

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mentouri Constantine
Faculté des Sciences
Département de Physique

N° d'ordre.....
Série.....

Mémoire

présenté pour l'obtention du

Diplôme de Magister

En Physique

Spécialité : Physique Théorique

par

Habiba BOUHALLOUF

Intitulé

*Etude des propriétés des trous noirs du type
Kerr de la gravitation topologiquement
massive à trois dimensions (TMG)*

Soutenu le : 21 / 06 / 2005

devant le jury :

Président :	A. Djemel	Prof. Univ. Mentouri de Constantine
Rapporteur :	K. Ait Moussa	MC. Univ. Mentouri de Constantine
Examineurs :	L. Chetouani	Prof. Univ. Mentouri de Constantine
	T. Boudjedaa	MC. Université de Jijel
	A. Benslama	MC. Univ. Mentouri de Constantine

DEDICACE

A mes parents, qui m'ont entouré, tout le long de ma vie, de leur amour et soutien, dont les sacrifices qu'ils ont consentis m'ont permis d'atteindre ce niveau.

A ma sœur Naima et son mari El-Hachemi grâce auxquels j'ai pu poursuivre mes études ainsi que mon travail de recherche dans de bonnes conditions.

A mon fiancé Khaled pour son appui moral tout le long de mon travail.

A tous mes frères et sœurs ainsi que leurs petites familles pour tout le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

A tous mes amis, de près ou de loin.

*Je dédie ce travail en espérant
que ce sera à la hauteur de leur espoir.*

Habiba

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique du Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mentouri de Constantine.

J'adresse tout d'abord mes plus vifs remerciements à monsieur *Karim Ait Moussa*, maître de conférences à l'université Mentouri de Constantine, qui m'a offert de travailler en Relativité Générale, le domaine qui m'a toujours intéressé, et particulièrement sur les trous noirs. Je le remercie également pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être mon rapporteur, ainsi que les conseils avisés et précieux qu'il a su me donner, et pour son aide efficace et constante tout au long de mon travail de recherche.

J'exprime ma profonde gratitude à monsieur A. Djemel, professeur à l'université Mentouri de Constantine pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Toute ma gratitude est aussi destinée à monsieur L. Chetouani, professeur à l'université Mentouri Constantine. Je le remercie d'avoir bien voulu faire partie du jury de mon mémoire de magistère.

Je suis reconnaissante à monsieur *A. Benslama*, maître de conférence à l'université Mentouri de Constantine et monsieur *T. Boujedaa*, maître de conférence à l'université de Jijel d'avoir bien voulu d'être membres examinateurs dans le jury de ce travail.

Je ne saurais oublier de remercier très sincèrement tous mes collègues et mes ami(e)s pour l'aide morale qu'ils (ou elles) m'ont donné au cours de la réalisation de ce manuscrit.

Table des matières

Introduction	3
1 Introduction à la gravitation d'Einstein	6
1.1 La relativité générale	6
1.1.1 La géométrie riemannienne	7
1.1.2 Equation d'Einstein	11
1.2 La solution de Schwarzschild	12
1.3 Les trous noirs	13
2 Gravitation topologiquement massive à (2+1) dimensions	16
2.1 Gravitation à trois dimensions	16
2.2 Gravitation topologiquement massive à (2+1) dimensions	18
2.3 La solution trou noir du type de Kerr de la GTM	21
3 Propriétés du trou noir du type Kerr de la GTM	24
3.1 La forme ADM de la métrique	24
3.2 Horizons d'évènement	26
3.3 Ergosphère	27
3.4 Singularité dans la structure causale	28
4 Etude de la diffusion des particules	30
4.1 Equation du mouvement	30

4.2	Etude de la diffusion	33
4.3	Conclusion	53
5	Structure globale	54
5.1	L'approche de l'horizon	54
5.2	Diagrammes de Penrose :	57
5.2.1	En absence des courbes fermées de genre temps ($\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}, \omega > 0$)	59
5.2.2	En présence des courbes fermées de genre temps ($\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$)	65
5.2.3	Cas particuliers "Trous noirs ayant un seul horizon"	68
5.3	Interprétation de la diffusion des particules à l'aide des diagrammes de Penrose	73
5.4	Conclusion	75
	Conclusion générale	76
	Annexes	
A	Quelques détails de calcul	78
A.1	Calcul des composantes de $g^{\mu\nu}$	78
A.2	Calcul des connexions affines	79
A.3	Le tenseur de Ricci	79
A.4	Diagrammes de Penrose	80
B	Glossaire	86
	Bibliographie	91

Introduction

En physique, le vocable *relativité* recouvre deux concepts différents. Celui de *la relativité restreinte* (qui a remplacé la relativité galiléenne) spécifie la structure cinématique de l'espace-temps [1]. Cette structure, d'abord suggérée par l'étude de l'électromagnétisme, a fourni un cadre général pour la description de toutes les autres lois fondamentales de la nature, à l'exception de la gravitation, dont la formulation constitue le domaine de *la relativité générale*. Cette dernière théorie apporte une modification profonde au concept d'espace-temps, lequel cesse d'être un stade neutre servant à l'existence et à l'évolution de la matière, pour devenir une entité dynamique, influencée par et influençant la distribution d'énergie qu'il contient, et évoluant au même titre que les autres champs physiques [2]. Cependant, la relativité générale est restée longtemps en marge du développement général de la physique, car elle apparaissait comme une théorie mal confirmée et peu utile. Cette situation a changé depuis les années 1960 grâce à plusieurs facteurs comme le développement de la gravitation expérimentale, l'exploration théorique du régime des champs gravitationnels rapidement variables (rayonnements gravitationnels). D'autre part, les observations astronomiques et la clarification de la structure de la solution de Schwarzschild au voisinage de l'horizon [3], ont provoqué un regain d'intérêt pour les trous noirs. De plus, les tentatives modernes d'unification des interactions fondamentales dans le cadre de la théorie quantique des champs ont donné lieu à des recherches nouvelles sur le rapport entre la relativité générale, la théorie quantique et les autres forces, en stimulant par là, la création ou le développement de nouvelles théories physiques comme la supergravité et la théorie des cordes.

Les obstacles devant la construction d'une théorie quantique de la gravitation sont généralement techniques, la relativité générale étant une théorie hautement non linéaire. A l'aide d'un calcul rigoureux et explicite, on a confirmé en 1984 que cette théorie est non renormalisable [4].

Les difficultés que présente la quantification de la relativité générale ont incité à

rechercher des modèles plus simples, mais qui gardent les aspects géométriques essentiels de la relativité générale. Il y a eu d'abord la gravitation à $(2 + 1)$ dimensions (2 d'espace et 1 de temps), avec ou sans constante cosmologique [5]. Elle possède une solution trou noir, construite par M. Banados, C. Teitelboim et J. Zanelli (notée BTZ) [6]. Cette solution est localement plate, mais possède un horizon d'événement, et des propriétés globales non triviales. Cette théorie est cependant non dynamique (elle ne possède pas de degrés de liberté dynamiques, comme le graviton à 4 dimensions).

Pour remédier à cela, S. Deser, R. Jackiw et S. Templeton [7], ont proposé la théorie de la gravitation topologiquement massive à trois dimensions. Le principe de cette théorie est d'ajouter à l'action d'Einstein à trois dimensions, un terme du à Chern-Simons, et appelé topologique car il ne contient pas la métrique de façon explicite. Le résultat est une théorie dynamique, qui décrit un "graviton" massif et de spin 2. Dans le cadre de cette théorie, une solution de type trou noir de Kerr, a été trouvée récemment par K. Ait moussa, G. Clement et C. Leygnac (notée ACL) [8].

Le but de ce travail est d'étudier en détail les différentes propriétés physiques de cette solution : horizons, érgosphère, singularités, mouvement des particules et structure globale, selon le plan suivant :

Le premier chapitre représente une introduction à la gravitation d'Einstein ordinaire à quatre dimensions, suivie par une brève description de la solution de Schwarzschild, la première solution aux équations d'Einstein, et qui décrit un trou noir. Nous finirons ce chapitre par une petite discussion sur les trous noirs.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la gravitation pure à $(2 + 1)$ dimensions ainsi que son extension, la théorie dynamique de la gravitation topologiquement massive à trois dimensions. Nous décrirons comment une extension de la solution de Vuorio [9] mène à la solution ACL. La solution ACL supprime le principal défaut de la solution de Vuorio : les singularités causales (courbes fermées de genre temps) situées en dehors de l'horizon.

Le troisième chapitre concerne les propriétés physiques du trou noir de type Kerr. La

forme ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [10] de la métrique nous permettra d'étudier les horizons d'événement, l'ergosphère et les singularités causales.

La diffusion des particules massives et des photons est décrit d'une façon rigoureuse dans le quatrième chapitre de ce mémoire, en utilisant la notion de potentiel effectif.

Le dernier chapitre sera consacré à l'étude de l'approche de l'horizon, et des solutions qu'on peut y apporter, en particulier l'extension de Kruskal et l'étude de la structure globale, par l'intermédiaire des diagrammes de Penrose.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion qui résumera nos résultats.

Chapitre 1

Introduction à la gravitation d'Einstein

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement quelques notions sur la relativité générale. Cela permettra de fixer le cadre général de notre étude et certaines notations. La convention de sommation est toujours appliquée : on fait la somme sur toutes les valeurs possibles d'un indice répété. Nous poserons $c = 1$ (c vitesse de la lumière dans le vide).

1.1 La relativité générale

La relativité générale est une théorie relativiste de l'interaction gravitationnelle, basée sur le principe de l'équivalence masse gravitationnelle-masse inertielle, qui permet de formuler toutes les autres lois de la physique, en présence d'un champ de gravitation.

L'identité masse grave-masse inerte constitue le fondement physique de la gravitation einsteinienne. Cette théorie s'appuie sur le fait que le rapport entre la masse inertielle qui apparaît dans l'équation fondamentale de la dynamique et la masse gravitationnelle qui est dans la loi d'attraction, est invariant quelque soit la substance du corps. Einstein a expliqué cette identité avec le principe d'équivalence.

En 1915, après avoir défini le principe d'équivalence, Einstein parvint à résoudre la

difficulté de la non-invariance de la loi de Poisson, qui donne le potentiel gravitationnel de Newton, en relativité restreinte. Pour cela, il abandonna le formalisme euclidien pour un autre plus complexe qui a été développé par le mathématicien B. Riemann (espaces courbes). L'espace-temps introduit dans la théorie de la relativité générale est alors une variété pseudo-riemannienne, dont la structure géométrique est subordonnée à la matière et aux champs (électromagnétique par exemple).

1.1.1 La géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne est définie sur un espace-temps, appelé variété, sur lequel est défini le carré de la distance entre deux points infiniment voisins, conventionnellement appelé ds^2 , comme forme quadratique non dégénérée de l'écart de leurs coordonnées, forme caractérisée par un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$ ($x^0 = t$ et x^1, x^2, x^3 coordonnées spatiales). x^μ est un système de coordonnées quelconque. Les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ varient d'un point à un autre. La signature est le nombre de valeurs propres positives et négatives de $g_{\mu\nu}(x)$; la somme de ces nombres est la dimension d de la variété. Ici $d = 4$ et la signature est $(-+++)$. On associe au système de coordonnées x^μ la base $\{\bar{e}_\mu\}$.

Connexion affine

En relativité générale, l'objet mathématique qui permet de lever la restriction aux systèmes de coordonnées inertiels est la connexion affine, en permettant l'usage des systèmes de coordonnées non inertiels quelconques. À ce titre, Einstein, dans sa théorie, la considère comme plus fondamentale que la métrique $g_{\mu\nu}$.

Le gradient des composantes d'un vecteur est affecté par la variation du vecteur lui-même, et par celle du système de coordonnées curviligne quelconque. On peut écrire en

général :

$$v^\mu{}_{;\nu} = v^\mu{}_{,\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\mu v^\sigma \quad (1.2)$$

où $v^\mu{}_{;\nu}$ exprime la variation dûe au vecteur seul, et $-\Gamma_{\sigma\nu}^\mu v^\sigma$ est dûe au système de coordonnées. ($v^\mu{}_{,\mu} \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu v^\mu$).

Les coefficients $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ sont appelés *connexions*, et expriment la variation du vecteur de base \bar{e}_σ par rapport à la coordonnée x^ν dans la direction \bar{e}_μ . $v^\mu{}_{;\nu}$ est un tenseur par rapport à ses deux indices, on l'appelle *dérivée covariante* :

$$v^\mu{}_{;\nu} = v^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu v^\sigma \quad (1.3)$$

La dérivée covariante d'une fonction scalaire est la dérivée ordinaire et la dérivation covariante d'un produit suit la formule habituelle. On en déduit :

$$u_{\mu;\nu} = u_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma u_\sigma \quad (1.4)$$

pour les composantes covariantes d'un vecteur. Pour la dérivation covariante de tenseur à plusieurs indices, il faut inclure un terme de connexion pour chaque indice. soit :

$$T^\mu{}_{\nu;\rho} = T^\mu{}_{\nu,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu T^\sigma{}_\nu - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T^\mu{}_\sigma \quad (1.5)$$

On note aussi la dérivée covariante par $D_\mu v^\nu \equiv v^\nu{}_{;\mu}$ (et $D_\mu v_\nu \equiv v_{\nu;\mu}$ et $D_\mu T^\rho{}_\sigma \equiv T^\rho{}_{\sigma;\mu}$).

Détermination de la connexion

En relativité générale, les connexions sont symétriques. On peut le montrer (voir ref. [11] p. 318) en utilisant le fait que la dérivée ordinaire $\partial_\mu \varphi$ d'une fonction scalaire φ est un vecteur.

Comme la dérivée covariante est un tenseur, c'est-à-dire :

$$D_\mu v_\nu = g_{\nu\alpha} D_\mu v^\alpha \quad (1.6)$$

on déduit alors la relation suivante :

$$g_{\mu\nu;\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} g_{\mu\rho} = 0 \quad (1.7)$$

qui est appelée condition de compatibilité entre la métrique et la connexion. On peut obtenir les connexions en fonction de la métrique, en inversant ces relations. Le résultat est :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (1.8)$$

où $g^{\rho\sigma}$ est le tenseur métrique inverse (défini par $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$), On appelle parfois $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ symbole de Christoffel et on le note parfois $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\sigma \end{smallmatrix} \right\}$.

Le tenseur de courbure

Pour un champ de vecteurs v^{μ} , les dérivations covariantes successives ne commutent pas, c'est-à-dire :

$$D_{\mu} D_{\nu} v^{\rho} \neq D_{\nu} D_{\mu} v^{\rho} \Leftrightarrow [D_{\mu}, D_{\nu}] v^{\rho} \neq 0 \quad (1.9)$$

Le résidu, inévitable, est défini par *le tenseur de courbure* :

$$[D_{\nu}, D_{\mu}] v^{\rho} = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} v^{\sigma} \quad (1.10)$$

où

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\rho} \Gamma_{\sigma\mu}^{\beta} \quad (1.11)$$

Par définition, $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ est le tenseur de Riemann ou tenseur de courbure. Si toutes les composantes de $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ sont nulles, alors l'espace-temps est plat. Lorsqu'il y a un champ gravitationnel, il y a toujours des composantes non nulles.

On définit également les composantes complètement covariantes du tenseur de Riemann par :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha} R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} \quad (1.12)$$

On montre alors facilement que :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.13a)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (1.13b)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu} \quad (1.13c)$$

Le tenseur de Riemann vérifie l'identité cyclique :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\rho\nu\beta\mu} = 0 \quad (1.14)$$

et l'identité de Bianchi :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} = 0 \Leftrightarrow D_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu} + D_\mu R_{\alpha\beta\nu\rho} + D_\nu R_{\alpha\beta\rho\mu} = 0 \quad (1.15)$$

Le tenseur de Ricci

Par contraction sur les indices du tenseur de courbure, on obtient le tenseur de Ricci. Explicitement :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\sigma\rho} R_{\sigma\mu\rho\nu} \quad (1.16)$$

D'après les symétries du tenseur de courbure, on a :

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.17)$$

Enfin on définit le scalaire de courbure par :

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

On l'appelle scalaire de courbure car sa valeur ne dépend pas du système de coordonnées.

1.1.2 Equation d'Einstein

Le champ d'équations d'Einstein est la généralisation relativiste de l'équation de Newton. Dans le vide, il découle d'un principe variationnel dont l'action est :

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x \quad (1.19)$$

où G est la constante de Newton, $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ et $g^{\mu\nu}$ est le tenseur inverse de $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$).

L'équation d'Einstein est dérivée à partir de la variation de l'action précédente par rapport à $g^{\mu\nu}$. Elle est donnée par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (1.20)$$

où $G_{\mu\nu}$ est appelé *le tenseur d'Einstein*. L'invariance de l'action par une transformation des coordonnées quelconque est exprimée par les identités de Bianchi contractées :

$$G_{\nu;\mu}^\mu = D_\mu \left(R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R \right) = 0 \quad (1.21)$$

En présence de la matière ou des champs dans l'espace, l'équation d'Einstein devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.22)$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière et/ou des champs et satisfait à la condition de conservation de l'énergie :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (1.23)$$

Les équations d'Einstein sont des équations non linéaire, qui expriment l'influence de la matière et des champs sur la géométrie de l'espace-temps.

La résolution des équations d'Einstein n'est pas une chose simple, mais des situ-

ations simples ont pu être étudiées analytiquement. Généralement, on s'intéresse aux solutions stationnaires avec des symétries spatiales. D'abord ce sont des modèles pour les objets au repos ou en rotation, en plus ils sont plus faciles à étudier que les systèmes non-stationnaires car lorsque la métrique est stationnaire et possède des symétries, les équations sont plus "simples" à résoudre.

1.2 La solution de Schwarzschild

La première solution exacte des équations d'Einstein, la plus connue et la plus simple (après l'espace-temps plat) à quatre dimensions, est découverte en 1916 par Karl Schwarzschild [12], et représente une solution unique décrivant la courbure de l'espace-temps (à quatre dimensions) à proximité d'un corps massif, statique et à symétrie sphérique. Elle s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.24)$$

M est la masse de la source et :

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.25)$$

Il est clair que cette métrique est singulière en $r = 0$ ($g_{tt} \rightarrow \infty$) et en $r = 2GM$ ($g_{rr} \rightarrow \infty$). Un calcul direct de la courbure scalaire indique que seule $r = 0$ est une singularité réelle ($R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \rightarrow \infty$) tandis que $r = 2GM$ n'est pas une vraie singularité, car pour $r = 2GM$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ est fini. Mais ce comportement singulier de la métrique en $r = 2GM$ est resté longtemps sans être expliqué de façon satisfaisante. C'est en 1960

que Kruskal [3] a résolu le problème. Il a défini de nouvelles coordonnées u et v par :

$$r \geq 2M \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{array} \right. \quad (1.26a)$$

$$r \leq 2M \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{array} \right. \quad (1.26b)$$

La métrique du même espace-temps devient alors :

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{(-\frac{r}{2M})} [dv^2 - du^2] + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.27)$$

où r est considéré comme une fonction de u et v définie par :

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad (1.28)$$

La métrique (1.27) ne présente aucune singularité sauf en $r = 0$. On a alors compris que $r = 2GM$ est une surface particulière, appelée horizon d'événements. Une particule massive ou un photon qui traverse cette surface vers $r = 0$ ne peut plus en ressortir, et ne peut que se diriger vers la singularité $r = 0$ où le champ est infini.

C'est comme ça qu'on définit un trou noir : une région de l'espace-temps d'où rien ne peut sortir, ni matière, ni rayonnement.

1.3 Les trous noirs

En 1963, Kerr [13] a pu obtenir une solution généralisant celle de Schwarzschild, décrivant le champ de gravitation produit par une sphère en rotation autour d'un de ses axes. Le trou noir de Kerr est stationnaire et axisymétrique (non sphériquement symétrique car la symétrie rotationnelle concerne un seul axe). La solution de Kerr et

celle de Schwarzschild représentent les seules solutions stationnaires à symétrie axiale et sphérique dans la relativité générale sans source.

La généralisation de la solution de Schwarzschild et de Kerr était représenté pour la relativité générale avec source et étudiée dans la théorie d'Einstein-Maxwell, par les solutions de Reissner-Nordstrøm [14] et de Kerr-Newman [15], avec charge électrique.

La solution trou noir la plus générale à quatre dimensions est la solution de Kerr-Newman qui représente un corps sphérique chargé en rotation. Elle est donnée par :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (1.29)$$

avec

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (1.30a)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (1.30b)$$

M est la masse, a le moment angulaire par unité de masse et Q la charge électrique de la source. On obtient la solution de Schwarzschild pour $a = Q = 0$, la solution de Reissner-Nordstrom pour $a = 0$, et la solution de Kerr pour $Q = 0$. En général, un trou noir est caractérisé par sa masse, son moment angulaire et sa charge électrique (voir ref. [16], p.876 et les références qui y sont citées).

D'un point de vue plus physique, il y a des cas où un trou noir peut se former. L'état final de l'évolution des étoiles se rencontre après l'achèvement de leurs sources d'énergie nucléaire. Elles finissent par condenser une masse énorme dans un rayon très petit, conduisant selon la masse initiale à une naine blanche, à une étoile à neutrons (ref. [16], Ch.32). L'existence d'une borne supérieure à la masse d'une naine blanche ou d'une étoile à neutrons est particulièrement importante, car quand une étoile froide dépasse cette borne supérieure (de l'ordre de 1,4 fois la masse du soleil), rien ne peut l'empêcher de s'effondrer complètement sur elle-même. Ce processus catastrophique conduit à la formation d'un trou noir, c'est-à-dire une structure particulière de l'espace-temps courbé

caractérisée par l'existence d'une frontière dite *horizon d'évènement* ou *surface du trou noir* entre une région extérieure, d'où il est possible d'émettre des signaux à l'infini, et une région intérieure, où tout signal émis reste piégé. Si on se rapproche de la singularité, la courbure de l'espace-temps devient infinie, et par conséquent, la description classique de l'espace et du temps perd son sens. Dans le cas de la formation du trou noir, cette singularité n'est pas visible de l'extérieur.

Chapitre 2

Gravitation topologiquement massive à $(2+1)$ dimensions

Dans ce deuxième chapitre, on va présenter la gravitation à $(2 + 1)$ dimensions et la gravitation topologiquement massive à trois dimensions (GTM), ensuite on décrit la solution trou noir de GTM qu'on va étudier.

2.1 Gravitation à trois dimensions

La gravitation tridimensionnelle est une théorie de relativité générale à trois dimensions, 2 d'espace et une de temps. Elle possède les mêmes fondations conceptuelles que la gravitation réaliste à quatre dimensions, mais elle est plus simple comme un modèle de travail mathématiquement et physiquement. Elle est devenue ces dernières années, un domaine actif des recherches. La relativité générale à $(2 + 1)$ dimensions n'a pas de degrés de liberté localement dynamiques : dans l'approximation linéaire, le "graviton" n'a pas de degré de liberté, c'est-à-dire que le tenseur métrique n'a pas de composante indépendante. Cela signifie aussi qu'il n'y a pas d'ondes gravitationnelles.

En effet, dans un espace-temps à $(2 + 1)$ dimensions, le tenseur de courbure peut-être exprimé en fonction du tenseur de Riemann, du tenseur métrique et du scalaire de

courbure (voir [17], p. 144) :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R \quad (2.1)$$

Cela implique que si les équations d'Einstein dans le vide (1.20) sont satisfaites (ce qui entraîne $R_{\mu\nu} = R = 0$), l'espace-temps est localement plat, car le tenseur de Riemann est nul. Mais la structure globale peut être différente de l'espace-temps de Minkowski. Dans le cas des équations d'Einstein avec constante cosmologique à $(2 + 1)$ dimensions :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

on obtient des espaces-temps à courbure constante. L'espace-temps est localement équivalent à l'espace de de Sitter ($\Lambda > 0$), ou anti-de Sitter ($\Lambda < 0$). Dans le cas $\Lambda = 0$, on retrouve le cas que nous avons précédemment. Physiquement, l'espace-temps à $(2 + 1)$ dimensions n'a pas de degrés de liberté locales : il n'y a pas des ondes gravitationnelles dans la théorie classique ni des gravitons en propagation dans la théorie quantique.

Une solution trou noir de la gravitation à trois dimensions (solution BTZ)

L'une des solutions des équations d'Einstein avec constante cosmologique à $(2 + 1)$ dimensions est la solution trou noir du type de Kerr, Trouvée par M. Bañados, C. Teitelboim et J. Zannelli (BTZ) [7]. Elle est du type de la solution de Kerr dans l'espace-temps à quatre dimensions (voir (1.29)), parcequ'elle possède un moment angulaire non nul. Cependant, il y a une différence importante entre les deux théories, le champ d'équations d'Einstein de la gravitation à trois dimensions impliquant que la courbure de l'espace-temps est constante à l'extérieur de la source, ce qui indique que la théorie est dynamiquement triviale.

La solution de BTZ est donnée par :

$$ds^2 = -N^2 dt^2 - N^{-2} dr^2 + r^2 (d\varphi + N^\varphi dt)^2 \quad (2.3)$$

où

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad (2.4a)$$

$$N^\varphi = -\frac{J}{2r^2} \quad (2.4b)$$

$\Lambda = -l^{-2}$ est la constante cosmologique. M et J sont deux constantes qu'on peut identifier respectivement comme la masse et le moment angulaire de la source.

Pour le trou noir BTZ, il existe deux horizons d'évènement $r_\pm(J)$, chacun d'eux satisfait l'équation :

$$-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} = 0 \quad (2.5)$$

Les fonctions "squared lapse" N^2 et "shift" N^φ s'expriment en fonction de r_+ et r_- par :

$$N^2 = \frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{r^2 l^2} \quad (2.6a)$$

$$N^\varphi = -\frac{r_+ r_-}{r^2 l} \quad (2.6b)$$

2.2 Gravitation topologiquement massive à (2+1) dimensions

La gravitation à (2 + 1) dimensions n'est pas dynamique. Pour avoir une théorie dynamique, Deser, Jackiw et Templeton ont proposé en 1982, la gravitation topologiquement massive à trois dimensions (GTM) [7].

La gravitation topologiquement massive (GTM) est une théorie dynamique de la gravitation à trois dimensions définie par une action composée de deux termes : le terme d'Einstein et un autre de Chern-Simons dit terme topologique (car il ne contient pas explicitement la métrique). Cette action est donnée par :

$$I = I_G + I_{CSG} \quad (2.7)$$

avec

$$I_G = -m \int d^3x \sqrt{|g|} (R + 2\Lambda) \quad (2.8)$$

et

$$I_{CSG} = -\frac{m}{2\mu_G} \int d^3x \sqrt{|g|} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta \left[\partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\nu\beta}^\tau \right] \quad (2.9)$$

où $m = \frac{1}{16\pi G}$ (G est la constante de Newton), g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$, Λ la constante cosmologique, μ_G est la constante de couplage de Chern-Simons appelée la masse topologique, et $\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$ est le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Cevita à trois dimensions : $\varepsilon^{\lambda\mu\nu} = |g|^{-\frac{1}{2}} \eta^{\lambda\mu\nu}$, avec $\eta^{012} = +1$.

Contrairement à la gravitation d'Einstein pure à trois dimensions d'espace-temps définie par l'action I_G seule, avec ou sans constante cosmologique, qui ne contient pas des degrés de liberté dynamiques, la gravitation topologiquement massive décrit, à cause du terme de Chern-Simons, la propagation d'une particule de masse μ_G et de spin 2. Cette théorie dynamique de la gravitation à trois dimensions a été proposée dans le cadre plus large des théories de jauge topologiquement massive dans l'espace-temps à trois dimensions. Les équations qui dérivent de l'action (2.7) sont

$$G_\nu^\mu + \frac{1}{\mu_G} C_\nu^\mu = 0 \quad (2.10)$$

où

$$G_\nu^\mu \equiv R_\nu^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\nu^\mu \quad (2.11)$$

est le tenseur d'Einstein et

$$C_\nu^\mu \equiv \varepsilon^{\mu\alpha\beta} D_\alpha \left(R_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\beta\nu} R \right) \quad (2.12)$$

est le tenseur de Cotton qui est symétrique.

Un des domaines de recherche actifs dans le domaine de la GTM est la recherche de solutions exactes aux équations (2.10). Une des solutions exactes est la solution de

Vuorio [9]. On va d'abord décrire cette solution, puis l'extension de cette solution qu'on va étudier plus tard.

La solution de Vuorio

Vuorio a cherché des solutions stationnaires ayant une symétrie axiale (qui est à trois dimensions l'équivalent de la symétrie sphérique à quatre dimensions). Il a remarqué que les équations (2.10) peuvent être résolues en supposant que la composante temporelle g_{tt} est constante, et il la normalise pour être identique à celle de Minkowski $g_{tt} = -1$, et en mettant $\mu = +3$, la métrique de Vuorio s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = - [d\tilde{t} - (2 \cosh \sigma + \tilde{\omega}) d\tilde{\varphi}]^2 + d\sigma^2 + \sinh^2 \sigma d\tilde{\varphi}^2 \quad (2.13)$$

où $\tilde{\varphi}$ est une variable angulaire périodique de période 2π . $\tilde{\omega}$ est une constante d'intégration prenant selon Vuorio la valeur (-2) pour que la métrique soit régulière. Une propriété particulière pour cette métrique indique que la composante angulaire :

$$g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} = \sinh^2 \sigma - (2 \cosh \sigma + \tilde{\omega})^2 \quad (2.14)$$

peut être positive, négative ou nulle. En effet, il est clair que $g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$ exprimé sous cette forme peut être écrite, en utilisant la propriété :

$$\cosh^2 \sigma - \sinh^2 \sigma = 1, \quad (2.15)$$

ainsi :

$$g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} = -3 \cosh^2 \sigma - 4\tilde{\omega} \cosh \sigma - \tilde{\omega}^2 - 1 \quad (2.16)$$

Le second membre est un polynôme du second degré, il suffit d'étudier le signe du déterminant qui lui est associé pour savoir si la composante $g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$ est positive, négative ou nulle. Alors $g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$ est toujours négative pour toute valeur de $\tilde{\omega}$ telle que $\tilde{\omega}^2 < 3$ ($\Delta' = \tilde{\omega}^2 - 3 < 0$),

et négative à l'extérieur d'un rayon critique σ_c tel que :

$$\sigma_c = \frac{-2\tilde{\omega} + \sqrt{\tilde{\omega}^2 - 3}}{3} \quad (2.17)$$

si $\tilde{\omega}^2 \succ 3$ ($\Delta' \succ 0$).

Comme la coordonnée angulaire $\tilde{\varphi}$ est périodique et le vecteur de Killing $\partial_{\tilde{\varphi}}$ est de genre temps, ce résultat implique la présence des courbes fermées de genre temps si $\sigma \succ \sigma_c$, ce qui constitue une singularité causale.

On peut voir que cette solution possède un horizon, qui est la valeur de σ telle que $N^2 = 0$. La fonction N^2 est définie ici par (voir (3.1) et (3.2) du chapitre (03)) :

$$N^2 = \left(1 + \frac{(2 \cosh \sigma + \tilde{\omega})^2}{g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}} \right) = \frac{\sinh^2 \sigma}{g_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}} \quad (2.18)$$

L'horizon est situé en $\sigma = 0$. Mais la solution ne peut pas être considérée comme un trou noir acceptable, à cause des singularités causales qui sont situées en dehors de l'horizon.

2.3 La solution trou noir du type de Kerr de la GTM

La solution de Vuorio (2.13) décrit donc un trou noir ayant des courbes fermées de genre temps situées à l'extérieur de l'horizon d'évènement. Cette position fait intervenir des effets de causalité indésirables. On dit alors que cette solution n'est pas acceptable comme solution trou noir (Pour une solution trou noir, on ne doit pas avoir des courbes fermées de genre temps. Si elles existent, elles doivent être cachées derrière l'horizon).

Cependant, pour résoudre ce problème de la causalité, K. Ait Moussa, G. Clément et C.Leygnac [8] ont proposé une transformation imaginaire de coordonnées conservant la

signature de la métrique Lorentzienne $(-++)$. Cette transformation est :

$$\tilde{t} = i\sqrt{3}t \quad (2.19a)$$

$$\tilde{\varphi} = i\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)\varphi \quad (2.19b)$$

où ρ_0 est une constante arbitraire positive .

Cette transformation mène à une métrique de la forme :

$$ds^2 = 3dt^2 - \frac{\rho_0^2}{3} [\sinh^2 \sigma - (2 \cosh \sigma + \tilde{\omega})^2] d\varphi^2 - 2\rho_0 (2 \cosh \sigma + \tilde{\omega}) dt d\varphi + d\sigma^2 \quad (2.20)$$

En fonction de $\cosh \sigma$, cette expression devient :

$$ds^2 = 3dt^2 + \frac{\rho_0^2}{3} [3 \cosh^2 \sigma + 4\tilde{\omega} \cosh \sigma + \tilde{\omega}^2 + 1] d\varphi^2 - 2\rho_0 (2 \cosh \sigma + \tilde{\omega}) dt d\varphi + d\sigma^2 \quad (2.21)$$

Pour avoir une forme plus simple de cette métrique, on effectue la transformation suivante :

$$\rho = \rho_0 \cosh \sigma \quad (2.22a)$$

$$\omega = \frac{\rho_0}{3} \tilde{\omega} \quad (2.22b)$$

Le choix de ρ est fait pour éviter la difficulté du calcul avec $\cosh \sigma$, car

$$d\rho^2 = (\rho^2 - \rho_0^2) d\sigma^2 \quad (2.23)$$

Cela fait aboutir alors à une solution *trou noir* à trois dimensions de type Kerr (car ce trou noir possède, en particulier, des propriétés similaires à celles de Kerr), s'écrit ainsi :

$$ds^2 = 3 \left[dt - \left(\frac{2\rho}{3} + \omega \right) d\varphi \right]^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{3} d\varphi^2 \quad (2.24)$$

où ρ est la nouvelle coordonnée radiale. φ représente encore la coordonnée angulaire de

période 2π . Les deux paramètres ω et ρ_0 sont reliés avec les paramètres physiques : la masse (l'énergie) et le moment angulaire du trou noir.

Cette nouvelle solution de champ d'équations précédente peut être aussi considérée comme une solution de type Vuorio en mettant conventionnellement $g_{tt} = +3$ (plutôt que -1). Nous détaillerons les propriétés de cette solution dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Propriétés du trou noir du type Kerr de la GTM

Le but de ce troisième chapitre est de faire une étude détaillée des propriétés physiques du trou noir associé à la solution aux équations d'Einstein de la gravitation topologiquement massive à trois dimensions, ayant, comme on va montrer dans les paragraphes suivants, une propriété très particulière concernant l'ergosphère, ainsi que les courbes fermées de genre temps. Tout d'abord, on commence cette description par exprimer la métrique sous la forme ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [10], qui nous permettra de faire notre étude.

3.1 La forme ADM de la métrique

Pour pouvoir étudier les propriétés de la métrique (2.24), nous montrons rapidement ici, comment on arrive à la forme ADM de la métrique. Cette forme est aussi utilisée pour établir la formulation hamiltonienne de la relativité générale [10] (que nous n'utilisons pas ici).

N'importe quelle métrique peut se mettre sous la forme :

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} N^2 &= (-g_{tt})^{-1} \\ N_i &= g_{ti} \\ N^i &= h^{ij} N_j \\ h_{ij} &= g_{ij} \\ h^{ij} h_{jk} &= \delta_k^i \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les indices latins i, j, k, \dots sont des indices d'espace. Ici, ils prennent les valeurs 1 et 2 ($x^1 = r$ et $x^2 = \varphi$). En utilisant la forme (2.24) de la métrique, on peut déterminer la métrique puis les fonctions N^2 , N^i , et h_{ij} . On obtient alors :

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} \\ h_{11} &= \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad ; \quad N_1 = 0 \\ h_{22} &= r^2 \quad ; \quad N_2 = -(2\rho + 3\omega) \\ h_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

où

$$r^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3} \quad (3.4)$$

La métrique (2.24) s'écrit alors :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} dt^2 + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} d\rho^2 + r^2 \left(d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2} dt \right)^2 \quad (3.5)$$

3.2 Horizons d'évènement

On remarque dans l'expression (3.5) que $g_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2}$ est singulière pour $\rho^2 = \rho_0^2$. Cela suggère que c'est une singularité. En fait, on peut aussi voir que la fonction $N^2(\rho)$ s'annule pour

$$\rho_{\pm} = \pm\rho_0 \quad (3.6)$$

Cela (les zéros de $N^2(\rho)$) détermine la position des horizons d'évènement qui définissent un trou noir. Les surfaces isotropes $\rho = \pm\rho_0$ représentent les frontières du trou noir. Ici (à 2 + 1 dimensions), ce sont des cercles.

Pour certaines valeurs des paramètres ω et ρ_0 , notre métrique peut avoir un seul horizon. Dans le cas $\omega = \frac{2\rho_0}{3}$, la métrique (3.5) prend la forme (ADM) :

$$ds^2 = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \frac{5}{3}\rho_0} dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} + \left(\rho + \frac{5}{3}\rho_0\right) (\rho + \rho_0) \left(d\varphi - \frac{2dt}{\rho + \frac{5}{3}\rho_0}\right)^2 \quad (3.7)$$

L'horizon d'évènement est situé en $\rho = \rho_0$ ($N^2(\rho_0) = 0$). L'autre valeur $\rho = -\rho_0$, pour laquelle $g_{\rho\rho}$ est singulière, est une singularité mais pas un horizon ($N^2(-\rho_0) \neq 0$).

Pour $\rho_0 = 0$, les deux horizons d'évènement coïncident en une seule valeur $\rho = 0$. La métrique devient :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{r'^2} dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + r'^2 \left(d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r'^2} dt\right)^2 \quad (3.8)$$

où

$$r'^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2$$

Finalement, le dernier cas particulier est le cas où $\rho_0 = \omega = 0$. Cette fois, il ne s'agit pas d'une solution trou noir. En effet, la métrique se réduit à :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2 \left(d\varphi - \frac{2}{\rho} dt\right)^2 \quad (3.9)$$

Comme $N^2(\rho) = 1$, il n'y a pas d'horizon et ce n'est pas un trou noir.

3.3 Ergosphère

L'espace-temps décrit par la métrique (3.5) possède une ergosphère : c'est une région de l'espace-temps où aucun observateur ne peut rester statique et doit nécessairement tourner dans le même sens que la source. Considérons un observateur à une "distance" ρ fixée ($d\rho = 0$). Comme sa ligne d'univers doit être de genre temps ($ds^2 < 0$ avec la signature $(-+++)$), on doit avoir :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} dt^2 + r^2 \left(d\varphi - \frac{2\rho - 3\omega}{r^2} dt \right)^2 < 0 \quad (3.10)$$

soit, en divisant par dt^2 :

$$-\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} + r^2 \left(\Omega - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2} \right)^2 < 0 \quad (3.11)$$

où $\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ est la vitesse de rotation de l'observateur. L'expression (3.11) peut encore s'écrire :

$$f(\rho) = r^2 \Omega^2 - 2(2\rho + 3\omega)\Omega + 3 < 0 \quad (3.12)$$

Le discriminant de $f(\rho)$ est $\delta' = \rho^2 - \rho_0^2$. Donc si $\rho > \rho_0$, et dans le cas $\omega > 0$ (alors $r^2 > 0$ si $\rho > \rho_0$), l'observateur reste sur une trajectoire de genre temps si et seulement si :

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+ \quad (3.13)$$

où

$$\Omega_{\pm} = \frac{(2\rho + 3\omega) \pm \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}{r^2} \quad (3.14)$$

Les valeurs Ω_{\pm} sont toutes les deux positives. Tout observateur situé à une valeur donnée de ρ ($\rho > \rho_0$) doit nécessairement avoir une vitesse angulaire positive. Ceci caractérise

la région de l'espace-temps qu'on appelle ergosphère. Dans l'ergosphère, il ne peut pas y avoir d'observateur statique. Ceci se retrouve aussi dans la solution de Kerr à quatre dimensions. Dans ce dernier cas (voir ref [16] ch.33), l'ergosphère est située entre 2 rayons ρ_h et ρ_{erg} . Dans notre cas, l'ergosphère s'étend jusqu'à l'infini ($\rho > \rho_0$). En particulier, les horizons ($\rho = \pm\rho_0$) trouvent également avec une vitesse angulaire $\Omega_{h\pm}$:

$$\Omega_{h\pm} = \frac{3}{(\pm 2\rho_0 + 3\omega)} \quad (3.15)$$

3.4 Singularité dans la structure causale

Un type de singularité dans la structure causale est l'existence de courbes fermées de genre temps. Si ces courbes existent, cela veut dire que l'on peut partir d'un événement dans l'espace-temps et revenir à cet événement après avoir suivi une trajectoire de genre temps, ce qui viole la causalité. Ce type de singularité existe par exemple dans la solution de Kerr (1.29), mais elle est cachée derrière l'horizon. Si, comme dans la solution de Vuorio (2.13), il y a des courbes fermées de genre temps en dehors de l'horizon (donc "visibles"), la solution n'est pas acceptable.

Dans le cas de notre solution (3.5), si on pose $dt = d\rho = 0$, alors :

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 = g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (3.16)$$

Si $g_{\varphi\varphi} < 0$ ($ds^2 < 0$ de genre temps), et comme φ est périodique de période 2π , on peut avoir des courbes fermées de genre temps. Il faut donc discuter le signe de $r^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3}$ suivant les valeurs de ω et ρ_0 . On peut distinguer les cas suivants, suivant le signe du discriminant $\delta' = \omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3}$:

- si $\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}$, $r^2 > 0$ pour toute valeur de ρ et il n'y a pas de courbe fermée de genre temps.

- si $\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$, $r^2 < 0$ si $\rho_{c-} < \rho < \rho_{c+}$ où :

$$\rho_{c\pm} = -2\omega + \sqrt{\omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3}} \quad (3.17)$$

Il peut alors exister des courbes fermées de genre temps. Pour éviter ces courbes fermées pour $\rho > \rho_0$, on choisit $\omega > 0$. On a alors :

$$\rho_{c-} < \rho_{c+} < \rho_0 \quad (3.18)$$

La région $\rho_{c-} < \rho < \rho_{c+}$ où il existe des courbes fermées de genre temps est alors cachée derrière l'horizon $\rho = \rho_0$ et sont inobservables. Ce type de trou noir qui n'a pas de singularité visible, en dehors de l'horizon est acceptable, contrairement à la solution de Vuorio (2.13).

On se limitera dans la suite au cas $\omega > 0$.

Chapitre 4

Etude de la diffusion des particules

L'objectif de ce chapitre est de faire une analyse rigoureuse du mouvement géodésique des particules massives et des photons dans le champ de gravitation donnée par la métrique (ACL). Cette analyse se fait afin de bien comprendre la structure locale de l'espace-temps et répondre à quelques questions concernant le comportement des trajectoires des particules, notamment au bord du trou noir (à proximité de l'horizon d'évènement) : soit elles vont être attrapées par la singularité, ou réfléchies et restent toujours à l'extérieur du trou noir (diffusion). Nous nous limiterons à la diffusion et pmettrons les états liés.

4.1 Equation du mouvement

Le mouvement des particules massives et des photons autour du trou noir à trois dimensions est déterminé par les géodésiques de l'espace-temps. L'utilisation des constantes du mouvement simplifie les équations des géodésiques, comme dans le cas à quatre dimensions.

Pour écrire les trajectoires des particules en utilisant les équations des géodésiques,

on a besoin des composantes contravariantes de la métrique données par :

$$g^{tt} = -\frac{r^2}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (4.1a)$$

$$g^{\rho\rho} = \rho^2 - \rho_0^2 \quad (4.1b)$$

$$g^{\varphi\varphi} = -\frac{3}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (4.1c)$$

$$g^{t\varphi} = -\frac{2\rho + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (4.1d)$$

Les équations des géodésiques donnent les équations du mouvement suivantes :

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{2(2\rho + 3\omega)}{\rho^2 - \rho_0^2} \frac{dt}{ds} \left[\frac{d\rho}{ds} - (\rho + 2\omega) \frac{d\varphi}{ds} \right] + 2r^2 \frac{dt}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} - \frac{\rho}{\rho^2 - \rho_0^2} \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 + (\rho^2 - \rho_0^2) \frac{d\varphi}{ds} \left[2 \frac{dt}{ds} - (\rho + 2\omega) \frac{d\varphi}{ds} \right] = 0 \quad (4.2b)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \frac{d\rho}{ds} \left[3 \frac{dt}{ds} - 2(\rho + 3\omega) \frac{d\varphi}{ds} \right] = 0 \quad (4.2c)$$

Ces équations décrivent le mouvement des particules dans la géométrie donnée par la métrique précédente autour du trou noir. Il est clair qu'elles sont des équations différentielles non linéaires du second ordre, alors la dérivation des constantes du mouvement à partir d'elles sera compliquée. Une méthode plus simple et plus pratique est de considérer le fait que les composantes de la métrique sont indépendantes des variables associées aux constantes de mouvement :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} = 0 \quad (4.3)$$

où $i \equiv t, \rho, \varphi$. Alors l'indépendance de la métrique par rapport aux variables temporelle et angulaire t et φ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.4)$$

implique l'existence de deux constantes de mouvement :

$$p_t = C^{te} = -E \quad (4.5a)$$

$$p_\varphi = C^{t\varphi} = L \quad (4.5b)$$

E et L représentent respectivement l'énergie et le moment angulaire par unité de masse de la particule, elles sont définies par :

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu} p^\nu \quad (4.6)$$

où λ est un paramètre affine représentant le temps propre dans le cas d'une particule massive.

Dans notre cas, un calcul très simple peut nous conduire aux expressions :

$$-E = 3 \frac{dt}{d\lambda} - (2\rho + 3\omega) \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (4.7a)$$

$$L = -(2\rho + 3\omega) \frac{dt}{d\lambda} + r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (4.7b)$$

d'où on peut dériver l'expression de $\frac{dt}{d\lambda}$ et $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ en fonction de E et L :

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{Er^2 - (2\rho + 3\omega)L}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (4.8a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{E(2\rho + 3\omega) - 3L}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (4.8b)$$

On utilisera ces expressions plus loin.

En posant $ds^2 = \varepsilon d\lambda^2$, avec $\varepsilon = -1$ pour une particule massive et $\varepsilon = 0$ pour un photon, on a l'intégrale première :

$$\varepsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (4.9)$$

On peut décrire alors le mouvement des particules dans la géométrie donnée par la métrique, et par conséquent on peut analyser quel genre de mouvement autour du trou noir peut être décrit par ces particules.

Les quantités conservées permettent de bien comprendre les orbites des particules. On obtient après un développement explicite de l'expression de l'intégrale première (4.9), que :

$$\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 = V(\rho) = (E^2 + \varepsilon)\rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 + \rho_0^2\left(\frac{E^2}{3} - \varepsilon\right) \quad (4.10)$$

avec $\bar{l} = L - E\omega$ qui peut être nul, positif ou négatif.

On va traiter trois types d'équations des géodésiques selon les valeurs de ε ($0, -1$), pour les particules de genre lumière ou de genre temps, respectivement. Pour une particule massive, on s'intéresse aux géodésiques de genre temps, et on va considérer également le cas d'une particule sans masse (photon).

4.2 Etude de la diffusion

L'équation (4.10) permet de déterminer les mouvements possibles. Comme $\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 \geq 0$, la particule ou le photon ne peuvent aller que dans les régions où $V(\rho) \geq 0$. On obtient alors les cas de diffusion ou de capture.

Le potentiel $V(\rho)$ est donné sous forme d'une équation du second ordre qui peut être résolue par une étude analytique simple afin de tracer les courbes typiques qui les représentent. Les trajectoires des particules (massives ou sans masses), se déplaçant avec le moment angulaire L et portant l'énergie E , se passent là où $V(\rho) \geq 0$.

Avant de traiter le cas général, on passe par une étude des cas particuliers suivant les paramètres ρ_0 et ω . Explicitement :

Cas 1 : $\omega = 0, \rho_0 = 0$

Il est clair que ce cas ne représente pas un trou noir, car la métrique ne possède pas des horizons (la fonction $N^2 = C^{te}$, voir (3.10)).

► **photons :**

On réécrit l'équation des géodésiques (4.10) en faisant $\varepsilon = 0$ pour avoir :

a) $\boxed{L \neq 0}$:

$$V(\rho) = E^2 \rho^2 - 4EL\rho + 3L^2 \quad (4.11)$$

Cette expression représente une parabole ayant un minimum au point $(\bar{\rho}, V(\bar{\rho}))$, où :

$$\bar{\rho} = 2\frac{L}{E} \quad (4.12a)$$

$$V(\bar{\rho}) = -L^2 \quad (4.12b)$$

$V(\bar{\rho})$ est négatif pour toute valeur de L . La courbe représentant $V(\rho)$ coupe l'axe des ρ aux points ρ_+ et ρ_- tels que :

$$\rho_+ = 3\frac{L}{E} \quad (4.13a)$$

$$\rho_- = \frac{L}{E} \quad (4.13b)$$

La figure (4.1) représente l'allure du potentiel $V(\rho)$. Comme $V(\rho) < 0$ si $\rho < \rho_+$ et $\rho_+ > 0$, un photon (rayon de lumière) ne peut pas dépasser $\rho = \rho_+$. Le point ρ_+ s'appelle donc *le point de retour*. On dit qu'on a une *diffusion* du photon en ρ_+ . Le photon vient de $+\infty$ et repart vers $+\infty$.

b) $\boxed{L = 0}$:

À ce moment, le minimum se situe à l'origine, comme il est montré par la figure (4.2), et représente aussi la racine double de l'équation :

$$V(\rho) = E^2 \rho^2 = 0 \quad (4.14)$$

On ne peut pas déterminer si le photon traverse $\rho = 0$ ou pas. Pour savoir si la particule traverse l'origine ou non, on étudie la variation de ρ en fonction du paramètre

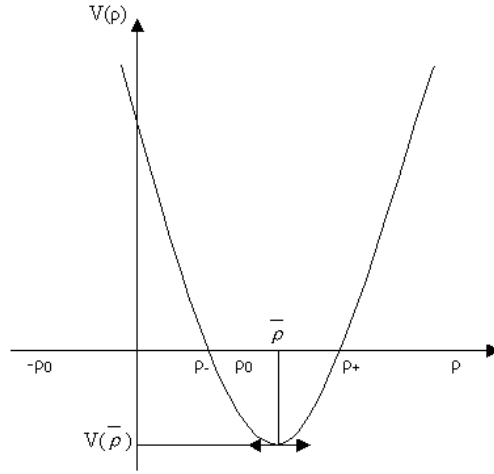


FIG. 4-1 – Cas $\omega = 0$, $\rho_0 = 0$, photons et particules massives pour $L \neq 0$.

affine λ .

En effet, d'après l'équation de la trajectoire des photons (4.11), on a :

$$\frac{d\rho}{\rho} = E d\lambda \quad (4.15)$$

c'est-à-dire :

$$\rho = C^{te} \exp(E\lambda) \quad (4.16)$$

Cette forme permet de définir les limites suivantes :

$$\lambda \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty \quad (4.17a)$$

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow C^{te} \quad (4.17b)$$

$$\lambda \rightarrow -\infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0 \quad (4.17c)$$

Donc, quand le paramètre affine λ varie de $+\infty$ à $-\infty$, ρ varie de $+\infty$ à 0. Cela indique que les géodésiques complètes sont seules qui correspondent aux valeurs de ρ variant de $+\infty$ à 0. Alors les photons ne peuvent jamais dépasser $\rho = 0$. L'origine dans

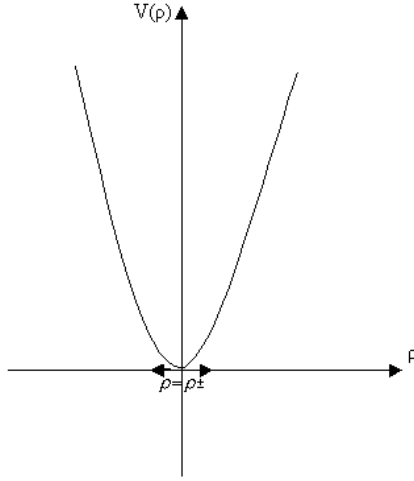


FIG. 4-2 – Cas $\omega = 0$, $\rho_0 = 0$, photons et particules massives pour $L = 0$.

ce cas est *une singularité*.

► **particule massive :**

a) $L \neq 0$:

Pour les particules massives, $\varepsilon = -1$ et le potentiel prend $V(\rho)$ la forme :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 - 4EL\rho + 3L^2 \quad (4.18)$$

$\bar{\rho}$ et $V(\bar{\rho})$ sont donnés par :

$$\bar{\rho} = 2\frac{EL}{E^2 - 1} \quad (4.19a)$$

$$V(\bar{\rho}) = -\frac{3L^2 + E^2L^2}{E^2 - 1} \quad (4.19b)$$

donc le minimum prend une position négative et $V(\rho)$ est représenté dans la figure (4.1).

On détermine les zéros de l'équation des géodésiques ont les expressions suivantes :

$$\rho_{\pm} = \frac{L(2E \pm \sqrt{E^2 + 3})}{E^2 - 1} \quad (4.20)$$

Ces expressions sont strictement positives car $L \succ 0$, donc on est encore une fois dans le cas de la figure (4.1), et il y a diffusion par trou noir en ρ_+ .

b) $\boxed{L = 0}$:

Pour un moment angulaire nul, on trouve les mêmes propriétés pour les particules massives que pour les photons car l'équation des orbites s'écrit ainsi :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 \quad (4.21)$$

à partir de laquelle, on détermine après avoir intégré l'équation (4.21), l'expression de ρ suivante :

$$\rho = C^{te} \exp\left(\sqrt{E^2 - 1}\tau\right) \quad (4.22)$$

où τ est le temps propre pour les particules massives. De plus, si τ tend vers $\pm\infty$, ρ prend sa valeur minimale 0 ou tend également vers l'infini. Ce résultat implique encore une fois que les géodésiques s'arrêtent en $\rho = \rho_0$ qui est une singularité.

Cas 2 : $\omega \neq 0, \rho_0 = 0$

Ce cas correspond à un trou noir ayant un horizon double en $\rho_0 = 0$.

► **photons** :

A cause de la forme un peu compliquée de l'expression du potentiel, on commence par le cas le plus simple où les photons se déplacent avec un moment angulaire nul.

a) $\boxed{L = 0}$:

On a :

$$V(\rho) = E^2(\rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2) \quad (4.23)$$

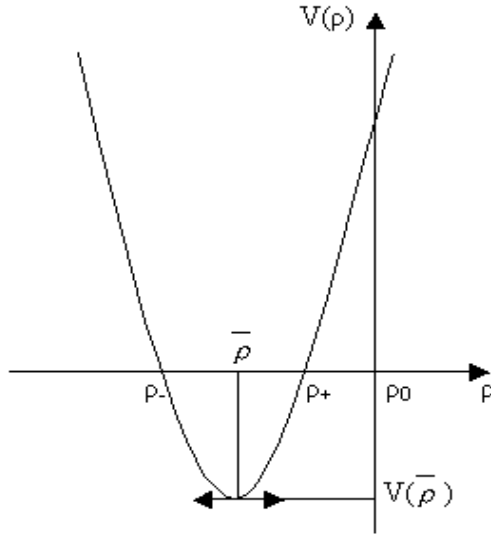


FIG. 4-3 – Cas $\omega \neq 0$, $\rho_0 = 0$, photons pour $L = 0$.

Le minimum possède les coordonnées :

$$\bar{\rho} = -2\omega \quad (4.24a)$$

$$V(\bar{\rho}) = -\omega^2 E^2 \quad (4.24b)$$

qui sont négatives. De même pour les solutions de l'équation $V(\rho) = 0$, ayant les expressions :

$$\rho_+ = -\omega \quad (4.25a)$$

$$\rho_- = -3\omega \quad (4.25b)$$

La courbe prend alors la forme de la figure (4.3).

Un photon venant de $\rho = \pm\infty$ ne peut aller que dans la région $V(\rho) \geq 0$. Il est diffusé en ρ_+ , après avoir traversé l'horizon en $\rho = \rho_0 = 0$.

D'après l'équation (4.23), on a :

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = E\sqrt{\rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2} \quad (4.26)$$

c'est-à-dire, après intégration :

$$\rho = \omega (\cosh E\lambda - 2) \quad (4.27)$$

Il est alors clair que $\forall\lambda, \rho \geq \rho_+ (\rho_+ = -\omega)$. D'autre part, $\rho \rightarrow +\infty$ si $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Donc le photon repart vers $\rho = +\infty$ en retraversant $\rho = 0$, mais dans un univers différent de l'univers de départ. Ce cas (et les cas équivalents) sera plus clair, dans le chapitre 5 avec les diagrammes de Penrose.

b) $\boxed{L \neq 0}$:

L'expression du potentiel est :

$$V(\rho) = E^2\rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 \quad (4.28)$$

où $\bar{l} = L - \omega E$.

Les coordonnées du minimum sont :

$$\bar{\rho} = 2\frac{\bar{l}}{E} \quad (4.29a)$$

$$V(\bar{\rho}) = -\bar{l}^2 \quad (4.29b)$$

Le calcul du discriminant permet de déduire les racines de l'équation $V(\rho) = 0$, si elles existent :

$$\delta' = E^2\bar{l}^2 \quad (4.30)$$

est toujours positif. Alors il existe deux racines ρ_{\pm} :

$$\rho_- = \frac{\bar{l}}{E} \quad (4.31a)$$

$$\rho_+ = 3\frac{\bar{l}}{E} \quad (4.31b)$$

Leur position dépend du signe de \bar{l} . On distingue alors trois cas :

- $\bar{l} \succ 0 \Leftrightarrow L \succ \omega E$:

On a dans ce cas, une diffusion par le trou noir en ρ_+ car les racines ρ_{\pm} sont positives.

On aura alors la courbe de la figure (4.1) .

- $\bar{l} \prec 0 \Leftrightarrow L \prec \omega E$:

La courbe prenant la forme de la figure (4.3), coupe l'axe des ρ en deux points négatifs, alors un photon vient de l'infini ne peut atteindre ρ_+ qu'à l'intérieur du trou noir après avoir traverser l'horizon $\rho_0 = 0$. Nous aurons alors les mêmes conclusions que dans le cas $L = 0$.

- $\bar{l} = 0 \Leftrightarrow L = \omega E$:

Ce cas est correspond à la figure (4.2) où $\bar{\rho} = \rho_{\pm}$ prend sa position à l'origine.

Pour connaitre le comportement du photon au voisinage de $\rho_{\pm} = \rho_0$, on détermine le paramètre affine λ sur la géodésique et $\frac{d\varphi}{d\rho}$.

L'expression (4.28) de $V(\rho)$ donne :

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = E\rho \Rightarrow \rho = C^{te} \exp(E\lambda)$$

D'autre part, d'après (4.8b), (4.23) et (4.28), on a (avec $L = \omega E$) :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{2}{\rho^2} \Rightarrow \varphi(\rho) = -\frac{2}{\rho} + C^{te}$$

Donc ρ varie de $+\infty$ à 0 quand λ varie de $+\infty$ à $-\infty$, et $\varphi \rightarrow \infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. Dans ce cas, le photon parcourt une géodesique complète (λ peut aller jusqu'à $-\infty$), et le photon effectue un nombre infini de tours autour de $\rho = 0$. C'est le phénomène

d'Orbiting.

► **particule massive** :

L'équation des géodésiques correspond à $\varepsilon = -1$, est donnée par :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 \quad (4.34)$$

avec $E^2 \succ 1$ (énergie supérieure à l'énergie de masse au repos).

a) $\boxed{L = 0}$:

On a les mêmes conclusions que les photons.

b) $\boxed{L \neq 0}$:

Le minimum de la courbe $V(\rho)$ dans ce cas est au point :

$$\bar{\rho} = 2\bar{l} \left(\frac{E}{E^2 - 1} \right) \quad (4.35a)$$

$$V(\bar{\rho}) = -\bar{l} \left(\frac{E^2 + 3}{E^2 - 1} \right) \quad (4.35b)$$

où le signe de $\bar{\rho}$ est déterminé à partir de \bar{l} . De même pour les racines de l'équation $V(\rho) = 0$ prenant l'expression :

$$\rho_{\pm} = \frac{\bar{l}}{E^2 - 1} \left(2E \pm \sqrt{E^2 + 3} \right) \quad (4.36)$$

De la même manière que les photons, on discute suivant \bar{l} les différents cas qui peuvent exister. On obtient finalement les mêmes conclusions pour les trois situations : $\bar{l} \prec 0$, $\bar{l} = 0$ et $\bar{l} \succ 0$ que pour le photon.

Cas 3 : $\omega = 0, \rho_0 \neq 0$

Le potentiel $V(\rho)$ est donnée par :

$$V(\rho) = (E^2 + \varepsilon)\rho^2 - 4EL\rho + 3L^2 + \rho_0^2 \left(\frac{E^2}{3} - \varepsilon \right) \quad (4.37)$$

où $\bar{l} = L$ et $E^2 \succ \varepsilon$.

► **photons** :

En posant $\varepsilon = 0$, le potentiel sera de la forme suivante :

$$V(\rho) = E^2 \rho^2 - 4EL\rho + 3L^2 + \frac{\rho_0^2}{3} E^2 \quad (4.38)$$

Cette expression permet de tracer une parabole ayant un minimum au point $(\bar{\rho}, V(\bar{\rho}))$, tel que :

$$\bar{\rho} = 2\frac{L}{E} \quad (4.39a)$$

$$V(\bar{\rho}) = \frac{\rho_0^2}{3} E^2 - L^2 \quad (4.39b)$$

Si on calcul le discriminant $\delta' = E^2 \left(L^2 - \frac{\rho_0^2 E^2}{3} \right)$, on trouve qu'il peut être positif, négatif ou nul selon E et L :

$$1) \frac{L^2}{E^2} \succ \frac{\rho_0^2}{3} :$$

Dans ce cas $\delta' \succ 0$, donc il existe deux zéros positifs pour $V(\rho)$ possédant l'expression suivante :

$$\rho_{\pm} = \frac{2L \pm \sqrt{L^2 - \frac{\rho_0^2}{3} E^2}}{E} \quad (4.40)$$

mais $V(\bar{\rho}) \prec 0$, donc le minimum est sous l'axe des ρ comme il est montré dans la figure (4.1). Comme $V(\rho)$ est toujours positif ou nul, les photons peuvent être diffusés en ρ_+ ou pénétrer dans le trou noir selon la position de l'horizon ρ_0 par rapport à ρ_+ :

- *position de ρ_0 par rapport à ρ_{\pm} :*

Pour savoir où se situe l'horizon d'évènement par rapport aux valeurs ρ_{\pm} , on suit les étapes suivantes :

Il est clair que $V(\rho_0)$ est positif si :

$$\rho_0 \succ \rho_+ \text{ ou } \rho_0 \prec \rho_- \quad (4.41)$$

et négatif si :

$$\rho_- \prec \rho_0 \prec \rho_+ \quad (4.42)$$

Or

$$V(\rho_0) = \frac{(2\rho_0 E - 3L)^2}{3} \quad (4.43)$$

qui est positif pour toute valeur de E et L . Donc $\rho_0 \succ \rho_+$ ou $\rho_0 \prec \rho_-$. Pour bien préciser sa position exacte, on compare ρ_0 avec la demi-somme des deux racines ρ_+ et ρ_- telle que :

$$\frac{\rho_+ + \rho_-}{2} = 2\frac{L}{E} \quad (4.44)$$

Comme $\rho_0 \prec \sqrt{3}\frac{E}{L} \prec 2\frac{E}{L}$, on a $\rho_0 \prec \rho_- \prec \rho_+$. Le photon est donc effectué en $\rho = \rho_+$, avant d'arriver à l'horizon. Ce cas est représenté par la figure (4.1).

$$2) \frac{L^2}{E^2} \prec \frac{\rho_0^2}{3} :$$

Donc ρ_{\pm} n'existent pas car $\delta' \prec 0$ mais $V(\rho) \succ 0$. Alors le potentiel prend la forme de la parabole montrée par la figure (4.4), parce que $\bar{\rho}$ est positif.

Les photon dans ce cas sont capturés par le trou noir.

$$3) \frac{L^2}{E^2} = \frac{\rho_0^2}{3} :$$

La courbe $V(\rho)$ coupe l'axe des ρ à une racine double représentant le minimum $\bar{\rho}$ supérieur à ρ_0 , il s'agit d'une réflexion en $\bar{\rho}$. Ce cas est représenté par la figure (4.5).

L'étude du paramètre affine $\rho(\lambda)$ et $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ donnent (avec $L^2 = \frac{\rho_0^2 E^2}{3}$) :

$$\begin{aligned} \rho &= C^{te} \exp(E\lambda) + 2\frac{L}{E} \\ \frac{d\varphi}{d\rho} &= \frac{2E\rho - 3L}{(\rho^2 - \rho_0^2)(E\rho - 2L)} \end{aligned}$$

On voit que $\rho \rightarrow 2\frac{L}{E}$ si $\lambda \rightarrow -\infty$ et $\frac{d\varphi}{d\rho} \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 2\frac{L}{E}$. On a donc un phénomène d'orbiting autour de $\bar{\rho} = 2\frac{L}{E}$ (même cas que les photons pour $\omega \neq 0$, $\rho_0 = 0$ et $L = \omega E$).

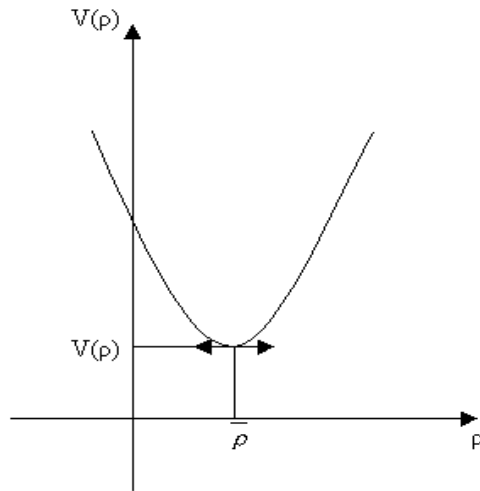


FIG. 4-4 – Cas $\omega = 0$ et $\rho_0 \neq 0$, photons pour $\frac{L^2}{E^2} < \frac{\rho_0^2}{3}$

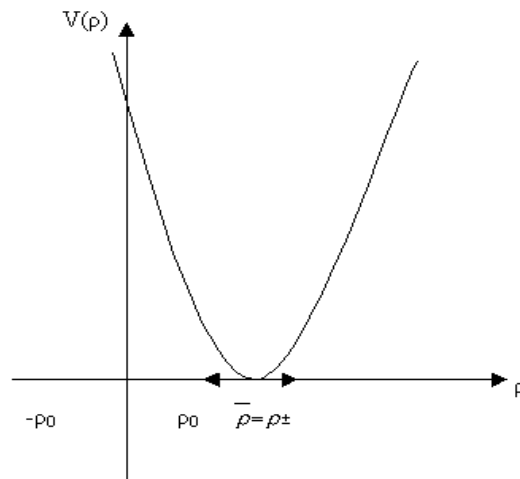


FIG. 4-5 – Cas $\omega = 0$ et $\rho_0 \neq 0$, photons pour $\frac{L^2}{E^2} = \frac{\rho_0^2}{3}$

► particules massives :

Soit l'expression :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 - 4EL\rho + 3L^2 + \rho_0^2 \left(\frac{E^2}{3} + 1 \right) \quad (4.46)$$

où le potentiel possède un minimum au point suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} = 2 \frac{EL}{E^2 - 1} \\ V(\bar{\rho}) = -\frac{1}{3} \left(\frac{E^2 + 3}{E^2 - 1} \right) [3L^2 - \rho_0^2 (E^2 - 1)] \end{array} \right. \quad (4.47)$$

De la même façon, d'après l'expression de δ tel que :

$$\delta = \frac{1}{3} (E^2 + 3) [3L^2 - \rho_0^2 (E^2 - 1)] \quad (4.48)$$

On peut distinguer trois cas suivant le signe de $\left(\frac{L^2}{E^2 - 1} - \frac{\rho_0^2}{3} \right)$. L'étude sera alors identique au cas du photon en remplaçant E^2 par $(E^2 - 1)$.

Cas général : $\omega \neq 0, \rho_0 \neq 0$

Le potentiel effectif donné dans le cas générale par :

$$V(\rho) = (E^2 + \varepsilon)\rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 + \rho_0^2 \left(\frac{E^2}{3} - \varepsilon \right)$$

où $\bar{l} = L - \omega E$.

On étudie le cas général pour des particules ayant un moment angulaire nul et d'autres ayant un moment angulaire non nul :

1) $\boxed{L = 0}$:

On a alors :

$$V(\rho) = (E^2 + \varepsilon)\rho^2 + 4\omega E^2 \rho + 3\omega^2 E^2 + \rho_0^2 \left(\frac{E^2}{3} - \varepsilon \right) \quad (4.49)$$

avec $E^2 \neq -\varepsilon$.

► **photons** :

Dans ce cas on a $\varepsilon = 0$ et :

$$V(\rho) = E^2 \rho^2 + 4\omega E^2 \rho + E^2 \left(3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3} \right) \quad (4.50)$$

et

$$\bar{\rho} = -2\omega \quad (4.51a)$$

$$V(\bar{\rho}) = E^2 \left(\frac{\rho_0^2}{3} - \omega^2 \right) \quad (4.51b)$$

Le discriminant est donné par :

$$\delta' = E^4 \left(\omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3} \right) \quad (4.52)$$

Selon le signe du déterminant, on distingue deux cas différents :

a) $\omega^2 \prec \frac{\rho_0^2}{3}$:

Dans ce cas $\delta' \prec 0$ donc $V(\bar{\rho}) \succ 0$, la parabole représentant le potentiel possède un minimum positif comme dans la figure (4.6). Il est clair alors qu'il n'y a pas un point de retour dans cette régions, et le photon est capturé par le trou noir.

b) $\omega^2 \succ \frac{\rho_0^2}{3}$:

On peut remarquer que cet ensemble de paramètres de ω correspond à la situation de l'espace-temps ayant des courbes fermées de genre temps (cachées derrière l'horizon ρ_0 car $\omega \succ 0$, voir chapitre 3).

Le fait que $\delta' \succ 0$ implique qu'il y a deux racines négatives à l'équation $V(\rho) = 0$, qui sont données par :

$$\rho_{\pm} = -2\omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3}} \quad (4.53)$$

Malgré ça, on n'a pas une diffusion ordinaire, parce que l'horizon se situe avant ρ_+ ($\rho_+ \prec \rho_0$) et donc tous les photons vont pénétrer dans le trou noir (voir la figure (4.3)).

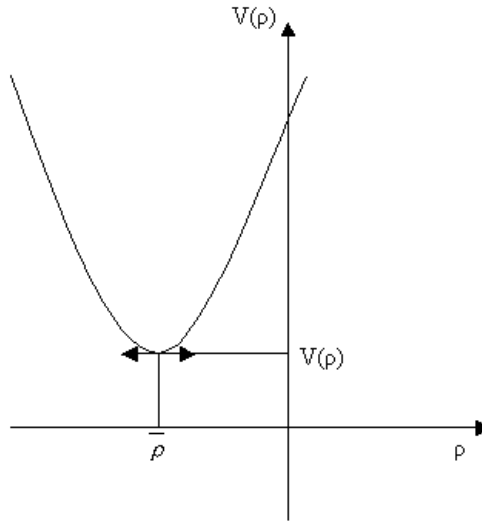


FIG. 4-6 – Cas général ($\omega \neq 0$ et $\rho_0 \neq 0$). Photons pour $L = 0$ et $\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}$

Le photon sera diffusé vers $\rho = +\infty$, mais dans une région asymptotique différente (voir chapitre 5).

c) $\omega^2 = \frac{\rho_0^2}{3}$:

Ce cas est représenté par la courbe représentée par la figure (4.7), où $V(\rho)$ s'annule au minimum de la parabole situé après l'horizon d'évènement en $\rho = -2\omega$. On peut montrer en étudiant $\frac{d\rho}{d\lambda}$ et $\frac{d\varphi}{d\rho}$ que l'on a un phénomène d'orbiting autour de $\rho = -2\omega$ après la capture par le trou noir.

► **particule massive** :

Le fait que $\varepsilon = -1$ permet d'écrire l'expression de $V(\rho)$ ainsi :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 + 4\omega E^2\rho + E^2\left(3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3}\right) + \rho_0^2 \quad (4.54)$$

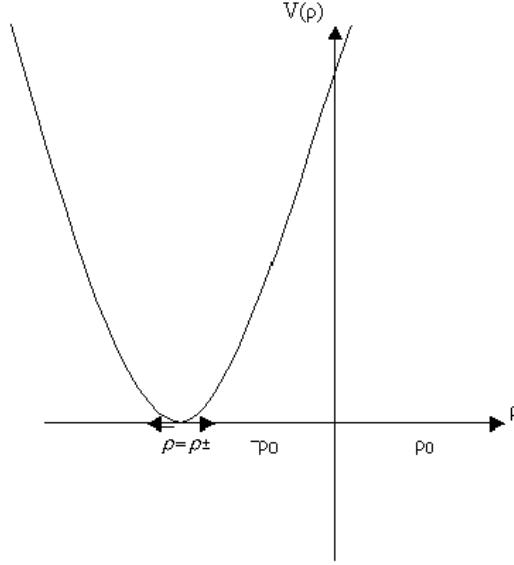


FIG. 4-7 – Cas général ($\omega \neq 0$ et $\rho_0 \neq 0$). Photons pour $L = 0$ et $\omega^2 = \frac{\rho_0^2}{3}$

donc

$$\bar{\rho} = -2 \frac{\omega E^2}{E^2 - 1} \quad (4.55)$$

$$V(\bar{\rho}) = \frac{1}{3} \left(\frac{E^2 + 3}{E^2 - 1} \right) [E^2 (\rho_0^2 - 3\omega^2) - \rho_0^2] \quad (4.55b)$$

L'existence des racines ρ_{\pm} ainsi que la position du minimum est déterminée par le discriminant ayant cette expression :

$$\delta' = \frac{E^2 + 3}{3} [E^2 (3\omega^2 - \rho_0^2) + \rho_0^2] \quad (4.56)$$

Alors on a deux cas différents :

1) $\omega^2 \succ \frac{\rho_0^2}{3}$:

Dans ce cas δ' est positif, alors ρ_{\pm} sont négatives et données par :

$$\rho_{\pm} = \frac{-2\omega E^2 \pm \sqrt{\frac{E^2 + 3}{3} [E^2 (3\omega^2 - \rho_0^2) + \rho_0^2]}}{E^2 - 1} \quad (4.57)$$

Par contre $V(\bar{\rho})$ est négatif, donc la courbe représentant le potentiel est de la forme (4.3), avec $\rho_+ < -\rho_0 < \rho_0$. En effet, $V(-\rho_0) = \frac{E^2}{3}(2\rho_0 - 3\omega)^2 > 0$ et $-\rho_0 > \frac{1}{2}(\rho_+ + \rho_-)$ dans notre cas $\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$. Les particules viennent de l'infini, sont capturées par le trou noir et sont rediffusées vers $+\infty$ en ρ_+ toujours dans une région asymptotique différente, après avoir traverser les deux horizons $\pm\rho_0$ (voir chapitre 5).

$$2) \omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3} :$$

Il faut distinguer deux cas :

$$a) E^2 > \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - 3\omega^2} \Leftrightarrow E^2 > \left(1 - \frac{3\omega^2}{\rho_0^2}\right)^{-1}.$$

Le potentiel est représenté alors sur la figure (4.6), car $\delta' < 0$ et $\bar{\rho} < 0$ et $V(\bar{\rho})$. Les particules sont alors capturées par le trou noir.

$$b) 1 < E^2 < \frac{1}{1 - \frac{3\omega^2}{\rho_0^2}} :$$

Le potentiel est donné par la figure (4.3), car les deux racines ρ_{\pm} de $V(\rho) = 0$ sont négatives. La conclusion est la même que dans le cas $\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$ (capture, diffusion en ρ_+ , ensuite sortie dans une autre région asymptotique).

$$2) \omega^2 = \frac{\rho_0^2}{3} :$$

Ce cas est représenté par la figure (4.3). Le potentiel $V(\rho)$ s'annule donc pour deux valeurs :

$$\rho_{\pm} = \frac{\omega}{E^2 - 1} \left(-2E \pm \sqrt{E^2 + 3}\right) \quad (4.58)$$

où le discriminant est toujours positif.

$$2) \boxed{L \neq 0} :$$

► **photons** :

Le potentiel est donnée dans ce cas par :

$$V(\rho) = E^2 \rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 + \frac{\rho_0^2}{3} E^2 \quad (4.59)$$

et $\bar{\rho}$, $V(\bar{\rho})$ et δ' par :

$$\bar{\rho} = 2\frac{\bar{l}}{E} \quad (4.60a)$$

$$V(\bar{\rho}) = \frac{\rho_0^2}{3}E^2 - \bar{l}^2 \quad (4.60b)$$

$$\delta' = E^2 \left(\bar{l}^2 - \frac{\rho_0^2}{3}E^2 \right) \quad (4.60c)$$

Il faut distinguer trois cas suivant les valeurs de \bar{l} ($\bar{l} = L - \omega E$) :

a) $\bar{l}^2 < \frac{\rho_0^2 E^2}{3}$:

Ce cas correspond à $\left(\omega - \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E < L < \left(\omega + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E$ si $\omega > \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}$ et $0 \leq L < \left(\omega + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E$ si $0 < \omega \leq \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}$. On a alors $V(\rho) > 0$ et $\delta' < 0$. Le potentiel est représenté par la figure (4.4) si $\bar{l} > 0$ ($\omega E < L < \left(\omega + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E$) et par la figure (4.6) si $\bar{l} < 0$ ($\left(\omega - \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E < L < \omega E$). Le photon est alors capturé par le trou noir et va de $\rho = +\infty$ à $\rho = -\infty$ en traversant les deux horizons ρ_0 et $(-\rho_0)$.

b) $\bar{l}^2 > \frac{\rho_0^2 E^2}{3}$:

Nous devons séparer les cas $\bar{l} > 0$ et $\bar{l} < 0$:

b₁) $\bar{l}^2 > \frac{\rho_0^2}{3}E^2$:

Ce cas correspond à $L > \left(\omega + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}\right)E$. On a alors $\bar{\rho} > 0$ et $V(\bar{\rho}) < 0$. La courbe $V(\rho)$ coupe l'axe ρ aux points :

$$\rho_{\pm} = \frac{2\bar{l} \pm \sqrt{\bar{l}^2 - \frac{\rho_0^2}{3}E^2}}{E} > 0 \quad (4.61)$$

Comme $V(\rho_0) = \frac{1}{3}(2E\rho_0 - 3\bar{l})^2 > 0$ et $\rho_0 < \frac{2\bar{l}}{E} = \frac{\rho_0 + \rho_-}{2}$ (car $\bar{l} > \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}E$), on a $\rho_0 < \rho_- < \rho_+$. Dans ce cas le photon est diffusé en ρ_+ avant d'arriver à l'horizon, et revient à la même région asymptotique.

b₂) $\bar{l} < -\frac{\rho_0}{\sqrt{3}}E$:

Ce cas correspond à $L \succ \left(\omega + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \right) E$, avec $\bar{\rho} \prec 0$, $V(\bar{\rho}) \prec 0$ et $V(\rho)$ coupe l'axe ρ en $\rho_{\pm} \prec 0$ (donnée en (4.61)).

Comme $V(-\rho_0) = (2E\rho_0 - 3\bar{l})^2 \succ 0$ et $(-\rho_0) \succ \frac{2\bar{l}}{E}$ (car $\bar{l} \prec \frac{\rho_0}{\sqrt{3}}E$), on a $(-\rho_0) \prec \rho_+ \prec \rho_-$. Le photon est diffusé en ρ_+ après avoir traversé les deux horizons. Il va donc ressortir dans une autre région asymptotique.

$$c) \bar{l}^2 = \frac{\rho_0^2 E^2}{3} :$$

On a :

$$V(\rho) = E^2 \left(\rho - \frac{2\rho_0^2}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad (4.62)$$

Le potentiel est représenté par la figure (4.5), avec $\bar{\rho} \succ \rho_0$.

On peut montrer en étudiant $\frac{d\rho}{d\lambda}$, d'après (4.62), que :

$$\rho = \frac{2\rho_0}{\sqrt{3}} + \exp(-E\lambda) \quad (4.63)$$

Lorsque λ varie de $(-\infty)$ à $(+\infty)$, ρ varie de $(+\infty)$ à $\bar{\rho} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{3}}$. On peut montrer aussi que, d'après $\frac{d\rho}{d\varphi}$, $\varphi \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow \bar{\rho}$. Il y a donc un phénomène d'orbting autour de $\rho = \bar{\rho}$, que le photon n'atteint qu'au bout d'un nombre infini de tours.

► **particule massive** :

Le potentiel s'écrit dans ce cas :

$$V(\rho) = (E^2 - 1)\rho^2 - 4E\bar{l}\rho + 3\bar{l}^2 + \frac{\rho_0^2}{3}(E^2 + 3) \quad (4.64)$$

où $\bar{\rho}$, $V(\bar{\rho})$ et le discriminant δ' sont donnés par :

$$\bar{\rho} = 2 \frac{E\bar{l}}{E^2 - 1} \quad (4.65a)$$

$$V(\bar{\rho}) = \frac{E^2 + 3}{3} \left[\rho_0^2 (E^2 - 1) - 3\bar{l}^2 \right] \quad (4.65b)$$

$$\delta' = \frac{E^2 + 3}{3} \left[3\bar{l}^2 - \rho_0^2 (E^2 - 1) \right] \quad (4.65c)$$

Comme pour le photon, il y a les cas suivants :

$$a) \bar{l}^2 < \frac{\rho_0^2}{3} (E^2 - 1) :$$

Dans ce cas $\left(\omega E - \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \right) < L < \omega E$ si $\left(-\frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \right) < \bar{l} < 0$ et $\omega E < L < \left(\omega E + \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \right)$ si $0 < \bar{l} < \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1}$. Pour ces valeurs de \bar{l}^2 , $V(\bar{\rho}) > 0$ et $\delta' < 0$. Le potentiel est représenté par la figure (4.6) pour $\bar{l} < 0$, ou la figure (4.4) pour $\bar{l} > 0$. Il y a capture de la particule par le trou noir (ρ varie de $+\infty$ à $-\infty$).

$$b) \bar{l}^2 > \frac{\rho_0^2}{3} (E^2 - 1) :$$

On distingue deux cas :

$$b_1) \bar{l} > \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \left(L > \omega E + \frac{\rho_0}{3} \sqrt{E^2 - 1} \right) :$$

Ici $\bar{\rho} > 0$ et $V(\bar{\rho}) < 0$. La courbe $V(\rho)$ coupe l'axe ρ en :

$$\rho_{\pm} = \frac{2E\bar{l} \pm \sqrt{\frac{E^2 + 3}{3} [3\bar{l}^2 - \rho_0^2 (E^2 - 1)]}}{E^2 - 1} > 0 \quad (4.66)$$

On peut alors montrer que :

$$\bar{l} > \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \Rightarrow \rho_0 < \rho_- < \rho_+ \quad (4.67)$$

Il y a une diffusion en ρ_+ avant d'arriver au trou noir. La particule émerge dans la même région asymptotique.

$$b_2) \bar{l} < -\frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \left(L < \omega E - \frac{\rho_0}{3} \sqrt{E^2 - 1} \right) :$$

Les racines ρ_{\pm} de $V(\rho)$ sont négatives et

$$\bar{l} < -\frac{\rho_0}{\sqrt{3}} \sqrt{E^2 - 1} \Rightarrow \rho_- < \rho_+ < -\rho_0 \quad (4.68)$$

Il y a donc diffusion après passage par les deux horizons ($+\rho_0$) et ($-\rho_0$), et la particule ressort dans une région asymptotique différente.

$$c) \bar{l}^2 = \frac{\rho_0^2}{3} (E^2 - 1) \left(L = \omega E \pm \frac{\rho_0}{3} \sqrt{E^2 - 1} \right) :$$

On a alors :

$$V(\rho) = \left(\sqrt{E^2 - 1} \rho - \frac{2}{\sqrt{3}} E \rho_0 \right)^2 \quad (4.69)$$

L'étude de $\rho(\lambda)$ donne :

$$\rho = \frac{2E\rho_0}{\sqrt{3}(E^2 - 1)} + \exp[-(E^2 - 1)\lambda] \quad (4.70)$$

Donc si $\lambda \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow \rho \in]-\infty, +\infty[$ avec $\bar{\rho} = \frac{2E\rho_0}{\sqrt{3}(E^2 - 1)}$ ($V(\bar{\rho}) = 0$). Il y a un phénomène d'orbiting autour de $\bar{\rho}$ ($\varphi \rightarrow +\infty$ si $\rho \rightarrow \bar{\rho}$).

4.3 Conclusion

D'après les résultats obtenus en résolvant les équations des orbites pour les particules massives et les photons, on peut remarquer que des points de retour (turning points) existent toujours pour certaines valeurs des paramètres ω et ρ_0 (qui caractérisent le trou noir), et E et L (caractérisant les particules).

Pour être sûr que ces points de diffusion du trou noir existent, il faut qu'ils soient toujours supérieurs à l'horizon d'évènement externe, sinon les particules et les photons sont capturés par le trou noir et ressortent dans une région asymptotique ($\rho \rightarrow +\infty$) différente de la région de départ.

Le phénomène d'orbiting ($\varphi \rightarrow \infty$, si $\rho \rightarrow \rho_{\pm}$) se fait autour du minimum du potentiel qui représente au même temps le point de diffusion, lorsque le potentiel en ce point est nul. Cela sera éclairci au chapitre 5, à l'aide des diagrammes de Penrose.

Si la solution n'est pas un trou noir ($\omega = \rho_0 = 0$), les particules se réfléchissent toujours, quelques soient leurs énergies et moments angulaires (les points de retour existent toujours).

Chapitre 5

Structure globale

Le but de ce chapitre est d'étudier la structure causale et globale de l'espace-temps représenté par la métrique (ACL). Pour ça, on utilise la technique des diagrammes de Penrose [18](ou de Penrose-Carter).

On peut représenter tout l'espace-temps sur une feuille de papier et faire une extension maximale de l'espace-temps. Cela nous permettra de mieux comprendre certains états de diffusion décrit dans le chapitre précédent.

5.1 L'approche de l'horizon

La métrique (3.5) est singulière en $r^2 = 0$ et $\rho = \pm\rho_0$ (horizons). Si on veut traverser la surface $\rho = \rho_0$ (ou $\rho = -\rho_0$), on trouve que $t \rightarrow +\infty$ si $\rho \rightarrow \rho_0$. C'est comme si on ne peut pas traverser cette surface. C'est soit un problème de l'espace-temps lui-même, ou un mauvais comportement du système de coordonnées utilisé, c'est-à-dire qu'il n'est pas adapté pour couvrir tout l'espace-temps (en particulier $\rho \prec \rho_0$).

La remède à ce problème est une extension de l'espace-temps à travers les horizons définie par une nouvelle métrique qui décrira tout l'espace-temps et sera régulière à tous les points. Pour cela, on doit considérer seulement une des composantes de l'espace-temps (il est évident de choisir le champ externe $\rho \succ \rho_0$), puis on cherche à prolonger cette partie

de l'espace-temps en faisant un changement convenable du système de coordonnées afin d'atteindre la régularité de la métrique aux points $\rho = \pm\rho_0$. Cela permettra de montrer que ces points ne sont pas des singularités réelles mais des problèmes dus à un mauvais choix de coordonnées.

Pour confirmer ça, on se limite au cas où $r^2 \succ 0$ ($\omega^2 \prec \frac{\rho_0^2}{3}$), c'est-à-dire où il n'y a pas de courbes fermées de genre temps (CTC) en dehors de l'horizon $\rho = \rho_0$, et on essaye de savoir ce qui se passe près de l'horizon. Le meilleur chemin pour réaliser ça est de choisir un système de coordonnées en rotation avec la source. On définit alors :

$$d\varphi^* = d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2} dt = 0 \quad (5.1)$$

et on étudie les géodésiques "radiales" ($d\varphi^* = 0$) au voisinage de $\rho = \rho_0$.

Pour une particule sans masse $ds^2 = 0$ implique que :

$$\left(\frac{dt}{d\rho}\right)^2 = \frac{r^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)^2} \quad (5.2)$$

Au voisinage de $\rho = \rho_0$, cette expression peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dt}{d\rho} = \pm \frac{A}{\rho - \rho_0} \quad (5.3)$$

avec : $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\omega}{2\rho_0}\right)$ une constante.

Puis une simple intégration donne l'expression :

$$t(\rho) \sim \pm A \ln |\rho - \rho_0| \quad (5.4)$$

(moins (-) pour une géodésique entrante et plus (+) pour une géodésique sortante) qui indique que lorsque un photon s'approche de l'horizon, le temps tend vers l'infini. Cela implique l'existence d'une *pathologie des coordonnées*, le système de coordonnées (t, ρ) n'est pas donc convenable pour décrire la région $\rho \prec \rho_0$ (l'intérieur du trou noir).

Le remède à cette difficulté dans une description globale de l'espace-temps, se fait en effectuant une transformation dans le système (t, ρ) , permettant de donner une représentation plus claire de la géométrie de cet espace-temps. Une première méthode consiste à déterminer les coordonnées du type Kruskal-Szekers, comme pour la solution de Schwarzschild [3], ou de Kerr [19]. Nous utiliserons ici directement les diagrammes de Penrose, plus faciles à interpréter.

L'idée est de trouver un système de coordonnées convenable qui peut compactifier l'espace-temps en le représentant sur une partie finie d'un plan. Avant de citer en détail les étapes de cette transformation ainsi que les diagrammes de Penrose (ou Carter-Penrose) [18] pour notre cas, en quoi elle consiste, et la technique utilisée pour le construire, on prend l'exemple le plus simple concernant l'espace de Minkowski de la relativité restreinte ([16], Ch. 34).

Mathématiquement, c'est le plan \mathfrak{R}^4 muni de la métrique de Lorentz η exprimée en coordonnées sphériques de cette manière :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.5)$$

où : $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ avec : $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$

Pour représenter l'espace-temps de Minkowski sur une surface finie, on doit chercher un autre système de coordonnées pour faire une extension de l'espace-temps qui peut être représentée par les diagrammes de Penrose en mettant les infinis sur des droites. Pour cela il faut choisir une transformation de coordonnées dans le but de pouvoir transformer les infinis en des régions avec des coordonnées finies :

$$t + r = \tan\left(\frac{T + X}{2}\right) \quad (5.6a)$$

$$t - r = \tan\left(\frac{T - X}{2}\right) \quad (5.6b)$$

et :

$$-\pi \leq T \leq +\pi \quad (5.7a)$$

$$0 \leq X \leq +\pi \quad (5.7b)$$

($X \geq 0$ car $r \geq 0$). Ainsi, l'espace-temps peut être représenté sur un bout de papier en mettant ses infinis sous forme de droites.

En ne tenant compte que la partie (T, X) et en négligeant les coordonnées angulaire (d'après Penrose), la structure de son diagramme permet de subdiviser ces infinis, comme le montre la figure, en quelques régions :

$$i^0 \sim \text{l'infini de genre espace : } (r \rightarrow \infty, t \text{ fini}) \Rightarrow (T = 0, X = \pi)$$

$$i^+ \sim \text{l'infini de genre temps futur : } (t \rightarrow \infty, r \text{ fini}) \Rightarrow (T = \pi, X = 0)$$

$$i^- \sim \text{l'infini de genre temps passé : } (t \rightarrow -\infty, r \text{ fini}) \Rightarrow (T = -\pi, X = 0)$$

$$I^+ \sim \text{l'infini de genre lumière futur : } ((t+r) \rightarrow \infty, (t-r) \text{ fini}) \Rightarrow (T = \pi - X, \\ 0 \prec X \prec \pi)$$

$$I^- \sim \text{l'infini passé de genre lumière : } ((t-r) \rightarrow \infty, (t+r) \text{ fini}) \Rightarrow (T = -\pi + X, \\ 0 \prec X \prec \pi).$$

Les infinis de genre lumière sont représentés d'après Penrose par des droites, donc les géodésiques de genre lumière dans ce cas sont à $\pm 45^\circ$ sur le diagramme. Celles de genre temps sont de i^- jusqu'à i^+ , par contre les géodésiques spatiales arrivent au point i^0 .

Dans l'espace de Minkowski, les régions i^+ , i^- et i^0 sont représentées par des points (fig 5.1).

5.2 Diagrammes de Penrose :

Le diagramme de Penrose est une représentation géométrique de l'espace-temps utilisé afin d'expliquer d'une façon simple, sa structure causale et interpréter physiquement la solution trou noir notamment sa région interne.

Pour cela, on propose l'extension de Kruskal qui nous prépare le chemin pour tracer

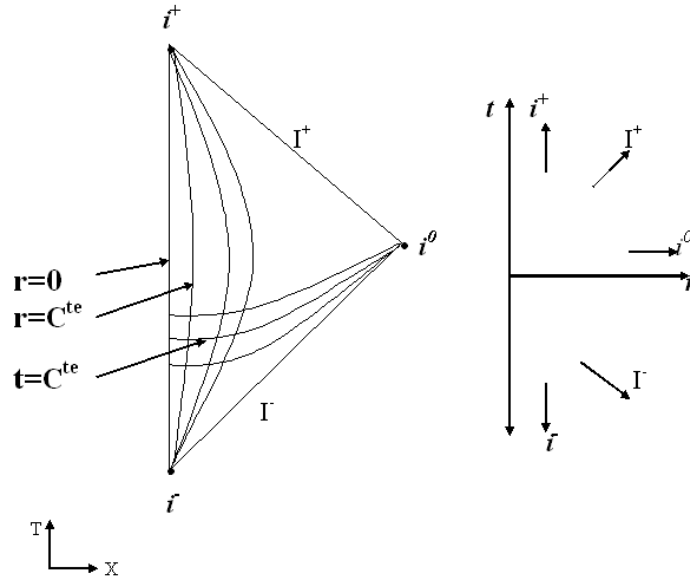


FIG. 5-1 – Diagramme de Penrose de Minkowski

ces diagrammes. Cette extension sert à réécrire la métrique sous une forme régulière à tout point de l'espace-temps à partir d'une transformation des coordonnées simple.

En effet, pour l'élément de ligne :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} dt^2 + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} d\rho^2 \quad (5.8)$$

représentant la métrique exprimée dans un repère tournant associé au système de coordonnées où :

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2} dt = 0, \quad (5.9)$$

on définit les coordonnées de *Kruskal* (ou *Kruskal-Szekeres*) : u (de genre espace) et v (de genre temps) telles que :

$$ds^2 = \Omega^2 (-dv^2 + du^2) \quad (5.10)$$

où $\Omega = \Omega(u, v)$.

Le but est de déterminer u, v et Ω , dans les différents cas indiqués précédemment (selon la variation des paramètres ρ_0 et ω), ainsi que dans le cas général.

5.2.1 En absence des courbes fermées de genre temps ($\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}$, $\omega > 0$)

Les fonctions u et v définies dans (5.10) dépendent de ρ et t telle que l'identification entre (5.8) et (5.10) donne :

$$\Omega^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} \quad (5.11a)$$

$$\Omega^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (5.11b)$$

avec :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \rho} \quad (5.12)$$

La forme des équations (5.11) et (5.12) suggère de chercher u et v sous la forme :

$$u = \pm f(\rho) \cosh at \quad (5.13a)$$

$$v = \pm f(\rho) \sinh at \quad (5.13b)$$

si $(\rho^2 - \rho_0^2) > 0$, ou

$$u = \pm f(\rho) \sinh at \quad (5.14a)$$

$$v = \pm f(\rho) \cosh at \quad (5.14b)$$

si $(\rho^2 - \rho_0^2) < 0$, a et $f(\rho)$ étant une constante et une fonction à déterminer.

Les détails de la détermination de $f(\rho)$, $\Omega^2(\rho)$ et a sont donnés dans l'annexe A (&A.4). Nous utiliserons ici les résultats de l'annexe.

Pour pouvoir construire les diagrammes de Penrose de l'espace-temps, on utilise les

coordonnées ψ et ξ définies à partir de u et v à l'aide de la transformation suivantes :

$$v + u = \tan\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \quad (5.15a)$$

$$v - u = \tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) \quad (5.15b)$$

Remarque :

On se concentre, premièrement, sur le signe positif intervenant dans les expressions de u et v . Si on prend le signe négatif, la procédure de calcul ne change pas car il s'agit d'un simple changement de signes, c'est-à-dire on travaille avec $(-u)$ et $(-v)$ donc $(-\psi$ et $-\xi)$ plutôt que u et v (ψ et ξ). Ce changement de signe est identique à la symétrie par rapport à l'origine du plan (ψ, ξ) .

1) Si $\rho \rightarrow \rho_0$:

Cette région de l'espace-temps peut être représentée avec la forme suivante de u et v :

$$u = \sqrt{|\rho - \rho_0|} (\alpha \cosh at + \beta \sinh at) \quad (5.16a)$$

$$v = \sqrt{|\rho - \rho_0|} (\beta \cosh at + \alpha \sinh at) \quad (5.16b)$$

avec :

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$ au voisinage positif de ρ_0 ($\rho \rhd \rho_0$).

$(\alpha, \beta) = (0, 1)$ au voisinage négatif de ρ_0 ($\rho \lhd \rho_0$).

En plus, si on fait un choix adéquat de a , Ω^2 est une constante égale à 2 (voir annexe A.4). Ce choix doit correspondre aux valeurs de a permettant d'éviter la possibilité ($\Omega \rightarrow \infty$).

Alors, en suivant le calcul détaillé dans l'annexe A (&A.4), les transformations (5.15) permettent de représenter la droite $\rho = \rho_0$ dans le diagramme par les équations :

$$\psi = \pm \xi \quad (5.17)$$

où les régions : $\rho \succ \rho_0$ et $\rho \prec \rho_0$ seront limitées, comme indiqué sur la figure (5.2) par les conditions :

$$0 \preceq \xi \preceq \frac{\pi}{2} \quad (5.18a)$$

$$0 \preceq \psi \preceq \frac{\pi}{2} \quad (5.18b)$$

respectivement.

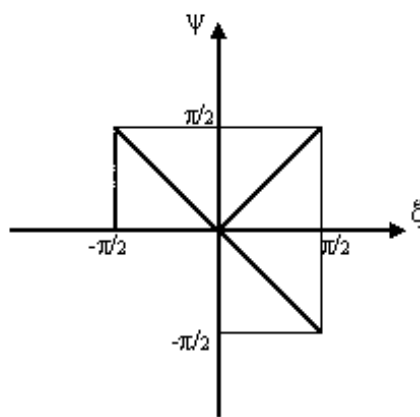


FIG. 5-2 – Representation de l'horizon $\rho = \rho_0$, pour le signe + dans (5.13)-(5.14)

La symétrie par rapport à l'origine permet de tracer la partie du diagramme figurée dans (5.3).

Donc l'extension maximale vue au voisinage de ρ_0 peut être représentée par le diagramme (5.4).

2) Si $\rho \rightarrow \infty$:

Si ρ est une quantité tendant vers l'infini, $(\rho^2 - \rho_0^2)$ est positif, alors u et v sont de la forme(5.14), où :

$$f(\rho) = \rho^a \quad (5.19)$$

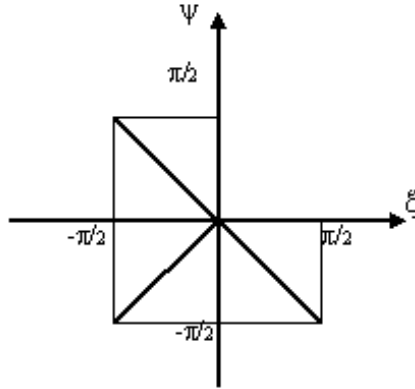


FIG. 5-3 – Representation de l’horizon $\rho = \rho_0$, pour le signe $-$ dans (5.13)-(5.14).

Commençant toujours par le signe positif dans les expressions de u et v , a doit être choisi positif pour que Ω^2 ne soit pas infini si $\rho \rightarrow \infty$.

i) Si t est fini ($-\infty < t < +\infty$), on a :

$$v + u = \rho^a e^{at} \quad (5.20a)$$

$$v - u = -\rho^a e^{-at} \quad (5.20b)$$

cela peut être exprimé, en utilisant le système de transformations (5.15) par le point ayant les coordonnées :

$$(\psi, \xi) = (0, \pi) \quad (5.21)$$

représentant, similairement à Minkowski, l’infini de genre espace i^0 .

ii) Si $t \rightarrow +\infty$ (c-à-d : $(t + \rho) \rightarrow +\infty$ et $(t - \rho)$ est fini), on trouve l’expression suivante :

$$\psi = -\xi + \pi \quad (5.22)$$

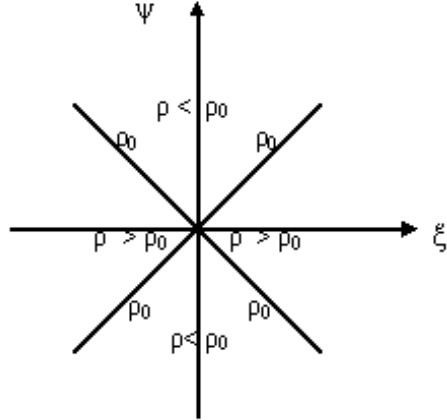


FIG. 5-4 – Representation de l’horizon $\rho = \rho_0$ dans le système de coordonnées (ψ, ξ) .

avec

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.23)$$

Cette équation représente la droite appelée le futur de genre lumière I^+ . De même, on peut obtenir l’équation du passé de genre lumière à partir de l’expression :

$$\psi = \xi - \pi \quad (5.24)$$

avec

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0 \quad (5.25)$$

en tendant t vers l’infini négatif (c-à-d : $(t + \rho)$ est fini et $(t - \rho) \rightarrow -\infty$).

3) Si ρ est fini:

De la même manière, on peut trouver le futur de genre temps i^+ en faisant $(t \rightarrow +\infty, \rho \text{ fini})$ sous forme d’un point situé à :

$$(\psi, \xi) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.26)$$

tandis que le passé du genre temps i^- , correspondant à $(t \rightarrow -\infty, \rho fini)$, est représenté par :

$$(\psi, \xi) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.27)$$

D'après 1), 2) et 3), la première partie du diagramme de Penrose dans le cas où $\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}$ avec ω positif, est donnée par la figure (5.5).

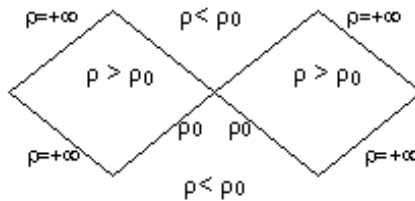


FIG. 5-5 – Représentation de l'extension maximale de la région $[\rho_0, +\infty[$ dans le système de coordonnées (ψ, ξ) .

On obtient la seconde partie du diagramme, montrée par la figure(5.6) si on suit le même type de calcul au voisinage de $(-\rho_0)$ au lieu de ρ_0 .

Enfin, le diagramme de Penrose représentant l'extension maximale de l'espace-temps sous sa forme finale est obtenu avec la superposition des deux parties indiquées précédemment. Il sera donné alors par la figure (5.7).

Remarque :

Superposer les diagrammes veut dire, dans notre cas, coller les deux parties. Cette opération n'est permise que si on n'a pas une singularité (représentant la limite de l'espace-temps qu'on ne peut pas prolonger), d'une part. Et d'une autre part, il faut avoir une région commune entre les deux parties pour qu'elle soit la zone de connexion.

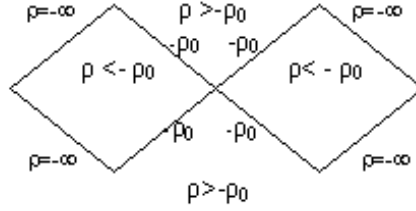


FIG. 5-6 – Représentation de l’extension maximale de la région $] -\infty, -\rho_0]$ dans le système de coordonnées (ψ, ξ) .

5.2.2 En présence des courbes fermées de genre temps $\left(\omega^2 \succ \frac{\rho_0^2}{3}\right)$

Dans ce cas, il s’agit d’un diagramme de Penrose équivalent à celui du cas précédent, mais pour cette fois, il faut signaler l’existence de la singularité causale figurée par des courbes fermées de genre temps existant dans la région interne du trou noir (derrière les horizons d’évènement), c’est-à-dire à :

$$\rho \prec \pm \rho_0 \tag{5.28}$$

où

$$-\infty \leq t \leq +\infty \tag{5.29}$$

Alors, on obtient le diagramme montré par la figure (5.8)

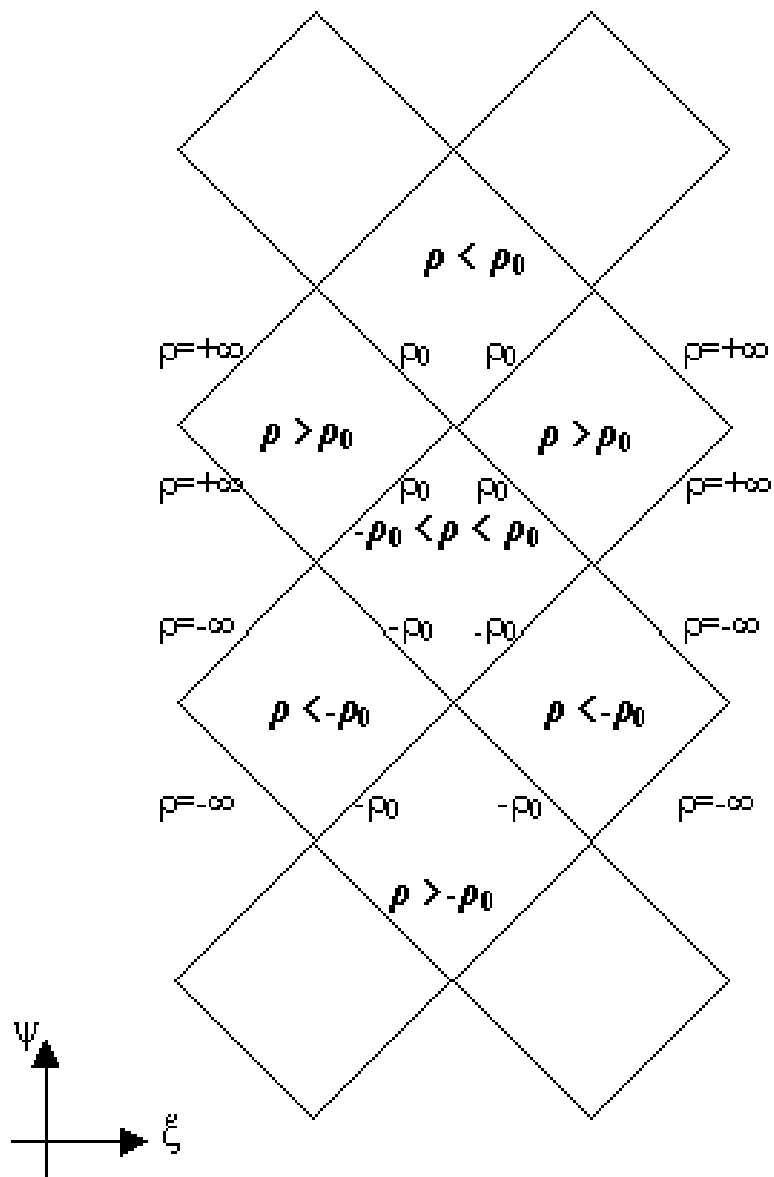


FIG. 5-7 – Diagramme de Penrose pour $\omega^2 < \frac{\rho_0^2}{3}$ (pas de courbes fermées de genre temps).

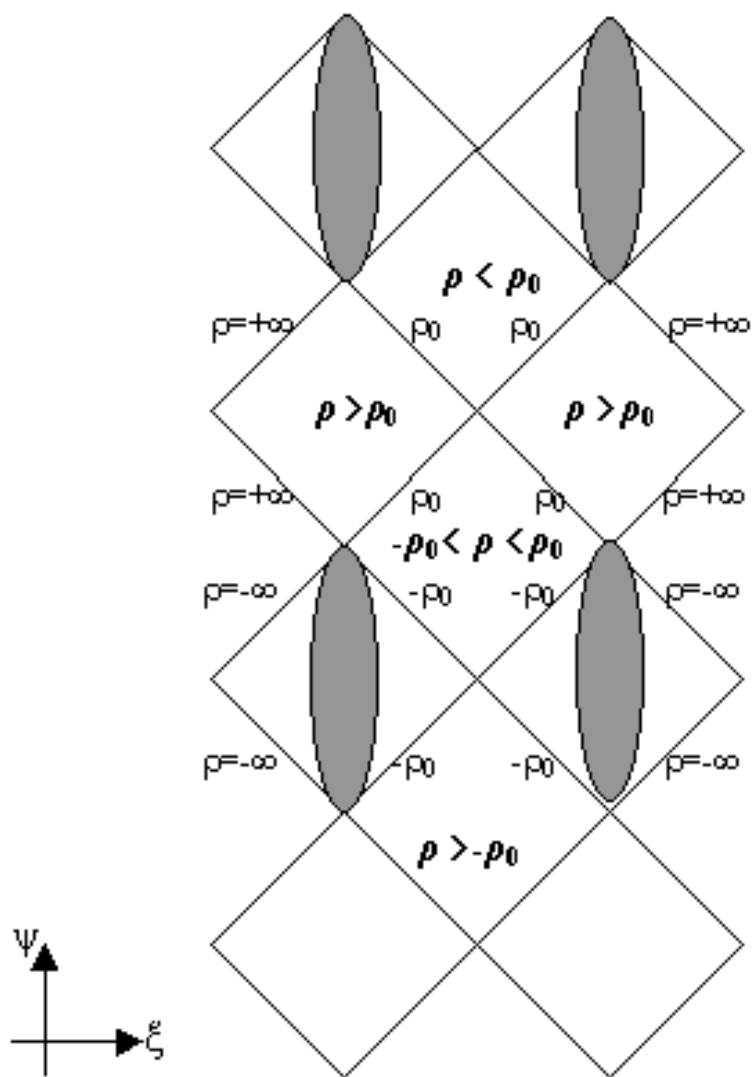


FIG. 5-8 – Diagramme de Penrose pour $\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$ (les parties grisées représentent des régions où il ya des courbes fermées de genre temps).

5.2.3 Cas particuliers “Trous noirs ayant un seul horizon”

I) Horizon double en ($\rho_0 = 0$)

L'élément de ligne s'écrit à ce moment sous la forme :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{r^2} dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} \quad (5.30)$$

avec $r^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2$. Donc u, v seront de type (5.13)-(5.14).

Comme dans le cas général, on choisit le signe positif intervenant dans (5.13)-(5.14), puis on dérive les résultats de l'autre signe par symétrie.

1) Si ρ est fini ou tend vers $+\infty$, on va trouver que la fonction $f(\rho)$ prend la forme (5.19), alors tous les résultats obtenus dans le cas général restent valables pour le cas particulier avec ($\rho_0 = 0$).

2) Si $\rho \rightarrow (\rho_0 = 0)$:

Au voisinage de l'horizon d'évènement, la fonction $f(\rho)$ est :

$$f(\rho) = e^{\alpha \frac{1}{\rho}} \quad (5.31)$$

où

$$\alpha = -1 \text{ si } \rho \rightarrow 0^+.$$

$$\alpha = +1 \text{ si } \rho \rightarrow 0^-.$$

On choisit la constante pour que Ω soit une constante finie. On choisit $\alpha = \pm 1$ pour que $\Omega = 0$. Cela ne pose pas un problème, car la structure globale et causale d'une métrique ds^2 est identique à celle de la métrique non physique $d\tilde{s}^2 = \frac{ds^2}{\Omega^2}$. Il suffit si besoin est, de diviser par Ω^2 .

On peut tracer la droite correspondante à $\rho = 0$ en utilisant les expressions (5.13) et

(5.15). Ici on a :

$$v + u = 0 \quad (5.32a)$$

$$v - u = 0 \quad (5.32b)$$

En fonction des coordonnées ψ et ξ , les transformations (5.15) impliquent que cette droite peut être tracée à l'aide des équations :

$$\psi = \xi \quad (5.33a)$$

$$\text{ou } \psi = -\xi \quad (5.33b)$$

selon la région indiquée respectivement par :

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.34a)$$

$$\text{et } -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0 \quad (5.34b)$$

En tenant compte la partie dérivée à l'aide de la symétrie par rapport à l'origine, la diagramme de Penrose sera de la forme (5.9), au voisinage positif de l'horizon est prend la forme de la figure (5.10) au voisinage négatif.

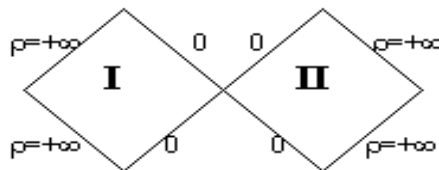


FIG. 5-9 – Région $[0, +\infty[$, pour $\rho_0 = 0$, Extension maximale.

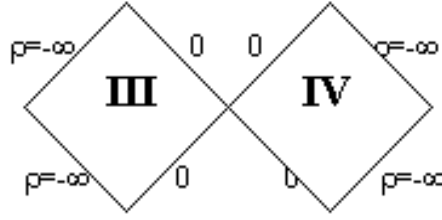


FIG. 5-10 – Région $] -\infty, 0]$, pour $\rho_0 = 0$, Extension maximale.

Finalement, le diagramme de Penrose correspond au cas particulier où le trou noir possède un horizon double situé à $\rho_0 = 0$ est représenté par les figures (5.11) et (5.12). Ce diagramme a été obtenu par la superposition des deux parties décrites précédemment par (5.9) et (5.10). Mais dans ce cas, contrairement au cas général, il faut faire attention à la manière suivie pour coller ces deux parties (on doit avoir une continuité dans l'espace-temps sans coupure par une singularité).

Si on sépare les composantes de chaque partie en deux (I, II) et (III, IV), on remarque que le complément d'une composante est forcément une de celles de l'autre partie, comme suit :

$$\begin{aligned} (I) &\leftrightarrow (IV) \\ \text{ou } (II) &\leftrightarrow (III) \end{aligned} \tag{5.35}$$

II) Trou noir de type Schwarzschild où $(\omega = \frac{2}{3}\rho_0)$

Pour qu'il soit un trou noir, ρ_0 doit être non nul. Dans ce cas, la métrique s'écrit sous cette forme :

$$ds^2 = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \frac{5}{3}\rho_0} dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} \tag{5.36}$$

où ρ_0 représente l'horizon d'évènement du trou noir et $(-\rho_0)$ la singularité.

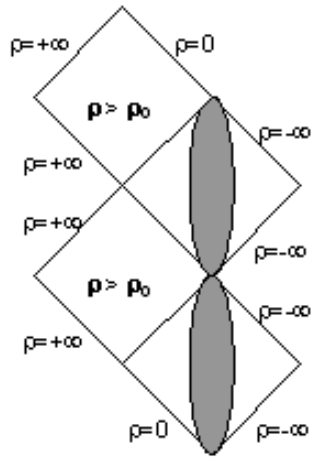


FIG. 5-11 – Diagramme de Penrose pour $\rho_0 = 0$, première possibilité.

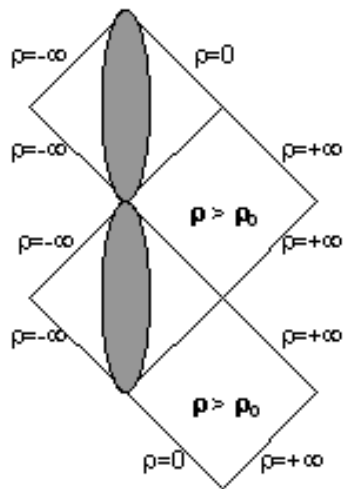


FIG. 5-12 – Diagramme de Penrose pour $\rho_0 = 0$, seconde possibilité.

Si ρ est fini y compris le voisinage de l'horizon ($\rho \rightarrow \rho_0$) ou s'il est infini ($\rho \rightarrow \infty$), on obtiendra des mêmes résultats du cas précédent ainsi que la cas général. La partie du diagramme de Penrose correspondante sera de type (5.9).

Si $\rho \rightarrow (-\rho_0)$:

Dans ce cas, les fonctions u et v doivent être de la forme :

$$u = \exp(\pm 4a\sqrt{\rho + \rho_0}) \sinh at \quad (5.37a)$$

$$v = \exp(\pm 4a\sqrt{\rho + \rho_0}) \cosh at \quad (5.37b)$$

en prenant la constante a positive,

$$\Omega^2 = \frac{3}{a^2} \quad (5.38)$$

D'après les expressions de u et v , on écrit :

$$v^2 - u^2 = \exp(\pm 8a\sqrt{\rho + \rho_0}) \quad (5.39)$$

au voisinage de $(-\rho_0)$, contrairement aux cas précédents, lorsque t est fini ($-\infty < t < +\infty$), cette relation devient :

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (5.40)$$

avec

$$-1 \leq \frac{u}{v} \leq +1 \quad (5.41)$$

v étant positif, ($\frac{u}{v} = \tanh at$, d'après (5.37)).

En fonction de ψ et ξ cette relation s'écrit en faisant les transformations (5.15), comme suit :

$$\tan\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) = 1 \quad (5.42)$$

En fonction de sin et de cos, on a :

$$\sin\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) \quad (5.43)$$

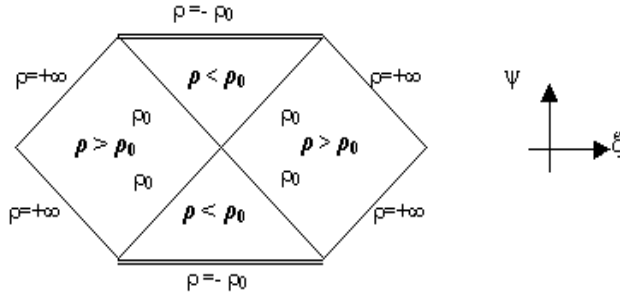


FIG. 5-13 – Diagramme de Penrose pour $\omega = \frac{2}{3}\rho_0$.

c'est-à-dire :

$$\cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} \quad (5.44)$$

D'autre part, le fait que v est positif implique :

$$\tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) \geq 0 \quad (5.45)$$

La variation de ξ est limitée dans la région :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.46)$$

Avec ces résultats, le diagramme de Penrose sera (en tenant compte la partie symétrique) de type Schwarzschild (figure 5.13), où $(-\rho_0)$ joue le rôle de la singularité $r = 0$ de Schwarzschild.

5.3 Intérprétation de la diffusion des particules à l'aide des diagrammes de Penrose

A l'aide du diagramme de Penrose, dans le cas général représenté par la figure (5.14), on peut facilement interpréter le type des diagrammes obtenus pour la diffusion des particules en mouvement et détaillés dans le chapitre précédent.

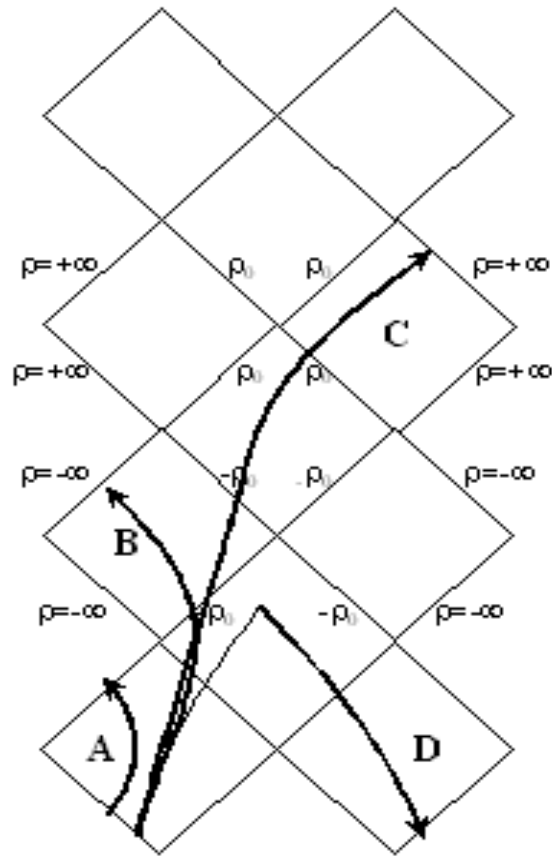


FIG. 5-14 – Géodésiques des particules diffusées. Diverses possibilités.

Ce mouvement est représenté par les géodésiques de genre temps A , B , C , et D .

A représente la géodésique d'une particule diffusée de $(+\infty)$ vers $(+\infty)$, dans la même région asymptotique, avec un point de diffusion $\rho_+ \succ \rho_0$ (fig 4.1)

B représente la géodésique d'une particule qui est capturé par le trou noir, ρ variant de $(+\infty)$ à $(-\infty)$. (fig 4.4) et (fig 4.6).

C et D représentent les géodésiques des particules diffusées de $(+\infty)$ à $(+\infty)$, mais passent d'une région asymptotique vers une autre région asymptotique, avec un point de diffusion $(\rho_+ \prec -\rho_0 \prec \rho_0)$ pour C (fig 4.3) et $(-\rho_0 \prec \rho_+ \prec \rho_0)$ pour D .

On voit clairement sur le diagramme de Penrose, avec l'extension maximale de l'espace-temps, les différents cas de diffusion, surtout ceux qui sont propres à un trou noir.

5.4 Conclusion

La première vue concernant les résultats obtenus indique que les diagrammes de l'espace-temps correspondants ne sortent pas du cadre des diagrammes connus dans le cas ordinaire.

Pour une famille de paramètres caractérisant le trou noir de type Kerr de la GTM, le diagramme de Penrose décrivant l'espace-temps dans son extension maximale est similaire à celui de Kerr de la gravitation ordinaire à quatre dimensions (avec $0 < a^2 < G^2 M^2$ [19]). La particularité dans ce cas est la présence des courbes fermées de genre temps si on considère le cas où $\omega^2 > \frac{\rho_0^2}{3}$.

La considération des cas particuliers en fonction des deux paramètres ω et ρ_0 permet de trouver les résultats suivants :

Lorsque $\rho_0 = 0$, le trou noir contient un horizon d'évènement double au point $\rho = 0$. Son diagramme de Penrose est identique au cas extrême de Kerr à quatre dimensions ($a^2 = G^2 M^2$ [19]). Il faut signaler encore une fois la présence des courbes fermées de genre temps situées derrière l'horizon.

Le cas particulier correspondant à $\omega = \frac{2}{3}\rho_0$ donne une solution trou noir ayant un horizon en $\rho = \rho_0$ et une singularité en $\rho = (-\rho_0)$ pour lequel, on trace des diagrammes de type Schwarzschild ($(-\rho_0)$ joue le rôle de la singularité $r = 0$ de Schwarzschild).

Enfin, le cas $\omega = \rho_0 = 0$ correspondant à une métrique ne contenant aucun horizon, alors on peut pas construire des diagrammes de Penrose car la vitesse angulaire tend vers l'infini au voisinage de la singularité.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la gravitation tridimensionnelle qui a eu récemment beaucoup d'intérêt comme laboratoire pour l'étude des propriétés des trous noirs et pour la quantification de la relativité générale.

Nous nous sommes particulièrement intéressés à la théorie dynamique de la gravitation topologiquement massive à trois dimensions (TMG) proposée par S. Deser, R. Jackiw et S. Templeton [7].

L'extension analytique de la solution de Vuorio (une solution stationnaire à symétrie sphérique sans la constante cosmologique) de la (GTM), a été proposée par "K. Ait moussa, G. Clément et C. Leygnac", dans le but de la construction d'une solution trou noir analogue à celle de Kerr de la gravitation ordinaire à quatre dimensions et qui ne possède pas de singularité causale (courbes fermées de genre temps en dehors de l'horizon). Ils ont pu alors résoudre le problème de la causalité intervenant dans la métrique de Vuorio en effectuant une transformation imaginaire des variables temporelle et radiale. Cette transformation mène à une famille à deux paramètres (ω et ρ_0), ayant une relation d'une façon ou d'une autre avec l'énergie et le moment angulaire du trou noir associé. L'étude analytique et descriptive des propriétés générales de ce trou noir était selon le plan suivant :

Après avoir rappelé le calcul menant à la solution trou noir de type Kerr à partir de la solution de Vuorio intervenant dans [8], nous avons expliqué dans le troisième chapitre, qu'à l'aide de la forme (ADM) de la métrique, le trou noir associé possède, identiquement au cas de Kerr ordinaire, deux horizons d'évènement au delà desquels toute information sur les particules et ses trajectoires sera perdue.

La propriété particulière de la nouvelle solution est que la région de l'érgosphère recouvre tout l'espace-temps en dehors de l'horizon. Ainsi, tout objet situé à l'extérieur du trou noir doit avoir une vitesse angulaire non nulle.

La singularité existant dans notre cas est causale, elle est représentée par l'existence des courbes fermées de genre temps. Contrairement à Vuorio, elles existent seulement

pour certaines valeurs des paramètres ω et ρ_0 . Nous avons pris ω positif pour qu'elles soient toujours invisibles (à l'intérieur des horizons), et donc non observables.

Dans le quatrième chapitre nous avons décrit la diffusion des particules massives et des photons. En utilisant les équations des géodésiques et les intégrales premières, il s'avère que la particule (ou le photon) est soit diffusée, soit capturée par le trou noir, soit tourne un nombre infini de fois (orbiting). Ceci est obtenu grâce à l'étude du potentiel effectif. L'orbiting arrive lorsque le minimum du potentiel est nul. Dans le cas de la diffusion, elle a lieu soit avant l'horizon, soit après l'horizon.

Dans le premier cas, la particule venant de $+\infty$ retourne à $+\infty$ comme dans le cas ordinaire. Dans le deuxième cas, la particule est diffusée, mais ressort dans une région asymptotique différente. Ceci est plus clair lorsqu'on utilise les diagrammes permettant de "voir" l'espace-temps, avec son extension maximale, dans sa globalité, ainsi que sa structure causale.

L'étape suivante est la perspective de construire et d'étudier une solution trou noir chargé, pour généraliser la solution (ACL).

Annexe A

Quelques détails de calcul

A.1 Calcul des composantes de $g^{\mu\nu}$

les composantes de la métrique de $g^{\mu\nu}$ sont obtenues en calculant l'inverse de la matrice $g_{\mu\nu}$ donnée par l'expression (dans le système de coordonnées (t, ρ, φ)) :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -(2\rho + 3\omega) \\ 0 & \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} & 0 \\ -(2\rho + 3\omega) & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

tel que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 1$, il vient donc :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{r^2}{\rho^2 - \rho_0^2} & 0 & -\frac{2\rho + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} \\ 0 & \rho^2 - \rho_0^2 & 0 \\ -\frac{2\rho + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} & 0 & -\frac{3}{\rho^2 - \rho_0^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

où $r^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \frac{1}{3}\rho_0^2$.

A.2 Calcul des connexions affines

Les connexions non nulles dérivées à partir de la métrique donnée par l'expression

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.3})$$

sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho t}^t &= \Gamma_{t\rho}^t = \frac{2\rho + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} \\ \Gamma_{\rho\varphi}^t &= \Gamma_{\varphi\rho}^t = \frac{r^2 - (2\rho + 3\omega)(\rho + 2\omega)}{\rho^2 - \rho_0^2} \\ \Gamma_{t\varphi}^{\rho} &= \Gamma_{\varphi\rho}^{\rho} = \rho^2 - \rho_0^2 \\ \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} &= -\frac{\rho}{\rho^2 - \rho_0^2} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho} &= -(\rho + 2\omega)(\rho^2 - \rho_0^2) \\ \Gamma_{t\rho}^{\varphi} &= \Gamma_{\rho t}^{\varphi} = \frac{3}{\rho^2 - \rho_0^2} \\ \Gamma_{\rho\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi\rho}^{\varphi} = -\frac{\rho + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Le tenseur de Ricci

Pour étudier l'équation d'Einstein, on a besoin du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ donné par (1.16), (1.12) et (1.11) ou par l'expression suivante :

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln |g|}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^{\eta}} \quad (\text{A.5})$$

où g représente le déterminant de la métrique défini dans (A.19). Dans le cas de la métrique (3.5), $g = -1$. Alors (A.5) implique que les tenseurs de Ricci non nuls sont :

$$\begin{aligned}
R_{t\varphi} &= -(5\rho + 6\omega) \\
R_{\varphi\rho} &= -3\rho \\
R_{\rho\rho} &= -\frac{\rho_0^2}{\rho^2 - \rho_0^2} \\
R_{\varphi\varphi} &= (\rho^2 - \rho_0^2) \left[R_{\rho\rho} - \frac{\rho_0^2}{R_{\rho\rho}} \right] + \omega R_{t\varphi}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

De cette manière, on peut obtenir en fonction du tenseur moment-énergie $T_{\mu\nu}$, l'expression de l'équation d'Einstein. (1.22) devient si on prend un exemple :

$$\begin{aligned}
5\rho + 3\omega &= -8\pi GT_{t\varphi} \\
\rho &= -\frac{8}{3}\pi GT_{\varphi\rho} \\
\frac{2\rho_0^2 + R}{\rho^2 - \rho_0^2} &= -16\pi GT_{\varphi\varphi}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

avec R est la courbure scalaire définie par (1.18).

A.4 Diagrammes de Penrose

Le premier pas qu'on doit faire pour déterminer les fonctions u et v afin de tracer les diagrammes de Penrose est de chercher les expressions de $f(\rho)$ dans tous les cas. Dans ce but, on écrit le système d'équations (5.11)-(5.12) en faisant le choix de u et v indiqué dans (5.13), sous la forme suivante :

$$-\Omega^2 f^2 a^2 = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2} \tag{A.8a}$$

$$\Omega^2 f'^2 = \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \tag{A.8b}$$

avec $f' = \frac{df}{d\rho}$.

Une résolution simple de ce système permet de trouver l'expression de $f(\rho)$ après avoir intégré l'expression :

$$\frac{f'}{f} = \pm a \frac{\sqrt{r^2}}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\text{A.9})$$

L'intégration de cette équation donne une fonction $f(\rho)$ très compliquée et très peu maniable. On procède alors par approximations, ce qui est suffisant.

1) Au voisinage de l'horizon :

Pour pouvoir écrire $f(\rho)$ sous les formes indiquées aux voisinages des horizons dans chaque cas, on suit la procédure du développement limité.

Au voisinage positif de l'horizon ($\rho \gtrsim \rho_0$), on a

$$\begin{cases} r^2 \simeq \frac{(2\rho_0 + 3\omega)^2}{3} \\ \rho^2 - \rho_0^2 \simeq 2\rho_0(\rho - \rho_0) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

alors $f(\rho)$ prend après intégration la forme suivante :

$$f(\rho) = (\rho - \rho_0)^{\pm\alpha} \quad (\text{A.11})$$

avec $\alpha = \frac{a(2\rho_0 + 3\omega)}{2\sqrt{3}\rho_0}$ est une constante, peut être déterminée selon le choix de Ω^2 . En utilisant l'équation (A.8a), on a :

$$\Omega^2 = \frac{6\rho_0}{a^2(2\rho_0 + 3\omega)^2} (\rho - \rho_0)^{1 \mp 2\alpha} \quad (\text{A.12})$$

alors pour que Ω^2 ne soit pas nulle ou tend vers l'infini si $\rho \rightarrow \rho_0$, on choisit :

$$1 \mp 2\alpha = 0 \quad (\text{A.13})$$

donc $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, $a = \pm \frac{\sqrt{3}\rho_0}{2\rho_0 + 3\omega}$ et $\Omega^2 = 2$.

Quand $\rho \rightarrow \rho_0$ et $(-\infty \prec t \prec +\infty)$:

$$u^2 - v^2 \rightarrow 0 \quad (\text{A.14})$$

avec $u \succ 0$ (car $\cosh at \succ 0$).

En fonction des coordonnées ψ et ξ , l'expression précédente sous sa forme extrême :

$$(v + u)(v - u) = 0 \quad (\text{A.15})$$

s'écrit ainsi :

$$\tan\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Cependant, on distingue deux cas :

- Si : $\tan\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) = 0$ ($v + u = 0$), cela implique que :

$$\psi = -\xi \quad (\text{A.17})$$

or

$$\frac{v}{u} = \tanh at \quad (\text{A.18})$$

alors

$$-1 \leq \frac{v}{u} \leq +1 \quad (\text{A.19})$$

ce résultat mène à la condition suivante :

$$v - u \leq 0 \quad (\text{A.20})$$

donc $\tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right)$ doit être négatif. Dans ce cas, l'expression (A.11) permet d'avoir le résultat :

$$0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.21})$$

• Si : $\tan\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) = 0$, on trouve de la même manière que cette fois il s'agit des conditions :

$$v - u = 0 \quad (\text{A.22a})$$

$$\text{et } v + u \geq 0 \quad (\text{A.22b})$$

c'est-à-dire : $\psi = \xi$ implique lorsque $\tan\left(\frac{\psi + \xi}{2}\right) \geq 0$ que :

$$0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.23})$$

Concernant les valeurs négatives voisines de ρ_0 , on procède la même méthode.

B) A l'infini :

Le système d'équation (A.8) devient à l'infini sous cette forme :

$$\begin{cases} -\Omega^2 a^2 f^2 \simeq -1 \\ \Omega^2 f' \simeq \rho^{-2} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

donc

$$\frac{f'}{f} \simeq \pm \frac{a}{\rho} \quad (\text{A.25})$$

alors

$$f(\rho) = \rho^{\pm a} \quad (\text{A.26})$$

L'étude à l'infini permet de déterminer, similairement au cas du Minkowski, le point représentant l'infini de genre espace i^0 de genre temps (i^+ , i^-) et les droites futur et passé de genre lumière (I^+ , I^-). Cela peut être réalisé en étudiant les limites correspondantes des expressions suivantes :

$$\begin{cases} v + u = \rho^a \exp(at) \\ v - u = -\rho^a \exp(-at) \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

1) Le futur de genre espace :

Ce point est correspond à ($\rho \rightarrow \infty$ lorsque t est fini), c'est-à-dire

$$\begin{cases} v + u \rightarrow +\infty \\ v - u \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

en fonction de ψ et ξ , on a :

$$\begin{cases} \psi + \xi = \pi \\ \psi - \xi = -\pi \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

finalement c'est le point ayant les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ \xi = \pi \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

2) Le futur de genre lumière :

Cela est représenté par une droite, on peut obtenir son équation si on fait ρ et t tendre vers l'infini ($\rho + t \rightarrow \infty$ et $t - \rho$ est fini). De la même manière on aura :

$$\begin{cases} v + u \rightarrow \infty \\ -\infty \leq v - u \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

ce résultat peut être traduire en fonction de ψ et ξ et donne l'équation de la droite suivante :

$$\begin{cases} \psi = -\xi + \pi \\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

3) Le passé de genre lumière :

Si on procède le calcul ci-dessus en respectant le fait que $(\rho + t)$ soit fini lorsque $t \rightarrow -\infty$ et $\rho \rightarrow +\infty$, on peut trouver l'équation suivante :

$$\begin{cases} \psi = \xi - \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

car

$$\begin{cases} v - u \rightarrow \infty \\ 0 \leq v + u \leq +\infty \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

C) A une quantité finie :

Si ρ tend vers une valeur finie, le système d'équation précédent mène à deux points représentant le futur i^+ et le passé i^- de genre temps quand $(t \rightarrow +\infty)$ et $(t \rightarrow -\infty)$, respectivement.

1) Le futur de genre temps :

Ce point correspond à la limite infinie positive du temps, qui conduit à ce point :

$$(\psi, \xi) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.35})$$

car

$$\begin{cases} v + u \rightarrow +\infty \\ v - u \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

2) Le passé de genre temps :

Idem, on aura, si $(t \rightarrow -\infty)$, le point ayant les coordonnées suivantes :

$$(\psi, \xi) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.37})$$

où

$$\begin{cases} v + u \rightarrow 0 \\ v - u \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

Annexe B

Glossaire

Cônes de lumière :

Le cône de lumière est délimité par les géodésiques de genre lumière, et permet de tracer la structure causale d'un espace-temps en suivant sa géométrie (la courbure en relativité générale). Les lignes d'univers des particules restent confinées à l'intérieur des cônes de lumière, même si ces dernières sont fortement inclinées et déformées par l'effet de la gravité.

Constante cosmologique :

C'est une constante introduite par Einstein dans sa théorie gravitationnelle pour pouvoir écrire des solutions au champ d'équations représentant une cosmologie statique ; on peut l'interpréter comme une densité d'énergie constante du vide.

Diagramme de Penrose :

Celui-ci est dû au physicien anglais Roger Penrose. Il s'agit d'un diagramme d'espace-temps compact (au sens mathématique) en ramenant les infinis sur des droites (positions finies). Un tel diagramme n'a pas pour but de représenter exactement l'univers, mais simplement d'indiquer des relations causales de l'espace-temps, ainsi que sa structure globale.

Dimensions :

Axe ou direction indépendante dans l'espace ou dans l'espace-temps. Autour de nous,

l'espace qui nous est familier possède trois dimensions ("gauche-droite", "avant-arrière", "haut-bas") et l'espace-temps quatre (les trois axes précédents, plus l'axe "futur-passé").

Ergosphère :

Région voisine d'un trou noir, située à l'extérieur de l'horizon, et limitée par une surface appelée horizon de Killing. Aucun observateur ne peut rester statique dans cette région.

Espace-temps :

Union de l'espace et du temps issue de la relativité restreinte.

Espace-temps asymptotiquement plat :

Un espace-temps est dit asymptotiquement plat si la métrique tend vers celle de Minkowski à l'infini ($r \rightarrow \infty$), où r est lié à la distance à l'origine.

Espace-temps singulier :

Un espace-temps est dit singulier s'il est géodésiquement incomplet, c'est-à-dire si il possède au moins une géodésique ne pouvant être prolongée au-delà d'une valeur finie de son paramètre affine (la singularité se trouvant au bout de cette géodésique).

Géodésique :

Une particule soumise à un champ de gravitation apparaît libre dans un espace-temps courbe, sa trajectoire s'appelle une géodésique : ligne d'univers d'un espace-temps telle que l'arc joignant deux points de cette courbe soit le plus court de tout les arcs de cette surface joignant les deux points.

Géométrie riemannienne :

Cadre mathématique pour décrire des espace courbes de n'importe quelle dimension ; elle joue un rôle capital dans la description d'Einstein de l'espace-temps en relativité générale.

Graviton :

Particule intermédiaire pour le champ de la force gravitationnelle.

Horizon d'événement :

Est une surface indépendante du temps représentant la frontière externe du trou

noir ; aucun objet situé à l'intérieur ne peut s'échapper tant y sont puissantes les forces de gravité. Si deux trous noirs venaient à fusionner, leur horizon serait plus grand que la somme des deux horizons initiaux.

Limite statique (horizon de Killing) :

Frontière externe de l'érgosphère à l'intérieur de laquelle, un corps peut rester statique et doit tourner autour du trou noir.

Métrique :

Un espace est dit avoir une métrique géométrique si on possède un moyen de mesurer l'intervalle séparant deux points infiniment voisins. L'existence de la métrique sur une variété définit la notion de la distance. Un changement de coordonnées change les composantes de la métrique, mais non sa signature (le nombre de valeurs propres positives, négatives ou nulles). Si toutes les valeurs propres sont positives, on dit que la variété est riemannienne. Si certaines sont négatives, la variété est pseudo-riemannienne ou lorentzienne comme l'espace-temps.

Métrique statique :

Une métrique est dite statique si elle stationnaire si le vecteur de Killing de genre temps est orthogonal à une famille d'hypersurfaces. Alors il existe un système de coordonnées où la métrique s'écrit ainsi :

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j$$

Métrique stationnaire :

Une métrique ayant un vecteur de Killing de genre temps (les composantes sont indépendantes du temps) est dite stationnaire. Elle peut être mise sous la forme :

$$ds^2 = -f (dt - \omega_i dx^i) (dt - \omega_j dx^j) + f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j$$

Naine blanche :

Etoile en fin de vie qui consume toutes ses réserves de combustible nucléaire. Elle est

très dense : une naine blanche de la masse du soleil, peut avoir un rayon de l'ordre de 20 *km*.

Phénomène d'orbiting :

Phénomène observé lorsque l'énergie d'une particule (ou d'un photon) n'est pas suffisante pour être diffusée vers $(+\infty)$, mais suffisante pour rester hors du point de diffusion (cas limite). Il résulte un mouvement de rotation autour du point de diffusion qui est atteint asymptotiquement.

Principe d'équivalence :

Un système qui subit une accélération constante par rapport aux étoiles fixes et un autre au repos dans un champ gravitationnel uniforme sont strictement équivalents. On ne peut pas parler d'accélération absolue, pas plus qu'on ne peut parler de vitesse absolue pour des référentiels d'inertie.

Une théorie relativiste de l'interaction gravitationnelle qui établisse l'équivalence entre la masse et l'énergie et qui fait dépendre de la masse, la géométrie et le temps, de la vitesse (relative) de l'observateur ainsi que l'intensité du champ gravitationnel.

Relativité générale :

La relativité générale est la théorie relativiste de l'interaction gravitationnelle.

Relativité restreinte :

Théorie de relativité concernant tous les phénomènes physiques sauf la gravitation. Elle établit l'unité de l'espace et du temps (espace-temps).

Rayon de Schwarzschild :

Rayon à l'intérieur duquel il faut comprimer une masse pour qu'elle devienne un trou noir, il représente la taille du trou et augmente avec la masse.

Singularité :

Région où la matière a une densité infinie et qui n'a pas d'extension spatiale dans notre univers physique, donc c'est une région où il y a une brisure des lois physiques.

Exemple : la courbure infinie de l'espace-temps. Toutes les singularités dans l'univers sont entourées par un horizon d'évènement. Elle est apparente si on peut l'enlever avec

un changement de système de coordonnées en faisant le bon choix, et réelle lorsque aucun système ne peut l'enlever.

Singularité causale :

Elle est indiquée par l'existence des courbes fermées de genre temps : on se trouve au point de départ après un certain temps (le futur sera dans le passé).

Symétrie :

Propriétés d'un système physique qui ne change pas lorsqu'on lui fait subir une certaine transformation. Par exemple, une sphère possède une symétrie de rotation puisque son apparence n'est pas modifiée si on la fait tourner.

Théorème de Birkhoff :

La métrique statique de Schwarzschild est la solution unique à symétrie sphérique, des équations d'Einstein dans le vide.

Trou noir :

Une région de l'espace dotée d'un champ gravitationnel si fort qu'aucun corps ni aucun rayonnement ne peut s'en échapper. Lorsqu'une étoile s'effondre pour donner un trou noir, tout ce qui concerne sa géométrie, sa composition ... est perdu.

Nous représentons habituellement les trous noirs comme les corps célestes les plus massifs. Mais les recherches de la fin des années soixante et du début des années soixante-dix, dûes à Werner Israel [20], Brandon Carter [19], Roy Kerr [13], Stephen Hawking [21] et Roger Penrose [18, 22], ont montré que les trous noirs et les particules élémentaires sont peut être moins différents qu'on ne pourrait le croire. John Wheeler [16] a résumé leurs découvertes en disant que : *"les trous noirs n'ont pas des cheveux"* (en anglais *"black holes have no hair"*). Il entendait par là que deux trous noirs de même masse, de mêmes charges et de même moment angulaire, sont rigoureusement identiques. Et que l'on perd toute information sur un objet qui donne un trou noir, à part sa masse, sa charge et son moment angulaire. De même si on compare deux particules élémentaires ayant les mêmes propriétés : masses, charges et spins.

Trou noir de BTZ :

Est découvert par Bañados-Teitelboim-Zanelli, qui sont les solutions exactes au champ d'équations d'Einstein dans la gravitation tridimensionnelle avec une constante cosmologique négative.

Trou de ver (wormhole) :

Région de l'espace semblable à un tube, qui relie une région asymptotique de l'univers à une autre.

Bibliographie

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys. (Germany)* **17**, (1905) 891.
- [2] A. Einstein, *Annalen der Phys.* **49**, (1916) 769.
- [3] M. D. Kruskal, *Phys. rev.* **119**, (1960) 1743.
G. Szekzers, *Publ. Math. Debrecen* **7**, (1960) 285.
- [4] M. T. Grisaru, *Physica A* **124**, (1984), 347.
- [5] S. Deser and R. Jackiw ; *Annals Phys.* **153'**, (1984) 405.
S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, (1984) 220.
- [6] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, (1992) 1849.
M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D48**, (1993), 1506.
- [7] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48**, (1982) 975.
S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140**, (1982) 372.
- [8] K. Ait Moussa, G. Clément and C. Leygnac, *Class. Quantum Grav.* **20**, (2003) L227.
- [9] I. Vuorio, *Phys. Lett.* **B163**, (1985) 91.
- [10] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, "The dynamics of general relativit" (in "Gravitation : an introduction to current researc", L. Witten ed., Wiley, New York, (1962), p.227).
- [11] L. Landau et E. Lifschitz, "Théorie des champ" (EditionsMir, Moscou, 1970).
- [12] K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.* (1916) 189.

- [13] R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, (1963) 237.
- [14] H. Reissner, *Ann. Phys. (Germany)* **50**, (1916) 106.
G. Nordstrøm, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, (1918) 1238.
- [15] E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6**, (1965) 918.
- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, "*Gravitation*", (Freeman, New York, 1973).
- [17] S. Weinberg, "*Gravitation and Cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity*", (Wiley, New York, 1972).
- [18] R. Penrose, "*Conformal treatment of infinity*", in "*Relativity, Groups and Topology*", C; de Witt and B.S. de Witt editors, Gordon and Breach, New York, (1964).
- [19] B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, (1963) 1559.
- [20] W. Israel, *Phys. Rev.* **164**, (1967) 1776.
- [21] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25**, (1972) 152.
S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, (1975) 199.
- [22] R. Penrose, *Riv. Nuovo Cim.* **1**, (1969) 252.

Abstract:

The standard Einstein equations in (2+1) space-time dimensions, without cosmological constant, admit a black hole solution: *the Kerr-like rotating black hole of topologically massive gravity*, given by the (ACL) metric.

Investigating its geodesic properties, the peculiarity of this solution is that the ergosphere extends to the whole space-time outside the horizons, so that no observer can stand static. This will be shown in describing the particles trajectories by founding the effective potentials. Particles and photons can reflect at the turning point if it exists. If not, they fall directly into the black hole. According to the position of this point compared to the horizons, the rigorous study shows that some time-like trajectories may cross the outer and the inner event horizons and pass from an asymptotically flat external universe to another, where the gravity can be attractive or repulsive.

These phenomena as well as the orbiting one are well explained using the Penrose diagrams by studying the photon's approach to the event horizons in the various cases: in presence and absence of the closed time-like curves (CTC). These latter can occur for certain values of the radial coordinate if one of the two parameters characterizing the black hole is positive, in order to our space to have an admissible causal structure the (CTC) situate in the interior of the hole.

Key words:

General relativity, Gravity, Black holes, Causal structure, Penrose diagrams.

المخلص:

تؤدي معادلات أينشتاين في ز-فضاء ذو بعد (1+2) إلى حل مميز لثقب أسود، يعطى بواسطة مترية (ACL) من شكل Kerr الدوراني في الجاذبية ذات الكتلة الطوبولوجية.

دراسة خصائصه تبين أن أهم ما يميز هذا الحل هو أن منطقة l'ergosphere تغطي كل ز-فضاء ما بعد الأفق المميز للثقب، حيث لا يمكن لأي جسم أن يتواجد ساكنا. يمكن ملاحظة ذلك عند دراسة مسار الجزيئات و الفوتونات عن طريق إيجاد الكمونات الفعالة التي تبين أن هذه الجزيئات إما تجذب إلى مركز الثقب الأسود أو تنعكس عند التقائها بنقطة الانتشار، حيث يمكن لها أن تنتقل، حسب موقع هذه النقطة بالنسبة للوسيطيين المميزين للثقب، إلى فضاء آخر (فضاء مستوي مقارب أو فضاء ذو الجاذبية العكسية).

هذه الظواهر وغيرها تظهر جليا من خلال منحنيات Penrose عند دراسة ظاهرة اقتراب الفوتونات من خطي الأفق في الحالتين: ظهور واختفاء المنحنيات المغلقة من نوع زمن (CTC) تظهر من أجل قيم معينة للمتغير القطري إذا كان أحد الوسيطيين المميزين للثقب موجبا، لأجل أن يأخذ ز-فضاء هندسة فيزيائية مقبولة.

كلمات مفتاح:

نظرية النسبية العامة، الجاذبية، الثقب الأسود، الأحادية السببية، منحنيات Penrose.

Résumé:

Les équations standard d'Einstein à (2+1) dimensions sans la constante cosmologique, admettent une solution trou noir *de type Kerr de la gravitation topologiquement massive*, donnée par la métrique (ACL).

En étudiant les propriétés de ses géodésiques, la particularité de cette solution est que la région de l'érgosphère recouvre tout l'espace-temps à l'extérieur des horizons, de sorte qu'aucun observateur ne puisse se tenir statique. Cela peut être montré en décrivant les trajectoires des particules à partir des potentiels effectifs. Les particules et les photons tombent directement vers le trou noir ou sont réfléchies en un point de diffusion. Selon la position de ce point par rapport aux horizons, l'étude rigoureuse montre que les géodésiques de genre temps peuvent se trouver dans un autre univers (univers asymptotiquement plat ou univers d'antigravité).

Ces phénomènes ainsi que le phénomène d'orbiting sont bien expliqués à l'aide des diagrammes de Penrose en étudiant l'approche de l'horizon dans les différents cas : en présence et en absence des courbes fermées de genre temps (CFT). Ces courbes peuvent exister pour certaines valeurs de la variable radiale si un des paramètres associés au trou noir est positif; pour que notre espace-temps possède une structure causale admissible.

Mots clés:

Relativité générale, Gravitation, Trou noir, Structure causale, Diagrammes de Penrose.