

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

Spécialité : PHYSIQUE ENERGETIQUE

Option : PHOTOTHERMIQUE

THEME :

***TRANSFERTS THERMIQUES DANS
UN CONDUIT CYLINDRIQUE
ANNULAIRE MUNI D'AILETTES***

Par

BENKHEDDA Mohamed

Soutenu le : / /2010

Devant le jury :

Président	Mr. L. BAH	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur	Mr. T. BOUFENDI	M. C. A	Univ. Mentouri Constantine
Examineurs	Mr. A. BELHAMRI	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
	Mr. N. ATTAF	Prof.	Univ. Mentouri Constantine

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **T. BOUFENDI** Maître de conférences au département de physique à l'Université Mentouri Constantine, pour l'encadrement de ce mémoire de Magister, ses conseils et ses critiques qui m'ont permis de présenter ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur **L. BAH**, professeur au département de physique à l'université Mentouri Constantine, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse.*

*Mes vifs remerciement à messieurs : **A. BELHAMRI**, professeur au département de Génie climatique à l'université Mentouri Constantine et **N. ATTAF**, professeur au département de physique à l'université Mentouri Constantine, qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury et d'examiner mon travail.*

Nomenclature

d	:	diamètre caractéristique (m)
e_i	:	épaisseur du cylindre intérieur (m)
e_e	:	épaisseur du cylindre extérieur (m)
$h(\theta, z)$:	coefficient de convection thermique local ($\text{W/m}^2 \text{K}$)
$h(z)$:	coefficient de convection thermique axiale ($\text{W/m}^2 \text{K}$)
IL	:	nombre de nœuds total dans la direction radiale
JL	:	nombre de nœuds total dans la direction axiale
KL	:	nombre de nœuds total dans la direction azimutale
K_0	:	conductivité thermique du fluide (W/mK)
K_s	:	conductivité thermique du solide (W/mK)
L	:	longueur du conduit (m)
L^*	:	longueur adimensionnelle du conduit (m)
p	:	pression (Pa)
p^*	:	pression adimensionnelle $[(p-p_0)/\rho_0 V_0^2]$
q_w	:	densité de flux de chaleur (W/m^2)
R_{1i}	:	rayon intérieur du cylindre intérieur (m)
R_{1e}	:	rayon extérieur du cylindre intérieur (m)
R_{2i}	:	rayon intérieur du cylindre extérieur (m)
R_{2e}	:	rayon extérieur du cylindre extérieur (m)
r	:	coordonnée dans la direction radiale (m)
r	:	coordonnée dans la direction radiale (m)
r^*	:	coordonnée radiale adimensionnelle (r/d)
t	:	temps (s)
t^*	:	temps adimensionnelle ($V_0 t / d$)
T	:	température (K)
T^*	:	température adimensionnelle $(\frac{T - T_0}{q_w d / K})$
U	:	composante radiale de la vitesse (m/s)
U^*	:	composante radiale de la vitesse adimensionnelle (U/V_0)

V	:	composante axiale de la vitesse (m/s)
V^*	:	composante axiale adimensionnelle de la vitesse (V/V_0)
V_0	:	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit (m/s)
W	:	composante azimutale de la vitesse (m/s)
W^*	:	composante azimutale de la vitesse adimensionnelle (W/V_0)
Z	:	coordonnée dans la direction axiale (m)
Z^*	:	coordonnée axiale adimensionnelle (z/d)

Symboles Grecs

α	:	diffusivité thermique (m^2/s)
β	:	coefficient d'expansion thermique ($1/K$)
Δ	:	intervalle fini
θ	:	coordonnée dans la direction azimutale (rad)
μ	:	viscosité dynamique ($kg\ m/s$)
ν	:	viscosité cinématique (m^2/s)
ρ	:	masse volumique (kg/m^3)

Indices

N, S	:	nœuds nord et sud respectivement
E, W	:	nœuds est et ouest respectivement
T, B	:	nœuds haut et bas respectivement
n, s	:	face nord et sud du volume de contrôle typique respectivement
e, w	:	face est et ouest du volume de contrôle typique respectivement
t, b	:	face haut et bas du volume de contrôle typique respectivement
i, e	:	fait référence au nœud P d'un volume fini typique
u	:	décalage de maillage suivant la direction radiale
w	:	décalage de maillage suivant la direction azimutale
v	:	décalage de maillage suivant la direction axiale
i	:	relatif au nœud considéré
i+1	:	relatif au nœud en amont du nœud considéré
i-1	:	relatif au nœud en aval du nœud considéré

Exposants

- * : variable adimensionnelle
1 : désigne l'instant (t)
0 : désigne l'instant ($t - \Delta t$)

Nombres sans dimension

- Re : nombre de Reynolds $\left(Re = \frac{\rho_0 v_0 d}{\mu} \right)$
Pr : nombre de Prandlt $\left(Pr = \frac{\nu}{\alpha} \right)$
Ri : nombre de Richardson $\left(Ri = \frac{Gr}{Re^2} \right)$
Gr : nombre de Grashof $\left(Gr = \frac{g \beta q_w d^4}{K \nu^2} \right)$
Nu (θ, z) : nombre de Nusselt local $\left(Nu(\theta, z) = \frac{h(\theta, z) d}{K} \right)$
Nu (z) : nombre de Nusselt local axial moyen circonférentiel $\left(Nu(z) = \frac{h(z) d}{K} \right)$
Nu : nombre de Nusselt moyen

TABLES DES MATIERES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1	Introduction	1
1.2	Revue bibliographique	2
1.3	Problématique et objectif de ce travail	21

CHAPITRE 2

MODELISATION MATHEMATIQUE

2.1	Introduction	23
2.2	Description du système	23
2.3	Hypothèses simplificatrices.....	25
2.4	Equations du problème.....	25
2.4.1.	Equation de continuité.....	25
2.4.2.	Equation de quantité de mouvement radial	25
2.4.3.	Equation de quantité de mouvement azimutale.....	25
2.4.4.	Equation de quantité de mouvement axiale.....	26
2.4.5.	Equation de l'énergie.....	26
2.5	Conditions aux limites.....	26
2.6	Adimensionnalisation des équations	27
2.6.1.	Forme adimensionnelle des équations du problème.....	27
2.6.1.1.	Equation de continuité.....	27
2.6.1.2.	Equation de quantité de mouvement radiale (r)	27
2.6.1.3.	Equation de quantité de mouvement azimutale (θ)	28
2.6.1.4.	Equation de quantité de mouvement axiale (Z)	28
2.6.1.5.	Equation de l'énergie	28
2.6.2.	Forme adimensionnelle des conditions aux limites.....	28
2.7	Le nombre de Nusselt.....	29
2.8	Matériel utilisé dans la simulation	30

CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE

3.1	Choix de la méthode de résolution.....	31
3.2	Le maillage.....	31
3.3	Discrétisation des différentes dérivées.....	34
3.3.1	Discrétisation temporelle.....	34
3.3.2	Discrétisation spatiale.....	34
3.3.3	Stockage des variables.....	35
3.4	La discrétisation des équations.....	36
3.4.1	Equation de continuité.....	36
3.4.2	Equation de quantité de mouvement radial.....	36
3.4.3	Equation de quantité de mouvement azimutale.....	40
3.4.4	Equation de quantité de mouvement axial.....	43
3.4.5	L'équation de l'énergie.....	47
3.5	Discrétisation des conditions aux limites.....	48
3.5.1	A l'entrée du cylindre ($z = 0$).....	49
3.5.2	A la sortie du cylindre ($z = 10$).....	50
3.5.3	La paroi du cylindre extérieur.....	52
3.5.4	La paroi du cylindre intérieur.....	52
3.6	Couplage pression-vitesse.....	53
3.7	Séquences de l'algorithme de calcul simplifier.....	56
3.8	Solution des systèmes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage.....	57
3.8.1	L'algorithme de Thomas.....	57
3.8.2	L'algorithme de Thomas cyclique.....	58
3.8.3	Structure du programme de calcul.....	61

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSION

4.1	Introduction.....	63
4.2	Le cas de référence : la convection forcée sans ailettes.....	64
4.2.1	Le champ de vitesse axiale (V_z).....	64
4.2.2	Le champ thermique.....	66
4.2.3	Evolution axiale de la température moyenne du fluide.....	69

4.2.4	Evolution axiale du nombre de Nusselt.....	69	
4.3	La convection mixte sans ailettes.....	70	
4.3.1	Le champ de vitesse axiale (V_z).....	70	
4.3.2	Le champ thermique.....	72	
4.3.3	Le nombre de Nusselt axial.....	75	
4.4	La convection forcée et mixte avec ailettes.....	76	
4.4.1	Caractéristiques géométriques et physiques des ailettes.....	76	
4.4.2	La convection forcée avec ailettes.....	77	
4.4.2.1	Le champ de vitesse axiale (V_z).....	77	
4.4.2.2	Evolution axiale de la température moyenne.....	86	
4.4.2.3	La variation du nombre de Nusselt axial.....	87	
4.4.3	La convection mixte avec ailettes.....	88	
4.4.3.1	Le champ de vitesse axiale V_z	88	
4.4.3.2	L'écoulement secondaire.....	99	
4.4.3.3	Le champ de température.....	101	
4.4.3.4	La variation axiale de la température moyenne.....	110	
4.4.3.5	La variation du nombre de Nusselt axial.....	111	
CHAPITRE 5			
CONCLUSION GENERALE.....			112
Références bibliographiques.....			115

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 INTRODUCTION

La présence d'un gradient de température entre deux cylindres traversés par un fluide entraîne l'apparition d'un écoulement avec transport de chaleur. En effet, la différence de température provoque une distribution non uniforme de la densité du fluide, ce qui donne naissance au mouvement du fluide sous l'effet de la gravité (poussée d'Archimède). Ce phénomène est appelé convection naturelle.

La convection forcée : la convection est dite forcée quand il existe une cause de mouvement autre que les variations de températures du fluide, cette cause étant seule à prendre en compte, en raison de son importance relative.

La convection mixte : La convection mixte est le résultat de la superposition d'un écoulement de convection forcée et d'un écoulement de convection naturelle. Lorsque les écoulements de convection forcée et de convection naturelle vont dans le même sens, on est en présence d'un écoulement de convection mixte favorable. Dans le cas contraire, on assiste à un écoulement de convection mixte défavorable, Laplante et Bernier [6].

Le nombre adimensionnel qui détermine laquelle de ces deux convections est dominante est le nombre de Richardson, (Ri). C'est le rapport du nombre de Grashof, (Gr), au

carré du nombre de Reynolds, (Re) : $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$.

- Pour $\frac{Gr}{Re^2} \leq 0.1$ la convection forcée qui domine.
- Pour $\frac{Gr}{Re^2} \geq 10$ la convection naturelle qui domine.
- Pour $\frac{Gr}{Re^2} \cong 1$ la convection est mixte (naturelle et forcée).

1.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Cette partie est consacrée à la revue des principales investigations effectuées par le passé sur la convection (forcée, naturelle ou mixte) dans des géométries cylindriques munies d'ailettes et qui sont en relation directe avec notre étude.

Prakash et Renzoni [1] ont présenté des résultats d'une étude numérique sur la combinaison de la convection forcée et libre pour un écoulement laminaire complètement développé contre la gravité c.-à-d. dans la direction verticale entre deux cylindres concentriques avec différents nombres d'ailettes radiales $N = 8, 16, 24$, supposées être d'épaisseurs nulles, fixées à l'extérieur du tube intérieur et différents nombres de Rayleigh Ra (0, 600, 1200, 1800). Un flux de chaleur pariétal appliqué sur le tube intérieur tandis que la paroi extérieure est isolée. Ils ont choisi un domaine de calcul entre deux ailettes adjacentes et les équations de base sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les résultats obtenus montrent que la flottabilité augmente le facteur du frottement f et le transfert de chaleur et ces résultats sont comparés avec le cas sans pesanteur. Cet effet est plus fort quand le nombre d'ailettes est faible ou que les ailettes sont courtes, en tenant compte des effets de pesanteur, un passage ailetté semble être une conception d'échangeur de chaleur plus efficace.

Rustum et Soliman [2] ont présenté des résultats d'une étude numérique par la méthode des différences finies sur la convection mixte dans un conduit cylindrique horizontal avec plusieurs ailettes longitudinales droites distribuées également autour de la circonférence intérieure, avec un flux de chaleur uniforme axialement et une température pariétale uniforme de la paroi avec ailettes. Le fluide Newtonien et incompressible est en écoulement laminaire établi dont les propriétés thermophysiques sont constantes à l'exception de la densité qui dépend de la température où l'effet de la flottabilité est considéré. La conduction axiale et la dissipation visqueuse dans le fluide sont supposées être négligeables. Les résultats obtenus correspondent à un nombre d'ailettes $M = 4$ et une hauteur $H = 0.2, 0.5$ et 0.8 avec un nombre de Prandtl $Pr = 7$ et différents nombres de Grashof modifié $Gr^+ = (g \beta Q' D^3) / \pi k \gamma^2$ dans l'intervalle $0 \leq Gr^+ \leq 2 \times 10^6$. Les résultats calculés incluent les composantes de l'écoulement secondaire, les distributions de la vitesse axiale et la température, le flux de la chaleur pariétal, et le coefficient de frottement f et le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} . La présence d'ailettes internes retarde l'apparition de la convection naturelle qui supprime l'amélioration du coefficient de frottement et le nombre de Nusselt. Ces résultats sont

comparés avec le cas des tubes lisses. Un accord satisfaisant est obtenu entre les présents résultats numériques et les données expérimentales qui ont été publiés précédemment.

Zhang et Faghri [3] ont présenté une étude numérique instationnaire sur l'amélioration du transfert de chaleur pour une énergie thermique latente stockée dans un système PCM (matière du changement de phase) par l'utilisation des tubes avec des ailettes internes (voir figure 1.1) le PCM est supposé adiabatique au rayon externe R_e . Cette supposition est nécessaire pour résoudre ce problème et ont utilisé une corrélation pour le nombre de Nusselt qui est proposé par Edward et Jensen [4]

$$Nu = \frac{0.023(l_c/D)^{0.2}}{(1.35 - 0.35l_c/D)} Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

Les équations de base sont discrétisées par la méthode des volumes finis, une comparaison qui est basée sur le même diamètre et la même vitesse de l'écoulement de fluide a été faite entre les tubes pleins à l'intérieur et les tubes avec ailettes internes. Les résultats obtenus montrent que le MVF (fraction de volume fondant) peut avoir une augmentation considérable si l'épaisseur, la hauteur et le nombre d'ailettes augmentent. Ils montrent qu'à faible nombre de Reynolds (Re) et une conductivité thermique k les ailettes peuvent être une façon très efficace afin d'augmenter le transfert de chaleur.

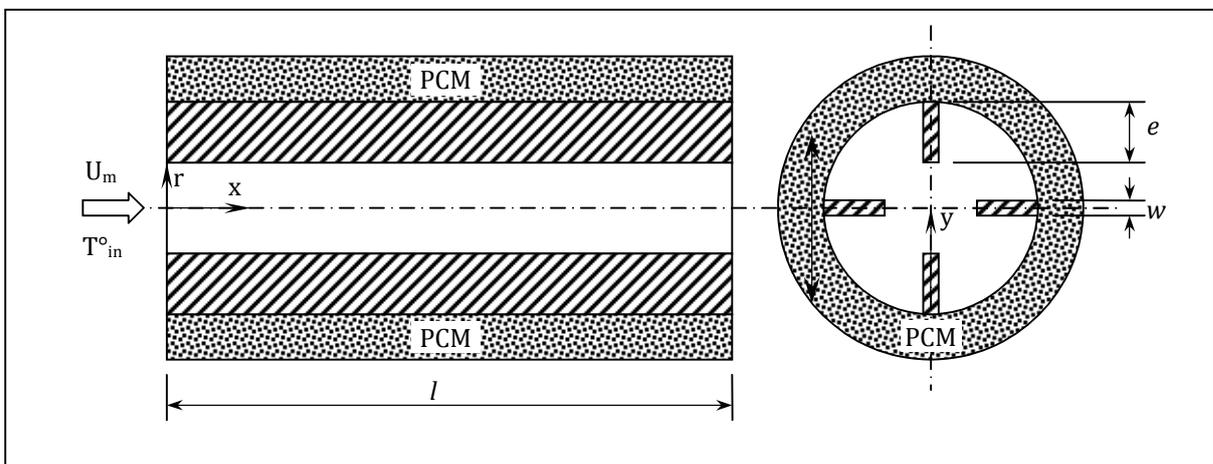


Figure 1.1 : Représentation d'un système PCM de stockage d'énergie dans un tube avec des ailettes internes [3].

Ranganathan et Kumar [5] ont présenté des résultats numériques sur le flux de transfert de chaleur et le champ d'écoulement par la convection naturelle d'un écoulement permanent et laminaire d'air entre deux cylindres verticaux tridimensionnels avec des ailettes longitudinales attachées sur le cylindre intérieur, et des conditions aux limites telles que la

paroi intérieure est maintenue à une température constante (T_i) et la paroi extérieure à une température constante (T_e) mais ($T_e < T_i$) (voir figure 1.2), pour plusieurs paramètres : le nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$), le rapport des rayons ($\kappa = R_e/R_i$) compris entre 1 et 5 ($1 \leq \kappa \leq 5$), le rapport FR (largeur d'ailette ($L_{ailette}$)/largeur de l'intervalle(L)), compris entre 0.25 et 0.75 ($0.25 \leq FR \leq 0.75$), le nombre d'ailettes (n) et l'angle d'épaisseur d'ailettes ($\delta = 2^\circ$ ou 6°). Le code utilisé est de type commercial : PHOENICS.

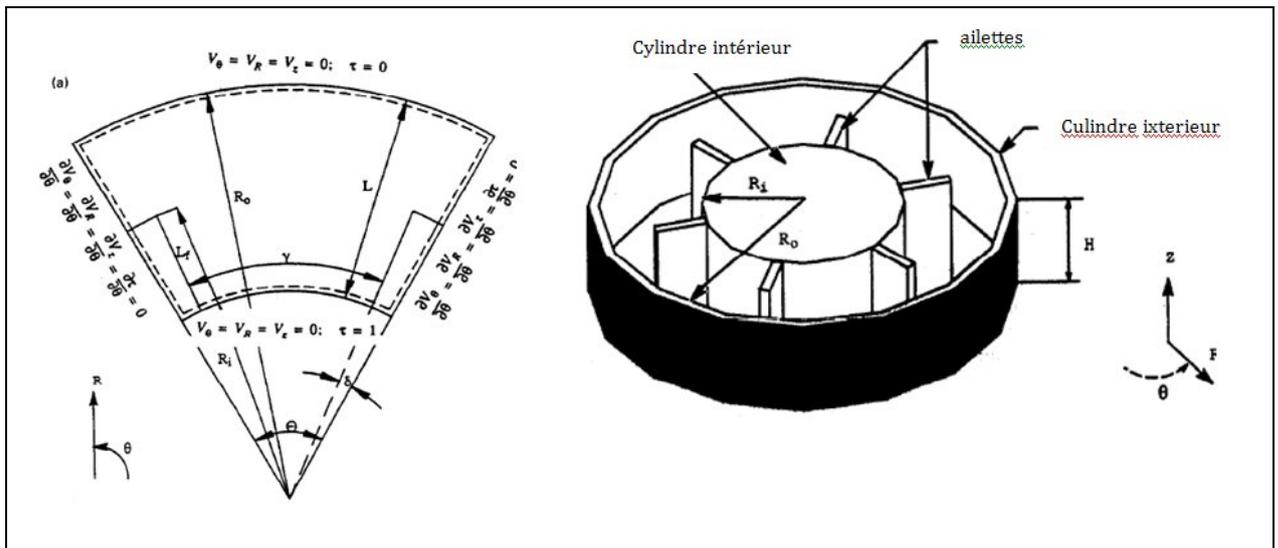


Figure 1.2 : Géométrie du modèle physique [5].

Ils ont trouvé les résultats suivants :

- 1- Le taux du transfert de chaleur dans le cylindre intérieur peut-être maximal pour un nombre d'ailettes spécifiques.
- 2- Le champ de température et le champ de vitesse montrent une dépendance forte de plusieurs paramètres géométriques. Le fluide plus froid est confiné dans une grande région près de la base du cylindre dont la dimension augmente quand κ augmente. Les cellules secondaires observées complètement dans le cas où κ diminue, et elles disparaissent pour les plus grandes valeurs de κ .
- 3- Le nombre de Nusselt \overline{Nu}_{max} , et Θ_{opt} (angle optimisé entre deux ailettes pour un transfert de chaleur maximum), subit une augmentation avec κ . En augmentant κ de

1 à 5 (cavité carrée), la vitesse maximum du transfert de chaleur peut être augmentée considérablement.

4- Pour un nombre d'aspect $A > 1$ le flux de chaleur est diminué. Par conséquent, les cylindres plus courts sont recommandés pour un large stockage.

5- Deux corrélations ont été trouvées pour \overline{Nu}_{\max} et, Θ_{opt} en fonction de Ra qui sont linéaires dans l'échelle logarithmique:

$$\overline{Nu}_{\max} = cRa^l k^m \quad ; \quad \Theta_{opt} = cRa^q k^r$$

où κ , m , q , l , r et c sont portés dans des tableaux explicités dans la référence citée.

Laplante et Bernier [6] ont étudié numériquement la convection mixte défavorable (l'écoulement de convection forcée et naturelle sont de sens contraires) et conjugué (la conduction dans la paroi est significative) dans une conduite verticale, avec un profil de vitesse parabolique et une température uniforme T_0 à l'entrée figure 1.3, Les équations de base qui sont non linéaires ont été discrétisées par la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus sont représentés pour l'eau ($Pr = 5$) et pour deux valeurs du rapport Gr_q / Re^2 (50 et 500). Cette étude démontre l'importance d'une quantité de chaleur fournie à la section chauffée qui est redistribuée en amont et en aval de celle-ci et l'étendue de cette redistribution augmente avec K (rapport des conductivités thermique solide-fluide) et/ou Δ (rapport entre l'épaisseur et le diamètre du tube). Dans certains cas, la chaleur transmise dans la paroi peut se propager jusqu'à un diamètre de 25 en amont de la section chauffé. Les résultats indiquent aussi que dans la cellule de recirculation pour un rapport $Gr / Re^2 = 5000$, une cellule de recirculation s'étend en amont de la section chauffé. Cette cellule agit comme un isolant dans la section de préchauffage la chaleur transmet dans la paroi se propage jusqu'au début de la cellule avant d'être transmise au fluide.

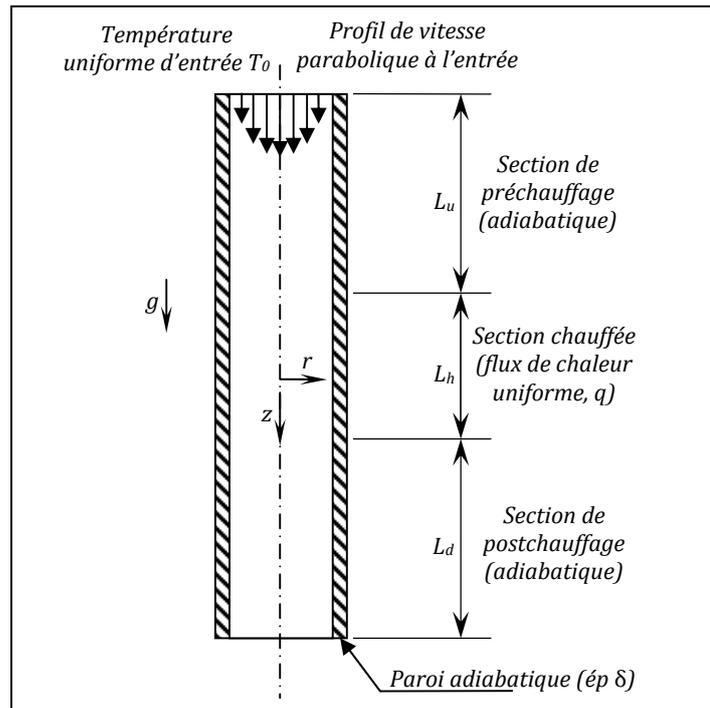


Figure 1.3 : Cylindre vertical avec Ailettes longitudinales [6]

Farinas et al. [7] ont déterminé numériquement l'effet des ailettes placées dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux sur une convection naturelle d'un écoulement laminaire et bidimensionnel d'air ($Pr = 0.7$). La distribution de la température imposée constante et égale à la température de la surface du cylindre intérieur T_H . La température à la surface du cylindre extérieur est maintenue à T_C avec ($T_C < T_H$) (T_C : température adimensionnelle de la paroi froid et T_H température adimensionnelle de la paroi chaude) et les propriétés thermo-physiques de fluide sont indépendantes de la température, à l'exception de la densité pour laquelle l'approximation Boussinesq est valide. La dissipation visqueuse, la compressibilité et le rayonnement sont négligés. La méthode numérique utilisée est celle des éléments finis avec la formulation Galerkin pour la discrétisation des équations régissant l'écoulement. Deux configurations avec 6 ailettes et une longueur l ont été étudiées. La configuration 1 : une demi géométrie où la ligne verticale passe directement sur la longueur d'ailette. La configuration 2 représente la même demi géométrie mais tournée d'un angle de 30° . Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds variant de 10^3 à 10^6 pour les deux configurations 1 et 2, une géométrie d'ailettes (fine, arrondie ou divergente) et une longueur ($l = 0.25, 0.5$ et 0.75). Ces résultats sont illustrés sous forme d'isothermes, de champ de vitesse, de nombre de Nusselt et d'efficacité d'ailettes. La configuration 2 présente un taux de transfert de chaleur de 10% supérieure à la

configuration 1 pour $Ra = 10^6$. Le transfert de chaleur est presque le même pour les trois géométries d'ailettes mais la meilleure efficacité est associée à l'ailette arrondie. L'ailette divergente produit un écoulement plus complexe que les autres, et ayant un rapport avec sa géométrie. Le nombre de Nusselt est proportionnel à Ra et la longueur d'ailette l . De plus l'augmentation du nombre de Nusselt avec le nombre Rayleigh s'accroît avec la dimension d'ailette. Ils ont conclu aussi par conséquent que les meilleurs résultats du transfert de chaleur ont été trouvés pour la configuration 2 avec l'ailette arrondie de longueur $l = 0.75$.

Huq et Aziz [8] ont fait une étude expérimentale pour mesurer le transfert de chaleur dans un tube circulaire muni d'ailettes internes pour un écoulement d'air turbulent. Ils ont utilisé un montage expérimental (figure 1.4) qui a été conçu pour étudier la performance du transfert de chaleur dans la zone d'entrée et dans la région où l'écoulement est complètement développé. La section test est de longueur 15.2 m et le diamètre intérieur du tube est de 70 mm. Ce dernier contient six ailettes de même espace, de hauteur 15 mm. Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique varie de 2.6×10^4 à 7.9×10^4 . La chaleur est fournie à l'aide d'un système électrique chauffant qui génère un flux thermique constant autour de la surface du tube sur toute la longueur de la section test.

Ils ont trouvé qu'il y'a :

1- Des gradients de pression importants et de grands coefficients de transfert de chaleur dans la zone d'entrée, à l'approche des valeurs pour l'écoulement complètement développées qui et loin de la section d'entrée.

2- Le nombre de Nusselt est très grand dans la zone d'entrée. Et Il est diminué avec l'augmentation de la distance axiale. Il y'a une approche asymptotique des valeurs pour l'écoulement complètement développée.

3- Les résultats montrent aussi qu'il y'a une augmentation de la longueur de l'entrée thermique avec le nombre de Reynolds. Les longueurs d'entrée thermiques étaient $6.25 D$ pour un nombre de Reynolds 4.42×10^4 et $5.2 D$ pour le nombre de Reynolds 1.56×10^4 .

4- Les valeurs du coefficient de transfert de chaleur, basé sur le diamètre intérieur et une zone nominale, le transfert de chaleur pour un tube avec ailettes dépassé les valeurs du tube lisses de 97% à 112% pour un nombre de Reynolds variant de 2.66×10^4 à 7.86×10^4 . Quand on les compare avec un tube lisse avec une pompe de puissance constante et une géométrie du tube constante une grande amélioration a été obtenue de 52%. pour le taux de transfert de chaleur

local. Un critère $R_3 = h_i/h_{op}$ dans la gamme de 1.36 à 1.52 pour un nombre de Reynolds Re_0 compris entre 4.49×10^4 et 1.19×10^4 .

Les résultats de cette étude indiquent que l'amélioration du transfert de chaleur est considérable n'est possible que si on utilise des ailettes internes sans sacrifier aucune pompe de puissance supplémentaire.

Les résultats expérimentaux sont supposés être très utiles pour l'architecture des canalisations des tubes de l'échangeur de la chaleur.

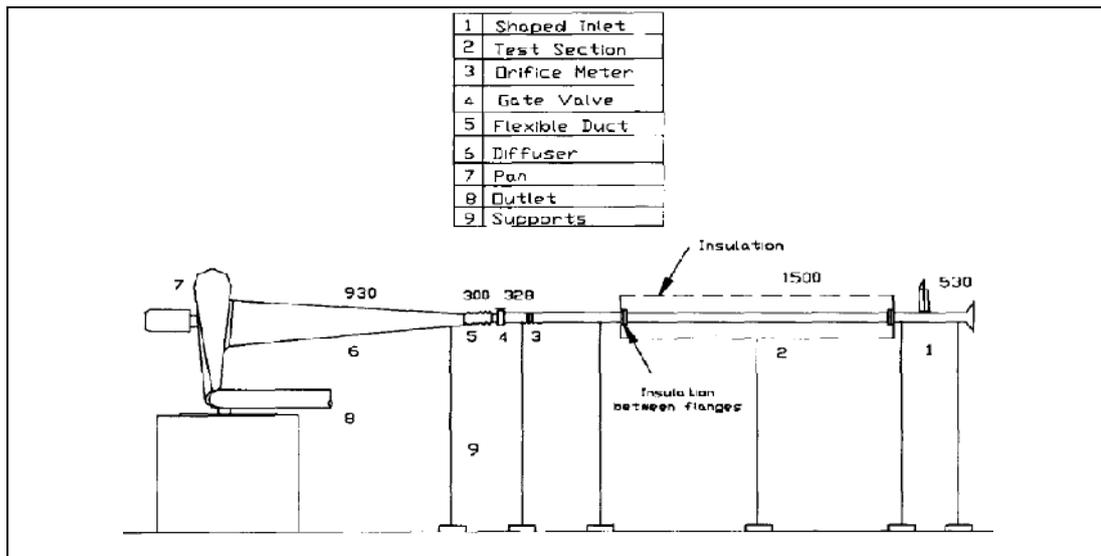


Figure 1.4 : Montage expérimental [8]

Farinas et al. [9] ont présenté une étude numérique sur l'écoulement engendré par la convection naturelle et laminaire bidimensionnelle dans une cavité rhombique horizontale remplie d'air sans ailettes puis avec ailettes, le fluide est incompressible, Newtonien et symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le milieu de la cavité, les propriétés de l'air sont indépendantes de la température sauf la densité pour laquelle l'approximation de Boussinesq est valide. La paroi intérieure est maintenue à une température T_H supérieure à la température T_C de la paroi extérieure. Deux configurations d'ailettes ont été étudiées (voir figure 1.5). Les équations de conservation sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus pour des largeurs de cavité Eg varient de 0.25 à 0.875, et de hauteur varient de 0.3 à 0.7 et des nombres de Rayleigh entre 10^3 et 10^7 montrent que l'étude de la géométrie rhombique a révélé que le meilleur transfert de chaleur est obtenu avec la configuration avec ailettes pour $Eg = 0.25$ et $l = 0.7$ cependant, le transfert de chaleur a lieu par conduction, et non par convection naturelle et que la géométrie de la cavité de $Eg = 0.25$

comporte des paroi très rapproché, ce qui minimise la résistance thermique au sien de la cavité, d'autre part quand la convection domine le transfert de chaleur est maximisé avec la configuration 1 de $Eg = 0.875$ et $l = 0,7$ qui offre la meilleur performance.

Dans toutes les géométries étudiées la conductivité équivalente a été corrélée ainsi en fonction du nombre de Rayleigh $k_{equ} = CRa^n$.

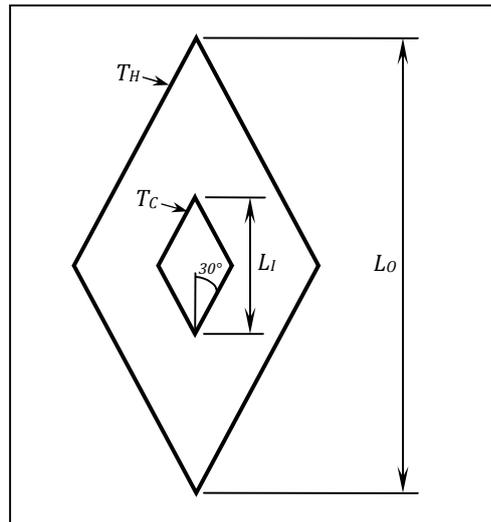


Figure 1.5 : Géométrie rhombique [9]

Rahnama et Farhadi [10] ont étudié numériquement l'effet des ailettes sur la convection naturelle partie (1), et la convection turbulente partie (2), entre deux cylindres horizontaux concentriques avec des ailettes radiales attachées sur la paroi intérieure du cylindre intérieur. Dans la première partie la précision de la solution de la méthode étudiée sur l'estimation de la convection naturelle dans une couronne, dans la deuxième partie les résultats sont présentés pour la convection turbulente dans une couronne avec des ailettes radiales et l'effet de la hauteur d'ailette. Les équations de conservation sont résolues par la méthode des différences finies, pour un nombre d'ailettes sélectionné entre 2 à 12 et un nombre de Rayleigh variant entre 10^6 à 10^9 .

Les majeures conclusions suivantes peuvent être sorties de cette étude :

1- l'arrangement d'ailettes n'a pas un effet considérable sur le nombre de Nusselt moyen, bien que la prédiction de son effet sur l'écoulement et les champs de température sont remarquables pour le cas de quatre ailettes.

2- Pour toutes les configurations, les résultats indiquent que les nombres de Nusselt locaux augmentent avec une augmentation du nombre de Rayleigh

3- Les ailettes ayant une grande hauteur cause un certain blocage qui s'effectue sur le mouvement de fluide. S'il y a une tendance vers la réduction du taux de transfert de chaleur entre deux cylindres horizontaux concentriques, il faut utiliser des ailettes à grande hauteur.

Choukairy et Bennacer [11] ont étudié numériquement l'effet d'un obstacle sur le transfert de chaleur induit par la convection naturelle d'un écoulement bidimensionnel entre deux cylindres coaxiaux verticaux (voir figure 1.6), dont les parois verticales sont maintenues à des températures différents et uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques. La variation de la masse volumique est régie par l'approximation de Boussinesq. Les différentes équations régissant sont résolues à l'aide de la méthode aux volumes finis dans un maillage irrégulier resserré près des parois du cylindre et autour de l'obstacle où les forts gradients sont rencontrés. Les résultats obtenus montrent que le contrôle de l'accroissement ou de la réduction du transfert de chaleur peut être obtenu soit par la modification des conductivités thermique K du bloc soit par le positionnement du bloc à la bonne distance des parois.

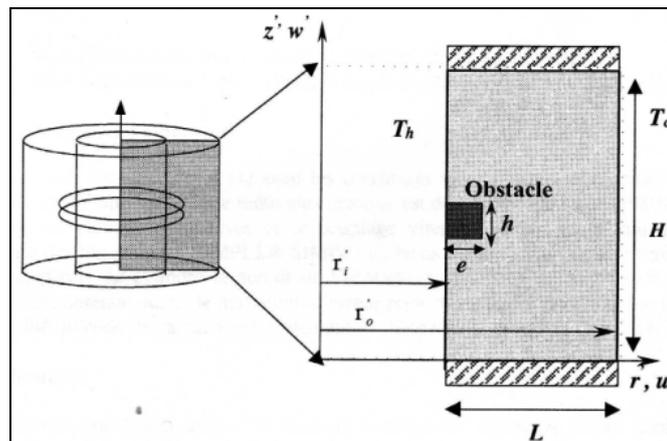


Figure 1.6 : Deux cylindres concentriques avec un obstacle [11]

Ils ont aussi montré qu'il existe :

- 1- Une position critique pour laquelle il existe un accroissement de transfert de chaleur via l'effet cheminé sur l'espace compris entre le bloc et la paroi.
- 2- Une position de l'obstacle n'a pas d'effet significatif sur le transfert de chaleur.

Lee et al. [12] ont présenté une simulation sur la convection mixte pour un écoulement pleinement établi et turbulente dans un conduit annulaire et vertical. Les propriétés du fluide ont une variation considérable. Les conditions aux limites sont un chauffage en bas et en haut imposé sur la paroi; la compressible avec un nombre de Mach bas, les équations de Navier-

Stokes sont résolues en utilisant la méthode des volumes finis au deuxième ordre et les comparaisons ont été faites avec les données expérimentales disponibles. Les résultats obtenus montre que le chauffage imposé et la forte flottabilité ont causé des déformations dans la structure de l'écoulement qui résulte une diminution sur l'intensité de la turbulente, la contrainte de cisaillement, et le flux de la chaleur turbulent, sont particulièrement près de la paroi.

Yu et Tao [13] ont fait une étude expérimentale pour mesurer la chute de pression et le coefficient de transfert de chaleur ; le cas étudié consiste en un tube annulaire avec des ailettes longitudinales sous formes ondulées avec un flux de chaleur uniforme sur la paroi (voir figure 1.7) pour deux zones dans le tube à l'entrée l'écoulement d'air est complètement développé. Cinq séries d'expériences ont été exécutées pour un écoulement turbulent avec transfert de chaleur dans les tubes annulaires et une série d'ailettes égal à 4, 8, 12, 16 et 20, respectivement.

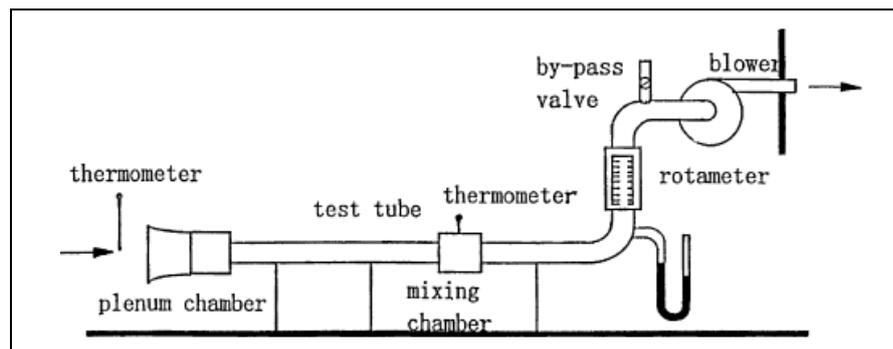


Figure 1.7 : Appareil expérimental [13]

On peut regrouper leurs résultats dans les points suivants :

1- La série joue un rôle très important pour l'amélioration du transfert de chaleur, Cette amélioration est plus forte si la série augmente dans la gamme des série étudiées (4~20). Il y a aussi une transition de l'écoulement laminaire vers le turbulent et ils ont observé aussi que le nombre de Reynolds dépend de la longueur d'entrée thermique.

2- Pour les cinq tubes, le facteur de frottement et le nombre de Nusselt dans la région complètement développée peuvent être corrélé par les équations de Power Law.

3- Pour étudier la performance thermique dans un tube avec des ailettes longitudinales au dessus un tube circulaire plane, les comparaisons ont été faites sous les trois conditions:

- Ecoulement de masse identique : $(ARe/D_h)_t = (ARe/D_h)_p$
- Chute de pression identique : $(ARe^2/D_h^3)_t = (ARe^2/D_h^3)_p$
- Puissance de la pompe identique : $(ARe^3/D_h^4)_t = (ARe^3/D_h^4)_p$

Cette étude indique que tous les tubes avec ailettes qui sont testés peuvent augmenter le transfert de chaleur, alors qu'un meilleur résultat est celui correspondant à une série de 20 ailettes.

Dagtekin et al [14] ont publié une analyse de la génération de l'entropie à travers un conduit circulaire pour un écoulement laminaire avec trois différentes formes : mince, triangulaire et en forme de V, d'ailettes longitudinales choisies pour cette analyse (voir figure 1.8). L'eau est le médium utilisé. Ils ont trouvé les résultats suivants :

1- Le nombre de Reynolds augmente, la génération de l'entropie diminue et le PPR (pumping power to heat transfer ratio) $(A\Delta P\bar{U}/\dot{Q})$ augmente dans tous les cas considérés. Cependant, aussi a l'entrée la différence de la température à la paroi augmente, la génération de l'entropie augmente et le PPR diminue dans tous les cas considérés.

2- Comme le nombre d'ailettes minces ou triangulaires augmente, la génération dimensionnelle de l'entropie avoir une augmentation, Pour plus grande valeurs de Reynolds, la génération de l'entropie pour des ailettes minces devient supérieure à celle correspondante aux ailettes triangulaires. Cependant, la valeur de PPR pour les ailettes minces est plus grande pour les ailettes triangulaires.

3- Comme l'angle d'ailette augmente, la génération de l'entropie et les PPR augmente dans le cas d'ailettes triangulaires Pour le cas d'ailette en forme V l'augmentation de l'angle de l'ailette provoque une augmentation dans la génération de l'entropie et le PPR.

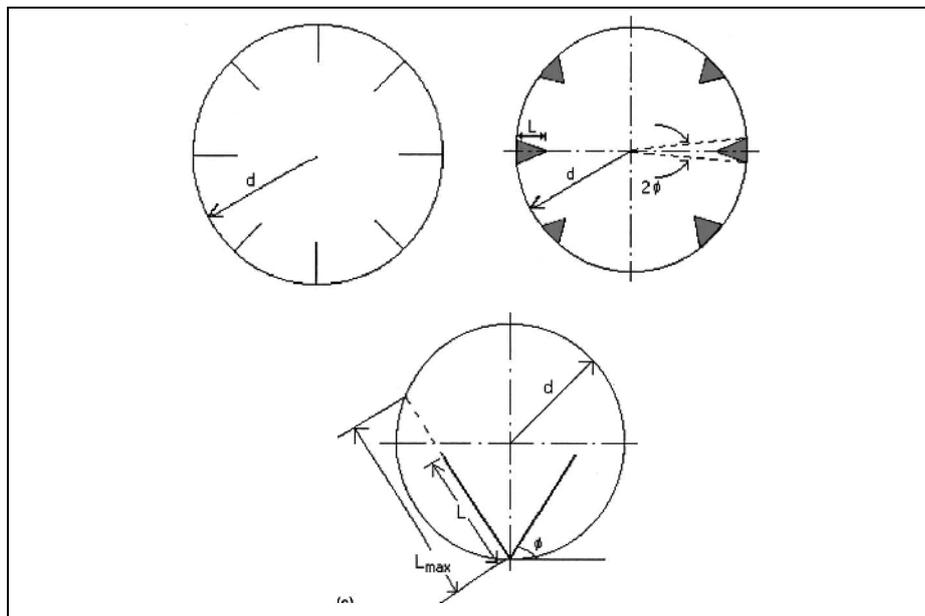


Figure 1.8 : Forme des ailettes dans la référence [14]

Bilgen [15] a présenté une étude numérique bidimensionnelle d'un transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité carrée avec une ailette mince, horizontale attaché à la paroi chaude (voire figure 1.9). La longueur adimensionnelle W_p varie de 0.10 à 0.90 et sa position adimensionnelle Y_p varie de 0.10 à 0.90 alors que sa conductivité thermique k varie de 1 jusqu'à 60 avec un nombre de Rayleigh compris entre 10^4 et 10^9 . La cavité a une paroi verticale isotherme et une paroi horizontale adiabatique, le fluide étant incompressible et Newtonien avec des propriétés thermophysiques constantes tandis que la dissipation visqueuse et la variation de la densité sont négligées sauf dans le terme de flottabilité (approximation de Boussinesq). Les équations sont résolues par la méthode numérique SIMPLER. Les résultats obtenus montrent que le nombre de Nusselt et une fonction croissante avec le nombre de Rayleigh et est une fonction décroissante avec W_p et le rapport des conductivités relative ($k_r = k_{\text{ailette}}/k_a$). Ils ont trouvé aussi qu'il y a une position Y_p d'ailette optimisé au centre ou proche du centre de la cavité qui minimise le transfert de chaleur par convection naturelle et le transfert de chaleur peut être réduit jusqu'à 38%. Pour le cas où $k_r = 1$ le transfert de chaleur augmente de quelque pour cent quand l'ailette est courte et placée à la limite horizontale.

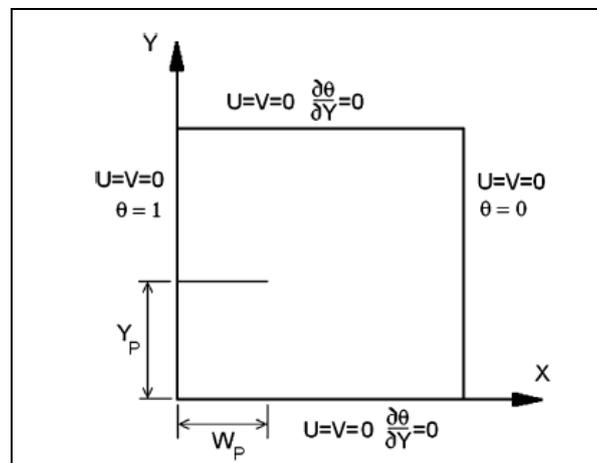


Figure 1.9 : Cavité carrée avec ailette horizontale [15]

Al-Sarkhi et Abu-Nada [16] on fait une étude numérique bidimensionnelle d'un transfert de chaleur en convection forcée laminaire pleinement développée à l'intérieur d'un cylindre circulaire avec des ailettes radiales, droites et distribuées également autour de la circonférence du cylindre. L'épaisseur de l'ailette étant négligeable. Le fluide est soumis à un flux de chaleur constant sur sa longueur axiale. A cause de la symétrie du problème le domaine du calcul est exécuté sur un demi-secteur (voir figure 1.10) (le secteur complet est la

région entre les deux ailettes consécutives). Les équations modélisantes sont résolues par la méthode des volumes finis avec un maillage de (24x50) (direction azimutale et radiale). La hauteur dimensionnelle de l'ailette $H = l/R$ (la longueur de l'ailette divisée par le rayon du tube) varie de 0.1 à 0.9 et le nombre d'ailettes varie de 5 à 80. Pour un meilleur transfert de chaleur, il y a un nombre N et hauteur H d'ailettes optimisés. Le nombre de Nusselt maximal ne peut pas être réalisé à la hauteur maximale et le nombre d'ailette maximale. Il y a un certain nombre d'ailettes et une certaine hauteur d'ailettes qui permettent d'arriver à un nombre de Nu maximal. En générale l'augmentation du nombre de Nusselt est obtenue avec la croissante de l'hauteur de l'ailette. Le paramètre $f.Re$ diminue avec l'augmentation du nombre d'ailette N . La distribution de la vitesse et de la température à l'intérieur du cylindre sont fortement fonction de la hauteur de l'ailette et le nombre d'ailette N .

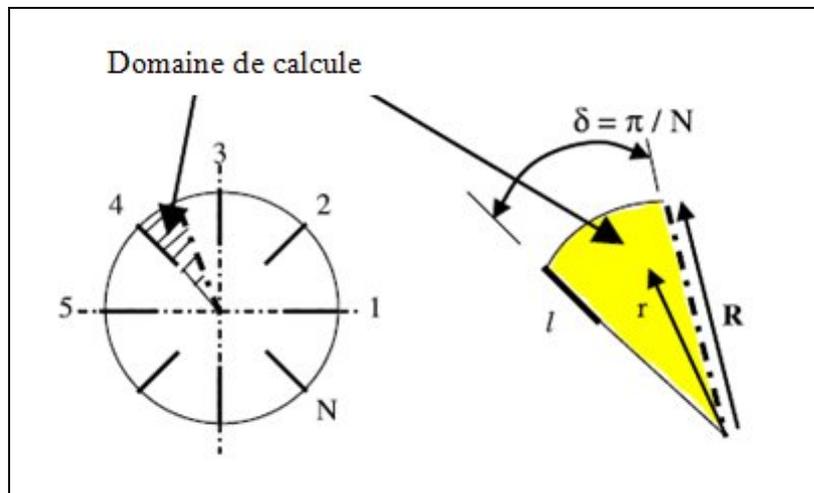


Figure 1.10 : Cylindre avec des ailettes internes [16]

Yucel et Dinler [17] ont fait une étude numérique sur l'écoulement laminaire et turbulent à travers une conduite munie d'ailettes pour augmenter le transfert de chaleur. Les équations gouvernantes soumises aux conditions aux limites sont discrétisé par la méthode des volumes finis. Les résultats trouvés pour le cas d'un écoulement laminaire, les nombres de Nusselt moyens diminuent et le facteur de frottement augmente avec un nombre croissant d'ailettes. Pour le cas d'un écoulement turbulent, l'augmentation du nombre de Reynolds et l'augmentation de la perturbation dans l'écoulement provoque une augmentation du nombre de Nusselt, les ailettes causent l'apparition d'une couche limite.

Cheddadi et al. [18] ont étudié numériquement les effets thermo-convectifs induits par la disposition de deux ailettes chauffantes au sein d'une cavité annulaire cylindrique remplie d'air, tel que le fluide qui occupe l'espace annulaire, visqueux et incompressible obéit à

l'approximation de Boussinesq, avec deux conditions aux limites au niveau des parois chaude T_i pour Ri et froide T_e pour Re et sur les frontières des ailettes chauffantes. L'intégration des équations de conservation est basée sur la discrétisation par la méthode des différences finis avec un schéma centré, les deux ailettes sont présentées avec une largeur l et une hauteur H égales à 0.140 et 0.109 respectivement et pour des nombres de Rayleigh variant ($1000 \leq Ra \leq 10000$). Les résultats obtenus portent principalement sur l'influence de la position angulaire des blocs chauffants montrent que les échanges de chaleur engendrés sont favorisés d'une façon importante dans le régime de la convection développée, par un placement des blocs dans la partie supérieure de l'espace annulaire avec l'apparition d'un régime multicellulaire.

Kiwan et Zeitoun [19] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire entre deux cylindres concentriques munis d'ailettes poreuses attachées au cylindre intérieur. Les équations gouvernantes sont discrétisées par la technique des volumes finis et l'équation de Darcy-Brinkman a été utilisée pour résoudre l'écoulement de fluide à l'intérieur des milieux poreux et l'approximation de Boussinesq a été utilisée pour modéliser la flottabilité. L'effet du rapport de conductivité des ailettes, du nombre de Darcy (Da) et de Rayleigh (Ra) sur le nombre de Nusselt moyen a été étudié. Les nombres des Nusselt moyens obtenus pour les ailettes poreuses sont comparés avec ceux trouvés avec des ailettes non poreuses pour une large gamme du nombre de Rayleigh. Cette amélioration du transfert de chaleur atteint 75% avec $Ra = 5.104$ et $Da = 2.5.10^{-2}$. Ils ont trouvé aussi que les différents taux de transfert de chaleur obtenus avec les ailettes solides décroissent dans les cylindres équipés d'ailettes poreuses avec l'augmentation d'angle d'inclinaison des ailettes.

Alshahrani et Zeitoun [20] ont fait une étude numérique sur la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux et concentriques avec deux ailettes attachées au cylindre intérieur avec des températures de surface constantes $T_i > T_0$. Les équations de base sont résolues par la technique des éléments finis avec un nombre de Rayleigh $Ra_i = 5 \times 10^4$. Les résultats obtenus montrent l'effet du rapport des diamètres, du nombre de Rayleigh, de la hauteur et l'angle d'inclinaison des ailettes pour ce type d'écoulement. La résistance thermique décroît lorsque le rapport du diamètre augmente. Quand l'épaisseur de l'espace annulaire augmente, les données de la convection naturelle ont été représentées en termes de rapport de conductivité thermique $\frac{k_e}{k}$ efficace qui est proportionnelle au nombre de

Rayleigh $Ra_i = Gr_i \cdot Pr$. Le nombre de Nusselt et le rapport diminuent avec l'augmentation de la longueur d'ailettes. L'angle d'inclinaison a un effet faible sur le rapport de la conductivité thermique. La corrélation du rapport de conductivité thermique qui est proposée est donnée par les deux relations suivantes:

$$\frac{k_e}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pour } Ra_m \leq 0.8 \\ 0.0123Ra_m^6 - 0.2167Ra_m^5 + 1.5514Ra_m^4 - 5.7568Ra_m^3 \\ \quad + 11.55Ra_m^2 - 10.683Ra + 4.5486 & \text{pour } 0.8 < Ra_m < 4.7 \end{cases}$$

La prédiction de la bonne corrélation est donnée pour un coefficient de corrélation $R_c=1$ qui est comparé avec des résultats numériques pour un rapport de conductivité thermique avec une erreur entre -6 et $+15\%$ pour des données de rapport de conductivité thermique avec ailettes dans un espace annulaire.

Dhima et al. [21] ont fait une étude numérique sur l'effet du nombre de Richardson pour le transfert de chaleur par convection mixte à l'intérieur d'un cylindre vertical muni d'un obstacle en forme d'un cylindre carré à l'intérieur du fluide (voir figure 1.11). L'écoulement est bidimensionnel, pleinement établi pour un fluide Newtonien et incompressible (air) et sans dissipation visqueuse. Les propriétés thermo physiques sont constantes et l'approximation de Boussinesq est utilisée. A l'entrée du cylindre la vitesse est parabolique et la température est constante. La paroi solide est adiabatique avec une température imposé sur la surface du cylindre carré (obstacle) (T'_w), à la sortie du cylindre les conditions sont ($\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = \partial T/\partial x = 0$); Les équations de base sont discrétisées par la méthode des différences finies et les résultats numériques pour un problème 2D en régime établi ont été présentés pour les conditions suivantes :

- La valeur maximale du nombre de Peclet (Pe) est égale à 3000 pour un rapport de blocage fixée à ($\beta = b/L_2 = 0.125$) et un nombre de Richardson variant de ($0 \leq Ri \leq 1$). La force totale de la traîné F_D (force par unité de longueur de cylindre) et F_L (force de perte par unité de largeur de cylindre) et le nombre de Nusselt locale Nu_L et moyen Nu sont qualitativement semblable au cas de la convection mixte
- Pour les conditions étudiées la valeur du nombre de Nusselt s'accroît environ de 5% de la valeur de la convection forcée pure.

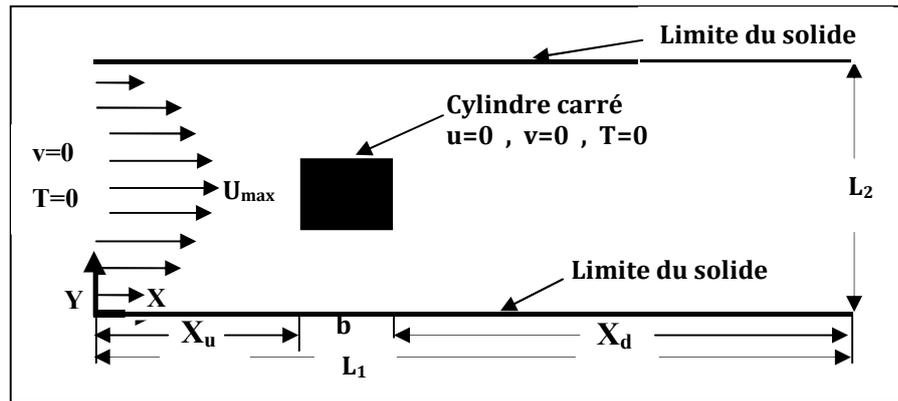


Figure 1.11 : Schéma d'un écoulement autour d'un cylindre carré [21]

Hyung et al. [22] ont étudié analytiquement l'optimisation thermique lorsqu'il y a des ailettes internes longitudinales attachées sur la surface interne de la paroi du tube extérieur d'un espace annulaire. Le domaine physique choisi divisé en deux régions séparées par un cylindre de rayon r_i . La région I est la région centrale cylindrique qui s'étend aux pointes des ailettes, et la région II constitue le reste du tube qui comprend les ailettes et qui est l'équivalent d'un modèle poreux. Comme montre la figure 1.12, l'écoulement de fluide et axiale avec un régime laminaire établi hydrodynamiquement et thermiquement. Ils ont considéré toutes les propriétés thermophysiques constantes, un flux de chaleur pariétale uniforme avec une température constante. L'équation de Brinkman-Darcy a été utilisée pour l'écoulement de fluide dans la région poreuse et les équations de Navier-Stokes et de l'énergie ont été utilisées dans la région centrale du cylindre. Les résultats obtenus dans cette étude sont les suivants :

- les profils de vitesse et de température fournis par la solution analytique sont en bon accord avec la solution numérique avec une erreur maximum de l'ordre de 5%.
- les facteurs de frottement obtenus avec des solutions analytiques présentes étaient comparés avec des données expérimentales de **Watkinson et al. [23]** tandis que les valeurs prédites du Poiseuille les nombres $f Re$ ont été comparés avec ceux calculés par **Soliman et Feingold [24]**. Cette comparaison a montré une contradiction entre les résultats analytiques présents et leurs résultats analytiques sont moins que 5% pour les tubes qui ont sept ailettes ou plus. Les résultats similaires ont été présentés par **Kim et al. [25]**.

Pour optimiser les performances thermiques dans un tube avec ailettes intérieures, la résistance thermique totale est minimisée. Ils ont montré aussi qu'il existe une valeur optimale pour la résistance thermique en ce qui concerne la hauteur et le nombre d'ailettes.

Enfin, les effets de la source d'énergie et le diamètre du tube sur les performances thermiques des tubes internes avec ailettes sont examinés. Soit comme la source d'énergie ou la diminution du diamètre du tube, la géométrie optimale et les changements apportés consistent à minimiser les frottements du fluide, c'est à dire, vers la croissance de la porosité et un nombre et hauteur d'ailettes décroissant.

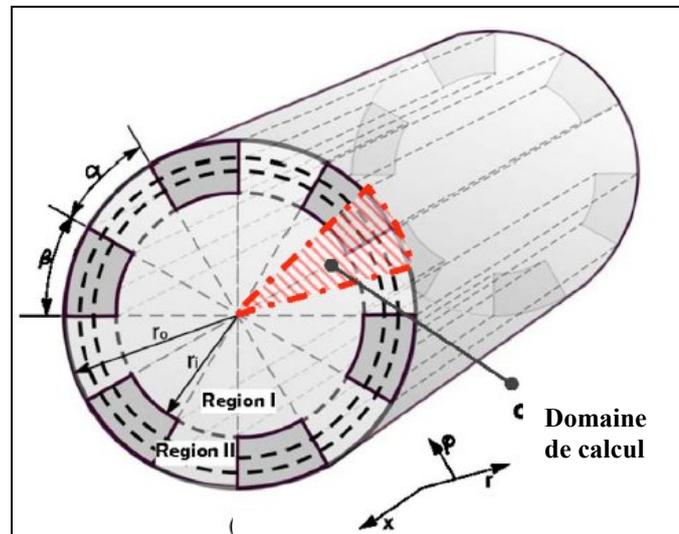


Figure 1.12 : Schéma représentant des ailettes internes dans la référence [22].

Haldar et al. [26] ont fait une étude numérique de la convection laminaire en 2D autour d'un cylindre horizontal avec des ailettes extérieures longitudinales d'épaisseur finie et une géométrie rectangulaire. Le domaine physique inclut deux milieux différents. Les ailettes solides sur le cylindre et le fluide autour du cylindre. Pour le premier, seule l'équation de la conduction a besoin d'être résolue. Le cylindre à une surface isotherme, les équations de base sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Grashof fixé à 10^5 et un nombre d'ailettes N compris $0 \leq N \leq 18$ et une longueur d'ailette variant de $0.1 \leq l \leq 0.6$ et une épaisseur $0.01 \leq t \leq 0.05$, avec un rapport de conductivité thermique k_f (conductivité thermique de l'air) / k_a (conductivité thermique de l'ailette) de 2000 à 16000 montre que les ailettes apportent un transfert de chaleur total très petit mais leur présence change fortement la température du fluide au voisinage de la surface du cylindre et par conséquent le transfert de chaleur de la région découverte du cylindre. Et parmi les plusieurs paramètres d'ailette, l'épaisseur a la plus grande influence sur le transfert de chaleur. Pour des ailettes minces il existe une longueur d'ailette qui maximise le taux de transfert de chaleur. Le nombre optimisé et la longueur d'ailettes ont été obtenus

respectivement 6 et 0.2 quand l'épaisseur d'ailette est 0.01, correspond aux plus minces ailettes parmi celles qui ont été étudiées dans ce problème.

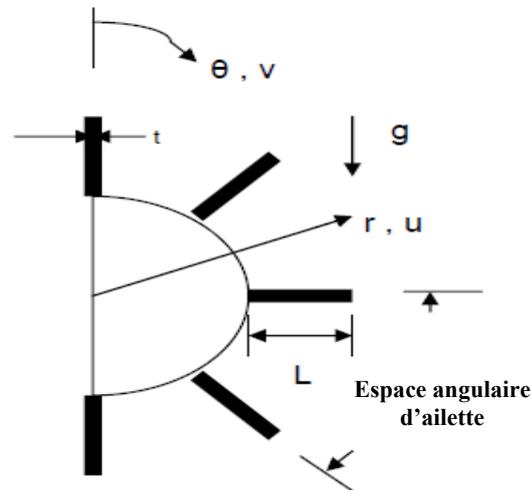


Figure 1.13 : Schéma représente des ailettes externes [26]

Mir et al. [27] ont fait une simulation numérique d'un écoulement laminaire de convection forcée, en se basant sur l'influence des ailettes sur l'écoulement. Les ailettes sont attachées au cylindre intérieur sur la paroi intérieure, le fluide est Newtonien, incompressible avec des propriétés thermophysiques constantes. L'écoulement entre les deux cylindres est en régime établi et la dissipation visqueuse est négligeable. Toutes les forces sont négligées et comme condition aux limites ils ont choisi un flux de chaleur constant pariétal imposé sur le cylindre intérieur tandis que la paroi extérieure du cylindre extérieur est adiabatique. Ils ont utilisé la symétrie pour le domaine de calcul en traitant une coupe transversale. Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie sont discrétisées par la méthode des différences centrées et le système algébrique linéaire est résolu par la méthode de sous-relaxation (SOR). Les résultats ont été obtenus pour les paramètres suivants : rapport des rayons 0.5, demi-angle d'ailette $\beta = 5^\circ$, différentes longueurs d'ailette $H^* = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ et différents nombres d'ailette $N = 6, 12, 18, 24, 30$. Le modèle est validé pour le cas d'une ailette à longueur nulle pour que puisse être faite une comparaison avec les résultats connus de la géométrie à cylindres concentriques dont les rapports de rayon sont 0.05, 0.1, 0.25 et 0.5. Un accord excellent a été obtenu.

Duplain et Baliga [28] ont étudié numériquement l'écoulement laminaire complètement développé en régime de convection forcée dans une conduite cylindrique avec des ailettes internes longitudinales, figure 1.14. Différentes Ces ailettes ont été fabriquées en acier, en

aluminium et en cuivre soumises à un flux de chaleur constante q_w qui entre axialement avec une température pariétale T_w constante partout du conduit. Les équations gouvernantes pour le fluide sont résolues par la méthode des éléments finis tandis que les volumes finis sont utilisés pour résoudre l'équation de conduction en 1D de l'ailette, figure 1.15. Les coefficients de conductivité thermique considérés dans leur étude sont : pour l'air ($K_f = K_{air} = 0.028 W/m^\circ C$), pour l'acier ($K_f = K_{s.s} = 15.1 W/m^\circ C$), pour l'aluminium ($K_f = K_{AL} = 237 W/m^\circ C$) et pour le cuivre ($K_f = K_{Cu} = 401 W/m^\circ C$). Deux types de configurations géométriques ont été utilisés dans cette étude. Le premier cas : longueur adimensionnelle des ailettes $l^* = L_f / r = 0.8$, nombre d'ailettes $N = 8$, et l'angle de chaque ailette à sa base $2\sigma = 6^\circ = \pi/30$ radian. Le deuxième cas : longueur adimensionnelle des ailettes $l^* = L_f / r = 0.6$, nombre d'ailettes $N = 16$, et l'angle de chaque ailette à sa base $2\sigma = 3^\circ = \pi/60$ radian. Les résultats concernent l'optimisation de transfert de chaleur conjugué convection-conduction dans le conduit avec des ailettes internes dont le critère particulier d'optimisation utilisé est la maximisation de la performance thermique pour une valeur fixe spécifiée du flux de chaleur et une longueur unitaire d'ailette. Ils trouvent que pour le premier cas les améliorations des performances thermiques sont relativement modestes à cause d'une modeste distribution du fluide avec une faible vitesse dans les régions entre les ailettes. Par contre le deuxième cas fournit de meilleures performances thermiques.

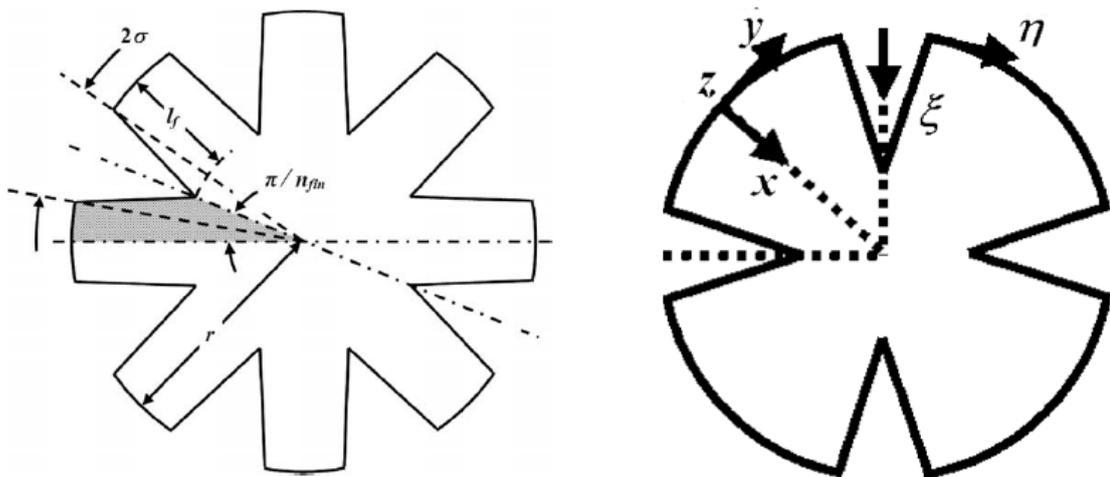


Figure 1.14 : Coupe transversale des ailettes internes [28]

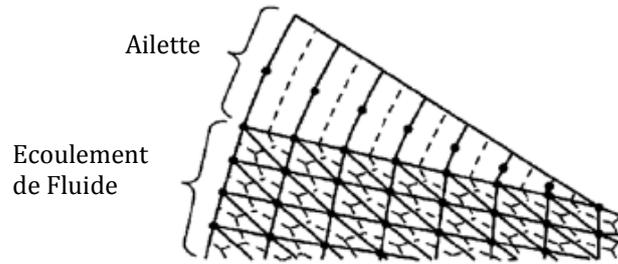


Figure 1.15 : Schéma représentant le maillage de l'ailette et du fluide par les deux méthodes (élément fini, volume fini) [28]

Boufendi et Afrid [29] ont étudié numériquement la convection mixte pour un écoulement d'un fluide à propriétés physiques variables dans un conduit soumis à un chauffage volumique. Ils ont montré d'abord la non uniformité du flux thermique transmis au fluide ainsi l'effet non négligeable des propriétés physiques tout particulièrement celui de la viscosité. Dans ce cas le nombre de Nusselt moyen subit une augmentation de l'ordre de 58%.

1.3 PROBLEMATIQUE ET OBJECTIF DE CE TRAVAIL

Cette recherche bibliographique, bien qu'elle soit non exhaustive, a permis, tout d'abord de prendre connaissance de l'évolution des différents travaux effectués dans le domaine des écoulements en convection forcée et mixte dans les géométries cylindriques équipées d'ailettes. Elle a permis aussi de situer le contexte de notre étude ainsi que ses spécificités. Il apparaît clairement une large diversité d'application des ailettes dans les tubes ouvrant des voies vers l'explication des différents effets dus à leurs caractéristiques physiques et géométriques sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur le transfert thermique local et moyen entre le fluide et la paroi ailettée. L'intérêt à pouvoir et vouloir enrichir cette question est fortement justifié.

Ainsi, nous avons alors jugé utile, dans le but d'améliorer la clarté de ce travail, de structurer ce mémoire en quatre chapitres.

Le premier chapitre met en exergue la bibliographie explorée dans ce domaine. Cette bibliographie a été puisée essentiellement des banques de données numériques disponibles sur le réseau internet « Science Direct »¹ et « Springer »² auxquels l'Université Mentouri donne accès gratuitement pour les trois dernières années.

¹ <http://www.sciencedirect.com>

² <http://www.springerlink.com>

Le deuxième chapitre très important dans sa consistance marque le passage de la physique vers les mathématiques. En effet le problème physique à étudier est d'abord présenté avec sa géométrie et ses particularités. Ensuite, ce problème fait l'objet d'une modélisation mathématique par les équations classiques Navier-Stokes et de l'énergie ainsi que des conditions aux limites appropriées. Ces équations sont écrites d'abord sous leur forme dimensionnelle puis sous leurs formes adimensionnelles en précisant les variables sans dimensions définies à l'aide des grandeurs de référence. Cette modélisation fera apparaître les paramètres de contrôle régissant ce problème. On exprimera ainsi le quantificateur de transfert de chaleur qu'est le nombre de Nusselt dans son expression locale et moyenne.

Le troisième chapitre concerne donc la résolution numérique des équations modélisantes développées au deuxième chapitre. La méthode utilisée est celle des volumes finis en commençant par le maillage suivant les directions r , θ et z^* puis la discrétisation des équations de conservation terme par terme dans un volume de contrôle typique. La précision numérique de cette discrétisation est du second ordre. Les systèmes d'équations discrétisées seront résolus en suivant l'algorithme SIMPLER en faisant appel aux algorithmes de Thomas et Thomas cyclique.

Le quatrième chapitre rassemblera l'ensemble des résultats obtenus dans cette étude. Ces résultats sont regroupés en plusieurs groupes. Le premier présente la convection forcée et mixte pour un conduit sans ailettes. Le second concerne la convection et mixte dans un conduit équipé d'ailettes. Plusieurs configurations seront présentées. Elles comprendront le conduit à deux, quatre et huit ailettes. Dans le cas des deux ailettes deux orientations seront présentées : horizontales et verticales, toutes deux étant diamétralement opposées. Dans tous les cas les champs dynamiques et thermiques sont explorés que ce soit en convection forcée et en convection mixte. Le transfert thermique sera quantifié par la présentation du nombre de Nusselt moyen.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les différentes étapes de cette thèse ainsi que les principaux résultats obtenus. Quelques perspectives qui sont jugés nécessaires dans le suivi de ce travail sont proposées à l'issue de ce travail.

CHAPITRE 2

MODELISATION

MATHEMATIQUE

2.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce problème consiste en la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques horizontaux d'épaisseurs finies. Dans le cadre de cette étude, nous allons équiper le conduit extérieur par des ailettes internes longitudinales pour créer une compétition entre la convection forcée et la convection mixte.

Dans ce chapitre, nous allons poser le problème physique à étudier en l'illustrant à l'aide de plusieurs schémas et établir les équations mathématiques modélisantes de ce problème sous les formes dimensionnelles et adimensionnelles ainsi que les conditions aux limites spatiotemporelles appropriées. On en déduira les groupements adimensionnels constituant les paramètres de contrôle de ce problème.

2.2 DESCRIPTION DU SYSTEME

Le modèle physique considéré est schématisé sur plusieurs figures afin de bien visualiser le système, figures 2.1-2.4. Il s'agit de deux cylindres concentriques horizontaux dont le cylindre intérieur d'épaisseur finie e_i et de diamètres intérieur D_{1i} et extérieur D_{1e} est soumis à un flux de chaleur imposé constant et uniforme au niveau de sa paroi intérieure, tandis que le cylindre extérieur d'épaisseur finie e_e et de diamètre intérieur D_{2i} et extérieur D_{2e} est muni d'ailettes internes longitudinales au niveau de la paroi intérieure. Sa paroi extérieure est considérée adiabatique. Le fluide qui s'écoule dans l'entrefer cylindrique se présente à l'entrée du cylindre avec une vitesse V_0 et une température T_0 toutes deux constantes. On considère l'absence de toute source ou puits de chaleur dans le domaine fluide.

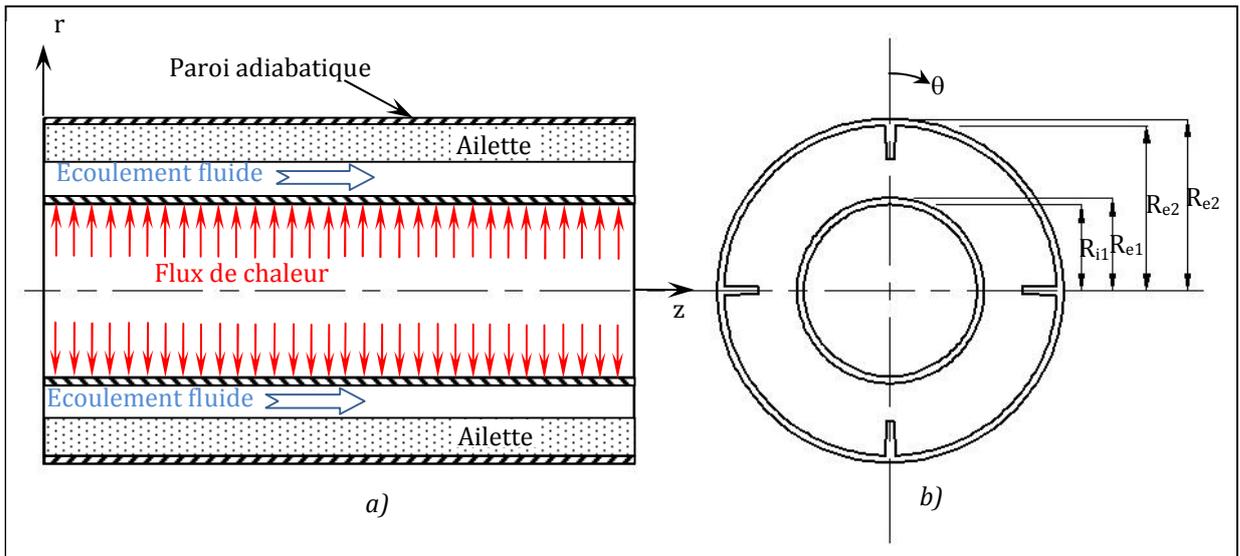


Figure 2.1 : Schémas représentant des coupes, longitudinale (a) et transversale (b) du conduit annulaire cylindrique

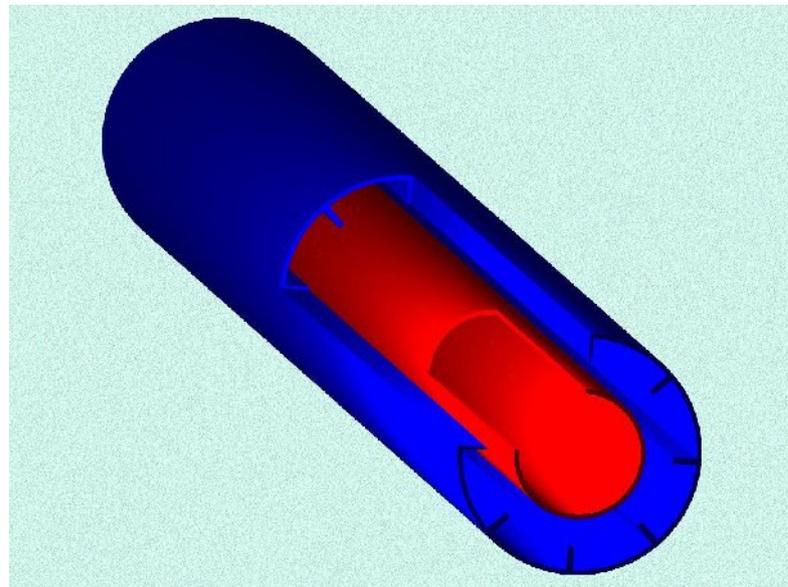


Figure 2.2 : Autre vue du modèle physique avec le cylindre intérieur (couleur rouge) et cylindre extérieur (couleur bleue) muni d'ailettes (couleur bleue)

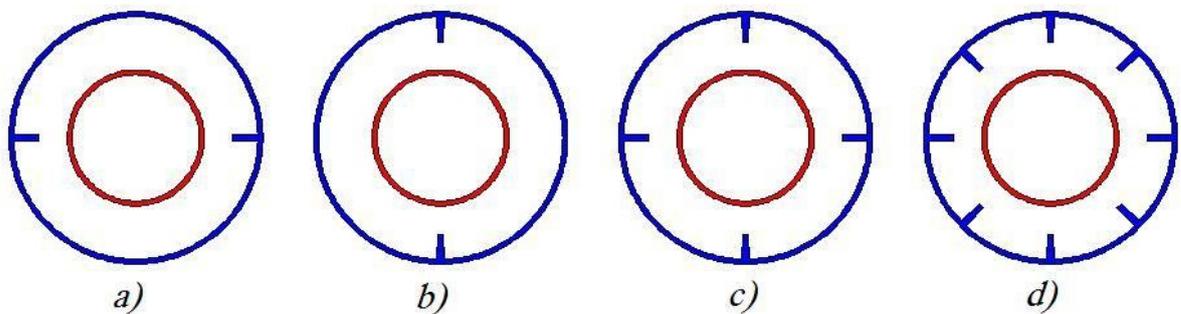


Figure 2.3 : Coupe transversale du conduit muni d'ailettes pour différentes configurations

2.3 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Pour ce modèle mathématique les hypothèses classiques et simplificatrices adoptées sont les suivantes :

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement est laminaire.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- le rayonnement thermique à l'intérieur du passage annulaire est négligeable.

2.4 EQUATIONS DU PROBLEME

L'application des principes généraux de la physique nous permet d'établir les différentes équations nécessaires à la résolution du problème considéré dans cette étude. Ces principes basés sur la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et se traduisent mathématiquement dans les équations citées ci-après.

$$\text{A } t = 0 : \quad u = v = w = T = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{A } t > 0 :$$

2.4.1. Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

2.4.2. Equation de quantité de mouvement radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ruu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(wu) + \frac{\partial}{\partial z}(vu) - \frac{w^2}{r} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] - \frac{\rho}{\rho_0} g \cos \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.4.3. Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ruw) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(ww) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) + \frac{uw}{r} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.4.4. Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wv) + \frac{\partial}{\partial z} (vv) \right] = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2.5)$$

2.4.5. Equation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruT) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wT) + \frac{\partial}{\partial z} (vT) \right] = \frac{K_0}{\rho_0 C_{p_0}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (2.6)$$

2.5 CONDITIONS AUX LIMITES

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante. Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle est nulle dans la conduite.

Les conditions aux limites qui s'appliquent à ce problème sont les suivantes :

- *A l'entrée du conduit : $z = 0$*

➤ Le domaine fluide :

$$R_{1e} \leq r \leq R_{2i} \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = 0, v = v_0 \text{ et } T = T_0 \quad (2.7)$$

➤ Le domaine solide :

$$R_{1i} \leq r \leq R_{1e} \text{ et } R_{2i} \leq r \leq R_{2e} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = v = 0 \text{ et } T = T_0 \quad (2.8)$$

- *A la sortie du conduit : $z = L$*

➤ Le domaine fluide :

$$R_{1e} \leq r \leq R_{2i} \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.9)$$

➤ Le domaine solide :

$$R_{1i} \leq r \leq R_{1e} \text{ et } R_{2i} \leq r \leq R_{2e} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = v = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

- *Sur la paroi intérieure : $r = R_{1i}$*

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq L \quad u = w = v = 0 \quad \text{et} \quad q_w = -K_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{1i}} \quad (2.11)$$

- **Sur la paroi extérieur : $r = R_{2e}$**

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq L \quad u = w = v = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_{2e}} = 0 \quad (2.12)$$

- **La condition angulaire**

$$\begin{cases} u(r, 0, z, t) = u(r, 2\pi, z, t) \\ w(r, 0, z, t) = w(r, 2\pi, z, t) \\ v(r, 0, z, t) = v(r, 2\pi, z, t) \\ T(r, 0, z, t) = T(r, 2\pi, z, t) \end{cases} \quad (2.13)$$

2.6 ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

Pour obtenir la forme adimensionnelle des équations modélisantes, on définit les grandeurs caractéristiques suivantes: le diamètre caractéristique : $d = d_{2i} - d_{1e}$, la vitesse caractéristique : v_0 , la pression caractéristique : $\rho_0 v_0^2$, le temps caractéristique : d / v_0 et la différence de température caractéristique : $\Delta T = q_w d / K_0$

Les variables dépendantes adimensionnelles sont :

$$r^* = r/d, \quad z^* = z/d$$

$$u^* = u/v_0, \quad w^* = w/v_0, \quad v^* = v/v_0$$

$$t^* = v_0 t / d$$

$$p^* = (p - p_0) / \rho_0 v_0^2 \quad \text{et} \quad T^* = (T - T_0) / \Delta T$$

2.6.1. Forme adimensionnelle des équations du problème

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation de masse (2.2) et de quantité de mouvement (2.3), (2.4), (2.5) et de l'énergie (2.6), on obtient :

2.6.1.1. Equation de continuité

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.14)$$

2.6.1.2. Equation de quantité de mouvement radiale (r)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) - \frac{w^{*2}}{r^*} \right] &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) - \frac{u^*}{r^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right] & \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.6.1.3. Equation de quantité de mouvement azimutale (θ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* w^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* w^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* w^*) + \frac{u^* w^*}{r^*} \right] = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) - \frac{w^*}{r^{*2}} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.6.1.4. Equation de quantité de mouvement axiale (Z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) \right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.6.1.5. Equation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) \right] = \\ \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.6.2. Forme adimensionnelle des conditions aux limites

Avec les conditions aux limites suivantes :

- *A l'entrée du conduit* : $z^* = 0$

➤ Domaine fluide :

$$R_{le}^* \leq r^* \leq R_{2i}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = 0, \quad v^* = 1 \text{ et } T^* = 1 \quad (2.19)$$

➤ Domaine solide :

$$R_{li}^* \leq r^* \leq R_{le}^* \text{ et } R_{2i}^* \leq r^* \leq R_{2e}^* \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = v^* = 0, \quad T^* = 0 \quad (2.20)$$

- *A la sortie du conduit* : $z^* = L$

➤ Domaine fluide :

$$R_{le}^* \leq r^* \leq R_{2i}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.21)$$

➤ Domaine solide :

$$R_{li}^* \leq r^* \leq R_{le}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = v^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$R_{2i}^* \leq r^* \leq R_{2e}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = v^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.23)$$

- *Sur la paroi intérieure* : $r^* = R_{1i}^*$

$$\text{Pour : } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq L^* : u^* = w^* = v^* = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_{1i}^*} = -1 \quad (2.24)$$

- *Sur la paroi extérieure* : $r^* = R_{2e}^*$

$$\text{Pour : } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq L^* : u^* = w^* = v^* = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_{2e}^*} = 0 \quad (2.25)$$

- *Le long de la direction angulaire (θ) pour $R_{1i}^* \leq r^* \leq R_{2e}^*$ et $0 \leq z^* \leq L^*$, les conditions périodiques sont imposées :*

$$\begin{cases} u^*(r^*, 0, z^*, t^*) = u^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ w^*(r^*, 0, z^*, t^*) = w^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ v^*(r^*, 0, z^*, t^*) = v^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ T^*(r^*, 0, z^*, t^*) = T^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \end{cases} \quad (2.26)$$

L'adimensionalisation des équations de conservation et des conditions aux limites fait apparaître trois groupements adimensionnels qui contrôlent ce problème : les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Grashof respectivement : Re_0 , Pr_0 , Gr_0 . Ces trois nombres sont basés sur le diamètre hydraulique d . Leurs propriétés physiques seront évaluées à la température d'entrée considérée comme la température de référence, T_0^* .

2.7 LE NOMBRE DE NUSSELT

Le cylindre extérieur étant isolé, le nombre de Nusselt qui traduit le rapport relatif des transferts convectif et conductif ne sera rapporté qu'au cylindre intérieur.

Le nombre de Nusselt local, dépendant simultanément des positions angulaire (θ) et axiale (z^*), s'exprime par la relation suivante :

$$Nu(\theta, z^*) = \frac{h(\theta, z^*)d}{k} = \left[\frac{1}{T^*(R_{2i}^*, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] \quad (2.27)$$

Dans une section droite la température moyenne de mélange adimensionnelle T_b^* est définie par :

$$T_b^*(z^*) = \frac{\int_{R_{ie}^*}^{R_{2i}^*} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_{R_{ie}^*}^{R_{2i}^*} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta} \quad (2.28)$$

On en déduit le nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial par l'expression suivante :

$$Nu(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[T^*(R_{2i}^*, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)]} \quad (2.29)$$

Sur toute la longueur axiale le nombre de Nusselt moyen est déterminé par la relation :

$$Nu = \frac{1}{2\pi L^*} \int_0^{L^*} \int_0^{2\pi} Nu(\theta, z^*) d\theta dz^* \quad (2.30)$$

2.8 MATERIEL UTILISE DANS LA SIMULATION

Nos simulations numériques ont été accomplies grâce aux exécutions faites par un code de calcul sur un micro ordinateur personnel Dual Core de fréquence 2,5 * 2,5 GHz, et de capacité de mémoire égale à 2 Go.

CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE

3.1 CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre non linéaires fortement couplées (Eqs. 2.12 - 2.16) et leurs conditions aux limites (Eqs. 2.17 - 2.23) qui ne peuvent être résolues analytiquement mais plutôt que par des méthodes numériques.

Actuellement, il existe plusieurs méthodes numériques de résolution [31]. On peut citer entre autres: les différences finis, les éléments finis et les volumes finis.

Dans notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis. Cette méthode intègre le système d'équations gouvernantes sur un volume fini « appelé volume de contrôle » couvrant le domaine physique. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable typique aux variables des points directement voisins. La discrétisation des équations gouvernantes par cette méthode présente certains avantages du fait qu'elle permet un traitement plus facile et garantit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans chaque volume de contrôle [31].

3.2 LE MAILLAGE

On découpe l'espace annulaire (physique) selon les directions radiale, angulaire et axiale, r^* , θ et z^* respectivement en un ensemble de volume finis ou «volumes de contrôle» dont la dimension pour un volume typique est $\Delta V^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*$. Au centre de chaque volume de contrôle sont stockées les quantités scalaires pression et température (P^* et T^*) tandis que les grandeurs vectorielles telles les composantes radiale, axiale et angulaire de la vitesse (respectivement u^* , v^* et w^*) sont localisées aux centres des six faces latérales de chaque volume fini. Une illustration d'un volume fini typique est montrée dans la figure (3.1) tandis que le domaine de calcul est représenté dans les figures 3.2, 3.3 et 3.4 qui traduisent, respectivement, les projections sur les plans : (r^*, θ) , (θ, z^*) et (r^*, z^*) . Les variables scalaires

dans les équations gouvernantes sont intégrées (discrétisées) dans le volume fini typique ; cependant, celles des composantes de la vitesse sont intégrées dans des volumes finis décalés selon les directions r^* , θ et z^* respectivement. Il est bien connu que ce décalage est nécessaire pour éviter certaines instabilités de type numériques [31].

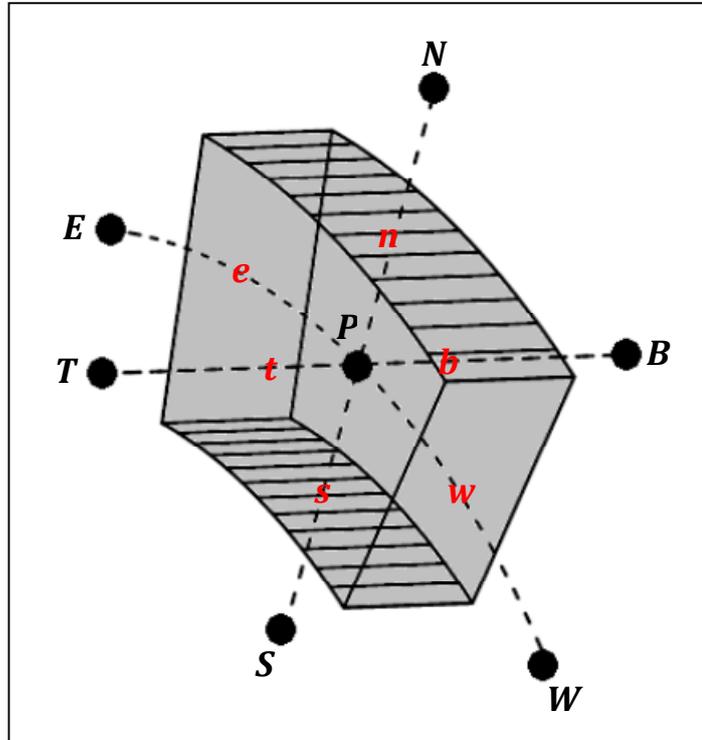


Figure 3.1 : Volume de contrôle typique

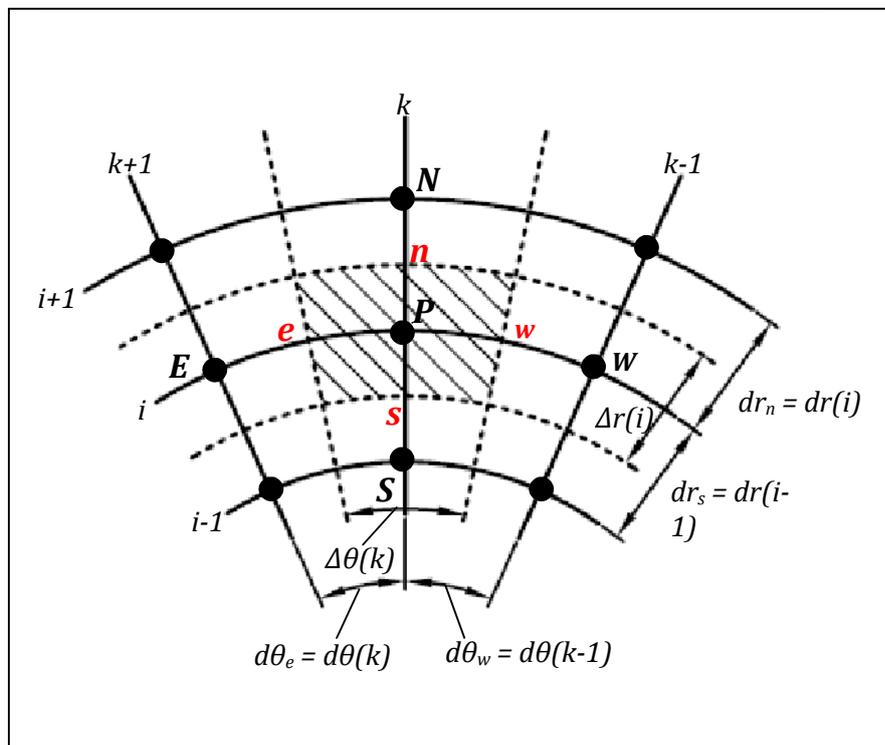


Figure 3.2 : Projection du volume fini dans le plan (r, θ) .

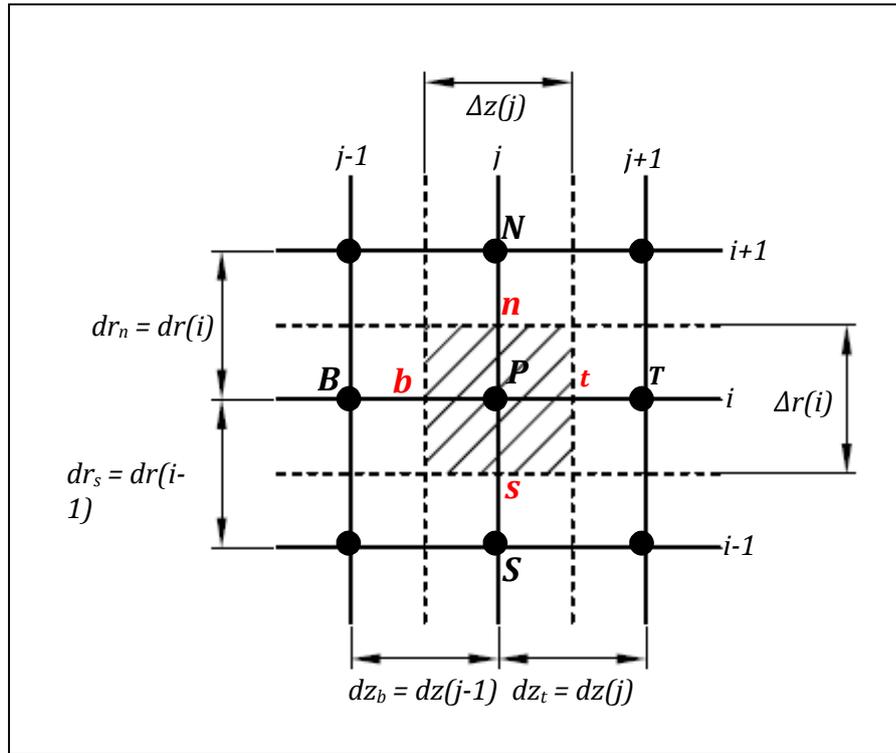


Figure 3.3 : Projection du volume fini dans le plan (r, z) .

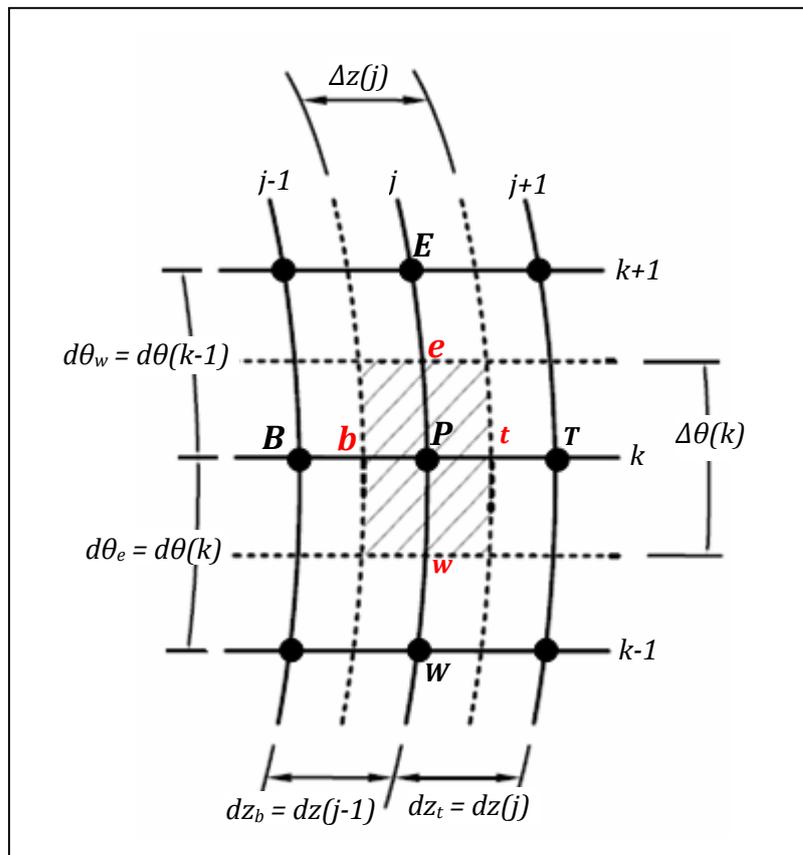


Figure 3.4 : Projection du volume fini dans le plan (θ, z) .

3.3 DISCRETISATION DES DIFFERENTES DERIVEES

3.3.1 Discrétisation temporelle

La discrétisation des termes instationnaires dans les équations de mouvement et dans l'équation d'énergie suit un schéma temporel du second ordre. Si on considère ϕ comme variable dépendante du temps un développement limité en série de Taylor au deuxième ordre des variables ϕ^t et $\phi^{t-\Delta t}$ est :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.1)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.2)$$

On multiplie la relation (3.1) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3.2) on obtient :

$$4\phi^t - \phi^{t-\Delta t} = 3\phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + 0(\Delta t)^2, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + 0(\Delta t)^2$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle local avec erreur de troncature est d'ordre deux $(\Delta t)^2$:

$$\frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.3)$$

3.3.2 Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma des différences centrées, avec une erreur de troncature d'ordre deux c'est-à-dire avec une précision du second ordre. Dans une direction donnée, radiale par exemple, figure 3.5, on peut exprimer sur les faces Nord et Sud du volume fini la variable typique ϕ et sa dérivée première $\partial\phi/\partial r$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{\phi_p + \phi_n}{2} & \phi_s &= \frac{\phi_p + \phi_s}{2} \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n &= \frac{\Phi_N - \Phi_P}{dr_n} & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_s &= \frac{\Phi_P - \Phi_S}{dr_s} \end{aligned}$$

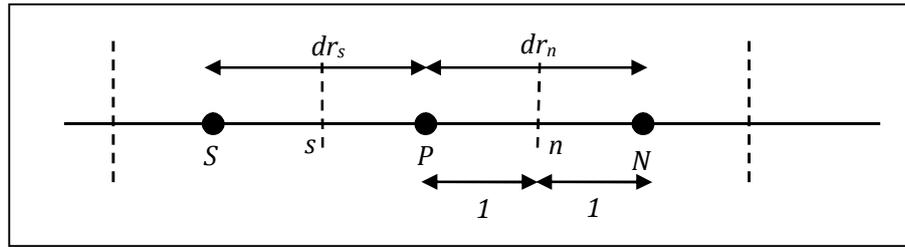


Figure 3.5 : Maillage dans la direction radiale.

Démonstration de la précision d'ordre 2. Se référant à la figure 3.4, et en utilisant l'expansion en série de Taylor de la fonction ϕ on montre facilement que :

$$\phi_P = \phi_n - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \Big|_n - \frac{1^3}{6!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \Big|_n + \dots \tag{3.4}$$

$$\phi_N = \phi_n + \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \Big|_n - \frac{1^3}{6!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \Big|_n + \dots \tag{3.5}$$

On obtient par la différence de (3.4) et (3.5).

$$\phi_N - \phi_P = 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n + \frac{1^3}{3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \Big|_n \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n \approx \frac{\phi_N - \phi_P}{dr_n} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \Big|_n (dr_n)^2 \tag{3.7}$$

Et donc, $\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dr_n}$, avec une erreur de troncature d'ordre $(\Delta r)^2$.

La même démonstration peut se faire dans les deux autres directions azimutale (θ) et axiale (Z) avec un erreur de troncature d'ordre deux $(\Delta \theta)^2$, $(\Delta Z)^2$.

3.3.3 Stockage des variables

Comme présenter dans les figures 3.2, 3.3 et 3.4, le domaine d'étude est subdivisé en volume finis. Au centre de chaque volume de contrôle sont stockées les quantités scalaires (P, T) et les quantités vectorielles (U, V, W) sont localisées aux faces des volumes de contrôle aux faces e, w, n et s, t, b.

3.4 LA DISCRETISATION DES EQUATIONS

Dans l'ensemble des équations de quantité de mouvement, de continuité et de l'énergie, on a convenu la notation suivante :

- ✓ l'exposant zéro (0) désigne une évaluation des variables à l'instant $t - \Delta t$
- ✓ l'exposant un (1) désigne une évaluation des variables à l'instant t
- ✓ Aucun exposant ne désigne une évaluation des variables à l'instant $t + \Delta t$

3.4.1 Equation de continuité

L'équation de continuité (2.6) est discrétisée dans le volume de contrôle typique (figure 3.1) comme suit :

$$\int_b^e \int_w^n \int_s^t \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_b^e \int_w^n \int_s^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (r_n^* u_n^* - r_s^* u_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int_b^e \int_w^n \int_s^t \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* = (w_e^* - w_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_b^e \int_w^n \int_s^t \frac{\partial v^*}{\partial z^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (v_t^* - v_b^*) \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

On peut mettre l'équation de discrétisation finale sous la forme :

$$(r_n^* u_n^* - r_s^* u_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (w_e^* - w_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (v_t^* - v_b^*) \Delta r_p^* \Delta \theta_p = 0 \quad (3.9)$$

Dans cette équation (3.9) tous les termes sont évalués à l'instant $t + \Delta t$.

3.4.2 Equation de quantité de mouvement radial

L'équation de quantité de mouvement radiale (2.3) est intégrée dans le volume de contrôle décalé suivant la direction radiale (figure 3.6).

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{\partial u^*}{\partial t} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[\frac{3u_{pu}^* - 43u_{pu}^{*1} + u_{pu}^{*0}}{2\Delta t} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3u_{pu}^* - 43u_{pu}^{*1} + u_{pu}^{*0}}{2\Delta t} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$= \left[2r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^1 - 2r_{su}^* (u_{su}^{*2})^1 - r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^0 - r_{su}^* (u_{su}^{*2})^0 \right] \Delta \theta \Delta z_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) \Big|_1^0 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) \Big|_1^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(w_{wu}^{*1} u_{eu}^{*1} - w_{wu}^{*1} u_{wu}^{*1}) - (w_{wu}^{*0} u_{eu}^{*0} - w_{wu}^{*0} u_{wu}^{*0}) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) \Big|_1^0 - \frac{\partial}{\partial z^*} (z^* u^*) \Big|_1^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_{wu}^{*1} u_{eu}^{*1} - v_{wu}^{*1} u_{wu}^{*1}) - (v_{wu}^{*0} u_{eu}^{*0} - v_{wu}^{*0} u_{wu}^{*0}) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\int_{wwb}^{ewt} \int_s \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (p_p^* - p_E^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

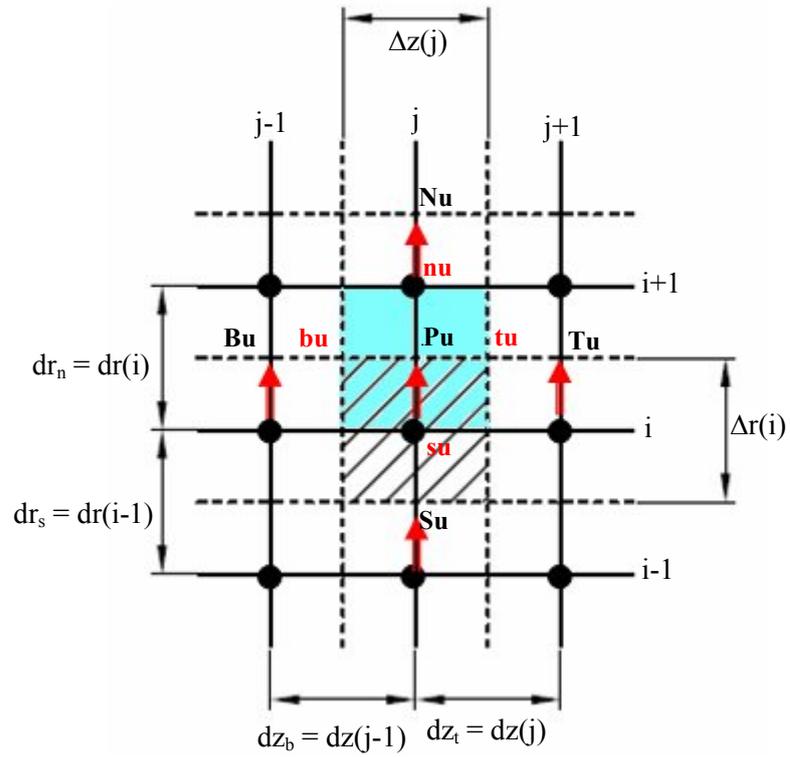
$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{Gr^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{Gr^*}{Re_0^2} (\sin \theta_e - \sin \theta_w) (2T_p^{*1} - T_p^{*0}) r_n^* dr_n^* \Delta z_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{nu}^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \Big|_{nu} - r_{su}^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \Big|_{su} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ &= \left(r_{nu}^* \frac{u_{Nu}^* - u_{pu}^*}{dr_n^*} - r_{su}^* \frac{u_{pu}^* - u_{Su}^*}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

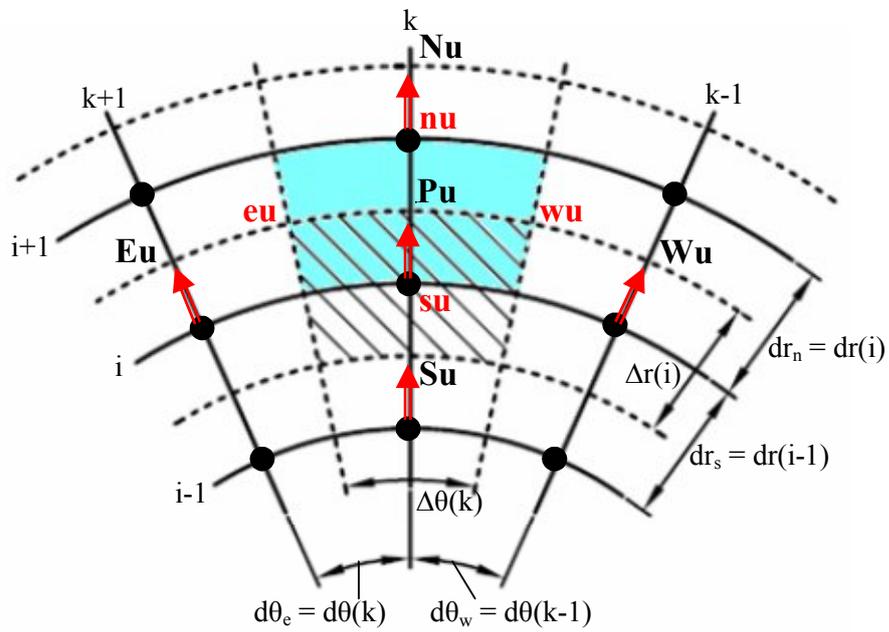
$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{eu}^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{eu} - \frac{1}{r_{wu}^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{wu} \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\ &= \left(\frac{1}{r_{eu}^*} \frac{u_{Eu}^* - u_{pu}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{wu}^*} \frac{u_{pu}^* - u_{wu}^*}{d\theta_w} \right) dr_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{nu} - \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{bu} \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \\ &= \left(\frac{u_{Tu}^* - u_{pu}^*}{dz_t^*} - \frac{1}{r_{wu}^*} \frac{u_{pu}^* - u_{Bu}^*}{dz_b^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} -\frac{u^*}{r^{*2}} r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{u_{pu}^*}{r_n^*} dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$



(a) : Projection suivant le plan (r^*, z^*)



(b) : Projection suivant le plan (r^*, θ)

Figure 3.6 : Le maillage décalé suivant la direction radiale.

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} -\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* = -\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right)^1 - 2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial W^*}{\partial \theta} \right)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$= \left[\frac{4}{r_n^*} \left(\frac{W_{wnu}^{*1} + W_{wsu}^{*1}}{2} - \frac{W_{enu}^{*1} + W_{esu}^{*1}}{2} \right) - \frac{2}{r_n^*} \left(\frac{W_{wnu}^{*0} + W_{wsu}^{*0}}{2} - \frac{W_{enu}^{*0} + W_{esu}^{*0}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^*$$

On regroupe tous les termes présentes pour obtenus une équation de discrétisation finale sous les coefficients la forme suivante :

$$A_p u_{pu}^* = A_E u_{Eu}^* + A_W u_{Wu}^* + A_N u_{Nu}^* + A_S u_{Su}^* + A_T u_{Tu}^* + A_B u_{Bu}^* + S_u$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes :

$$A_E = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e} \quad A_W = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w}$$

$$A_N = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_{nu}^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*} \quad A_S = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_{su}^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*} \quad (3.10)$$

$$A_T = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p}{dr_t^*} \quad A_B = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p}{dr_b^*}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{r_n^*} + \frac{3}{2} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{t^*} \quad (3.11)$$

$$S_u = \frac{4u_{pu}^{*1} - u_{pu}^{*0}}{2\Delta t} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (P_p^* - P_N^*) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\frac{Gr^*}{\text{Re}_0} \cos \theta_p (2T_p^{*1} - T_p^{*0}) r_n^* dr_n^* \Delta z_p^* + \left[(2W_{Pu}^{*2})^1 - (W_{Pu}^{*2})^0 \right] dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\left[\frac{4}{r_n^*} \left(\frac{W_{wnu}^{*1} + W_{wsu}^{*1}}{2} - \frac{W_{enu}^{*1} + W_{esu}^{*1}}{2} \right) - \frac{2}{r_n^*} \left(\frac{W_{wnu}^{*0} + W_{wsu}^{*0}}{2} - \frac{W_{enu}^{*0} + W_{esu}^{*0}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^*$$

$$+ \left[-2r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^1 + 2r_{su}^* (u_{su}^{*2})^1 + r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^0 - r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^0 \right] \Delta \theta_p z_p^*$$

$$+ \left[-2(w_{eu}^{*1} u_{eu}^{*1} - w_{wu}^{*1} u_{wu}^{*1}) + (w_{eu}^{*0} u_{eu}^{*0} - w_{wu}^{*0} u_{wu}^{*0}) \right] dr_n^* \Delta z_p^*$$

$$+ \left[-2(v_{tu}^{*1} u_{tu}^{*1} - v_{bu}^{*1} u_{bu}^{*1}) + (v_{tu}^{*0} u_{tu}^{*0} - v_{bu}^{*0} u_{bu}^{*0}) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont tous positifs, relation (3.11), et que A_p est supérieur à la somme des coefficients, comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale. Citons que les composantes de vitesse aux faces des volumes finis

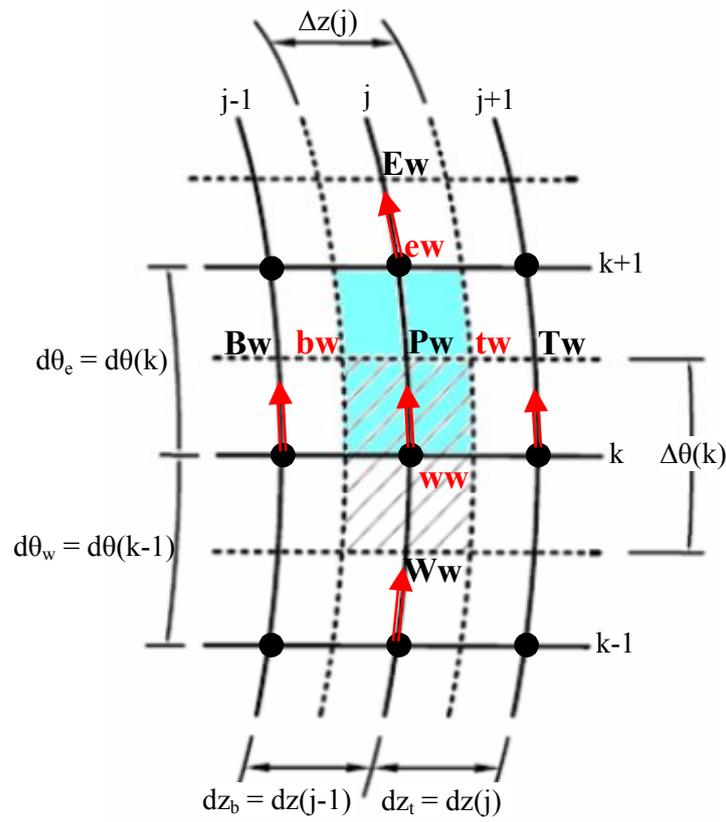
décclés suivant la direction radiale sont discrétisées par des différences (pour assurer la précision d'ordre deux) :

$$\begin{aligned} u_{nu}^* &= \frac{u_{Pu}^* + u_{Nu}^*}{2} & u_{su}^* &= \frac{u_{Pu}^* + u_{Su}^*}{2} \\ W_{eu}^* &= \frac{W_{enu}^* + W_{esu}^*}{2} & W_{wu}^* &= \frac{W_{wnu}^* + W_{wsu}^*}{2} \\ v_{tu}^* &= \frac{v_{tnu}^* + v_{bnu}^*}{2} & v_{bu}^* &= \frac{v_{tsu}^* + v_{bsu}^*}{2} \end{aligned}$$

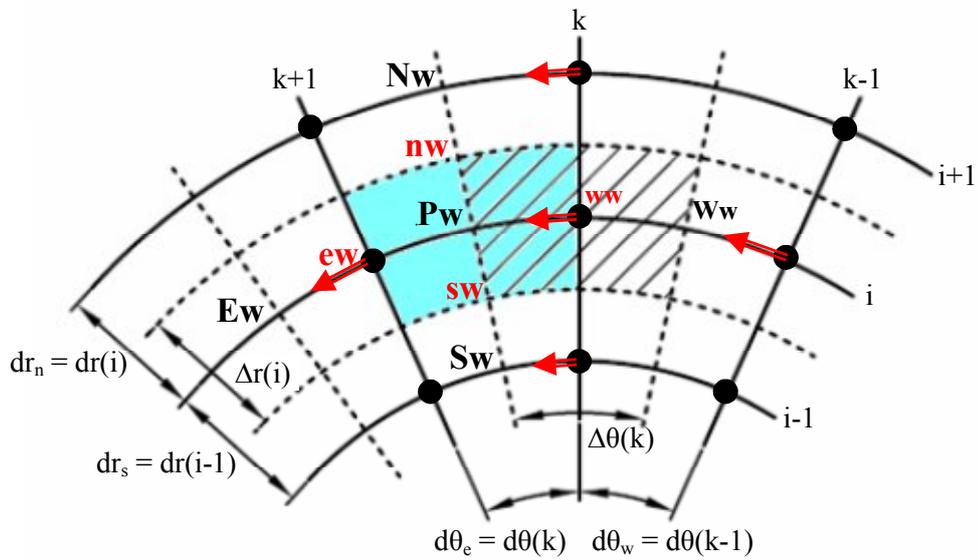
3.4.3 Equation de quantité de mouvement azimutale

L'intégrale de l'équation de quantité de mouvement azimutale (2.8), se fait dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (figure 3.7).

$$\begin{aligned} \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \frac{\partial w^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \frac{3w_{pw}^{*1} - 4w_{pw}^{*0} + w_{pw}^{*0}}{2\Delta t^*} r_p^* dr^* d\theta_e \Delta z_p^* \\ \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* w^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* w^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* w^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(r_{nw}^{*1} u_{nw}^{*1} w_{nw}^{*1} - r_{sw}^{*1} u_{sw}^{*1} v_{sw}^{*1}) - (r_{nw}^{*0} u_{nw}^{*0} w_{nw}^{*0} - r_{sw}^{*0} u_{sw}^{*0} v_{sw}^{*0}) \right] d\theta_e \Delta z_p^* \\ \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* w^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* w^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* w^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(w_{ew}^{*2} - w_{ww}^{*2}) - (w_{ew}^{*0} - w_{ww}^{*0}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* w^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* w^*) \Big| - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* w^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_{tw}^{*1} w_{tw}^{*1} - w_{bw}^{*1} w_{bw}^{*1}) - (v_{tw}^{*0} w_{tw}^{*0} - w_{bw}^{*0} w_{bw}^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \\ \int_{wwb}^e \int_{bs}^t \int_s^n -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* &= (P_p^* - P_E^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ \int_{wb}^e \int_{bs}^t \int_{su}^n \frac{Gr^*}{Re_0^2} \sin \theta T^* r^* dr^* d\theta dz^* &= -\frac{Gr^*}{Re_0^2} \sin \theta_p (2T_p^{*1} - T_p^{*0}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$



(a) : Projection suivant le plan (z^*, θ)



(b) : Projection suivant le plan (r^*, θ)

Figure 3.7 : Le maillage décalé suivant la direction azimutale

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{nw}^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \Big|_{nw} - r_{sw}^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \Big|_{sw} \right] d\theta_p \Delta z_p^* \\ &= \left(r_{nw}^* \frac{w_{Nw}^* - w_{Pw}^*}{dr_n^*} - r_{sw}^* \frac{w_{Pw}^* - w_{Su}^*}{dr_s^*} \right) d\theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{1}{r_{ew}^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \Big|_{nw} - r_{ww}^* \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \Big|_{ww} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ &= \left(\frac{1}{r_{ew}^*} \frac{w_{Ew}^* - w_{Pw}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{ww}^*} \frac{w_{Pw}^* - w_{Ww}^*}{d\theta_w} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{1}{\partial z^*} \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \Big|_{tw} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \Big|_{bw} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \\ &= \left(\frac{w_{Tw}^* - w_{Pw}^*}{dz_t^*} - \frac{w_{Pw}^* - w_{Bw}^*}{dz_b^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \end{aligned}$$

$$\int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n -\frac{w^*}{r^{*2}} r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{w_{pw}^*}{r_{pw}^*} \Delta r_p^* d\theta_e \Delta r_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \left[2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) \Big| - 2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) \Big| \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \frac{2}{r_{pw}^*} \left[2 \left(\frac{u_{new}^{*1} - u_{sew}^{*1}}{2} - \frac{u_{nww}^{*1} - u_{sww}^{*1}}{2} \right) - \frac{1}{r_{pw}^*} \left(\frac{u_{new}^{*0} - u_{sew}^{*0}}{2} - \frac{u_{nww}^{*0} - u_{sww}^{*0}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* dz_p^* \end{aligned}$$

On groupe tous les termes précédents, pour une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_P w_{Pw}^* = A_E w_{Ew}^* + A_W w_{Ww}^* + A_N w_{Nw}^* + A_S w_{Sw}^* + A_T w_{Tw}^* + A_B w_{Bw}^* + S_w$$

Ou les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_{ew}^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_p^* \Delta z_p^*}{r_{ww}^* d\theta_w} \\ A_N &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_{nw}^* \Delta \theta_e \Delta z_p^*}{dr_n^*} & A_S &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_{sw}^* \Delta \theta_e \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\ A_T &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_t^*} & A_B &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_b^*} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{r_{pw}^*} + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} S_u = & \frac{4u_{pw}^{*1} - u_{pw}^{*0}}{2\Delta t} r_p^* dr_p^* \Delta \theta_e dz_p^* + (P_P^* - P_E^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ & + \frac{Gr^*}{\text{Re}_0^2} \sin \theta_p (2T_P^{*1} - T_P^{*0}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ & + \left[-2(w_{ew}^{*2} - w_{ww}^{*2}) + (w_{ew}^{*2} - w_{ww}^{*2})^0 \right] \Delta r_p^* dz_p^* \\ & + \left[-2(r_{nw}^* u_{nw}^{*1} v_{nw}^{*1} - r_{sw}^* u_{sw}^{*1} v_{sw}^{*1}) + (r_{nw}^* u_{nw}^{*0} v_{nw}^{*0} - r_{sw}^* u_{sw}^{*0} v_{sw}^{*0}) \right] d\theta_e \Delta z_p^* \\ & + \left[-2(v_{tw}^{*1} w_{tw}^{*1} - v_{bw}^{*1} w_{bw}^{*1}) + (v_{tw}^{*0} w_{tw}^{*0} - v_{bw}^{*0} w_{bw}^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \\ & - \left(2u_{pw}^{*1} w_{pw}^{*1} - u_{pw}^{*0} w_{pw}^{*0} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{w_{pw}^*}{r_{pw}^*} \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \\ & + \frac{2}{r_{pw}^*} \left[2 \left(\frac{u_{new}^{*1} + u_{sew}^{*1}}{2} - \frac{u_{mww}^{*1} + u_{sww}^{*1}}{2} - \frac{u_{new}^{*0} + u_{sew}^{*0}}{2} - \frac{u_{mww}^{*0} + u_{sww}^{*0}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

On note que les coefficients de l'équation de discrétisation dans équation (3.13), sont tous positifs, et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients aussi, comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale. Les composantes de vitesse aux faces des volumes finis décalés suivant la direction azimutale sont interpolées suivant le schéma de différence centrée :

$$u_{nw}^* = \frac{u_{new}^* + u_{mww}^*}{2}$$

$$u_{sw}^* = \frac{u_{sew}^* + u_{sww}^*}{2}$$

$$w_{ew}^* = \frac{w_{pw}^* + w_{Ew}^*}{2}$$

$$w_{ww}^* = \frac{w_{Pw}^* + w_{Ww}^*}{2}$$

$$v_{tw}^* = \frac{v_{tew}^* + v_{tww}^*}{2}$$

$$v_{bw}^* = \frac{v_{bew}^* + v_{bww}^*}{2}$$

3.4.4 Equation de quantité de mouvement axial

La discrétisation de l'équation de quantité de mouvement axiale (2.9), se fait dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (figure 3.8).

$$\int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{\partial v^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3v_{pv}^* - 4v_{pv}^{*1} + v_{pv}^{*0}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_t^*$$

$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*)^1 - \frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(r_{nv}^* u_{nv}^{*1} v_{nv}^{*1} - r_{sv}^* u_{sv}^{*1} v_{sv}^{*1}) + (r_{nv}^* u_{nv}^{*0} v_{nv}^{*0} - r_{sv}^* u_{sv}^{*0} v_{sv}^{*0}) \right] \Delta \theta_p \Delta z_t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*)^1 - \frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[-2(w_{ev}^{*1} v_{nv}^{*1} - w_{wv}^{*1} v_{wv}^{*1}) + (w_{ev}^{*0} v_{ev}^{*0} - w_{wv}^{*0} v_{ev}^{*0}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_t^* \end{aligned}$$

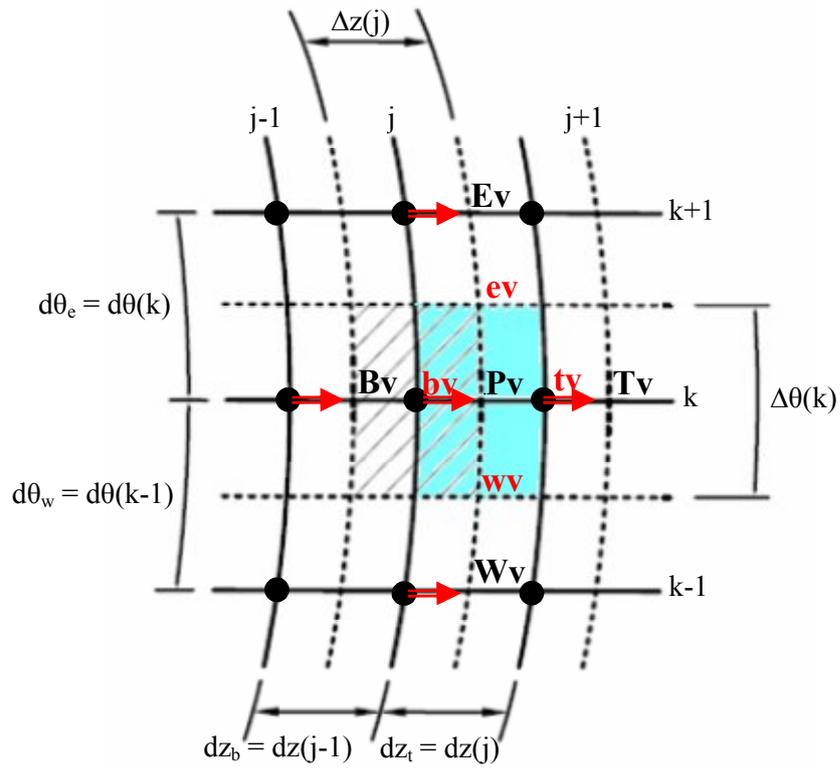
$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*)^1 - \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_{tv}^{*1} v_{tv}^{*1} - v_{bv}^{*1} v_{bv}^{*1}) + (v_{tv}^{*0} v_{tv}^{*0} - v_{bv}^{*0} v_{bv}^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^* - P_T^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

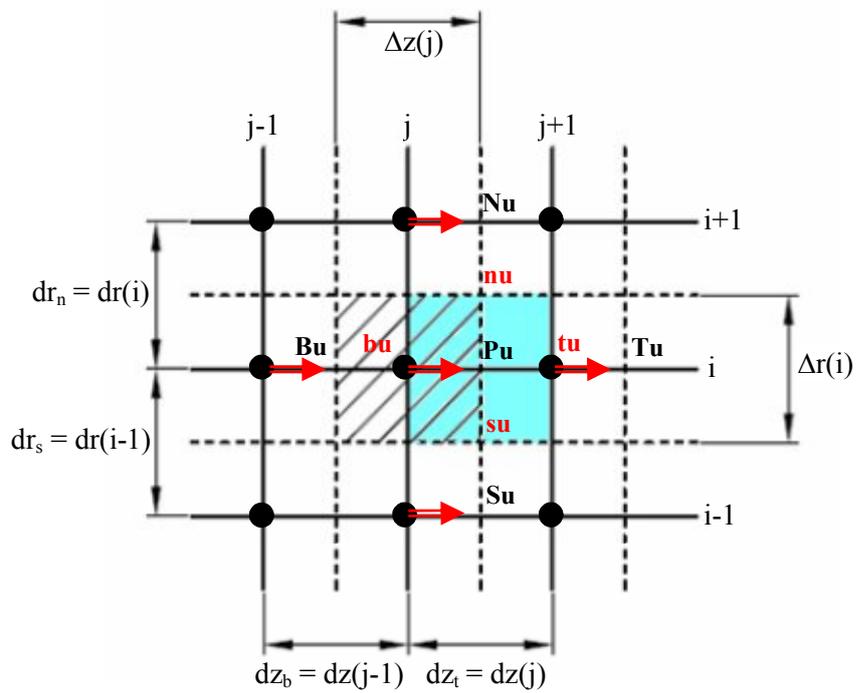
$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{nv}^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \Big|_{nv} - r_{sv}^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \Big|_{sv} \right] \Delta \theta_p \Delta z_t^* \\ &= \left(r_{nv}^* \frac{w_{nv}^* - w_{pv}^*}{dr_n^*} - r_{sv}^* \frac{w_{pv}^* - w_{sv}^*}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p \Delta z_t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{1}{r_{ev}^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \Big|_{ev} - \frac{1}{r_{wv}^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \Big|_{wv} \right] dr_p^* \Delta z_t^* \\ &= \left(\frac{1}{r_{ev}^*} \frac{v_{Ev}^* - v_{Pv}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{wv}^*} \frac{v_{Pv}^* - v_{Wv}^*}{d\theta_w} \right) \Delta r_p^* \Delta z_t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w}^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{z^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{tv} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{bv} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_p \\ &= \left(\frac{v_{Tv}^* - v_{Pv}^*}{dz_t^*} - \frac{v_{Pv}^* - v_{Bv}^*}{dz_b^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$



(a) : Projection suivant le plan (z^*, θ)



(b) : Projection suivant le plan (r^*, z^*)

Figure 3.8 : Le maillage décalé suivant la direction axiale

On regroupe tous les termes discrétisé pour l'obtention d'une équation de discrétisation finale sous la forme standard :

$$A_P v_{Pv}^* = A_E v_{Ev}^* + A_W v_{Wv}^* + A_N v_{Nv}^* + A_S v_{Sv}^* + A_T v_{Tv}^* + A_B v_{Bv}^* + S_v$$

Ou les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_t^*}{r_{ev}^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_p^* \Delta z_p^*}{r_{wv}^* d\theta_w} \\ A_N &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_{sv}^* \Delta \theta_p \Delta z_t^*}{dr_s^*} & A_S &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_{nv}^* \Delta \theta_p dz_t^*}{dr_s^*} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta}{dr_t^*} & A_B &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta}{dr_b^*} \\ A_P &= A_P + A_P + A_P + A_P + A_P + A_P + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_t^*}{\Delta t^*} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} S_v &= \frac{4v_{pv}^{*1} - v_{pv}^{*0}}{2\Delta t} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_t^* + (P_p^* - P_T^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \\ &+ \left[-2(r_{nv}^* u_{nv}^{*1} v_{nv}^{*1} + r_{sv}^* u_{sv}^{*1} v_{sv}^{*1}) + (r_{nv}^* u_{nv}^{*0} v_{nv}^{*0} + r_{sv}^* u_{sv}^{*0} v_{sv}^{*0}) \right] \Delta \theta_p dz_t^* \\ &+ \left[-2(w_{ev}^* v_{ev}^{*1} - w_{wv}^* v_{wv}^{*1}) + (w_{ev}^* v_{ev}^{*0} - w_{wv}^* v_{wv}^{*0}) \right] \Delta r_p^* dz_t^* \\ &+ \left[-2(v_{tv}^* v_{tv}^{*1} - v_{bv}^* v_{bv}^{*1}) + (v_{tv}^* v_{tv}^{*0} - v_{bv}^* v_{bv}^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

Comme dans le cas des équations de discrétisation radiale et azimutale, les relations (3.14) et (3.15), indiquent respectivement que les coefficients de l'équation de discrétisation axiale sont tous positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients.

Les composantes des vitesses aux faces des volumes finis décalés suivant la direction axiale sont :

$$\begin{aligned} u_{nv}^* &= \frac{u_{ntv}^* + u_{nbv}^*}{2} & u_{sv}^* &= \frac{u_{stv}^* + u_{sbv}^*}{2} \\ w_{ev}^* &= \frac{w_{etv}^* + w_{ebv}^*}{2} & w_{wv}^* &= \frac{w_{wtv}^* + w_{wbv}^*}{2} \\ v_{tv}^* &= \frac{v_{Ttv}^* + v_{Ptv}^*}{2} & v_{bv}^* &= \frac{v_{Btv}^* + v_{Ptv}^*}{2} \end{aligned}$$

3.4.5 L'équation de l'énergie

L'équation d'énergie (2.10), est intégrée dans le volume fini typique (figure 3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{\partial T^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \frac{3T_p^* - 4T_p^{*1} + T_p^{*0}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*)^1 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(r_n^* u_n^* T_n^{*1} - r_s^* u_s^* T_s^{*1}) + (r_n^* u_n^* T_n^{*0} - r_s^* u_s^* T_s^{*0}) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*)^1 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(w_e^* T_e^{*1} - w_w^* T_w^{*1}) + (w_e^* T_e^{*0} - w_w^* T_w^{*0}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*)^1 - \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*)^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_t^* T_t^{*1} - v_b^* T_b^{*1}) + (v_t^* T_t^{*0} - v_b^* T_b^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (v^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[r_n^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_n - r_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ &= \left[r_n^* \left(\frac{T_N^* - T_P^*}{dr_n^*} \right) - r_s^* \left(\frac{T_P^* - T_S^*}{dr_s^*} \right) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[\frac{1}{r_e^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_n - \frac{1}{r_w^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_s \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ &= \left[\left(\frac{T_E^* - T_P^*}{r_n^* d\theta_e} \right) - \left(\frac{T_P^* - T_W^*}{r_w^* d\theta_w} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{b_s}^t \int_s^n \left[\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_t - \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_b \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \\ &= \left[\left(\frac{T_T^* - T_P^*}{dz_t^*} \right) - \left(\frac{T_P^* - T_B^*}{dz_b^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

Le regroupement des termes précédents conduit à l'équation de discrétisation de la température suivante :

$$A_p T_p^* = A_E T_E^* + A_W T_W^* + A_N T_N^* + A_S T_S^* + A_T T_T^* + A_B T_B^* + S_T$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation et la source sont :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_e^* d \theta_e} & A_W &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_w^* d \theta_w} \\ A_N &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{\Delta r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*} & A_S &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{\Delta r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\ A_T &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_t^*} & A_B &= \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_b^*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{4T_p^{*1} - T_p^0}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \left[-2(r_n^* u_n^{*1} T_n^{*1} - (r_s^* u_s^{*1} T_s^{*1})) + (r_n^* u_n^{*0} T_n^{*0} - (r_s^* u_s^{*0} T_s^{*0})) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ &+ \left[-2(w_e^{*1} T_e^{*1} - w_w^{*1} T_w^{*1}) + (w_e^{*0} T_e^{*0} - w_w^{*0} T_w^{*0}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ &+ \left[-2(v_t^{*1} T_t^{*1} - v_b^{*1} T_b^{*1}) + (v_t^{*0} T_t^{*0} - v_b^{*0} T_b^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

3.5 DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Toutes les conditions sur les champs de vitesse et de température et sur les flux seront chacune transformées en une forme discrète, conformément au maillage. Il s'agira toujours d'identifier pour chaque condition aux limites les coefficients des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants.

Etant donné que la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques tandis que les autres conditions seront directement données.

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont aussi écrites selon la forme générale de l'équation de discrétisation. Le domaine numérique est défini par :

$i = 1$ à IL ; $j = 1$ à JL et $k = 1$ à kL balayant les direction radiale, axiale et angulaire.

3.5.1 A l'entrée du cylindre ($z = 0$)

Le domaine numérique correspondant : $j=1, 1 \leq i \leq IL, 1 \leq k \leq KL$

➤ **pour le domaine fluide**

La composante axiale, $v^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 1$

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k)v^*(i, j, k) &= A_N(i, j, k)v^*(i+1, j, k) + A_S(i, j, k)v^*(i-1, j, k) + \\
 A_E(i, j, k)v^*(i, j, k+1) &+ A_W(i, j, k)v^*(i, j, k-1) + \\
 A_T(i, j, k)v^*(i, j+1, k) &+ A_B(i, j, k)v^*(i, j-1, k) + S_v(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Qui devra donc s'écrire:

$$\begin{aligned}
 1.v^*(i, 1, k) &= 0.v^*(i+1, 1, k) + 0.v^*(i-1, 1, k) + 0.v^*(i, 1, k+1) + 0.v^*(i, 1, k-1) \\
 &+ 0.v^*(i, 2, k) + 1
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les coefficients et les termes de source sont :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k) &= 1 \\
 A_N(i, j, k) &= A_S(i, j, k) = A_E(i, j, k) = A_W(i, j, k) = A_T(i, j, k) = A_B(i, j, k) = 0 \\
 S_v(i, j, k) &= 1
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

De même pour les composantes u^*, w^* qui sont nulles à l'entrée donc les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k) &= 1 \\
 A_N(i, j, k) &= A_S(i, j, k) = A_E(i, j, k) = A_W(i, j, k) = A_T(i, j, k) = A_B(i, j, k) = 0 \\
 S(i, j, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

➤ **pour le domaine solide**

1 - condition sur la température :

$T^* = 1$, de la même manière que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k) &= 1 \\
 A_N(i, j, k) &= A_S(i, j, k) = A_E(i, j, k) = A_W(i, j, k) = A_T(i, j, k) = A_B(i, j, k) = 0 \\
 S(i, j, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

2 - condition sur la vitesse :

Les composantes à l'entrée u^* , w^* et v^* sont nulles donc les coefficients et les termes de source seraient :

$$A_p(i, j, k) = 1$$

$$A_N(i, j, k) = A_S(i, j, k) = A_E(i, j, k) = A_W(i, j, k) = A_T(i, j, k) = A_B(i, j, k) = 0 \quad (3.23)$$

$$S(i, j, k) = 0$$

3.5.2 A la sortie du cylindre ($z = 10$)

$$(J = JL, 1 \leq i \leq IL, 1 \leq k \leq KL)$$

➤ pour le domaine fluide

1 - condition sur la vitesse radiale :

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = 0$$

Se discrétise selon la différence arrière à l'ordre 1, soit :

$$\frac{u^*(i, JL, k) - u^*(i, JL - 1, k)}{dz^*(JL - 1)} = 0 \Rightarrow u^*(i, JL, k) = u^*(i, JL - 1, k)$$

Par rapport au nœud JL, cette équation permet d'identifier les coefficients correspondants :

$$\begin{aligned} 1.u^*(i, JL, k) &= 0.u^*(i + 1, JL, k) + 0.u^*(i - 1, JL, k) + 0.u^*(i, JL, k + 1) \\ &\quad + 0.u^*(i, JL, k - 1) + 0.u^*(i, JL - 1, k) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

D'où :

$$A_p(i, JL, k) = 1 \quad A_B(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_W(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.25)$$

$$S_v(i, JL, k) = 0$$

2 - condition sur les vitesses w^* , v^* est :

$$\left. \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = \left. \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = 0, \text{ se discrétise selon les différences arrières à l'ordre 1}$$

$$w^*(i, JL, k) = w^*(i, JL - 1, k)$$

$$v^*(i, JL, k) = v^*(i, JL - 1, k)$$

Et les coefficients sont :

$$A_p(i, JL, k) = 1 \quad A_B(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_W(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.26)$$

$$S_v(i, JL, k) = 0$$

3 - condition sur la température :

$$\left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right|_{z^*=10} = 0, \text{ se caractérise autour de}$$

JL-1 selon le différence arrière à l'ordre 1 :

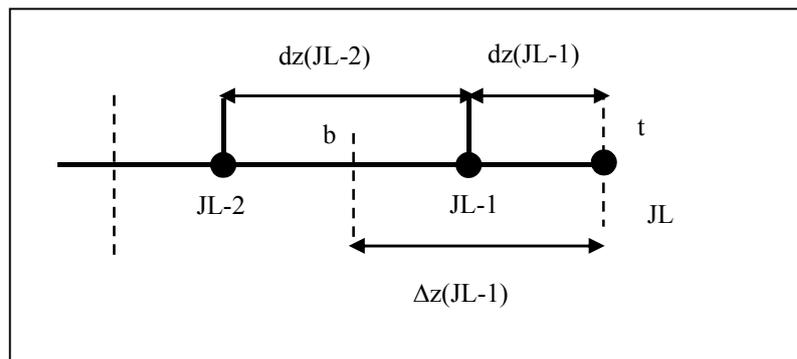


Figure 3.9 : Maillage dans la direction axiale a la sortie du cylindre

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right|_t - \left. \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right|_b = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{T^*(i, JL, k) - T^*(i, JL - 1, k)}{dz^*(JL - 1)} - \frac{T^*(i, JL - 1, k) - T^*(i, JL - 2, k)}{dz^*(JL - 2)} = 0$$

On en déduit les différents coefficients :

$$A_p(i, JL, k) = 1 \quad A_B(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_W(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.27)$$

$$S(i, JL, k) = [T^*(i, JL - 1, k) - T^*(i, JL - 2, k)]$$

➤ **Pour le domaine solide**

Pour les vitesses u^* , w^* et v^* , seule les coefficients A_p sont égaux à 1.

1- condition sur la température :

$$\left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right|_{z^*=10} = 0, \text{ de même manier que précédemment on obtient :}$$

$$A_p(i, JL, k) = 1 \quad A_B(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_W(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.28)$$

$$S_v(i, JL, k) = [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

3.5.3 La paroi du cylindre extérieur

($i = IL, 1 \leq j \leq JL, 1 \leq k \leq KL$)

Pour les vitesses u, v et v , seule les coefficients A_p sont égaux à 1.

1 - condition sur le flux :

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_{2c}^*} = 0$$

Se discrétise en utilisant un schéma de différence arrière, soit :

$$T^*(IL, j, k) = T^*(IL-1, j, k) \quad (3.29)$$

On en déduit les différents coefficients :

$$A_p(IL, j, k) = A_S(IL, j, k) = 1$$

$$A_N(IL, j, k) = A_E(IL, j, k) = A_W(IL, j, k) = A_T(IL, j, k) = A_B(IL, j, k) = 0 \quad (3.30)$$

$$S(IL, j, k) = 0$$

3.5.4 La paroi du cylindre intérieur

($i = 1, 1 \leq j \leq JL, 1 \leq k \leq KL$)

Pour les vitesses u, v et v , seuls les coefficients A_p sont égaux à 1 :

1 - condition sur le flux :

$$\left. \frac{\partial T^*(r, \theta, z, t)}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_{2i}^*} = -1,$$

se discrétise selon un schéma différence arrière d'ordre 1, soit :

$$\frac{T^*(1, j, k) - T^*(2, j, k)}{dr^*(1)} = 1 \Rightarrow T^*(1, j, k) = T^*(2, j, k) + dr^*(1) \quad (3.31)$$

Par rapport aux nœuds IL, les coefficients seraient identifiés par :

$$A_p(1, j, k) = A_N(1, j, k) = 1$$

$$A_E(1, j, k) = A_W(1, j, k) = A_T(1, j, k) = A_s(1, j, k) = 0 \quad (3.32)$$

$$S(1, j, k) = -dr^*(1)$$

3.6 COUPLAGE PRESSION-VITESSE

Les équations de quantité de mouvement pour les variables des vitesses u^* , w^* et v^* sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_n u_n^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_n (P_N^* - P_P^*) \\ A_s u_s^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_s (P_P^* - P_S^*) \\ A_e w_e^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_e (P_E^* - P_P^*) \\ A_w w_w^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_w (P_P^* - P_W^*) \\ A_t v_t^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_t (P_T^* - P_P^*) \\ A_b v_b^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_b (P_P^* - P_B^*) \end{aligned} \quad (3.33)$$

b_u^* , b_w^* et b_v^* , contiennent les termes des sources des équations discrétisée radiale, axiale et azimutale, autres que les termes de pression.

Le système (3.33) est réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_n^* &= \hat{u}_n^* + d_n (P_N^* - P_P^*) \\ u_s^* &= \hat{u}_s^* + d_s (P_P^* - P_S^*) \\ w_e^* &= \hat{w}_e^* + d_e (P_E^* - P_P^*) \\ w_w^* &= \hat{w}_w^* + d_w (P_P^* - P_W^*) \\ v_t^* &= \hat{v}_t^* + d_t (P_T^* - P_P^*) \\ v_b^* &= \hat{v}_b^* + d_b (P_P^* - P_B^*) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ou les pseudo vitesse \hat{u}_n^* , \hat{u}_s^* , \hat{w}_e^* , \hat{w}_w^* , \hat{v}_t^* et \hat{v}_b^* sont donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{u}_n^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_u^*}{A_n} \\ \hat{u}_s^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_u^*}{A_s} \\ \hat{w}_e^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_w^*}{A_e} \\ \hat{w}_w^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_w^*}{A_w} \\ \hat{v}_t^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_v^*}{A_t} \\ \hat{v}_b^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_v^*}{A_b}\end{aligned}\tag{3.35}$$

Pour obtenir l'équation de pression, on va remplacé du champ de vitesse (3.34) dans l'équation de continuité discrétisée (3.9), on obtient alors une équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$a_p P_p^* = a_n P_n^* + a_s P_s^* + a_e P_e^* + a_w P_w^* + a_t P_t^* + a_b P_b^* + b\tag{3.36}$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned}a_n &= r_n^* d_n \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ a_s &= r_s^* d_s \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ a_e &= d_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ a_w &= d_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ a_t &= d_t \Delta r_p^* \Delta \theta_p \\ a_b &= d_b \Delta r_p^* \Delta \theta_p\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$a_p = a_n + a_s + a_e + a_w + a_t + a_b$$

$$b = -[(r_n^* \hat{u}_n^* - r_s^* \hat{u}_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (\hat{w}_e^* - \hat{w}_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (\hat{v}_t^* - \hat{v}_b^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p]\tag{3.38}$$

Avec un champ de vitesse estimé, utilisé dans la source (3.38), la résolution de l'équation de pression (3.36), permet l'obtention de la pression en chaque nœud du domaine.

Cependant cette pression n'est qu'une estimation, notée P^{**} . L'introduction de cette pression estimée P^{**} , dans les équations de Navier – Stokes, nous donnons une estimation du champ de vitesse noté (u^*, v^*, w^*) .

$$\begin{aligned}
A_n u_n^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_n (P_N^* - P_P^*) \\
A_s u_s^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_s (P_P^* - P_S^*) \\
A_e w_e^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_e (P_E^* - P_P^*) \\
A_w w_w^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_w (P_P^* - P_W^*) \\
A_t v_t^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_t (P_T^* - P_P^*) \\
A_b v_b^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_b (P_P^* - P_B^*)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Les estimations, nécessitent des corrections :

$$\begin{aligned}
u^* &= u^{**} + u' \\
w^* &= w^{**} + w' \\
v^* &= v^{**} + v' \\
P^* &= P^{**} + P'
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Où : u' , v' , w' et P' sont les corrections et aussi des solutions pour les équations algébrique, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
A_n u_n' &= \sum A_i u_i' + a_n (P_N' - P_P') \\
A_s u_s' &= \sum A_i u_i' + a_s (P_P' - P_S') \\
A_e w_e' &= \sum A_i w_i' + a_e (P_E' - P_P') \\
A_w w_w' &= \sum A_i w_i' + a_w (P_P' - P_W') \\
A_t v_t' &= \sum A_i v_i' + a_t (P_T' - P_P') \\
A_b v_b' &= \sum A_i v_i' + a_b (P_P' - P_B')
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Une approximation est faite, c'est de négliger les corrections de vitesse aux nœuds voisins, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
u_n' &= d_n (P_N' - P_P') \\
u_s' &= d_s (P_P' - P_S') \\
w_e' &= d_e (P_E' - P_P') \\
w_w' &= d_w (P_P' - P_W') \\
v_t' &= d_t (P_T' - P_P') \\
v_b' &= d_b (P_P' - P_B')
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Et par conséquent le champ de vitesse corrigé s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_n^* &= u_n^{**} + d_n (P'_N - P'_p) \\
 u_s^* &= u_s^{**} + d_s (P'_P - P'_S) \\
 w_e^* &= w_e^{**} + d_e (P'_E - P'_p) \\
 w_w^* &= w_w^{**} + d_w (P'_P - P'_W) \\
 v_t^* &= v_t^{**} + d_t (P'_T - P'_p) \\
 v_b^* &= v_b^{**} + d_b (P'_P - P'_B)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pour corrigé la vitesse, il faut calculer le champ de correction de la pression, pour ça on remplace les expressions de vitesses précédentes dans l'équation dans l'équation de continuité, on obtient une équation algébrique pour P :

$$a_p P'_p = a_n P'_N + a_s P'_S + a_e P'_E + a_w P'_W + a_t P'_T + a_b P'_B + b \tag{3.44}$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned}
 a_n &= r_n d_n \Delta \theta_p \Delta z_p \\
 a_s &= r_s d_s \Delta \theta_p \Delta z_p \\
 a_e &= d_e \Delta r_p \Delta z_p \\
 a_w &= d_w \Delta r_p \Delta z_p \\
 a_t &= d_t r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
 a_b &= d_b r_p \Delta r_p \Delta \theta_p
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$a_p = a_n + a_s + a_e + a_w + a_t + a_b$$

$$b = - \left[(r_n^* u_n^{**} - r_s^* u_s^{**}) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (w_e^* - w_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (v_t^* - v_b^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \right]$$

La correction de la pression est obtenue par la résolution de l'équation (3.44), qui permet par la suite de corrigé le champ de vitesse.

3.7 SEQUENCES DE L'ALGORITHME DE CALCUL SIMPLER

1. Donner un champ initial comme première estimation pour la vitesse et la température au temps t et Δt .
2. Calcul les coefficients des équations discrétisées pour des pseudovitesse.
3. On utilise les pseudovitesse dans la source des l'équation de pression.
4. Résoudre l'équation discrétisée de la pression et trouver la pression estimée P^{**} .

5. Résoudre le champ de vitesse estimé (u^*, v^*, w^*) , en utilisant la pression estimée.
6. Calculer la source pour l'équation de correction de pression.
7. Résoudre l'équation de correction de pression et corriger le champ de vitesse au temps $t+\Delta t$.
8. Résoudre de l'équation de conservation de l'énergie discrétiser pour obtenir le champ de température.
9. Arrêter le calcul dans le cas d'atteinte d'un régime permanent ou d'un régime transitoire établi ou bien considéré les champs trouvés comme des estimation au temps t et ceux du temps t comme des champs au temps $t-\Delta t$ et retrouver à l'étape 2...

3.8 SOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS DE DISCRETISATION PAR LA METHODE DE BALAYAGE

La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée et pour y remédier, on utilise une méthode de résolution itérative de balayage dans les directions radiale, axiale et azimutale respectivement. Il est clair que la matrice des coefficients de chacun des systèmes d'équations est heptadiagonale. Avant chaque balayage, cette matrice est transformée, momentanément, en une matrice tri-diagonal simple r^* et z^* cyclique suivant θ . Les systèmes tri-diagonaux suivant r^* et z^* sont résolus par l'algorithme de Thomas classique alors que le système tri-diagonal cyclique est résolu par l'algorithme de Thomas cyclique.

3.8.1 L'algorithme de Thomas

$$A_p \phi_p = A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_T \phi_T + A_B \phi_B + S_p \quad (3.46)$$

Quant on procédé à un balayage dans la direction r^* , l'équation est tout d'abord réécrite sous la forme :

$$A_p \phi_p = A_N \phi_N + A_S \phi_S + S_p \quad (3.47)$$

En l'écrivant sous forme indicielle suivante :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i+1} + d_i \quad : \text{Pour } i = 1, \text{ IL} \quad (3.48)$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (3.49)$$

Cette équation est réécrite pour l'indice $i-1$:

$$\phi_{i-1} = P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1} \quad (3.50)$$

L'expression de ϕ_{i-1} , équation (3.47), et on obtient :

$$\phi_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad (3.51)$$

Par identification avec l'éq. (3.46) on déduit deux nouvelles relations de récurrence :

$$P_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad (3.52)$$

$$\text{Avec les valeurs initiales } P_i = \frac{B_i}{A_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{D_i}{A_i} \quad (3.53)$$

On peut facilement démontrer que $B_{IL} = 0$ et $C_1 = 0$

Avec l'utilisation de ces valeurs on peut calculer toutes les composantes P_i et Q_i , $i=2, \dots, IL$

Il est facile de démontrer que $\phi_{IL} = Q_{IL}$.

Remarque : pour le balayage suivant la direction z est effectuée de la même manière que le balayage suivant la direction z^* sauf en remplace i par j est A_N par A_T et A_S par A_B .

3.8.2 L'algorithme de Thomas cyclique

Un système d'équation tri diagonal cyclique est représenté par l'équation indicielle suivant :

$$a_k \Phi_k = b_k \Phi_{kkk} + c_k \Phi_{kk} + d_k \quad (3.54)$$

$$k = 1, 2, \dots, KL$$

$$kkk = \begin{cases} k+1, & sik \neq KL \\ 1, & sik = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k-1, & sik \neq KL \\ KL, & sik = 1 \end{cases}$$

Tous les éléments a_k , b_k , c_k et d_k sont supposés connus.

On divise l'équation par a_k

$$\Phi_k = \frac{b_k}{a_k} \Phi_{kkk} + \frac{c_k}{a_k} \Phi_{kk} + \frac{d_k}{a_k} \tag{3.55}$$

Dans le cas $k = 1$

$$\Phi_1 = \frac{b_1}{a_1} \Phi_2 + \frac{c_1}{a_1} \Phi_{KL} + \frac{d_1}{a_1} \tag{3.56}$$

En introduit la relation de récurrence suivante :

$$\Phi_k = E_k \Phi_{kkk} + F_k \Phi_{KL} + G_k \tag{3.57}$$

$k = 1, 2, \dots, \dots, KL-1$

Quant $k = 1$ on obtient :

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_2 + F_1 \Phi_{KL} + G_1 \tag{3.58}$$

Par identification avec l'équation (3.56) on trouve :

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad , \quad F_1 = \frac{c_1}{a_1} \quad , \quad G_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Pour l'indice kk dans l'équation (3.57) on obtient la relation :

$$\Phi_{kk} = E_{kk} \Phi_k + F_{kk} \Phi_{KL} + G_{kk} \tag{3.59}$$

En remplaçant (3.59) dans (3.54) on obtient :

$$\Phi_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}} \Phi_{kkk} + \frac{b_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \Phi_{KL} + \frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}} \tag{3.60}$$

Par identification avec l'équation (3.57) on trouve :

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}} \quad , \quad F_k = \frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \quad \text{et} \quad G_k = \frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}} \quad , \quad k = 2, 3, \dots, \dots, KL-1$$

Donc on peut calculer de les valeurs de E_k , F_k , G_k à partir de connaître des valeur E_1 , F_1 , G_1 .

Le terme qui n'est pas connu dans l'équation (3.57) c'est Φ_{KL} , donc il faut le définir .

De l'équation (3.54) on a :

$$a_{KL} \Phi_{KL} = b_{KL} \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + d_{KL} \tag{3.61}$$

Cette équation est réécrite sous la forme :

$$P_1 \Phi_{KL} = Q_1 \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_1$$

Avec :

$$P_1 = a_{KL}, \quad Q_1 = b_{KL} \quad \text{et} \quad R_1 = d_{KL}$$

On retour à l'équation (III-57) qui est :

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_2 + F_1 \Phi_{KL} + G_1 \quad (3.62)$$

On remplace la valeur de Φ_1 dans l'équation (3.61) on obtient :

$$[P_1 - Q_1 F_1] \Phi_{KL} = [Q_1 E_1] \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_1 + Q_1 G_1] \quad (3.63)$$

On écrit cette équation sous la forme suivante :

$$P_2 \Phi_{KL} = Q_2 \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_2 \quad (3.64)$$

On retourne une dernière fois à l'équation (3.57) qui est :

$$\Phi_k = E_k \Phi_{kkk} + F_k \Phi_{KL} + G_k$$

Pour $k = 2$ on obtient :

$$\Phi_2 = E_2 \Phi_3 + F_2 \Phi_{KL} + G_2$$

Cette équation est utilisée dans la précédente et il vient :

$$[P_2 - Q_2 F_2] \Phi_{KL} = [Q_2 E_2] \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_2 + Q_2 G_2]$$

Qui est réécrite :

$$P_3 \Phi_{KL} = Q_3 \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_3 \quad (3.65)$$

Sachant que :

$$P_3 = P_2 - Q_2 F_2, \quad Q_3 = Q_2 E_2 \quad \text{et} \quad R_3 = Q_2 G_2 + R_2$$

Cette procédure est en continuité jusqu'à l'obtention de l'équation :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = Q_{KL-1} \Phi_{KL-1} + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.66)$$

A ce moment est par récurrence on peut calculer P_k , Q_k et R_k par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} - Q_{k-1} F_{k-1} \\ Q_k &= Q_{k-1} E_{k-1} \\ R_k &= Q_{k-1} G_{k-1} + R_{k-1} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Reconsidérons l'équation (3.67)

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1}$$

Avec l'équation (3.57) on a :

$$\Phi_{KL} = E_{KL-1} \Phi_{KL} + F_{KL-1} \Phi_{KL} + G_{KL-1} = [E_{KL-1} + F_{KL-1}] \Phi_{KL} + G_{KL-1}$$

Cette équation est utilisée dans (3.67) et il vient :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] [(Q_{KL-1} + c_{KL}) \Phi_{KL} + G_{KL-1}] + R_{KL-1} \quad (3.68)$$

On réarrange l'équation (3.69) on trouve :

$$\Phi_{KL} = \frac{[Q_{KL-1} + c_{KL}] G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - [Q_{KL-1} + c_{KL}] [E_{KL-1} + F_{KL-1}]}$$

Après le calcul de Φ_{KL} on utilise l'équation (3.57) pour calculer toutes les Φ_k à partir de $k = KL-1, KL-2, \dots, 2, 1$.

3.8.3 Structure du programme de calcul

- Subroutine **INIT**: initialise les vitesses, les températures et les propriétés de transport.
- Subroutine **MESH**: détermine le maillage.
- Subroutine **ZEROUT**: met à zéro les coefficients des équations algébriques de discrétisations avant de les réutiliser.
- Subroutine **RMOM**: calcule les coefficients de l'équation de discrétisation de la quantité de mouvement suivant R.
- Subroutine **ZMOM**: calcule les coefficients de l'équation de discrétisation de la quantité de mouvement suivant Z.
- Subroutine **θMOM**: calcule les coefficients de l'équation de discrétisation de la quantité de mouvement suivant θ .
- Subroutine **COEFP**: calcule les coefficients de l'équation de discrétisation de la pression.

- Subroutine **ENERGY**: calcule les coefficients de l'équation de discrétisation de température.
- Subroutine **BOUNDU**: met à jours les valeurs des conditions aux limites de la vitesse horizontale U.
- Subroutine **BOUNDV**: met à jours les valeurs des conditions aux limites de la vitesse axiale V.
- Subroutine **BOUNDW**: met à jours les valeurs des conditions aux limites de la vitesse azimutale W.
- Subroutine **BOUNDT**: met à jours les valeurs des conditions aux limites de la température « θ ».
- Subroutine **RSWEEP**: transforme l'équation algébrique de discrétisation multidimensionnelle en une équation unidimensionnelle suivant la direction X en faisant appel à la subroutine TDMA pour résoudre le système d'équations tri diagonal.
- Subroutine **ZSWEEP**: transforme l'équation algébrique de discrétisation multidimensionnelle en une équation unidimensionnelle suivant la direction Y en fait appel TDMA pour résoudre le système d'équations tri diagonal.
- Subroutine **TDMA**: résout le système d'équations obtenu par l'algorithme à matrice tri diagonal.
- Subroutine **TDMACY**: résout le système d'équations obtenu par l'algorithme à matrice tri diagonal.
- Subroutine **ADJUST**: pour interpoler les vitesses entre les nœuds.
- Subroutine **HEAT**: calcul le bilan massique et thermique.
- Subroutine **PRINT**: pour l'impression des résultats.

CHAPITRE 4

RESULTATS

ET DISCUSSION

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons et discutons les résultats de la simulation de la convection forcée et mixte dans la géométrie cylindrique annulaire, ailetée et non-ailletée considérée. En respectant un arrangement logique nous commencerons par présenter les résultats relatifs à la convection laminaire et forcée ($Gr^* = 0$) qui est considérée comme un cas de référence. Ensuite nous présenterons les différents cas de convection mixte obtenue pour deux nombres de Reynolds $Re = 50$ et 100 et un même nombre de Grashof $Gr^* = 2500$. Dans ce cas le nombre de Richardson serait égal à 1 et 0.25 . Ces différents modes de convection seront appliqués aux géométries sans ailettes et celles munies d'ailettes longitudinales. Concernant les ailettes, différentes configurations ont été étudié : la configuration à 2 ailettes horizontales, celle à deux ailettes verticales, puis celles à quatre et à huit ailettes.

L'ensemble des résultats sont obtenus pour un rapport d'aspect géométrique fixé $A=10$ ($A=L/R_{2e}$), et un nombre de Prandtl fixé, ($Pr = 0.7$ air). Les exécutions numériques du code de calcul ont été réalisées avec des pas de temps adimensionnels allant de 10^{-3} à $5 \cdot 10^{-4}$ selon le maillage utilisé. A titre d'exemple pour le cas sans ailettes le maillage utilisé était de $43 \times 45 \times 83$ nœuds (160605 nœuds) dans les directions radiale, angulaire et axiale successivement et le pas de temps $1 \cdot 10^{-4}$ était suffisant pour atteindre la convergence. Mais dès qu'on introduisait des ailettes, on devait réduire le pas de temps de 10^{-3} à 10^{-4} de telle sorte que plus le nombre d'ailettes augmente plus il fallait diminuer dans le pas de temps.

Dans ce chapitre, les logiciels de graphisme utilisés sont Tecplot version 9.0 (pour la représentation en 3D surtout) et Origin version 6.0 pour la représentation en 2D.

4.2 LE CAS DE REFERENCE : LA CONVECTION FORCEE SANS AILETTES

4.2.1 Le champ de vitesse axiale (V_z)

A l'entrée du conduit annulaire le fluide se présente avec une vitesse constante. La composante axiale est constante ($V_z^*|_{z^*=0} = 1$) tandis que les composantes angulaire et radiale sont nulles. Ces dernières resteront nulles à travers l'ensemble du conduit car la condition de non glissement à la paroi ainsi qu'un nombre de Grashof nul sont appliqués. La distribution de la vitesse est illustrée dans les figures 4.1 et 4.2; dans ces figures on a représenté le profil de la vitesse axiale pour deux valeurs de la longueur axiale du conduit: à l'entrée du conduit $z^* = 1$ et à la sortie du conduit. A part à l'entrée et une très courte zone avoisinante, au-delà de $z^* = 0.308$, les profils sont identiques et conservés sur tout le conduit.

La convection forcée est hydrodynamiquement développée. Depuis sa valeur nulle aux deux parois conformément aux hypothèses d'adhérence (conditions aux limites aux parois fixes), la vitesse axiale atteint sa valeur maximum $V_{z \max}^* = 1.50326$ au centre de l'espace annulaire ($r^* = 0.37805$) en suivant un profil parabolique. Il est clair qu'en toute section axiale le profil de la vitesse est axisymétrique et les lignes de courant de la vitesse axiale sont des cercles concentriques avec une variation dans la direction radiale. A part la très courte zone proche de l'entrée, les composantes radiale et angulaire de la vitesse sont très faibles ($V_{r \max}^* = 0.001622$ et $V_{\theta \max}^* = 0.022682$) dans la quasi-totalité du conduit.

On a voulu examiner l'influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement axial en l'augmentant de 50 à 100 comme le montre la Figure 4.3 qui est une représentation longitudinale de l'écoulement. Qualitativement il n'y a aucun changement et les profils sont identiques. Par contre quantitativement, le maximum de vitesse axiale atteint est $V_{\max}^* = 1.5033$.

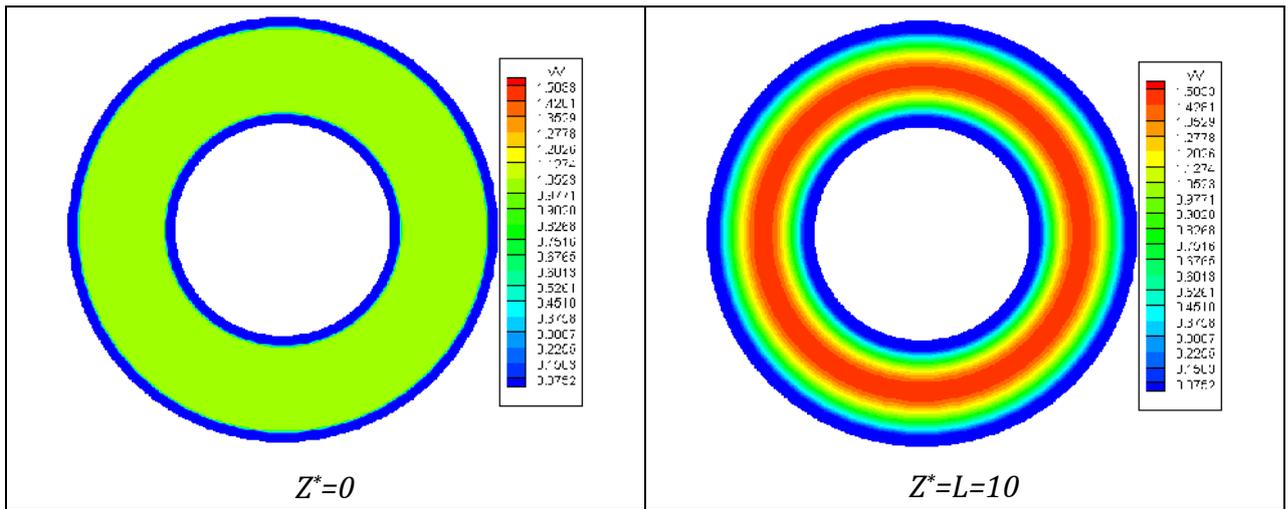


Figure 4.1 : Le champ de vitesse axiale en convection forcée sans ailettes ($Re = 50$) à l'entrée et à la sortie.

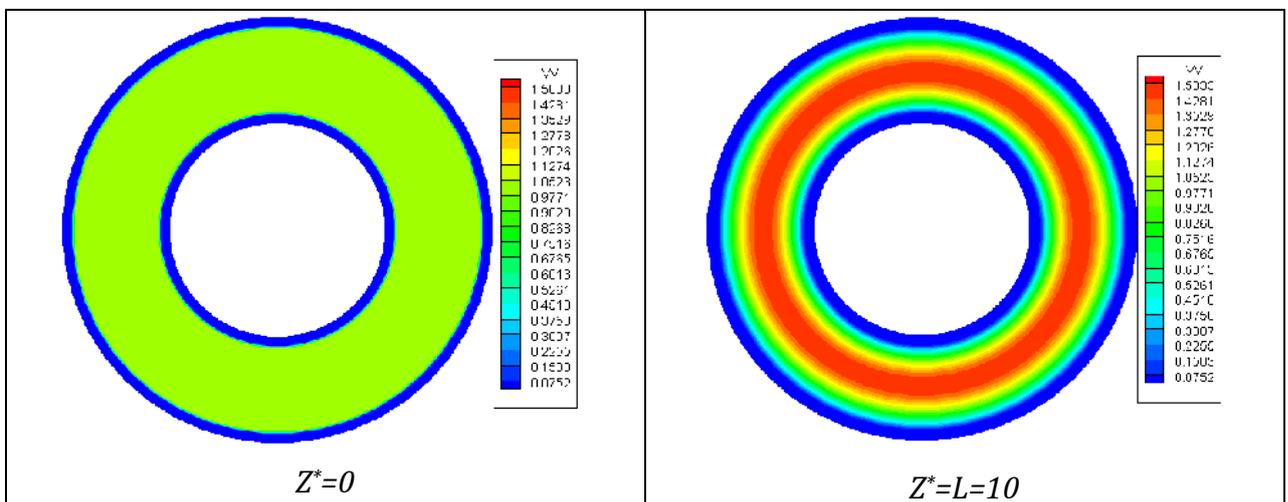


Figure 4.3 Le champ de vitesse axiale en convection forcée sans ailettes ($Re = 100$).

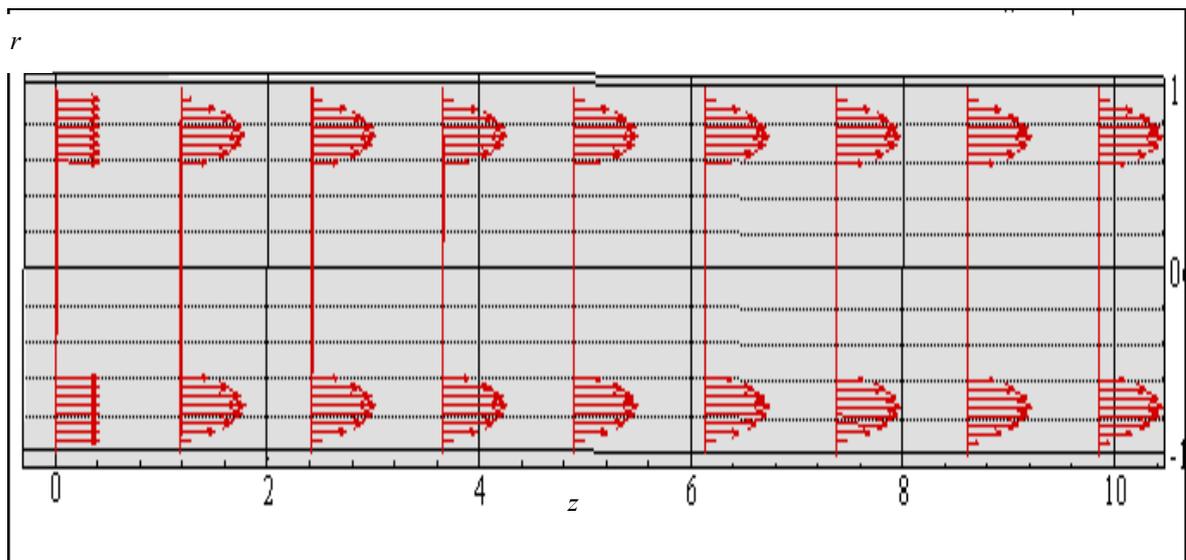


Figure 4.3 Représentation du profil de vitesse pour le cas sans ailettes ($Re = 50$)

4.2.2 Le champ thermique

Aux stations axiales choisies dans la représentation de la vitesse axiale précédente on a représenté les distributions de la température du fluide dans les Figures 4.4 et 4.5 pour les deux nombres de Reynolds 50 et 100 en deux différentes coordonnées axiales correspondantes respectivement au quart et à la moitié de la longueur du conduit $z^* = 2.5$ et $z^* = 5$ ainsi qu'à la sortie. Ces distributions montrent nettement des isothermes circulaires et concentriques suivant une stratification radiale en toute section qui décroît de l'intérieur vers le cylindre extérieur qui est adiabatique. Le maximum étant situé sur le cylindre intérieur ($r^* = 0.5, \forall \theta$). Depuis l'entrée jusqu'à la sortie on distingue clairement une croissance axiale monotone dont le minimum est à l'entrée ($T^*|_{z^*=0} = 0$) et le maximum absolu est atteint à la sortie qui est égal à 0.5921. Cette distribution est caractéristique d'un transfert de chaleur par convection forcée. Il est important de signaler que dans ce cas que la comparaison des distributions des températures entre les Figures 4.4 et 4.5 montrent nettement l'influence du nombre de Reynolds dans la distribution des températures. A Reynolds égal à 100 la température maximale atteinte (toujours à la sortie) est égale à 0.357744.

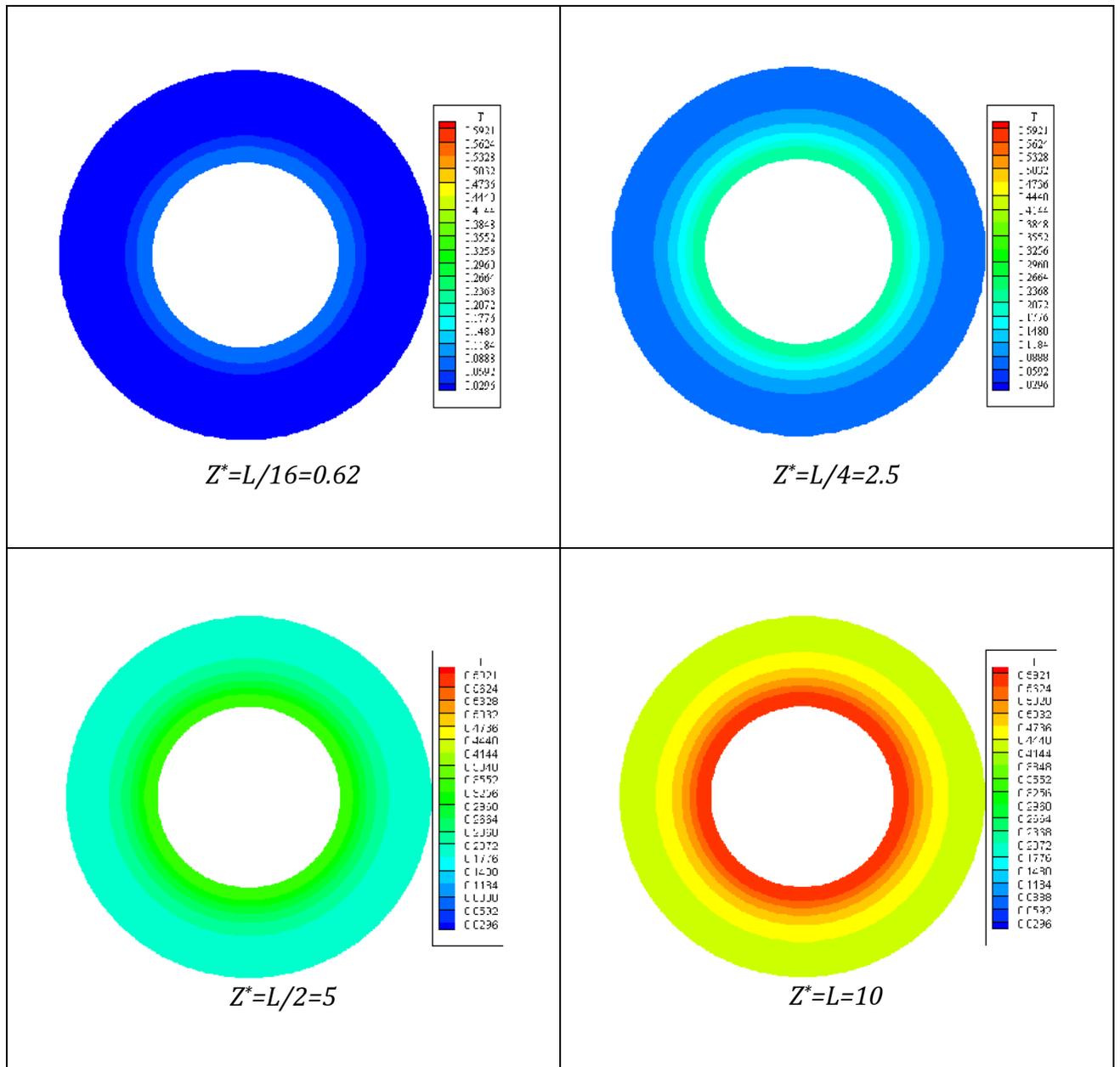


Figure 4.4 Le champ de température en convection forcée sans ailettes ($Re = 50$)

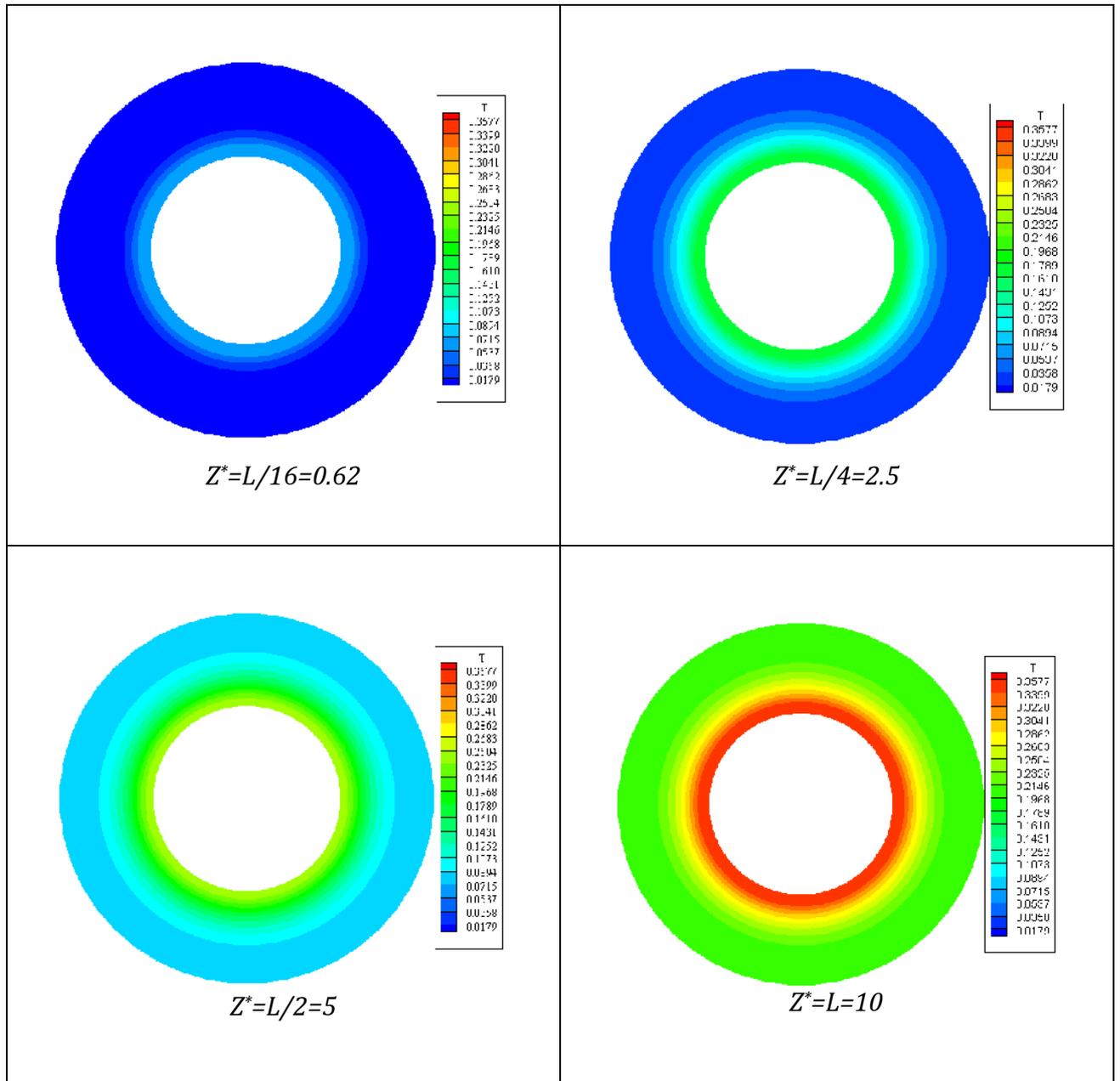


Figure 4.5 Le champ de température en convection forcée sans ailettes ($Re = 100$)

4.2.3 Evolution axiale de la température moyenne du fluide

La Figure 4.6 représente le profil de la température moyenne du fluide entre l'entrée et la sortie. Qualitativement cette courbe subit une croissance monotone depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Cette croissance obéit à un chauffage constant. Le maximum de température $T^* = 0.4620$ est atteint à $z^* = 10$.

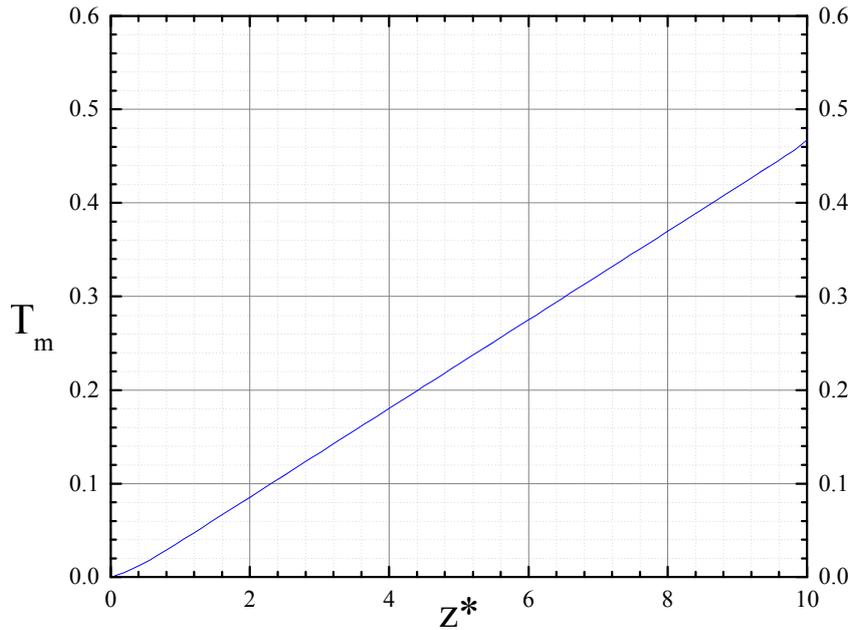


Figure 4.6 Evolution axiale de la température moyenne du fluide pour $Re=50$

4.2.4 Evolution axiale du nombre de Nusselt

La figure 4.7 représente la variation du nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial $Nu(z^*)$ le long de la direction axiale. Ses variations sont qualitativement et quantitativement semblables à celles du nombre de Nusselt axial $Nu(z^*)$ de la convection forcée pour le cylindre plein. Il chute de la valeur $Nu(z^*)=17$ à l'entrée jusqu'à atteindre la valeur 7.18 en $z^* = 2.045$. Au-delà de ce z^* le nombre de Nusselt reste quasiment constant exhibant plutôt un comportement asymptotique compatible à celui de la convection forcée. $Nu(z^*) = 7.4402$.

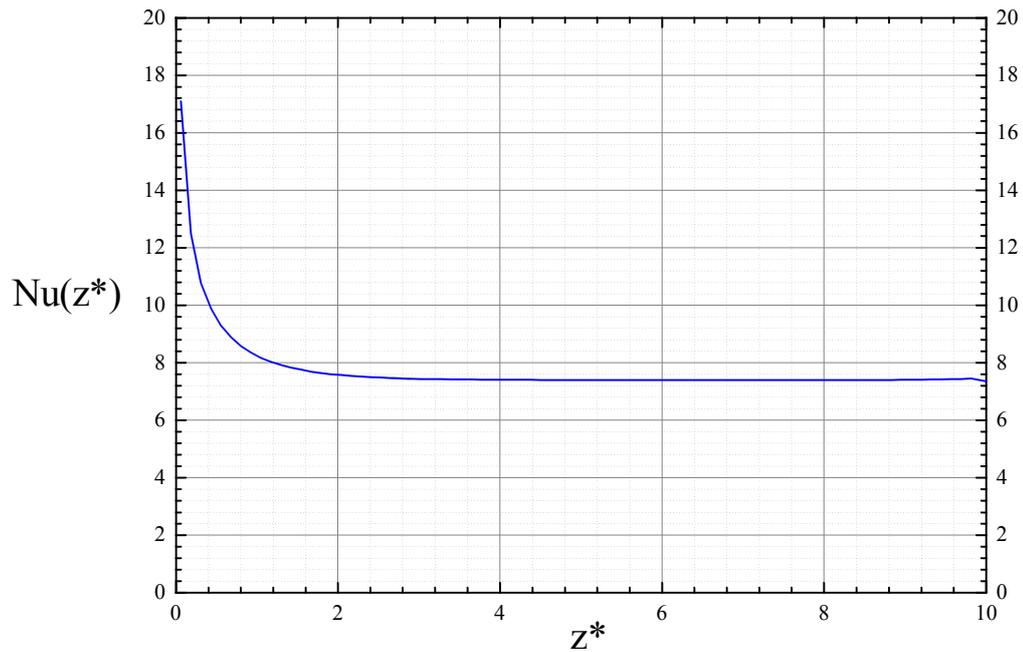


Figure 4.7 Evolution axiale du nombre de Nusselt pour $Re=50$

4.3 LA CONVECTION MIXTE SANS AILETTES

4.3.1 Le champ de vitesse axiale (V_z)

L'évolution axiale de la vitesse aux différentes positions choisies $z^*=0, 2.5, 5,$ et $z^*=10$ pour les nombres de Reynolds 50 et 100 est représentée sur les Figures 4.8 et 4.9. Il apparaît clairement sur ses figures qu'au-delà de la zone proche de l'entrée ($z^*=2.5$) un nouveau profil de vitesse s'installe. On distingue une variation angulaire à travers chaque section qui vient s'ajouter aux variations radiales et axiales précédentes. La symétrie par rapport à l'axe vertical est conservée. Cette variation angulaire fait que les vitesses axiales sont élevées dans la zone centrale et inférieure (en deçà de l'axe) de l'espace annulaire tandis qu'elles sont faibles au voisinage des parois des cylindres et dans la partie supérieure de l'espace annulaire (au dessus de l'axe). Mais, à ce niveau on remarque que ce profil tridimensionnel est plus important pour $Re=50$ que pour $Re=100$. Pour $Re=50$ la vitesse maximale axiale sur tout le conduit est $V_{\max} = 1.53952$ et se situe au centre de l'espace annulaire inférieure du conduit ($r^* = 0.7378, \theta = 3.2130$). Pour $Re=100$ cette vitesse maximale axiale $V_{\max} = 1.5128$ et se situe au centre de l'espace annulaire inférieure du conduit ($r^* = 0.7378, \theta = 3.0702$). Les composantes radiales de la vitesse sont $V_{r_{\max}} = 0.00625$ [pour $Re=50$] et $V_{r_{\max}} = 0.0030$ [pour $Re=100$] tandis que

les composantes angulaires ont atteint des maximums égaux à $V_{\theta \max} = 0.0133$ [pour $Re=50$] et $V_{\theta \max} = 0.1934$ [pour $Re=100$]. Mais ces variations restent assez faibles.

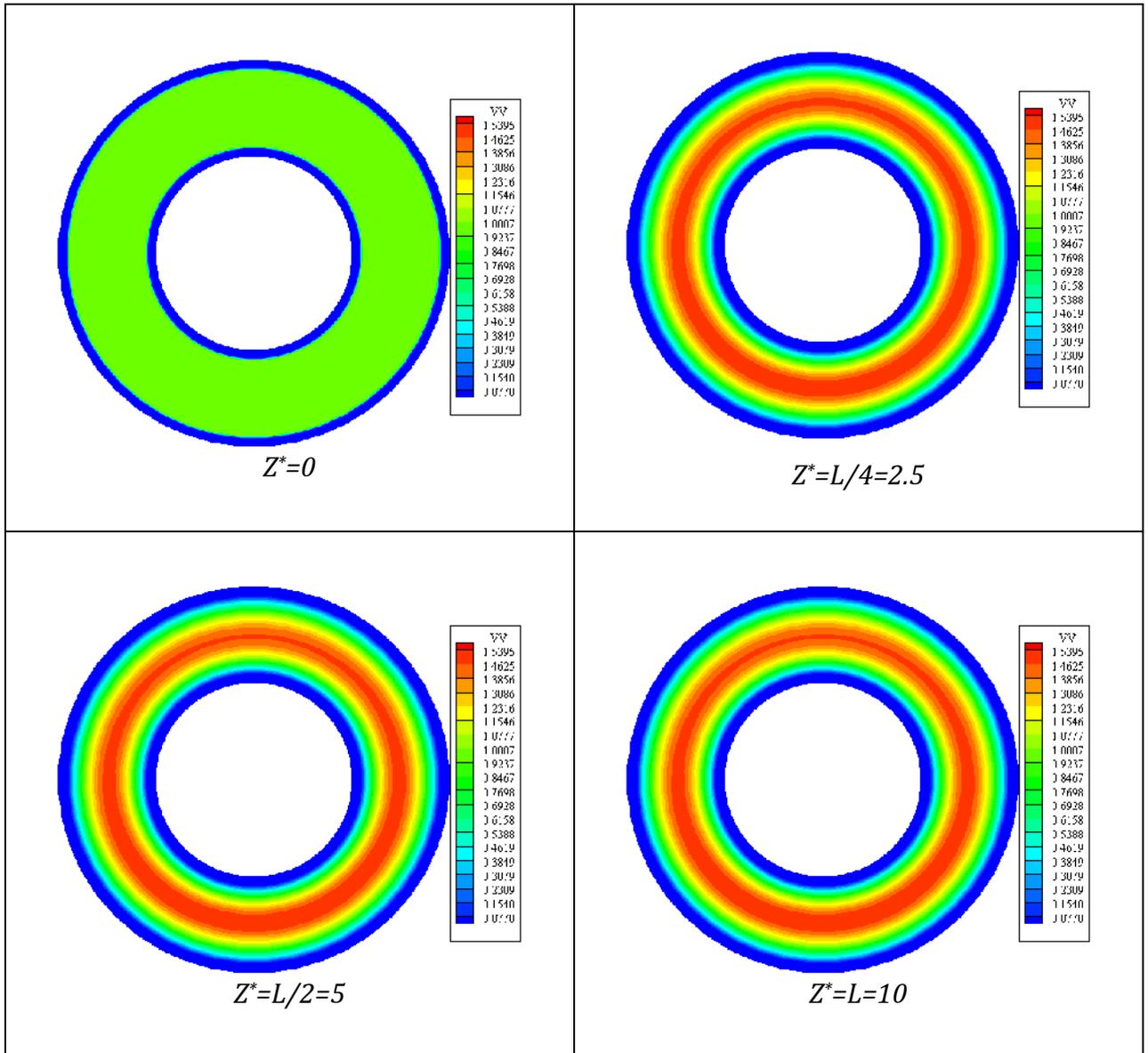


Figure 4.8 Le champ de vitesse axiale en convection mixte sans ailettes ($Re= 50$).

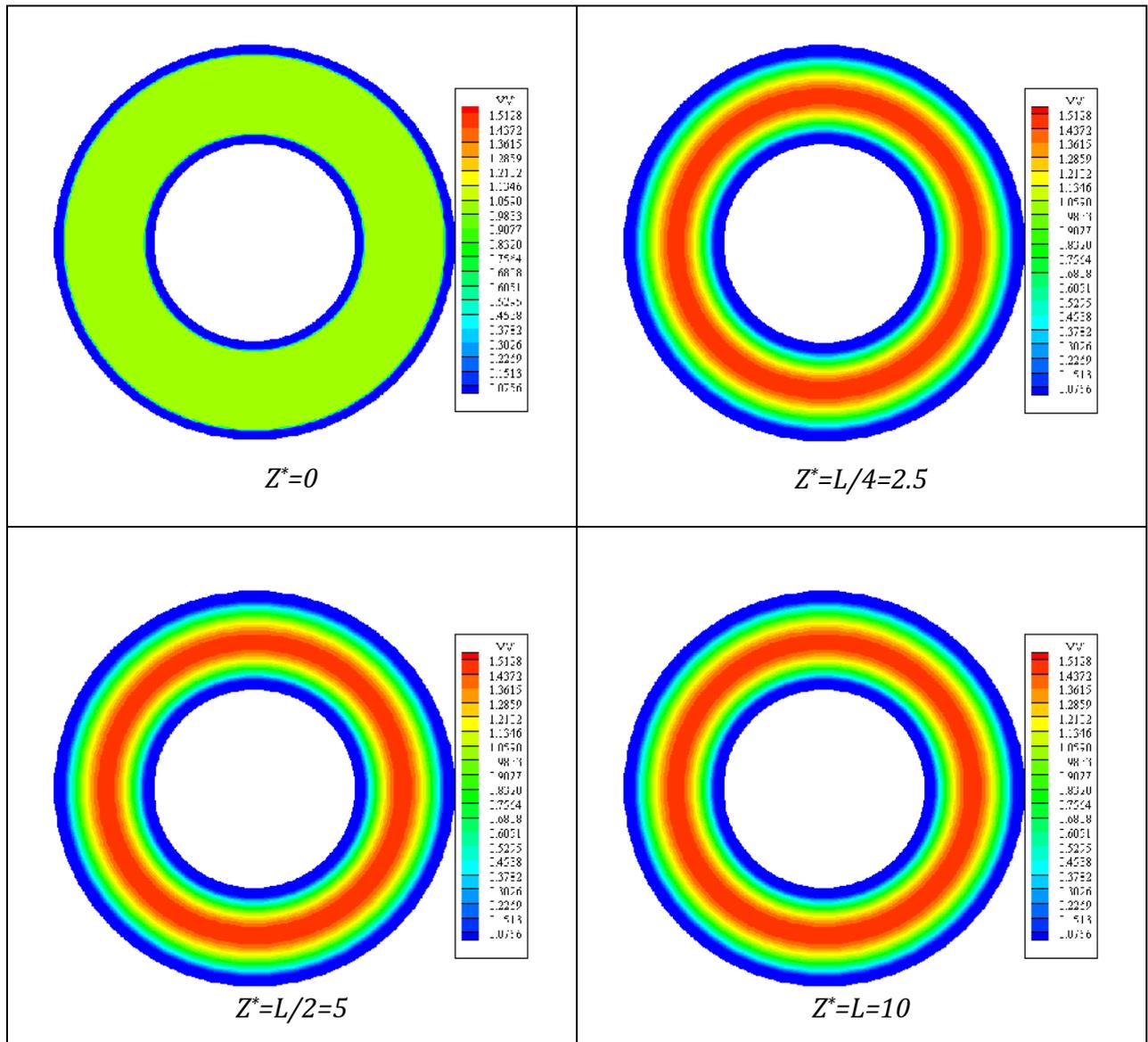


Figure 4.9 Le champ de vitesse axiale en convection mixte sans ailettes ($Re=100$).

4.3.2 Le champ thermique

Les distributions des températures du fluide sont présentées sur les Figures 4.10 et 4.11 pour $Re=50$ et $Re=100$ en différentes stations axiales $z^*=2.5, 5, 7.5$ et 10 , respectivement. En plus de la symétrie par rapport au diamètre vertical, ces figures montrent des variations radiales et angulaires en chaque section et axiales le long du conduit. Ces variations sont significatives beaucoup plus sur la Figure 4.7 et surtout au-delà de $z^*=5$. Les gradients angulaires ont entraînés un maximum de température en haut du conduit intérieur ($\theta = 0, R_{ic} = 0.5$). Pour les positions choisies $z^*=2.5, 5, 7.5, 10$ les températures maximales sont respectivement $T_{max}^* = 0.17032, 0.234668, 0.296542$ et 0.357669

et se situent au sommet de la paroi extérieure du conduit ($\theta = 0, R_o^* = 1$), tandis que les minimums de température sont respectivement $T_{\min}^* = 0.0228, 0.0764, 0.1374$ et 0.1985 et se situent à la surface du cylindre extérieure en $\theta = \pi$ et $R_{2i} = 1$. La comparaison avec la Figure 4.10 ($Re=100$), montrent que cette variation angulaire est très faible s'apparentant plus à une convection forcée au lieu de la convection mixte. D'ailleurs la température maximale sur tout le conduit est 0.3589 alors qu'elle est égale à 0.5953 pour $Re=50$.

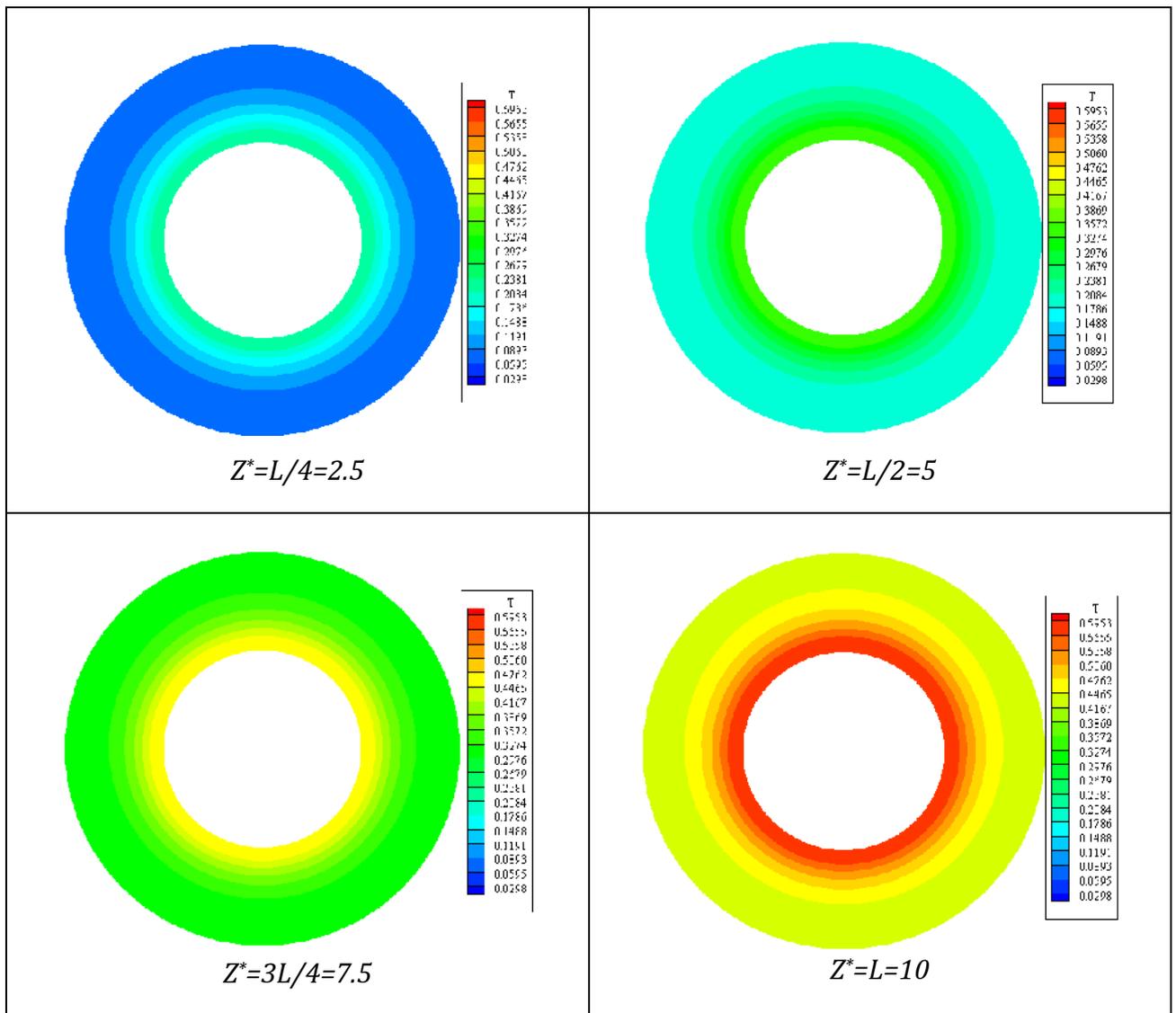


Figure 4.10 Le champ de température en convection mixte sans ailettes ($Re = 50$)

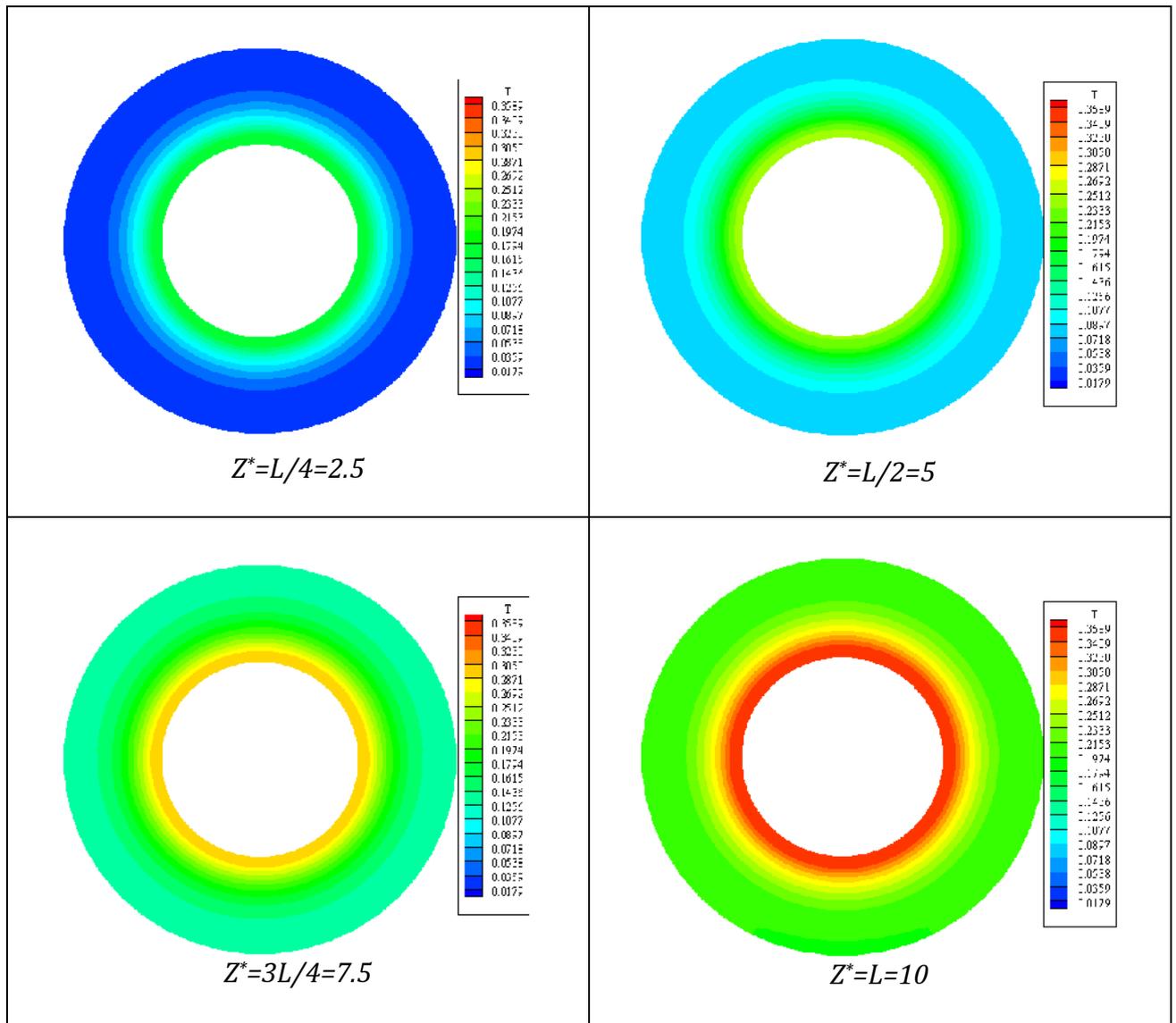


Figure 4.11 Le champ de température en convection mixte sans ailettes ($Re = 100$)

En plus des variations par section des températures on présente sur la Figure 4.12 la variation axiale de la température moyenne du fluide sur tout le conduit non-ailetté. Son allure croissante d'une façon monotone confirme le chauffage continu pariétal du fluide depuis l'entrée à la sortie.

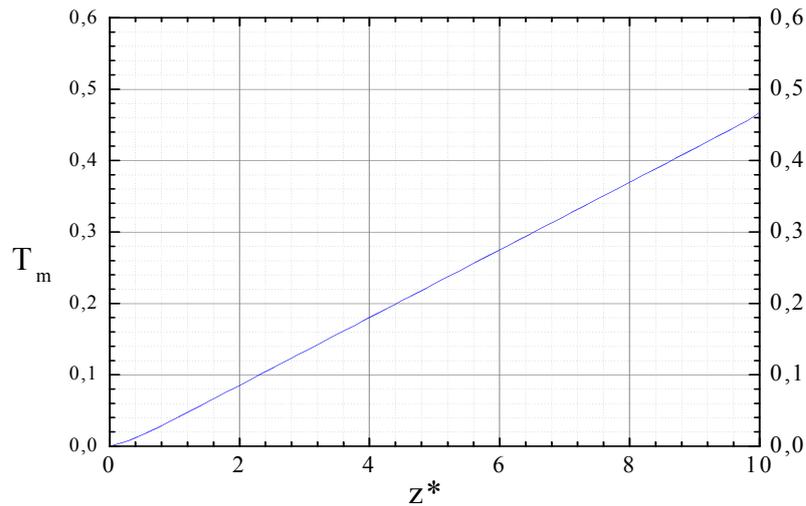


Figure 4.12 Evolution axiale de la température moyenne du fluide dans un conduit non ailette soumis à $Re=50$

4.3.2 Le nombre de Nusselt axial

La figure 4.13 représente la variation du nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial $Nu(z^*)$. Ses variations sont qualitativement et quantitativement semblables à celles du nombre de Nusselt axial $Nu(z^*)$ de la convection forcée ($Gr^* = 0$). Il chute de la valeur $Nu(z^*) = 17.27478$ à l'entrée jusqu'à la valeur $Nu(z^*) = 7.14427$ en $z^* = 4.87654$. Au-delà de ce z^* le nombre de Nusselt reste quasiment constant avec un comportement asymptotique similaire à celui de la convection forcée.

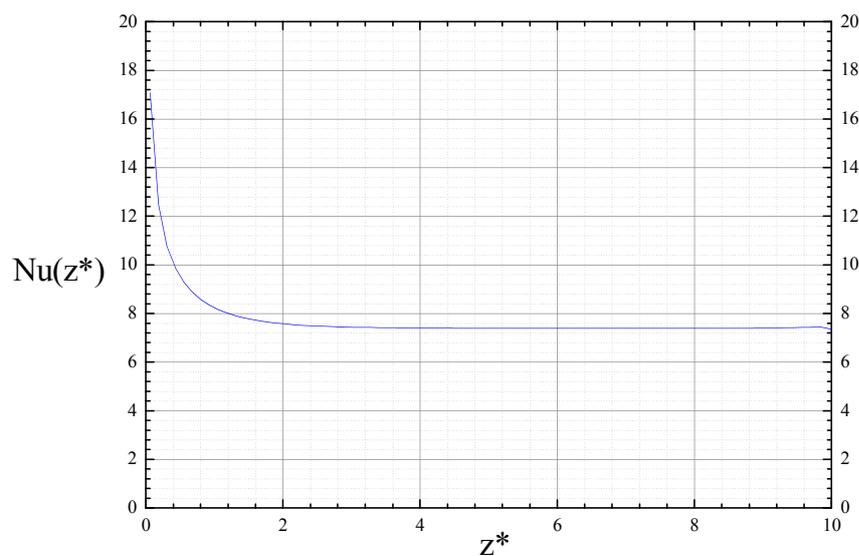


Figure 4.13 Evolution du nombre de Nusselt axial en convection mixte, Cas sans ailettes et $Re=50$

4.4 LA CONVECTION FORCEE ET MIXTE AVEC AILETTES

4.4.1 Caractéristiques géométriques et physiques des ailettes

Cette partie constitue l'un des principaux objectifs de cette étude. Elle porte essentiellement sur l'étude du comportement dynamique et thermique du fluide soumis à un phénomène de convection mixte laminaire dans un conduit annulaire muni d'ailettes. Etant donné que c'est une étude toute à fait nouvelle, nous l'avant abordé d'une manière progressive. La première étape est la résolution des deux modes de convection forcée et mixte pour le cas de deux ailettes longitudinale a deux positions différentes l'une horizontale et l'autre verticale avec le même angle entre deux ailettes adjacentes. Ensuite le cas de quatre ailettes avec le même angle entre deux ailettes adjacentes aussi puis le cas de huit ailettes avec le même angle entre deux ailettes adjacentes, toutes les ailettes sont identiques en formes et en dimensions. La présentation de cette dernière configuration dont les caractéristiques géométriques et physique des ailettes et de leur position sont les suivantes :

- Longueur de l'ailette dans la direction axiale : $z^* = 10$
- Largeur de l'ailette dans la direction radiale : $l^* = 16 \times \Delta r^* = 0.1952$

$$\text{avec } \Delta r = \frac{R_{2e} - R_{li}}{IL - 2} = 0.0122$$

L'espace annulaire occupé par le fluide uniquement (c'est-à-dire sans la zone ailetée) occupe une épaisseur correspondante à $H = 33 \times \Delta r = 0.4026$. Le domaine fluide entre le cylindre intérieure et l'extrémité de l'ailette dans la direction radiale est situé dans l'intervalle repéré par : $5 \leq i \leq 22$. Par conséquent la largeur l de l'ailette correspondrait à $l \approx 48,50 \% H$. Donc l'ailette occupe à peu près la moitié de l'espace annulaire

- Dans la direction angulaire l'épaisseur de l'ailette correspond à une épaisseur du volume de contrôle soit : $e = 1 \times \Delta \theta$ avec $\Delta \theta = \frac{2\pi}{KL}$.

Le pas angulaire $\Delta \theta$ dépend de la configuration étudiée. A chaque configuration correspond un maillage défini de telle sorte à assurer une stabilité numérique des résultats ainsi qu'une convergence du code de calcul. Pour une configuration à deux ailettes horizontales et verticales le pas est : $\Delta \theta = \frac{2\pi}{KL} = 0,0923$ donc l'épaisseur est : $e = 0.0923$. Pour une configuration à quatre ailettes le pas est : $\Delta \theta = \frac{2\pi}{KL} = 0,0923$

donc l'épaisseur est : $e = 0.0923$. Pour une configuration à huit ailettes le pas est : $\Delta\theta = \frac{2\pi}{KL} = 0,0785$ donc l'épaisseur est : $e = 0.0785$.

Les ailettes sont de même nature physique que le conduit. Il s'agit de L'Inconel qui est un alliage performant constitué de 76% de Nickel, 16% de Chrome et 8% de Fer. Sa conductivité thermique est $K_s = 15\text{W/m.K}$. La valeur normalisée de la conductivité de l'Inconel est calculée par rapport à la conductivité thermique de l'air à l'entrée à une température de 20°C . Elle est égale à $K^* = K_s/K_0 = 21.43$.

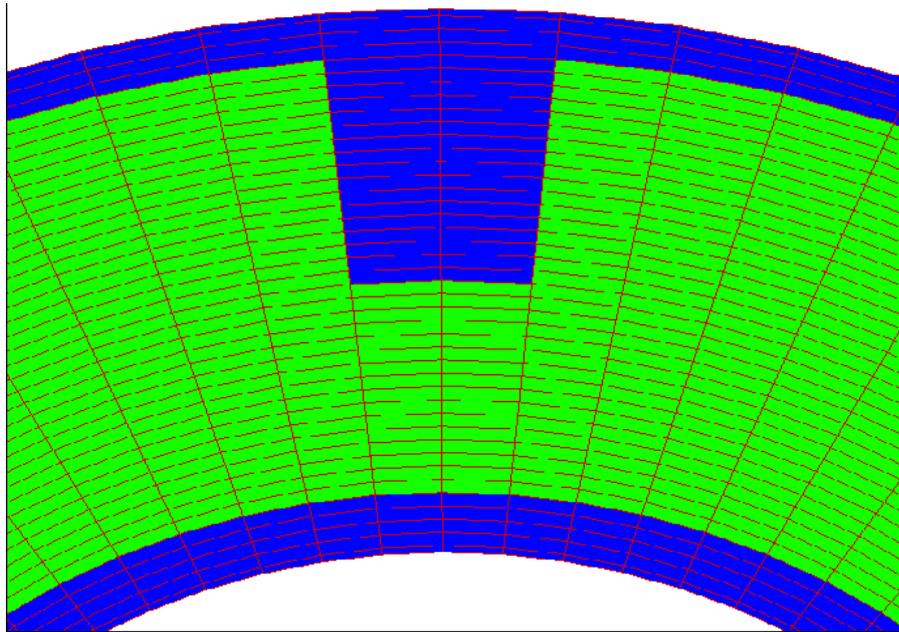


Figure 4.14 Le maillage d'une portion du conduit annulaire équipée d'une ailette.

4.4.2 La convection forcée avec ailettes

4.4.2.1 Le champ de vitesse axiale (V_z)

La représentation du champ de vitesse axiale est dans les Figures 4.15-4.22. L'observation générale des tous les cas traités, deux horizontales, deux verticales et quatre et huit ailettes pour différents nombre de Reynolds, indique que l'écoulement présente une symétrie par rapport à un diamètre vertical et aussi par rapport à un diamètre horizontal. La présence des ailettes longitudinales en des positions à même angle confère à l'écoulement dans un espace annulaire ailetté soumise à une convection forcée, une configuration bien particulière. Ces derniers sont constitués de deux cellules horizontales contrarotatives, deux cellules verticales contrarotatives, quatre et huit

cellules contrarotatives et diamétralement opposées, situées de part et d'autre des ailettes. Les lignes de courant formant ces cellules sont confinées entre deux cellules successives. Dans tous les cas traités le maximum de vitesse est situé au centre de chaque cellule. A titre d'exemple on présente dans les tableaux 4.1 et 4.2 suivants les valeurs de ces maximums et leurs lieux.

Position			V_{\max}
r^*	z^*	θ	
0.737805	0.55	1.108797	1.69734
0.737805	1.17	0.923998	1.69813
0.737805	2.53	0.554399	1.67208
0.737805	5.12	0.092400	1.67186
0.737805	7.47	0.461999	1.67193
0.737805	10	0.461999	1.67194

Tableau 4.1 Les vitesses axiales maximum à des différents nœuds dans le cas de 2 ailettes horizontales en convection forcée avec $Re = 50$.

position			V_{\max}
r^*	z^*	θ	
0.768293	0.55	1.201197	1.67387
0.743902	1.17	1.108797	1.66983
0.719512	2.53	0.739198	1.66190
0.719512	5.12	0.369599	1.66983
0.719512	7.47	0.092400	1.67145
0.719512	10	0.184800	1.97162

Tableau 4.2 Les vitesses axiales maximum à différentes positions cas de 2 ailettes horizontales en convection forcée avec $Re = 100$.

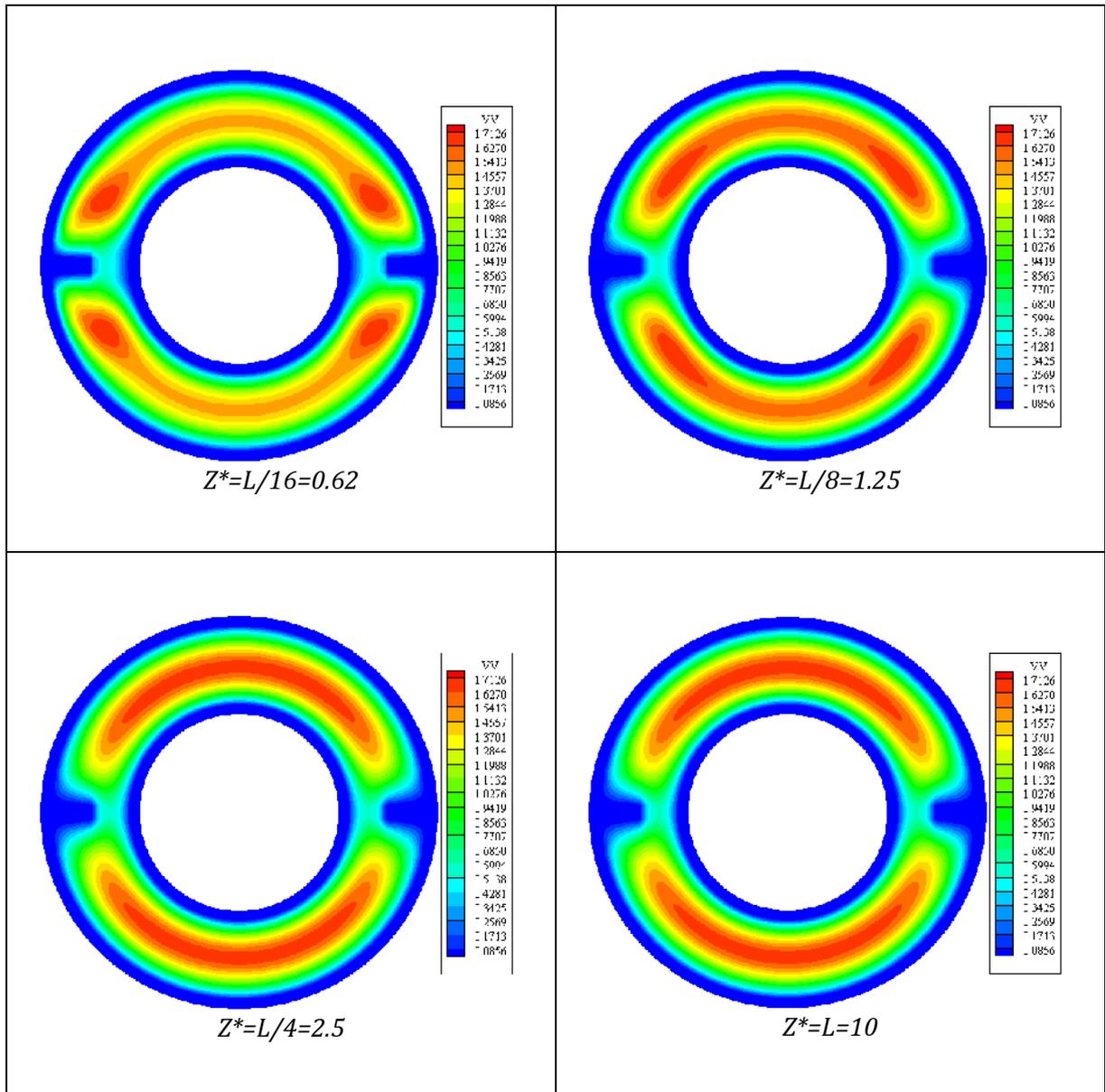


Figure 4.15 Champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 2 ailettes horizontales ($Re=50$)

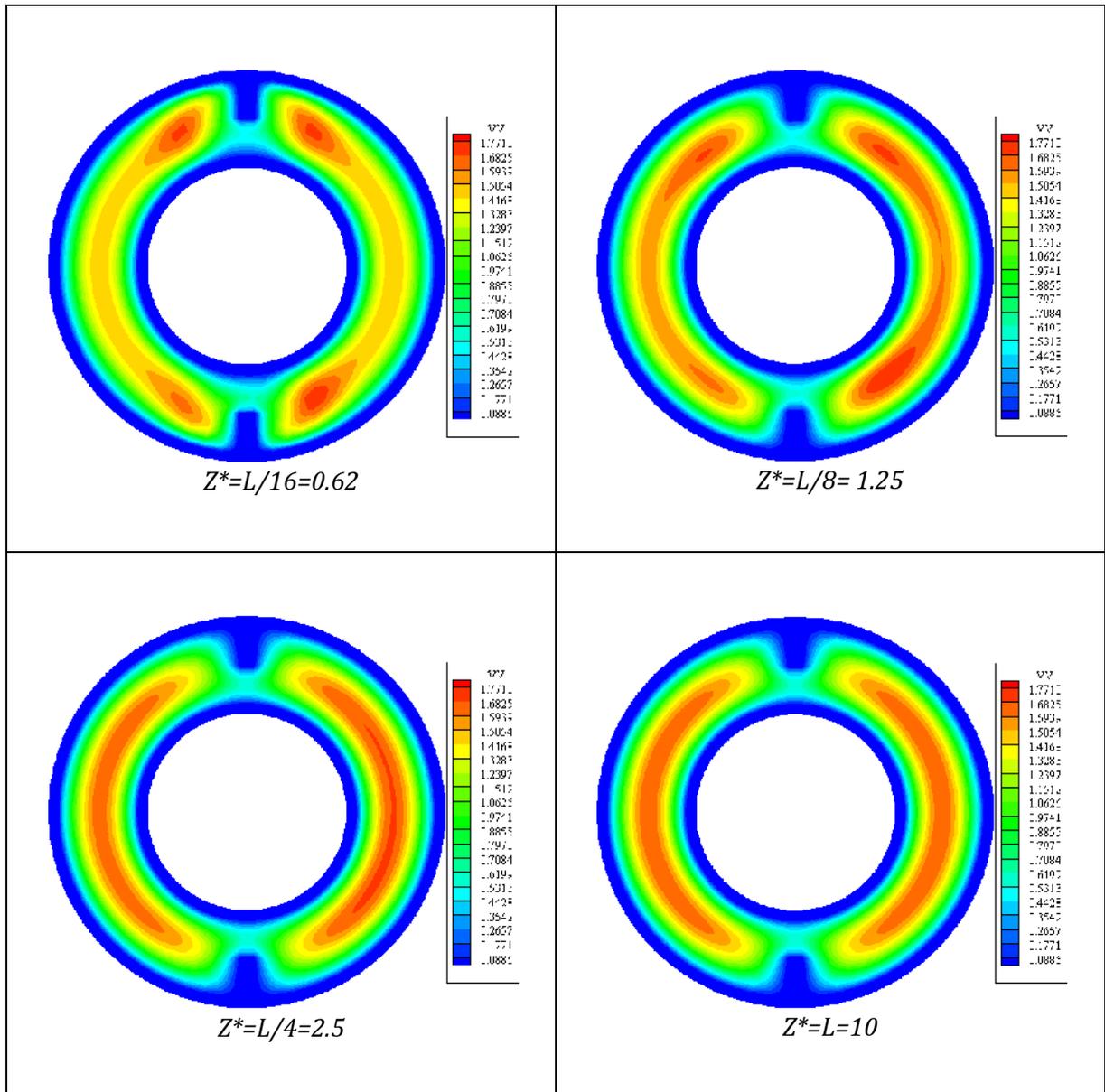


Figure 4.16 Champ de vitesse axiale en Convection forcée 2 ailettes verticales ($Re=50$)

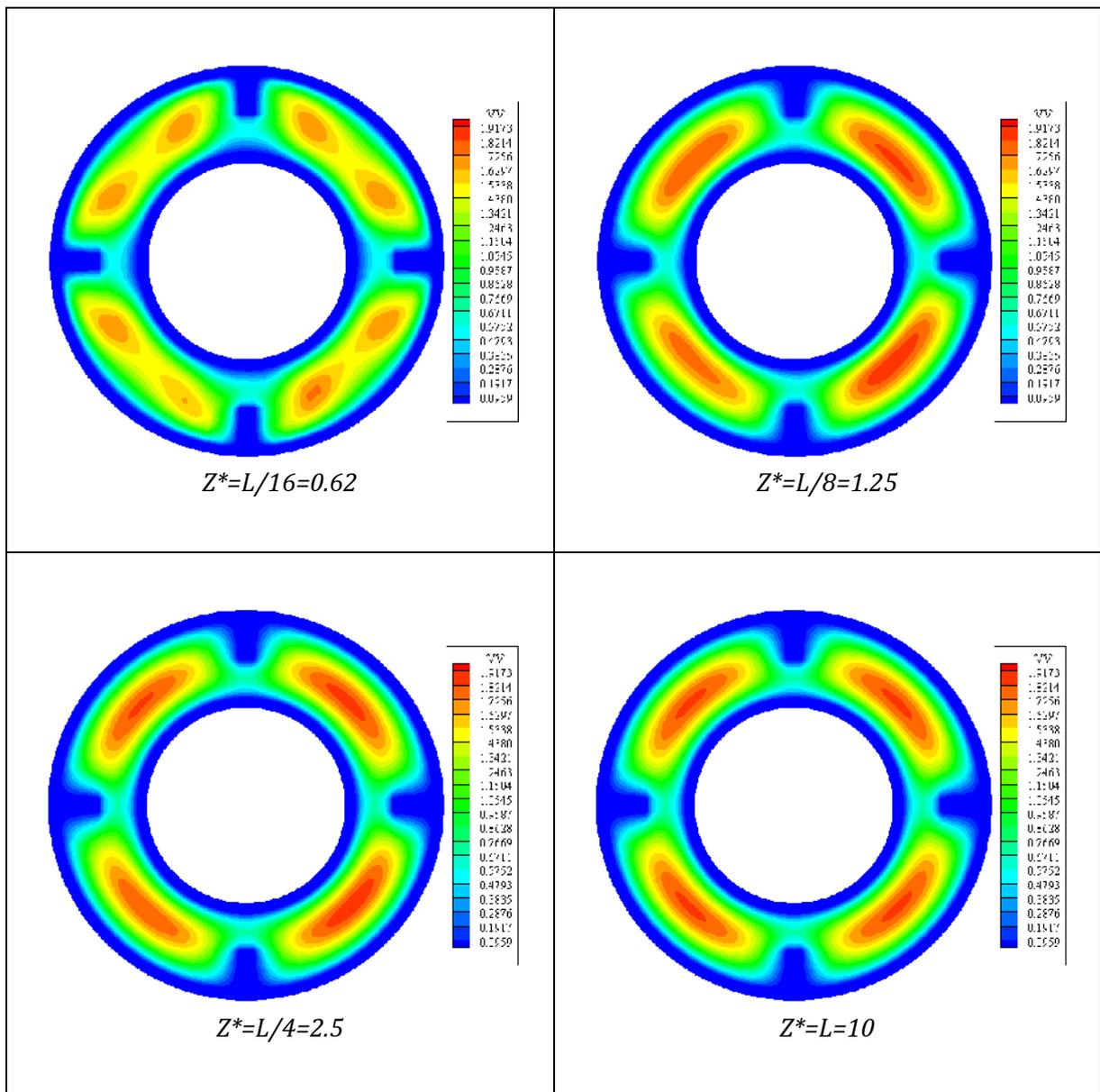


Figure 4.17 champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 4 ailettes ($Re=50$)

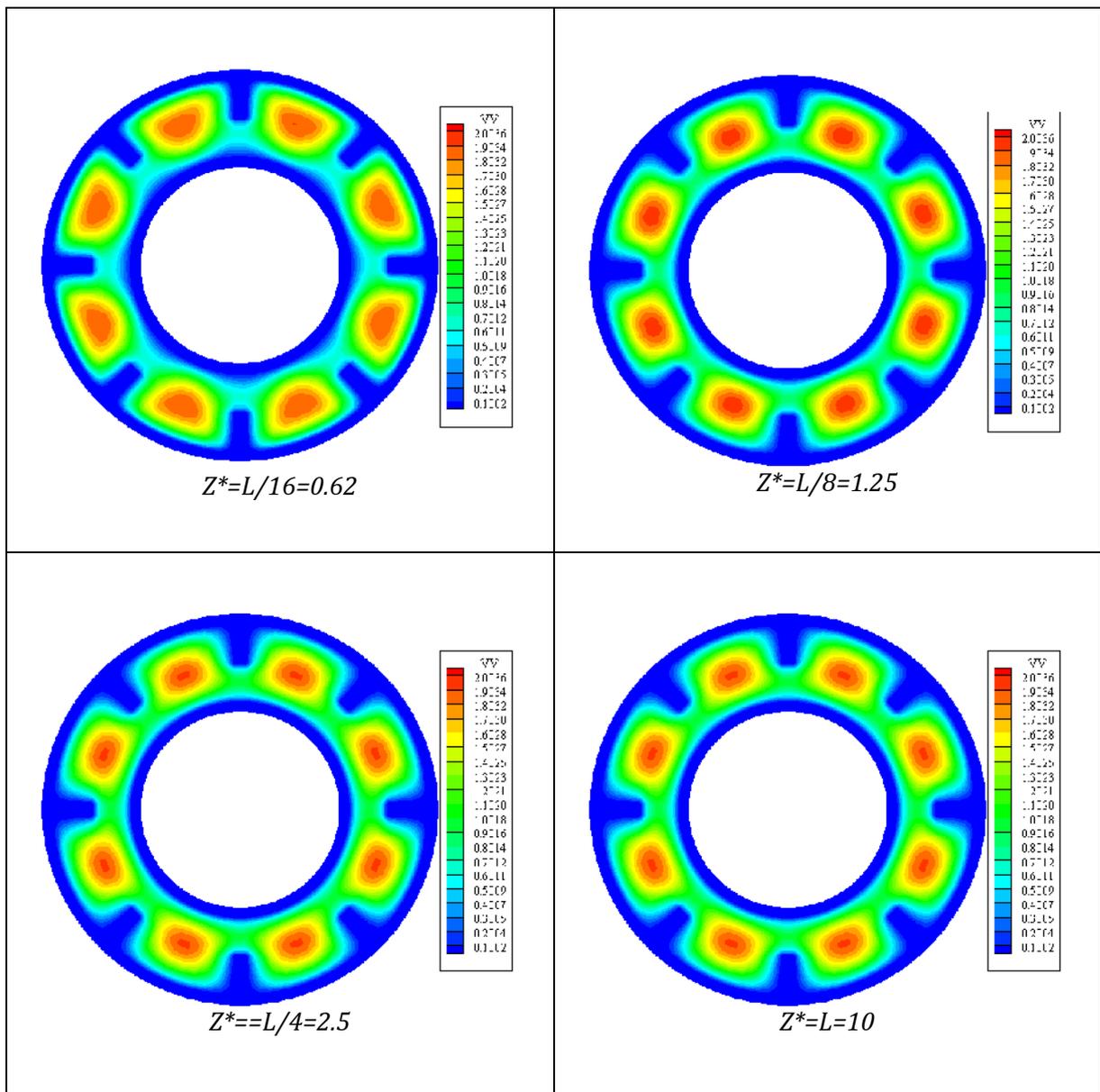


Figure 4.18 champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 8 ailettes ($Re=50$)

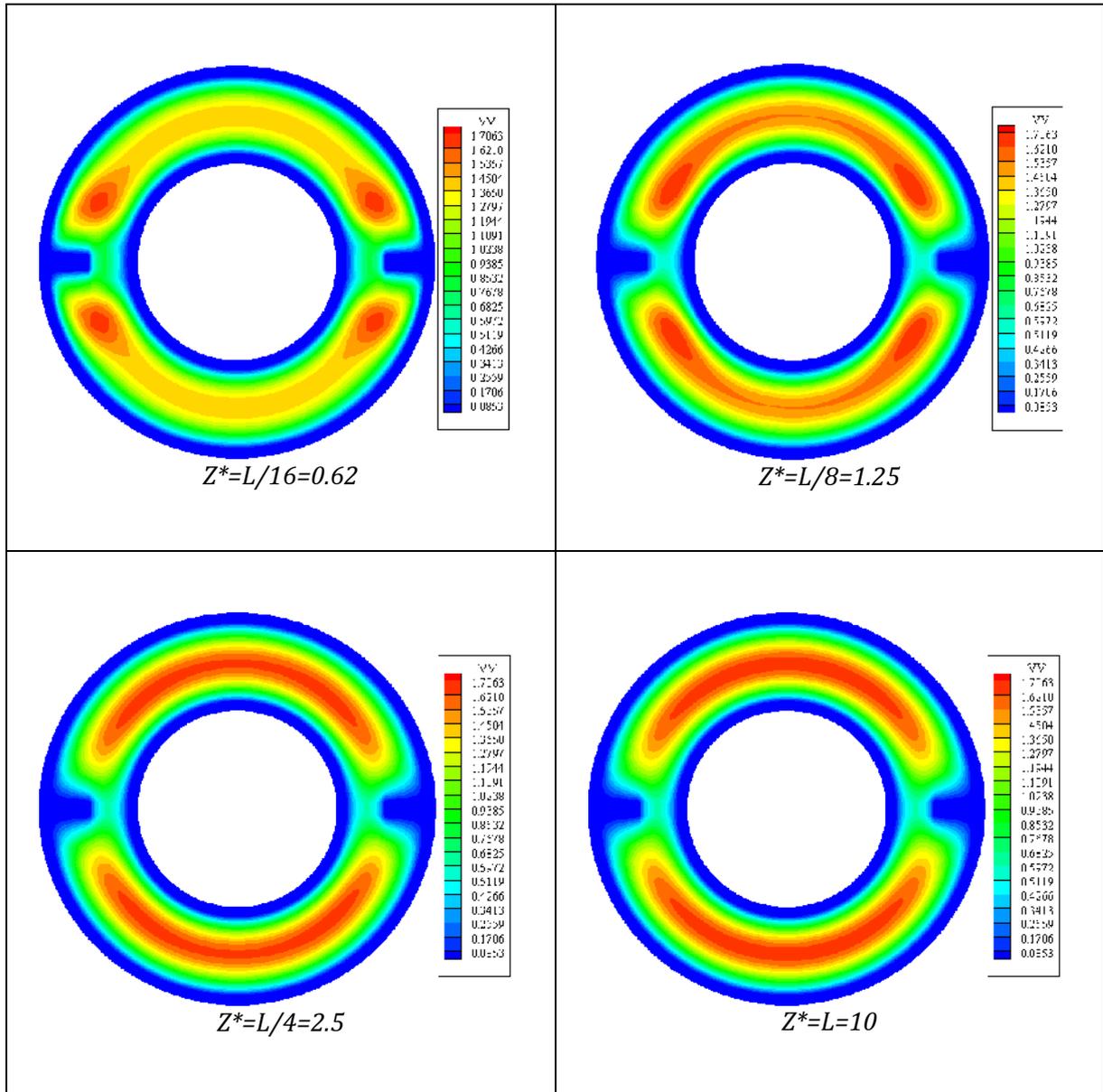


Figure 4.19 : champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 2 ailettes Horizontal ($Re=100$)

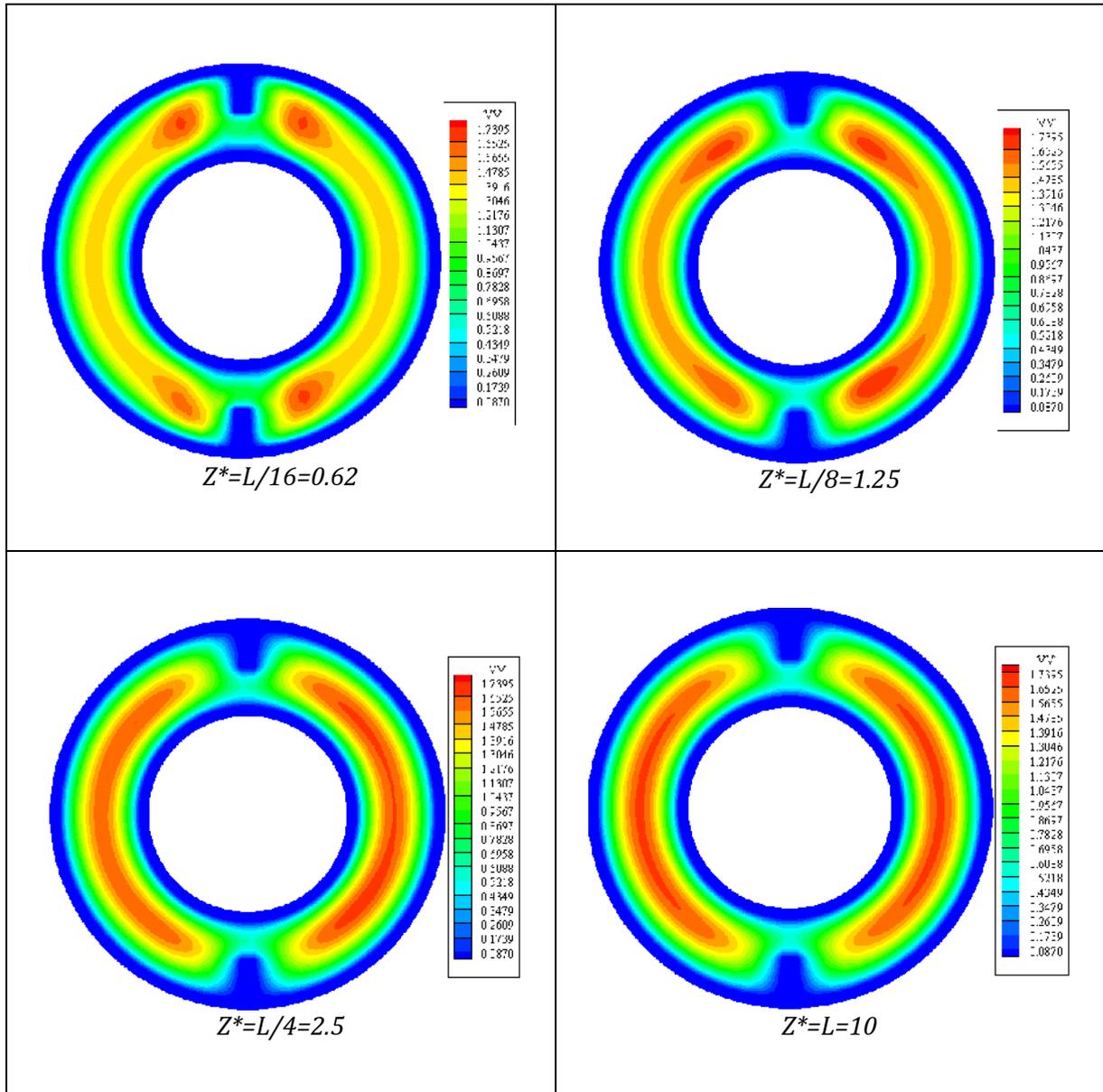


Figure 4.20 champ de vitesse axiale en Convection forcée 2 ailettes verticales ($Re=100$)

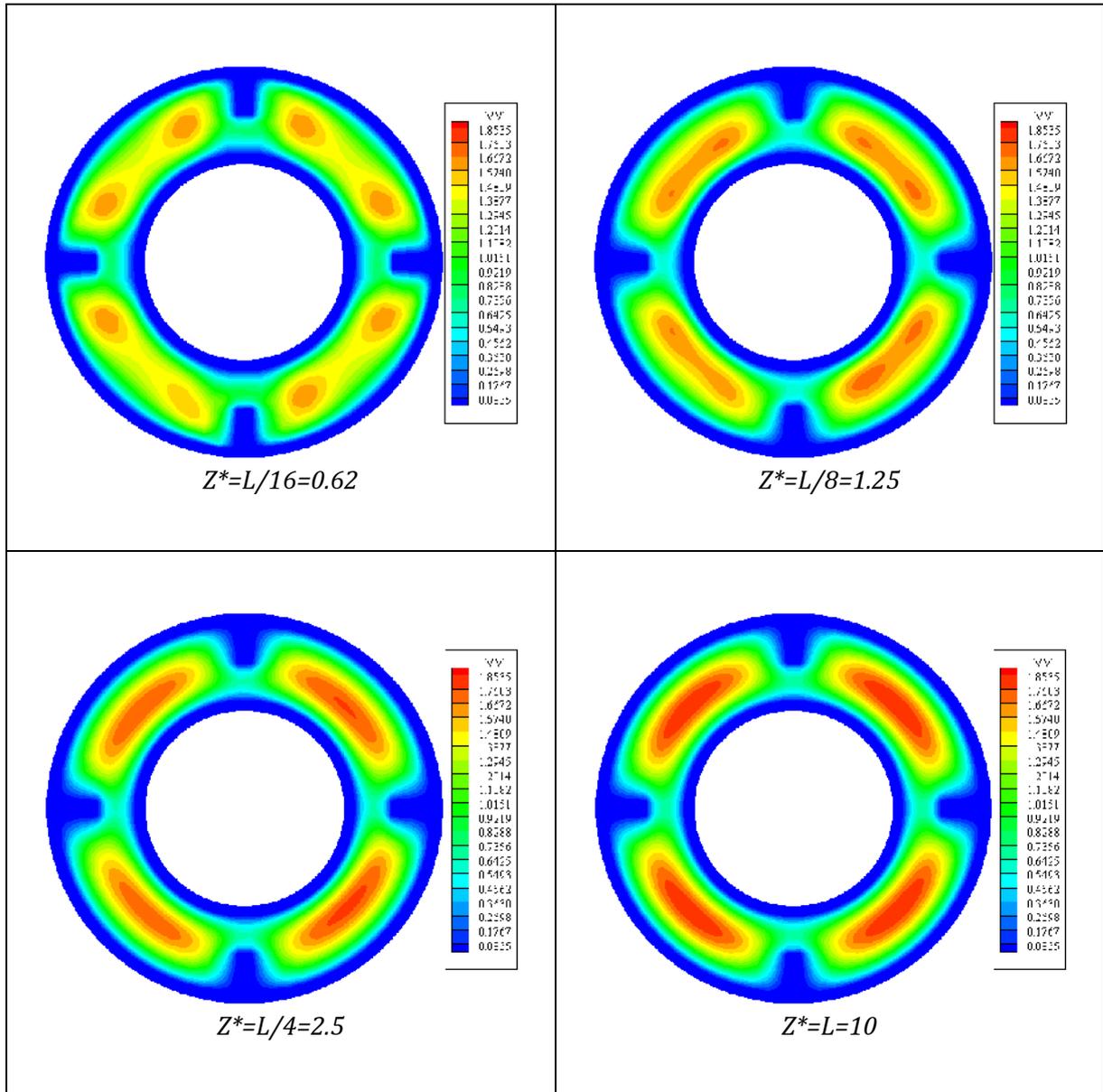


Figure 4.21 champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 4 ailettes ($Re=100$)

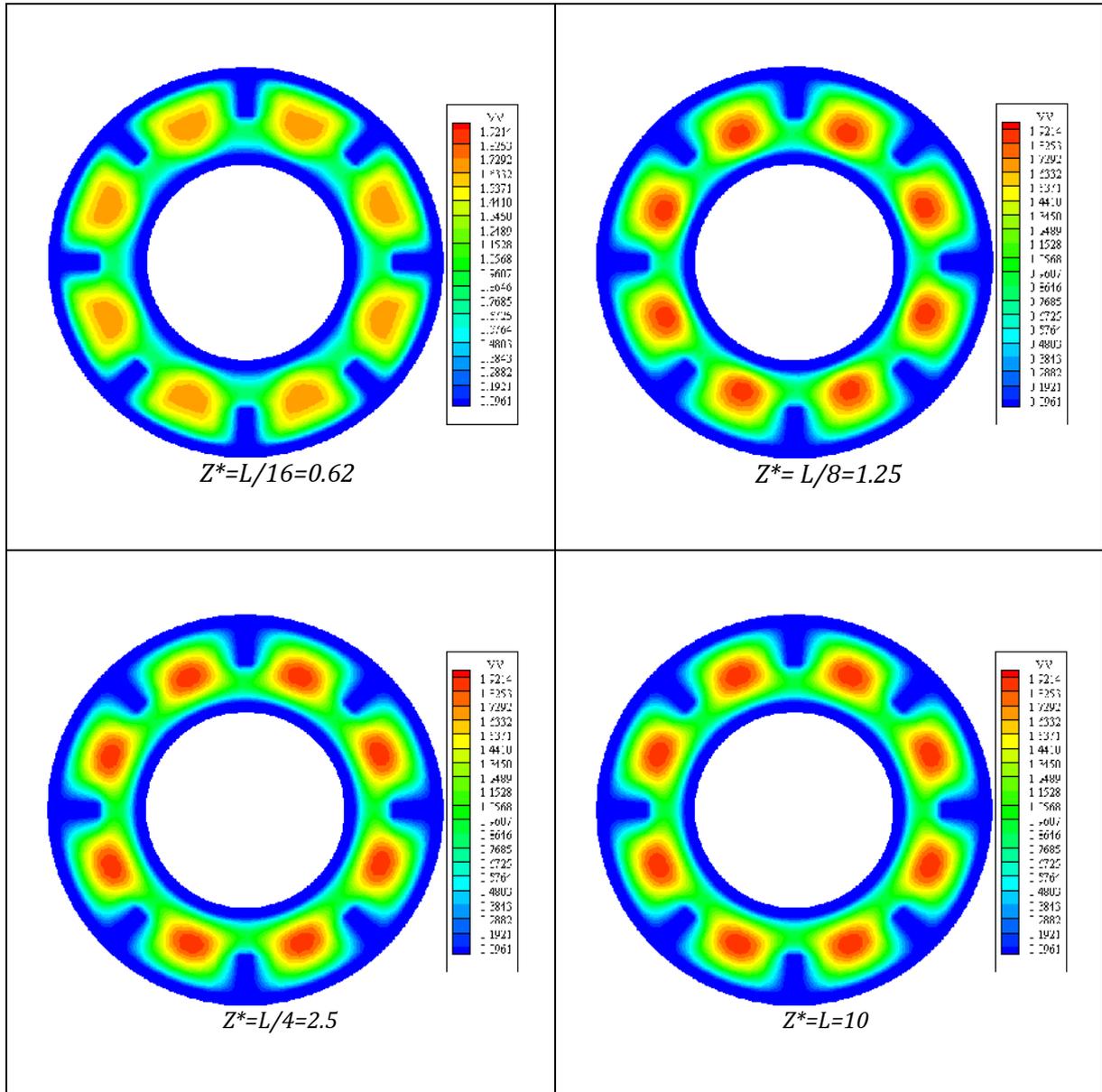


Figure 4.22 champ de vitesse axiale pour la Convection forcée 8 ailettes ($Re=100$)

4.4.2.2 Evolution axiale de la température moyenne

Les Figures 4.23 et 4.24 représentent la variation axiale de la température moyenne du fluide pour différentes configurations d'ailettes. Cela traduit l'influence du nombre d'ailettes sur la température moyenne. Qualitativement, cette variation est la même pour le nombre d'ailettes choisi. Cette variation est linéaire depuis sa valeur à l'entrée de conduit $T_m^* = 0$ jusqu'à sa valeur maximale située à la sortie du conduit. Mais elle est cependant plus importante lorsque le nombre d'ailettes augmente.

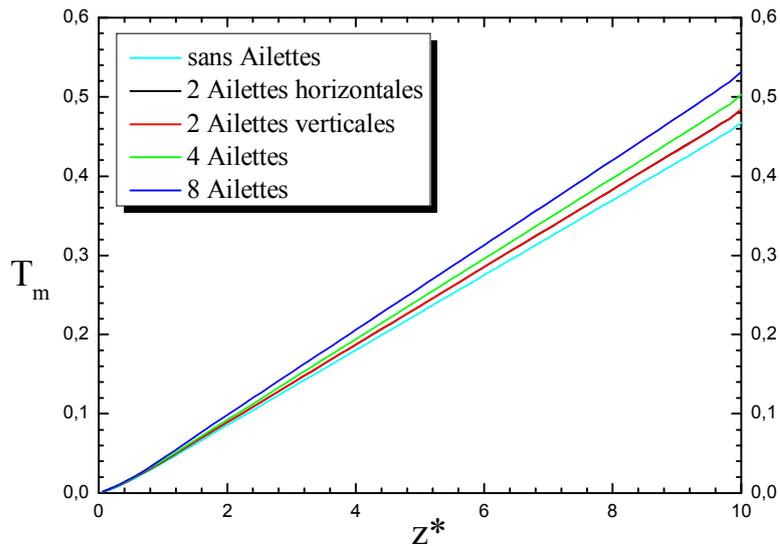


Figure 4.23 : Evolution axiale de la température moyenne du fluide en convection forcée ($Re = 50$)

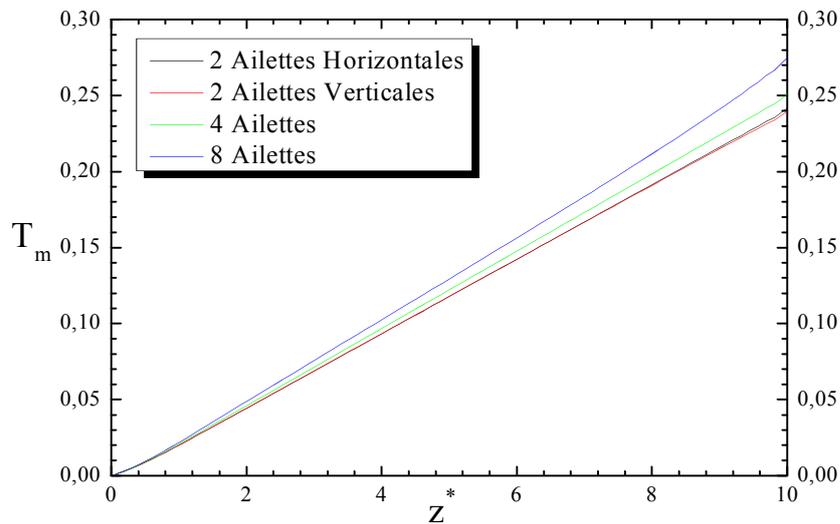


Figure 4.24 Evolution axiale de la température moyenne du fluide en convection forcée ($Re = 100$)

La variation du nombre de Nusselt axial

La variation axiale du nombre de Nusselt est représentée dans les Figures 4.25 et 4.26. L'importance de la variation du nombre de Nusselt s'effectue à l'entrée du conduit caractérisé une grande chute de la valeur $Nu(z)$, on remarque une chute rapidement de $Nu(z) = 55.259$ et $Nu(z) = 55.154$, $Nu(z) = 55.587$ et $Nu(z) = 61.071$ pour 2 ailettes horizontales, verticales et 4 et 8 ailettes respectivement avant d'atteindre une stabilisation au-delà de 2. pour le nombre de Reynolds $Re = 50$.

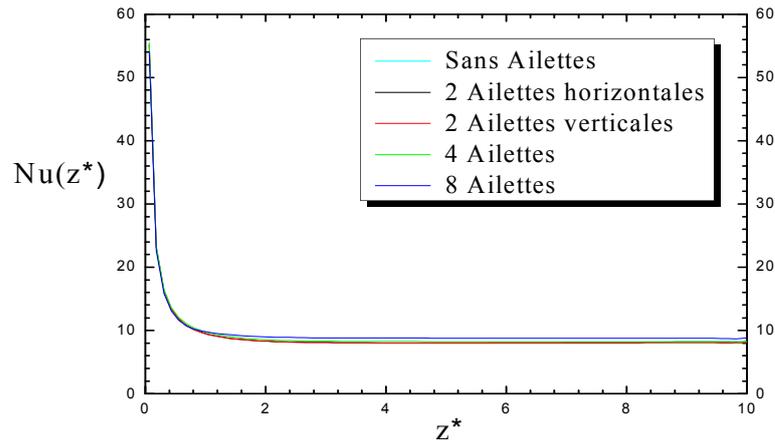


Figure 4.25 variation de nombre de Nusselt moyen en convection forcée $Re=50$

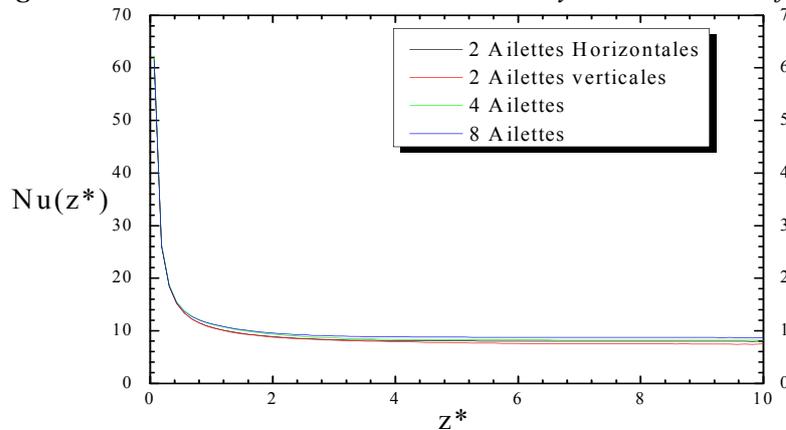


Figure 4.26 variation de nombre de Nusselt moyen en convection forcée $Re=100$

4.4.3 La convection mixte avec ailettes

4.4.3.1 Le champ de vitesse axiale V_z

On représente la distribution du champ de la vitesse axiale dans les Figures 4.27-4.34. On retrouve la structure cellulaire. L'ensemble de ces figures montre, que la variation de la vitesse axiale est qualitativement la même pour le cas de la convection forcée avec une symétrie par rapport à l'axe verticale, cependant l'effet de la convection mixte se traduit nettement par une nouvelle répartition de la vitesse axiale le long du conduit. En effet il y a un déplacement d'un maximum des vitesses vers le bas du conduit c'est-à-dire dans la partie inférieure de la section. les vitesses les plus élevées sont dans la moitié inférieure du conduit et d'autre part la vitesse croît en allant vers l'intérieur des cellules. Afin de mieux voir l'évolution de la vitesse axiale on a représenté les lignes isovitesses de la vitesse axiale aux stations axiales pour les cas de deux ailettes horizontales et verticales, quatre et huit ailettes pour $Re=50$ et 100 figures (4.35-4.36). On y voit clairement la formation des cellules.

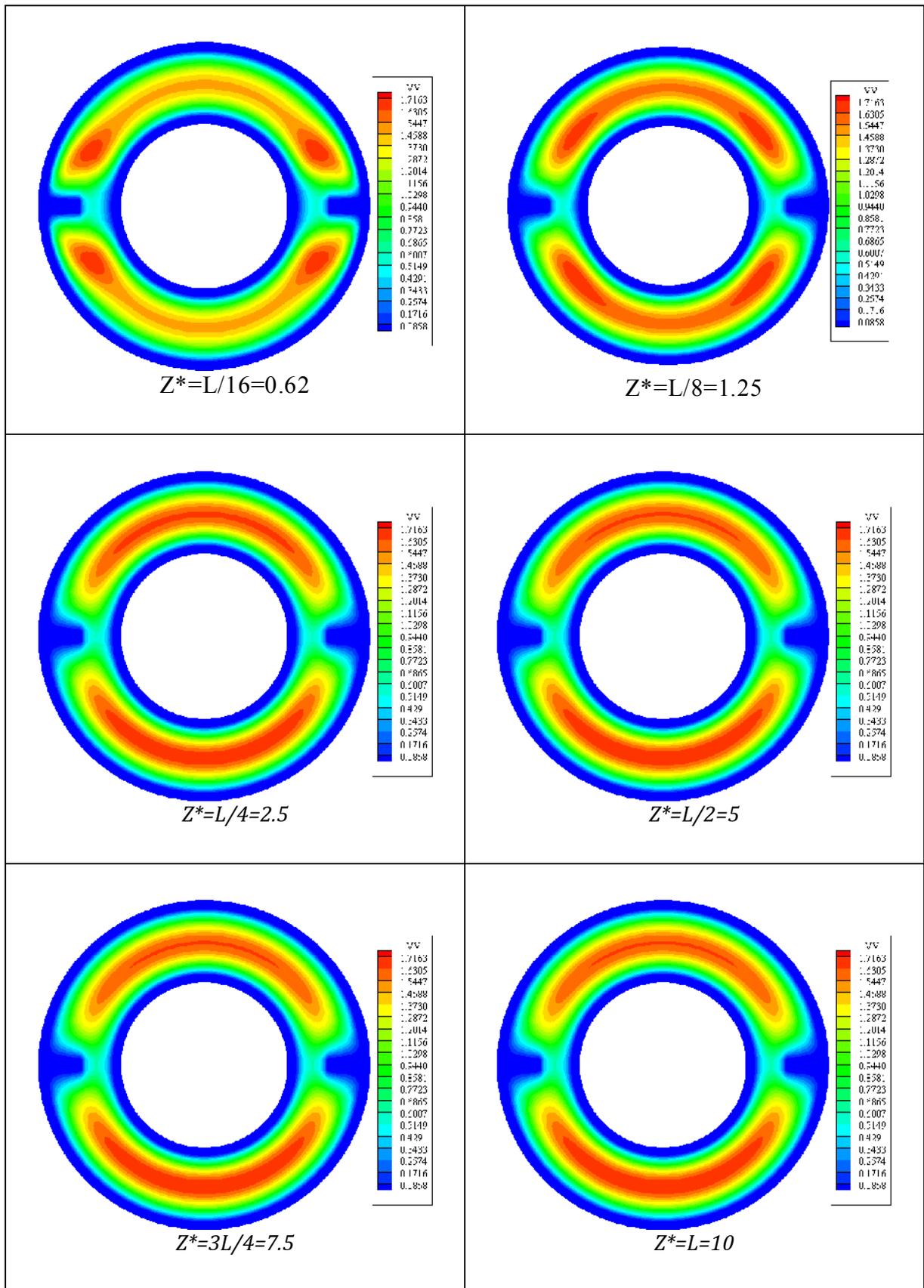


Figure 4.27 le champ de la vitesse axiale en Convection mixte2 ailettes horizontales ($Re=50$)

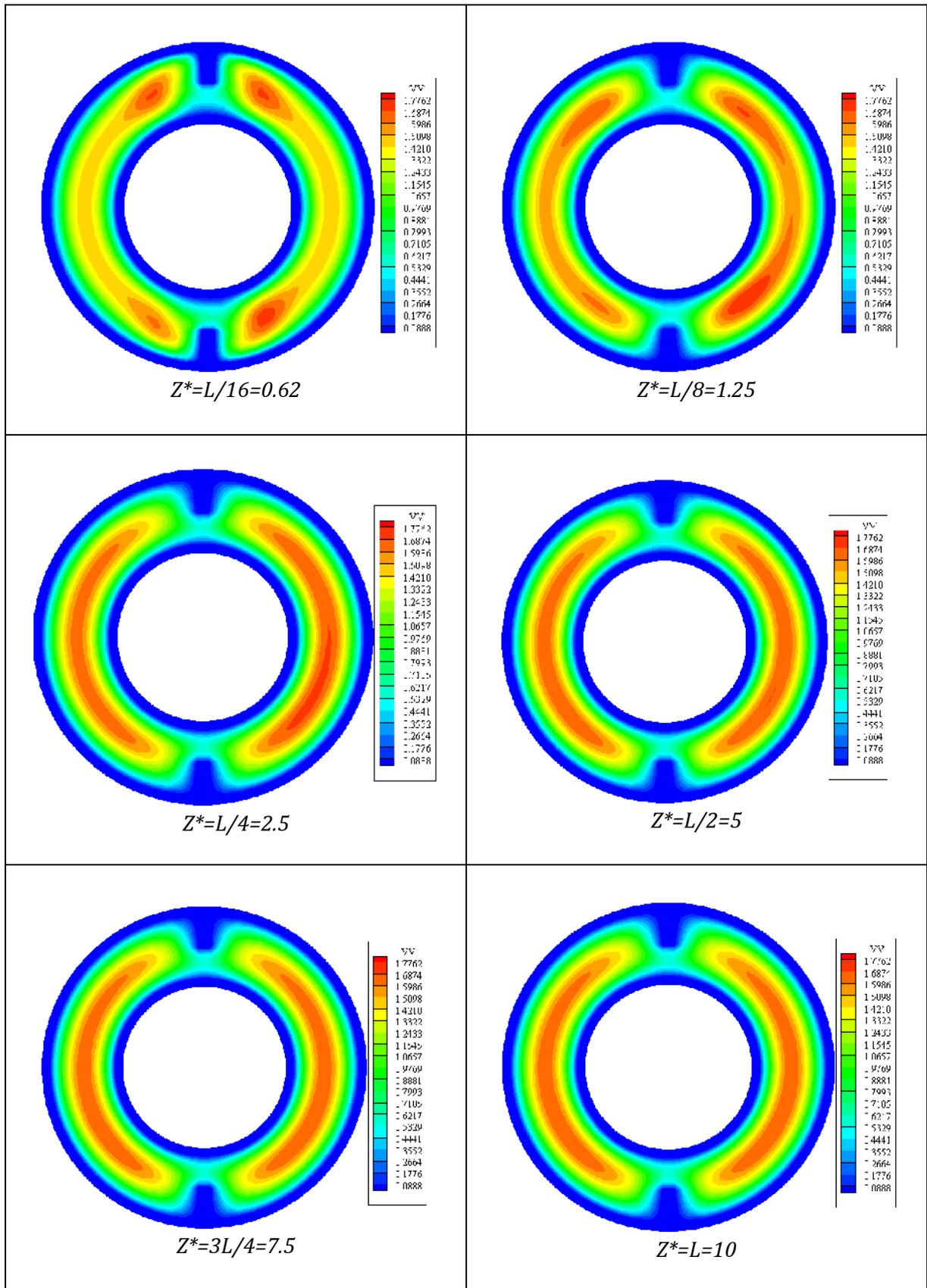


Figure 4.28 : le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 2 ailettes verticales ($Re=50$)

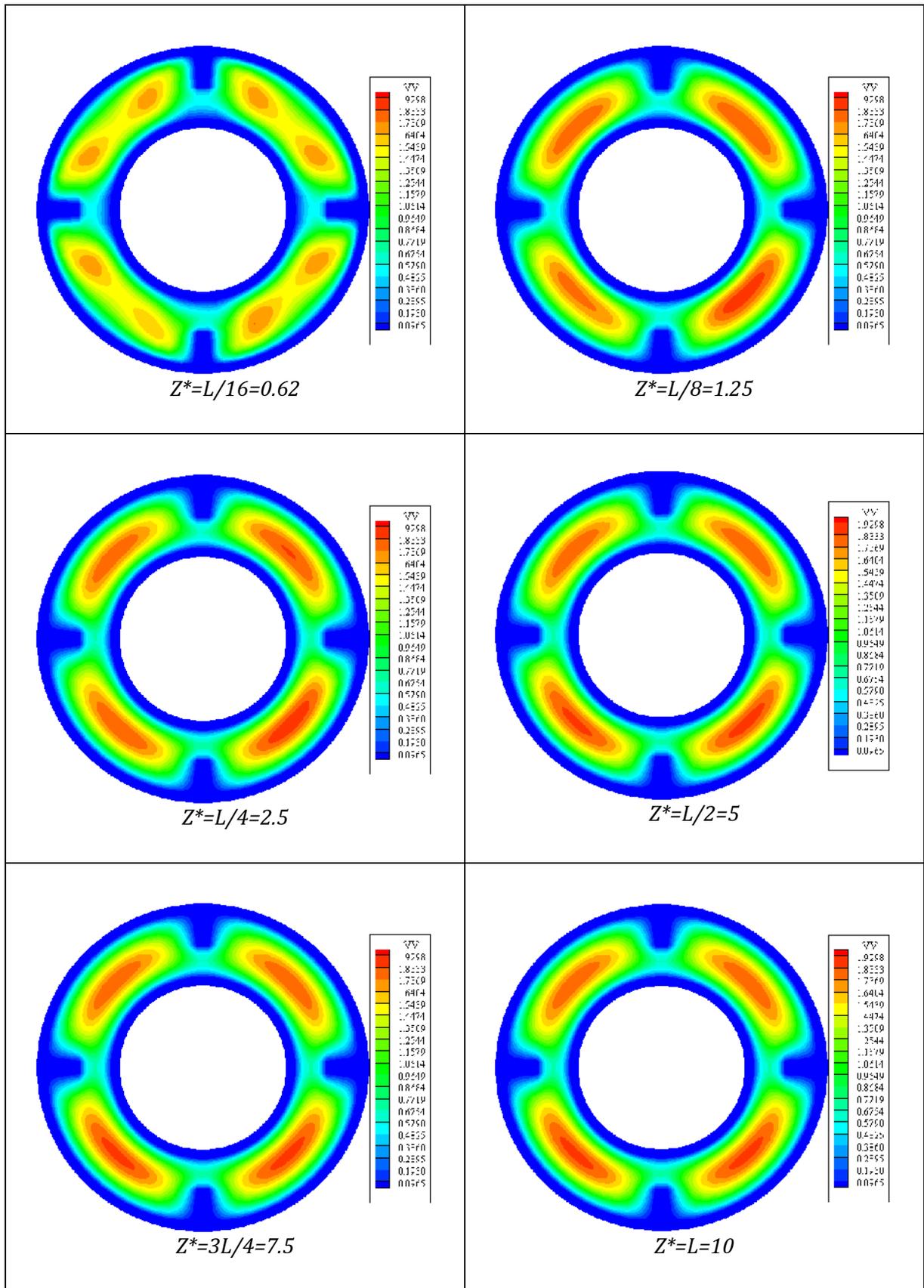


Figure 4.29 : le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 4 ailettes ($Re=50$)

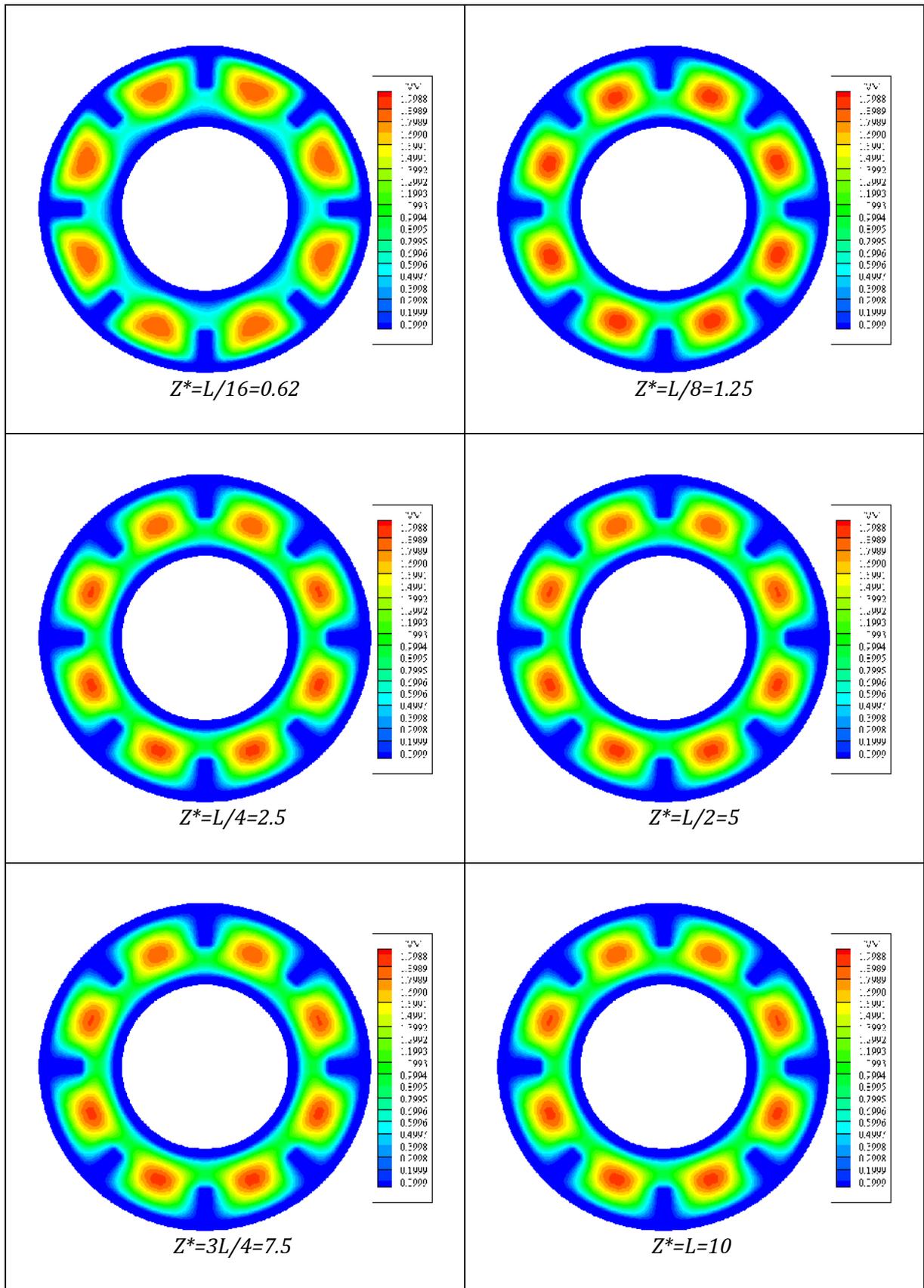


Figure 4.30 Le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 8 ailettes ($Re=50$)

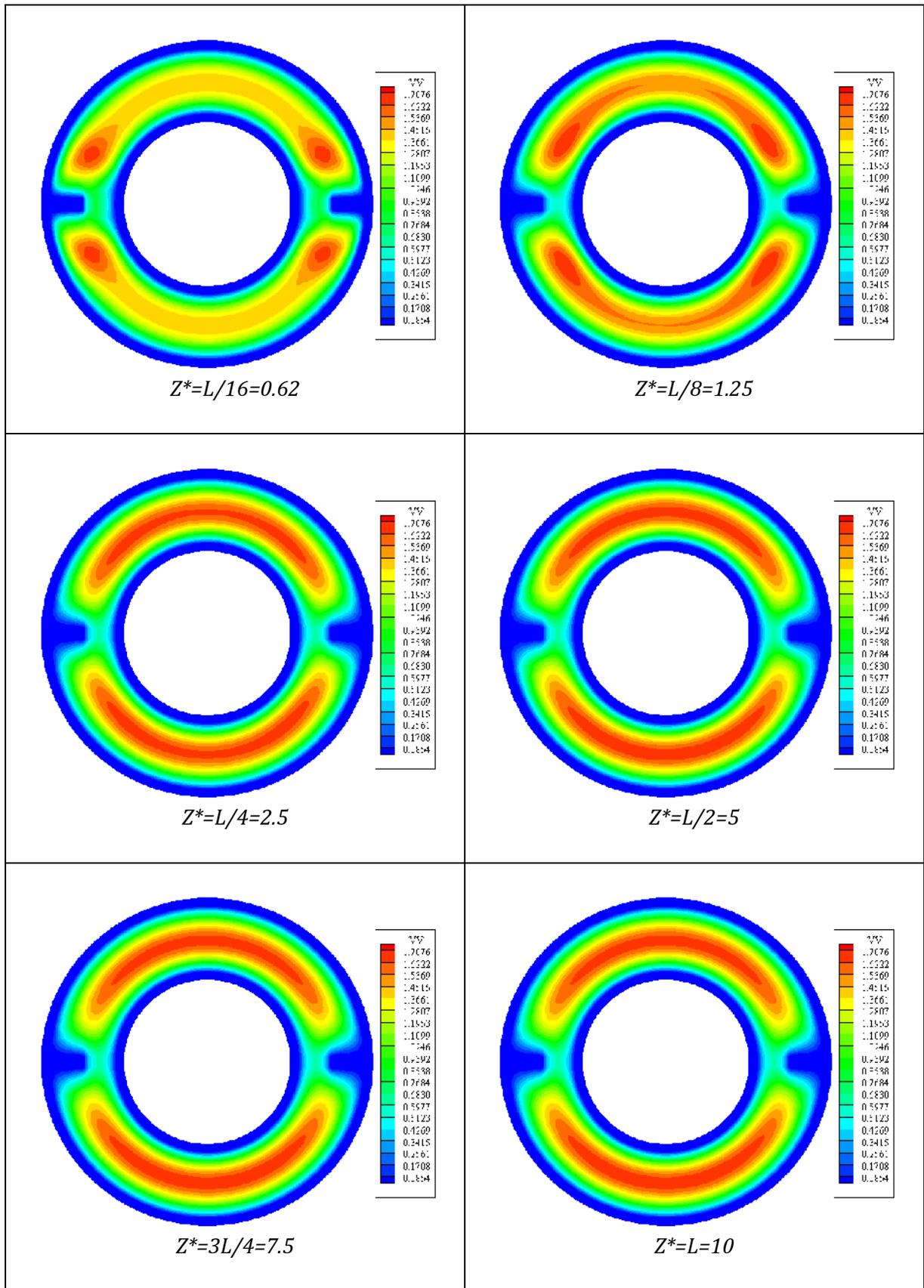


Figure 4.31 le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 2 ailettes horizontales ($Re=100$)

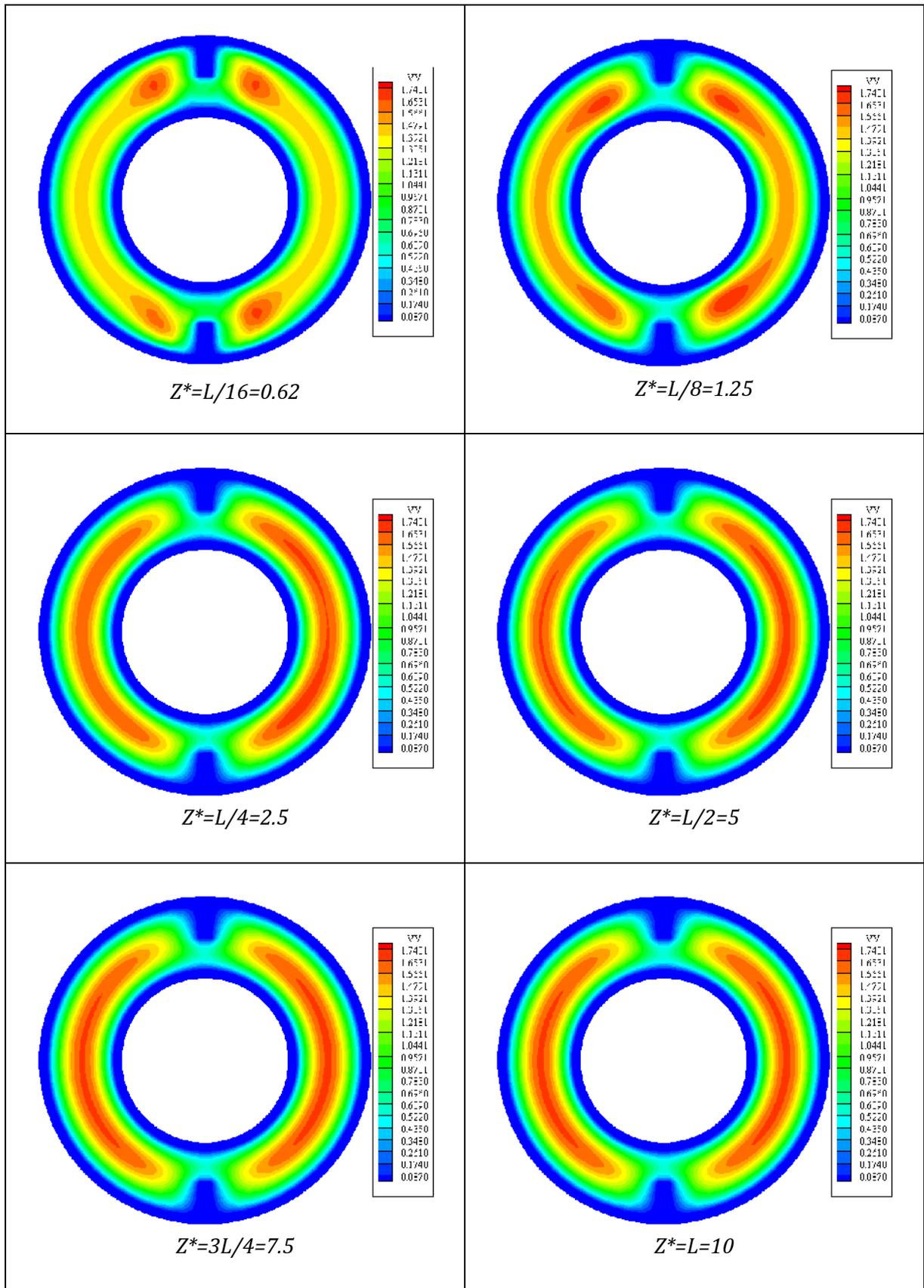


Figure 4.32 le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 2 ailettes verticales ($Re=100$)

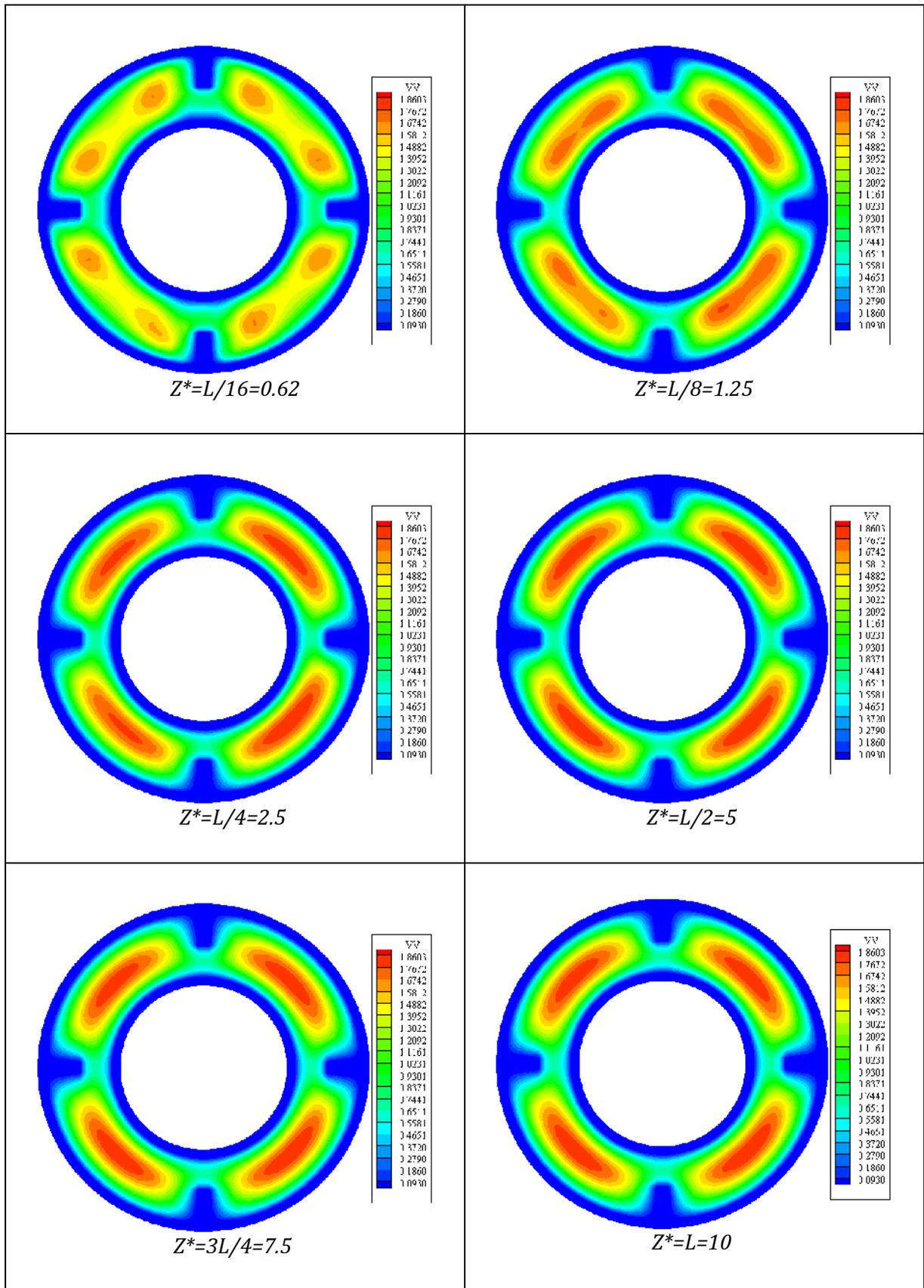


Figure 4.33 le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 4 ailettes ($Re=100$)

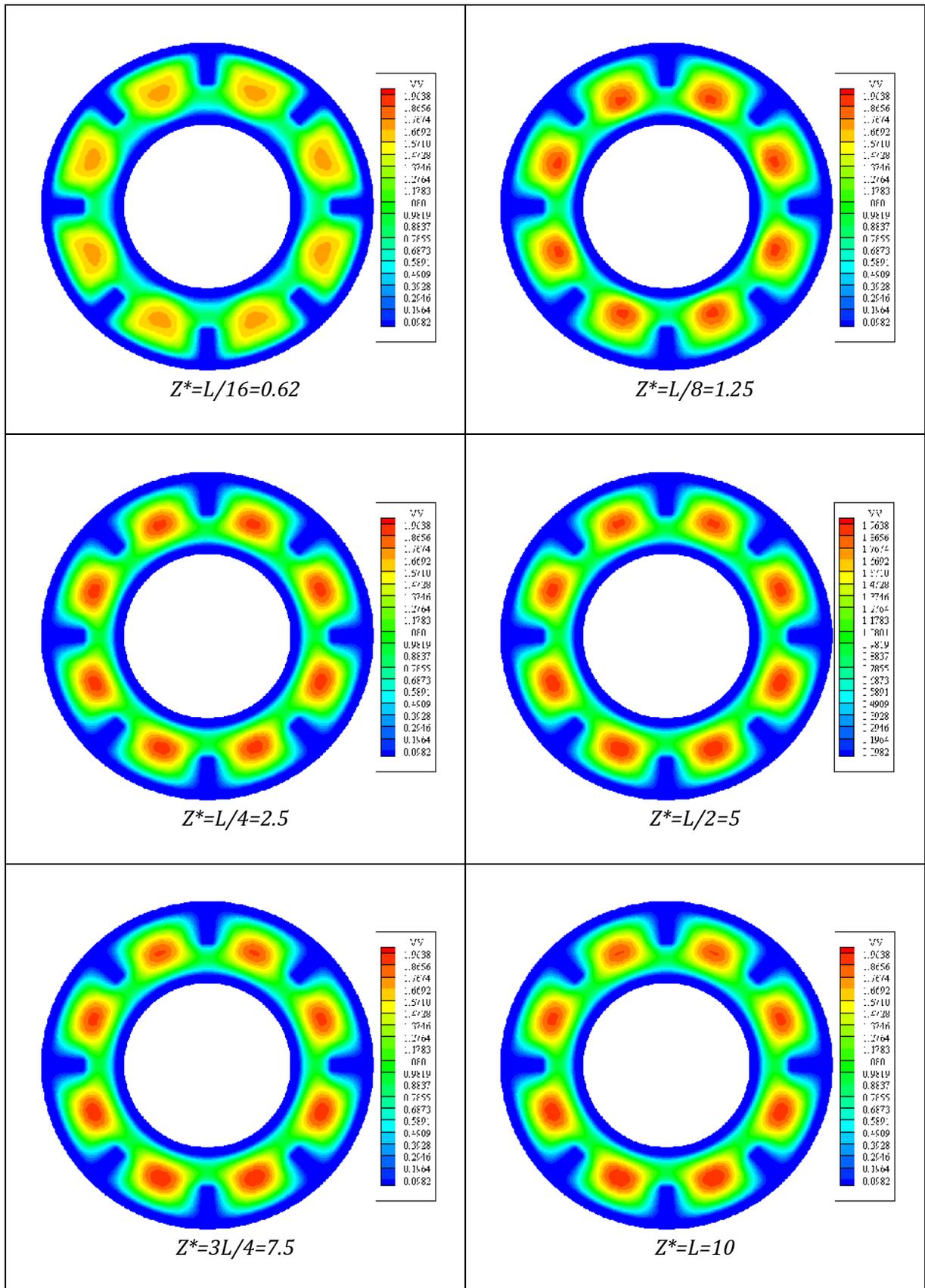


Figure 4.34 le champ de la vitesse axiale en Convection mixte 8 ailettes ($Re=100$)

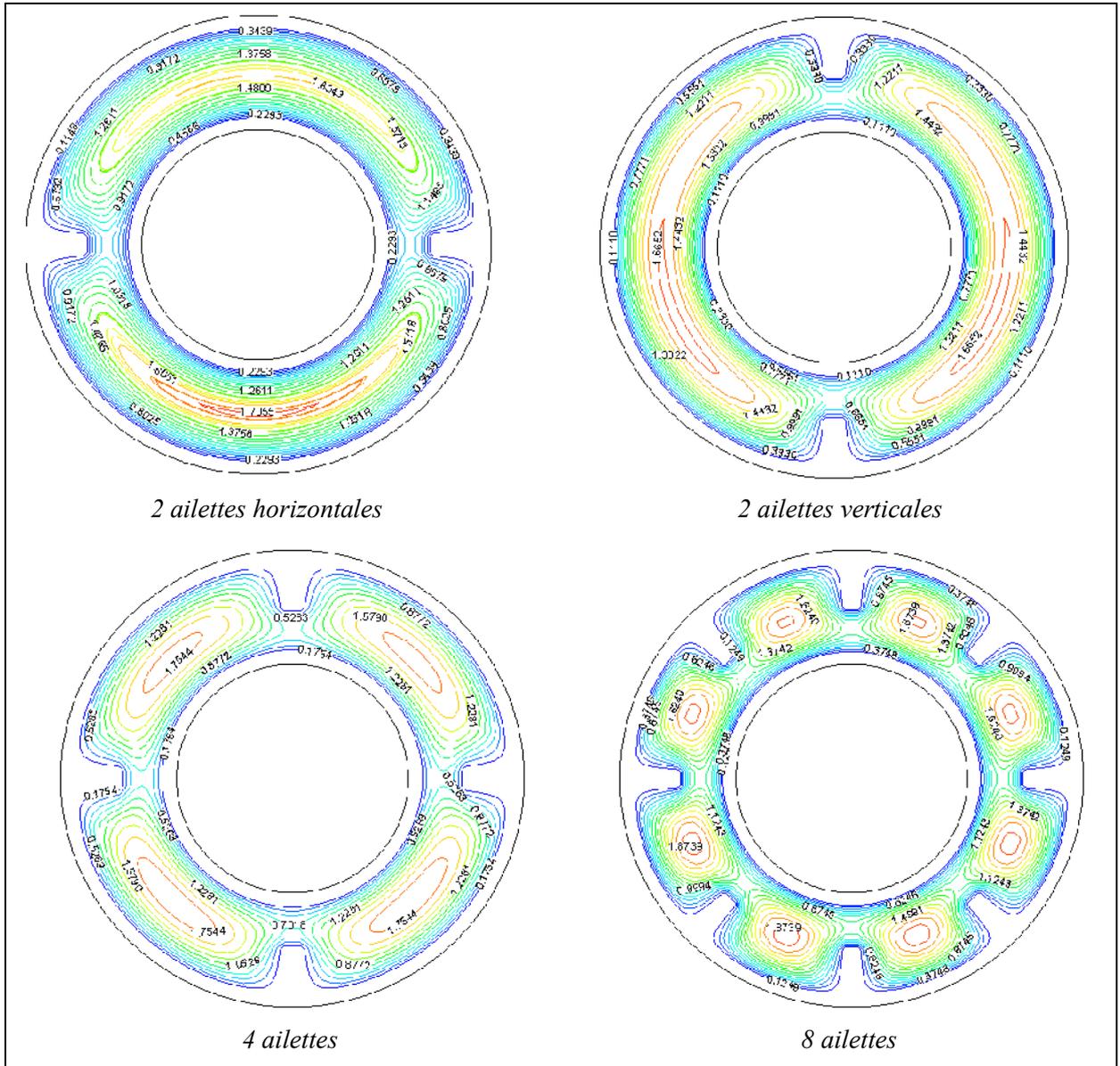


Figure 4.35 Isovitesse à travers une section droite à la sortie en Convection mixte $Re=50$

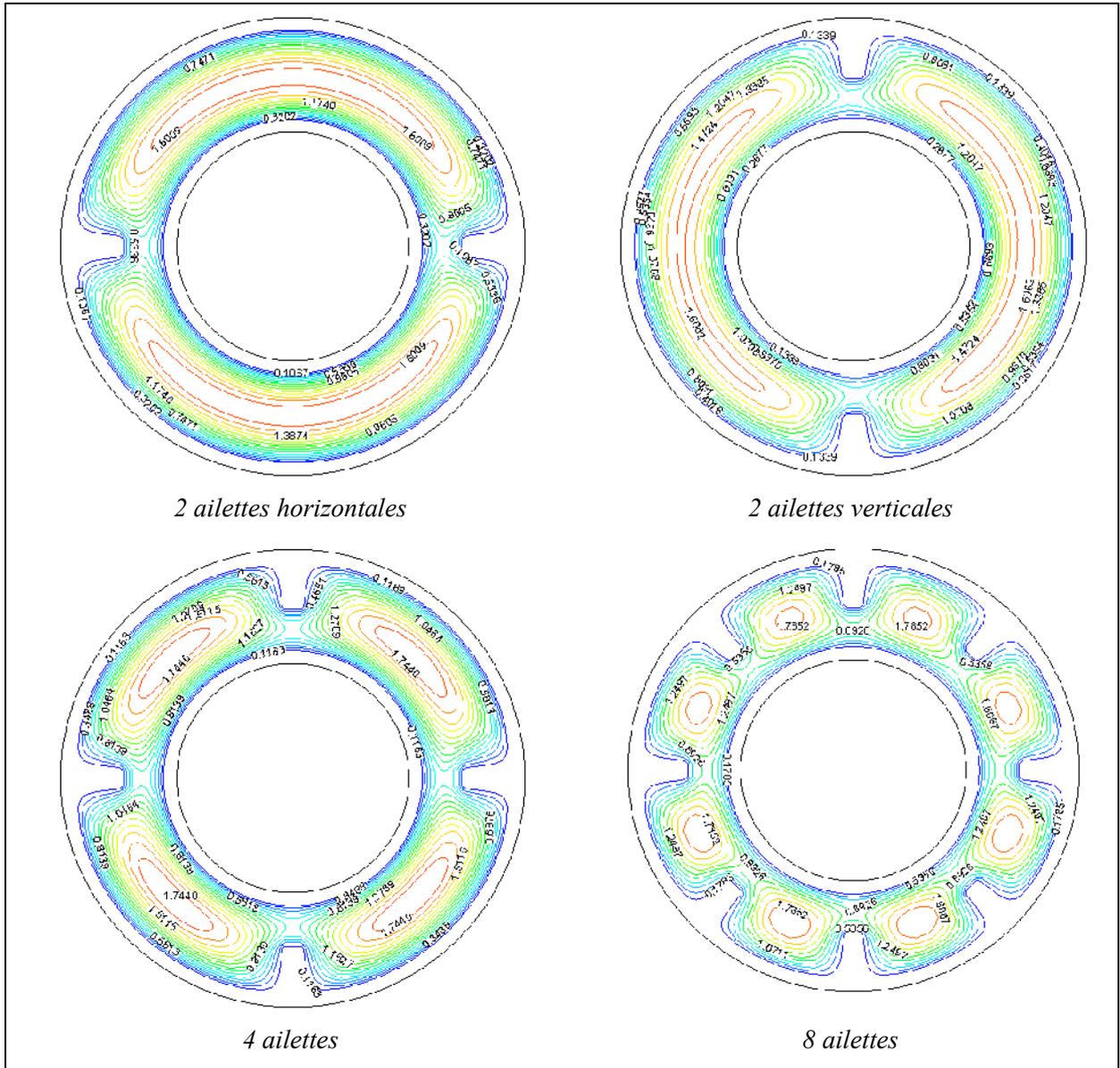


Figure 4.36 Isovitesses à travers une section droite a la sortie en Convection mixte ($Re=100$)

4.4.3.2 L'écoulement secondaire

La disposition des ailettes dans l'espace annulaire a une influence sur la nature d'écoulement au sein du conduit. On représente l'écoulement secondaire dans les figures 4.37- 4.40 des différentes cas étudiés avec ailettes sur la convection mixte. pour $Ri = 1$. Ainsi que les lignes de courant associées pour le cas de quatre et huit ailettes figure 4.41. Cependant il faut bien remarquer que cet écoulement secondaire est très faible par rapport à l'écoulement axial.

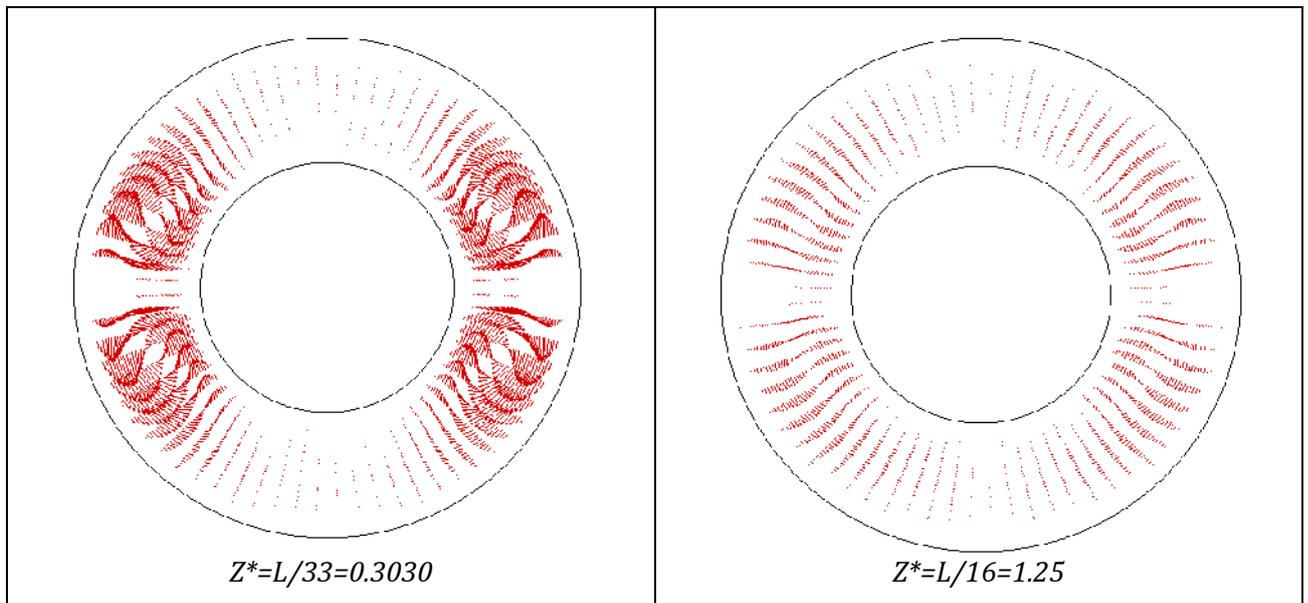


Figure 4.37 variation de l'écoulement secondaire aux stations choisies 2 ailettes horizontales $Re=50$)

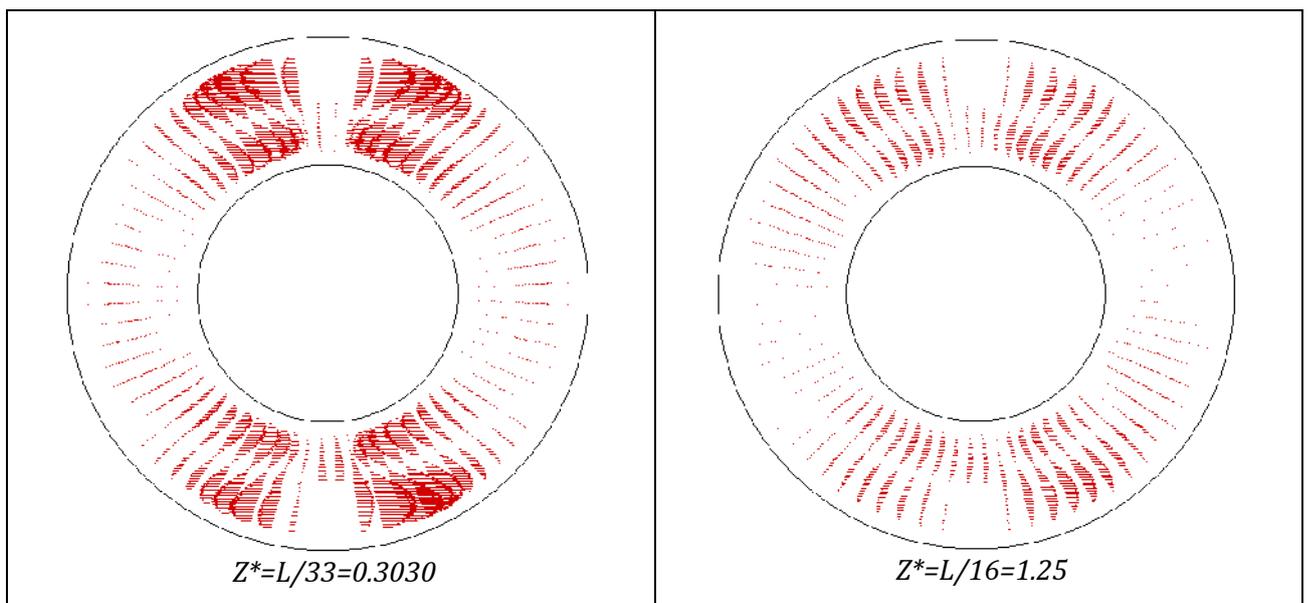


Figure 4.38 variation de l'écoulement secondaire aux stations choisies 2 ailettes verticales ($Re=50$)

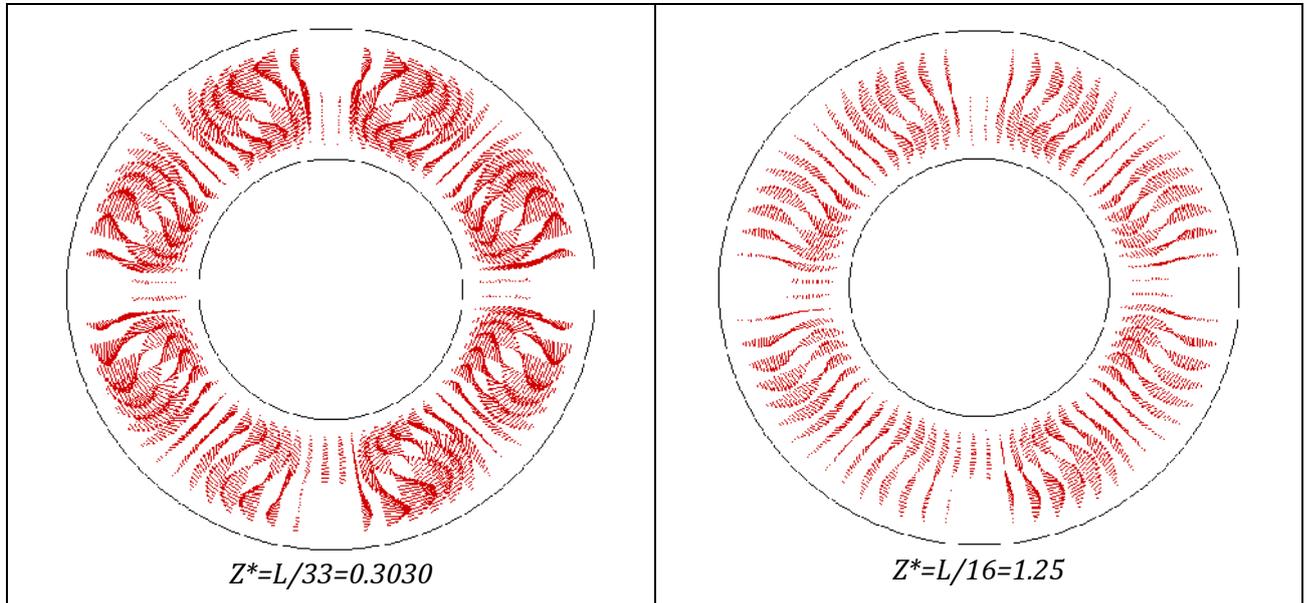


Figure 4.39 variation de l'écoulement secondaire à la station choisie 4 ailettes ($Re=50$)

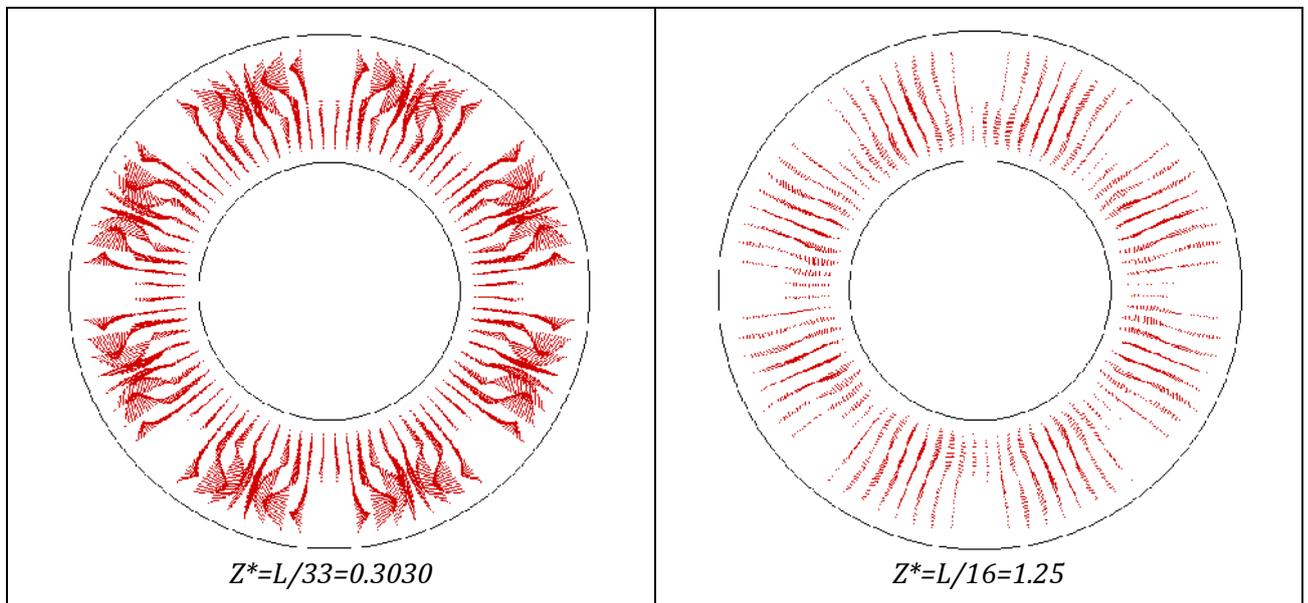


Figure 4.40 variation de l'écoulement secondaire à la station choisie 8 ailettes ($Re=50$)

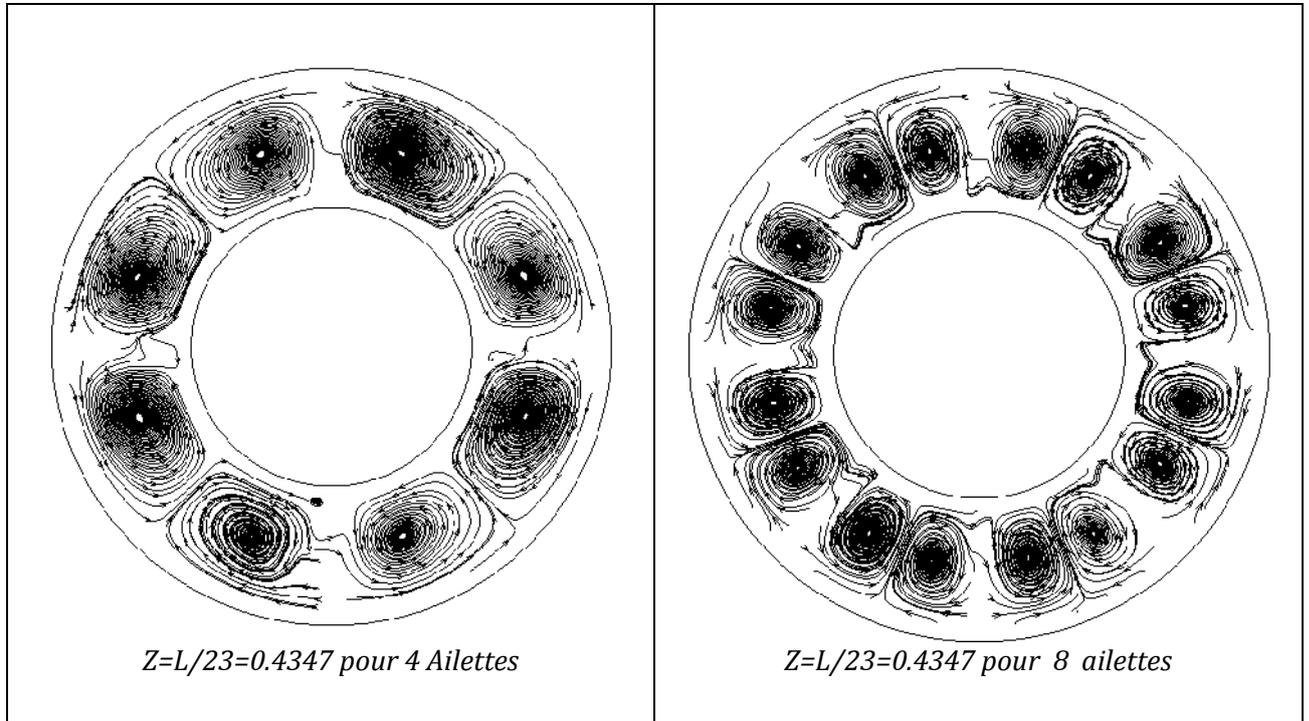


Figure 4.41 : ligne de courant en des zones choisie pour $Re=50$

4.4.3.3 Le champ de température

La distribution de température dans son ensemble indique un effet appréciable de la convection mixte. Les isothermes (circulaires) en des stations Comme le montre la figure 4.42 - 4.49 à d'efférent station de l'entrée jusqu'à la sortie du cylindre. Dans tous les schémas, la variation de la température est symétrique par rapport l'axe vertical du conduit. Elle est caractérisée par une croissance axiale monotone de l'entrée jusqu'à la sortie du conduit. Le minimum est à l'entrée ($T = 0$) tandis que le maximum est atteint à la sortie.

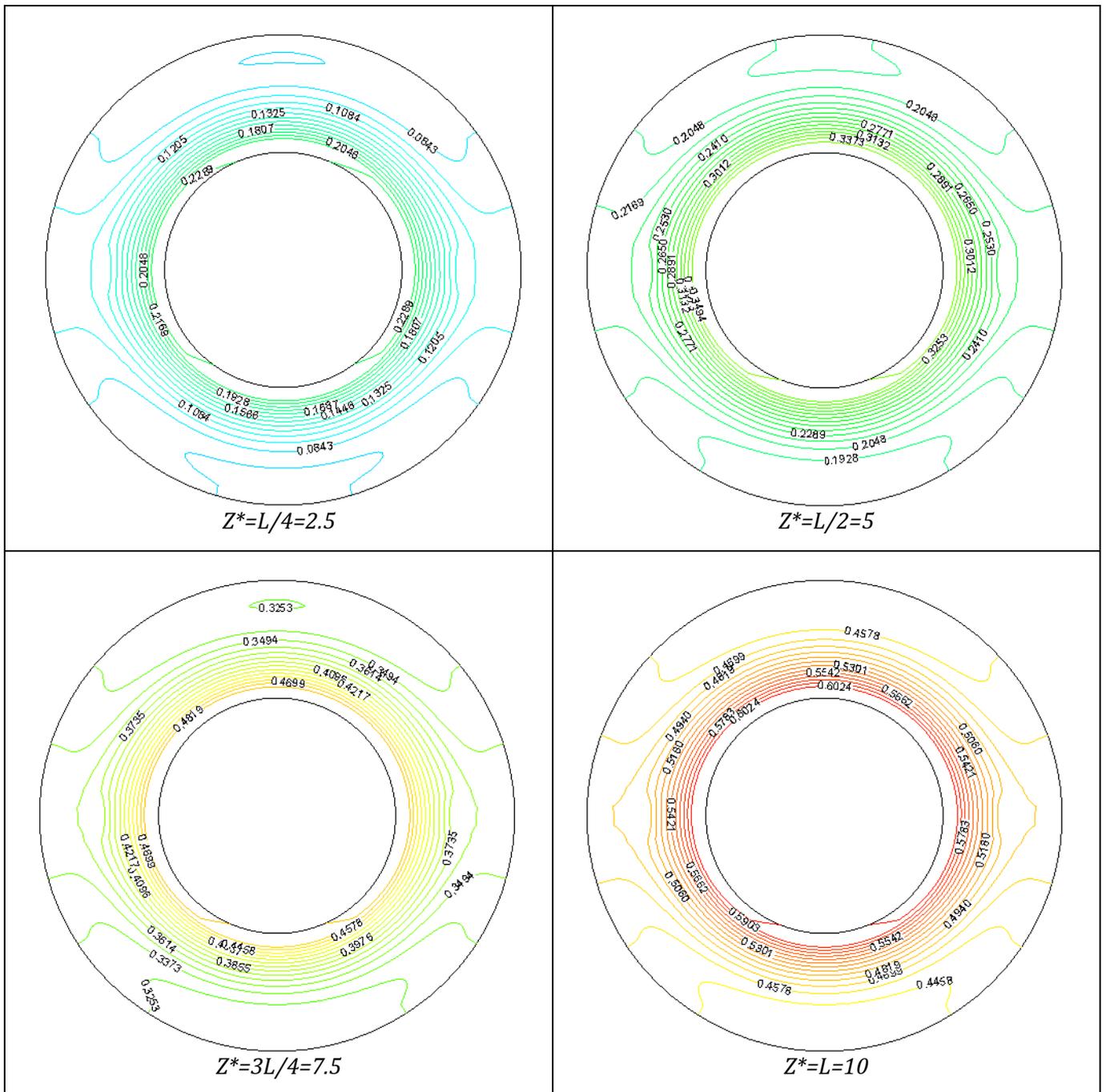


Figure 4.42 : distribution de température pour la Convection mixte
2 ailettes horizontales ($Re=50$)

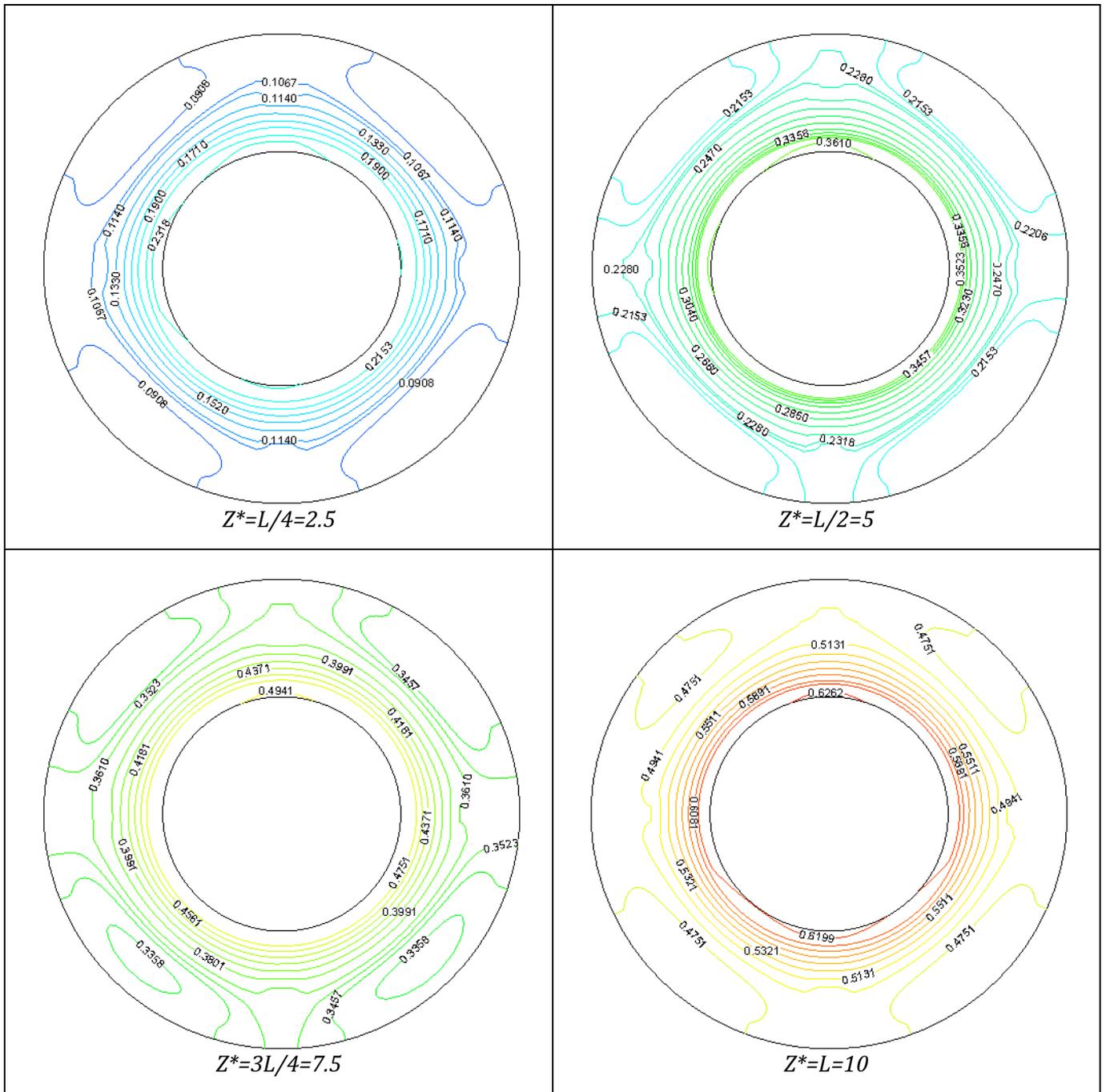


Figure 4.44 la distribution de température en des zones choisies
4 ailettes ($Re=50$)

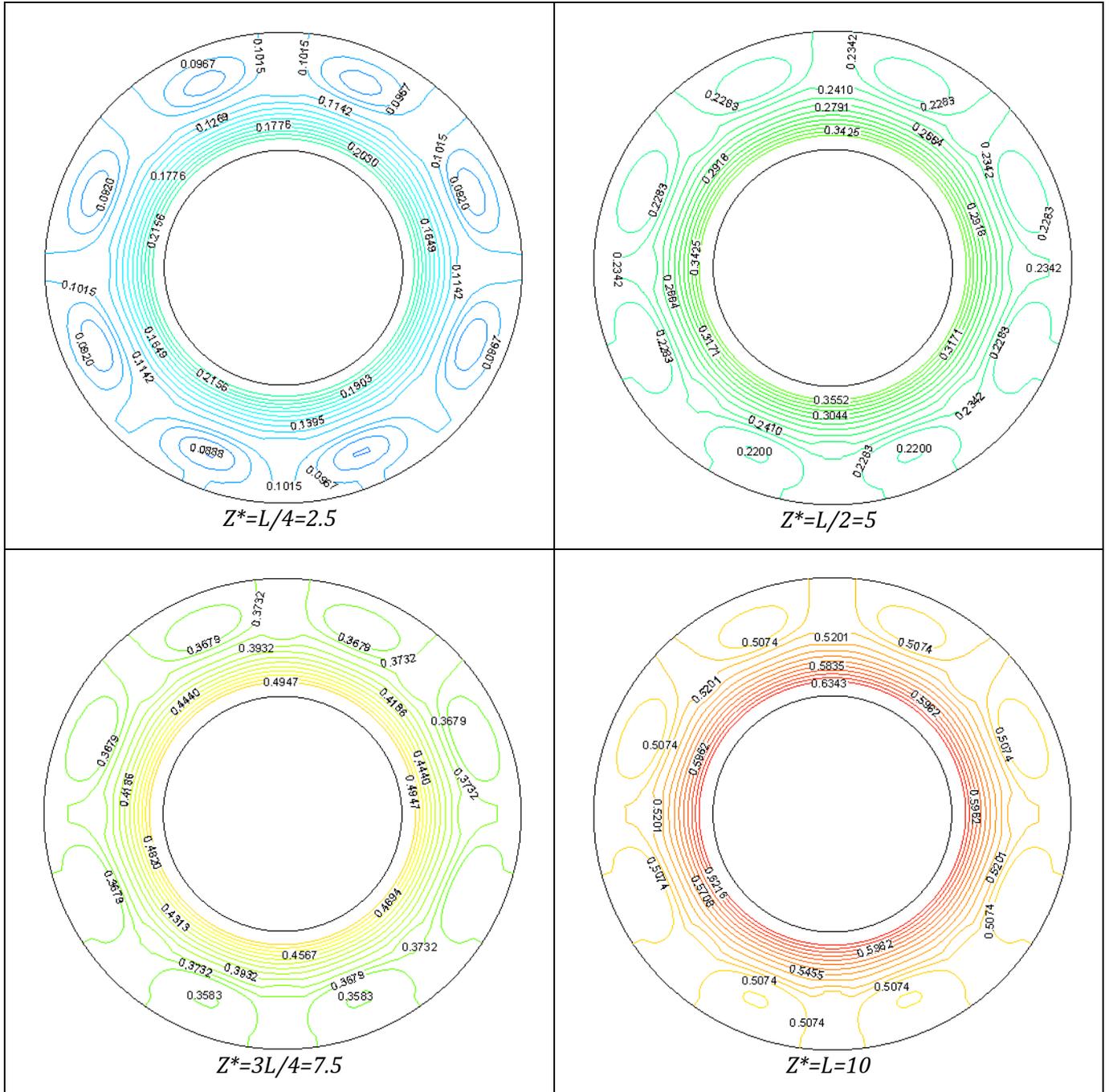


Figure 4.45 La distribution de température en des zone choisie 8 ailettes ($Re=50$)

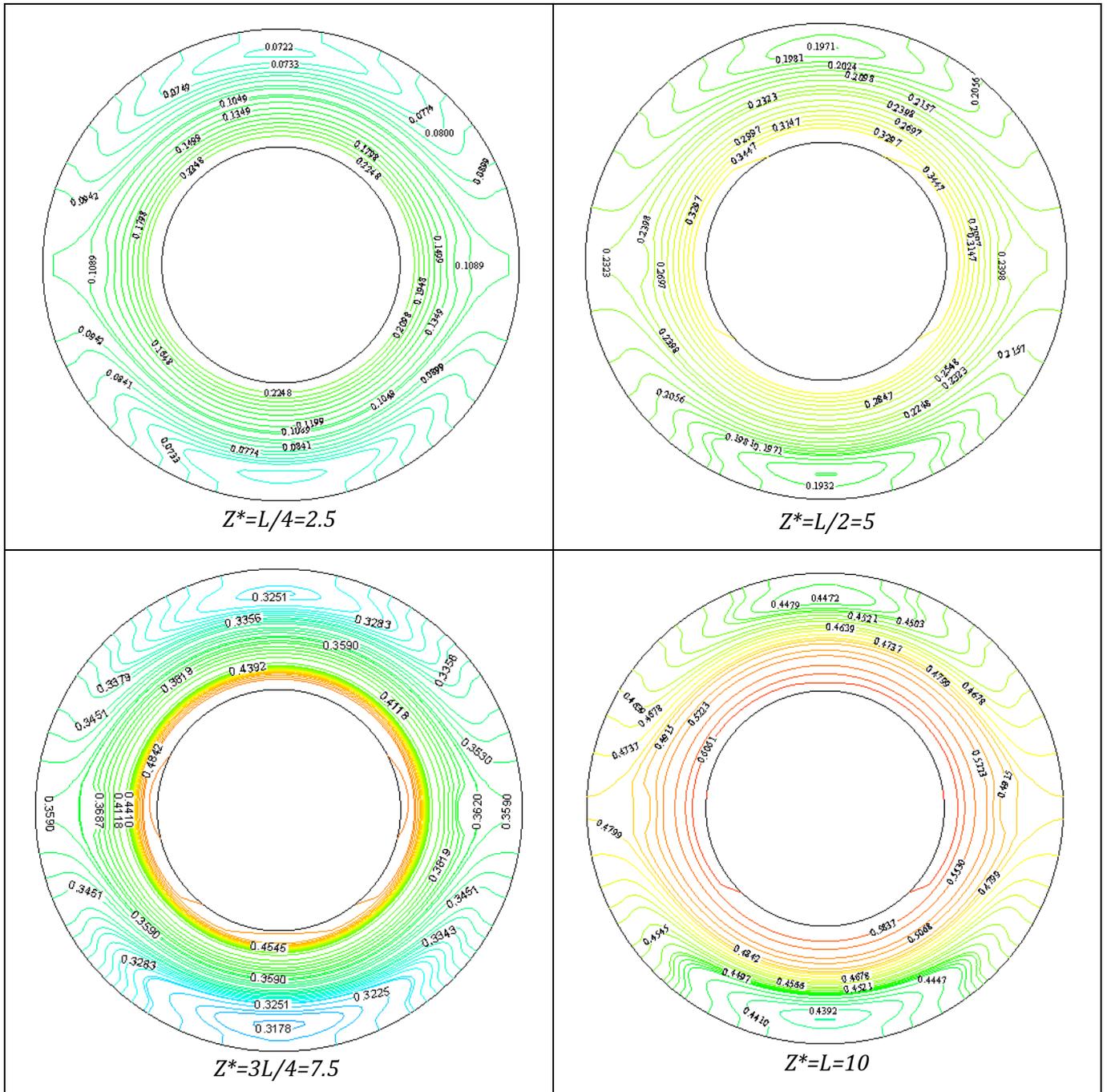


Figure 4.46: distribution de température pour la Convection mixte
2 ailettes horizontales ($Re=100$)

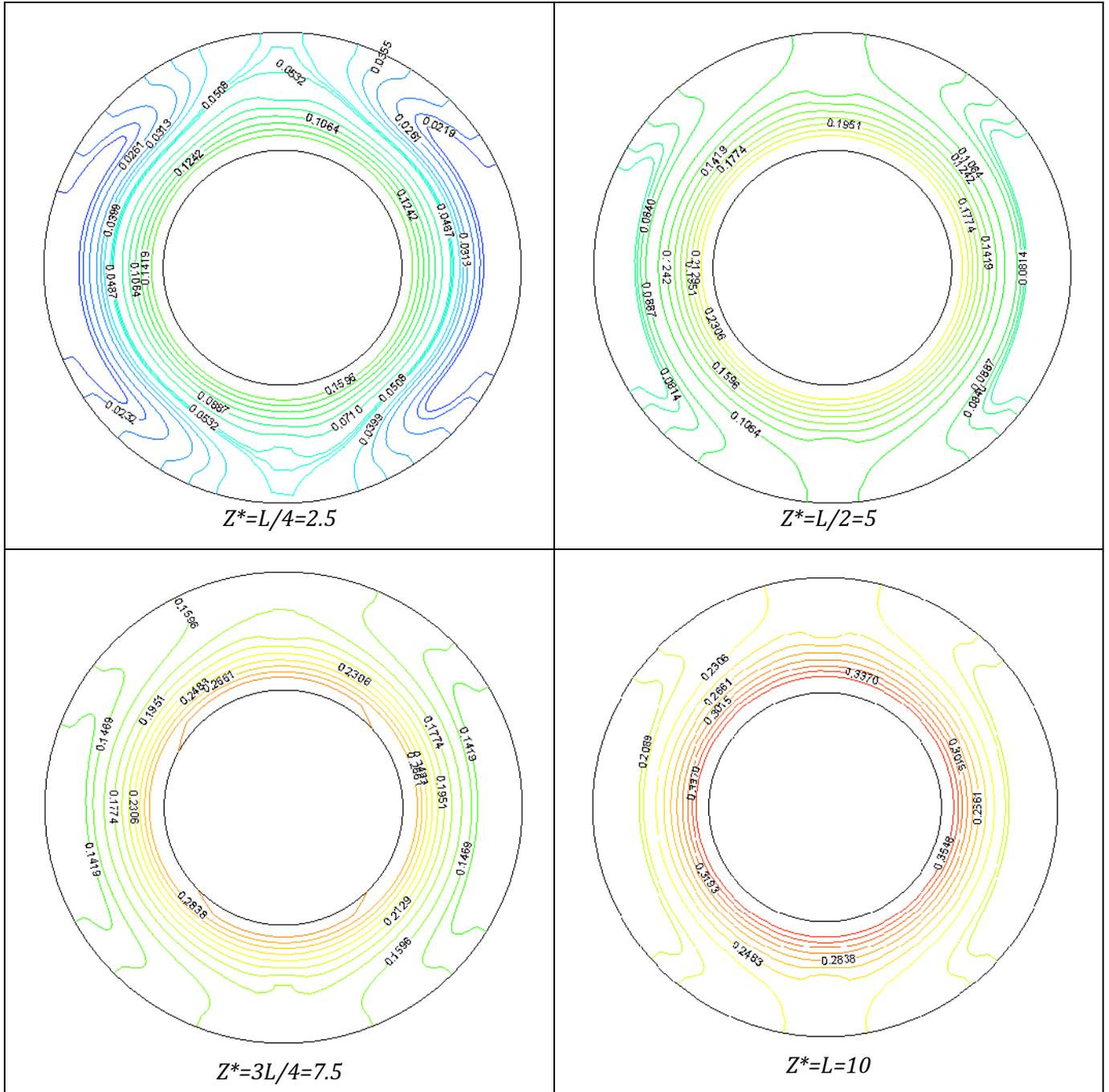


Figure 4.47 distribution de température en Convection mixte
2 ailettes verticales ($Re=100$)

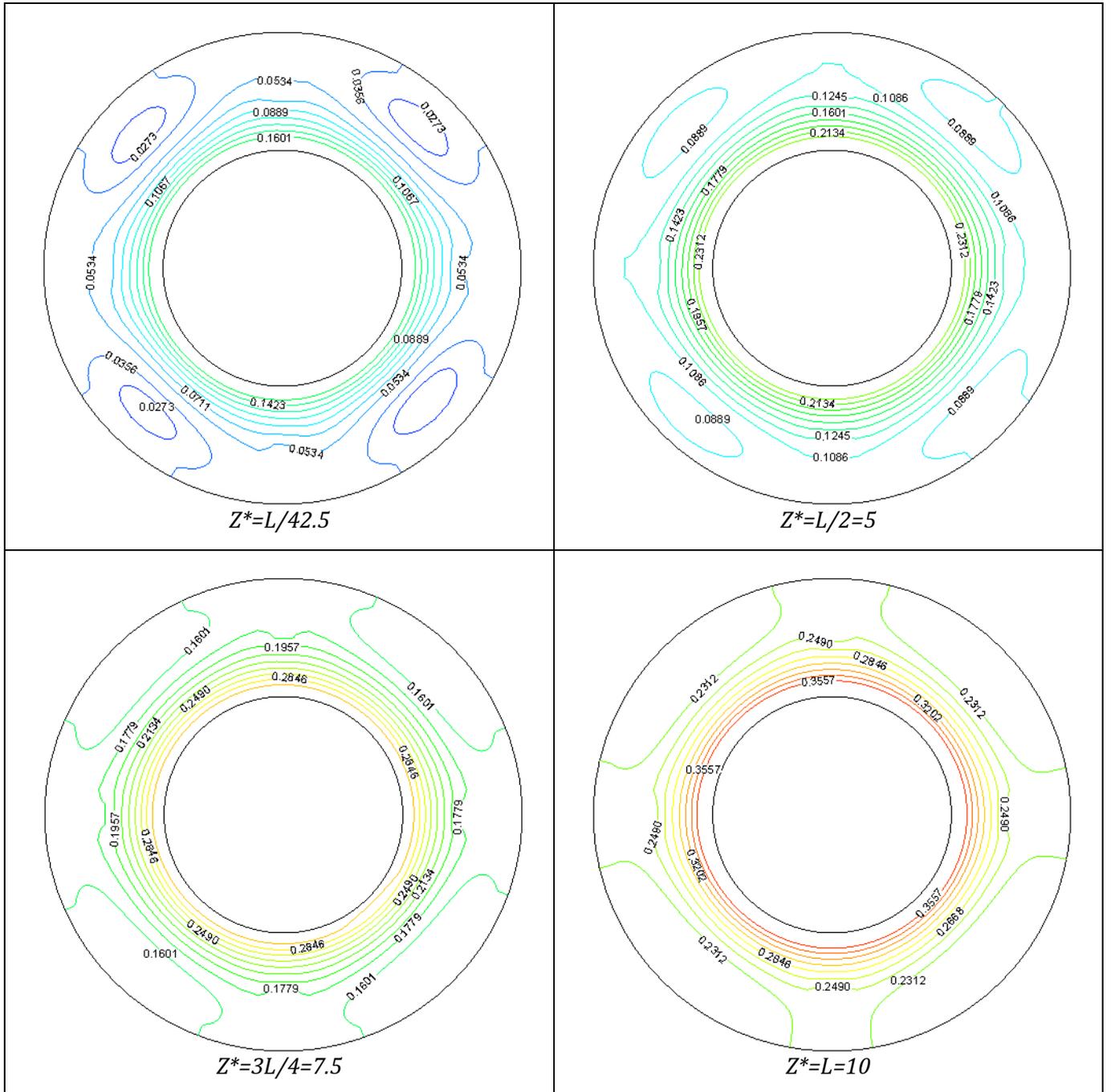


Figure 4.48 la distribution de température en des zones choisies
4 ailettes ($Re=100$)

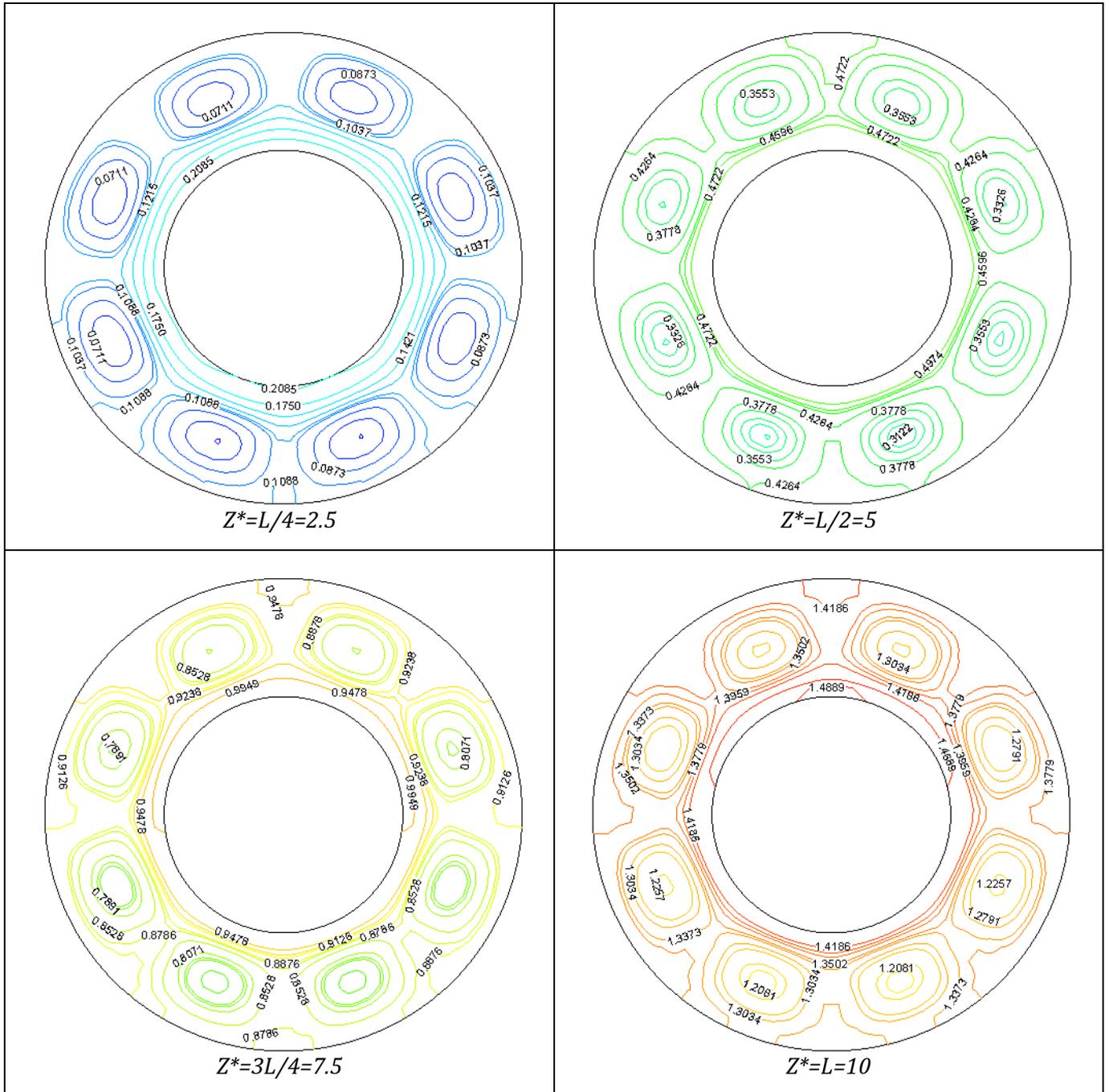


Figure 4.49 la distribution de température en des zones choisies
8 ailettes ($Re=100$)

4.4.3.4 La variation axiale de la température moyenne

La figure 4.50 - 4.51 représente la variation axiale de la température moyenne. Dans cette étude on a un flux de chauffage surfacique qui entre directement au fluide entraînant une variation linéaire de la température moyenne. La variation de la température moyenne est linéaire depuis sa valeur à l'entrée de conduit $T_m^* = 0$ jusqu'à sa valeur maximale située à la sortie du conduit.

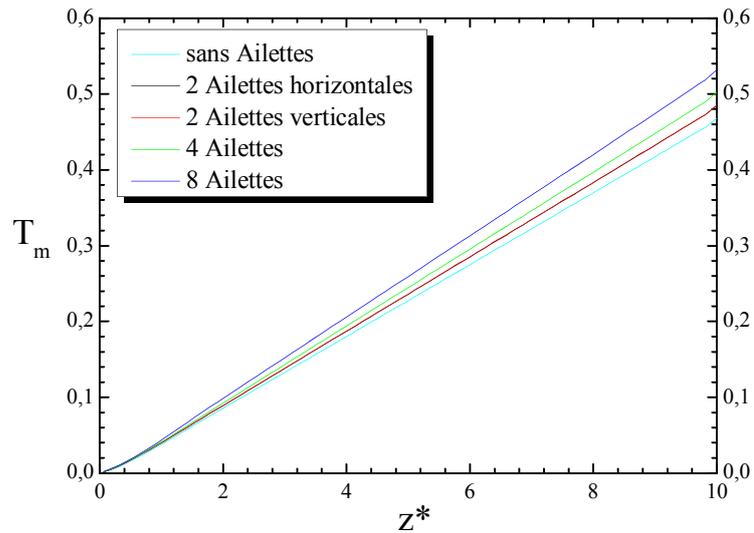


Figure 4.50 Evolution de la température moyenne du fluide en convection mixte $Re=50$

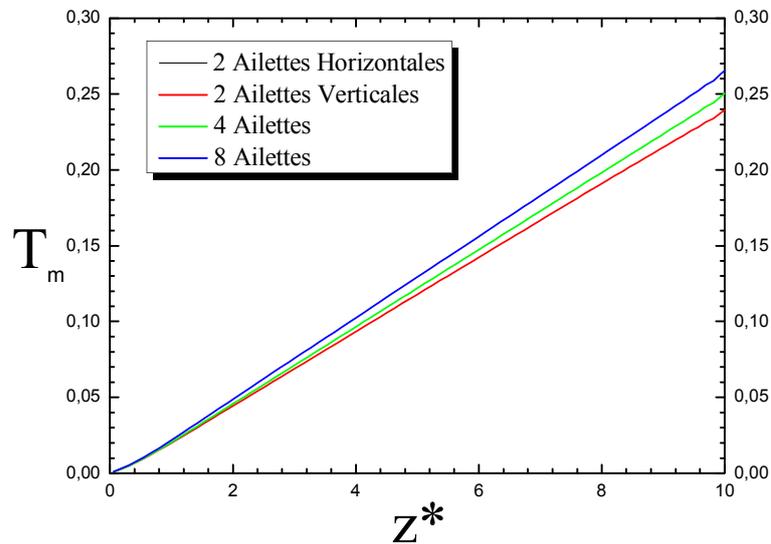


Figure 4.51 Evolution de la température moyenne du fluide en convection mixte $Re=100$

4.4.3.5 La variation du nombre de Nusselt axial

La variation du nombre de Nusselt est représentée dans la figure 4.52 - 4.53. Ce nombre il subit une chute brusque à l'entrer puis il se stabilise jusqu'à la sortie du cylindre même raisonnement pour tous les différents cas, deux ailettes horizontales, deux verticales, quatre et huit ailettes a différents nombres de Reynolds $Re = 50$ et $Re = 100$.

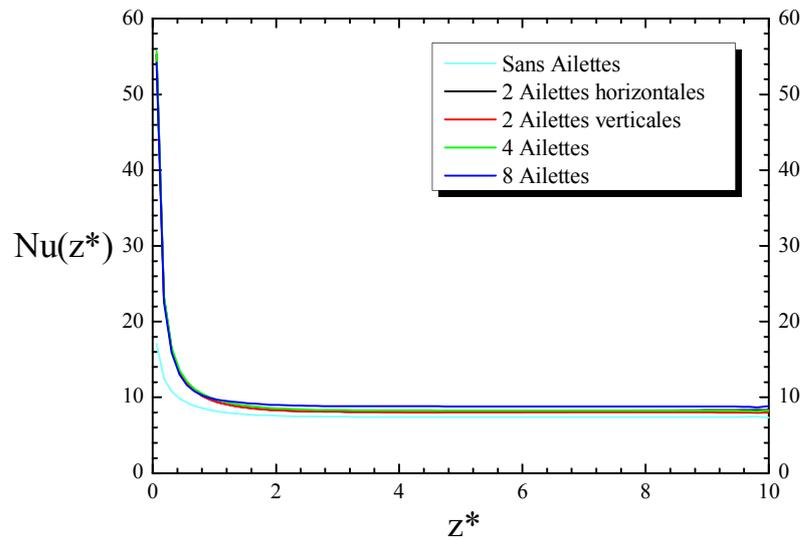


Figure 4.52 variation du nombre de Nusselt moyen convection mixte $Re = 50$

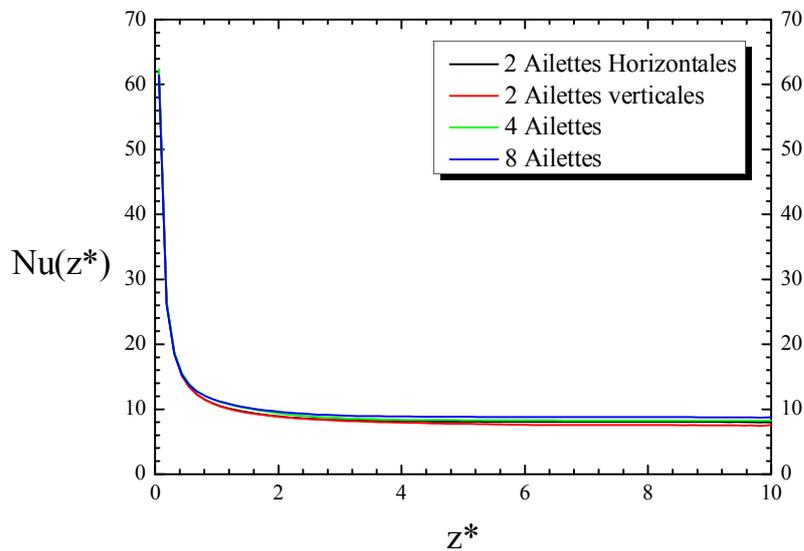


Figure 4.53 variation du nombre de Nusselt moyen convection mixte $Re = 100$

CHAPITRE 5

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à étudier numériquement un écoulement laminaire d'un fluide incompressible et Newtonien (air) dans un espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques d'épaisseurs finies. La paroi intérieure du cylindre intérieur est soumise à un flux de chaleur surfacique constant. La paroi extérieure du cylindre extérieur est adiabatique alors que la paroi intérieure est tantôt non ailetée et tantôt munie d'ailettes longitudinales de même nature que la paroi du conduit. Le conduit est constitué d'un alliage performant : l'Inconel.

A l'entrée de ce conduit, se présente un écoulement d'air à vitesse et température constante. Les propriétés thermophysiques de l'air sont considérées constantes sauf la densité qui exprimée comme une fonction dépendante de la température. Ce problème physique sera modélisé par les équations adimensionnelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans un système de coordonnées cylindriques et de leurs conditions aux limites spatiotemporelles.

L'approximation de Boussinesq sera adoptée dans les équations de quantité de mouvement. Ces équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre deux seront résolues numériquement par l'utilisation de la méthode des volumes finis. Différents maillages ont été utilisés pour la résolution numérique de ces équations : 43x45x83 nœuds suivant les directions radiale, angulaire et axiale successivement pour le conduit non aileté tandis que pour le conduit aileté les maillages utilisés sont 43x69x83 et 43x81x83. La discrétisation des termes des équations modélisantes est d'une précision du second ordre avec le schéma d'Adams-Bashfort pour les termes convectifs et le schéma d'Euler pour les termes diffusifs et le terme de source. Les pas de temps de calcul utilisés varient entre 10^{-3} et 5.10^{-4} .

La convergence est atteinte lorsqu'il y a une invariance temporelle des variables dépendantes dans tout le domaine de calcul ainsi que lorsque les bilans massiques et thermiques sont satisfaits. L'adimensionalisation des équations modélisantes a fait apparaître les paramètres de contrôle suivants : le rapport d'aspect géométrique, A , le nombre de Reynolds, Re , le nombre de Prandtl, Pr et le nombre de Grashof, Gr . Dans ce problème le rapport d'aspect et le nombre de Prandtl sont fixés à 10 et à 0.7 respectivement.

Les résultats de ce travail concernent les champs dynamiques et thermiques dans le conduit ainsi que le transfert thermique paroi-fluide quantifié par le nombre de Nusselt moyen circonférentiel local axial. Ces résultats ont été produits pour le conduit annulaire non ailetté et pour le conduit annulaire muni d'ailettes. Pour chaque cas, les modes de convection forcée qui sont des cas de référence, ainsi que les cas de convection mixte obtenue pour un nombre de Grashof ($Gr = 2500$) et différents nombres de Reynolds $Re=50$ et 100 , ont été explorés. Plusieurs configurations d'ailettes ont été traitées : deux ailettes horizontales diamétralement opposées, deux ailettes verticales diamétralement opposées, quatre et huit ailettes diamétralement opposées.

Les résultats se rapportant au conduit non ailetté montrent qu'au-delà d'une courte zone proche de l'entrée le champ dynamique est formé par des isovitesse circulaires dont la vitesse maximale est au centre de l'espace annulaire selon un profil parabolique qui dénote un régime développé de la convection forcée. Les isothermes dans ce cas sont des cercles concentriques suivant une stratification radiale qui diminue du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur adiabatique. Cette distribution est caractéristique d'un transfert de chaleur par convection forcée.

L'augmentation du nombre de Reynolds fait diminuer la température du fluide et donne au nombre de Nusselt un comportement asymptotique sur la quasi-totalité du conduit. En mode de convection mixte la vitesse axiale augmente par rapport à la convection forcée ainsi que la température qui subit une légère augmentation. Ceci est expliqué par le fait que c'est le cylindre intérieur qui chauffe le fluide.

L'adjonction d'ailettes internes entre les deux cylindres modifie complètement la structure de l'écoulement fluide. Ce dernier subit la présence d'ailettes par la formation de cellules contrarotatives symétriques par rapport à un diamètre vertical et un diamètre

horizontal (cas de convection forcée). L'introduction d'ailettes entraîne une augmentation de la vitesse axiale et celle de la température moyenne avec l'augmentation du nombre d'ailettes pour un même nombre de Reynolds. Mais pour une même configuration d'ailette, la vitesse axiale ainsi que la température du champ thermique diminuent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Quant au nombre de Nusselt, ce dernier n'a pas de variation remarquable pour $Re = 50$ mais par contre l'influence du nombre d'ailettes sur le nombre de Nusselt à $Re = 100$ se traduit par une diminution sensible.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **C. Prakash et P. Renzoni**, Effect of buoyancy on laminar fully developed flow in vertical annular passage with radial internal fins, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 28. No. 5. pp. 995-1003, (1985)
- [2] **I. M. Rustum et H. M. Soliman**, Numerical analysis of laminar mixed convection in horizontal internally finned tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 33. No. 7, pp. 1485-1496, (1990)
- [3] **Y. Zhang et A. Faghri**, Heat transfer enhancement in latent heat thermal energy storage system by using the internally finned tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 39. No. 15, pp. 3165-3173, (1996)
- [4] **D. P. Edwar et M. K. Jensen**, Pressure drop and heat transfer prediction of turbulent flow in longitudinally finned tubes, In *Advanced in Enhanced Heat Transfer* HTD-Vol. 287, pp. 17-23. ASME, Chicago (1994)
- [5] **R. Kumar**, Three-dimensional natural convection flow in a vertical annulus with longitudinal fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 40, No. 14, pp.3323-3334, (1997)
- [6] **G. Laplante et M. Bernier**, Convection mixte défavorable et conjuguée dans un tube vertical, *J. Heat Mass Transfer*, vol. 40, No, 15, pp. 3527-3536, (1997)
- [7] **M. E. Farinas, A. Garon et S-L Katia**, Study of heat transfer in horizontal cylinder with fins, CP 6079, Montréal H3C 3A7, Canada, (1997)
- [8] **M. Hug et M. A. Aziz-ul Hug**, Experimental measurements of heat transfer in internally finned tube, *Int. Comm. Heat Transfer* Vol. 25, No. 5, pp. 619-630, (1998).
- [9] **M. I. Farinas, A. Garon, K. St-louis et M. Lacroix**, Etude du transfert de chaleur dans un espace annulaire rhombique avec et sans ailettes, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 42, 3905-3917, (1999)
- [10] **M. Rahnema et M. Farhadi**, Effect of radial fins on two-dimensional turbulent natural convection in horizontal annulus, *International journal of Thermal Sciences* 43 255-264, (2004)
- [11] **K. Choukairy et R. Bennacer**, Modification des transferts de chaleur dans une configuration cylindrique par l'utilisation d'un obstacle, 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, (2003)

- [12] **J. S. Lee, X. Xu et R. H. Pletcher**, Large eddy simulation of heated vertical annular pipe flow in fully developed turbulent mixed convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 437– 446, (2004)
- [13] **B. Yu et W. Q. Tao**, Pressure drop and transfer characteristics of turbulent flow in annular tubes with internal wave-like longitudinal fins, *Heat and Transfer* 40, 643 – 651 (2004)
- [14] **I. Dagtekin, H. F. Oztop et A. Z. Sahin**, An analysis of entropy generation through a circular duct with different shaped longitudinal fins laminar flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, 171 – 181, (2005)
- [15] **E. Bilgen**, Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, 3493–3505, (2005)
- [16] **A. Al-Sarkhi et E. Abu-Nada**, Characteristics of forced convection heat transfer in vertical internally finned tube, *International Communication in Heat and Mass Transfer* 32, 557-564, (2005)
- [17] **N. Yucel et N. Dinler**, Numerical study of laminar and turbulent flow through a pipe with fins attached, *Numerical Heat Transfer, Part a*, 49: 195-214, (2006)
- [18] **A. Cheddadi, M.T. Ouazzani et Y. Taher**, optimisation du transfert de chaleur géométrie annulaire cylindrique par placement de bloc chauffante symétriques, *Modélisation et Informatique Scientifique*, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, B.P. 765,Rabat (Maroc), (2007)
- [19] **S. Kiwan et Zeitoun**, Natural convection in a Horizontal Cylindrical Annulus Using Porous fins, P.O. Box 800, Riyadh, 11425, SA.(2006)
- [20] **D. Alshahrani et O. Zeitoun**, Natural convection in horizontal annulus with fins attached to inner cylinder, submitted to *Int. J. Heat and Technology*, (2005)
- [21] **A. K. Dhima, R. P. Chhabra et V. Eswaran**, Steady Mixed Convection across a finned square cylinder, *international Communication in heat and Mass transfer* 35, 47-55, (2008)
- [22] **Y. Y. Tsui et H-W. Wang**, Side-wall effect on the bifurcation of the flow through a sudden expansion, *International Journal for numerical methods in fluids*: 56:167-184, (2008)
- [23] **A. P. Watkinson, D. L. Millet, et G. R. Kubanek**, Heat Transfer and Pressure Drop of Internally Finned Tubes in Laminar Oil Flow, *ASME Paper No. 75-HT-41*. (1975)
- [24] **H. M. Soliman et A. Feingold**, Analysis of Fully Developed Laminar Flow in Longitudinal Internally Finned Tubes, *Chem. Eng. J.*, 142, pp. 119–128. (1977)

- [25] **S. J. Kim et J. M. Hyun**, A Porous Medium Approach for the Thermal Analysis of Heat Transfer Devices, *Transport Phenomena in Porous Media III*, D. B. Ingham and I. Pop, eds., Elsevier, New York, pp. 120–146. (2005)
- [26] **S.C. Haldar, G.S. Kochhar et K. Manohar**, Numerical Study of Laminar Free Convection About a Horizontal Cylinder with Longitudinal Fins of Finite Thickness, Published in *International Journal of Thermal Sciences* (2007)
- [27] **N. A. Mir, K. S. Syed et M. Iqbal**, Numerical solution of fluid flow and heat transfer in the finned double pipe, *Journal of Research (Science)* Vol. 15, No.3, , pp. 253-262 (2004)
- [28] **E. Duplain et B. R. Baliga**, Computational optimization of the thermal performance of internally finned ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52 3929–3942, (2009)
- [29] **T. Boufendi et M. Afrid**, Three-dimensional Conjugate Conduction-Mixed Convection With Variable Fluid Properties in a Heated Horizontal Pipe, *Rev. Energies Renouvelables*, 8, pp.1-18, (2005)
- [30] **T. Boufendi**, Contribution à l'étude théorique des transferts thermiques dans un conduit cylindrique horizontal soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Mentouri Constantine (2005)
- [31] **S. V. Patankar**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw Hill, New-York, (1980)

Abstract

This research is a 3D simulation of heat transfer of forced and mixed convection modes in an annular duct between two concentric cylinders through which *circulate* a Newtonian and incompressible fluid (air). The inner wall of the inner cylinder is subject to a constant heat flux. The outer wall of the outer cylinder is adiabatic and the inner wall is sometimes equipped with longitudinal fins and the sometimes not. The fins are of the same physical nature as the wall. The pipe is made of a performing alloy: Inconel. At the entrance of the duct, there is a constant velocity and temperature airflow. The thermophysical properties of air are considered constant except the density which is expressed as a function of temperature. This physical problem is modeled by the dimensionless equations of mass conservation, momentum and energy conservation in cylindrical coordinates system and their spatiotemporal boundary conditions.

The Boussinesq approximation is adopted. These partial differential equations of second order are solved numerically by using the finite volume method. Different grids were used for the numerical solution of these equations: $43 \times 45 \times 83$, $43 \times 69 \times 83$ and $43 \times 81 \times 83$ nodes along the radial, angular and axial directions respectively. The discretization schemes are a second order accuracy. The dimensionless of the model equations have revealed the following control parameters: the geometric ratio A , the Reynolds number Re , the Prandtl number Pr and the Grashof number Gr . In this problem the aspect ratio and the Prandtl number are fixed at 10 and 0.7 respectively.

The results of this work are the dynamic and thermal fields in the duct and the wall-fluid heat transfer, measured by the local and medium Nusselt number. These results have been produced for the non-finned annular cylinder and the fitted one with fins. For each case, the forced convection modes that are references cases and cases of mixed convection obtained for a Grashof number ($Gr = 2500$) and different Reynolds numbers $Re = 50$ and 100 , have been explored. Several configurations of fins were treated: two horizontal and two vertical fins, four and eight fins of which are diametrically opposed.

Key words: *Forced convection, Mixed convection, Laminar flow, Annulus, Concentric cylinders, Fins, 3D numerical simulation.*

ملخص :

هذا العمل عبارة عن دراسة عددية ثلاثية الأبعاد هدفها محاكاة انتقال الحرارة بالنمطين القسري والمختلط داخل أسطوانة حلقيّة يحدها أسطوانتان متمركزتان أين ينتقل مائع غير ضغوط نيوتوني (الهواء). السطح الداخلي للأسطوانة الداخلية معرضة لتسخين سطحي ثابت، أما السطح الخارجي للأسطوانة الخارجية فهو كظوم، في حين أن السطح الداخلي لهذه الأخيرة يكون مرة دون زعانف و تارة أخرى مزودا بزعانف. يجدر الذكر أن مادة الزعانف من نفس طبيعة مادة الأسطوانة، ألا وهي "لانكونال" (خليط مكون من : كروم، نيكل،).

يتدفق الهواء بسرعة ودرجة حرارة ثابتتين عند مدخل المجرى، كما أن الخصائص الفيزيائية والحرارية للمائع ثابتة ما عدا الكثافة التي تتعلق بدرجة الحرارة. كتب نموذج هذا التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية: معادلة الاستمرارية وكميات الحركة والطاقة، صيغت في جملة الإحداثيات الأسطوانية مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدية.

لحل هذه الجملة الغير خطية استعملنا طريقة الحجم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء والزمن. واستخدمت شبكات مختلفة من أجل حل هذه المعادلات العددية: $43 \times 45 \times 83$ ، $43 \times 69 \times 83$ ، $43 \times 81 \times 83$ من العقد وفقا للتوجيه الشعاعي، الزاوي والمحوري. كما أن التقطيع (التقسيم) كان بتقريب من حيث الدقة من الدرجة الثانية.

مجموعة من الأعداد اللابعدية أستعملت في هذه الدراسة : عدد رينولدز المتغير الوحيد وعدد براندل 0.7 (الهواء)، عدد كراشوف الثابت.

النتائج المتحصل عليها من هذه الدراسة والمتعلقة بالسرعة ودرجة الحرارة داخل الأسطوانة وكذلك إنتقال الحرارة (سطح- مائع) محددة عدد نيويسالت المتوسط والمحلي المحوري : هذه النتائج بالنسبة للحالتين أسطوانة بدون زعانف و بوجود زعانف بالنسبة لكل حالة إنتقال الحرارة القسري الذي يمثل الحالة المرجعية، وكذلك حالة إنتقال الحرارة المختلط بالنسبة لعدد كراشوف ($Gr=2500$) و أعداد مختلفة لعدد رينولدز 50، 100. عدة أشكال تم دراستها في هذا العمل حالة أسطوانة بزعتين أفقيتين، وحالة زعتين عموديتين، وأربعة زعانف، 8 زعانف وذلك لأشكال مختلفة لمختلف الحالات المدروسة: حالة زعتين أفقيتين، زعتين عموديتين، 4 زعانف و 8 زعانف

الكلمات المفتاحية : الحمل القسري ، الحمل المختلط ، الإنسياب الرقائقي ، أسطوانتين متمركزتين ، الفضاء الحلقي ، الزعانف ، التحليل العددي ثلاثي الأبعاد.

Résumé

Ce travail de recherche est une simulation numérique en 3D des transferts thermiques en mode de convection forcée et mixte dans un conduit annulaire compris entre deux cylindres concentriques dans lequel circule un fluide incompressible et Newtonien (air). La paroi intérieure du cylindre intérieur est soumise à un flux de chaleur surfacique constant. La paroi extérieure du cylindre extérieur est adiabatique alors que la paroi intérieure est tantôt non ailettée et tantôt munie d'ailettes longitudinales de même nature que la paroi du conduit. Le conduit est constitué d'un alliage performant : l'Inconel. A l'entrée de ce conduit, se présente un écoulement d'air à vitesse et température constante. Les propriétés thermophysiques de l'air sont considérées constantes sauf la densité qui est exprimée comme une fonction dépendante de la température.

Ce problème physique sera modélisé par les équations adimensionnelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans un système de coordonnées cylindriques et leurs conditions aux limites spatiotemporelles. L'approximation de Boussinesq sera adoptée. Ces équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre deux seront résolues numériquement par l'utilisation de la méthode des volumes finis. Différents maillages ont été utilisés pour la résolution numérique de ces équations : $43 \times 45 \times 83$, $43 \times 69 \times 83$ et $43 \times 81 \times 83$ nœuds suivant les directions radiale, angulaire et axiale. La discrétisation des termes est d'une précision du second ordre. L'adimensionalisation des équations modélisantes a fait apparaître les paramètres de contrôle suivants : le rapport d'aspect géométrique A , le nombre de Reynolds Re , le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Grashof Gr . Dans ce problème le rapport d'aspect et le nombre de Prandtl sont fixés à 10 et à 0.7 respectivement.

Les résultats de ce travail concernent les champs dynamiques et thermiques dans le conduit ainsi que le transfert thermique paroi-fluide quantifié par le nombre de Nusselt moyen circumférentiel local axial. Ces résultats ont été produits pour le conduit annulaire non ailetté et pour le conduit annulaire muni d'ailettes. Pour chaque cas, les modes de convection forcée qui sont des cas de référence, ainsi que les cas de convection mixte obtenue pour un nombre de Grashof ($Gr=2500$) et différents nombres de Reynolds $Re=50$ et 100 , ont été explorés. Plusieurs configurations d'ailettes ont été traitées : deux ailettes horizontales, deux ailettes verticales, quatre et huit ailettes qui sont toutes diamétralement opposées.

Mots Clés : *Convection forcée, Convection mixte, Ecoulement laminaire, Espace annulaire, Cylindres concentriques, Ailettes, Simulation numérique 3D.*