) \prod_{j=1}^{N} \delta_{l_j,l_{j-1}} \end{aligned}$$

avec $\Theta_{a,b} = (r_a, r_b)$.

Le propagateur prend alors la forme suivante :

$$K(r_b, r_a; t_b - t_a) = \sum_{l=0}^{\infty} K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) \frac{(2l+n-2)}{4(\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(\frac{n}{2} - 1) C_l^{\frac{n}{2}-1}(\cos\Theta_{a,b}), \tag{2.18}$$

où la forme du propagateur radial est donnée par :

$$K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) = \lim_{N\to\infty} (\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j})^{\frac{N(p+2)}{2}} \left(2^{p+1}\pi\right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} R^{p+2}(\sin\chi_j)^{p+1} d\chi_j$$

$$\left[\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{i\hbar\tau_j\pi}{2MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\frac{p}{2}} I_{l+\frac{p}{2}}\left(\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\right)\right] \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\}, \tag{2.19}$$

avec :

$$S_j = \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{MR^2}{\tau_j}\sin^{\Lambda 2}\chi_j - V(\chi_j)\tau_j + \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \tag{2.20}$$

Simplifions le calcul à l'aide de l'expression asymptotique [**17**] des fonctions de Bessel modifiées :

$$I_\gamma\left(\frac{\grave{z}}{\tau}\right)\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow}\left(\frac{\tau}{2\pi\grave{z}}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{\grave{z}}{\tau}-\frac{1}{2}\frac{\tau}{\grave{z}}\left(\gamma^2-\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Dans notre cas on a :

$$z=\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}=\frac{\grave{z}}{\tau_j}\text{ alors }\grave{z}=\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar},$$

avec :

$$\gamma=\left(l+\frac{P}{2}\right).$$

La fonction de Bessel devient :

$$\begin{aligned}&I_{l+\frac{P}{2}}\left(\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau}\right)\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow}\left(\frac{\tau_i\hbar}{2\pi MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\exp\left\{\frac{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau}-\frac{1}{2}\frac{i\hbar\tau}{MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\left(\left(l+\frac{P}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)\right\}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

La partie radiale du propagateur (2.19) ,devient alors :

$$\begin{aligned}K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)\;&=\;\left[R^n(\sin\chi_a\sin\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\}\\&\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{MR^2}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j\end{aligned}\tag{2.22}$$

avec l'action :

$$\begin{aligned}S_j\;&=\;\frac{MR^2}{2\tau_j}\left(\Delta\chi_j\right)^2-\frac{\hbar^2\tau_j}{2MR^2\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\\&-V(\chi_j)\tau_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Faisons le changement suivant $\tau_j = R^2\sigma_j$. Le propagateur dans ce cas est donné par :

$$\begin{aligned} K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) &= \left[R^n(\sin\chi_a\sin\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \\ &\quad \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j, \end{aligned} \tag{2.24}$$

avec l'action :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sin^{\Lambda 2}\chi_j}[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}] \\ &\quad -R^2V(\chi_j)\sigma_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j. \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.2.1 Le problème de l'Oscillateur sur S^n via la variété SU(2) :

Le potentiel de l'**Oscillateur** sur une sphère à n dimensions est le suivant :

$$V(\chi)=\frac{\omega^2R^2}{2}\tan^2\chi,$$

sous la forme discrète, il s'écrit comme :

$$V(\chi_j)=\frac{\omega^2R^2}{2}\left(\frac{1}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}-1\right). \tag{2.26}$$

Substituons l'expression du potentiel (2.26) dans (2.25), nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\omega^2R^4\left(\frac{1}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}-1\right)\sigma_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j, \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\ & -\frac{\omega^2R^4\sigma_j}{2\cos^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{1}{2}\omega^2R^4\sigma_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j, \end{aligned}$$

quand écrira sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\ & +\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j, \end{aligned} \tag{2.27}$$

avec :

$$\begin{cases} k^2=\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2 \\ \lambda^2=\left(\frac{M}{\hbar^2}\omega^2R^4+\frac{1}{4}\right)^2 \end{cases}.$$

Le propagateur (2.24) devient :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\left[R^n\left(\sin\chi_a\sin\chi_b\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j$$

Autrement dit :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\left[R^n\left(\sin\chi_a\sin\chi_b\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j$$

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{M}{2\sigma_j}\left(\Delta\chi_j\right)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}\right]\right.\right. \\ &\left.\left.+\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

qu'on préfère réécrire sous la forme suivante :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\left[R^n\left(\sin\chi_a\sin\chi_b\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)$$

avec :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{M}{2\sigma_j}\left(\Delta\chi_j\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}\right]+\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j\right]\right\}. \tag{2.29}$$

En utilisant l'approximation suivante :

$$\frac{1}{2}(\Delta\chi_j)^2\simeq(1-\cos\Delta\chi_j)+\frac{1}{24}(\Delta\chi_j)^4. \tag{2.30}$$

et substituons (2.31) dans (2.30) ,on aura :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[(1-\cos\Delta\chi_j)\right.$$

$$+\frac{M}{24\sigma_j}(\Delta\chi_j)^4-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}\right]$$

$$\left.+\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j\Bigg]\right\}. \tag{2.31}$$

En utilisant la relation suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx\simeq\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx$$

et en remplaçant le terme d'ordre quatre $(\Delta\chi_j)^4$ par un terme équivalent, nous obtenons le résultat suivant :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\int\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\Delta\chi_j\right)$$

$$-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\chi_j}+\frac{1}{4}\right]+\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j]\}. \tag{2.32}$$

Vu la présence d'un mur impénétrable à $\chi=\frac{\pi}{2}$, on restreinte l'étude à $\chi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On pose ensuite :

$$\chi=\frac{\theta}{2}$$

avec :

$$\begin{cases} 0<\chi<\frac{\pi}{2} \\ 0<\theta<\pi \end{cases}$$

donc le propagateur devient :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{2}d\theta_j\prod_{j=1}^{N}\exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\frac{\Delta\theta_j}{2}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\frac{\theta_J}{2}}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\frac{\theta_J}{2}}+\frac{1}{4}\right]+\left(\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right)\sigma_j]\}. \tag{2.33}$$

Le potentiel inclus dans (2.34) a la forme du potentiel de Pöschl-Teller, et sa résolution repose essentiellement sur les propriétés de son groupe dynamique $SU(2)$. Alors, il est nécessaire de ramener le propagateur relatif au potentiel de Pöschl-Teller à un propagateur défini sur la variété $SU(2)$, par l'introduction de deux angles d'Euler supplémentaires.

Il s'agit maintenant, d'appliquer la relation asymptotique suivante (*pour* z : $g$rand *et* m *entier*) **[18]** :

$$\exp\left[-\frac{1}{2z}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\right]=\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\exp\left[im\alpha-z\left(1-\cos\alpha\right)\right]d\alpha,$$

aux deux termes de l'exponentielle dans (2.34) :

$$\exp\left(\frac{k^2-\frac{1}{4}}{2\left(\frac{M\sin^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{i\hbar\sigma_j}\right)}\right) = \left(\frac{M\sin^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\exp\{\frac{i}{\hbar}[\hbar k\beta_j+\left(\frac{M\sin^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{\sigma_j}\right)(1-\cos\beta_j)]\}d\beta_j(2.34)$$

$$\text{cxp}\left(\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{2\left(\frac{M\cos^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{i\hbar\sigma_j}\right)}\right) = \left(\frac{M\cos^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\exp\{\frac{i}{\hbar}[\hbar\lambda\alpha_j+\left(\frac{M\cos^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{\sigma_j}\right)(1-\cos\alpha_j)]\}d\alpha_j(2.35)$$

la substitution des expressions asymptotiques (2.35) et (2.36) dans(2.34) , conduit à :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \frac{1}{2}(\sin\theta_b\sin\theta_a)^{\frac{1}{2}}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{3}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{4}\sin\theta_j d\theta_j$$
$$\prod_{j=1}^{N}d\alpha_j d\beta_j\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\frac{\Omega_j}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\hbar\left(\lambda\alpha_j+k\beta_j\right)-\frac{\hbar^2\sigma_j}{8M}+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\sigma_j\right]\right\}, \tag{2.36}$$

avec

$$\cos\frac{\Omega_j}{2}=\sin\frac{\theta_j}{2}\sin\frac{\theta_{j-1}}{2}\cos\beta_j+\cos\frac{\theta_j}{2}\cos\frac{\theta_{j-1}}{2}\cos\alpha_j. \tag{2.37}$$

D'autre part, le changement des variables α_j , β_j en angles d'Euler $\varphi_j\in[0,2\pi]$ et $\psi_j\in[0,4\pi]$ définies par la relation :

$$\begin{cases}\alpha_j=\frac{1}{2}\left(\Delta\psi_j+\Delta\ \varphi_j\right)\\ \beta_j=\frac{1}{2}\left(\Delta\psi_j-\Delta\ \varphi_j\right)\end{cases}$$

ct :

$$\int\limits_0^{2\pi}d\alpha_j\int\limits_0^{2\pi}d\beta_j=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}d\psi,$$

avec la condition $\varphi_a = \psi_a = 0$, donnent alors :

$$\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) = \frac{1}{4}(\sin\theta_b \sin\theta_a)^{\frac{1}{2}} \exp\{\frac{i}{\hbar}[-\frac{\hbar^2}{8M} + \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R^4 (s_b - s_a)]\}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{4\pi} Q(\theta_b, \varphi_b, \psi_b; \theta_a, 0, 0; \sigma) \exp\left\{i\left(\frac{\lambda+k}{2}\right)\varphi_b + \left(\frac{\lambda-k}{2}\right)\psi_b\right\} d\psi_b d\varphi_b, \quad (2.38)$$

avec

$$Q(\theta_b, \varphi_b, \psi_b; \theta_a, 0, 0; \sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\pi} \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\sigma_j}\right)^{\frac{3}{2}} \prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{8}\sin\theta_j d\theta_j d\varphi_j d\psi_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\frac{\Omega_j}{2}\right)\right\}, \quad (2.39)$$

et

$$\tilde{S}_j = \frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\frac{\Omega_j}{2}\right), \quad (2.40)$$

qui n'est rien d'autre qu'une intégrale de chemin définie sur la sphère S^3 :

$$Q(\theta_b, \varphi_a, \psi_b; \theta_a, 0, 0; \sigma) = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\sigma_j}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.41)$$

$$\prod_{j=1}^{N-1} 2\pi^2 dg_j \prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\tilde{S}_j\right\},$$

avec :

$$\tilde{S}_j = \frac{M}{\sigma_j}(1 - Tr\widehat{g}_j).$$

L'isomorphisme qui existe entre $SU(2)$ et la sphère unité, nous permet d'écrire :

$$Q(\theta_b, \varphi_b, \psi_b; \theta_a, 0, 0; \sigma) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{J=\left(\frac{\lambda+K}{2}\right)}^{\infty}(2J+1)\, C_{2J}^{1}\left(\cos\frac{\Omega}{2}\right) \exp\left\{-\frac{i\hbar}{2M}\left[(2J+1)^2 - \frac{1}{4}\right]\right\}, \quad (2.42)$$

avec :

$$C^1_{2J}\left(\cos\frac{\Omega}{2}\right) = \sum_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)=-J}^{J} \exp\left\{-i\left(\frac{\lambda+K}{2}\right)\varphi_b\right\}\exp\left\{-i\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)\psi_b\right\}$$
$$d^J_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_b)\, d^{J*}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_a)\,, \tag{2.43}$$

dont l'intégration fait intervenir les fonction de Wigner $d^J_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta)$ pour lesquelles J est entier ou demi entier dépendant de J_0, où $J_0 = \max\left\{\frac{1}{2}\left|\lambda-K\right|, \frac{1}{2}\left|\lambda+K\right|\right\}$ avec $J_0 = \left(\frac{\lambda+K}{2}\right)$, ainsi $J = n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right)$.

Sachant que : $\sigma_j = \frac{1}{R^2}\tau_j$.Insérons l'expression de J, après l'intégration sur φ_b, ψ_b on aura :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = (\sin\theta_b\sin\theta_a)^{\frac{1}{2}}\sum_{J=\left(\frac{\lambda+K}{2}\right)}^{\infty}(2J+1)$$
$$d^J_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_b)\, d^{J*}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_a)$$
$$\exp\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}\left((2J+1)^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\omega^2R^4]\,(t_b-t_a)\}, \tag{2.44}$$

Par conséquence, le propagateur sera :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \left[R^n\left(\sin\frac{\theta_b}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)$$
$$= \left[R^n\left(\sin\frac{\theta_b}{2}\sin\frac{\theta_a}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}(\sin\theta_b\sin\theta_a)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sum_{J=\left(\frac{\lambda+K}{2}\right)}^{\infty}(2J+1)\, d^J_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_b)\, d^{J*}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta_a)$$
$$\exp\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}\left((2J+1)^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\omega^2R^4]\,(t_b-t_a)\}, \tag{2.45}$$

et la forme finale du propagateur est la suivante :

$$K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) = \sum_{n_r=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_{n_r}(t_b - t_a)\right\} \Psi_{n_r}(\theta_b)\, \Psi^*_{n_r}(\theta_a)\,. \tag{2.46}$$

On peut retirer directement l'expression de l'énergie :

$$E_{n_r} = \left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left([2n_r + k + \lambda + 1]^2 \;\; - \frac{(n-1)^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\omega^2 R^4\right]\,, \tag{2.47}$$

avec : $\begin{cases} k = \left(l + \left(\frac{n-2}{2}\right)\right) \\ \lambda = \left(\frac{M}{\hbar^2}\omega^2 R^4 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$.

ou bien alors :

$$E_{n_r} = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[\left(2n_r + l + \frac{n}{2} + \lambda\right)^2 - \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{(n-1)^2}{4}\right],$$

Avec : $N = 2n_r + l$.

$$E_N = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[-N\left(N - n - 1\right) - Nn + 2\lambda N + \lambda n - \frac{n}{2}\right]$$

Autrement dit :

$$E_N = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[(N+1)\,(N+n) + (2\lambda - 1)\left(N + \frac{n}{2}\right)\right].$$

La fonction d'onde est :

$$\Psi_{n_r}(\theta) = R^{-\frac{n}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\left[2n_r + l + \frac{n}{2} + \lambda\right]^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\, d^{\,n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right)}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta)\,, \tag{2.48}$$

les fonctions de Wigner sont définies pour $\left(n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right)\right) > \left|\frac{\lambda+k}{2}\right|, \left|\frac{\lambda-k}{2}\right|$ par :

$$\begin{aligned} d^{\,n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right)}_{M,\grave{M}}(\theta) \;&=\; \left[\frac{\left(n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) - M\right)!\,\left(n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) + M\right)!}{\left(n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) - \grave{M}\right)!\,\left(n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) + \grave{M}\right)!}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \sin^{M-\grave{M}}\frac{\theta}{2}\cos^{M+\grave{M}}\frac{\theta}{2} P^{\left(M-\grave{M},M+\grave{M}\right)}_{n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) - M}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

sachant que :

$$\begin{cases} M = \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) \\ \grave{M} = \left(\frac{\lambda-k}{2}\right) \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} M + \grave{M} = \lambda \\ M - \grave{M} = k \\ n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) - M = n_r \\ n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) + M = n_r + \lambda + k \\ n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) + \grave{M} = n_r + \lambda \\ n_r + \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) - \grave{M} = n_r + k \end{cases}$$

La fonction de Wigner devient alors :

$$d^{n_r+\left(\frac{\lambda+k}{2}\right)}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta) = \left[\frac{n_r!\,(n_r+\lambda+k)!}{(n_r+k)!\,(n_r+\lambda)!}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^k\frac{\theta}{2}\cos^\lambda\frac{\theta}{2} P^{(k,\lambda)}_{n_r}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

avec $P^{(k,\lambda)}_{n_r}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ le polynôme de Jacobi défini par :

$$P^{(\alpha,\beta)}_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\ {}_2F_1\left(-n, n+\beta+\alpha+1, \alpha+1, \frac{(1-x)}{2}\right),$$

dans notre cas $x = \left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ ainsi on aura :

$$P^{(k,\lambda)}_{n_r}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{n_r!}\frac{\Gamma\left(n_r+l+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\ {}_2F_1\left(-n_r, n_r+\lambda+l+\frac{n}{2}, l+\frac{n}{2}, \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Substituons le polynôme de Jacobi dans la fonction de Wigner et $\theta = 2\chi$.Finalement la fonction d'onde suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_{n_r}(\chi) &= \left[\frac{2\left(2n_r+l+\frac{n}{2}+\lambda\right)\left(n_r+l+\frac{n}{2}+\lambda-1\right)!\left[\Gamma\left(n_r+l+\frac{n}{2}\right)\right]^2}{R^n\left(n_r+l+\frac{n}{2}-1\right)!\,(n_r+\lambda)!n_r!\left[\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \sin^l\chi\cos^{\nu+\frac{1}{2}}\chi\ {}_2F_1\left(-n_r, n_r+\lambda+l+\frac{n}{2}; l+\frac{n}{2}; \sin^2\chi\right), \end{aligned} \tag{2.49}$$

ou encore :

$$\Psi_{n_r}(\chi) = \left[\frac{2\left(2n_r+l+\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n_r+l+\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n_r+l+\frac{n}{2}\right)}{R^n\left[\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)\right]^2\Gamma\left(n_r+\lambda+1\right)(n_r)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin^l\chi\cos^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi\ {}_2F_1\left(-n_r,n_r+l+\lambda+\frac{n}{2};l+\frac{n}{2};\sin^2\chi\right). \qquad (2.50)$$

2.2.2 Le problème de Coulomb sur S^n via la variété SU(2) :

Par le moyen d'une transformation spatio-temporelle, nous allons réduire le propagateur relatif au potentiel de **Coulomb** à un propagateur relatif au potentiel de Pöschl-Teller.

Le propagateur est donné par :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \left[R^n(\sin\chi_a\sin\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}$$
$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_j\right)\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j, \qquad (2.24)$$

avec l'action :

$$S_j=\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]-R^2V(\chi_j)\sigma_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j. \qquad (2.25)$$

Le potentiel de **Coulomb** sur S^n est défini par la forme suivante :

$$V(\chi_j)=-\frac{\alpha}{R}\cot\chi_j. \qquad (2.51)$$

Substituons (2.52) dans (2.25), l'action devient :

$$S_j = \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sin^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$+\alpha R\cot\chi_j\sigma_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j. \qquad (2.52)$$

On fait un changement de variable ($\chi\to\theta$), qui est défini par la transformation suivante :

$$\exp(i\chi) = \cos\theta, \tag{2.53}$$

et sous la forme discrète par :

$$\chi_j = -i \ln\cos\theta_j,$$

avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les trois premières dérivées sont :

$$\frac{d\chi}{d\theta} = i\tan\theta$$

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2} = \frac{i}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{d^3\chi}{d\theta^3} = \frac{2i\sin\theta}{\cos^3\theta}.$$

L'énergie cinétique est :

$$\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 = \frac{M}{2\sigma_j}\left(-\tan^2\widetilde{\theta}_j\right)(\Delta\theta_j)^2\left[1+\frac{1}{6\cos^2\widetilde{\theta}_j}(\Delta\theta_j)^2\right]$$

Le potentiel :

$$\alpha R\cot\chi_j\sigma_j = kR\left(1-2(\sin^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\right)\sigma_j,$$

avec : $\alpha = -ik$

Alors l'action devient :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}\left(-\tan^2\widetilde{\theta}_j\right)(\Delta\theta_j)^2\left[1+\frac{1}{6\cos^2\widetilde{\theta}_j}(\Delta\theta_j)^2\right]+kR\left(1-2(\sin^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\right)\sigma_j \\ &\quad +\frac{2\hbar^2\sigma_j}{M\sin^2\widetilde{\theta}_j}\cot^2\widetilde{\theta}_j\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j, \end{aligned}$$

et la mesure prend la forme suivante :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\left(i\tan\theta_j\right)d\theta_j$$

et sous la forme symétrique est :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j = (-\tan\theta_a\tan\theta_b)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j \prod_{j=1}^{N}(i\tan\theta_j)\left[1+\frac{1}{4}(\Delta\theta_j)^2\left(\frac{2}{\cos^2\widetilde{\theta}_j}-\frac{1}{\cos^2\widetilde{\theta}_j\sin^2\widetilde{\theta}_j}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

L'introduction de la transformation spatiale a induit un terme cinétique de forme non conventionnelle

Nous passons donc à une transformation temporelle pour redonner une forme conventionnelle au terme cinétique :

$$\frac{dt}{ds} = -\tan^2\theta.$$

sous la forme discrète :

$$\sigma = s_j\,(-\tan\theta_j\tan\theta_{j-1})$$

et sous la forme symétrique :

$$\sigma = s_j\left(-\tan^2\widetilde{\theta}_j\right)\left[1+\frac{1}{4}(\Delta\theta_j)^2\left(\frac{2}{\cos^2\widetilde{\theta}_j}-\frac{1}{\cos^2\widetilde{\theta}_j\sin^2\widetilde{\theta}_j}\right)\right],$$

alors la mesure devient :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j = (-\tan\theta_a\tan\theta_b)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar s_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j,$$

où le terme cinétique est :

$$\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 = \frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2 + \frac{M}{8s_j}(\Delta\theta_j)^4\lambda_j$$

avec :

$$\lambda_j = \frac{1}{\cos^2\widetilde{\theta}_j\sin^2\widetilde{\theta}_j} - \frac{4}{3\cos^2\widetilde{\theta}_j}.$$

Le potentiel prend la forme suivante :

$$kR\left(1-2(\sin^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\right)\sigma_j = kR\left(1-2(\sin^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\right)\left(-\tan^2\widetilde{\theta}_j\right)s_j,$$

et l'action devient :

$$\begin{aligned}\exp\{\frac{i}{\hbar}S_j\} &= \exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2+\frac{M}{8s_j}(\Delta\theta_j)^4\lambda_j \\ &+kR\left(1-2(\sin^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\right)\left(-\tan^2\widetilde{\theta}_j\right)s_j \\ &-\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\tan^2\widetilde{\theta}_j S_j-\frac{2\hbar^2}{M\sin^2\widetilde{\theta}_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]s_j]\}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation asymptotique suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx \simeq \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx$$

et en remplaçant le terme d'ordre quatre $(\Delta\chi_j)^4$ par un terme équivalent :

$$bx^4 \sim \frac{3b}{4a^2} \quad \text{dans notre cas} \left\{\begin{array}{l} b=\frac{M}{8is_jh}\lambda_j \\ a=\frac{M}{2is_jh}\end{array}\right. ,$$

alors :

$$\left(\frac{iM\lambda_j}{\hbar 8s_j}\right)(\Delta\theta_j)^4 \sim \left(\frac{3\hbar^2\lambda_j}{8M}\right).$$

Substituons dans l'expression de l'action :

$$\begin{aligned}S_j &= \frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+Rk\right)s_j \\ &-\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{(2l+(n-2))^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\theta_j}+\frac{\left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}-Rk\right)\right]-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j,\end{aligned}$$

sachant que $\frac{1}{\sin^{\Lambda 2}\theta_j}$ et $\frac{1}{\cos^{\Lambda 2}\theta_j}$ sont respectivement équivalents à $\frac{1}{\sin^2\widetilde{\theta}_j}$ et $\frac{1}{\cos^2\widetilde{\theta}_j}$, alors :

$$S_j = \frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2-\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\theta_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+Rk\right)s_j, \qquad (2.54)$$

avec

$$\begin{aligned} k^2 &= (2l+(n-2))^2 \\ \lambda^2 &= \left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}-Rk\right)\right], \end{aligned}$$

et en introduisant une identité définie par la fonction δ de Dirac ayant la forme suivante :

$$\left[\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)\bigg|_{\theta_a}\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)\bigg|_{\theta_b}\right]\int_0^\infty ds\delta\left(T-\int_{s_a}^{s_b}\left[\frac{d\chi}{d\theta}\right]^2\right)=1,$$

on peut écrire le propagateur comme suit :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \delta\left(T-\int_{s_a}^{sb}ds\left[\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2\right]\right)K_l(\chi_b,\chi_a;s_b-s_a)\ ds, \quad (2.55)$$

où :

$$\begin{aligned} K_l(\chi_b,\chi_a;s_b-s_a) &= (2i)^{n-1}\left(\sin\theta_b\sin\theta_a\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\cot\theta_b\cot\theta_a\right)^{\frac{(n-1)}{2}} \\ & \quad (-\tan\theta_a\tan\theta_b)^{\frac{1}{2}}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \\ & \quad \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar s_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j, \end{aligned} \quad (2.56)$$

avec :

$$S_j=\frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2-\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sin^{\Lambda 2}\theta_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cos^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+Rk\right)s_j, \quad (2.57)$$

et :

$$\begin{aligned} k^2 &= (2l+(n-2))^2 \\ \lambda^2 &= \left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}-Rk\right)\right]. \end{aligned}$$

Utilisons la relation entre les deux systèmes de **Coulomb** et d'**Oscillateur**, pour construire le spéctre d'énergie et la fonction d'onde du problème de **Coulomb**.

On peut déduire directement la solution :

$$
\begin{aligned}
K_l(\chi_b,\chi_b;s_b-s_a) \;=\; & \left[(2i)^{n-1}\left(\sin\theta_b\sin\theta_a\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\cot\theta_b\cot\theta_a\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]\left(-\tan\theta_a\tan\theta_b\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\sin 2\theta_b\sin 2\theta_a\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{J=\left(\frac{\lambda+K}{2}\right)}^{\infty}(2J+1) \\
& d^{J}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(2\theta_b)\, d^{J*}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(2\theta_a)
\end{aligned}
$$

$$
\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left((2J+1)^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)-Rk\right](t_b-t_a)\right\}. \qquad (2.58)
$$

L'expression de l'énergie est donnée par :

$$
E_{n_r}=\left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left(\left(2n_r+l+\frac{n}{2}+\lambda\right)^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)-Rk\right] \qquad (2.59)
$$

avec :

$$
\begin{cases}
k=(2l+(n-2)) \\
\lambda=\left(\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}-Rk\right)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

Substituons dans :

$$
E_{n_r}=\left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[\left((2n_r+2l+n-1+\lambda)^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)-\frac{2M}{\hbar^2}Rk\right],
$$

avec $N=n_r+l$. L'énergie prendra la forme suivante :

$$
E_N=\left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[(2N+n-1+\lambda)^2-\frac{(n-1)^2}{4}+2\lambda^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right]
$$

on prend :

$$
\lambda=-\left(N+\frac{(n-1)}{2}\right)+i\sigma
$$

avec :

$$
\sigma=\frac{\alpha R}{\left(N+\frac{(n-1)}{2}\right)} .
$$

Alors :

$$E_N = \frac{\hbar^2}{M}\frac{N(N+(n-1))}{2R^2} - \frac{\alpha^2}{2\left(N+\frac{(n-1)}{2}\right)^2},$$

La fonction d'onde est :

$$\begin{aligned}
\Psi_{n_r}(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(2l+n-1)} \\
&\left[\frac{2i(2n_r+2l+\lambda+n-1)\Gamma(n_r+2l+\lambda+n-1)\Gamma(n_r+2l+n-1)}{R^n\Gamma(n_r+\lambda+1)(n_r)!}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\left[(2i)^{\frac{(n-1)}{2}}\sin^{-\frac{n-1}{2}}\theta\cot^{\frac{n-1}{2}}\theta\right]\tan^{\frac{1}{2}}\theta\sin^{l+\frac{n-1}{2}}\theta\cos^{\lambda+\frac{1}{2}}\theta \\
&{}_2F_1\left(-n_r, n_r+2l+\lambda+n-1; 2l+n-1; \sin^2\theta\right), \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

avec la transformation inverse :

$$\cos\theta = \exp(i\chi)\ ,\ \ \sin\theta = (1-\exp(2i\chi))^{\frac{1}{2}}\ ,$$

on peut la réécrire la fonction d'onde sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_N(\chi) &= C^n_{N\,l}(\sigma)\sin^l\chi\exp\left[-i\chi(N-l-i\sigma)\right] \\
&{}_2F_1\left(-N+l, l+\frac{(n-1)}{2}+i\sigma; 2l+n-1; 1-\exp(2i\chi)\right) \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

où $C^n_{N\,l}$désigne la constante de normalisation donnée par :

$$\begin{aligned}
C^n_{N\,l}(\sigma) &= 2^{l+\frac{(n-1)}{2}}e^{\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma(2l+n-1)} \qquad (2.62) \\
&\left[\frac{\left((N+n-1)^2+\sigma^2\right)\Gamma(N+l+i\sigma)\Gamma(N+l+n-2)}{R^n\Gamma\left(N+\frac{n-1}{2}\right)(N-l)!}\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

2.2.3 Le problème de Coulomb sur S^n via la variété SU(1,1) :

En introduisant la transformation spatiale suivante :

$$\exp(i\chi) = -\coth(\frac{\beta}{2}), \tag{2.63}$$

et sachant que les seuls chemins qui contribuent dans l'intégrale de chemin sont pour les quels on a $(\Delta q_j)^2 \approx \tau$,alors on trouve :

$$(\Delta\chi_j)^2 = -\csc^{\Lambda 2}\beta_j\left[(\Delta\beta_j)^2 + \frac{1}{2}(1-\csc^{\Lambda 2}\beta_j)(\Delta\beta_j)^4\right],$$

et le potentiel se transforme comme suit :

$$\frac{\alpha}{R}\cot\chi = -k\cosh\beta,$$

avec les domaines de variations :

$$\begin{cases} 0 \leqslant & \operatorname{Re}\chi \leqslant \pi \\ -\infty \leqslant & \operatorname{Im}\chi \leqslant 0 \\ & \beta \in]-\infty,\infty[. \end{cases}.$$

L'action sous la forme discrète est :

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{MR^2}{\sigma_j}\left[-\frac{1}{2}(\frac{\Delta\beta_j}{2})^2 - \frac{1}{24}(\frac{\Delta\beta_j}{2})^4\right] - \frac{MR^2}{2\sigma_j}(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sinh^{\Lambda 2}\beta_j})(\frac{\Delta\beta_j}{2})^4 \\ & -\frac{2\hbar^2\sigma_j}{MR^2}[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}] \\ & +4\sigma_j\csc^{\Lambda 2}\beta_j(E + \frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2} - k\cosh\beta_j). \end{aligned} \tag{2.64}$$

En remplaçant le terme d'ordre quatre $(\frac{\Delta\beta_j}{2})^4$par un terme équivalent, et pour Re $a > 0$ (a : grand), avec la formule :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx \simeq \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx, \qquad (2.65)$$

la mesure prend la forme suivante :

$$(\sin\chi_a\sin\chi_a)^{-\frac{(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{MR^2}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{2}d\chi_j = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}(\sin\beta_a\sin\beta_b)^{\frac{n}{2}}$$

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{MR^2}{8\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{i}{2}d\beta_j. \qquad (2.66)$$

L'expression du promoteur est :

$$\begin{aligned} P_l(\chi_b,\chi_a;\tau) &= (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}R^{-n}(\sin\beta_a\sin\beta_b)^{\frac{n}{2}} \\ &\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp(\frac{i}{\hbar}W_j)\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{MR^2}{8\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{i}{2}d\beta_j. \qquad (2.67)\end{aligned}$$

L'action devient alors :

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{MR^2}{\sigma_j}\left[1-\cosh(\frac{\Delta\beta_j}{2})\right]+\frac{\hbar^2\sigma_j}{2MR^2}[(2l+(n-2))^2-\frac{1}{4}] \\ &+\frac{(\acute{E}-k)}{\sinh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}\sigma_j-\frac{(\acute{E}+k)}{\cosh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}\sigma_j, \qquad (2.68)\end{aligned}$$

avec :

$$\acute{E} = E+\frac{\hbar^2 n(n-2)}{8MR^2}.$$

Introduisons deux variables angulaires ξ et η, par le moyen de la relation asymptotique [**18**] .

$$\exp\left[-\frac{1}{2z}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\right] = \left(\frac{z}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\exp\left[im\alpha-z\left(1-\cos\alpha\right)\right]d\alpha,$$

dans les deux derniers termes de l'exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{k+\acute{E}}{\cosh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}\sigma_j\right) = \left(\frac{MR^2\cosh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \exp\left[ip\Delta\xi_j + \left(\frac{iMR^2}{\hbar\sigma_j}\right)\cosh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})\left(1-\cos\Delta\xi_j\right)\right] d\xi_j \quad (2.69)$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{k-\acute{E}}{\sinh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}\sigma_j\right) = \left(-\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \exp\left[iq\Delta\eta_j - \left(\frac{iMR^2}{\hbar\sigma_j}\right)\sinh^{\Lambda 2}(\frac{\beta_j}{2})\left(1-\cos\Delta\eta_j\right)\right] d\eta_j \quad (2.70)$$

avec :

$$\begin{cases} p = \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}(E+k) + \frac{(n-1)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ q = \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}(E-k) + \frac{(n-1)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} .$$

Le changement des variables ξ_j , η_j en angles d'Euler :

$$\begin{aligned} \psi_j &= \xi_j - \eta_j \\ \varphi_j &= \xi_j + \eta_j \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\xi_j \int_0^{2\pi} d\eta_j = \int_0^{2\pi} d\psi_j \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi_j,$$

avec : $\varphi_a = \psi_a = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P_l(\chi_b, \chi_a; \sigma) &= \frac{1}{8}\left(\frac{i}{R}\right)^n (\sin\beta_a \sin\beta_b)^{\frac{(n+1)}{2}} \\
&\exp\left\{\frac{i\hbar}{2MR^2}\sigma_j[(2l+(n-2))^2 - \frac{1}{4}]\right\} \\
&\int_0^{2\pi} d\psi_b \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi_b \exp\left\{\frac{i}{2}(p-q)\psi_b + \frac{i}{2}(p+q)\varphi_b\right\} \\
&Q(\beta_b, \beta_a; \psi_b; \varphi_b; \sigma), \qquad (2.71)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
Q(\chi_b, \chi_a; \psi_b; \varphi_b; \sigma) &= \lim_{N\to\infty} \int_{SU(1,1)} \prod_{j=1}^{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_j\right) \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{MR^2}{2\pi i\hbar\sigma j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\left(\frac{iMR^2}{2\pi\hbar\sigma j}\right) \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{8}\sinh\beta_j d\beta_j d\psi_j d\varphi_j, \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

d'où :

$$S_j = \frac{MR^2}{\sigma j}\left[1 - \frac{1}{2}Tr(\widehat{g}_j)\right]. \qquad (2.73)$$

On peut écrire $P_l(r_b, r_a; \sigma)$ comme une intégrale de chemin sur $SU(1,1)$

$$\begin{aligned}
Q(\chi_b, \chi_a; \alpha_b; \gamma_b; \sigma) &= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\lambda=\pm}\sum_{2J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[-\left(\frac{i\sigma}{\hbar}\right)C_J\right]\chi^{\lambda_j}(\H{g}\acute{g}^{-1}) \\
&+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\lambda=0,\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} ds 2s\tanh[\pi(s+i\lambda)] \\
&\exp\left[-\left(\frac{i\sigma}{\hbar}\right)C_{-\frac{1}{2}+is}\right]\chi^{(\lambda)}_{-\frac{1}{2}+is}(\H{g}\acute{g}^{-1}), \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

avec :

$$C_J = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)[(2J+1)^2 - \frac{1}{4}],$$

et :

$$\chi^{\lambda_j}\left(g_N g_0^{-1}\right)\sum \exp\left(-iM\psi_N\right)\exp\left(-i\acute{M}\varphi_N\right)d^J_{M\acute{M}}\left(\beta_N\right)d^{J*}_{M\acute{M}}\left(\beta_0\right),$$

$d^J_{M\acute{M}}(\beta)$ sont les fonctions de Bargmann. Obtenus par continuation analytique des fonctions de Wigner $d^J_{M\acute{M}}(\beta) \in SU(2)$. Ces fonctions de Bargmann sont données pour $M \geq N$ par :

$$\begin{aligned} d^J_{M\acute{M}}(\beta) &= N^J_{M\acute{M}}\left[\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{-M-\acute{M}}\left[\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{M-\acute{M}} \\ &\quad {}_2F_1\left(1-\acute{M}+J,-\acute{M}-J;1+M-\acute{M};-\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

avec

$$N^J_{M\acute{M}} = \frac{1}{\Gamma\left(M-\acute{M}+1\right)}\left(\frac{\Gamma\left(1+M+J\right)\Gamma\left(M-J\right)}{\Gamma\left(1+\acute{M}+J\right)\Gamma\left(\acute{M}-J\right)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et satisfont à la propriété de symétrie :

$$d^J_{M\acute{M}}(\beta) = (-1)^{M-\acute{M}}\,d^J_{\acute{M}M}(\beta),$$

pour $M \leq \acute{M}$.suivant les valeurs de J on a :

$$D^{(\lambda)}_J : \begin{cases} J=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,... \begin{cases} M=J+1,J+2....... & \text{pour}\lambda=+ \\ \acute{M}=-J-1,-J-2,... & \text{pour}\lambda=- \end{cases} \\ J=-\frac{1}{2}+is \begin{cases} s\geq 0 \quad M=0,\pm1,\pm2,.. & \text{pour}\lambda=+ \\ s\geq 0 \quad \acute{M}=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},... & \text{pour}\lambda=- \end{cases} \end{cases}.$$

Il s'ensuit que le promoteur devienne :

$$P_l(\chi_b,\chi_a;\tau) = \left(\frac{i}{R}\right)^n\left(\sinh\beta_a\sinh\beta_b\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left[\sum_{J-\lambda}^{J_0}\left(J+\frac{1}{2}\right)d^{J*}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_a\right)d^J_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_b\right)\right.$$

$$d^{J*}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_a\right)d^J_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_b\right)\exp\left\{-\frac{2i\hbar}{MR^2}\sigma_j[\left(J+l+\frac{(n-1)}{2}\right)\left(J-l-\frac{(n-3)}{2}\right)]\right\}$$

$$+\int_0^\infty ds\ s\tanh\left[\pi\left(s+i\lambda\right)\right] d^{-\frac{1}{2}+is*}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_a\right) d^{-\frac{1}{2}+is}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_b\right)$$

$$\exp\left\{+\frac{2i\hbar}{MR^2}\sigma_j[s^2+l^2+l\left(n-2\right)+\frac{\left(n-2\right)^2}{4}]\right\}\Bigg] \tag{2.75}$$

avec :

$$J_0+1=\min\left(\frac{1}{2}\left|p-q\right|,\frac{1}{2}\left|p+q\right|\right)$$

alors :

$$J_0+1=\min\frac{1}{2}\left|p-q\right|\geq 0,$$

La fonction de Green :

$$G_l\left(r_b,r_a;E\right)=\left(i\hbar\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}P_l(r_b,r_a;\tau)\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)d\sigma$$

avec :

$$\frac{d\tau}{d\sigma}=\frac{4}{\sinh\beta_a\sinh\beta_b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{2i\hbar}{MR^2}\sigma[\left(J+l+\frac{(n-1)}{2}\right)\left(J-l-\frac{(n-3)}{2}\right)]\right\}d\sigma$$

$$=\frac{\pi MR^2}{\hbar\left(2J+1\right)}\left[\delta\left(J-l-\frac{(n-3)}{2}\right)+\delta\left(J+l+\frac{(n-1)}{2}\right)\right], \tag{2.76}$$

la sommation sur l'entier J porte sur les entiers positifs, et donc la contribution de $\delta\left(J+l+\frac{(n-1)}{2}\right)$ est identiquement nulle, alors le terme qui contribue est :

$$J=l+\frac{(n-3)}{2}.$$

En insérant dans la fonction de Green, et en adoptant le changement d'indice de sommation nous obtenons :

$$G_l(\chi_b,\chi_a;E) = (i)^{n-1}\frac{2\pi M}{\hbar^2 R^{n-2}}\left(\sinh\beta_a\sinh\beta_b\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sum_{n_r=0}^{J_0}\delta\left(J_0-n_r-l-\frac{(n-3)}{2}\right)$$
$$d^{l+\frac{(n-3)}{2}*}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_a\right) d^{l+\frac{(n-3)}{2}}_{\left(\frac{p+q}{2}\right),\left(\frac{p-q}{2}\right)}\left(\beta_b\right), \tag{2.77}$$

sachant que $\frac{1}{2}(p-q)=m$ avec $m=n_r+l+1$.

Le spèctre d'énergie est donné par :

$$E_m=\frac{\hbar^2}{2MR^2}\left(m^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)-\frac{MZ^2e^4}{2\hbar^2m^2}. \tag{2.78}$$

Le propagateur est donné par :

$$K_l\left(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a\right)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_l\left(r_b,r_a;E\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E\left(t_b-t_a\right)\right)dE. \tag{2.79}$$

utilisons maintenant la formule :

$$\delta\left(f\left(E\right)\right)=\frac{\delta\left(E-E_m\right)}{\left|\acute{f}\left(E\right)\right|}$$

qui dans notre cas s'écrira :

$$f\left(E\right)=J_0\left(E\right)-m$$

et :

$$\left|\acute{f}\left(E_m\right)\right|=\frac{MR^2m}{\hbar^2\left(\varepsilon_m^2+m^2\right)}$$

avec :

$$\varepsilon_m=-\frac{R}{am}\ ,\ a=\frac{\hbar^2}{MZe^2}$$

ainsi le propagateur est se décomposera comme :

$$K_l\left(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a\right)=\sum_{n=l+1}^{\infty}\Psi^*_{ml}\left(\chi_a\right)\Psi_{ml}\left(\chi_b\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_m\left(t_b-t_a\right)\right). \tag{2.80}$$

avec la fonction d'onde normalisée :

$$\Psi_{ml}(\chi) = \left(\frac{i\left(m^2+\varepsilon_m^2\right)}{R^n m}\right)^{\frac{1}{2}} (i\sinh\beta)^{\frac{n-1}{2}} d^{l+\frac{(n-3)}{2}}_{i\varepsilon_m, m}(\beta). \tag{2.81}$$

On note que $\frac{1}{2}(p+q) = i\varepsilon_m$.

Les fonction d'onde correspondantes aux états liés se déduisent, en tenant compte de la relation suivante :

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(-z)^{-b}\ {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\left.\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n_r)}\right|_{z=-2l-n+2} = (-1)^{n_r}\frac{\Gamma(m+l+n-2)}{\Gamma(2l+n-1)}.$$

La fonction de Bargmann devient alors :

$$\begin{aligned} d^{l+\frac{(n-3)}{2}}_{i\varepsilon_m, m}(\beta) &= \frac{(-1)^{n_r}}{\Gamma(2l+n-1)}\left(\frac{\Gamma\left(i\varepsilon_m+l+\frac{(n-1)}{2}\right)\Gamma\left(m+l+\frac{(n-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(i\varepsilon_m-l-\frac{(n-3)}{2}\right)\Gamma\left(m-l-\frac{(n-3)}{2}\right)}\right) \\ &\quad \left[\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{-m-i\varepsilon_m}\left[\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{m+i\varepsilon_m-2l-n+1} \\ &\quad {}_2F_1\left(-m+l+\frac{(n-1)}{2}, -i\varepsilon_m+l+\frac{(n-1)}{2}; 2l+n-1; -\sinh^{-2}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.82}$$

avec la transformation inverse :

$$\sin\chi = \frac{1}{i\sinh\beta} \quad , \quad \sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\exp(-i\chi)}{2i\sin\chi} \quad , \quad \cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\exp(i\chi)}{2i\sin\chi}.$$

La fonction d'onde sera alors :

$$\begin{aligned} \Psi_{ml}(\chi) &= N^n_{ml}\sin\chi^{l+\frac{(n-3)}{2}}\exp\left[-i\chi\left(i\varepsilon_m-l+m-\frac{(n-1)}{2}\right)\right] \\ &\quad {}_2F_1\left(-m+l+\frac{(n-1)}{2}, -i\varepsilon_m+l+\frac{(n-1)}{2}; 2l+n-1; 1-\exp(2i\chi)\right), \end{aligned} \tag{2.83}$$

avec la constante de normalisation :

$$
\begin{aligned}
N_{ml}^{n} &= \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(l+2n_r+\frac{(n-1)}{2}\right)\right]\frac{2^{l+\frac{(n-1)}{2}}}{\Gamma\left(2l+n-1\right)} \\
&\quad \left(\frac{i}{R^n}\frac{\left(m^2+\varepsilon_m^2\right)}{m}\frac{\Gamma\left(i\varepsilon_m+l+\frac{(n-1)}{2}\right)\Gamma\left(m+l+\frac{(n-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(i\varepsilon_m-l-\frac{(n-3)}{2}\right)\Gamma\left(m-l-\frac{(n-3)}{2}\right)}\right).
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

Chapitre 3

Le problème d'Oscillateur et de Coulomb sur H^n via la variété SU(1,1) :

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons traiter les deux problèmes précedents mais cette fois çi sur un espace courbe à courbure négatif. La démarche utilisée est identique à la précédente, sauf qu'à chaque fois il faudrait utiliser la symétrie $SU(1,1)$ au lieu de $SU(2)$ à cause de la négativité de la courbure

3.2 Le propagateur en coordonnées pseudo- sphériques :

L'espace pseudo-sphérique en question est un espace courbé avec une courbure négative, et l'élément de ligne de cet espace est donné en coordonnées pseudo-sphériques par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(\mathrm{r})d\mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^2[d\theta_{(1)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}d\theta_{(2)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}\sin^2\theta_{(2)}d\theta_{(3)}^2 + .. \\ &\quad .... + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2 v_{(n-4)}d\theta_{(n-3)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-3)}d\theta_{(n-2)}^2 \\ &\quad + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-2)}d\varphi^2] \end{aligned}$$

avec $f(\mathrm{r})=\left(1+\frac{\mathrm{r}^2}{R^2}\right)^{-1}$. Nous pouvons le réecrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 d\chi^2 + R^2\sinh^2\chi[d\theta_{(1)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}d\theta_{(2)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}\sin^2\theta_{(2)}d\theta_{(3)}^2 + .. \\ &\quad ... + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2 v_{(n-4)}d\theta_{(n-3)}^2 + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-3)}d\theta_{(n-2)}^2 \\ &\quad + \sin^2\theta_{(1)}...\sin^2\theta_{(n-2)}d\varphi^2] \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $\mathrm{r}=R\sinh\chi$ et $\chi\in[0,\infty[$, $\theta_{(1)},\theta_{(2)},...,\theta_{(n-2)}\in[0,\pi]$ et $\varphi\in[0,2\pi]$.
Le propagateur du système devient alors :

$$\begin{aligned} K(r_b,r_a;t_b-t_a) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad \prod_{j=1}^{N-1}R^n\sinh^{n-1}\chi_j d\chi_j\sin^{n-2}\theta_{(1)j}d\theta_{(1)j}... \\ &\quad ..\sin^2\theta_{(n-3)j}d\theta_{(n-3)j}\sin\theta_{(n-2)j}d\theta_{(n-2)j}d\varphi_j \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec l'action :

$$S_j=\frac{M}{2\tau_j}(\Delta s_j)^2-V(\chi_j)\tau_j. \tag{3.3}$$

Utilisons les même notations, l'expression discrète dans l'espace courbé avec une courbure constante et négative à n dimentions, est [**3**] :

$$(\Delta s_j)^2=-2R^2(1-\cosh\omega_j)-\frac{n(n-2)\hbar^2\tau_j^2}{4M^2R^2} \tag{3.4}$$

en remplaçant(3.4) dans(3.3), l'action devient :

$$S_j=\frac{MR^2}{\tau_j}(\cosh\omega_j-1)-\frac{n(n-2)\hbar^2\tau_j}{8MR^2}-V(\chi_j)\tau_j \tag{3.5}$$

où $\cosh\omega_j = \frac{1}{R^2}\left(\overrightarrow{r}_j.\overrightarrow{r}_{j-1}\right)$, et :

$$r_j = \begin{pmatrix} R\cosh\chi_j \\ R\sinh\chi_j\cos\theta_{(1)j} \\ R\sinh\chi_j\sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(2)j} \\ \vdots \\ R\sinh\chi_j\sin\theta_{(1)j}...\sin\theta_{(n-2)j}\cos\varphi_j \\ R\sinh\chi_j\sin\theta_{(1)j}...\sin\theta_{(n-2)j}\sin\varphi_j \end{pmatrix}$$

alors :

$$\cosh\omega_j = \cos\chi_j\cos\chi_{j-1} - \sinh\chi_j\sinh\chi_{j-1}\cos\Theta_{(1)(j,(j-1))} \tag{3.6}$$

avec :

$$\begin{aligned} \cos\Theta &= \cos\theta_{(1)j}\cos\theta_{(1)(j-1)} + \sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(1)(j-1)}\cos\Theta_{(2)(j,(j-1))} \\ &\vdots \\ \cos\Theta_{(\rho)(j,(j-1))} &= \cos\theta_{(\rho)j}\cos\theta_{(\rho)(j-1)} + \sin\theta_{(\rho)j}\sin\theta_{(\rho)(j-1)}\cos\gamma_{(\rho+1)(j,(j-1))} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1 \le \rho \le n-3) \\ \cos\Theta_{(n-2)(j,(j-1))} &= \cos\theta_{(n-2)j}\cos\theta_{(n-2)(j-1)} + \sin\theta_{(n-2)j}\sin\theta_{(n-2)(j-1)}\cos\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La relation (3.6)devient :

$$\cosh\omega_j = \cosh\Delta\chi_j + \sinh\chi_j\sinh\chi_{j-1}\left(1 - \cos\Theta_{(1)(j,(j-1))}\right). \tag{3.8}$$

En substituant (3.8)dans(3.5), on trouve que l'action s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{\tau_j}(\cosh\Delta\chi_j - 1) + \frac{MR^2}{\tau_j}\sinh\chi_j\sinh\chi_{j-1}(1 - \cos\Theta_{j,j-1}) \\ &\quad -V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{n(n-2)\hbar^2}{8MR^2}\right)\tau_j \end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant l'approximation suivante :

$$\cosh \Delta\chi_j \simeq 1 + \frac{1}{2!}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{1}{4!}(\Delta\chi_j)^4$$

d'où

$$(\cosh \Delta\chi_j - 1) \simeq \frac{1}{2!}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{1}{4!}(\Delta\chi_j)^4. \tag{3.10}$$

Substituons (3.10) dans (3.9), l'action prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{\tau_j}\left[\frac{1}{2}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{1}{24}(\Delta\chi_j)^4\right] + \frac{MR^2}{\tau_j}\sinh\chi_j \sinh\chi_{j-1}(1-\cos\Theta_{j,j-1}) \\ &\quad -V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{n(n-2)\hbar^2}{8MR^2}\right)\tau_j \end{aligned} \tag{3.11}$$

pour remplacer le terme d'ordre quatre par un terme équivalent, en utilisant la relation suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx \simeq \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx$$

dans notre cas :

$$\begin{cases} b = \left(\frac{iMR^2}{24\hbar\tau_j}\right) \\ a = \left(\frac{MR^2}{i2\hbar\tau_j}\right) \end{cases},$$

on aura :

$$\left(\frac{MR^2}{24\tau_j}\right)(\Delta\chi_j)^4 \sim \left(-\frac{\hbar^2\tau_j}{8MR}\right)$$

ainsi l'action devient :

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{MR^2}{\tau_j}\sinh^{\Lambda 2}\chi_j\,(1-\cos\Theta) \\ &\quad -V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A l'aide de la formule [**12**, **13**] :

$$\exp(z\cos\Theta) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \Gamma(\nu)\sum_{l=0}^{\infty}(l+\nu)I_{l+\nu}(z)C_l^\nu(\cos\Theta) \quad , \quad \nu \neq 0,-1,-2,...$$

où $I_{l+\nu}(z)$ et $C_l^{\nu}(\cos\Theta)$ sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées et les polynômes de Gegenbauer qui sont les polynômes de Legendre généralisés.

Dans notre cas :

$$z = \frac{MR^2 \sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}$$

alors :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\cos\Theta\right) &= \left(\frac{2i\hbar\tau_j}{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\nu}\Gamma(\nu) \\ &\quad \sum_{l=0}^{\infty}(l+\nu)I_{l+\nu}(\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j})C_l^{\nu}(\cos\Theta). \quad (3.13)\end{aligned}$$

Substituons (3.13) dans (3.12), l'expression du propagateur devient :

$$\begin{aligned}K(r_b, r_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty}(\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j})^{\frac{Nn}{2}}\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_N=0}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{2}R^n\sinh^{n-1}\chi_j d\chi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \\ &\quad \left[\prod_{j=1}^{N} I_{l_j+\nu}\left(\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\right)\left(\frac{2i\hbar\tau_j}{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\nu}\right] \\ &\quad \int\prod_{j=1}^{N-1}\left(d\theta_{1j}\sin^{n-2}\theta_{1j}\right)\left(d\theta_{2j}\sin^{n-3}\theta_{2j}\right)\ldots \\ &\quad \left(d\theta_{(n-3)j}\sin^2\theta_{(n-3)j}\right)\left(d\theta_{(n-2)j}\sin\theta_{(n-2)j}\right)d\varphi_j \\ &\quad \prod_{j=1}^{N}\underbrace{\Gamma(\nu)\,(l_j+\nu)\,C_{l_j}^{\nu}(\cos\Theta_{i,j-1})}_{\overline{C}_{l_j}^{\nu}} \qquad (3.14)\end{aligned}$$

avec :

$$S_j = \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{MR^2}{\tau_j}\sinh^{\Lambda 2}\chi_j - V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \qquad (3.15)$$

Le théorème d'addition [**16**] ,permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{l_j}^{\nu}(\cos\Theta_{j,j-1}) &= 2\pi\pi^{\nu}\sum_{k_{1=0}}^{l_j}\sum_{k_{2=0}}^{k_1}...\sum_{k_{(n-2)=0}}^{k_{(n-3)}}\sum_{m=-k_{(n-2)}}^{k_{(n-2)}}\left(\sin\theta_{(1)j}\sin\theta_{(1)(j-1)}\right)^{k_1} \\
&\left(\sin\theta_{(2)j}\sin\theta_{(2)(j-1)}\right)^{k_2}...\left(\sin\theta_{(n-3)j}\sin\theta_{(n-3)(j-1)}\right)^{k_{2(n-2)}} \\
&\tilde{C}_{l_j-k_1}^{\nu+k_1}(\cos\theta_{(1)j})\tilde{C}_{l_j-k_1}^{\nu+k_1}(\cos\theta_{(1)(j-1)}) \\
&\tilde{C}_{k_1-k_2}^{\nu-\frac{1}{2}+k_2}(\cos\theta_{(2)j})\tilde{C}_{k_1-k_2}^{\nu-\frac{1}{2}+k_2}(\cos\theta_{(2)(j-1)}) \\
&...\tilde{C}_{k_{(n-3)}-k_{(n-2)}}^{1+k_{(n-2)}}(\cos\theta_{(n-3)j})\tilde{C}_{k_{(n-3)}-k_{(n-2)}}^{1+k_{(n-2)}}(\cos\theta_{(n-3)(j-1)}) \\
&Y_{k_{(n-2)}}^{m*}(\theta_{(n-2)j},\varphi_j)Y_{k_{(n-2)}}^{m}(\theta_{(n-2)(j-1)},\varphi_{(j-1)})
\end{aligned}$$

avec les relations d'orthogonalité des fonctions $\tilde{C}_m^{\nu}$ et $Y_l^m(\Omega)$ suivantes :

$$\int_0^{\pi} d\alpha\sin^{2\nu}\alpha\tilde{C}_n^{\nu}(\cos\alpha)\tilde{C}_m^{\nu}(\cos\alpha)=\delta_{n,m}$$

et :

$$\int Y_l^{m^*}(\Omega)\,Y_{\grave{l}}^{\grave{m}}(\Omega)\,d\Omega=\delta_{l\grave{l}}\delta_{m\acute{m}}.$$

On calcule la partie angulaire suivante :

$$\begin{aligned}
&\int\prod_{j=1}^{N-1}\left(d\theta_{1j}\sin^{p}\theta_{1j}\right)\left(d\theta_{2j}\sin^{p-1}\theta_{2j}\right)...d\varphi_j\prod_{j=1}^{N}\overline{C}_{l_j}^{\frac{p}{2}}(\cos\Theta_{i,j-1}) \\
&= \left(2\pi\pi^{\frac{p}{2}}\right)^{N-1}\overline{C}_l^{\frac{p}{2}}(\cos\Theta_{a,b})\prod_{j=1}^{N}\delta_{l_j,l_{j-1}}
\end{aligned}$$

avec : $\Theta_{a,b}=(r_a,r_b)$.

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K(r_b,r_a;t_b-t_a)=\sum_{l=0}^{\infty}K_l(\chi_b;\chi_a;t_b-t_a)\frac{(2l+n-2)}{4(\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(\frac{n}{2}-1)C_l^{\frac{n}{2}-1}(\cos\Theta_{a,b}) \quad (3.16)$$

où le propagateur radial est donné par :

$$\begin{aligned} K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{N(p+2)}{2}} \left(2^{p+1}\pi\right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} R^{p+2}(\sinh\chi_j)^{p+1} d\chi_j \\ &\left[\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{i\hbar\tau_j\pi}{2MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\frac{p}{2}} I_{l+\frac{p}{2}}\left(\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau_j}\right)\right] \\ &\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec :

$$S_j = \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{MR^2}{\tau_j}\sinh^{\Lambda 2}\chi_j - V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \tag{3.18}$$

Simplifions le calcul à l'aide de l'expression asymptotique [**17**] des fonctions de Bessel modifiées :

$$I_\gamma\left(\frac{\grave{z}}{\tau}\right) \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{\tau}{2\pi\grave{z}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{\grave{z}}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{\tau}{\grave{z}}\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Dans notre cas on a : $\begin{cases} \grave{z} = \frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar} \\ \gamma = \left(l + \frac{P}{2}\right) \end{cases}$,

La fonction de Bessel devient alors :

$$\begin{aligned} I_{l+\frac{P}{2}}\left(\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau}\right) &\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{\tau_i\hbar}{2\pi MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \exp&\left\{\frac{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}{i\hbar\tau} - \frac{1}{2}\frac{i\hbar\tau}{MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\left(\left(l + \frac{P}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

et la forme du propagateur radial devient :

$$\begin{aligned} K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \left[R^n\left(\sinh\chi_a \sinh\chi_b\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1} \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \\ &\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{MR^2}{2\pi i\hbar\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j \end{aligned} \tag{3.20}$$

avec :

$$S_j = \frac{MR^2}{2\tau_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\tau_j}{2MR^2\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] -V(\chi_j)\tau_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8MR^2}\right)\tau_j. \quad (3.21)$$

On pose $\tau = R^2\sigma$, le propagateur dans ce cas est donné par :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \left[R^n(\sinh\chi_a\sinh\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j, \quad (3.22)$$

avec l'action :

$$S_j = \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] -R^2V(\chi_j)\sigma_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j. \quad (3.23)$$

3.2.1 Le problème de l'Oscillateur sur H^n via la variété SU(1,1) :

Le potentiel de l'**Oscillateur** sur une pseudo-sphère à n dimensions H^n, est donné par :

$$V(\chi) = \frac{\omega^2R^2}{2}\tanh^2\chi$$

et sous la forme discrète :

$$V(\chi_j) = \frac{\omega^2R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right). \quad (3.24)$$

En remplaçant l'éxpression du potentiel d'**Oscillateur** dans (3.23), l'action devient :

$$
\begin{aligned}
S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\omega^2R^4\left(1-\frac{1}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right)\sigma_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j,
\end{aligned}
$$

ou bien encore :

$$
\begin{aligned}
S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\
&\quad +\frac{\omega^2R^4\sigma_j}{2\cosh^{\Lambda 2}\chi_j} - \frac{1}{2}\omega^2R^4\sigma_j - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j,
\end{aligned}
$$

Autrement dit :

$$
\begin{aligned}
S_j &= \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\
&\quad +\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{\left(\frac{M}{\hbar^2}\omega^2R^4+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right]\sigma_j - \left[\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right]\sigma_j,
\end{aligned}
$$

alors :

$$
S_j = \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j} - \frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] - \left[\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right]\sigma_j, \quad (3.25)
$$

avec :

$$
\begin{cases}
k^2 = \left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2 \\
\lambda^2 = \left(\frac{M}{\hbar^2}\omega^2R^4+\frac{1}{4}\right)^2
\end{cases} .
$$

Le propagateur prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned}
K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \left[R^n(\sinh\chi_a \sinh\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_j\right\} \\
&= \left[R^n(\sinh\chi_a \sinh\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\chi_j \\
&\prod_{j=1}^{N} \exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 - \frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\
&- \left[\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R^4\right] \sigma_j]\} \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

On peut réécrire ce propagateur sous la forme suivante :

$$K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) = \left[R^n(\sinh\chi_a \sinh\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1} \acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) \qquad (3.27)$$

avcc :

$$\begin{aligned}
\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\chi_j \\
&\prod_{j=1}^{N} \exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 \\
&-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M}\left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\chi_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\chi_j}\right] \\
&- \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R^4]\sigma_j\}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

En utilisant le developpement suivante :

$$\cosh\Delta\chi_j \simeq 1 + \frac{1}{2!}(\Delta\chi_j)^2 + \frac{1}{4!}(\Delta\chi_j)^4$$

alors :

$$\frac{1}{2}(\Delta\chi_j)^2 \simeq (\cosh\Delta\chi_j - 1) - \frac{1}{24}(\Delta\chi_j)^4,$$

Le propagateur devient :

$$\begin{aligned}
\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{M}{2i\hbar\pi\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\chi_j \\
&\prod_{j=1}^{N} \exp\{ \frac{i}{\hbar} [\frac{M}{2\sigma_j} \left[(\cosh \Delta\chi_j - 1) - \frac{1}{24} (\Delta\chi_j)^4 \right] \\
&- \frac{\hbar^2 \sigma_j}{2M} \left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2} \chi_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2} \chi_j} \right] \\
&- \left[\left(\frac{\hbar^2 (n-1)^2}{8M} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^4 \right] \sigma_j] \}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Ensuite en remplaçant le terme d'ordre quatre par un terme équivalent , et en utilisant la relation suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp(-ax^2 + bx^4 + 0(x^6)) dx \simeq \int_0^\infty x^{2n} \exp(-ax^2 + \frac{3b}{4a^2} + 0(a^{-3})) dx,$$

on aura :

$$\begin{aligned}
\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\chi_j \\
&\prod_{j=1}^{N} \exp\{ \frac{i}{\hbar} [\frac{M}{\sigma_j} \left(1 - \cosh \Delta\chi_j \right) \\
&- \left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2} \chi_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2} \chi_j} + \frac{1}{4} \right] \frac{\hbar^2}{2M} \sigma_j \\
&- \left[\left(\frac{\hbar^2 (n-1)^2}{8M} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^4 \right] \sigma_j] \}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

On pose :

$$\chi = \frac{\theta}{2}$$

avec :

$$\begin{cases} 0 \leq \chi < \infty \\ 0 \leq \theta < \infty \end{cases},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} d\theta_j \\
& \prod_{j=1}^{N} \exp\{ \frac{i}{\hbar} [\frac{M}{\sigma_j} \left(1 - \cosh \frac{\Delta\theta_j}{2} \right) \\
& - \left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2} \frac{\theta_j}{2}} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2} \frac{\theta_j}{2}} + \frac{1}{4} \right] \frac{\hbar^2}{2M} \sigma_j \\
& - \left[\left(\frac{\hbar^2 (n-1)^2}{8M} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^4 \right] \sigma_j] \}. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Le potentiel a la forme du potentiel de Pöschl-Teller modifié, sa résolution repose essentiellement sur les propriétés de son groupe dynamique $SU(1,1)$. Alors, il est nécessaire de ramener le propagateur relalif au potentiel de Pöschl-Teller modifié à un propagateur defini sur la variété $SU(1,1)$, par l'introduction de deux angles d'Euler.

Pour cela introduisons deux variables angulaires α et β et par le moyen de la relation asymptotique [**18**] :

$$\exp \left[-\frac{1}{2z} \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \right] = \left(\frac{z}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \exp \left[im\alpha - z \left(1 - \cos\alpha \right) \right] d\alpha,$$

les deux termes de l'exponentielle deviennent :

$$\begin{aligned}
\exp \left(\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{2 \left(\frac{M \sinh^{\Lambda 2} \frac{\theta_j}{2}}{i\hbar\sigma_j} \right)} \right) &= \left(\frac{M \sinh^{\Lambda 2} \frac{\theta_j}{2}}{2i\pi\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \int_0^{2\pi} \exp\{ \frac{i}{\hbar} [\hbar k \beta_j \\
& + \left(\frac{M \sinh^{\Lambda 2} \frac{\theta_j}{2}}{\sigma_j} \right) \left(1 - \cos\beta_j \right)] \} d\beta_j \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

$$\exp\left(\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{2\left(\frac{M\cosh^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{i\hbar\sigma_j}\right)}\right) = \left(\frac{M\cosh^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{i}{\hbar}[\hbar\lambda\alpha_j$$

$$+\left(\frac{M\cosh^{\Lambda 2}\frac{\theta_j}{2}}{\sigma_j}\right)(1-\cos\alpha_j)]\}d\alpha_j \tag{3.33}$$

La substitution des expréssions asymptotiques (3.31) et (3.32) dans (3.30) conduit à :

$$\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \frac{1}{2}\left(\sinh\theta_b\sinh\theta_a\right)^{\frac{1}{2}}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{3}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{4}\sinh\theta_j d\theta_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}d\alpha_j d\beta_j\exp\{\frac{i}{\hbar}[\sum_{j=1}^{N}(\frac{M}{\sigma_j}\left(1-\cos\frac{\Omega_j}{2}\right)+\hbar\left(\lambda\alpha_j+k\beta_j\right))$$

$$-\left[\frac{\hbar^2}{8m}+\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right]\sigma_j \tag{3.34}$$

avec :

$$\cos\frac{\Omega_j}{2}=\sinh\frac{\theta_j}{2}\sinh\frac{\theta_{j-1}}{2}\cos\beta_j+\cosh\frac{\theta_j}{2}\cosh\frac{\theta_{j-1}}{2}\cos\alpha_j.$$

Le changement des variables α_j , β_j en angles d'Euler φ_j,ψ_j $(0\leq\psi\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq 4\pi)$:

$$\begin{cases}\varphi_j=\alpha_j+\beta_j\\ \varphi_j=\alpha_j+\beta_j\end{cases}$$

et :

$$\int_0^{2\pi}d\alpha_j\int_0^{2\pi}d\beta_j=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi_j\int_{-2\pi}^{2\pi}d\psi_j$$

avec $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\acute{K}_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \frac{1}{4}\left(\sinh\theta_b \sinh\theta_a\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{8M} - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right) - \frac{1}{2}\omega^2 R^4\right]\sigma_j\right\} \\
& \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{4\pi} Q\left(\theta_b, \varphi_b, \psi_b; \theta_a, 0, 0; \sigma\right) \\
& \exp\left\{i\left(\frac{\lambda+k}{2}\right)\varphi_b + \left(\frac{\lambda-k}{2}\right)\psi_b\right\} d\psi_b d\varphi_b, \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

avec le propagateur du groupe non compact $SU(1,1)$:

$$\begin{aligned}
Q\left(\theta_b, \varphi_b, \psi_b; \theta_0, 0, 0; \sigma\right) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\tilde{S}_j\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{iM}{2\pi\hbar\sigma_j}\right) \\
& \prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{8}\sin\theta_j d\theta_j d\varphi_j d\psi_j \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

où :

$$\tilde{S}_j = \left(\frac{M}{\sigma}\right)\left[1 - \frac{1}{2}tr\left(\tilde{g}_j\right)\right].$$

L'intégration donne :

$$
\begin{aligned}
K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) &= \left[R^n\left(\sinh\frac{\theta_b}{2}\sinh\frac{\theta_a}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\acute{K}_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) \\
&= \left[R^n\left(\sinh\frac{\theta_b}{2}\sinh\frac{\theta_a}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}(\sinh\theta_b\sinh\theta_a)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \{\sum_{J=\sigma}^{\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)-1}(2J+1)\,d^{l,\sigma}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_b)\,d^{l,\sigma*}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_a) \\
&\quad \exp\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}((2J+1)^2-\frac{(n-1)^2}{4})-\frac{1}{2}\omega^2R^4](t_b-t_a)\} \\
&\quad +\int_0^\infty d\rho 2\rho\tanh\left[\pi\left(\rho+i\sigma\right)\right]d^{-\frac{1}{2}+i\rho,\sigma}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_b)\,d^{-\frac{1}{2}+i\rho,\sigma*}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_a) \\
&\quad \exp\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}((2\rho)^2+\frac{(n-1)^2}{4})+\frac{1}{2}\omega^2R^4](t_b-t_a)\}\} \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Ici l'integration fait intervenir les fonctions de Bagmanm $d^{l,\sigma}_{\left(\frac{\lambda+K}{2}\right),\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)}(\theta)$ pour lesquelles J est entier ou demi entier dépendant de J_0, où $J_0=\max\left\{\frac{1}{2}\left|\lambda-K\right|,\frac{1}{2}\left|\lambda+K\right|\right\}$ avec $J_0=\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)-1$, ainsi $J=\left(\frac{\lambda-K}{2}\right)-1-n_r$

$$
\begin{aligned}
K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) &= \sum_{J=\sigma}^{\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)-1}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_J\left(t_b-t_a\right)\right\}\Psi_J\left(\chi_b\right)\Psi_J^*\left(\chi_a\right) \\
&\quad +\int_0^\infty dK\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_K\left(t_b-t_a\right)\right\}\Phi_K\left(\chi_b\right)\Phi_K^*\left(\chi_a\right) \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

sachant que : $\theta=2\chi$.

L'expression de l'énergie est :

$$
\begin{aligned}
E_J &= \left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left(-\left(2J+1\right)^2+\frac{(n-1)^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right] \\
&= \left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left(-\left[2n_r+k-\lambda+1\right]^2+\frac{(n-1)^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^4\right]. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

avec :

$$\begin{cases} k = \left(l + \left(\frac{n-2}{2}\right)\right) \\ \lambda = \left(\frac{M}{\hbar^2}\omega^2 R^4 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

que nous substituons dans l'expression de l'énergie :

$$E_J = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[-\left(2n_r + l + \frac{n}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{(n-1)^2}{4}\right]$$

$N = 2n_r + l$, ou bien alors :

$$E_N = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[-N^2 - Nn + 2\lambda N + \lambda n - \frac{n}{2}\right]$$

Ainsi :

$$E_N = \left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)\left[-N\left(N + n - 1\right) + \left(2\lambda - 1\right)\left(N + \frac{n}{2}\right)\right]. \tag{3.40}$$

La fonction d'onde :

$$\Psi_J\left(\chi\right) = R^{-n}\left(\sinh\chi\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\left(2J+1\right)\sinh 2\chi\right)^{\frac{1}{2}} d^{J,\sigma}_{M,\acute{M}}\left(\chi\right) \tag{3.41}$$

et les fonctions de Bagmanm définies pour $J > |M|, \left|\grave{M}\right|$:

$$\begin{aligned} d^{J,\sigma}_{M,\acute{M}}\left(\chi\right) &= \frac{1}{\left(M - \acute{M}\right)!}\left[\frac{\Gamma\left(1+M+J\right)\Gamma\left(M-J\right)}{\Gamma\left(1+\acute{M}+J\right)\Gamma\left(\acute{M}-J\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cosh^{-M-\acute{M}} 2\chi \sinh^{M-\acute{M}} 2\chi \\ &\quad {}_2F_1(1-\acute{M}+J, -\acute{M}-J, 1+M-\acute{M}, -\sinh^2 2\chi), \end{aligned}$$

${}_2F_1$: la fonction hypergéométrique.

et :

$$\begin{cases} J = \left(\frac{\lambda-k}{2}\right) - n_r - 1 \\ M = \left(\frac{\lambda+k}{2}\right) \\ \acute{M} = \left(\frac{\lambda-k}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M + \acute{M} = \lambda \\ M - \acute{M} = l + \frac{n}{2} - 1 \\ \acute{M} - J = 1 + n_r \\ \acute{M} + J = -l - \frac{n}{2} - n_r + \lambda \\ M - J = n_r + l + \frac{n}{2} \\ M + J = -1 - n_r + \lambda \end{cases}$$

Ainsi la fonction de Bagmanm devient alors :

$$\begin{aligned} d^{J,\sigma}_{M,\acute{M}}(\chi) &= \frac{1}{\left(l + \frac{n}{2} - 1\right)!} \left[\frac{\Gamma\left(-n_{r+}\lambda\right)\Gamma\left(n_r + l + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \acute{M} + J\right)\Gamma\left(-l - \frac{n}{2} - n_{r+}\lambda + 1\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cosh^{-\lambda} 2\chi \sinh^{l+\frac{n}{2}-1} 2\chi \\ \sinh^{-\frac{(n-1)}{2}} \chi &\quad {}_2F_1(1 - \acute{M} + J, -\acute{M} - J, 1 + M - \acute{M}, -\sinh^2 2\chi). \end{aligned}$$

En remplaçant la relation suivante :

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; Z) = (1 - Z)^{-\alpha}\ {}_2F_1(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{Z}{Z - 1})$$

avec dans notre cas : $\alpha = \left(1 - \acute{M} + J\right), \beta = \left(-\acute{M} - J\right), \gamma = \left(1 + M - \acute{M}\right)$,

et $Z = \left(-\sinh^2 2\chi\right)$

Alors la foncion hypergéométrique devient :

$${}_2F_1(1-\acute{M}+J, -\acute{M}-J, 1+M-\acute{M}, -\sinh^2 2\chi) = (\cosh)^{n_r}\ \ {}_2F_1(-n_r, -n_r+\lambda, l+\frac{n}{2}, \tanh^2 \chi).$$

Ainsi la fonction d'onde est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi_{n_r}(\chi) &= \frac{1}{\left(l + \frac{n}{2} - 1\right)!} \left[\frac{2(2n_r + l - \lambda + \frac{n}{2})\Gamma\left(\lambda - n_r\right)\Gamma\left(n_r + l + \frac{n}{2}\right)}{R^n\Gamma\left(1 + n + l\right)\Gamma\left(-l - \frac{n}{2} - n_r + \lambda + 1\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cosh^{-\lambda+\frac{1}{2}+2n_r} \chi \sinh^{l+\frac{n-1}{2}} \chi \\ \sinh^{-\frac{(n-1)}{2}} \chi &\quad {}_2F_1(-n_r, -n_r + \lambda, l + \frac{n}{2}, \tanh^2 \chi). \end{aligned} \tag{3.42}$$

ou encore :

$$\Psi_{n_r}(\chi) = \frac{1}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{2(2n_r+l-\lambda+\frac{n}{2})\Gamma\left(\lambda-n_r\right)\Gamma\left(n_r+l+\frac{n}{2}\right)}{R^n\Gamma\left(1+n+l\right)\Gamma\left(\lambda-l-n_r-\frac{n}{2}+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\sinh^l\chi\cosh^{2n_r-\lambda+\frac{1}{2}}\chi$$
$$ {}_2F_1(-n_r,-n_r+\lambda,l+\frac{n}{2},\tanh^2\chi) \qquad (3.43)$$

3.2.2 Le problème de Coulomb sur H^n via la variété SU(1,1) :

Partant du propagateur :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a) = \left[R^n(\sinh\chi_a\sinh\chi_b)^{\frac{(n-1)}{2}}\right]^{-1}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp(\frac{i}{\hbar}S_j)$$
$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j \qquad (3.22)$$

où l'action est :

$$S_j = \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$-R^2V(\chi_j)\sigma_j-\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j. \qquad (3.23)$$

Nous définissons le potentiel de **Coulomb** sur H^n par :

$$V\left(\chi_j\right) = -\frac{\alpha}{R}\left(\coth\chi_j-1\right) \qquad (3.44)$$

que nous substituons dans l'action :

$$S_j = \frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2-\frac{\hbar^2\sigma_j}{2M\sinh^{\Lambda 2}\chi_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$$
$$+\alpha R\left(\coth\chi_j-1\right)\sigma_j-\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j \qquad (3.45)$$

Ensuite on fait un changement de variable ($\chi\to\theta$), défini par la transformation suivante :

$$\exp(\chi) = \cosh\theta \tag{3.46}$$

avec la forme discrète suivante :

$$\chi_j = \ln\cosh\theta_j,$$

$\theta \in [0, \infty]$, Les trois premieres derivées sont :

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \tanh\theta$$

$$\frac{d^2\chi}{d\theta^2} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

$$\frac{d^3\chi}{d\theta^3} = -\frac{2\sinh\theta}{\cosh^3\theta}$$

L'energie cinétique devient aprés ce changement :

$$\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2 = \frac{M}{2\sigma_j}\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)(\Delta\theta_j)^2\left[1 - \frac{1}{6\cosh^2\widetilde{\theta}_j}(\Delta\theta_j)^2\right]$$

et le potentiel devient :

$$\alpha R\left(\coth\chi_j - 1\right)\sigma_j = 2\alpha R(\sinh^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\sigma_j,$$

l'action est alors :

$$\begin{aligned} S_j \quad &= \quad \frac{M}{2\sigma_j}\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)(\Delta\theta_j)^2\left[1 - \frac{1}{6\cosh^2\widetilde{\theta}_j}(\Delta\theta_j)^2\right] + 2\alpha R(\sinh^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\sigma_j \\ &\quad -\frac{2\hbar^2\sigma_j}{M\sinh^2\widetilde{\theta}_j}\coth^2\widetilde{\theta}_j\left[\left(l + \frac{(n-2)}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - \left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\right)\sigma_j, \end{aligned}$$

et la mesure sous forme discrète sera :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}(\tanh\theta_j)\,d\theta_j$$

et sous la forme symétrique :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j=(\tanh\theta_b\tanh\theta_a)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}(\tanh\theta_j)\left[1+\frac{1}{4}(\Delta\theta_j)^2\left(-\frac{2}{\cosh^2\widetilde{\theta}_j}-\frac{1}{\cosh^2\widetilde{\theta}_j\sinh^2\widetilde{\theta}_j}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

L'introduction de la transformation spatiale a induit un terme cinétique de forme non conventionnelle.

Nous passons donc à une transformation temporelle pour redonner une forme conventionnelle au terme cinétique :

$$\frac{dt}{ds}=\tanh^2\theta$$

sous la forme discrète :

$$\sigma=s_j\left(\tanh\theta_j\tanh\theta_{j-1}\right)$$

et sous la forme symétrique :

$$\sigma=s_j\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)\left[1+\frac{1}{4}(\Delta\theta_j)^2\left(-\frac{2}{\cosh^2\widetilde{\theta}_j}-\frac{1}{\cosh^2\widetilde{\theta}_j\sinh^2\widetilde{\theta}_j}\right)\right]$$

La mesure devient alors alors :

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\chi_j=(\tanh\theta_a\tanh\theta_b)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar s_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j$$

Le terme cinétique :

$$\frac{M}{2\sigma_j}(\Delta\chi_j)^2=\frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2+\frac{M}{8s_j}(\Delta\theta_j)^4\lambda_j$$

avec :

$$\lambda_j=\frac{1}{\cosh^2\widetilde{\theta}_j\sinh^2\widetilde{\theta}_j}+\frac{4}{3\cosh^2\widetilde{\theta}_j}$$

et le potentiel prend la forme suivante :

$$2\alpha R(\sinh^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\sigma_j=2\alpha R(\sinh^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)s_j$$

Ainsi l'action devient :

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\} = \exp\{\frac{i}{\hbar}[\frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2 + \frac{M}{8s_j}(\Delta\theta_j)^4\lambda_j + 2\alpha R(\sinh^2\widetilde{\theta}_j)^{-1}\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)s_j$$
$$-\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}\left(\tanh^2\widetilde{\theta}_j\right)s_j - \frac{2\hbar^2}{M\sinh^2\widetilde{\theta}_j}\left[\left(l+\frac{(n-2)}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]s_j]\}$$

En utilisant la relation asymptotique suivante :

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+bx^4+0(x^6))dx \simeq \int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2+\frac{3b}{4a^2}+0(a^{-3}))dx$$

et remplaçant le terme d'ordre quatre $(\Delta\chi_j)^4$ par un terme équivalent :

$$bx^4 \sim \frac{3b}{4a^2} \quad \text{dans notre cas} \begin{cases} b = \frac{M}{8is_j\hbar}\lambda_j \\ a = \frac{M}{2is_j\hbar} \end{cases}$$

ou bien :

$$\left(\frac{iM\lambda_j}{\hbar 8s_j}\right)(\Delta\theta_j)^4 \sim \left(\frac{3\hbar^2\lambda_j}{8M}\right).$$

Ce qui donne pour l'expréssion de l'action :

$$S_j = \frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2 - \frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}s_j$$
$$-\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{[(2l+(n-2))^2]-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\theta_j} - \frac{\left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+2\alpha R\right)\right]-\frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j$$

ou bien :

$$S_j = \frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2 - \frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\theta_j} + \frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j - \frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}s_j \tag{3.47}$$

avec :

$$k^2 = (2l+(n-2))^2$$
$$\lambda^2 = \left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+2\alpha R\right)\right].$$

En introduisant une identité définie par la fonction δ de Dirac ayant la forme suivante :

$$\left[\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)\Big|_{\theta_a}\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)\Big|_{\theta_b}\right]\int_{s_0}^{s_N} ds\delta\left(T-\left[\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2\right]^2\right)=1$$

On peut écrire le propagateur comme suit :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;t_b-t_a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\delta\left(T-\int_{s_0}^{s_N} ds\left[\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2\right]\right)K_l(\chi_b,\chi_a;s_b-s_a)\,ds \quad (3.48)$$

où :

$$K_l(\chi_b,\chi_a;s_b-s_a)=(2)^{n-1}\left(\sinh\theta_b\sinh\theta_a\right)^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\coth\theta_b\coth\theta_a\right)^{\frac{(n-1)}{2}}$$
$$\left(\tanh\theta_a\tanh\theta_b\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_j\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{M}{2\pi i\hbar s_j}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N-1}d\theta_j \quad (3.49)$$

avec :

$$S_j=\frac{M}{2s_j}(\Delta\theta_j)^2-\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\sinh^{\Lambda 2}\theta_j}+\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\cosh^{\Lambda 2}\theta_j}\right]s_j-\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}s_j \quad (3.50)$$

et :

$$\begin{aligned} k^2 &= (2l+(n-2))^2 \\ \lambda^2 &= \left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M}+2\alpha R\right)\right]. \end{aligned}$$

Ce problème a été déja traité dans la section précedente et le résultat est :

$$
\begin{aligned}
K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \left[(2)^{n-1}(\sinh\theta_b \sinh\theta_a)^{-\frac{(n-1)}{2}}(\coth\theta_b \coth\theta_a)^{\frac{(n-1)}{2}}\right] \\
(\tanh\theta_a \tanh\theta_b)^{\frac{1}{2}} & (\sinh 2\theta_b \sinh 2\theta_a)^{\frac{1}{2}} \\
& \{\sum_{J=\sigma}^{\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)-1}(2J+1)\, d^{l,\sigma}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_b)\, d^{l,\sigma*}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_a) \\
& \exp\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}((2J+1)^2 - \frac{(n-1)^2}{4})]\,(t_b - t_a)\} \\
& + \int_0^\infty d\rho 2\rho \tanh\left[\pi\left(\rho + i\sigma\right)\right] d^{-\frac{1}{2}+i\rho,\sigma}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_b)\, d^{-\frac{1}{2}+i\rho,\sigma*}_{\left(\frac{\lambda+k}{2}\right),\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)}(\theta_a) \\
& \exp\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{R^2}\right)[\frac{\hbar^2}{2M}((2\rho)^2 + \frac{(n-1)^2}{4}) + \frac{1}{2}\omega^2 R^4]\,(t_b - t_a)\}\} \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

On obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
K_l(\chi_b, \chi_a; t_b - t_a) &= \sum_{J=\sigma}^{\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)-1} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_J\,(t_b - t_a)\right\}\Psi_J(\chi_b)\,\Psi_J^*(\chi_a) \\
&+ \int_0^\infty dK \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_K\,(t_b - t_a)\right\}\Phi_K(\chi_b)\,\Phi_K^*(\chi_a) \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

L'expression de l'énergie est :

$$
\begin{aligned}
E_J &= \left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left(-(2J+1)^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\hbar^2}{2R^2M}\right)\left[\left(-\left[\lambda - k - 2 - 2n_r + 1\right]^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right)\right]. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{cases}
k = (2l + (n-2))^2 \\
\lambda = \left[\frac{M}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2(n-1)^2}{8M} + 2\alpha R\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

on prend :

$$
\lambda = \left(n_r + l + \sigma + \frac{(n-1)}{2}\right)
$$

avec :

$$\sigma = \frac{\alpha R}{n_r + l + \frac{(n-1)}{2}}$$

où : $N = 2n_r + l$, que nous substituons dans l'expression de l'énergie :

$$E_N = -\frac{N\left(N+n-1\right)\hbar^2}{2MR^2} - \frac{\alpha^2 M}{2\hbar^2\left(N + \frac{(n-1)}{2}\right)^2} + \frac{\alpha}{R}. \tag{3.54}$$

et aprés la substitutions de la transformation inverse :

$$\cosh\theta = \exp(\chi), \qquad \sinh\theta = \left(\exp(2\chi) - 1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

La fonction d'onde est la suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_l\left(\chi\right) &= C^n_{N\,l}\left(\sigma\right)\left(\sinh^l\chi\right)\exp\left[\chi\left(N-\sigma\right)\right] \\ &\quad {}_2F_1\left(-N+l, l+\frac{(n-1)}{2}+\sigma; 2l+n-1; 1-\exp\left(-2\chi\right)\right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

avec :

$$\begin{aligned} C^n_{N\,l}\left(\sigma\right) &= \frac{2^{l+\frac{(n-1)}{2}}}{\Gamma\left(2l+n-1\right)} \\ &\quad \left[\frac{\left(\sigma^2+\left(l+n-1\right)^2\right)\Gamma\left(l+n-2\right)\Gamma\left(\sigma+l+\frac{(n-1)}{2}\right)}{R^n\Gamma\left(\sigma-l-1\right)\left(N-l\right)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Conclusion générale :

Dans notre travail nous avons traité un problème de la mécanique quantique non relativiste dans le cadre des intégrales de chemins. Nous avons considéré une particule dans des espaces courbes : une sphère de dimension n et un hyperboloïde (pseudo − sphère) de dimension n, soumise respectivement à l'action de deux potentiels : l'Oscillateur et le Coulombien.

Pour résoudre ce problème, on a combiné les techniques basées sur les transformations spatio-temporelles et celles relatives à la théorie des groupes pour calculer le propagateur. Dans le cas de la sphère de dimension n, nous avons commencé d'abord par le potentiel de l'Oscillateur. Après avoir intégré sur les angles, l'action de la particule relative au "rayon" χ est directement celle du potentiel de Pöschl-Teller. Cette dernière est convertie, via l'adjonction de deux angles supplémentaires, à une action d'une particule libre se mouvant sur la variété SU(2). Le problème a été alors solutionné. Le propagateur est alors calculé et les fonctions d'onde et le spectre sont déduits. Par ailleurs, dans le cas du potentiel de Coulomb et après intégration sur les angles, l'action de la particule relative au "rayon" χ est celle de Rosen-Morse. Elle a nécessité en conséquence l'introduction d'une transformation spatio-temporelle qui a ramené le problème, via l'adjonction des mêmes angles supplémentaires, aussi au cas de la particule libre se mouvant sur la variété SU(2). Le propagateur est alors calculé et les fonctions d'onde et le spectre sont déduits. Il a été relevé une certaine correspondance entre les deux problèmes concernant les valeurs des moments angulaires. Le cas du potentiel de Coulomb a été également étudié via la variété SU(1, 1) en changeant de transformation spatio-temporelle.

Ces mêmes problèmes ont été reconsidérés mais cette fois ci dans le cas de l'hyperboloïde de dimension n. La variété SU(2) est alors remplacée par la variété SU(1, 1) qui en représente un prolongement analytique sur le "rayon" χ . Les mêmes étapes de calculs ont été refaites. Les expressions des propagateurs sont semblables aux derniers à un prolongement analytique près. Les fonctions d'onde et le spectre sont déduits et concordent avec ceux de la littérature.

Dans ce travail on a assisté à une nouvelle démonstration du formalisme Path Integral maniant des techniques extrêmement puissantes telles les transformations spatio-temporelles et les symétries des groupes de Lie spécialement la structure de groupe compact $\mathbf{SU(2)}$ et celle non compact $\mathbf{SU(1,1)}$. Nous concluons alors que Path Integral est une méthode élégante et assez efficace pour donner des résultats satisfaisants et concordants [19].

Références :

[**1**]I. H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. B **84** (1979), 185.

[**2**]A. O. Barut, A. Inomata, and G. Junker, J. phys. A : Math. Gen. **20** (1987), 6271.

[**3**]A. O. Barut, A. Inomata, and G. Junker, J. phys. A : Math. Gen. **23** (1990), 1179.

[**4**]L. Chetouani and T. F. Hammann, J. Math. Phys. **27** (1986), 2944.

[**5**]T. Boudjedaa, L. Chetouani and L. Guechi, J. math. phys. **32** (1991), 441.

[**6**]A. Inomata and M. A. Kayed, J. phys. A : Math.Gen. **18** (1985), 235.

[**7**]M. Böhm and G. Junker, J. Math. Phys. **28** (1987), 1978.

[**8**]M. Böhm and G. Junker, Phys. Lett. A **117** (1986), 375.

[**9**]T. Boudjedaa, These de Magister (1991).

[**10**]D. C. Khandekar, S. V. Lawande and K. V. Bhagwat, Path-Integral Methods and their Applications (singapore : World Scientific).

[**11**]G. Junker and A. Inomata 1986 Path integrals from mev to Mev ed M C Gutzwiller, A Inomata, J R Klauder and L. Streit (singapore : World Scientific) p315.

[**12**]I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, Series and Products (Academic, NewYork, 1965), p.980, Eq.(8-534).

[**13**]H. Bateman, Higher transcendental Functions, (McGraw-Hill,New York,1953), Vol.**2**, p.98, Eq.(1).

[**14**]E. Whittaker and G. Watson, Acourse of Modern Analysis (Cambridge U.P., Cambridge,1952), p355.

[**15**]G. N. Watson. A Treatise on the theory of Bessel Functions (Cambridge U.P., Cambridge, 1966), p.77 ; Ref.2, pp.1029-31.

[**16**]Reférence 12, p. 178, Eq.(34).

[**17**]Reférence11, p.961, Eq.(8-41).

[**18**]R. Ho and A. Inomata, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 231.

[**19**]E. G. Kalnins, W. Miller, Jr. , and G. S. Pogosyan, Phys. At. Nucl. **65** (2002),1086.

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو استخدام بعض تقنيات تكامل المسارات لحل مسالة الهزاز و كولون فوق دائرة و شبه الدائرة في البعد ن.
في حالة الهزاز فإن تكامل المسارات المدارية تكون مماثلة لنتائج بوش- تيلار، لكن في حالة كولون ندخل تحويلا زمني-فضائي للحصول على نتائج بوش- تيلار أيضا.
نستعمل في كل حالة من الحالات الزمرة الكثيفة و الزمرة الغير كثيفة.
النتائج التي تحصلنا عليها توافق تلك المذكورة في مقالات البحث.

كلمات مفتاح:

تكامل المسارات، كمون كولون، كمون الهزاز، كمون بوش- تيلار، الزمرة الكثيفة، الزمرة الغير كثيفة.

Abstract :

The aim of this work is to resolve the Oscillator and Coulomb problem on n-dimensional sphere and hyperboloid.
In the Oscillator case, the radial path integral is identical to Pöschl-Teller one; however, in the Coulombian case we have introduced the space-time transformation that allows to give the Pöschl-Teller one.
In each case, the SU(2) and SU(1, 1) symmetries are used.
The results agree exactly with those of literature.

Keywords :

Path integrals, Coulomb potential, Oscillator potential, Pöschl-Teller potential, compact group, non-compact group.

Résumé :

Le but de ce travail est de résoudre le problème de l'Oscillateur et de Coulomb sur la sphère et l'hyperboloïde à n dimensions.
Pour le cas de l'Oscillateur, l'intégrale de chemins radiale est identique à celle de Pöschl-Teller; quand au Coulombien, on introduit en plus une transformation spatio-temporelle qui le ramène au cas de Pöschl-Teller.
Dans chaque cas les symétries SU(2) et SU(1,1) ont été exploitées.
Les résultats concordent exactement avec ceux de la littérature.

Mots clés :

Intégrale de chemins, le potentiel de Coulomb, le potentiel de l'Oscillateur, le potentiel de Pöschl-Teller, groupe compact, groupe non compact.