

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister
En Physique
Spécialité: Physique Théorique

Par

Nawel Rezaiki

Intitulé

**L'Atome d'Hydrogène dans le Formalisme de la
Géométrie Non Commutative**

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

Mr. J. MIMOUNI	Prof. Univ. Mentouri Constantine	Président
Mr. A. BENSLAMA	M.C. Univ. Mentouri Constantine	Rapporteur
Mr. N. MEBARKI	Prof. Univ. Mentouri Constantine	Examineur
Mr. A. NOURI	M.C. Univ. Mentouri Constantine	Examineur

Remerciements

Tout d'abord remerciens Dieu tout puissant qui nous a éclairé vers le bon chemin

Mes premières remerciements s'adressent à mon directeur de thèse

A. BENSLAMA, Maître de Conférence au département de physique de l'Université Mentouri de Constantine, qui m'a proposé ce sujet, m'a dirigée pour sa bonne réalisation, je veux aussi lui exprimer ma sincère gratitude pour sa disponibilité à mon égard, pour ses conseils, pour ses orientations et pour son aide dans la rédaction du mémoire.

J'exprime ma gratitude à Monsieur J. MIMOUNI, Professeur au Département de Physique de l'Université Mentouri de Constantine, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence de ce jury.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur N. MEBARKI Professeur au département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université Mentouri et à Monsieur A. NOURI, Maître de Conférences à l'Université Mentouri, qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury et d'examiner mon travail.

Mes remerciements à toutes mes amies.

En fin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

1. Introduction	3
2. La quantification de Weyl- Le produit de Moyal	6
2.1 La quantification de Weyl.....	6
2.2 Le produit de Moyal.....	7
2.2.1 Notation.....	9
2.3 Les propriétés de produit de Moyal.....	10
2.4 Conclusion.....	12
3. La mécanique quantique non- commutative NCQM	13
L'atome hydrogène comme exemple	
3.1 La mécanique quantique non- commutative	13
3.1.1 Les espaces non- commutatifs.....	13
3.1.2 L'équation de Schrödinger sur un espace NC.....	14
3.1.3 Démonstration.....	14
3.1.4 Théorème.....	16
3.2 Atome d'hydrogène sur un espace-temps non commutatif.....	16
3.3 Spectre classique pour l'atome d'hydrogène dans la théorie NC.....	19
3.3.1 Théorie des perturbations.....	19
3.3.2 La relation entre les bases $ nljj_z\rangle$ et $ nls_l s_z\rangle$	23
3.4 Déplacement de Lamb.....	28
3.5 Effet Stark.....	31
3.5.1 Définition.....	31
3.5.2 Effet Stark pour l'atome d'hydrogène.....	31
3.5.3 Effet Stark non- commutatif.....	31
3.6 Conclusion.....	33

4. Théorie de jauge sur un espace- temps non- commutatif QED comme exemple.	34
4.1 L'électrodynamique quantique QED non- commutative.....	34
4.2 Les règles de Feynman pour QED non- commutative.....	37
4.2.1 Rappel.....	37
4.2.2 Le théorème de Wick.....	38
4.2.3 La matrice S.....	41
5. Le vertex électron- photon en QED non- commutative	49
5.1 Le vertex électron- photon à un niveau de boucle.....	49
5.1.1 Structure de vertex à l'un niveau de boucle.....	49
5.2 Conclusion	69
5.3 Perspective.....	69
Conclusion générale	70
Annexe A	71
Annexe B	73
Bibliographie	74

Chapitre 1

Introduction

Depuis l'aube de l'humanité, l'homme a tenté de dompter la nature. De la découverte de feu à *Path Finder* (la sonde spatiale américaine envoyée sur la planète Mars), l'homme a accompli un parcours remarquable. Il a su tirer profit de la nature tout en se préservant de ses caprices (catastrophes naturelles,.....). L'homme a compris qu'avant de dompter la nature, il doit forcément la comprendre. Faire du feu en frottant deux morceaux de Silex c'est bien, mais comprendre le phénomène lui même c'est mieux. A travers les siècles, il a évolué et il a su exploiter ses erreurs pour rendre sa vie plus agréable.

Le vingtième siècle a apporté avec lui son lot de découvertes faites par l'homme.

En physique par exemple, deux grandes théories ont révolutionné le monde. La relativité (restreinte) et la mécanique quantique. La relativité générale est la théorie qui décrit l'infiniment grand (les planètes, les galaxies,.....). Ses fondements ont été établies par Albert Einstein en 1916. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme formalisme mathématique. La mécanique quantique est la théorie qui décrit les systèmes microscopiques, les constituants les plus infimes de la matière (les atomes, les électrons, les quarks,). Elle fut établie par un ensemble de physiciens tels que N. Bohr, W. Heisenberg, E. Schrödinger et Paul A. M. Dirac, etc.... Elle utilise la théorie des algèbres d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert (Les algèbres de Von Neumann). Un premier pas vers l'unification fut accompli avec l'apparition de la mécanique quantique relativiste et l'électrodynamique quantique (QED) établie entre autres par Richard P. Feynman, J. Schwinger, I. Tomonaga.

Ces deux théories sont à la base de la physique théorique d'aujourd'hui. Elles utilisent des formalismes mathématiques complètement différents. Par ailleurs, elles donnent des résultats satisfaisants dans leurs domaines respectifs.

Mais dès que les physiciens ont voulu les unifier dans un même cadre (la gravité quantique), ils se heurtent à des problèmes multiples (non renormalisabilité, absence du graviton). Malgré cela, les physiciens théoriciens aspirent vers une théorie unifiée, qui pourra traiter les systèmes physiques microscopiques et macroscopiques sur le même pied d'égalité. Certains d'entre eux pensent que la voie vers l'unification passe forcément par le développement des outils mathématiques utilisés en physique. C'est dans cet état d'esprit que des théories, comme la supersymétrie (SUSY) et les supercordes (Superstrings) ont vu le jour. Celles-ci ajoutent de nouvelles symétries (symétrie boson---fermion) à la nature. Le bilan final de tout ceci est que les physiciens ont échoué (pour le moment) à unifier les quatre interactions de la nature.

Chapitre 2

La quantification de Weyl – Le produit de Moyal

2.1. La quantification de Weyl

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique. C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase (variables canoniques). Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie sur un espace (vectoriel) euclidien à D dimensions \mathfrak{R}^D . On définit la transformée $\tilde{f}(k)$ de $f(x)$ par la relation :

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} f(x) \quad (2.1)$$

Remarque que si $f(x)$ est une fonction réelle alors

$$\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k) \quad (2.2)$$

On définit un espace-temps non commutatif en remplaçant les coordonnées locales x_i de \mathfrak{R}^D par des opérateurs hermétiques \hat{x}_i qui vérifient la relation de commutation :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = iq_{ij} \quad (2.3)$$

La quantification de Weyl consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur \mathfrak{R}^D et l'algèbre des opérateurs.

On définit le symbole de Weyl par :

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \quad (2.4)$$

où $\tilde{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

Si $f(x)$ est fonction réelle alors l'opérateur de Weyl $\hat{W}[f]$ est hermitien

$$\hat{W}^+[f] = \hat{W}[f] \quad (2.5)$$

2.2 Le produit de Moyal (Produit star)

Notre but est de trouver un produit (noté produit star $*$) pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski qui permet au symbole de Weyl d'être un homomorphisme pour la multiplication. En d'autres termes on veut trouver un produit star tel que :

Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \hat{W}[f * g] \quad (2.6)$$

En d'autres termes on a

$$(A, *) \cong (\hat{A}, \cdot) \quad (2.7)$$

L'information sur la non commutativité de l'espace – temps est codée dans le produit star. En effet :

$$\begin{aligned} \hat{W}[f]\hat{W}[g] &= \int \frac{d^D k}{(2\mathbf{p})^D} \tilde{f}(k) e^{ik_m \hat{x}^m} \int \frac{d^D l}{(2\mathbf{p})^D} \tilde{g}(l) e^{il_m \hat{x}^m} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\mathbf{p})^D} \frac{d^D l}{(2\mathbf{p})^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \exp[ik_m \hat{x}^m] \exp[il_m \hat{x}^m] \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant la formule de Baker – Campbell – Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Valable pour les opérateurs A et B tel que :

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

On trouve :

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D l}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \exp[i(k_m + l_m)\hat{x}^m] \exp\left[-\frac{i}{2} \mathbf{q}^{mm} k_m l_n\right] \quad (2.9)$$

En effectuant le changement de variable $l = q - k$ alors :

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D l}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) \exp[iq_m \hat{x}^m] \exp\left[-\frac{i}{2} \mathbf{q}^{mm} k_m q_n\right] \quad (2.10)$$

Remarque que lors du changement de variable

$$\mathbf{q}^{mm} k_m l_n = \mathbf{q}^{mm} k_m q_n \quad (2.11)$$

puisque \mathbf{q}^{mm} est antisymétrique et $k_m k_n$ est symétrique en inter changeant m et n .

D'autre part on peut écrire le second membre de l'équation (2.6) comme suit :

$$\hat{W}[f * g] = \int \frac{d^D q}{(2p)^D} \overline{(f * g)(q)} \exp(iq_m \hat{x}^m) \quad (2.12)$$

Par identification on trouve que

$$\overline{(f * g)(q)} = \int \frac{d^D k}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) \exp\left[-\frac{i}{2} \mathbf{q}^{mm} k_m q_n\right] \quad (2.13)$$

D'où le produit :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int \frac{d^D q}{(2p)^D} \overline{(f * g)(q)} \exp[iq_m x^m] \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D q}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) \exp\left[-\frac{i}{2} \mathbf{q}^{mm} k_m q_n\right] \exp[iq_m x^m] \end{aligned} \quad (2.14)$$

On peut montre que ce produit [1] peut s'écrire sous la forme :

$$(f * g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^{mm} \partial_m^x \partial_n^h\right] f(x + \mathbf{x}) g(x + \mathbf{h}) \Big|_{x=h=0}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{d^D k}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \exp[ik_m x^m] \\
g(x) &= \int \frac{d^D p}{(2p)^D} \tilde{g}(p) \exp[ip_n x^n] \\
\Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^m \partial_m^x \partial_n^h\right] f(x+\mathbf{x}) g(x+\mathbf{h}) \Big|_{x=h=0} \\
&= \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^m \partial_m^x \partial_n^h\right] \left[\iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D p}{(2p)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \exp[ik_m (x+\mathbf{x})^m] \exp[ip_n (x+\mathbf{h})^n] \right] \\
&= \iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D p}{(2p)^D} \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^m (ik_m)(ip_n)\right] \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \exp[ik_m x^m] \exp[ip_n x^n]
\end{aligned}$$

On pose $p_m = q_m - k_m$

$$\begin{aligned}
&= \iint \frac{d^D k}{(2p)^D} \frac{d^D q}{(2p)^D} \exp\left[-\frac{i}{2} \mathbf{q}^m k_m q_n\right] \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) \exp[iq_m x^m] \\
&= (f * g)(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$(f * g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^m \partial_m^x \partial_n^h\right] f(x+\mathbf{x}) g(x+\mathbf{h}) \Big|_{x=h=0} \quad (2.15)$$

2.2.1 Notation

La quantité : $\exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{q}^m k_m q_n\right]$ est appelée le facteur de la phase non commutative

$$k \wedge q = \frac{1}{2} \mathbf{q}^m k_m q_n \quad (2.16)$$

Une autre écriture du produit star est la suivante :

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp\left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_m \mathbf{q}^m \overrightarrow{\partial}_n\right] g(x) \quad (2.17)$$

On peut développer le produit star comme suit :

$$f * g = fg + \frac{i}{2} \mathbf{q}^m \partial_m f \partial_n g + O(q^2)$$

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \mathbf{q}^{m_1} \mathbf{K} \mathbf{q}^{m_2} \partial_{m_1} \mathbf{K} \partial_{m_2} f(x) \partial_{n_1} \mathbf{K} \partial_{n_2} g(x) \quad (2.18)$$

2.3 Les propriétés du produit star (produit de Moyal)

Dans cette partie, nous récapitulons quelques identités utiles de l'algèbre de produit star.

1- Lorsque $q = 0$ on trouve :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) \quad (2.19)$$

On retrouve donc le cas commutatif

2- le produit star entre exponentiels :

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k \wedge q)}$$

$$k \wedge q \equiv k^m q^n \mathbf{q}_{mn} \quad (2.20)$$

3- représentation de l'espace d'impulsion :

Soient f et g , h trois fonctions arbitraires a partir de R^4 [6]:

$$f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ikx} d^4 k \quad , \quad g(x) = \int \tilde{g}(k) e^{ikx} d^4 k$$

$$h(x) = \int \tilde{h}(k) e^{ikx} d^4 k \quad (2.21)$$

$\tilde{f}(k)$ et $\tilde{g}(k)$, $\tilde{h}(k)$ Les transformées du Fourier des fonctions f et g , h respectivement.

Alors en utilisant (2.20)

$$(f * g)(x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{-i(kq)/2} e^{i(k+q)x} d^4 k d^4 q \quad (2.22)$$

4- l'associativité :

En utilisant la propriété (2.22) on trouve [1] :

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x) &= \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-i(kqq)/2} e^{-i[(k+q)qp]/2} e^{i(k+q+p)x} d^4 k d^4 q d^4 p \\ [f * (g * h)](x) &= \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-i(qqp)/2} e^{-i[kq(q+p)]/2} e^{i(k+q+p)x} d^4 k d^4 q d^4 p \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donc :

$$(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h. \quad (2.24)$$

5- produit star sous le signe intégral

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int (g * f)(x) d^4 x = \int (f \cdot g)(x) d^4 x. \quad (2.25)$$

En utilisant (2.22) nous pouvons immédiatement effectuer l'intégration sur x qui donnera un $d^4(k+q)$.

En raison de l'antisymétrie de q , l'exposant disparaît ainsi :

$$\begin{aligned} \int (f * g)(x) d^4 x &= \int d^4 k \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) \\ &= \int (f \cdot g)(x) d^4 x. \end{aligned} \quad (2.26)$$

de (2.25) nous pouvons déduire la propriété cyclique :

$$\int (f_1 * f_2 * \mathbf{K} \mathbf{K} f_n)(x) d^4 x = \int (f_n * f_1 * \mathbf{K} \mathbf{K} f_{n-1})(x) d^4 x. \quad (2.27)$$

6- La conjugaison complexe :

$$(f * g)^{C.C.} = g^{C.C.} * f^{C.C.} \quad (2.28)$$

7- le produit star est non commutatif :

$$f * g \neq g * f \quad (2.29)$$

Par contre [6] :

$$g * f = f * g |_{q \rightarrow -q}, \text{ Et aussi } \{f, g\}_{M.B.} = f * g |_q - f * g |_{-q}. \quad (2.30)$$

$$8- (f * g * h)|_q = (h * g * f)|_{-q}. \quad (2.31)$$

$$9- [e^{ikx}, e^{iqx}] = 2ie^{i(k+q)x} \sin(ik \wedge q) \quad (2.32)$$

10- la règle de Leibniz :

$$\partial_m (f * g) = \partial_m f * g + f * \partial_m g \quad (2.33)$$

2.4 Conclusion

Si on veut travailler avec un espace - temps non commutatif (pour coder la non commutativité de l'espace temps) il existe deux manières différentes :

- Utiliser un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl.
- Déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace - temps commutatif.

Chapitre 3

La mécanique quantique non commutative NCQM L'atome hydrogène comme exemple

3.1. La mécanique quantique non commutative

3.1.1. Les espaces non commutatifs

Dans cette section, nous exposons la mécanique quantique sur un espace-temps non commutatif. La mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant les relations de commutation suivantes [6] :

$$\begin{aligned} [x_i, p_j] &= i\hbar d_{ij} \\ [x_i, x_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Afin de décrire un espace non commutatif, les relations de commutation ci-dessus devraient être changées comme :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar d_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i q_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 L'équation de Schrödinger sur un espace –temps NC

Il suffit de remplacer les produits de fonction d'onde (ou les champs) par le produit star où le produit de Moyal. L'équation de Schrödinger sur un espace temps non commutatif aura la forme :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] * \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.3)$$

On aura alors la correspondance :

$$V(\vec{x})\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow V(\vec{x}) * \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.4)$$

Mezincescu [10] a démontré la relation suivante :

$$V(\vec{x}) * \Psi(\vec{x}, t) = V\left(\vec{x} - \frac{i}{2}\vec{\tilde{p}}\right) \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.5)$$

avec :

$$\tilde{p}^i = q^{ij} p_j$$

3.1.3 Démonstration

En utilisant le développement donnant le produit star :

$$V(x) * \Psi(x) = V(x)\Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} q^{mn_1} \mathbf{K} q^{mn_2} \partial_{m_1} \mathbf{K} \partial_{m_2} V(x) \partial_{n_1} \mathbf{K} \partial_{n_2} \Psi(x) \quad (3.6)$$

D'après le principe de correspondance, on a

$$\partial_{n_i} = ip_{n_i} \quad (3.7)$$

D'autre part en posant

$$q^{m_i} p_{n_i} = \tilde{p}^{m_i} \quad (3.8)$$

alors on obtient

$$V(x) * \Psi(x) = V(x)\Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \partial_{m_1} \mathbf{K} \partial_{m_n} V(x) \tilde{p}^{m_1} \mathbf{K} \tilde{p}^{m_n} \Psi(x) \quad (3.9)$$

$V(x)$ est relié à sa transformée de Fourier $\tilde{V}(k)$ par :

$$V(x) = \int dk e^{ikx} \tilde{V}(k) \quad (3.10)$$

D'où

$$V(x) * \Psi(x) = V(x)\Psi(x) + \int \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (k \cdot \tilde{p})^n e^{ikx} \tilde{V}(k) \Psi(x) dk$$

$\mathbf{144424443}$
 $(\exp\left[-\frac{i}{2}k \cdot \tilde{p}\right]^{-1})$

D'autre part

$$\int dk \exp\left[-\frac{i}{2}k \cdot \tilde{p}\right] \exp[ikx] \cdot \tilde{V}(k) = V\left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right) \quad (3.11)$$

D'où

$$V(\mathbf{x}) * \Psi(\mathbf{x}) = V\left(\mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2}\right) \Psi(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

avec

$$\tilde{p}^i = q^{ij} p_j$$

Remarque que si on effectue la transformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2} \\ \Rightarrow x_i \rightarrow x'_i &= x_i - \frac{\tilde{p}_i}{2} \\ p_i \rightarrow p'_i &= p_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

Calculons le commutateur

$$\begin{aligned}
 [x_i, x_j] &= \left[x'_i + \frac{\tilde{p}_i}{2}, x'_j + \frac{\tilde{p}_j}{2} \right] \\
 &= [x'_i, x'_j] + \frac{1}{2} q_{jk} [x'_i, p'^k] - \frac{1}{2} q_{ik} [p'^k, x'_j] + \frac{1}{4} q_{ik} q_{jl} [p'^k, p'^l] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Qu'est la loi de commutation entre les coordonnées d'un espace temps commutatif.

3.1.4 Théorème

Sur un espace temps non commutatif, on peut utiliser l'équation de Schrödinger avec des fonctions d'onde et une multiplication ordinaire entre potentiel à condition de décaler l'argument du potentiel d'un déplacement égal à $\frac{\tilde{p}}{2}$.

avec :

$$\tilde{p}^i = q^{ij} p_j \tag{3.15}$$

où q^{ij} est le paramètre de la commutativité.

3.2. Atome d'hydrogène sur un espace temps non commutatif

Comme exemple de la mécanique non relativiste non commutative on va traiter le problème de l'atome d'hydrogène et de voir les effets de la non commutativité sur les niveaux d'énergie de cette atome et l'étudier si une partie de la dégénérescence va être lever, ou non.

On a les relations de commutation suivantes [7] :

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i q_{ij} \\
 [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \hbar d_{ij} \\
 [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

L'équation de Schrödinger pour les états stationnaires est donnée par

$$H\Psi = E\Psi \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right] \Psi(\hat{x}) = E\Psi(\hat{x}) \quad (3.17)$$

avec $V(\hat{x})$ [5] le potentiel de Coulomb donnée par

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}\hat{x}}}, \quad (3.18)$$

avec \hat{p} et \hat{x} satisfaisant l'équations (3.16).

Utilisons maintenant le nouveau système des coordonnées : x_i, p_i avec :

$$x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar} \mathbf{q}_{ij} \hat{p}_j, \quad p_i = \hat{p}_i. \quad (3.19)$$

Alors on peut montrer que les nouvelles variables vérifient les relations de commutation canoniques :

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0 \\ [x_i, p_j] &= i\hbar d_{ij} \\ [p_i, p_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

En effet

$$\begin{aligned} 1. [x_i, x_j] &= \left[\hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar} \mathbf{q}_{ik} \hat{p}_k, \hat{x}_j + \frac{1}{2\hbar} \mathbf{q}_{jl} \hat{p}_l \right] \\ &= i\mathbf{q}_{ij} - \frac{i}{2} \mathbf{q}_{ij} + \frac{i}{2} \mathbf{q}_{ji} \\ &= 0 \\ 2. [x_i, p_j] &= \left[\hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar} \mathbf{q}_{ik} \hat{p}_k, \hat{p}_j \right] \\ &= i\hbar d_{ij} \\ 3. [p_i, p_j] &= [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans le nouveau système de coordonnées $\frac{\hat{P}^2}{2m}$ l'énergie cinétique reste invariant par contre le potentiel coulombien devient :

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}_i \hat{x}_i}} \\
 &= -\frac{Ze^2}{\sqrt{\left(x_i - \frac{1}{2\mathbf{h}} \mathbf{q}_{ij} p_j\right) \left(x_i - \frac{1}{2\mathbf{h}} \mathbf{q}_{ik} p_k\right)}} \\
 &= -\frac{Ze^2}{\sqrt{r^2 - \frac{x_i}{\mathbf{h}} \mathbf{q}_{ij} p_j - O(q^2)}} \\
 &= -\frac{Ze^2}{r \sqrt{1 - \frac{x_i}{\mathbf{h}r^2} \mathbf{q}_{ij} p_j - O(q^2)}} \\
 &= -\frac{Ze^2}{r} \left(1 + \frac{1}{2\mathbf{h}r^2} x_i \mathbf{q}_{ij} p_j + O(q^2)\right)
 \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

Donc:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\mathbf{h}r^3} x_i \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{q}_k p_j + O(q^2)$$

puisque

$$\mathbf{q}_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{q}_k$$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\mathbf{h}r^3} (r \times p)_k \mathbf{q}_k + O(q^2) \\
 &= -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\mathbf{h}r^3} (L \cdot q) + O(q^2)
 \end{aligned}$$

Sachant que $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{p})$, on peut écrire le potentiel coulombien peut être également écrit comme :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{4\hbar} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \left(-\frac{Zer}{r^3} \right) + O(q^2) \quad (3.21)$$

on encore :

$$V(x) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{q} + O(q^2) \quad (3.22)$$

D'après cette équation on remarque que la non commutativité de l'espace temps est introduite sous forme d'une perturbation. Pour cette raison on va appliquer la théorie de perturbation indépendante du temps pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergies. Le paramètre de perturbation dans notre cas est le q pp 1.

3.3 Spectre classique pour l'atome d'hydrogène dans la théorie NC

3.3.1 Théorie des perturbations

Nous cherchons les valeurs propres de l'opérateur hermitique $H(\lambda)$

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + V(r). \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{q})}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Traisons la commutativité comme perturbation pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

C'est -à-dire :

$$H = H_0 + W \quad (3.24)$$

avec :

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}. \quad (3.25)$$

$$W = -\frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{q})}{r^3}. \quad (3.26)$$

- Rappel

$$H = H_0 + W \rightarrow H(I) = H_0 + IW \quad (3.27)$$

avec :

$$\lambda \ll 1$$

L'équation des valeurs propres de $H(I)$ [3]

$$H(I)|\Psi(I)\rangle = E(I)|\Psi(I)\rangle \quad (3.28)$$

Nous admettrons que $E(I)$ et $|\Psi(I)\rangle$ peuvent être développés en puissance de λ sous la forme :

$$\begin{aligned} E(I) &= x_0 + I x_1 \mathbf{K} \mathbf{K} + I^q x_q + \mathbf{K} \\ |\Psi(I)\rangle &= |0\rangle + I |1\rangle + \mathbf{K} \mathbf{K} I^q |q\rangle + \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donc :

$$\begin{aligned} (H_0 + I \hat{W}) \left[\sum_{q=0}^{\infty} I^q |q\rangle \right] &= \left[\sum_{p=0}^{\infty} I^p x_p \right] \left[\sum_{q=0}^{\infty} I^q |q\rangle \right] \\ (H_0 + I \hat{W})(x_0 + I x_1 + \mathbf{K} + I^q x_q + \mathbf{K}) &= \\ (x_0 + I x_1 + \mathbf{K} + I^p x_p + \mathbf{K})(|0\rangle + I |1\rangle + \mathbf{K} + I^q |q\rangle) + \mathbf{K} \end{aligned}$$

- pour les termes d'ordre 0 :

$$H_0 |0\rangle = x_0 |0\rangle \quad (3.30)$$

- pour les termes d'ordre 1 :

$$(H_0 - x_0) |1\rangle + (\hat{W} - x_1) |0\rangle = 0 \quad (3.31)$$

- pour les termes d'ordre 2 :

$$(H_0 - x_0)|2\rangle + (\hat{W} - x_1)|1\rangle - x_2|0\rangle = 0 \quad (3.32)$$

- pour les termes généraux d'ordre q :

$$(H_0 - x_0)|q\rangle + (\hat{W} - x_1)|q-1\rangle - x_2|q-2\rangle + \mathbf{K} - x_q|0\rangle = 0 \quad (3.33)$$

Nous savons que l'équation aux valeurs propres (3.28) ne définit $|\Psi(I)\rangle$ qu'à un facteur près. Nous pouvons donc choisir la norme de $|\Psi(I)\rangle$ et sa phase : nous imposerons à $|\Psi(I)\rangle$ d'être norme et choisirons sa phase de façon que le produit scalaire $\langle 0|\Psi(I)\rangle$ soit réel.

A l'ordre 0, ceci implique que le vecteur noté $|0\rangle$ soit normé :

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (3.34)$$

Et le carré de la norme de $|\Psi(I)\rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(I)|\Psi(I)\rangle &= [\langle 0| + I\langle 1|][\langle 0| + I\langle 1|] + o(I^2) \\ &= \langle 0|0\rangle + I[\langle 1|0\rangle + \langle 0|1\rangle] + o(I^2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Compte tenu de (3.34), cette expression est égale à 1 au premier ordre inclus si le terme en λ est nul ; mais le choix de phase indique que le produit scalaire $\langle 0|1\rangle$ est réel (puisque λ est réel) ; on obtient donc :

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \quad (3.36)$$

En projetant l'équation (3.31) sur le vecteur $|j_n\rangle$ on obtient :

$$\langle j_n|(H_0 - x_0)|1\rangle + \langle j_n|(\hat{W} - x_1)|0\rangle = 0 \quad (3.37)$$

On prendre :

$$\langle 0| = \langle j_n| \quad (3.38)$$

Donc le premier terme est nul et les corrections du premier ordre de l'énergie s'écrit :

$$\mathbf{x}_1 = \langle \mathbf{j}_n | \hat{W} | 0 \rangle = \langle \mathbf{j}_n | \hat{W} | \mathbf{j}_n \rangle \quad (3.39)$$

Donc

$$E_n(I) = E_n^0 + \langle \mathbf{j}_n | W | \mathbf{j}_n \rangle + O(I^2) \quad (3.40)$$

Mais dans notre cas les vecteurs propres : $|nlj_z\rangle$

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \langle nl'j_z' | W | nlj_z \rangle \\ &= E_n^0 - \langle nl'j_z' | \frac{Ze^2}{4\mathbf{h}} \frac{(L \cdot \mathbf{q})}{r^3} | nlj_z \rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finalement se trouve

$$\Delta E_{NC}^{H-atom} = E_n - E_n^0 = - \langle nl'j_z' | \frac{Ze^2}{4\mathbf{h}} \frac{(L \cdot \mathbf{q})}{r^3} | nlj_z \rangle \quad (3.42)$$

Nous notons que l'expression ci-dessus est très semblable à celle couplage spin orbite, ou le $\frac{\mathbf{q}}{I_e^2}$ remplace maintenant le spin, avec le I_e étant la longueur d'onde de Compton de l'électron.

3.3.2. La relation entre les bases : $|nlj_z\rangle$ et $|nls_z\rangle$

Nous trouvons la relation entre les bases : $|nlj_z\rangle$ et $|nls_z\rangle$

- **Coefficient de Clebsch-Gordan** [3]

$$|j, M\rangle = \sum_{m_1 = -j_1}^{j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{j_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, M\rangle \quad (3.43)$$

Mais dans ce cas :

$$|l, j, j_z\rangle = \sum_{l_z = -l}^l |l, s, l_z, s_z\rangle \langle l, s, l_z, s_z | l, j, j_z\rangle \quad (3.44)$$

avec :

$$j_z = l_z + s_z$$

$$|l-s| \leq j \leq |l+s|$$

- **Le sous-espace** $\xi (j = l+1/2)$
 $j = l+1/2$, $j_z = l+1/2$

$$|l+1/2, l+1/2\rangle = |l, 1/2; l, 1/2\rangle \quad (3.45)$$

Par action de J_- , on obtient $|l+1/2, l-1/2\rangle$

$$J_- |l+1/2, l+1/2\rangle = \mathbf{h}\sqrt{(l+1/2)(l+1/2+1) - (l+1/2)(l+1/2-1)} |l+1/2, l+1/2-1\rangle$$

$$= \mathbf{h}\sqrt{2l+1} |l+1/2, l-1/2\rangle \quad (3.46)$$

Donc :

$$|l+1/2, l-1/2\rangle = (1/\mathbf{h} \sqrt{2l+1}) J_- |l+1/2, l+1/2\rangle$$

$$= (1/\mathbf{h} \sqrt{2l+1}) (\mathbf{L} + \mathbf{S}) |l, 1/2; l, 1/2\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} |l, 1/2; l-1, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2l+1}} |l, 1/2; l, -1/2\rangle \quad (3.47)$$

Appliquons une nouvelle fois J_- , on obtient $|l+1/2, l-3/2\rangle$

$$|l+1/2, l-3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\sqrt{2l-1} |l, 1/2; l-2, 1/2\rangle + \sqrt{2} |l, 1/2; l-1, -1/2\rangle] \quad (3.48)$$

De façon plus générale, le vecteur $|l+1/2, j_z\rangle$ sera une combinaison linéaire des deux seuls vecteurs de base associés à j_z : $|l, 1/2; j_z+1/2, 1/2\rangle$ et $|l, 1/2; j_z+1/2, -1/2\rangle$ (bien entendu, j_z est demi- entier). En comparant les formules (3.45), (3.47) et (3.48), on peut penser que cette combinaison linéaire doit être la suivante :

$$|l+1/2, j_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\sqrt{l+j_z+1/2} |l, 1/2; j_z-1/2, 1/2\rangle$$

$$+ \sqrt{l-j_z+1/2} |l, 1/2; j_z+1/2, -1/2\rangle] \quad (3.49)$$

Avec :

$$j_z = l + 1/2, l - 1/2, l - 3/2, \dots - (l+1/2)$$

Un raisonnement par récurrence permet effectivement de le montrer. En effet, l'application de J_- aux deux membres de (3.49) donne :

$$\begin{aligned}
 |l+1/2, j_z - 1\rangle &= \frac{1}{\hbar \sqrt{(l+j_z+1/2)(l-j_z+3/2)}} J_- |l+1/2, j_z\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l+j_z-1/2} |l, 1/2; j_z - 3/2, 1/2\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{l-j_z+3/2} |l, 1/2; j_z - 1/2, -1/2\rangle \right] \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

On obtient bien la même expression qu'en (3.49), j_z étant changé en $j_z - 1$.

Donc :

$$\begin{aligned}
 L_Z |l+1/2, j_z\rangle &= L_Z \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l+j_z+1/2} |l, 1/2; j_z - 1/2, 1/2\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{l-j_z+1/2} |l, 1/2; j_z + 1/2, -1/2\rangle \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l+j_z+1/2} (j_z - 1/2) \hbar |l, 1/2; j_z - 1/2, 1/2\rangle \right. \\
 &\quad \left. + (j_z + 1/2) \hbar |l, 1/2; j_z + 1/2, -1/2\rangle \right] \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \langle l, l+1/2, j_z | L_Z |l', l'+1/2, j'_z\rangle &= j_z \hbar \left(\frac{2l}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \delta_{j_z j'_z} \\
 &= j_z \hbar \left(1 - \frac{1}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \delta_{j_z j'_z} \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

avec :

$$j = l + 1/2$$

- **Le sous-espace** $x(j = l - 1/2)$

Cherchons maintenant l'expression des $2l$ vecteurs $|j, j_z\rangle$ associés à $j = l - 1/2$, celui d'entre eux qui correspond à la valeur maximale $l - 1/2$ de j_z est une combinaison linéaire normée de $|l, 1/2; l - 1, 1/2\rangle$ et $|l, 1/2; l, -1/2\rangle$, et il doit être orthogonal à $|l+1/2, l - 1/2\rangle$, en choisissant le coefficient de $|l, 1/2; l, -1/2\rangle$ réel et positif.

$$|l-1/2, l-1/2\rangle = a|l, 1/2; l, -1/2\rangle + b|l, 1/2; l-1, 1/2\rangle \quad (3.53)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1)$$

$$b\sqrt{\frac{2l}{2l+1}} + \frac{a}{\sqrt{2l+1}} = 0 \quad (2)$$

$$|b| = \sqrt{1-|a|^2}$$

puisque : $a \in \mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow \sqrt{2l(1-a^2)} + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -\sqrt{\frac{2l}{2l+1}} \quad (3)$$

$$b = \frac{-1}{\sqrt{2l+1}} \quad (4)$$

Donc :

$$|l-1, l-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{2l} |l, 1/2; l, -1/2\rangle - |l, 1/2; l-1, 1/2\rangle \right] \quad (3.54)$$

L'opérateur J_- permet d'en déduire successivement tous les autres vecteurs de la famille caractérisée par $j = l-1$. Comme il existe seulement deux vecteurs de base ayant une valeur donnée de j_z et que $|l-1/2, j_z\rangle$ est orthogonal à $|l+1/2, j_z\rangle$. On s'attend d'après (3.49), à trouver :

$$|l-1/2, j_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l+j_z+1/2} |l, 1/2; j_z+1/2, -1/2\rangle - \sqrt{l-j_z+1/2} |l, 1/2; j_z-1/2, 1/2\rangle \right] \quad (3.55)$$

avec :

$$j_z = l-1/2, l-3/2, \dots, -(l-1/2)$$

$$L_Z |l-1/2, j_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\mathbf{h}(j_z+1/2)\sqrt{l+j_z+1/2}|l, 1/2; j_z+1/2, -1/2\rangle - \mathbf{h}(j_z-1/2)\sqrt{l-j_z+1/2}|l, 1/2; j_z-1/2, 1/2\rangle] \quad (3.56)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle l, l-1/2, j_z | L_Z | l', l'-1/2, j'_z \rangle &= \left(\frac{2l+2}{2l+1} \right) j_z \mathbf{h} d_{ll'} d_{j_z j'_z} \\ &= j_z \mathbf{h} \left(1 + \frac{1}{2l+1} \right) d_{ll'} d_{j_z j'_z} \end{aligned} \quad (3.57)$$

avec :

$$j = l - 1/2$$

A partir à (3.52)) et (3.57) se trouve :

$$\langle l, j, j_z | L_Z | l', j, j'_z \rangle = j_z \mathbf{h} \left(1 + \frac{1}{2l+1} \right) \delta_{ll'} \delta_{j_z j'_z} \quad (3.58)$$

avec :

$$j = l \pm 1/2$$

Et [8]

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{Z}{a_0^3 n^3} \frac{1}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad (3.59)$$

où a_0 [8] est le rayon de Bohr donné par

$$a_0 = \frac{h^2}{m_e e^2} = \frac{\mathbf{D}_e}{a} \quad (3.60)$$

où \mathbf{D}_e est la longueur d'onde de Compton de l'électron, et a la constante de la structure fine.

$$a = \frac{e^2}{\mathbf{h}c}, \quad \mathbf{D}_e = \frac{\mathbf{h}}{m_e c} \quad (3.61)$$

D'où

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{(Za)^3}{\mathbf{D}_e^3} \frac{1}{n^3} \frac{1}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad (3.62)$$

Finalement le décalage d'énergie donné par (3.42) devient

$$\Delta E_{NC} = -\frac{m_e c^2}{4} (Za)^4 \frac{q}{\mathbf{D}_e^2} j_z \left(1 - \frac{\mathbf{m}}{2L+1} \right) f_{n,l} \mathbf{d}_{l'l'} \mathbf{d}_{j_z j'_z} \quad (3.63)$$

avec

$$f_{n,l} = \frac{1}{n^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad (3.64)$$

3.4 Déplacement de Lamb « Lamb shift »

Nous avons négligé deux corrections qui sont néanmoins très petits par rapport à l'effet spin-orbite et la correction relativiste. La première s'appelle déplacement Lamb (Lamb shift) [11] et a été découverte par ce dernier et Retherford vers 1947. Ce effet ne peut s'expliquer que dans le cadre d'une théorie relativiste, et est essentiellement dû à un « mouvement tremblant » (Zitterbewegung) qui donne lieu à une augmentation sensible de l'énergie de l'état fondamental, comme le montre la figure (3.1)

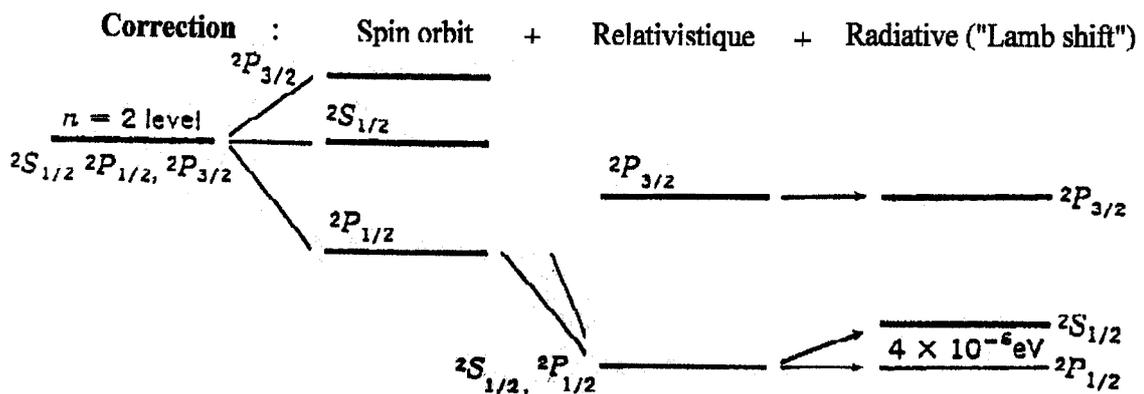


Figure (3.1) : Niveau n=2 d'un atome d'hydrogène réaliste.

En effet, il existe une contribution supplémentaire à la structure fine des atomes hydrogénoïdes. Celle-ci résulte de l'équation de Dirac dans le cadre d'une théorie quantique relativiste. Cette contribution porte le nom « terme de Darwin » et provient d'un déplacement $\frac{\mathbf{h}}{mc}$ de l'électron par rapport à son centre de gravité et donne lieu à un potentiel

$$V_D = -e^2 \frac{\mathbf{h}^2}{8m_e^2 e^2} \Delta \left(\frac{1}{R} \right) \quad (3.65)$$

On a utilisé l'expression du laplacien de $\left(\frac{1}{R} \right)$ donnée par la formule suivante

$$\Delta \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi d(R) \quad (3.66)$$

Donc on peut écrire le terme de Darwin [3] sous la forme

$$V_D = \frac{pe^2 \mathbf{h}^2}{2m_e^2 c^2} d(R) \quad (3.67)$$

Lorsqu'on prend la valeur moyenne de (3.67) dans un état atomique, [14] on trouve une contribution égale à

$$\Delta E_D = \frac{pe^2 \mathbf{h}^2}{2m_e^2 c^2} \langle \Psi_{n,0,0} | d(R) | \Psi_{n,0,0} \rangle \quad (3.68)$$

où $\Psi(0)$ est la valeur de la fonction d'onde à l'origine [3]. Le terme de Darwin n'affecte donc que les électrons s qui sont les seuls pour lesquels $\Psi(0) \neq 0$. L'ordre de grandeur de $|\Psi(0)|^2$ s'obtient en écrivant que l'intégrale du carré du module de la fonction d'onde sur un volume de l'ordre de a_0^3 (a_0 étant le rayon de Bohr) est égale à 1 ; il vient ainsi :

$$|\Psi(0)|^2 \cong \frac{1}{a_0^3} = \frac{m_e^3 e^6}{\mathbf{h}^6} \quad (3.69)$$

Ce qui donne l'ordre de grandeur du terme de Darwin :

$$W_D \cong \frac{pe^2 \mathbf{h}^2}{2m_e^2 c^2} |\Psi(0)|^2 \cong m_e c^2 \frac{e^8}{\mathbf{h}^4 c^4} = m_e c^2 \mathbf{a}^4 \quad (3.70)$$

Comme $H_0 \cong m_e c^2 \mathbf{a}^2$, on voit cette fois encore que :

$$\frac{W_D}{H_0} \cong \mathbf{a}^2 = \left(\frac{1}{137} \right)^2 \quad (3.71)$$

Pour les états $|s\rangle$ c.-à-d. pour $l = 0$, il vient

$$\Delta E_D = -E_n \frac{(\mathbf{a}_0)^2}{n} \quad (3.72)$$

Cette contribution doit donc être ajoutée à la contribution spin orbite ($l \neq 0$)

$$\Delta E_{SO} = -E_n \frac{(\mathbf{a}_0)^2}{n^2} \frac{n}{2l(l+1/2)(l+1)} \begin{cases} l \cdot si \cdot j = l+1/2 \\ -(l+1) \cdot si \cdot j = l-1/2 \end{cases} \quad (3.73)$$

et la correction relativiste

$$\Delta E_r = -E_n \frac{(\mathbf{a}_0)^2}{n^3} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{n}{l+1/2} \right\} \quad (3.74)$$

En conclusion, la correction de structure fine vaut :

1. pour $l \neq 0 (j = \pm 1/2)$

$$\Delta E_{S-f} = \Delta E_r + \Delta E_{SO} + \Delta E_D = -E_n \frac{\mathbf{a}^2}{n^2} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2} \right\} \quad (3.75)$$

2. pour $l = 0$

$$\Delta E_{Sf} = \Delta E_r + \Delta E_D = -E_n \frac{\mathbf{a}^2}{n^2} \left\{ \frac{3}{4} - n \right\} \quad (3.76)$$

On peut montrer que ce résultat est en accord avec :

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ \frac{1}{\left[1 + \frac{z a_0}{n - j - 1/2 + [(j + 1/2)^2 - z^2 a^2]^{1/2}} \right]^{1/2}} \right\} \quad (3.77)$$

Résultant de la théorie quantique relativiste [15].

3.5 Effet Stark

3.5.1 Définition

Si l'on plonge un atome dans un champ électrique extérieur, ses niveaux d'énergie varient : c'est l'effet Stark.

Dans atome plongé dans un champ électrique uniforme extérieur nous avons affaire à un système d'électrons placés dans un champ à symétrie axiale (le champ du noyau avec le champ extérieur. Les états avec des valeurs distinctes de M_j posséderont des énergies distinctes, c'est-à-dire que le champ électrique lève la dégénérescence dans la direction du moment, mais incomplètement toutefois : les états qui ne se distinguent que par le signe de M_j restent, comme avant, dégénérés entre eux. [4]. En effet, l'atome dans le champ électrique extérieur uniforme est symétrique par rapport à la réflexion par n'importe quel plan passant par l'axe de symétrie (l'axe des z).

3.5.2 Effet Stark pour l'hydrogène

Les niveaux de l'atome de l'hydrogène subissent dans un champ électrique uniforme, contrairement aux niveaux des autres atomes, une désintégration en raison de la première puissance du champ (effet Stark linéaire). Ceci est dû à la présence d'une dégénérescence accidentelle des termes de l'hydrogène, en vertu de laquelle des états avec différentes valeurs de l (pour un nombre quantique principal n donné) possèdent des énergies identiques.

3.5.3 Effet Stark non commutatif

Si on plonge un atome dans un champ électrique il apparaît une énergie potentiel donnée par :

$$\begin{aligned} V_{\text{Stark}} &= e \cdot \vec{E} \cdot \vec{r} \\ &= e \cdot E_i \cdot x_i \end{aligned} \quad (3.78)$$

L'énergie potentiel non commutative donnée par

$$\begin{aligned} V_{\text{Stark}}^{NC} &= e \cdot \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= e \cdot E_i \cdot \hat{x}_i \end{aligned} \quad (3.79)$$

avec :

$$\hat{x}_i = \left(x_i - \frac{1}{2\hbar} q_{ij} P_j \right) \quad (3.80)$$

L'énergie potentielle non commutative devient

$$\begin{aligned} V_{\text{Stark}}^{NC} &= e \cdot E_i \cdot x_i - e \frac{E_i}{2\hbar} q_{ij} P_j \\ &= e \cdot \vec{E} \cdot \mathbf{r} - e \frac{E_i}{2\hbar} \frac{1}{2} x_{ijk} q_k P_j \\ &= V_{\text{Stark}}^C + \frac{e}{4\hbar} E_i \cdot (\mathbf{q} \wedge \mathbf{P})_i \end{aligned}$$

Donc :

$$V_{\text{Stark}}^{NC} = V_{\text{Stark}}^C + \frac{e}{4\hbar} (\mathbf{q} \wedge \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} \quad (3.81)$$

On applique la théorie de la perturbation se trouve les corrections du premier ordre d'énergie

$$\Delta E_{\text{Stark}}^{NC} = \langle n'l'j'_z | \frac{e}{4\hbar} (\mathbf{q} \wedge \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} | n'lj_z \rangle \quad (3.82)$$

L'hamiltonien H_0 donné par

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + V(x) \quad (3.83)$$

Maintenant calculons le commutateur

$$\begin{aligned} [x_i, H_0] &= \left[x_i, \frac{1}{2m} p^2 + V(x) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \{ [x_i, p_j] p_j + p_j [x_i, p_j] \} \end{aligned}$$

puisque

$$[A, B^2] = B[A, B] + [A, B]B$$

$$[x_i, H_0] = \frac{1}{2m} \{ i\hbar d_{ij} p_j + i\hbar d_{ij} p_j \} = \frac{i\hbar}{m} p_i \quad (3.84)$$

À partir de cette relation, on trouve

$$p_i = \frac{m}{i\hbar} [x_i, H_0] \quad (3.85)$$

Les corrections du premier ordre d'énergie deviennent

$$\begin{aligned} \Delta E_{Star}^{NC} &= \langle nl'jj'_z | \frac{e}{4\hbar} (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E} | nljj_z \rangle \\ &= \frac{e}{4\hbar} \langle nl'jj'_z | \mathbf{x}_{kji} \mathbf{q}_k p_j E_i | nljj_z \rangle \\ &= \frac{em}{i4\hbar^2} \mathbf{x}_{kji} \mathbf{q}_k E_i \langle nl'jj'_z | [x_i, H_0] | nljj_z \rangle = 0 \end{aligned}$$

puisque

$$H_0 | nljj_z \rangle = \mathbf{x}_n | nljj_z \rangle \quad (3.86)$$

Donc :

$$\Delta E_{Star}^{NC} \propto (\mathbf{q} \wedge \mathbf{E})_i \langle nl'jj'_z | [x_i, H_0] | nljj_z \rangle = 0 \quad (3.87)$$

3.6 Conclusion

On a traité l'atome d'hydrogène dans le cadre de la géométrie non – commutative. On a montré que la non – commutativité de l'espace – temps peut être traité comme une perturbation indépendante du temps.

On a montré que la correction dépend du nombre quantique orbitale l (à l'inverse de la théorie de Dirac qui donne l'énergie en fonction de n et de j). Le fait que la correction dépend de l lève la dégénérescence entre les niveaux $2s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$.

Donc la non commutativité explique – même partiellement le déplacement de Lamb.

On comparant cette correction à la valeur expérimentale du déplacement de Lamb on peut trouver des contraintes sur le paramètre de la non – commutativité q .

Chapitre 4

Théorie de jauge sur un espace temps non commutatif. QED comme exemple

4.1 L'électrodynamique quantique QED non commutative

Pour obtenir QED sur un espace temps non commutatif on va garder la même forme du lagrangien, mais les champs $\Psi, \bar{\Psi}$ et A_m seront des opérateurs qui dépendent des coordonnées \hat{x}_m qui sont eux-mêmes non commutatif

$$\hat{L} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{mn} \hat{F}^{mn} + \hat{\bar{\Psi}} (i\mathcal{D} - m) \hat{\Psi} \quad (4.1)$$

avec

$$\mathcal{D} = \partial - ie\hat{A} \quad (4.2)$$

Et on définit l' action S par

$$S = tr \hat{L} \quad (4.3)$$

En utilisant la transformation de Weyl \hat{L} est le transforme de L donné par

$$L = -\frac{1}{4} F_{mn} * F^{mn} + \bar{\Psi} (i\partial + eA - m) * \Psi \quad (4.4)$$

$$S = \int d^4x L \quad \text{et} \quad (4.5)$$

Soit U un opérateur unitaire. Dans le cas de la QED sur un espace temps ordinaire (commutatif) L lagrangien est invariant par les transformations $U = e^{ia(x)}$ élément du groupe $U(1)$. On exige de même pour le cas non commutatif. Soit la transformation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U * \Psi = e^{ia(x)} * \Psi \quad (4.6)$$

Dans le cas commutatif pour que L soit invariant par U , il faut que A_m se transforme comme suit :

$$A_m \rightarrow A'_m = A_m + \frac{1}{e} \partial_m a \quad (4.7)$$

On effectue

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}'(iD' - m)\Psi' &= \bar{\Psi}(iD - m)\Psi \\ \Psi' &= e^{ia(x)}\Psi \\ \bar{\Psi}' &= e^{-ia(x)}\bar{\Psi} \\ e^{-ia(x)}\bar{\Psi}(i\partial - eA' - m)e^{ia(x)}\Psi &= \bar{\Psi}(i\partial - eA - m)\Psi \\ \Rightarrow \partial_m a - eA'_m &= -eA_m \\ \Rightarrow A'_m &= A_m - \frac{1}{e} \partial_m a \end{aligned}$$

c'est le cas commutatif.

Dans le cas non commutatif on exige toujours que

$$\bar{\Psi}' * (iD - m) * \Psi' = \bar{\Psi} * (iD - m) * \Psi \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Psi' &= U * \Psi \\ \partial_m \Psi' &= \partial_m U * \Psi + U * \partial_m \Psi \\ \bar{\Psi}' &= \bar{\Psi} * U^+ \\ D' &= g^m \partial'_m + ie g^m A'_m \\ \Rightarrow \bar{\Psi} * U^+ * (ig^m \partial_m - eg^m A'_m) * U * \Psi &= \bar{\Psi} * (ig^m \partial_m - eg^m A_m) * \Psi \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$U(x) * U^+(x) = U^+(x) * U(x) = 1 \quad (4.9)$$

On doit avoir

$$\begin{aligned}
 iU^+ * \partial_m U - eU^+ * A'_m * U &= -eA_m \\
 \Rightarrow A'_m &= U * A_m * U^+ + \frac{i}{e} \partial_m U * U^+
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Essayons maintenant de voir si le tenseur $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ ordinaire est un invariant de jauge.

$$F'_{mn} = \partial_m A'_n - \partial_n A'_m \tag{4.11}$$

La réponse est non. Mais si on définit F_{mn} comme suit :

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + ie[A_m, *A_n] \tag{4.12}$$

Alors lors d'une transformation de jauge

$$F_{mn} \rightarrow F'_{mn} = U * F_{mn} * U^+ \tag{4.13}$$

F_{mn} se transforme d'une manière covariante, et par conséquent. La lagrangien de Maxwell se transforme comme suit

$$-\frac{1}{4} F'_{mn} F'^{mn} = -\frac{1}{4} U * F_{mn} * F^{mn} * U^+ \tag{4.14}$$

$L_{Maxwell}$ se transforme aussi d'une manière covariante
 $S_{Maxwell}$ l'action de Maxwell se transforme, comme suit :

$$\begin{aligned}
 S'_{Maxwell} &= \int -\frac{1}{4} F'_{mn} * F'^{mn} d^4x \\
 &= \int -\frac{1}{4} U * F_{mn} * F^{mn} * U^+ d^4x
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

En utilisant la propriété de cyclicité de la trace.

$$S'_{Maxwell} = \int -\frac{1}{4} U^+ * U * F_{mn} * F^{mn} d^4x = S_{Maxwell} \tag{4.16}$$

$S_{Maxwell}$ est un invariant de jauge, et par conséquent, l'action totale de QED sur un espace temps non commutatif est un invariant de jauge. Le groupe de jauge est $U(1)$. Pour le différentiel du groupe $U(1)$ ordinaire généré par les éléments de type $e^{ia(x)}$, on le nomme $U_{NC}(1)$ qui est dégénéré par les éléments de type $e_*^{ia(x)}$ ou $(e^{ia(x)})_*$ ou $e^{*ia(x)}$.
où

$$e_*^{ia(x)} = 1 + ia(x) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 a(x) * a(x) + \mathbf{K} \quad (4.17)$$

Remarquons que la forme de $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + ie[A_m, *A_n]$ rappelle celle des groupes non abéliens.

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + ie[A_m, A_n] \quad (4.18)$$

En remplaçant le commutateur ordinaire par le commutateur de Moyal. Résultat prévisible puisque pour passer d'une théorie de champs basée sur un espace - temps commutatif à une théorie de champs non - commutative il suffit de remplacer le produit ordinaire des champs par le produit star.

Remarquons aussi que le groupe $U_{NC}(1)$ est non abélien puisque si U_1 et U_2 deux éléments de $U_{NC}(1)$ alors

$$U_1 * U_2 \neq U_2 * U_1 \quad (4.19)$$

Et pour cette raison F_{mn} correspondant au groupe $U_{NC}(1)$ est similaire au F_{mn} associé à un groupe non abélien

4.2 Les règles de Feynman pour QED non commutative

4.2.1 Rappel

Pour trouver les règles Feynman d' une théorie de jauge il faut passer par le calcul de la matrice de diffusion S .

D' une façon générale la densité lagrangien peut se mettre sous la forme :

$$L = L_0 + L_I \quad (4.20)$$

où L_0 est la Lagrangien libre et L_I est la Lagrangien d' interaction. Dans le cas de QED commutative :

$$\begin{aligned}
L_0 &= \bar{\Psi}(x)(i\partial - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} \\
L_I &= -e\bar{\Psi}A\Psi
\end{aligned} \tag{4.21}$$

On montre que S est donnée par

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \mathbf{K} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathbf{K} d^4x_n T\{H_I(x_1)H_I(x_2)\mathbf{K}H_I(x_n)\} \tag{4.22}$$

Où T est le produit chronologique défini par

$$T\{\Phi(x)\Phi(x')\} = \begin{cases} \Phi(x)\Phi(x'), t > t' \\ \Phi(x')\Phi(x), t' > t \end{cases} \tag{4.23}$$

4.2.2 Le théorème de Wick

$$\begin{aligned}
T(ABCD\mathbf{K}WXYZ) &= N(ABDW\mathbf{K}WXYZ) + N(\overrightarrow{ABCD}\mathbf{K}WXYZ) + \\
&N(\overleftarrow{ABCD}\mathbf{K}WXYZ) + \mathbf{L} N(\overleftrightarrow{ABCD}\mathbf{K}WXYZ) + N(AB\mathbf{K}\overleftrightarrow{WXYZ}) + \mathbf{K} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

\overrightarrow{AB} signifie la contraction de deux champs A et B et il est donnée par

$$\overrightarrow{A(x_1)B(x_2)} \equiv \langle 0 | T\{A(x_1)B(x_2)\} | 0 \rangle \tag{4.25}$$

On montre en théorie de champs que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Psi(x_1)\Psi(x_2)} &= iS_F(x_1 - x_2) \\
\overrightarrow{A^m(x_1)A^n(x_2)} &= i\Delta_F^{mn}(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

En représentation impulsion

$$\begin{aligned}
iS_F(p) &= \frac{i}{p - m + ie} \\
i\Delta_F^{mn} &= \frac{-ig^{nm}}{k^2 + ie}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) \\
&= \sum_{r,p} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left[b_r(p) u_r(p) e^{-ipx} + d_r^+(p) v_r(p) e^{+ipx} \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

D' ou

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}^+ + \bar{\Psi}^- \\
&= \sum_{r,p} \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ipx} + b_r^+(p) \bar{u}_r(p) e^{+ipx} \right]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

où $u_r(p)$ et $v_r(p)$ sont des spineurs qui vérifient l' équation de Dirac

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{p} - m)u_r(p) &= 0 \\
(\boldsymbol{p} - m)v_r(p) &= 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

avec les condition de ortho normalisation.

$$\begin{aligned}
u_r^+(p)u_s(p) &= v_r^+(p)v_s(p) = \frac{E_p}{m} \boldsymbol{d}_{rs} \\
u_r^+(p)v_s(p) &= 0 \\
\bar{u}_r(p) &= u_r^+(p)g^0 \\
\bar{v}_r(p) &= v_r^+(p)g^0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$b_r(p)(d_r(p))$ sont les opérateurs de destruction d' un électron (d' un positron) de spin r et d' impulsion p .

$b_r^+(p)(d_r^+(p))$ sont les opérateurs de création d' un électron (d' un positron) de spin r et d' impulsion p .

qui vérifient les relations d' anticommutation suivantes :

$$\{b_r(p), b_s^+(p')\} = \{d_r(p), d_s^+(p)\} = \boldsymbol{d}_{rs} \boldsymbol{d}_{pp'} \tag{4.32}$$

Les autres anticommutateurs sont nuls.

On définit aussi les opérateurs nombres des particules

$$N_r(p) = b_r^+(p)b_r(p) \quad (4.33)$$

Et le nombre des antiparticules

$$\bar{N}_r(p) = d_r^+(p)d_r(p) \quad (4.34)$$

L' état du vide $|0\rangle$ est défini par

$$\begin{aligned} b_r(p)|0\rangle &= 0, \\ d_r(p)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

pour tout r et pour tout p .

En d' autres termes on a

$$\begin{aligned} \Psi^+(x)|0\rangle &= 0, \\ \bar{\Psi}^+(x)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour le champ $A_m(x)$, il est donné par (dans la jauge de Lorentz)

$$A^m(x) = A^{m+}(x) + A^{m-}(x) \quad (4.37)$$

avec

$$\begin{aligned} A^{m+}(x) &= \sum_{I,k} \left(\frac{1}{2Vw_k} \right)^{1/2} e_I^m(k) a_I(k) e^{-ikx} \\ A^{m-}(x) &= \sum_{I,k} \left(\frac{1}{2Vw_k} \right)^{1/2} e_I^m(k) a_I^+(k) e^{+ikx} \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} e_{Im}(k) e_{I'}^m(k) &= g_{II'} \\ \sum_I e_I^m(k) e_I^n(k) &= -g^{mn} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$a_I(k)$ est l' opérateur d destruction d' un photon de polarisation I et d' impulsion k .
 $a_I^+(k)$ est l'opérateur de création d'un photon de polarisation I et d' impulsion k .

Qui vérifient les lois de commutations

$$[a_I(k), a_{I'}^+(k')] = -g_{II'} \mathbf{e}_{kk'} \quad (4.40)$$

Les autres commutateurs sont nuls.

L' état du vide $|0\rangle$ est défini par

$$a_I(k)|0\rangle = 0 \quad (4.41)$$

Pour tout k et pour tout I .

$$A_m^+(k)|0\rangle = 0 \quad (4.42)$$

4.2.3. La matrice S

Les éléments de la matrice S $\langle i|S|f\rangle$ que nous avons calculés pour différents processus montrent une structure définie [8], qui permet à d'identifier différents facteurs et dispositifs avec différents aspects correspondants des diagrammes de Feynman. La même identification entre les expressions mathématiques et les diagrammes de Feynman est possible à tous les processus.

En outre nouveau dispositif ne se produit pas pour d'autres processus. Ceci permet de construire un ensemble avec des règles pour noter $\langle f|S|i\rangle$ directement des diagrammes de Feynman.

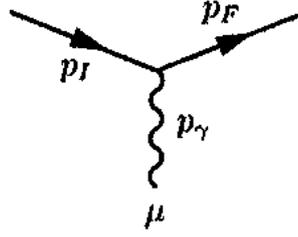
$S^{(1)}$ est donnée par

$$S^{(1)} = -i \int dx H_I(x) = -i \int dx e : \bar{\Psi} A \Psi : \quad (4.43)$$

Qui devient dans le cadre de la géométrie non commutative de la forme

$$S^{(1)} = -ie \int dx : \bar{\Psi} * A * \Psi : \quad (4.44)$$

cherchons les règles de Feynman associe un diagramme l' état initial $|i\rangle$ est constitué d' un électron de spin s et d' impulsion p_i , l' état final $|f\rangle$ est constitué d' un électron de spin s' et d' impulsion p_f et d' un photon de polarisation I et d' impulsion k_f



alors

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |e(p_i, s)\rangle = b_s^+(p_i)|0\rangle \\ |f\rangle &= |e^-(p_f, s')g(k_f, l)\rangle = b_s^+(p_f)a_l^+(k_f)|0\rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

cherchons l' amplitude de transition $\langle f|S^{(1)}|i\rangle$ relié à l' amplitude de Feynman $M^{(1)}$ par

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= (2p)^4 d^{(4)}(k_f + p_f - p_i) \prod_{ext} \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \prod_{ext} \left(\frac{1}{2V\omega}\right)^{1/2} M^{(1)} \\ \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= -ie \int dx \langle f| : \bar{\Psi} * A * \Psi : |i\rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

Le terme contient donc 8 processus. Notre processus consiste dans la destruction d' un électron et la création d' un autre électron et d' un photon $\bar{\Psi} * A^- * \Psi^+$

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= -ie \int dx \langle f| : \bar{\Psi}^-(x) * A^-(x) * \Psi^+(x) : |i\rangle \\ \bar{\Psi}^-(x)A^-(x)\Psi^+(x) &\approx b^+ a^+ b \end{aligned} \quad (4.47)$$

Les opérateurs de destruction sont tous à la droite donc on peut enlever le produit normal.

$$\begin{aligned}
\Psi^+(x)|i\rangle &= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} u_s(p_i) \exp[-ip_i x] |0\rangle \\
A^-(x) * \Psi^+(x)|i\rangle &= \sum_{I',k} \left(\frac{1}{2Vw_k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e_{I'}^m(k) g_m u_s(p_i) \exp[ikx] * \exp[-ip_i x] g(I',k) \\
\bar{\Psi}^-(x) * A^-(x) * \Psi^+(x)|i\rangle &= \sum_{I',k,r,p} \left(\frac{1}{2Vw_k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_r(p) e_{I'}^m(k) g_m u_s(p_i) \\
&\quad \exp[ipx] * \exp[ikx] * \exp[-ip_i x] e^-(p,r) g(I',k) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Finalemment : Pour la transition $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, ou les états initiaux et finals sont indiqués par les impulsions (et spin et des variables de polarisation) des particules actuelles, les éléments de S-matrice donnés près :

$$\begin{aligned}
\langle f | S^{(1)} | i \rangle &= -ie \left(\frac{1}{2Vw_f}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{pf}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_{s'}(p_f) x_I^m(k_f) g_m u_s(p_i) \\
&\int d^4x \exp[ip_f x] * \exp[ik_f x] * \exp[-ip_i x] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Le terme :

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \exp[ip_f x] * \exp[ik_f x] * \exp[-ip_i x] = \\
&\int d^4x \exp[k_f \wedge p_i] \exp[-ip_f \wedge (k_f - p_i)] \exp[i(k_f + p_f - p_i)] \\
&= (2p)^4 d^{(4)}(k_f + p_f - p_i) \exp[i(k_f \wedge p_i)] \exp[-ip_f \wedge (k_f - p_i)]
\end{aligned}$$

il faut que $k_f + p_f = p_i$ conservation d' impulsion énergie

$$\begin{aligned}
k_f \wedge p_i &= (p_i - p_f) \wedge p_i = -p_f \wedge p_i \\
p_f \wedge (k_f - p_i) &= p_f \wedge p_f = 0
\end{aligned}$$

d' où

$$\int d^4x \exp[ip_f x]^* \exp[ik_f x]^* \exp[-ip_i x] = (2p)^4 d^{(4)}(k_f + p_f - p_i) \exp[ip_i \wedge p_f] \quad (4.50)$$

Par identification dans la formule donnant (4.46) on trouve a

$$M^{(1)} = \bar{u}_{s'}(p_f) \mathbf{x}_l^m(k_f) (-ie\mathbf{g}_m \exp[i(p_i \wedge p_f)]) u_s(p_i) \quad (4.51)$$

d' après a processus on peut déduire les règles de Feynman suivantes

1. pour chaque vertex entre deux leptons et un photon, écrire un facteur :

$$-ie\mathbf{g}^m \exp[i(p_i \wedge p_f)] \quad (4.52)$$

p_i l' impulsion de l' électron initial.

p_f l' impulsion de l' électron final.

C' est $q \rightarrow 0$ alors $p_i \wedge p_f \rightarrow 0$ et on retrouve l' expression du vertex QED

$$\text{commutative} \quad -ie\mathbf{g}_m$$

2. pour chaque ligne interne de photon, marqué par l' impulsion k , écrire un facteur

$$iD_{Fab}(k) = i \frac{-g_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \quad (a) \quad \text{K} \quad \text{(b)} \quad (4.53)$$


3. pour chaque ligne interne de fermion, marqué par l'impulsion p , écrire un facteur

$$iS_F(p) = i \frac{1}{p - m + i\epsilon} \quad \text{P} \quad (4.54)$$


4. pour chaque ligne externe, un des facteurs suivants :

- (a) pour chaque électron initial : $u_r(p)$

$$\text{p} \longrightarrow \text{---} \quad (4.55a)$$

- (b) pour chaque électron final : $\bar{u}_r(p)$

$$\text{---} \longrightarrow \text{p} \quad (4.55b)$$

- (c) pour chaque positron initial : $\bar{v}_r(p)$

$$\text{p} \longrightarrow \text{---} \quad (4.55c)$$

- (d) pour chaque positron final : $v_r(p)$

$$\text{---} \longrightarrow \text{p} \quad (4.55d)$$

(e) pour chaque photon initial : $e_{ra}(k)$



$$(4.55e)$$

(f) pour chaque photon final : $e_{ra}(k)$



$$(4.55f)$$

Remarque que la seule modification affecte le vertex, les autres lois de Feynman resteront inchangées.

Néanmoins on a déjà mentionné qu' une théorie de jauge abélienne sur un espace – temps non commutatif peut être considérée comme non abélienne. En effet on a montré que $U(1)$ sur un espace – temps non commutatif est non abélienne, on doit s' attendre à un couplage entre les champs A_m de la même manière que QED.

On peut obtenir les règles de Feynman des deux derniers vertex en exploitant la similitude entre théorie de jauge non abélienne et la QED non commutative.

Effet dans une théorie non abélienne F_{mm} est donné par

$$F_{mm} = \partial_m A_n - \partial_n A_m - ig[A_m, A_n] \quad (4.56)$$

avec g la constante de couplage.

Si $\{T^a\}$ sont les générateurs du groupe.

Alors

$$[A_m, A_n] = [A_m^a T^a, A_n^b T^b] = A_m^a A_n^b i f^{abc} T^c \quad (4.57)$$

f^{abc} les constantes de structure.

Donc

$$F_{mm}^a = \partial_m A_n^a - \partial_n A_m^a + g f^{abc} A_m^b A_n^c \quad (4.58)$$

Dans le cadre de la QED non commutative.

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + ie[A_m, *A_n] \quad (4.59)$$

avec

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \int d^4 p A_m(p) e^{ip \cdot x} \\ A_n(x) &= \int d^4 p' A_n(p') e^{ip' \cdot x} \end{aligned} \quad (4.60)$$

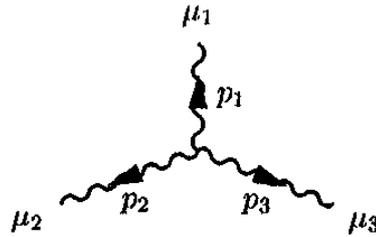
Donc

$$\begin{aligned} [A_m, *A_n] &= \int d^4 p \cdot d^4 p' A_m(p) A_n(p') \{ e^{ip \cdot x} * e^{ip' \cdot x} - e^{ip' \cdot x} * e^{ip \cdot x} \} \\ &= \int d^4 p \cdot d^4 p' A_m(p) A_n(p') \{ e^{-i(p \wedge p')} - e^{i(p' \wedge p)} \} e^{i(p+p')x} \\ ie[A_m, *A_n] &= +e \int d^4 p \cdot d^4 p' A_m(p) A_n(p') 2 \sin(p \wedge p') e^{i(p+p')x} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Et par conséquent $+2 \sin(p \wedge p')$ pour le rôle de la constante de structure f^{abc} .

Dans le cas d' une théorie non abélienne la règle de Feynman associée au diagramme à 3 pattes [17] est donnée par

$$gf^{abc} \left[(p_1 - p_2)^{m_3} g^{m_1 m_2} + (p_2 - p_3)^{m_1} g^{m_2 m_3} + (p_3 - p_1)^{m_2} g^{m_3 m_1} \right] \quad (4.62)$$

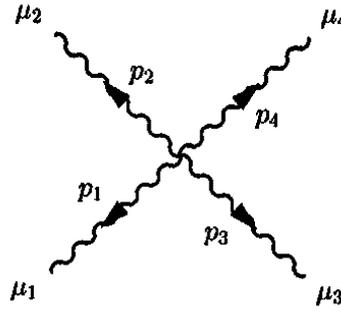


En remplaçant g par $+e$ et f^{abc} par $+2 \sin(p_1 \wedge p_2)$ et on retrouve la règle

$$-2e \sin(p_1 \wedge p_2) g f^{abc} \left[(p_1 - p_2)^{m_3} g^{m_1 m_2} + (p_2 - p_3)^{m_1} g^{m_2 m_3} + (p_3 - p_1)^{m_2} g^{m_3 m_1} \right] \quad (4.63)$$

De même pour le vertex à 4 pattes

$$-g^2 \left[\begin{aligned} & f^{abc} f^{cde} (g_{m_1 m_3} g_{m_2 m_4} - g_{m_1 m_4} g_{m_2 m_3}) + f^{ace} f^{bed} (g_{m_1 m_4} g_{m_3 m_2} - g_{m_1 m_2} g_{m_3 m_4}) + \\ & f^{ade} f^{bce} (g_{m_1 m_2} g_{m_4 m_3} - g_{m_1 m_3} g_{m_4 m_2}) \end{aligned} \right] \quad (4.64)$$



où on a effectué les correspondances suivantes :

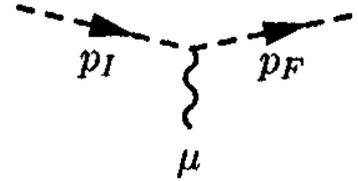
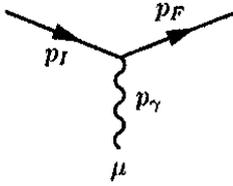
$$\begin{aligned} g &= e \\ f^{abc} &= \sin(p_1 \wedge p_2) \quad , \quad f^{cde} = \sin(p_3 \wedge p_4) \quad , \quad f^{ace} = \sin(p_1 \wedge p_3) \quad , \\ f^{bed} &= -\sin(p_2 \wedge p_4) \quad , \quad f^{ade} = \sin(p_1 \wedge p_4) \quad , \quad f^{bce} = \sin(p_2 \wedge p_3) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de la théorie de jauge non abélienne on trouve l'expression suivante :

$$-4e^2 \left[\begin{aligned} & \sin(p_1 \wedge p_2) \sin(p_3 \wedge p_4) (g_{m_1 m_3} g_{m_2 m_4} - g_{m_1 m_4} g_{m_2 m_3}) + \sin(p_3 \wedge p_1) \sin(p_2 \wedge p_4) \\ & (g_{m_1 m_4} g_{m_3 m_2} - g_{m_1 m_2} g_{m_3 m_4}) + \sin(p_1 \wedge p_4) \sin(p_2 \wedge p_3) (g_{m_1 m_2} g_{m_4 m_3} - g_{m_1 m_3} g_{m_4 m_2}) \end{aligned} \right] \quad (4.65)$$

Enfin le vertex entre 2 Ghosts et un photon peut aussi être obtenu à partir de la théorie de jauge non abélienne, donnée par

$$-gf^{abc}p_m \quad (4.66)$$



En remplaçant g par e , f^{abc} par $2\sin(p_f \wedge p_i) = -2\sin(p_i \wedge p_f)$ et p par p_F , on retrouve la règle

$$2ep_F^m \sin(p_i \wedge p_f) \quad (4.67)$$

Chapitre 5

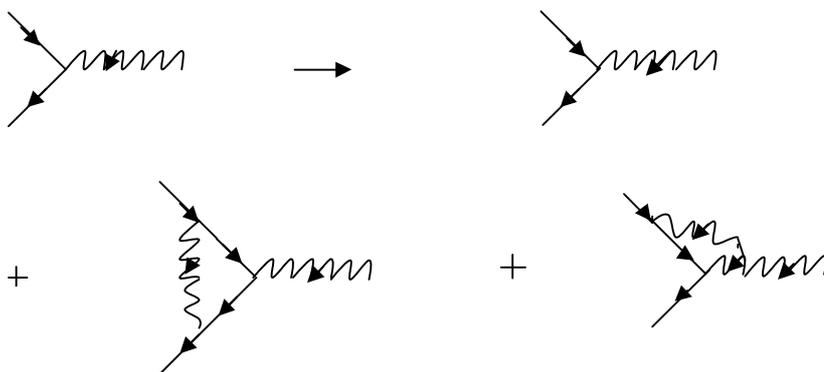
Le vertex électron- photon en QED non commutative

5.1 Le vertex électron-photon à un niveau de boucle

Dans la section précédente nous avons présenté QED non commutative, et nous avons prouvé que dans cette théorie il y a nouveau type de vertex semblables à ceux trouvés dans des théories de jauge non-Abéliennes. Dans cette section nous exécutons le calcul explicite de la fonction de vertex photon-électron à une boucle qui va contribuer dans la valeur du moment magnétique anormal de l' électron..

5.1.1 Structure de vertex à l'un niveau de boucle

Le vertex qui va contribuer dans la valeur du moment magnétique anormal de l' électron est donné par les diagrammes de Feynman suivants :



Si on effectue les corrections radiatives donnée par les diagrammes (a) et (b).

Alors la règle de Feynman pour le vertex électron- photon donnée par $ie\mathbf{g}^m e^{\frac{i}{2}p \times p'}$ sera remplacer par $ie\Gamma^m e^{\frac{i}{2}p \times p'}$ avec :

$$\Gamma^m = \mathbf{g}^m + d\Gamma^m(p, p') \quad (5.1)$$

$$d\Gamma^m(p, p') = d\Gamma_a^m(p, p') + d\Gamma_b^m(p, p') \quad (5.2)$$

$$d\Gamma_a^m(p, p') = -i(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2p)^4} \frac{\mathbf{g}_s}{k^2 - m_g^2 + i\mathbf{x}} \frac{p' - k + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\mathbf{x}} \mathbf{g}^m \frac{p - k + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\mathbf{x}} \mathbf{g}^s$$

$$e^{\frac{i}{2}(p'-k) \times p'} e^{\frac{i}{2}(p-k) \times (p'-k)} e^{\frac{i}{2}p \times (p-k)} \quad (5.3)$$

Le produit des exponentiels est égal

$$\begin{aligned} & \exp[-2i(k \wedge p')] \exp[-2i(p \wedge k)] \exp[i(p \wedge p')] \\ & = \exp[-2i(k \wedge q)] \exp[i(p \wedge p')] \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec :

$$q = p' - p$$

Il faut enlever le terme $e^{i(p \wedge p')}$ puisqu'il est déjà incorporé avec le \mathbf{g}^m .

$$\begin{aligned} -2i(k \wedge q) & = -2i\left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^m k_m q_n\right) \\ & = -ik \cdot \tilde{q} \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec

$$\tilde{q}^m = \mathbf{q}^m q_n$$

Donc :

$$d\Gamma_a^m = -i(ie)^2 e^{\frac{i}{2}p \times p'} \int \frac{d^4k}{(2p)^4} e^{-ik \wedge \tilde{q}} \frac{\mathbf{g}_s}{k^2 - m_g^2 + i\mathbf{x}} \frac{p' - k + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\mathbf{x}} \mathbf{g}^m$$

$$\frac{p - k + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\mathbf{x}} \mathbf{g}^s \quad (5.6)$$

avec m est la masse d' électron, m_g est la masse du photon

En utilisant les identités [20] :

$$\begin{aligned} g_m a g^m &= -2a \\ g_m a b g^m &= 4ab \\ g_m a b c g^m &= -2c b a \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le numérateur de l' expression (5.6) est donné par :

$$\begin{aligned} g_s (p' - k + m) g_m (p - k + m) g^s &= g_s (p' - k) g_m (p - k) g^s + m g_s (p' - k) g_m g^s + m g_s g_m (p - k) g^s \\ &\quad + m^2 g_s g_m g^s \\ &= -2(p - k) g_m (p' - k) + 4m(p' - k)_m + 4m(p - k)_m - 2m^2 g_m \\ &= -2(p - k)_a (p' - k)_b g^a g_m g^b + 4m(p' + p - 2k)_m - 2m^2 g_m \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} g_a g_m g_b &= 2g_{am} g_b - 2g_{ab} g_m + 2g_{mb} g_a - g_b g_m g_a \\ a g_m b &= 2a_m b - 2(a \cdot b) g_m + 2b_m a - b g_m a \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ce numérateur devient

$$\begin{aligned} g_s (p' - k + m) g_m (p - k + m) g^s &= \\ -2 [2(p' - k)_m (p - k) - 2(p - k)(p' - k) g^m + 2(p - k)_m \\ (p' - k) - (p' - k) g_m (p - k)] &+ 4m(p' + p - 2k)_m - 2m^2 g_m \end{aligned}$$

En utilisant les équations de Dirac

$$\begin{aligned} (p - m)u(p) &= 0 \\ \bar{u}(p')(p' - m) &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

où on a utilisé la condition « on – Shell mass »

On rappelle que

$$\begin{aligned} k g_m k &= k (-k g_m + \{g_m, k\}) \\ &= -k^2 g_m + 2k k_m \end{aligned} \quad (5.10)$$

Alors le numérateur devient

$$\begin{aligned}
& -4m(p' - k)_m + 4(p' - k)_m k + 4(p - k)(p' - k)g_m - 4mk_m \\
& -4m(p - k)_m + 4(p - k)_m k + 2m^2 g_m + 2kg_m k + 4kk_m \\
& -8mk_m + 4m(p + p') - 2m^2 g_m \\
& = 4\left\{ [g_m(p' - k)(p - k) - \frac{k^2}{2}] + k(p' + p - k)_m - mk_m \right\}
\end{aligned}$$

Finalement le numérateur est

$$4\left\{ g_m \left[(p - k)(p' - k) - \frac{k^2}{2} \right] + k(p' + p - k)_m - mk_m \right\} \quad (5.11)$$

En remplaçant dans (5.6) on trouve

$$d\Gamma_a^m(p, p') = -i(ie)^2 e^{\frac{i}{2}p \times p'} \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{-ik \wedge \tilde{q}} \frac{4\left\{ g_m \left[(p - k)(p' - k) - \frac{k^2}{2} \right] + k(p' + p - k)_m - mk_m \right\}}{(k^2 - m_g^2 + iX)((p' - k)^2 - m^2 + iX)((p - k)^2 - m^2 + iX)} \quad (5.12)$$

Pour intégrer sur k et calculer la valeur de $d\Gamma_a^m$, on utilise la parametrization de Schwinger :

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + iX} = \int_0^\infty da e^{ia(p^2 - m^2 + iX)} \quad (5.13)$$

D'autre part :

Utilisant la condition on-Shell mass

$$\begin{aligned}
p'^2 &= m^2 \\
p^2 &= m^2
\end{aligned} \quad (5.14)$$

On trouve

$$\begin{aligned}
(p' - k)^2 - m^2 + iX &= k^2 - 2p'k \\
(p - k)^2 - m^2 + iX &= k^2 - 2pk
\end{aligned} \quad (5.15)$$

Donc :

$$\frac{-i}{(k^2 - m_g^2)((p' - k)^2 - m^2 + ix)((p - k)^2 - m^2 + ix)} = \frac{-i}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)}$$

$$= \int_0^\infty da_1 e^{ia_1(k^2 - m_g^2)} \int_0^\infty da_2 e^{ia_2(k^2 - 2p'k)} \int_0^\infty da_3 e^{ia_3(k^2 - 2pk)}$$

$$= \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 e^{ia_1(k^2 - m_g^2) + ia_2(k^2 - 2p'k) + ia_3(k^2 - 2pk)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{ik(z - \tilde{q})} \frac{1}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)} = \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \int da_1 da_2 da_3$$

$$e^{ik^2(a_1 + a_2 + a_3) - 2ik(a_2 p' + a_3 p - \frac{z - \tilde{q}}{2}) - ia_1 m_g^2}$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2p)^2} \int da_1 da_2 da_3$$

$$e^{i(a_1 + a_2 + a_3) \left[\left(k - \frac{a_2 p' + a_3 p - \frac{z - \tilde{q}}{2}}{a_1 + a_2 + a_3} \right)^2 - \left(-\frac{a_2 p' + a_3 p - \frac{z - \tilde{q}}{2}}{a_1 + a_2 + a_3} \right)^2 - \frac{a_1 m_g^2}{a_1 + a_2 + a_3} \right]}$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \int da_1 da_2 da_3 \exp \left[ia \left(k - \frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

$$\exp \left[-i \frac{a_1 m_g^2 a + b^2}{a} \right]$$

avec :

$$a = a_1 + a_2 + a_3$$

$$b = a_2 p' + a_3 p - \frac{z - \tilde{q}}{2}$$

En utilisant la relation :

$$\int dx e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{p}{b}} \quad (5.16)$$

On trouve

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{ik(z-\tilde{q})} \frac{1}{(k^2 - m_j^2)(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)} = \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3$$

$$\frac{1}{a^2} \exp\left[\frac{-i}{a} \left((a_1 + a_2 + a_3) a_1 m_g^2 + \left(\frac{z-\tilde{q}}{2} - a_2 p' - a_3 p\right)^2 \right)\right] \quad (5.17)$$

avec :

$$\tilde{q}_n = q_m q^m$$

En dérivant la relation (5.17) par rapport à z^m on trouve :

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{ik(z-\tilde{q})} \frac{ik_m}{(k^2 - m_j^2)(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)} = \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3$$

$$\frac{ib_m}{a} \frac{\exp\left[\frac{-i}{a} (a_1 a m_g^2 + b^2)\right]}{a^2} \quad (5.18)$$

avec :

$$b_m = a_2 p'_m + a_3 p_m - \frac{z_m - \tilde{q}_m}{2}$$

En dérivant un autre fois par rapport à z^n on trouve :

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{ik(z-\tilde{q})} \frac{(ik_m)(ik_n)}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)} = \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3$$

$$\left\{ \frac{i}{a} \partial_n b_m \frac{\exp\left[\frac{i}{a} (a_1 a m_g^2 + b^2)\right]}{a^2} + \left(\frac{ib_m}{a}\right) \left(\frac{ib_n}{a}\right) \frac{\exp\left[\frac{-i}{a} (a_1 a m_g^2 + b^2)\right]}{a^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3$$

$$\left[-\frac{i}{2a} d_{mn} - \frac{b_m b_n}{a^2} \right] \frac{\exp\left[\frac{-i}{a} (a_1 a m_g^2 + b^2)\right]}{a^2} \quad (5.19)$$

puisque :

$$\partial_n \mathbf{b}_m = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{mn}$$

En remplaçant z par 0 on trouve

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{-ik \cdot \tilde{q}} \frac{1}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} =$$

$$\frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \frac{1}{a^2} \exp\left[-\frac{i}{a}(a a_1 m_g^2 + b_0^2)\right]$$
(5.20)

La première dérivée devient

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{-ik \cdot \tilde{q}} \frac{k_m}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} =$$

$$\frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \left(\frac{-b_{0m}}{a^3}\right) \exp\left[-\frac{i}{a}(a a_1 m_g^2 + b_0^2)\right]$$
(5.21)

La deuxième dérivée devient

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{-ik \cdot \tilde{q}} \frac{k_m k_n}{(k^2 - m_g^2)(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)} =$$

$$\frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \left(\frac{i}{2a^3} \mathbf{d}_{mn} + \frac{b_{0m} b_{0n}}{a^4}\right) \exp\left[-\frac{i}{a}(a a_1 m_g^2 + b_0^2)\right]$$
(5.22)

avec

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\tilde{q}}{2} + a_2 p' + a_3 p$$

Maintenant calculons l'exponentielle

$$\exp\left[-\frac{i}{a}(a_1 a m_g^2 + b_0^2)\right]$$

Développons

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}_1 a m_g^2 + \mathbf{b}_0^2] &= a \mathbf{a}_1 m_g^2 + \frac{\tilde{q}^2}{4} + \mathbf{a}_2 p' \cdot \tilde{q} + \mathbf{a}_3 p \cdot \tilde{q} + 2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 p' \cdot p + \mathbf{a}_2^2 p'^2 + \mathbf{a}_3^2 p^2 \\
&= a \mathbf{a}_1 m_g^2 + \frac{\tilde{q}^2}{4} + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) p \cdot \tilde{q} + 2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 (m^2 - q^2) + m^2 (\mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\exp\left[-\frac{i}{a} (a \mathbf{a}_1 m_g^2 + \mathbf{b}_0^2)\right] &= \exp\left[-\frac{i}{a} (a \mathbf{a}_1 m_g^2 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 m^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2)\right] \\
&\exp\left[-\frac{i}{a} \left(\frac{\tilde{q}^2}{4}\right)\right] \exp\left[-\frac{i}{a} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) p \cdot \tilde{q}\right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

On montre que

$$\begin{aligned}
p' \cdot \tilde{q} &= p'^m q^m q_n = \\
(q^m + p^m) q^m q_n &= p \cdot \tilde{q}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

(q^m est antisymétrique)

Pour régulariser le vertex on multiplie $d\Gamma_m^a$ par $\exp\left[\frac{i}{a\Lambda^2}\right]$ (avec $\Lambda \rightarrow \infty$).

$$\exp\left[\frac{i}{a\Lambda^2}\right] \exp\left[\frac{-i}{a} \frac{\tilde{q}^2}{4}\right] = \exp\left[\frac{i}{a\Lambda_{eff}^2}\right] \tag{5.25}$$

avec :

$$\frac{1}{\Lambda_{eff}^2} = \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\tilde{q}^2}{4}$$

On a déjà trouver le numérateur donnée par

$$\begin{aligned}
& 4 \left\{ \mathbf{g}_m \left[(p-k)(p'-k) - \frac{k^2}{2} \right] + k(p'-p-k) - mk_m \right\} = \\
& 4 \left\{ \mathbf{g}_m \left[p \cdot p' - (p+p')^m k_m + \frac{k^m k_m}{2} \right] - \mathbf{g}^a k_a (p'+p)_m - \mathbf{g}^a k_a k_m - mk_m \right\}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

On remplaçons les dérivations ci-dessus dans la relation (5.17) se trouve :

$$\begin{aligned}
\Gamma_m^{(a)} &= \frac{1}{ip} e^{\frac{i}{2} p \times p'} \int_0^\infty d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 \frac{e^{\frac{i}{a\Lambda_{eff}^2}}}{a^3} \exp \left[\frac{-i}{a} \left(\mathbf{a}_1 a m_g^2 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 m^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2 \right) \right] e^{\frac{-i(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) p \cdot \tilde{q}}{a}} \\
& \left\{ \mathbf{g}_m \left[ap' \cdot p - \frac{(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)(p+p')^2}{2} + \frac{i}{2} + \frac{(m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2)}{2a} \right] + \right. \\
& \left. \frac{m}{2a} (p'+p)_m \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) - \frac{\mathbf{g}_m}{4a} \left((p'+p)(2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) - \frac{1}{2} \tilde{q} \right) \cdot \tilde{q} + \right. \\
& \left. \frac{2m(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3) \tilde{q}_m + ((p'+p)(2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) - \tilde{q})_m \mathbf{g} \cdot \tilde{q}}{4a} \right\}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Le terme $\exp \left(\frac{i}{a\Lambda_{eff}^2} \right)$ est un terme oscillatoire, donc il faut effectuer une rotation de Wick

$\mathbf{a}_i \rightarrow \frac{\mathbf{a}_i}{i}$ avec : $i = 1, 2, 3$, suivit d'un changement d'échelle $\mathbf{a}_i \rightarrow r\mathbf{a}_i$.

Dans ce cas l'élément de « volume » $d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 \rightarrow \frac{d\mathbf{a}_1}{i} \frac{d\mathbf{a}_2}{i} \frac{d\mathbf{a}_3}{i} = i d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3$, après le changement d'échelle on trouve $ir^3 d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3$

$$\begin{aligned}
a^3 &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^3 \rightarrow (-i\mathbf{a}_1 - i\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_3)^3 \\
&= i(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^3 \rightarrow ir^3 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^3 = ir^3 a^3
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Donc $\frac{da_1 da_2 da_3}{a^3}$ la mesure devient après la rotation de Wick et le changement d'échelle ce terme devient

$$\frac{ir^3 da_1 da_2 da_3}{ir^3 a^3} = \frac{da_1 da_2 da_3}{a^3} \quad (5.29)$$

Donc pas de changement.

Maintenant prenons le terme d'oscillatoire $\exp\left(\frac{i}{a\Lambda_{eff}^2}\right)$ après la rotation de Wick et le changement d'échelle comme

$$\exp\left(\frac{i}{-iar\Lambda_{eff}^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{ar\Lambda_{eff}^2}\right) \text{ (Terme d'amortissement).} \quad (5.30)$$

Où introduit dans les calculs l'identité suivante :

$$1 = \int_0^\infty dr d(r - \sum a_i) \quad (5.31)$$

Lors du changement d'échelle :

$$a_i \rightarrow ra_i \quad (5.32)$$

Donc :

$$\sum a_i \rightarrow r \sum a_i \quad (5.33)$$

Et

$$\begin{aligned} d(r - \sum a_i) &\rightarrow d(r - r \sum a_i) \\ &= d[r(1 - \sum a_i)] \end{aligned} \quad (5.34)$$

En utilisant l'identité [3] :

$$d(cx) = \frac{1}{|c|} d(x) \quad (5.35)$$

Donc :

$$d[r(1 - \sum a_i)] = \frac{1}{r} d(1 - \sum a_i) \quad (5.36)$$

D'où la relation

$$1 = \int_0^\infty \frac{dr}{r} d(1 - \sum a_i) \quad (5.37)$$

Remarque que $d(1 - \sum a_i)$ est nulle sauf si $\sum a_i = 1$

Donc chaque fois qu'on trouve (après le changement d'échelle) la quantité

$a = a_1 + a_2 + a_3$ on l'a remplace par 1. Remarque aussi l'apparition du terme en $\frac{1}{r}$ donc la formule (5.31).

Prenons maintenant le terme $\exp\left[\frac{-i}{a}(a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2)\right]$ après la rotation de Wick et le changement d'échelle ce terme devient

$$\exp\left[\frac{1}{ar}(-a a_1 r^2 m_g^2 - r^2 (a_2 + a_3)^2 m^2 + r^2 a_2 a_3 q^2)\right] = \exp\left[-\frac{r}{a}(a a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2)\right] \quad (5.38)$$

Vu la présence de la fonction $d(1 - \sum a_i)$ donc chaque qu'on trouve $\sum a_i = a$ on peut remplacer par 1, et pour cette raison l'expression (5.38) peut être remplacé par

$$\exp[-r(a_1 m_g^2 + (a_1 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2)] \quad (5.39)$$

Et le terme $\exp\left[\frac{-i(a_2 + a_3)p \cdot \tilde{q}}{a}\right]$ après la rotation de Wick et le changement d'échelle ce

terme devient :

$$\exp\left[\frac{-ir(a_2 + a_3)p \cdot \tilde{q}}{ar}\right] = \exp[-i(a_2 + a_3)p \cdot \tilde{q}] \quad (5.40)$$

avec $a = 1$.

$\left[ap' \cdot p - \frac{(a_2 + a_3)(p + p')^2}{2} + \frac{i}{2} + \frac{m^2(a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2}{2a} \right]$, après la rotation de Wick et le changement d'échelle cette expression devient :

$$\begin{aligned} & \left[-iar p' \cdot p + \frac{ir(a_2 + a_3)(p + p')^2}{2} + \frac{i}{2} - i \frac{[m^2(a_2 + a_3)^2 + a_2 a_3 q^2]r}{2a} \right] \\ & = -i \left[p' \cdot p - \frac{(a_2 + a_3)(p + p')^2}{2} + \frac{m^2(a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2}{2} \right] r + \frac{i}{2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Le premier terme du dernier équation contient un r qui va être simplifier par le r qui provient de l'identité

$$1 = \int_0^\infty \frac{dr}{r} d(1 - \sum a_i) \quad (5.42)$$

Prenons maintenant le terme qui reste dans l'équation (5.27).

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2a} (p + p')_m a_1 (a_2 + a_3) - \frac{g_m}{4a} \left((p' + p)(a_1 + a_1 + a_2 + a_3) - \frac{1}{2} \tilde{q} \right) \cdot \tilde{q} \\ & + \frac{2m(a_1 + 2a_2 + 2a_3) \tilde{q}_m + ((p' + p)(2a_1 + a_2 + a_3) - \tilde{q})_m g \cdot \tilde{q}}{4a} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Après la rotation de Wick et le changement d'échelle cette expression devient ($\times \frac{1}{r}$ qui provient de l'identité

$$1 = \int_0^\infty \frac{dr}{r} d(1 - \sum a_i) . \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left\{ \frac{(-i)m}{-i2ar} (p' + p)_m r^2 a_1 (a_2 + a_3) - \frac{(-i)g_m}{(-i)4ar} \left(r(p' + p)(a_1 + a_1 + a_2 + a_3) - \frac{1}{2} \tilde{q} \right) \cdot \tilde{q} \right. \\ & \left. + \frac{-2imr(a_1 + 2a_2 + 2a_3) \tilde{q}_m + (-i(p' + p)r(2a_1 + a_2 + a_3) - \tilde{q})_m g \cdot \tilde{q}}{-4iar} \right\} \\ & = \frac{m(p' + p)_m a_1 (a_2 + a_3)}{2} - \frac{g_m p \cdot \tilde{q} (2 - a_2 - a_3)}{2r} + \frac{g_m \tilde{q} \cdot \tilde{q}}{8r^2} + \frac{m(1 + a_2 + a_3) \tilde{q}_m}{2r} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$+ \frac{(p' + p)_m (a_1 + 1) \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{4r} - \frac{i \tilde{\mathbf{q}}_m \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{4r^2}$$

L'équation (5.27) devient

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(a)} &= \frac{-\mathbf{a}}{p} e^{\frac{i}{2} p \times p'} \int_0^1 da_1 da_2 da_3 d(1 - \sum a_i) e^{-i(a_2 + a_3)p \cdot \tilde{\mathbf{q}}} \times \left(A_m + \frac{B_m}{r} + \frac{C_m}{r} \right) \\ &\times \int_0^\infty dr \exp \left(-r (a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2) - \frac{1}{r \Lambda_{eff}^2} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

où

$$\begin{aligned} A_m &= \mathbf{g}_m \left[p' \cdot p - \frac{(a_2 + a_3)(p' + p)^2}{2} + \frac{m^2 (a_2 + a_3)^2}{2} - \frac{a_2 a_3 q^2}{2} \right] + \\ &\frac{m a_1 (a_2 + a_3) (p' + p)^2}{2}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$iB_m = \frac{\mathbf{g}_m}{2i} + \frac{\mathbf{g}_m p \cdot \tilde{\mathbf{q}} (2 - a_2 - a_3)}{2} + \frac{m(1 + a_2 + a_3) \tilde{\mathbf{q}}_m}{2} + \frac{(a_1 + 1)(p' + p)_m \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{4}, \quad (5.48)$$

$$C_m = \frac{-\mathbf{g}_m \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{8} + \frac{\tilde{\mathbf{q}}_m \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{4}. \quad (5.49)$$

Exécutant l'intégrale au-dessus de r , nous obtenons (voir annexe A)

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(a)} &= \frac{-\mathbf{a}}{p} e^{\frac{i}{2} p \times p'} \int_0^1 da_1 da_2 da_3 d(1 - \sum a_i) e^{-i(a_2 + a_3)p \cdot \tilde{\mathbf{q}}} \\ &\left(\frac{2A_m K_1(2\sqrt{X})}{\sqrt{X} \Lambda_{eff}^2} + 2B_m K_0(2\sqrt{X}) + 2\sqrt{X} \Lambda_{eff}^2 C_m K_1(2\sqrt{X}) \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

où

$$X \equiv \frac{a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2}{\Lambda_{eff}^2}. \quad (5.51)$$

K_0 et K_1 sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées du 1^{er} et 2^{em} espèce.

Maintenant nous considérons la forme de contribution de deuxième diagramme

$$\begin{aligned}
d\Gamma_b^m &= ie g^n \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{\frac{i}{2}k \times p'} \frac{(k+m)}{((p'-k)^2 - m_g^2)(k^2 - m^2)((p-k)^2 - m_g^2)} \\
&\left[-2e \sin\left(\frac{i}{2}(p-k) \times (p'-p)\right) \left[g^m (2p' - p - k)^r + g^{nr} (2k - p' - p) + g^{rm} (2p - p' - k) \right] (ie g^m e^{\frac{i}{2}p \times k}) \right] \\
&= -2(ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} e^{\frac{i}{2}k \times p'} \frac{g_n(k+m)g_r}{((p'-k)^2 - m_g^2)(k^2 - m^2)((p-k)^2 - m_g^2)} \left[\frac{e^{\frac{i}{2}(p-k) \times (p'-p)} - e^{\frac{-i}{2}(p-k) \times (p'-p)}}{2i} \right] \\
&\left[g^m (2p' - p - k)^r + g^{nr} (2k - p' - p)^m + g^{rm} (2p - p' - k)^n \right] e^{\frac{i}{2}p \times k}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Calculons les termes exponentiels

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{i}{2}k \times p'\right) \left[\exp\left(\frac{i}{2}(p-k) \times (p'-p)\right) - \exp\left(-\frac{i}{2}(p-k) \times (p'-p)\right) \right] \exp\left(\frac{i}{2}p \times k\right) \\
&= \exp\left(\frac{i}{2}p \times p'\right) - \exp\left(\frac{i}{2}p \times p'\right) \exp(ik \times \tilde{q}) \exp(ip' \times p)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}
d\Gamma_b^m &= -ie^2 e^{\frac{i}{2}p \times p'} \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{(1 - e^{ik \cdot \tilde{q}} e^{ip' \times p})}{(k^2 - m^2)((p'-k)^2 - m_g^2)((p-k)^2 - m_g^2)} \\
&\times \left\{ g_n(k+m)g_r \left[g^m (2p' - p - k)^r + g^{nr} (2k - p' - p)^m + g^{rm} (2p - p' - k)^n \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

En utilisant l' algèbre de matrices gamma et le condition on - Shell mass le numérateur peut être écrit

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{g}_n (k+m) \mathbf{g}_r \left[\mathbf{g}^m (2p' - p - k)^r + \mathbf{g}^{mr} (2k - p' - p)^m + \mathbf{g}^{rm} (2p - p' - k)^n \right] \right\} \\
& = \mathbf{g}^m (2\mathbf{g}_r^a - \mathbf{g}_r \mathbf{g}^a) k_a (2p' - p - k)^r + m \mathbf{g}^m \mathbf{g}_r (2p' - p - k)^r + \mathbf{g}_n (2\mathbf{g}^{an} - \mathbf{g}^n \mathbf{g}^a) \\
& k_a (2k - p' - p)^m + 4m(2k - p' - p)^m + (2\mathbf{g}_n^a - \mathbf{g}^a \mathbf{g}_n) k_a (2p - p' - p)^n + m \mathbf{g}_n \mathbf{g}^m \\
& (2p - p' - k)^n \\
& = 2\mathbf{g}^m k_a (2p' - p - k)^a - \mathbf{g}^m \mathbf{g}_r \mathbf{g}^a k_a (2p' - p - k)^r + m \mathbf{g}^m \mathbf{g}_r (2p' - p - k)^r + 2\mathbf{g}_n k^n \\
& (2k - p' - p)^m - 4\mathbf{g}^a k_a (2k - p' - p)^m + 4m(2k - p' - p)^m + 2\mathbf{g}^m k_a (2p - p' - k)^a \\
& - \mathbf{g}^a \mathbf{g}_n \mathbf{g}^m k_a (2p - p' - k)^n + m \mathbf{g}_n \mathbf{g}^m (2p - p' - k)^n \\
& = 2\mathbf{g}_m (2p' \cdot k + 2p \cdot k - k^2 - 3m^2) - 2k(p' + p + 2k) + 8mk_m
\end{aligned}$$

Donc le numérateur

$$-2k(p' + p + 2k) + 2\mathbf{g}_m (2p' \cdot k + 2p \cdot k - k^2 - 3m^2) + 8mk_m \quad (5.55)$$

Notons que (3.53) peut être séparé en deux parties une contient la phase $e^{-ik \cdot \tilde{q}}$, et l'autre pas c.-à-d. $\Gamma_m^b = \Gamma_m^{b1} + \Gamma_m^{b2}$. D'abord nous exécutons la partie contenant la phase, Γ_m^{b2} , puis

l'autre comme une limite, Γ_m^{b1} , peut être obtenue facilement en exploitant les résultats déjà obtenues pour Γ_m^a .

De la même façon, on calcule l'intégrale auxiliaire

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{\exp[ik(z + \tilde{q})]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \exp(ik(z + \tilde{q})) \\
& \int da_1 \exp[ia_1(k^2 - m^2)] \int da_2 \exp[ia_2((p' - k)^2 - m_g^2)] \int da_3 \exp[ia_3((p - k)^2 - m_g^2)] \\
& = \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \exp ia \left[\left(k + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}(z + \tilde{q}) - a_2 p' - a_3 p \right) \right)^2 - \left(\frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}(z + \tilde{q}) - a_2 p' - a_3 p \right) \right)^2 \right] \\
& \times \exp ia \left[\frac{1}{a} ((a_2 + a_3 - a_1)m^2 - (a_2 + a_3)m_g^2) \right]
\end{aligned} \quad (5.56)$$

En utilisant la relation :

$$\int dx e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\mathbf{p})^4} \frac{\exp[ik(z + \tilde{q})]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \\ & \frac{1}{(4\mathbf{p})^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \frac{1}{a^2} \exp\left[-\frac{i}{a} \left(\frac{1}{2}(z + \tilde{q}) - a_2 p' - a_3 p\right)^2\right] \\ & \times \exp\left[-i\left((a_1 - a_2 - a_3)m^2 + (a_2 + a_3)m_g^2\right)\right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

après des calculs $\exp\left[-\frac{i}{a} \left(\frac{1}{2}(z + \tilde{q}) - a_2 p' - a_3 p\right)^2\right]$ devient

$$\exp\left[-\frac{i}{a} \left(\frac{z^2}{4} + \frac{\tilde{q}^2}{4} - z(a_2 p' + a_3 p - \frac{\tilde{q}}{2}) - (a_2 + a_3)\tilde{q}p + m^2(a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2\right)\right] \quad (5.59)$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\mathbf{p})^4} \frac{\exp[ik \cdot (z + \tilde{q})]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \\ & \frac{1}{(4\mathbf{p})^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \frac{1}{a^2} \exp\left[\frac{-i}{a} l\right] \exp\left[\frac{i}{a} (a_2 + a_3) p \cdot \tilde{q}\right] \\ & \exp\left[-i \left(m^2(a_1 - a_2 - a_3) + m_g^2(a_2 + a_3) + \frac{1}{a} (m^2(a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2) - \frac{1}{a\Lambda_{eff}^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{q}^n &= q_m q^m \\ l &= \frac{z^2}{4} - z \cdot (a_2 p' + a_3 p - \frac{\tilde{q}}{2}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

En dérivant cette relation par rapport à z^m on trouve :

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{ik_m \exp[ik \cdot (z + \tilde{q})]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} =$$

$$\frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \frac{1}{a^2} \left(\frac{-i}{a} \partial_m I \right) \exp\left[\frac{-i}{a} I \right] \exp\left[\frac{i}{a} (a_2 + a_3) p \cdot \tilde{q} \right] \quad (5.62)$$

$$\exp\left[-i \left(m^2 (a_1 - a_2 - a_3) + m_g^2 (a_2 + a_3) + \frac{1}{a} (m^2 (a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2) - \frac{1}{a \Lambda_{eff}^2} \right) \right]$$

avec

$$\partial_m I = \frac{z}{2} - (a_2 p' + a_3 p - \frac{\tilde{q}}{2})$$

En dérivant un autre fois par rapport à z^n on trouve :

$$\int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{(ik_m)(ik_n) \exp[ik \cdot (z + \tilde{q})]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} =$$

$$\frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \frac{1}{a^2} \left(\frac{-i}{a} \partial_n \partial_m I + \left(\frac{-i}{a} \right)^2 \partial_n I \partial_m I \right) \exp\left[\frac{-i}{a} I \right] \exp\left[\frac{i}{a} (a_2 + a_3) p \cdot \tilde{q} \right]$$

$$\exp\left[-i \left(m^2 (a_1 - a_2 - a_3) + m_g^2 (a_2 + a_3) + \frac{1}{a} (m^2 (a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2) - \frac{1}{a \Lambda_{eff}^2} \right) \right] \quad (5.63)$$

avec

$$\partial_n \partial_m I = \frac{1}{2}$$

En remplaçant z par zéro on trouve

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{\exp[ik \cdot \tilde{q}]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \\
& \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 \frac{1}{a^2} \exp\left[\frac{i}{a}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)p \cdot \tilde{q}\right] \\
& \exp\left[-i\left(m^2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + m_g^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \frac{1}{a}(m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2) - \frac{1}{a\Lambda_{eff}^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.64}$$

La première dérivée devient

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{k_m \exp[ik \cdot \tilde{q}]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \\
& \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 \frac{1}{a^2} \left[\frac{-1}{a} \partial_m I_0\right] \exp\left[\frac{i}{a}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)p \cdot \tilde{q}\right] \\
& \exp\left[-i\left(m^2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + m_g^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \frac{1}{a}(m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2) - \frac{1}{a\Lambda_{eff}^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.65}$$

avec

$$\partial_m I_0 = -(\mathbf{a}_2 p' + \mathbf{a}_3 p - \frac{\tilde{q}}{2})$$

La deuxième dérivée devient

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2p)^4} \frac{(k_m k_n) \exp[ik \cdot \tilde{q}]}{(k^2 - m^2)((p' - k)^2 - m_g^2)((p - k)^2 - m_g^2)} = \\
& \frac{1}{(4p)^2} \int_0^\infty d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 \frac{1}{a^2} \left(\frac{i}{a} \partial_n \partial_m I - \left(\frac{-i}{a}\right)^2 \partial_n I_0 \partial_m I_0\right) \exp\left[\frac{i}{a}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)p \cdot \tilde{q}\right] \\
& \exp\left[-i\left(m^2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + m_g^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \frac{1}{a}(m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2) - \frac{1}{a\Lambda_{eff}^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.66}$$

En effectuant une rotation de Wick et en utilisant l'identité $1 = \int_0^\infty \frac{dr}{r} d(1 - \sum a_i)$,

l'expression $\Gamma_m^{(b2)}$ devient

$$\Gamma_m^{(b2)} = \frac{-\mathbf{a} \cdot \exp\left[\frac{i}{2} \mathbf{p} \times \mathbf{p}'\right]}{p} \int_0^\infty d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 d(1 - \sum \mathbf{a}_i) \exp[i(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}] \exp[-i\mathbf{p} \times \mathbf{p}']$$

$$\int dr \exp\left[-r(m^2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + m_g^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2) - \frac{1}{r\Lambda_{eff}^2}\right] \quad (5.67)$$

$$\times \left(\tilde{A}_m + \frac{\tilde{B}_m}{r} + \frac{\tilde{C}_m}{r^2} \right)$$

où maintenant \tilde{A}_m, \tilde{B}_m et \tilde{C}_m sont donnés par

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{2} \mathbf{g}_m [(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)(p' + p)^2 - 3m^2 - m^2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)^2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 q^2] +$$

$$+ \frac{m\mathbf{a}_1}{2} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)(p' + p)_m$$

$$i\tilde{B}_m = \frac{3i}{2} \mathbf{g}_m + \frac{1}{2} (m\tilde{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}})(2 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) - \frac{\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{4} (p' + p)_m (1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \quad (5.68)$$

$$\tilde{C}_m = \frac{\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}_m}{4} + \frac{\mathbf{g}_m \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{8}$$

En effectuant l'intégrale sur le r , nous obtenons (en utilisant les valeurs des intégrales donnée dans l' annexe B).

$$\Gamma_m^{(b2)} = \frac{-\mathbf{a}}{p} e^{\frac{i}{2} \mathbf{p} \times \mathbf{p}'} \int_0^1 d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 d(1 - \sum \mathbf{a}_i) e^{-i(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{q}}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}}$$

$$\left(\frac{2\tilde{A}_m K_1(2\sqrt{Y})}{\sqrt{Y}\Lambda_{eff}^2} + 2\tilde{B}_m K_0(2\sqrt{Y}) + 2\sqrt{Y}\Lambda_{eff}^2 \tilde{C}_m K_1(2\sqrt{Y}) \right) \quad (5.69)$$

où

$$Y \equiv \frac{m^2(a_1 - a_2 - a_3) + m_g^2(a_2 + a_3) + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2}{\Lambda_{eff}^2} \quad (5.70)$$

Les termes de $\Gamma_m^{(b1)}$, peut être récupéré facilement la forme d'expression ci-dessus en plaçant n'importe quelle limite proportionnelle à q^m (c.-à-d. \tilde{q}^m) à zéro, alors nous avons

$$\Gamma_m^{(b1)} = \frac{-a}{p} e^{\frac{i}{2} p \times p'} \int_0^1 da_1 da_2 da_3 d(1 - \sum a_i) \left(\frac{2\tilde{A}_m K_1(2\sqrt{Z})}{\sqrt{Z} \Lambda^2} + 2\tilde{B}_m K_0(2\sqrt{Z}) \right) \quad (5.71)$$

où

$$Z = \frac{m^2(a_1 - a_2 - a_3) + m_g^2(a_2 + a_3) + m^2(a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 q^2}{\Lambda^2} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m &= \frac{1}{2} g_m [(a_2 + a_3)(p' + p)^2 - 3m^2 - m^2(a_2 + a_3)^2 + a_2 a_3 q^2] \\ &+ \frac{m a_1}{2} (a_2 + a_3)(p' + p)_m \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\tilde{B}_m = \frac{3}{2} g_m$$

5.2 Conclusion

Dans ce chapitre on a reformulé l'électrodynamique quantique qu'est la théorie quantique qui décrit l'interaction d'un photon avec un électron dans le cadre de la géométrie non – commutative.

QED ordinaire est une théorie abélienne. Donc le photon ne peut pas interagir avec lui-même. Ceci n'est pas que sur un espace – temps ordinaire ou commutatif. Si on suppose que l'espace – temps est non – commutatif le groupe $U(1)$ initialement abélien, devient non abélien et on assiste aussi à quelque modification affecte le vertex, apparition des diagrammes à 3 pattes et 4 pattes, les autres règles et en particulier l'expression des propagateur reste inchangée.

Les règles de Feynman ainsi obtenue nous ont aidés à revoir l'expression du vertex photon – électron. On a montré que deux diagrammes (absent dans QED ordinaire) sont apparaître. Nous avons calculé d'une manière explicite ces deux diagrammes.

5.3 Perspective

Les contributions des diagrammes A et B contient apparemment des divergences. Ce qui nécessite une analyse approfondie de ces diagrammes dans le cadre de la théorie de renormalisation. Le but de d'extraire la partie divergente de chaque diagramme.

Une fois ces diagrammes analysés dans le cadre de la théorie de renormalisation on peut voir si le problème de couplage UV – IR existent.

Conclusion générale

Le but de ce mémoire est de formuler le problème de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la géométrie non commutative.

Le passage de la mécanique quantique ordinaire (basée sur un espace-temps commutatif) à la mécanique quantique non commutative se fait par le biais du produit star (produit de Moyal) défini dans le chapitre 2.

On montre dans ce chapitre que la non commutativité de l'espace-temps est codée dans le produit star. En d'autres termes ce produit peut être considéré comme une déformation du produit ordinaire.

Dans le chapitre 3 on a montré que l'équation de Schrödinger non commutative se déduit de l'équation de Schrödinger ordinaire par un simple déplacement de vecteur position X . Comme exemple de la théorie quantique non commutative on a pris l'atome d'hydrogène. La non commutativité de l'espace-temps a été considérée comme une perturbation, cette théorie nous a permis de calculer le déplacement des niveaux d'énergie dans le but de voir si le déplacement de Lamb peut être expliqué par une manifestation de la géométrie non commutative.

Dans le même chapitre on a étudié l'effet Stark.

Dans le chapitre 4 on a traité la théorie de jauge non commutative et on a pris comme exemple QED.

On a montré qu'une théorie de jauge sur un espace-temps non commutatif est équivalente à une théorie non abélienne sur un espace-temps ordinaire. Cette remarque nous a aidée à retrouver les règles de Feynman pour QED non commutative.

Les règles de Feynman obtenues sont utilisées dans le chapitre 5 pour calculer les corrections introduites par l'interaction du photon et l'électron.

Les calculs montrent la présence de divergences dans les boucles. Ce qui exige un traitement de ces diagrammes dans le cadre de la théorie de la renormalisation.

Annexe A

$$\bar{r}^n = \left(\frac{n}{2z}\right)^n \frac{J_{n+l,2l+1}^{(n+1)}}{J_{n+l,2l+1}^{(1)}}$$

avec :

$$1) J_{lm}^{(s)} = (-1)^s \frac{l!}{(l-m)!} s! \sum_{b=0}^s (-1)^b \binom{s}{b} \binom{l+b}{s} \binom{l+b-m}{s} \quad \text{si : } s \geq 0$$

$$2) J_{lm}^{(s)} = \frac{l!}{(l-m)!(s+1)!} \sum_{g=0}^s (-1)^{s-g} \frac{\binom{s}{g} \binom{l-m+g}{s}}{\binom{m+s-g}{s+1}} \quad \text{si : } s = -(1+s) \leq -1$$

Dans notre cas on vent trouves : \bar{r}^{-3}

$n = -3 \rightarrow n+1 = -2$ est négatif, et $s = -(s+1) = -(n+1+1) \rightarrow s = 1$

$$J_{n+l,2l+1}^{(n+1)} = J_{n+l,2l+1}^{(-2)} = \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!2!} \sum_{g=0}^1 (-1)^{1-g} \frac{\binom{1}{g} \binom{n-l-1+g}{1}}{\binom{2l+2-g}{2}}$$

• la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{g=0}^1 (-1)^{1-g} \frac{\binom{1}{g} \binom{n-l-1+g}{1}}{\binom{2l+2-g}{2}} &= \frac{-\binom{1}{0} \binom{n-l-1}{1}}{\binom{2l+2}{2}} + \frac{\binom{1}{1} \binom{n-l}{1}}{\binom{2l+1}{2}} \\ &= \frac{-2(n-l-1)}{(2l+2)(2l+1)} + \frac{2(n-l)}{(2l+1)2l} \\ &= \frac{2n}{(2l+2)(2l+1)l} \end{aligned}$$

Donc :

$$J_{n+l,2l+1}^{(-2)} = \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!2!(2l+2)(2l+1)l} 2n \quad (1)$$

On calcule maintenant l'expression $J_{n+l,2l+1}^{(1)}$:

$s = 1$ est positif donc utilise la formule

$$J_{lm}^s = (-1)^s \frac{l!}{(l-m)!} s! \sum_{b=0}^s (-1)^b \binom{s}{b} \binom{l+b}{s} \binom{l+b-m}{s}$$

Donc :

$$J_{n+l,2l+1}^{(1)} = \frac{-(n+l)!}{(n-l-1)!} \sum_{b=0}^1 (-1)^b \binom{1}{b} \binom{n+l+b}{1} \binom{n-l-1+b}{1}$$

- La somme :

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^1 (-1)^b \binom{1}{b} \binom{n+l+b}{1} \binom{n-l-1+b}{1} &= \binom{1}{0} \binom{n+l}{1} \binom{n-l-1}{1} - \binom{1}{1} \binom{n+l+1}{1} \binom{n-l}{1} \\ &= (n+l)(n-l-1) - (n+l+1)(n-l) \\ &= -2n \end{aligned}$$

Donc :

$$J_{n+l,2l+1}^{(1)} = \frac{2n(n+l)!}{(n-l-1)!} \quad (2)$$

A partir à (1) et (2) se trouve :

$$\begin{aligned} \bar{r}^{-3} &= \left(\frac{n}{2z} \right)^{-3} \frac{J_{n+l,2l+1}^{(-2)}}{J_{n+l,2l+1}^{(1)}} \\ &= \left(\frac{2z}{n} \right)^3 \frac{1}{2l(2l+1)(2l+2)} \\ &= \frac{z^3}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \quad , \quad z=1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{r}^{-3} = \frac{1}{n^3 (l+1/2)(l+1)} = f_{n,l}$$

Annexe B

On montre que

$$\int_0^{\infty} dx \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) e^{-\left(ax + \frac{b}{x} \right)} = -2a \sqrt{\frac{b}{a}} K_1(2\sqrt{ab}) - 2b K_0(2\sqrt{ab}) - 2c \sqrt{\frac{a}{b}} K_1(2\sqrt{ab})$$

K_0 Et K_1 sont les fonctions de Bessel modifiées de la première et deuxième espèce.

avec :

$$a = A_m$$

$$b = B_m$$

$$c = C_m$$

$$a = a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2$$

$$b = \frac{1}{\Lambda_{eff}^2}$$

$$ab = \frac{a_1 m_g^2 + (a_2 + a_3)^2 m^2 - a_2 a_3 q^2}{\Lambda_{eff}^2} = X.$$

Bibliographie

- [1] A. Micu and M. M. Sheikh- Jabbari, Noncommutative Φ^4 Theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, **hep-th/ 0008057**.
- [2] L. Alvarez-Gaume, S. R. Wadia, Gauge Theory on a Quantum Phase Space, **hep- th/0006219**.
- [3] Mécanique Quantique, édité par C. Tannoudji, F. Laloë, université de paris 6. (1973).
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum mechanics : non-relativistic theory. Pergamon Press, 1977.
- [5] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED, Phys. Rev. Lett. 86(2001) 2716, **hep- th/0010175**.
- [6] I. F. Raid, M. M. Sheikh-Jabbari, Noncommutative QED and Anomalous Dipole Moments, JHEP 0008 (2000) 045, **hep-th/0008132**
- [7] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Comments on the Hydrogen Atom Spectrum in the Noncommutative Space, Eur. Phys. J. C 36 (2002)251, **hep- th/0212259**.
- [8] J. HLADIK, M. CHRYOS, P-E. HLADIK, Mécanique quantique, Atomes et Molécules. Applications technologiques, DUNOD (2002).
- [9] H. S. Snyder, Quantized Space-Time, Phys. Rev. **71** (1947) 38; The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time, Phys. **72** (1947) 68.
- [10] L. Mezincescu , **hep-th/0007046**.

- [11] E. KARTHEUSER, Particules dans un champ de force central, Mécanique quantique, <http://www.Ulg.Ac.Be/physem/endeignement.Htm>.
- [12] N. Seiberg, E. Witten, String Theory and Noncommutative Geometry, JHEP 09 (1999) 032, and references therein.
- [13] H. A. Bethe and E. Salpeter, Quantum Mechanics of one-and two electron atoms, Plenum Publishing corporation (1977).
- [14] B. Cagnac, J.-C. Pebay-Peyroula, Physique atomique, université de paris, (1982).
- [15] Quantenmechanik, J. Fliessbach, Dirac, Quantum Mechanics, Oxford, Clarendon Press (1958).
- [16] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, Quantum Field Theory on Noncommutative Space-Time and the Persistence of Ultraviolet Divergences, Nucl. Phys. **B 567** (2000) 360.
- [17] L. A. Ryder, Quantum field Theory (1985).
- [18] Mandel and Shaw, Quantum field Theory (1980).
- [19] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, Noncommutative Perturbative Dynamics, **hep-th / 9912072** ;
M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, Comments on Noncommutative Perturbative Dynamics, JHEP 0003 (2000) 035, **hep-th / 0002186**.
- [20] WWW. Hitoshi. Berkeley . edu / 229A / vertex. Pdf.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'atome d'hydrogène dans le formalisme de la géométrie non commutative. En particulier on a étudié si la non commutativité de l'espace- temps peut expliquer le déplacement de Lamb.

Cette non commutativité a été considérée comme une perturbation indépendante du temps dans l'expression du potentiel coulombien.

On a montré que la correction dépend du nombre quantique orbitale l (à l'inverse de la théorie de Dirac qui donne l'énergie en fonction de n et de j). Le fait que la correction dépend de l lève la dégénérescence entre les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$.

On a traité la théorie de jauge non commutative et on a pris comme exemple QED.

On a montré qu'une théorie de jauge sur un espace temps non commutatif est équivalente à une théorie non abélienne sur un espace temps ordinaire. Cette remarque nous a aidée à retrouver les règles de Feynman pour QED non commutative.

D'autres corrections dues à l'électrodynamique quantique ont été aussi calculées.

Mot clés : Géométrie non- commutative, l'atome d'hydrogène, le déplacement de Lamb, le produit de Moyal.

ملخص الأطروحة

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة درة الهدروجين في إطار الهندسة غير التبديلية. قمنا ا بدراسة اثر لا تبديلية المكان-الزمان في انحراف لامب. اعتبرنا اثر لا تبديلية على شكل اضطراب في عبارة الكمون الكولومبي. قمنا كذلك بحساب بعض التصحيحات الناتجة على الالكثروديناميكا الكوانتية.

الكلمات المفتاحية الهندسة غير تبديلية. درة الهدروجين. انحراف لامب. جداء مويال.

Summary

The aim of this dissertation is the study of hydrogen atom in the frame work of non commutative geometry we have studied in particular the effect of non commutativity of space-time of the Lamb shift.

This effect has been considered as a perturbation in the expression of the coulomb potential.

Other corrections due to quantum electrodynamics have been calculated.

Key- words: non commutative geometry, hydrogen atom, Lamb shift, Moyal product.