

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre .....

N° de série .....

MEMOIRE  
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER  
EN PHYSIQUE ENERGETIQUE  
OPTION : PHOTOTHERMIQUE

THEME

**ECOULEMENT DE COUETTE SPHERIQUE CONTRAROTATIF  
EFFET DU NOMBRE DE REYNOLDS**

Par : M<sup>elle</sup> BENCHERIOUA FATIMA  
Soutenu le : / / 2008

Devant le jury :

Président :	L. BAH	Prof. Université Mentouri – Constantine
Rapporteur :	M. AFRID	Prof. Université Mentouri – Constantine
Examineurs :	T. BOUFENDI	M.C. Université Mentouri – Constantine
	S. BENISSAAD	M.C. Université Mentouri – Constantine

# Dédicace

*Je dédie ce noble travail,*

*A mes parents que « Dieu » les garde et les protège pour toute leur tendresse, leur affection, et leur éducation qu'ils ont su me donner pour tout leur sacrifice consentis envers moi.*

*A mes adorables frères : Yakoube, Abdeldjabar.*

*A mon mari : Ahmed*

*A ma chère amie : Asma*

*A toute la promo.*

## Remerciements

En premier lieu, je remercie « Dieu » le tout puissant, de m' avoir donné tous les efforts voulus afin de terminer ce travail.

Mes remerciements s'adresse à

- Mr **M.Afrid** professeur à l'université Mentouri Constantine qui ma proposé ce sujet de recherche et qui ma dirigé pour sa réalisation

Je lui présente aussi mes sincères gratitudees pour ces conseils et ces orientations.

-Je remercie également Mr **L.Bahi** professeur à l'université Mentouri Constantine ,pour avoir accepter de présider le jury.

-Je remercie aussi Mr **T.Boufendi** maitre de conférence à université Mentouri Constantine qu'il m'a aidé dans mon travail ,et qu'il m a honoré en acceptant d'examiner mon travail.

-Je remercie vivement Mr **S.Benisaad** maître de conférence à université Mentouri Constantine pour avoir accepter d'examiner mon travail

## Sommaire

	Page
<b>Sommaire</b> .....	<b>1</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>3</b>
<b>Nomenclature</b> .....	<b>5</b>
<b>1-Chapitre 1 : Introduction</b> .....	<b>7</b>
<b>2-Chapitre 2 : Modélisation mathématique</b> .....	<b>10</b>
<b>2.1</b> Equation de la continuité.....	<b>11</b>
<b>2.2</b> Equation de la quantité de mouvement.....	<b>11</b>
<b>2.2.1</b> Equation de la quantité de mouvement radiale.....	<b>11</b>
<b>2.2.2</b> Equation de la quantité de mouvement polaire.....	<b>11</b>
<b>2.2.3</b> Equation de la quantité de mouvement azimutale.....	<b>12</b>
<b>2.3</b> Les conditions aux limites.....	<b>12</b>
<b>2.4</b> Dynamique de la vorticité .....	<b>13</b>
<b>3-Chapitre 3 : Résolution numérique</b> .....	<b>16</b>
<b>3.1</b> Méthode des volumes finis.....	<b>16</b>
<b>3.2</b> Discrétisation du domaine physique.....	<b>16</b>
<b>3.2.1</b> Maillage typique.....	<b>17</b>
<b>3.2.2</b> Maillage décalé.....	<b>21</b>
<b>3.3</b> Discrétisation des équations de conservation .....	<b>21</b>
<b>3.3.1</b> Discrétisation temporelle.....	<b>21</b>
<b>3.3.2</b> Discrétisation spatiale.....	<b>23</b>
<b>3.4</b> Discrétisation des équations modélisantes.....	<b>25</b>
<b>3.4.1</b> Discrétisation de l'équation de continuité.....	<b>26</b>
<b>3.4.2</b> Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement radiale.....	<b>26</b>
<b>3.4.3</b> Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement polaire.....	<b>34</b>
<b>3.4.4</b> Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement azimutale.....	<b>42</b>
<b>3.4.5</b> Discrétisation des conditions aux limites.....	<b>50</b>
<b>3.5</b> Equation de discrétisation de la pression.....	<b>52</b>
<b>3.6</b> Résolution des équations discrétisées.....	<b>59</b>
<b>3.7</b> La méthode de balayage.....	<b>59</b>
<b>3.8</b> Algorithme de Thomas.....	<b>60</b>

## Sommaire

---

---

3.9	Algorithme tri diagonal cyclique.....	61
3.10	Algorithme SIMPLER.....	64
3.11	Validation.....	65
<b>4-</b>	<b>Chapitre4 :Résultats.....</b>	<b>68</b>
4.1	Distribution méridionale de la vitesse azimutale.....	70
4.2	Evolution de la vitesse angulaire.....	73
4.3	Ecoulement secondaire.....	77
4.4	Distribution méridionale de la pression.....	87
4.5	Aspect énergétique de l écoulement.....	92
	<b>Conclusion.....</b>	<b>97</b>
	<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>98</b>
	<b>Résumé.....</b>	<b>99</b>
	<b>Abstract.....</b>	<b>101</b>
	<b>Résumé en arabe.....</b>	<b>102</b>

## 1. Introduction

Les écoulements sphériques présentent un intérêt certain de part leur existence dans diverses applications d'engineering tels les fluides gyroscopes et les centrifugeuses ainsi que dans les domaines de la géophysique et de l'astrophysique avec les mouvements océaniques et atmosphériques des planètes. En faisant intervenir les forces centrifuges, les forces de pression et les forces visqueuses, ces écoulements spécifiques deviennent tridimensionnels et tridirectionnels. Ils associent une rotation différentielle autour d'un axe (écoulement primaire) et une circulation dans le plan méridional (écoulement secondaire), généré suite au déséquilibre de ces forces. Plusieurs configurations sont possibles pour la rotation des sphères dont les plus fréquentes sont le cas rotor-stator où seule une des deux sphères est en mouvement, la corotation où les deux sphères tournent dans le même sens, et enfin la contrarotation où les deux sphères tournent dans des sens opposés. En dépit de la multitude des travaux effectués dans ce domaine, il reste que, comme le précisent **M. Junk et C. Egbers** [1], peu d'investigations ont concerné le cas des deux sphères tournant indépendamment.

Dans un ordre chronologique, les études théoriques, faites par **I. Proudman** [2] et **K. Stewartson** [3] se basent sur la méthode des perturbations singulières qui consiste à établir un raccordement des solutions interne de couche limite et externe déduite de la théorie potentielle, appliquée aux nombres de Reynolds très élevés ( $Re \rightarrow \infty$ ). Pour une solution au premier ordre, l'écoulement est divisé en deux zones, par un cylindre fictif situé entre les deux sphères solides dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation et tangent à la sphère intérieure. Dans la zone extérieure au cylindre, le fluide est en rotation en bloc à la vitesse de la sphère extérieure tandis que dans la zone intérieure l'écoulement circule dans un plan méridional selon des couches dites de **Stewartson** quasi parallèles à l'axe de rotation entre les couches d'**Ekman** situées sur les deux sphères. Le sens de cette circulation est fixé par le signe du nombre de Rossby.

Ensuite, analytiquement, **B. Munson** et **D. Joseph** [4] résolvent les équations de Navier-Stokes écrites en termes de fonction de courant et de vorticité en utilisant la solution de perturbation à ordre élevé du nombre de Reynolds ( $Re^7$ ) applicable aux faibles nombres de  $Re$ . Ils trouvent que pour un nombre de Rossby fixé, égal à -1, l'écoulement est influencé par

le nombre de Reynolds. A  $Re=100$  l'écoulement est dominé par le mouvement de la sphère extérieure et est constitué d'une cellule orientée dans le sens horaire. En augmentant le nombre de Reynolds à 500 l'influence de la sphère intérieure devient apparente par la création d'une cellule, de petite dimension, évoluant dans le sens antihoraire et située dans la région polaire près de la sphère intérieure. La tendance vers la formation du cylindre fictif est distinguée avec la représentation des contours de la vitesse angulaire. Par contre, lorsque le nombre de Rossby est fixé à  $-0.5$ , les auteurs trouvent qu'aucune des deux sphères ne domine le mouvement lorsque le nombre de Reynolds augmente de 100 à 500. L'écoulement pour les nombres de Reynolds considérés est formé de deux cellules contrarotatives occupant tout l'espace annulaire sphérique. La tendance vers la formation du cylindre fictif est aussi apparente lorsque le nombre de Reynolds augmente. Les auteurs présentent aussi les torques en fonction du nombre de Reynolds.

Dans une deuxième partie de leurs travaux, les auteurs **B. Munson** et **D. Joseph** [5] étudient la stabilité hydrodynamique de l'écoulement. En appliquant la théorie de l'énergie de la stabilité hydrodynamique, les auteurs calculent le nombre de Reynolds critique pour différents entrefers et différentes vitesses angulaires. Quant à **J. Bonnet** et **T. de Roquefort** [6], ils réservent une partie de leur étude numérique aux très faibles nombres de  $Ro$ . Pour des valeurs de  $RoRe^{1/3} \leq 10^{-2}$  avec  $Re=3000$ , ils obtiennent une structure de l'écoulement proche de celle prévue par la théorie linéarisée de Proudman. Cependant pour  $Re=1000$  ils observent au voisinage de l'équateur une zone assez étendue en rotation à la vitesse de la sphère extérieure.

L'étude expérimentale de **M. Wimmer** [7] se base sur des observations de l'écoulement et établit des diagrammes de stabilité pour deux valeurs de l'entrefers  $\beta=0.00256$  (faible) et  $0.11$  (large). La contra rotation peut générer deux cellules contrarotatives de part et d'autre d'un rayon nodal où la vitesse circonférentielle est nulle et dont la position dépend des valeurs des vitesses angulaires des deux sphères.

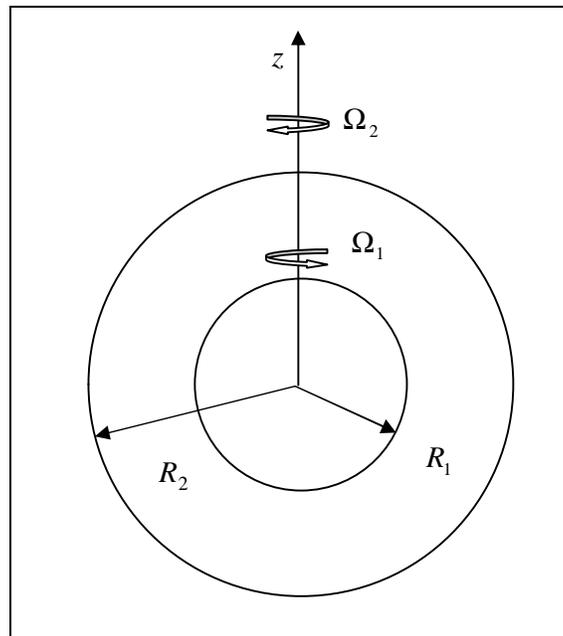
En étudiant les phénomènes liés aux mouvements atmosphériques des planètes, **I. Yavorskaya** et **Y. Belyaev** [8] présentent une courbe de stabilité et d'existence des différents régimes d'écoulement pour une épaisseur égale à  $0.11$ . En identifiant les types d'instabilités centrifuges ils mettent en évidence les phénomènes d'hystérésis et de non-unicité des régimes.

Récemment **B. Pal'tsev, A. Stavtsev** et **I. Chechel [9]** présentent des solutions numériques pour de larges intervalles de l'entrefer, entre 0.1 et 100. Une classification des régimes de rotation est proposée en fonction de la structure du niveau de la fonction de courant ainsi que des trajectoires de particules fluides.

Notre étude concerne l'écoulement laminaire et incompressible d'un fluide visqueux compris entre deux sphères concentriques en contra rotation avec un entrefer relativement large. Dans le premier chapitre on introduit l'écoulement de Couette sphérique et en présente une synthèse bibliographique des différents travaux de recherche tant théoriques analytiques et numériques, qu'effectués par les auteures. Cette recherche permettra une meilleure compréhension des aspects et des phénomènes hydrodynamiques qui interviennent dans les écoulements rotatifs sphériques. En outre, cette synthèse donnera l'occasion de pouvoir procéder à une validation de code numérique utilisée. Le deuxième chapitre sera celui de la modélisation mathématique du problème. Les équations de conservation avec les conditions initiales et aux limites sous leur forme adimensionnelle seront explicitées. Le troisième chapitre servira à expliquer les détails de la résolution numérique et englobera aussi la discrétisation des équations modélisantes. Une validation de notre code par comparaison avec des travaux issus de la bibliographie, sera présentée. C'est dans le quatrième chapitre que seront exposés les résultats numériques obtenus pour les cas spécifiques qu'on a étudiés. Ces cas correspondant à  $\beta = 0.5$  et  $Ro = -0.5$  et  $100 \leq Re \leq 500$ . Une discussion des résultats ainsi que l'interprétation physique sont données. Enfin une conclusion clôture notre travail.

## 2. Modélisation mathématique

La géométrie du problème est illustrée dans la figure 1. Le rayon de la sphère intérieure est  $R_1$ , celui de la sphère extérieure est  $R_2$ . La vitesse angulaire de la sphère intérieure est  $\Omega_1$ , celle de la sphère extérieure est  $\Omega_2$ .



**Figure 2.1 : Schéma des sphères concentriques contrarotatives autour de l'axe z.**

Les équations modélisantes non dimensionnelles sont écrites dans les coordonnées sphériques, **R. L. Panton [10]**. La longueur caractéristique est le rayon de la sphère intérieure  $R_1$ , et la vitesse caractéristique est  $\Omega_1 R_1$ . La condition initiale (au temps  $t=0$ ) du premier nombre de Reynolds (100) est la suivante:

$$At = 0, U = V = W = 0 \quad (2.1)$$

Avec chaque augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement du nombre de Reynolds précédent est utilisé comme condition initiale. Cette initialisation minimise le temps de calcul.

Pour  $t > 0$ ,

### 2.1 Equation de continuité

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W) = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2 Equation de la quantité de mouvement

#### 2.2.1 - Equation de la quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (U V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (U W) - \frac{V^2}{r} - \frac{W^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 U}{\partial f^2} - \frac{2U}{r^2} - \frac{2}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) - \right. \\ & \left. \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

#### 2.2.2 Equation de la quantité de mouvement polaire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (V W) + \frac{U V}{r} - \frac{W^2 \cot q}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} - \frac{V}{r^2 \sin^2 q} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \right. \\ & \left. \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

---



---

**2.2.3 Equation de la quantité de mouvement azimutale**

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U W)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (V W \sin q)}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (W W) + \frac{U W}{r} + \frac{W V \cot q}{r} = \\
& - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial f} + \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\sin q \partial W}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 W}{\partial f^2} + \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} + \right. \\
& \left. \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} - \frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

**2.3 Les conditions aux limites**

$$\text{A } r=1, U = V = 0, W = \sin q \tag{2.6}$$

$$\text{A } r=1.5, U = V = 0, W = -0.75 \sin q \tag{2.7}$$

$$\text{A } q = 0, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \tag{2.8}$$

$$\text{A } q = p, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \tag{2.9}$$

Notons que dans les équations (2.8) et (2.9) la condition  $\frac{\partial W}{\partial q} = 0$  peut être remplacée par

$$W = 0, \text{ parce que nous avons trouvé qu'aux pôles } (q = 0 \text{ et } q = p) W = 0 \text{ et } \frac{\partial W}{\partial q} = 0.$$

Suivant la direction azimutale  $f$ , on la condition de périodicité lorsque  $f$  est augmentée de  $f = 0$  à  $f = 2p$ .

Les paramètres de contrôle de l'écoulement sont le rapport d'aspect  $b = (R_2 - R_1) / R_1$ , arbitrairement fixé égal à 0.5; le nombre de Rossby  $Ro = \Omega_2 / \Omega_1$ , arbitrairement fixé égal à -0.5 et le nombre de Reynolds  $Re_1 = R_1^2 \Omega_1 / \nu$ , variable entre 100 et 500.

### 2.4 Dynamique de la vortacité

La vortacité est une propriété cinématique locale de l'écoulement qui mesure la rotation locale des particules fluides dans l'écoulement considéré. Mathématiquement, elle est définie par le rotationnel du vecteur vitesse.

$$\mathbf{\dot{w}} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (2.10)$$

Le vecteur de vortacité  $\mathbf{\dot{w}}$  a trois composantes: une composante radiale  $w_r$ , une composante polaire  $w_q$  et une composante azimutale  $w_f$ :

$$\mathbf{\dot{w}} = w_r \mathbf{e}_r + w_q \mathbf{e}_q + w_f \mathbf{e}_f \quad (2.11)$$

Les composantes s'écrivent dans les coordonnées sphériques comme suit:

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \\ w_q &= \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rW)}{\partial r} \\ w_f &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La distribution de la vortacité nous fourni un autre moyen d'analyse de l'écoulement et d'explication de certains aspects physique de la dynamique des fluide. Dans notre présente étude, la distribution de la composante azimutale de la vortacité nous aide à expliquer l'apparition du phénomène de pincement de l'écoulement secondaire dans le plan méridien.

L'équation de transfert de la vortacité est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de conservation de la quantité de mouvement de l'écoulement. Cette équation vectorielle est donc déduite des équations de Navier-Stokes. Ci-dessous on présente, la forme vectorielle, de l'équation de transport de la vortacité.

$$\frac{\partial \mathbf{\dot{w}}}{\partial t} + (\mathbf{V} \bullet \nabla \mathbf{\dot{w}}) = (\mathbf{\dot{w}} \bullet \nabla \mathbf{V}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{\dot{w}} \quad (2.13)$$

Le premier terme de l'équation (2.13) est le terme de variation temporelle locale de la vortacité. Le deuxième terme représente l'ensemble des termes convectifs. Le premier terme à droite représente les termes liés aux taux de déformation des lignes de vortacité. Le dernier terme à droite représente l'ensemble des termes de la diffusion de la vortacité par l'effet visqueux.

Considérons l'équation de transfert de la composante azimutale de la vorticité, exprimée dans les coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U w_f)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (\sin q V w_f)}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W w_f)}{\partial f} + \frac{W w_r}{r} + \frac{W \cot q w_q}{r} = \\ & w_r \frac{\partial W}{\partial r} + w_q \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + w_f \left[ \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} + \frac{U}{r} + \frac{V \cot q}{r} \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial (\sin q w_f)}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 w_f}{\partial f^2} + \right. \\ & \left. \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial w_r}{\partial f} + \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial w_q}{\partial f} - \frac{w_f}{r^2 \sin^2 q} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dans notre étude, il est trouvé que l'écoulement est permanent et axisymétrique, l'équation de la composante azimutale de l'équation de la vorticité se réduit à:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U w_f)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (\sin q V w_f)}{\partial q} + \frac{W w_r}{r} + \frac{W w_q \cot(q)}{r} = \\ & w_r \frac{\partial W}{\partial r} + w_q \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + w_f \left[ \frac{U}{r} + \frac{V \cot q}{r} \right] + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial (\sin q w_f)}{\partial q} \right) - \frac{w_f}{r^2 \sin^2 q} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} \\ w_q &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (rW)}{\partial r} \\ w_f &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U w_f)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (\sin q V w_f)}{\partial q} + \frac{W w_r}{r} + \frac{W w_q \cot(q)}{r}$  est la somme des termes convectifs.

---

$\frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial (\sin q w_f)}{\partial q} \right) - \frac{w_f}{r^2 \sin^2 q} \right]$  est la somme des termes de

diffusion visqueuse de la vorticité azimutale.

$w_r \frac{\partial W}{\partial r} + w_q \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + w_f \left[ \frac{U}{r} + \frac{V \cot q}{r} \right]$  est la somme des termes d'extension et d'étirement des

lignes de vorticité (*stretching and straining of vortex lines*). Ces termes représentent des sources (positives ou négatives) de la vorticité. Le premier et le deuxième terme, représentent la production (ou la destruction) de la vorticité par les déviations des lignes de vorticité par les déformations angulaires correspondantes. Quant au troisième terme, il représente la production (ou la destruction) de la vorticité par l'extension (*stretching*) des lignes de vorticité par le taux d'extension.

Dans notre étude, la résolution numérique de l'équation de transport de la vorticité azimutale (2.15) n'est pas nécessaire. Une fois le champ de vitesse obtenu, on calcule la vorticité azimutale directement de l'équation (2.16).

La vorticité azimutale est liée à la distribution de la fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien. On définit la fonction de courant  $y$  de l'écoulement secondaire comme suit:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial y}{\partial q} \\ V &= \frac{-1}{r \sin q} \frac{\partial y}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.17)$$

On peut montrer que la vorticité azimutale est liée à l'équation de transfert de la fonction de courant :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{y}{r \sin q} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{y}{r} \right) \right) + w_f = 0 \quad (2.18)$$

La vorticité azimutale est une source de l'équation de transfert de la fonction de courant. A un point donné de l'écoulement, l'augmentation de la vorticité azimutale augmente la valeur relative de la fonction de courant.

### 3. Résolution Numérique

Dans ce chapitre on expose les différentes étapes suivies pour la résolution numérique des équations différentielles modélisantes.

Ces équations modélisantes de l'écoulement d'une couette sphérique (équation de continuité et équations de la quantité de mouvement et leurs conditions initiales et aux limites) ne possèdent pas de solution analytique. On utilisera donc une méthode numérique pour leur résolution.

Parmi les différentes méthodes numériques qui existent on cite la méthode des volumes finis, la méthode des différences finis et la méthodes des éléments finis.

#### 3-1 Méthode des volumes finis :

Notre choix s'est porté sur la méthode des volumes finis. Ce choix est imposé par les deux critères suivants :

- La géométrie du problème
- La facilité de mise en œuvre

qui sont généralement les critères qui imposent le choix d'une méthode numérique.

Aussi l'un des avantages non négligeable de cette méthode est que les équations discrétisées obtenues expriment le principe de conservation de la variable dépendante dans chaque volume fini, ainsi que dans tout le domaine du calcul.

La méthode des volumes finis est bien décrite en détail dans le livre de **S. V. Patankar [11]**

Le principe de la méthode des volumes finis est de fractionner (discrétiser) le domaine physique en un nombre fini des volumes dits volume de contrôle, ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume. Pour cela on adoptera une formulation d'interpolation avec l'utilisation d'un schéma des différences centrés d'ordre deux. Le système des équations discrétisés sera résolu en utilisant des algorithmes de résolution.

#### 3.2 Discrétisation du domaine physique.

Le domaine physique sera discrétisé dans la direction radiale, polaire et azimutale. Donc notre domaine de calcul consistera en un nombre de volumes finis. Chaque volume fini entoure un nœud, et chaque volume fini est entouré dans les trois

---

directions par d'autres volumes finis, dits voisins. Le volume de contrôle est séparé de ces voisins par des faces, deux pour chaque direction. Sauf pour le cas des volumes finis qui se trouvent sur les limites du domaine de calcul, qui peuvent avoir moins de six faces. Les voisins directs de chaque volume fini se trouvent, soit dans la direction positive de l'axe des coordonnées soit dans la direction négative. Un volume fini typique est illustré sur la figure 3.1.

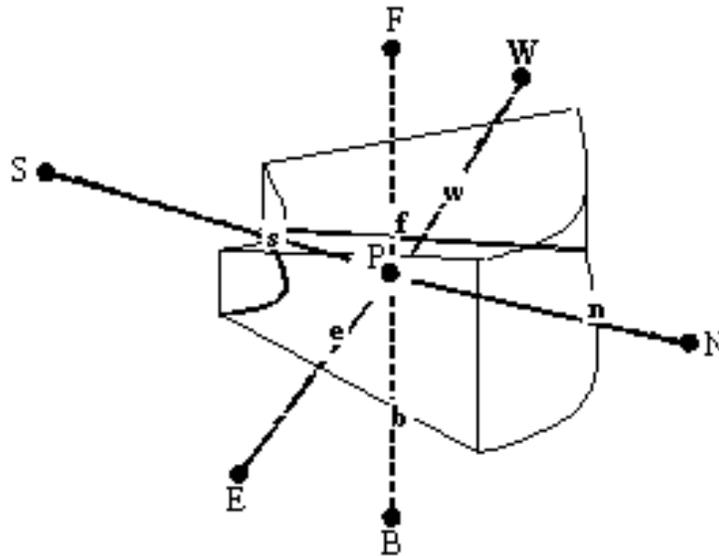


Figure 3.1: Volume fini typique.

### 3.2.1 Le maillage typique.

Le point de référence, qui se trouve au centre du volume fini (appelé aussi nœud) est noté  $P$ . Dans la direction radiale, le nœud  $P$  aura à sa droite (sens positif de la direction radiale) le nœud  $N$  et à sa gauche (sens négatif de la direction radiale) le nœud  $S$ . Ainsi, les nœuds seront représentés par des lettres en majuscules, et les faces que se partagent les volumes finis en lettres minuscules. Ainsi, la face que partage le volume de contrôle typique avec son voisin de droite est notée  $n$ , celle avec son voisin de gauche est notée  $s$ . Pour la direction polaire, les nœuds voisins sont  $F$  pour dans la direction polaire positive, et  $B$  pour la direction négative. Les faces seront la face  $f$  dans la direction positive, et  $b$  dans la direction négative. Enfin, pour ce qui est de la direction azimutale, dans le sens positif le nœud voisin sera noté  $E$ , et la face qui le sépare du nœud  $P$  sera notée  $e$ . Dans le sens négatif le nœud voisin sera  $W$  et la face

qui le sépare du nœud  $P$  sera notée  $w$ . Les distances entre deux nœuds successifs et les faces de chaque volume fini obéissent à une nomenclature précise. Les distances entre deux nœuds successifs sont précédées par la lettre  $d$  et ont pour indice la lettre de la face qui sépare les deux nœuds. Quant à la distance entre les deux faces du volume fini, elle est précédée par un  $\Delta$ , et possède comme indice la lettre du nœud qui sépare les deux faces en question.

Dans notre cas le domaine physique est constitué de 32 nœuds dans la direction radiale, 189 nœuds dans la direction polaire et 32 nœuds dans la direction azimutale. Donc le maillage utilisé est un maillage  $32 \times 189 \times 32$ , ce qui correspond à un nombre total de 193536 nœuds. La figure 3.2, illustre le domaine de calcul discrétisé.

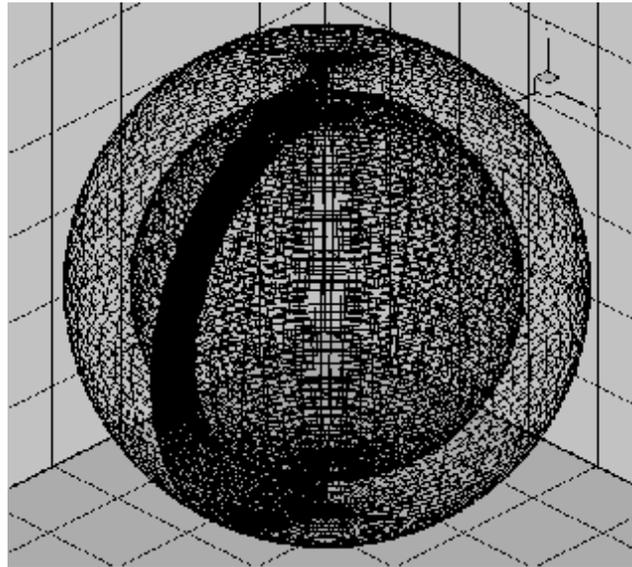


Figure 3.2 : Le domaine de calcul discrétisé.

Le découpage du domaine physique en volumes finis donne lieu à un maillage. Ce maillage sera projeté sur les plans  $r - q$ ,  $r - f$  et  $q - f$  pour les besoins du calcul et aussi pour une meilleure visualisation. Les figures 3.3, 3.4 et 3.5 illustrent le maillage dans les plans  $r - q$ ,  $r - f$  ainsi que les nomenclatures des distances radiales, polaires et azimutales.

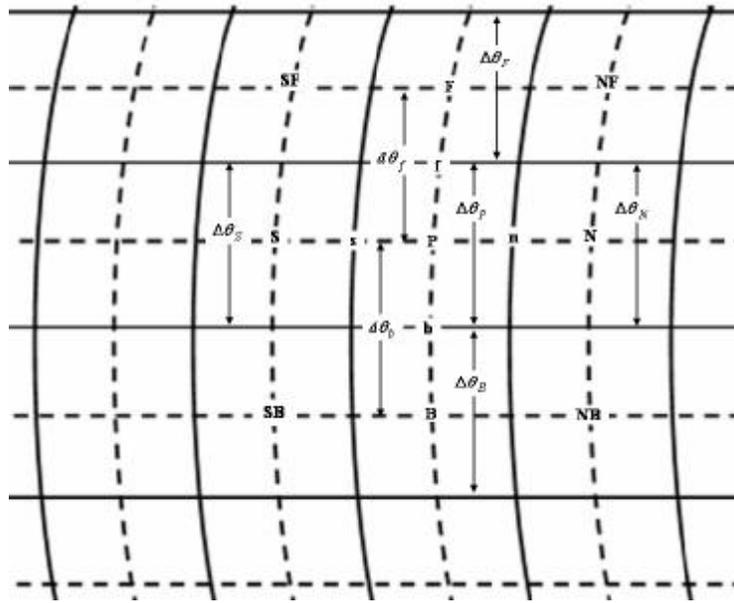


Figure 3.3 : Maillage typique dans le plan  $r - q$ , nomenclature des distances polaires.

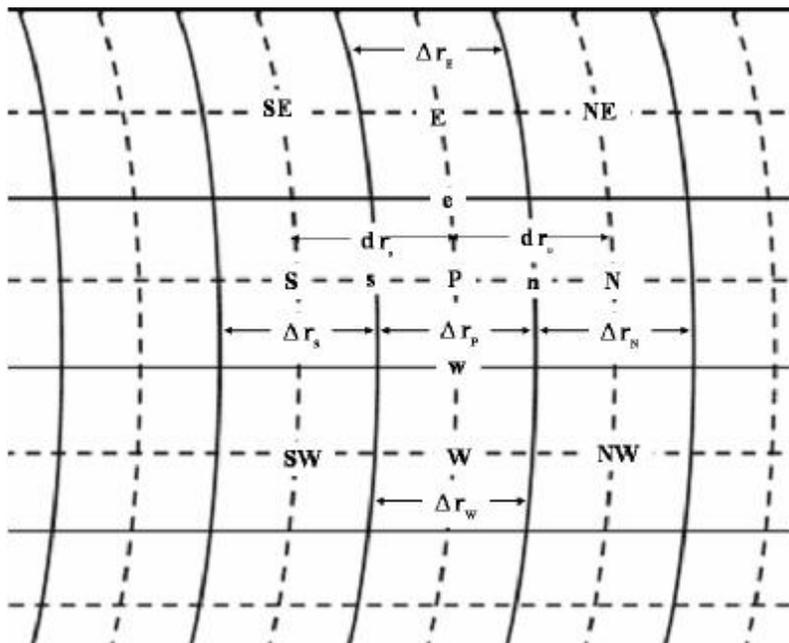


Figure 3.4 : Maillage typique dans le plan  $r - f$ , nomenclature des distances radiales.



l'idée de base est de stocker les composantes de la vitesse dans des points (ou nœuds) qui se trouvent sur les faces des volumes finis. Le maillage sera donc décalé dans la direction radiale pour la détermination de la vitesse radiale. Il sera décalé dans la direction polaire pour la détermination de la vitesse polaire et enfin, dans la direction azimutale pour l'obtention de la vitesse azimutale. Arbitrairement on a choisi de décaler le maillage dans la direction positive des axes.

### 3.2.2 Maillage décalé.

On utilise un maillage dit *décaler*, comme précédemment indiqué. Les vitesses seront stockées dans les faces des volumes de contrôle, c'est-à-dire dans les faces du maillage non décalé. Sur les faces du maillage typique, seront stockées les vitesses. Le maillage sera décalé, par convention, selon le sens positif des axes. Un décalage radial sera opéré pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement radiale. Un décalage dans la direction polaire sera nécessaire pour la discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement. Enfin, on décalera le maillage typique dans la direction azimutale pour la discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement. Quand on décale le maillage dans la direction radiale, les notations des points du nouveau maillage décalé ainsi que des faces, portent l'indice  $u$ . Quant au décalage suivant la direction polaire, on note les points et les faces avec un indice  $v$ . Le décalage dans la direction azimutale sera accompagné d'une notation avec l'indice  $w$ . Le décalage du maillage typique dans les trois directions sera représenté, dans la section 3.4 de ce chapitre.

## 3.3 Discrétisation des équations de conservation

La discrétisation des équations différentielles modélisantes implique l'évaluation des différentes dérivées spatiales et temporelles, de la variable dépendante. L'évaluation de ces dérivées implique de connaître comment la variable dépendante varie dans le temps et dans l'espace. Pour ce faire, on adopte différentes approximations dites schémas de variations.

### 3.3.1 Discrétisation temporelle.

Cette discrétisation concerne la variation temporelle de tous les termes contenus dans les équations de Navier Stokes et dans l'équation de continuité.

---

**-Traitement des dérivées temporelles.**

Les dérivées temporelles dans les équations de Navier Stokes seront discrétisées au second ordre. Cette discrétisation se fait selon le schéma obtenu de la manière suivante:

Considérons le développement de Taylor d'ordre deux, de la variable dépendante  $f$  au temps  $t$ :

$$f^t = f^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.1)$$

Maintenant, considérons le développement de Taylor toujours d'ordre deux, mais cette fois au temps  $t - \Delta t$ :

$$f^{t-\Delta t} = f^{t+\Delta t} - \frac{2\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.2)$$

On multiplie l'équation (3.1) par 4, puis on retranche l'équation (3.2) du résultat obtenu. On obtient l'équation suivante:

$$4f^t - f^{t-\Delta t} = 3f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.3)$$

Donc, la valeur de la dérivée temporelle au temps  $t + \Delta t$  est donnée par l'équation :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3f^{t+\Delta t} - 4f^t + f^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux.

**-Traitement des termes convectifs et non linéaires.**

Les termes convectifs et non linéaires seront discrétisés temporellement au second ordre. Le schéma de discrétisation est obtenu comme suit :

Considérons le développement de Taylor de la variable dépendante d'ordre un, au temps  $t$ :

$$f^t = f^{t+\Delta t} - \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le développement de Taylor, d'ordre un de la variable dépendante mais au temps  $t - \Delta t$ :

$$f^{t-\Delta t} = f^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

On multiplie l'équation (3.5) par  $-2$ , puis on additionne l'équation résultante et l'équation (3.6). On obtient l'équation qui nous donne l'expression de la variable dépendante au temps  $t + \Delta t$  :

$$f^{t+\Delta t} = 2f^t - f^{t-\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.7)$$

Cette expression sera utilisée pour l'évaluation des termes convectifs et non linéaires. L'erreur est d'ordre deux.

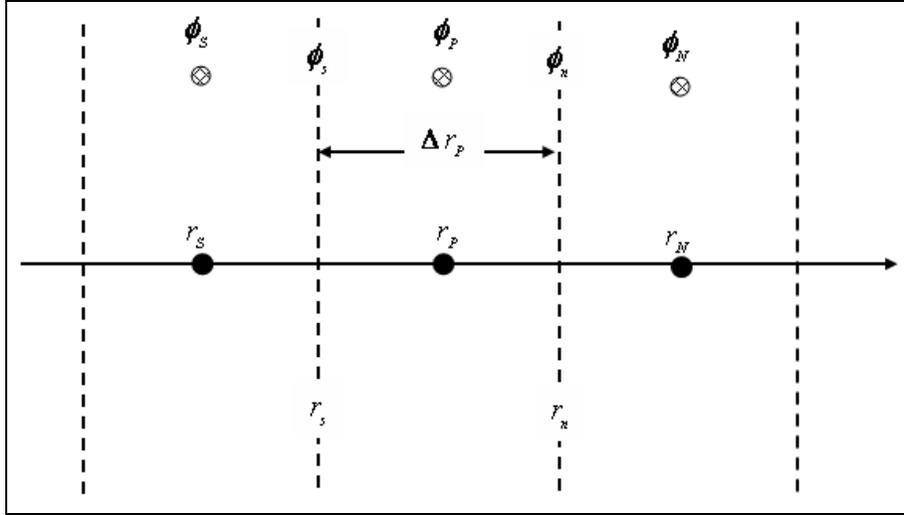
#### **-Traitement des termes diffusifs et de pression.**

Les termes de pression ainsi que les termes diffusifs seront évalués directement au temps  $t + \Delta t$ .

A ce stade, les différents termes contenus dans l'équation de continuité et dans les équations de Navier Stokes, possèdent un schéma de discrétisation temporelle. Tous les termes seront donc évalués temporellement avec une erreur de troncature d'ordre deux.

#### **3.3.2 Discrétisation spatiale.**

Pour assurer une bonne représentation spatiale de la variable dépendante, représentation qui doit être physiquement acceptable, on doit faire un choix quand à la variation spatiale de cette variable. En effet, lors de l'évaluation des intégrales des équations différentielles dans les volumes fini, on aura besoin de connaître comment déterminer la variable dépendante aux interfaces des volumes finis. Donc il faut adopter un schéma qui décrira la variation spatiale de la variable dépendante. On a choisit dans cette étude le schéma des *différences centrées*. Ce choix implique que la valeur de la variable dépendante  $f$  à l'interface sera : la somme de la valeur de  $f$  au noeud à droite (ou dans le sens positive de l'axe de variation) et de la valeur de  $f$  au noeud à gauche (ou dans le sens négatif de l'axe de variation). Les termes, droite et gauche font référence à la position des nœuds par rapport à l'interface considérée.



**Figure 3.6: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la variable dépendante à l'interface.**

En exemple, considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.6. On cherche à déterminer la valeur de la variable dépendante à l'interface  $n$ . Le développement de Taylor au premier ordre, de  $f$  (la variable dépendante de référence) au nœud  $N$  est donné par la formule suivante:

$$f_N = f_n + \frac{\Delta r_P}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.8)$$

Le développement de Taylor au premier ordre de  $f$  au nœud  $P$  est donné par l'équation suivante:

$$f_P = f_n - \frac{\Delta r_P}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.9)$$

On fait l'addition des équations (3.8) et (3.9), et on obtient après réarrangement la formule suivante pour  $f_n$ :

$$f_n = \frac{f_P + f_N}{2} + o(\Delta r)^2 \quad (3.10)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux. C'est la formule (3.10) qui servira à évaluer la valeur de la variable dépendante aux interfaces.

En ce qui concerne l'évaluation de la dérivée spatiale à l'interface, elle est égale à la valeur de  $f$  au nœud à droite moins la valeur de  $f$  au nœud à gauche; divisée par la

distance qui sépare les deux nœuds se trouvant de part et d'autre de l'interface considérée. Comme exemple considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.7, ou on cherche à évaluer la valeur de la dérivée suivant la direction radiale de  $f$  à l'interface  $n$ .

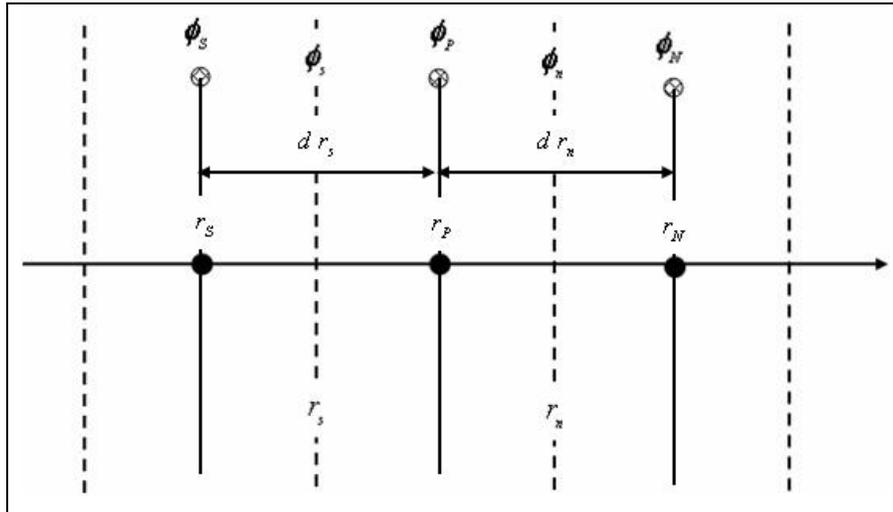


Figure 3.7: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la dérivée radiale de la variable dépendante à l'interface.

On reconsidère les équations (3.8) et (3.9). On multiplie l'équation (3.9) par le signe -, puis on réarrange l'équation résultante et on obtient la formule suivante pour  $\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_n$  :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_n = \frac{f_N - f_P}{dr_n} + o(\Delta r)^2 \quad (3.11)$$

L'erreur qu'on réalise est d'ordre deux. C'est donc la formule donnée par l'équation (3.11) qui sera utilisée pour l'évaluation des dérivées spatiales (suivant une direction donnée) de la variable dépendante considérée, aux interfaces des volumes.

### 3.4 Discrétisation des équations modélisantes :

- En ce qui concerne la discrétisation temporelle, on adopte la convention suivante en ce qui concerne l'exposant de chaque terme discrétisé:

$$\frac{1}{\text{Re}} = \frac{n}{\Omega_1 R_1^2}, \text{ avec: } \Omega_1 \text{ est la vitesse de rotation angulaire de la sphère intérieure,}$$

$R_1$  est le rayon de la sphère intérieure et  $n$  étant la viscosité cinématique.

### 3.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité :

L'équation de continuité sera discrétisée dans un volume de contrôle typique, il est montré sur la Figure 3.2.

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right] r^2 \sin q dr dq df = 0$$

Les vitesses seront évaluées au temps  $t + \Delta t$  :

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U^{t+\Delta t} \right) r^2 \sin q dr dq df = \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( V^{t+\Delta t} \sin q \right) r^2 \sin q dr dq df = \left( V_f \sin q_f^{t+\Delta t} - V_b \sin q_b^{t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta f_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial (W)^{t+\Delta t}}{\partial f} r^2 \sin q dr dq df = \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

L'équation de continuité discrétisée, s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left( V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.4.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement radiale:

Les figures 3.8 et 3.9 illustrent le maillage, décalé radialement, dans les plans  $r - q$  et  $r - f$  respectivement. Nous procéderons à la discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement terme par terme.

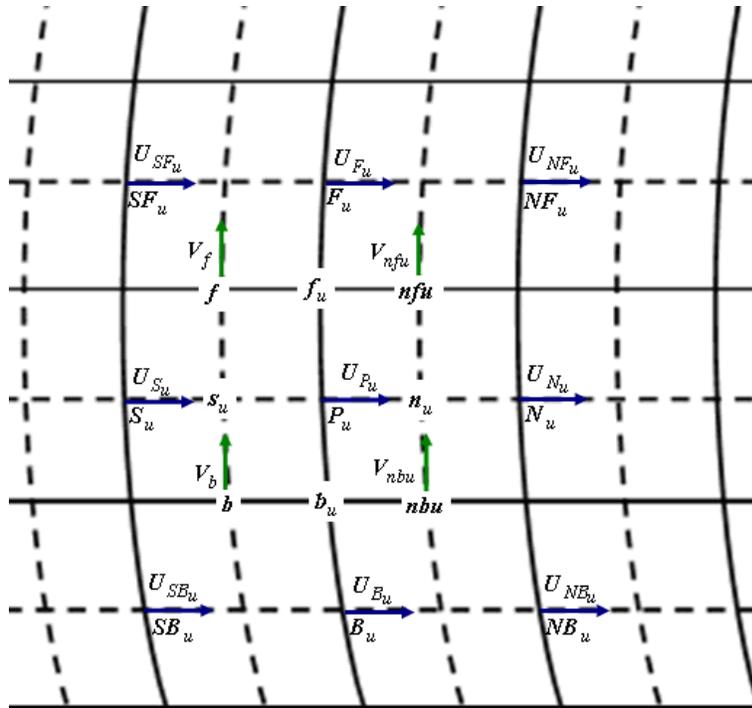


Figure 3.8 : Maillage décalé suivant la direction radiale, plan  $r - q$ .

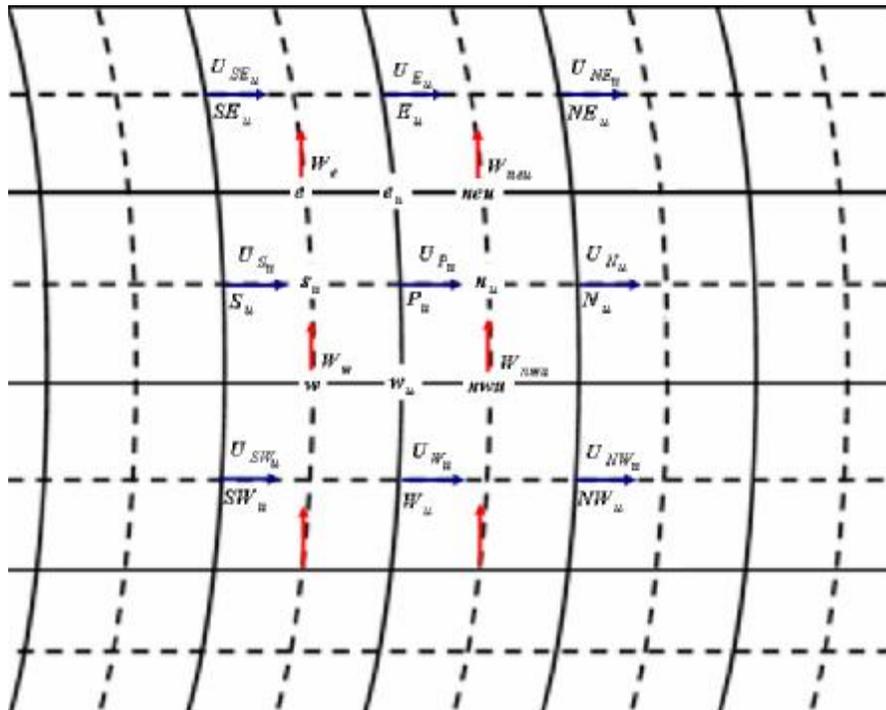


Figure 3.9 : Maillage décalé suivant la direction radiale, plan  $r - f$ .

-Discrétisation du terme temporel:

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= U_{P_u} \Big|_t^{t+\Delta t} r_n^2 \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\ &= \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \end{aligned}$$

-Discrétisation des termes convectifs :

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{f_u}^{e_u} \int_{w_u}^{b_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U U \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\ \left[ 2 \left( r^2 U U \right)_{n_u}^t - 2 \left( r^2 U U \right)_{s_u}^t \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P - \left[ \left( r^2 U U \right)_{n_u}^{t-\Delta t} - \left( r^2 U U \right)_{s_u}^{t-\Delta t} \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\ &= \left[ 2 \left( r_{n_u}^2 U_{n_u}^t U_{n_u}^t - r_{s_u}^2 U_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left( r_{n_u}^2 U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - r_{s_u}^2 U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\ &= \frac{1}{2} r_{n_u}^2 \left( U_{n_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P - \frac{1}{2} r_{s_u}^2 \left( U_{s_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\ &\quad - \frac{1}{4} r_{n_u}^2 \left( U_{n_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P + \frac{1}{4} r_{s_u}^2 \left( U_{s_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\ \int_{s_u}^{n_u} \int_{f_u}^{e_u} \int_{w_u}^{b_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} \left( U V \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\ \left[ 2 \left( U V \right)_{f_u}^t - 2 \left( U V \right)_{b_u}^t \right] r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta f_P - \left[ \left( U V \right)_{f_u}^{t-\Delta t} - \left( U V \right)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta f_P \\ &= \left[ 2 \left( U_{f_u}^t V_{f_u}^t - U_{b_u}^t V_{b_u}^t \right) - \left( U_{f_u}^{t-\Delta t} V_{f_u}^{t-\Delta t} - U_{b_u}^{t-\Delta t} V_{b_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\ &= \frac{1}{2} \left( U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( V_f^t + V_{nf_u}^t \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left( V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \sin q_P \, \Delta f_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (U W) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \left[ 2 (UW)_{e_u}^t - 2 (UW)_{w_u}^t \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P - \left[ (UW)_{e_u}^{t-\Delta t} - (UW)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P \\
& = \left[ 2 \left( U_{e_u}^t W_{e_u}^t - U_{w_u}^t W_{w_u}^t \right) - \left( U_{e_u}^{t-\Delta t} W_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} W_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta q_P \\
& = \frac{1}{2} \left( U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& - \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& - \frac{1}{4} \left( U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P \\
& + \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta q_P
\end{aligned}$$

-Discrétisation des autres termes à gauche:

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left( \frac{V^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - 2 \left( V_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin q_p \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P + \left( V_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_p \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& = - 2 \left[ \frac{V_{nf_u}^t + V_b^t + V_f^t + V_{nbu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_p \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& + \left[ \frac{V_{nf_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_p \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left( \frac{W^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - 2 \left( W_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P + \left( W_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& = - 2 \left[ \frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& + \left[ \frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P \, dr_n \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

-Discrétisation des termes diffusifs:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{n_u}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{s_u}^{t+\Delta t} \right] \sin q_P \, \Delta q_P \, \Delta f_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_u}^2 \left( \frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_N} \right) - r_{s_u}^2 \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_P} \right) \right] \sin q_P \, \Delta q_P \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{f_u}^{t+\Delta t} - \left( \sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{b_u}^{t+\Delta t} \right] d r_n \, \Delta f_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sin q_{f_u} \left( \frac{U_{F_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{d q_f} \right) - \sin q_{b_u} \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{d q_b} \right) \right] d r_n \, \Delta f_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right)_{e_u}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right)_{w_u}^{t+\Delta t} \right] d r_n \Delta q_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin q_P} \left( \frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{d f_e} \right) - \frac{1}{\sin q_P} \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{d f_w} \right) \right] d r_n \Delta q_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{U}{r^2} \right) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = - \frac{2}{\text{Re}} U_{P_u}^{t+\Delta t} \sin q_P \, d r_n \Delta q_P \Delta f_P
\end{aligned}$$

-Discretisation des autres termes à droite:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{\sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ 2 (V \sin q)_{f_u}^t - 2 (V \sin q)_{b_u}^t \right] d r_n \Delta f_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ (V \sin q)_{f_u}^{t-\Delta t} - (V \sin q)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \Delta f_P \\
& = - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_f^t + V_{nf_u}^t \right) \sin q_{f_u} - \left( V_{nb_u}^t + V_b^t \right) \sin q_{b_u} \right] d r_n \Delta f_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} \right) \sin q_{f_u} - \left( V_{nb_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \sin q_{b_u} \right] d r_n \Delta f_P \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ (2W)_{e_u}^t - (2W)_{w_u}^t \right] d r_n \Delta q_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[ (W)_{e_u}^{t-\Delta t} - (W)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \Delta q_P \\
& = - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] d r_n \Delta q_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] d r_n \Delta q_P
\end{aligned}$$

-Discrétisation du terme de pression:

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} -\frac{\partial P}{\partial r} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \left( P_{n_u}^{t+\Delta t} - P_{s_u}^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ &= \left( P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \end{aligned}$$

On réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme suivante, cette forme est dite forme générale:

$$\begin{aligned} A_{P_u} U_{P_u}^{t+\Delta t} &= A_{N_u} U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} U_{F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} U_{B_u}^{t+\Delta t} \\ &\quad + A_{E_u} U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} U_{W_u}^{t+\Delta t} + S_u \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$\begin{aligned} A_{P_u} &= \frac{3}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p \, dr_n \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_N} \frac{r_N^2}{\Delta r_N} \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_P} \frac{r_P^2}{\Delta r_P} \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_f}{dq_f} dr_n \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_b}{dq_b} dr_n \Delta f_p \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_e} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p df_w} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \sin q_p \, dr_n \Delta q_p \Delta f_p \\ A_{N_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_N^2}{\Delta r_N} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ A_{S_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_P^2}{\Delta r_P} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ A_{F_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_f}{dq_f} \right) dr_n \Delta f_p \\ A_{B_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_b}{dq_b} \right) dr_n \Delta f_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{E_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d r_n \Delta q_p}{\sin q_p d f_e} \right) \\
A_{W_u} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d r_n \Delta q_p}{\sin q_p d f_w} \right) \\
S_u &= \frac{4U_{P_u}^t}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p - \frac{U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p \\
&\quad - \frac{1}{2} r_N^2 \left( U_{N_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \frac{1}{2} r_P^2 \left( U_{S_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
&\quad + \frac{1}{4} r_N^2 \left( U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - \frac{1}{4} r_P^2 \left( U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( V_f^t + V_{nfu}^t \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left( V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nfu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin q_p \Delta f_p \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n dr_n \Delta q_p \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n dr_n \Delta q_p \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta q_p \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta q_p \\
&\quad + 2 \left[ \frac{V_{nfu}^t + V_{nbu}^t + V_f^t + V_b^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p \\
&\quad - \left[ \frac{V_{nfu}^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[ \frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& - \left[ \frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta f_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ V_{nfu}^t + V_f^t \right] \sin q_f dr_n \Delta f_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[ V_{nbu}^t + V_b^t \right] \sin q_b dr_n \Delta f_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ V_{nfu}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right] \sin q_f dr_n \Delta f_P - \frac{1}{\text{Re}} \left[ V_{nbu}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right] \sin q_b dr_n \Delta f_P \\
& - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] dr_n \Delta q_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta q_P \\
& + (P_P - P_N) r_n^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p
\end{aligned}$$

### 3.4.3 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement polaire :

Les figures 3.10 et 3.11 illustrent le maillage décalé dans la direction polaire, dans les plans  $r - q$  et  $q - f$  respectivement.

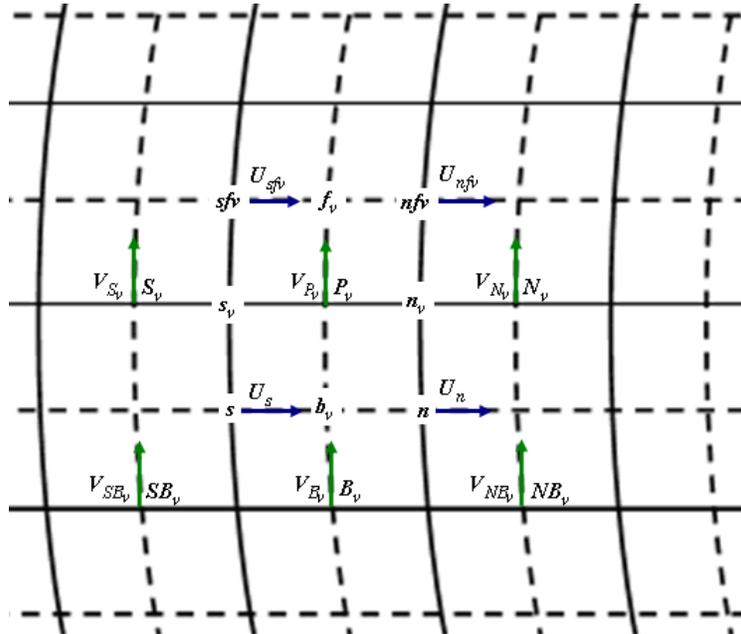


Figure 3.10 : Maillage décalé suivant la direction polaire, plan  $r - q$ .

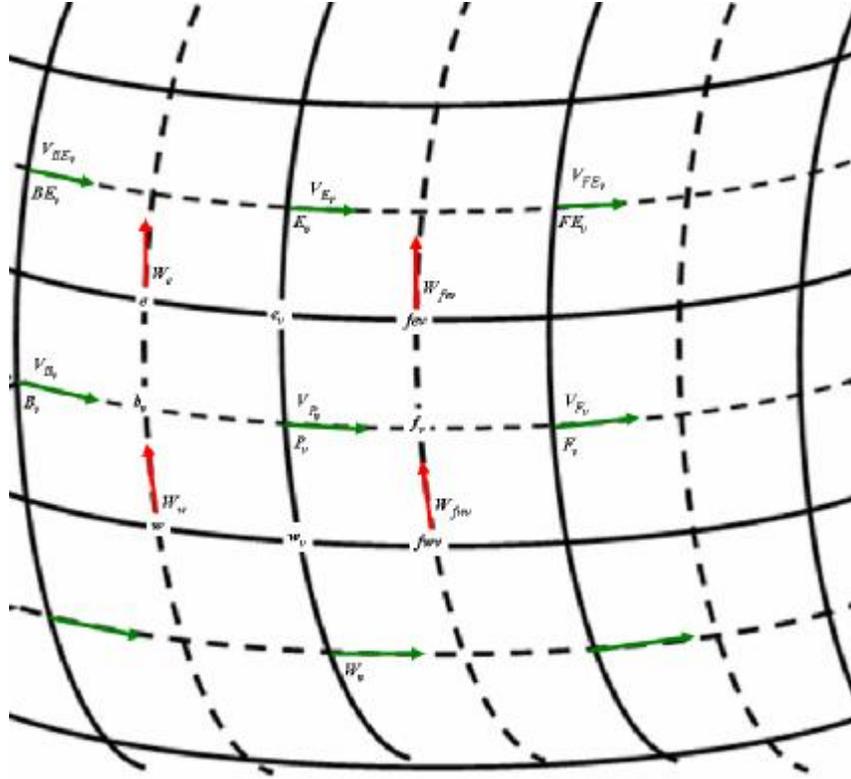


Figure 3.11 : Maillage décalé suivant la direction méridionale, plan  $q - f$ .

- Discrétisation du terme temporel :

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial V}{\partial t} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = V_{P_v} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_v}^2 \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \, \Delta f_p$$

$$= \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t} - 4V_{P_v}^t + V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \, \Delta f_p$$

- Discrétisation des termes convectifs :

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt =$$

$$\left[ 2 \left( r^2 U V \right)_{n_v}^t - 2 \left( r^2 U V \right)_{s_v}^t \right] \sin q_f \, dq_f \, \Delta f_p - \left[ \left( r^2 U V \right)_{n_v}^{t-\Delta t} - \left( r^2 U V \right)_{s_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f \, dq_f \, \Delta f_p$$

$$= \left( 2r_{n_v}^2 U_{n_v}^t V_{n_v}^t - 2r_{s_v}^2 U_{s_v}^t V_{s_v}^t \right) \sin q_f \, dq_f \, \Delta f_p - \left( r_{n_v}^2 U_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - r_{s_v}^2 U_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \, dq_f \, \Delta f_p$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} r_n^2 \left( U_n^t + U_{nfv}^t \right) \left( V_{N_v}^t + V_{P_v}^t \right) \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&- \frac{1}{2} r_s^2 \left( U_s^t + U_{sfv}^t \right) \left( V_{S_v}^t + V_{P_v}^t \right) \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&- \frac{1}{4} r_n^2 \left( U_n^{t-\Delta t} + U_{nfv}^{t-\Delta t} \right) \left( V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&+ \frac{1}{4} r_s^2 \left( U_s^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} \right) \left( V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
&\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (V V) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
&\left[ 2(VV)_{f_v}^t - 2(VV)_{b_v}^t \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left[ (VV)_{f_v}^{t-\Delta t} - (VV)_{b_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
&= \left[ \left( 2 V_{f_v}^t V_{f_v}^t - 2 V_{b_v}^t V_{b_v}^t \right) - \left( V_{f_v}^{t-\Delta t} V_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{b_v}^{t-\Delta t} V_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
&= \frac{1}{2} \left( V_{F_v}^t + V_{P_v}^t \right)^2 r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \frac{1}{2} \left( V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right)^2 r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
&- \frac{1}{4} \left( V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{4} \left( V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_{P_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
&\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} (V W) r^2 \sin q dr dq df dt = \\
&\left[ 2(VW)_{e_v}^t - 2(VW)_{w_v}^t \right] r_{P_v} \Delta r_p dq_f - \left[ (VW)_{e_v}^{t-\Delta t} - (VW)_{w_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \Delta r_p dq_f \\
&= \left[ \left( 2 V_{f_v}^t W_{f_v}^t - 2 V_{w_v}^t W_{w_v}^t \right) - \left( V_{f_v}^{t-\Delta t} W_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{w_v}^{t-\Delta t} W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_v} \Delta r_p dq_f \\
&= \frac{1}{2} \left( V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right) \left( W_{f_{ev}}^t + W_e^t \right) r_{P_v} \Delta r_p dq_f - \frac{1}{2} \left( V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right) \left( W_w^t + W_{f_{wv}}^t \right) r_{P_v} \Delta r_p dq_f \\
&- \frac{1}{4} \left( V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{f_{ev}}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_{P_v} \Delta r_p dq_f \\
&+ \frac{1}{4} \left( V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right) \left( W_w^{t-\Delta t} + W_{f_{wv}}^{t-\Delta t} \right) r_{P_v} \Delta r_p dq_f
\end{aligned}$$

-Discrétisation des autres termes à gauche:

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{UV}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& 2 \left( U_{P_v}^t V_{P_v}^t \right) r_{p_v} \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p - \left( U_{P_v}^{t-\Delta t} V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) r_{p_v} \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p = \\
& = 2 \left[ \left( \frac{U_{nf_v}^t + U_{sf_v}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& - \left[ \left( \frac{U_{nf_v}^{t-\Delta t} + U_{sf_v}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} - \left( W^2 \frac{\cot q}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - 2 \left( W_{P_v}^2 \right) r_{p_v} \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p + \left( W_{P_v}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{p_v} \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& = - 2 \left[ \frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{f_wv}^t}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p \\
& + \left[ \frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{f_wv}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p \, dq_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

Discrétisation des termes diffusifs :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{n_v}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_v}^{t+\Delta t} \right] \sin q_f \, dq_f \Delta f_p \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_v}^2 \left( \frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) - r_{s_v}^2 \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) \right] \sin q_f \, dq_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{f_v}^{t+\Delta t} - \left( \sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{b_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta f_p \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sin q_{f_v} \left( \frac{V_{F_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_F} \right) - \sin q_{b_v} \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_P} \right) \right] \Delta r_p \Delta f_p \\
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right)_{e_v}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial f} \right)_{w_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, d q_f \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin q_f} \left( \frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d f_e} \right) - \frac{1}{\sin q_f} \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{W_v}^{t+\Delta t}}{d f_w} \right) \right] \Delta r_p \, d q_f
\end{aligned}$$

-Discrétisation des autres termes à droite :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{V}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = -\frac{1}{\text{Re} \sin q_f} V_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta r_p \, d q_f \Delta f_p \\
& \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2U_{f_v}^t - 2U_{b_v}^t \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left( U_{f_v}^{t-\Delta t} - U_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \right] \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{nf_v}^t + U_{sf_v}^t}{2} \right) - \left( \frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{nf_v}^{t-\Delta t} + U_{sf_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left( 2W_{e_v}^t - 2W_{w_v}^t \right) \cot q_f \Delta r_p \, dq_f + \frac{2}{\text{Re}} \left( W_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \cot q_f \Delta r_p \, dq_f \\
& = - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{f_{ev}}^t + W_e^t}{2} \right) - \left( \frac{W_{f_{wv}}^t + W_w^t}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p \, dq_f \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{f_{ev}}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{W_{f_{wv}}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p \, dq_f
\end{aligned}$$

-Discrétisation du terme de pression :

$$\begin{aligned}
\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt & = - \left( P_{f_v}^{t+\Delta t} - P_{b_v}^{t+\Delta t} \right) r_{p_v} \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& = \left( P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p
\end{aligned}$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$\begin{aligned}
A_{P_v} V_{P_v}^{t+\Delta t} & = A_{N_v} V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{F_v}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{B_v}^{t+\Delta t} \\
& + A_{E_v} V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{W_v}^{t+\Delta t} + S_v
\end{aligned} \tag{314}$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$\begin{aligned}
 A_{P_v} &= \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_f d q_f \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_F}{\Delta q_F} \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin q_P}{\Delta q_P} \Delta r_p \Delta f_p \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_e} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_w} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d q_f \Delta f_p}{\sin q_f}
 \end{aligned}$$

$$A_{N_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_f d q_f \Delta f_p \right)$$

$$A_{S_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_f d q_f \Delta f_p \right)$$

$$A_{F_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_F}{\Delta q_F} \Delta r_p \Delta f_p \right)$$

$$A_{B_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_P}{\Delta q_P} \Delta r_p \Delta f_p \right)$$

$$A_{E_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_e} \right)$$

$$A_{W_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta r_p d q_p}{\sin q_f d f_w} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_v = & \frac{2V_{P_v}^t}{\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p - \frac{V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& - \frac{1}{2} r_n^2 \left[ U_{nfv}^t + U_n^t \right] \left[ V_{N_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& + \frac{1}{2} r_s^2 \left[ U_{sfv}^t + U_s^t \right] \left[ V_{S_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& + \frac{1}{4} r_n^2 \left[ U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right] \left[ V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& - \frac{1}{4} r_s^2 \left[ U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right] \left[ V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f d q_f \Delta f_p \\
& - \frac{1}{2} \left[ V_{F_v}^t + V_{P_v}^t \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p + \frac{1}{2} \left[ V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& + \frac{1}{4} \left[ V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \frac{1}{4} \left[ V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{1}{2} \left[ V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right] \left[ W_{fev}^t + W_e^t \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& + \frac{1}{2} \left[ V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right] \left[ W_{fww}^t + W_w^t \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& + \frac{1}{4} \left[ V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \left[ W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& - \frac{1}{4} \left[ V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right] \left[ W_{fww}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d q_f \\
& - 2 \left[ \left( \frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& + \left[ \left( \frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& - 2 \left[ \frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{fww}^t}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p \\
& + \left[ \frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fww}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p d q_f \Delta f_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{nfv}^t + U_{sfv}^t \right) - \left( U_n^t + U_s^t \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} \right) - \left( U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_{fev}^t + W_e^t \right) - \left( W_{fvv}^t + W_w^t \right) \right] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{fvv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
& + \left( P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p
\end{aligned}$$

#### 3.4.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement azimutale :

Les figures 3.12 et 3.13 illustrent le maillage décalé dans la direction azimutale, dans les plans  $r-f$  et  $q-f$ , respectivement. La composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement sera discrétisée dans le maillage décalé terme par terme, spatialement et temporellement.

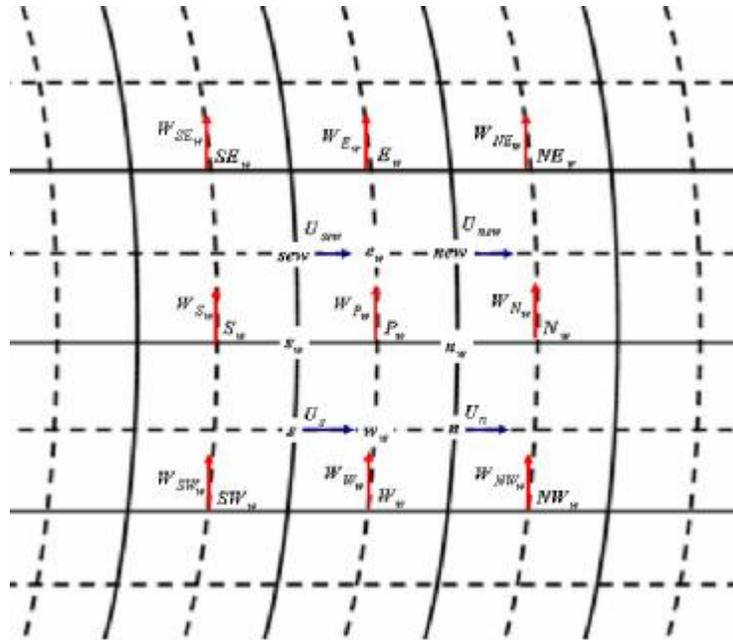


Figure 3.12 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, plan  $r - f$ .

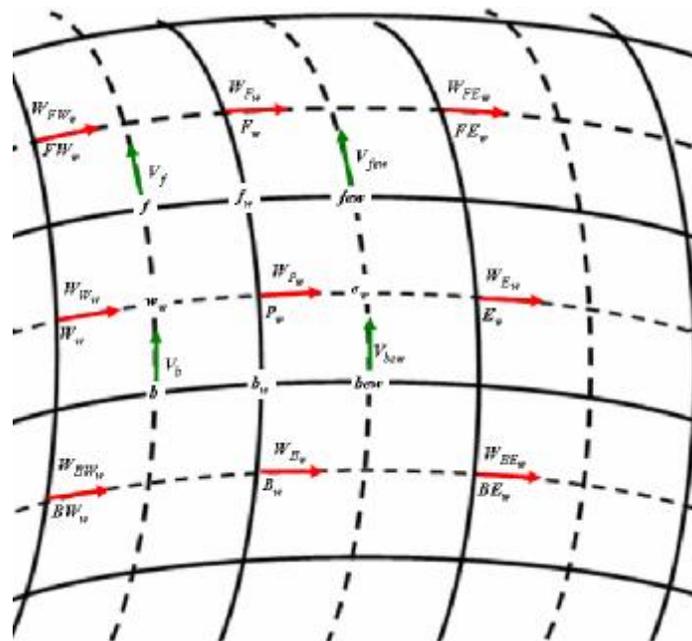


Figure 3.13 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, plan  $q - f$ .

- Discrétisation du terme temporel :

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= W_{P_w} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_w}^2 \sin q_e \, \Delta r_p \, \Delta q_p \, df_e \\ &= \frac{3W_{P_w}^{t+\Delta t} - 4W_{P_w}^t + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \, \Delta r_p \, \Delta q_p \, df_e \end{aligned}$$

- Discrétisation des termes convectifs :

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt &= \\ \left[ 2(r^2 U W)_{n_w}^t - 2(r^2 U W)_{s_w}^t \right] \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e - \left[ (r^2 U W)_{n_w}^{t-\Delta t} - (r^2 U W)_{s_w}^{t-\Delta t} \right] \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\ &= \left[ \left( 2r_{n_w}^2 U_{n_w}^t W_{n_w}^t - 2r_{s_w}^2 U_{s_w}^t W_{s_w}^t \right) - \left( r_{n_w}^2 U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t} - r_{s_w}^2 U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\ &= 2r_{n_w}^2 \left( \frac{U_{n_w}^t + U_n^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{N_w}^t}{2} \right) \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\ &\quad - 2r_{s_w}^2 \left( \frac{U_{s_w}^t + U_s^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{S_w}^t}{2} \right) \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\ &\quad - r_{n_w}^2 \left( \frac{U_{n_w}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \\ &\quad + r_{s_w}^2 \left( \frac{U_{s_w}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \, \Delta q_p \, df_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} VW \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& = \left[ 2(VW)_{f_w}^t - 2(VW)_{b_w}^t \right] r_{p_w} \sin q_e \Delta r_p \, df_e - \left[ (VW)_{f_w}^{t-\Delta t} - (VW)_{b_w}^{t-\Delta t} \right] r_{p_w} \sin q_e \Delta r_p \, df_e \\
& = \left[ \left( 2V_{f_w}^t W_{f_w}^t - 2V_{b_w}^t W_{b_w}^t \right) - \left( V_{f_w}^{t-\Delta t} W_{f_w}^{t-\Delta t} - V_{b_w}^{t-\Delta t} W_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \sin q_e \Delta r_p \, df_e \\
& = 2 \left( \frac{V_{few}^t + V_f^t}{2} \right) \left( \frac{W_{F_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p \, df_e \\
& - 2 \left( \frac{V_{bew}^t + V_b^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{B_w}^t}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p \, df_e \\
& - \left( \frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p \, df_e \\
& + \left( \frac{V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p \, df_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial f} WW \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \left[ 2(WW)_{e_w}^t - 2(WW)_{w_w}^t \right] r_{p_w} \Delta r_p \Delta q_p - \left[ (WW)_{e_w}^{t-\Delta t} - (WW)_{w_w}^{t-\Delta t} \right] r_{p_w} \Delta r_p \Delta q_p \\
& = \left[ \left( 2W_{e_w}^t W_{e_w}^t - 2W_{w_w}^t W_{w_w}^t \right) - \left( W_{e_w}^{t-\Delta t} W_{e_w}^{t-\Delta t} - W_{w_w}^{t-\Delta t} W_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& = \left\{ 2 \left( \frac{W_{E_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{W_w}^t}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \left\{ \left( \frac{W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 - \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}$$

-Discrétisation des autres termes à gauche :

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{UW}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& = \left[ 2(UW)_{P_w}^t - (UW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
& = 2 \left[ \left( \frac{U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) W_{P_w}^t \right] r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
& - \left[ \left( \frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) W_e^t \right] r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{VW}{r} \cot q \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \left[ 2(VW)_{P_w}^t - (VW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] \cot q_e r_{P_w} \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
& = 2 \left( \frac{V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t}{4} \right) W_{P_w}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p \, df_e \\
& - \left( \frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}}{4} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p \, df_e
\end{aligned}$$

- Discrétisation des termes diffusifs :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{n_w}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{s_w}^{t+\Delta t} \right] \sin q_e \Delta q_p \, df_e \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_w}^2 \left( \frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - r_{s_w}^2 \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \sin q_e \Delta q_p \, df_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{f_w}^{t+\Delta t} - \left( \sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{b_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, d f_e \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{d q_f} \right) \sin q_{f_w} - \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{d q_b} \right) \sin q_{b_w} \right] \Delta r_p \, d f_e \\
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial f^2} \right) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right)_{e_w}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial f} \right)_{w_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, \Delta q_p \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin q_{e_w}} \left( \frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{\Delta f_E} \right) - \frac{1}{\sin q_{w_w}} \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{\Delta f_P} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p
\end{aligned}$$

- Discrétisation des autres termes à droite :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \left( \frac{\partial U}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, d r \, d q \, d f \, d t = \\
& \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2U_{e_w}^t - 2U_{w_w}^t \right) - \left( U_{e_w}^{t-\Delta t} - U_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{new}^t + U_{sew}^t}{2} \right) - \left( \frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta q_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \left( \frac{\partial V}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = \\
& = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2V_{e_w}^t - 2V_{w_w}^t \right) - \left( V_{e_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_{f_{ew}}^t + V_{b_{ew}}^t}{2} \right) - \left( \frac{V_f^t + V_b^t}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_{f_{ew}}^{t-\Delta t} + V_{b_{ew}}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_P \Delta q_P \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt = - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin q_e} \right) W_{P_w}^{t+\Delta t} \Delta r_P \Delta q_P \, df_e
\end{aligned}$$

-Discrétisation du terme de pression :

$$\begin{aligned}
- \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial f} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, dt & = - [P_{e_w} - P_{w_w}] r_{P_w} \Delta r_P \Delta q_P \\
& = [P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}] r_P \Delta r_P \Delta q_P
\end{aligned}$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$\begin{aligned}
A_{P_w} W_{P_w}^{t+\Delta t} & = A_{N_w} W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} W_{F_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} W_{B_w}^{t+\Delta t} \\
& + A_{E_w} W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} W_{W_w}^{t+\Delta t} + S_w
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$\begin{aligned}
 A_{P_w} = & \frac{3}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e + \frac{g_1 r_n^2}{d r_n} \sin q_e \Delta q_p df_e + \frac{g_1 r_s^2}{d r_s} \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 & + \frac{g_1 \sin q_f}{d q_f} \Delta r_p df_e + \frac{g_1 \sin q_b}{d q_b} \Delta r_p df_e + \frac{g_1}{\sin q_e \Delta f_E} \Delta r_p \Delta q_p + \frac{g_1}{\sin q_e \Delta f_P} \Delta r_p \Delta q_p \\
 & + \frac{g_1}{\sin q_e} \Delta r_p \Delta q_p df_e
 \end{aligned}$$

$$A_{N_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_n^2}{d r_n} \sin q_e \Delta q_p df_e \right)$$

$$A_{S_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_s^2}{d r_s} \sin q_e \Delta q_p df_e \right)$$

$$A_{F_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_f}{d q_f} \Delta r_p df_e \right)$$

$$A_{B_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin q_b}{d q_b} \Delta r_p df_e \right)$$

$$A_{E_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin q_e \Delta f_E} \Delta r_p \Delta q_p \right)$$

$$A_{W_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin q_e \Delta f_P} \Delta r_p \Delta q_p \right)$$

$$\begin{aligned}
 s_v = & \frac{4W_{P_w}^t}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
 & - \frac{1}{2} r_{n_w}^2 \left( U_{new}^t + U_n^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{N_w}^t \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 & + \frac{1}{2} r_{s_w}^2 \left( U_{sew}^t + U_s^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{S_w}^t \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 & + \frac{1}{4} r_{n_w}^2 \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e \\
 & - \frac{1}{4} r_{s_w}^2 \left( U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t} \right) \sin q_e \Delta q_p df_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left( V_{few}^t + V_f^t \right) \left( W_{F_w}^t + W_{P_w}^t \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& + \frac{1}{2} \left( V_{bew}^t + V_b^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{B_w}^t \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right) \left( W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& - \frac{1}{4} \left( V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin q_e \Delta r_p df_e \\
& - \left[ \frac{1}{2} \left( W_{E_w}^t + W_{P_w}^t \right)^2 - \frac{1}{2} \left( W_{P_w}^t + W_{W_w}^t \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \left[ \frac{1}{4} \left( W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t} \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{1}{2} \left( U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t \right) W_{P_w}^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) W_e^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& - \frac{1}{2} \left( V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t \right) W_{P_w}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{1}{4} \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p df_e \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{new}^t + U_{sew}^t \right) - \left( U_n^t + U_s^t \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} \right) - \left( U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_{few}^t + V_{bew}^t \right) - \left( V_f^t + V_b^t \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) - \left( V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
& + \left[ P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}$$

### 3.4.5 Discrétisation des conditions aux limites:

- **Pour U:** Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse radiale sont:

$$\begin{cases} A \ r=1, \ U=0 \\ A \ r=1.5, \ U=0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} A \quad q=0, & \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \\ A \quad q = p, & \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p (1, j, k) = 1 \\ S_c (1, j, k) = 0 \\ A_p (il - 1, j, k) = 1 \\ S_c (il - 1, j, k) = 0 \\ A_p (i, 1, k) = 1 \\ A_F (i, 1, k) = 1 \\ A_p (i, jl, k) = 1 \\ A_B (i, jl, k) = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

**-Pour V:** Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse méridionale sont:

$$\begin{cases} A \quad r=1, V = 0 \\ A \quad r=1.5, V = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} A \quad q = 0, & V = 0 \\ A \quad q = p, & V = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p (1, j, k) = 1 \\ S_c (1, j, k) = 0 \\ A_p (il, j, k) = 1 \\ S_c (il, j, k) = 0 \\ A_p (i, 1, k) = 1 \\ S_c (i, 1, k) = 0 \\ A_p (i, jl - 1, k) = 1 \\ S_c (i, jl - 1, k) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

-Pour **W**: Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse azimutale sont:

$$\begin{cases} A & r=1, W = \sin q \\ A & r=1.5, W = -0.75 \sin q \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} A & q = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \\ A & q = p, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p(1, j, k) = 1 \\ S_c(1, j, k) = \sin q_p(j) \\ A_p(il, j, k) = 1 \\ S_c(il, j, k) = -0.75 \sin q_p(j) \\ A_p(i, 1, k) = 1 \\ A_f(i, 1, k) = 1 \\ A_p(i, jl-1, k) = 1 \\ A_b(i, jl-1, k) = 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

### 3.5 Equation de discrétisation de la pression :

Après la discrétisation des équations de continuité et de quantité de mouvements radiale, méridionale et azimutale; on doit obtenir une équation de discrétisation pour la pression. Sans équation de la pression, on ne peut résoudre les équations discrétisées obtenues.

Les équations de quantités de mouvement discrétisées, peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} a_n U_n &= \sum a_i U_i + b_u + (P_N - P_p) A_n \\ a_s U_s &= \sum a_i U_i + b_u + (P_p - P_s) A_s \\ a_f V_f &= \sum a_i V_i + b_v + (P_f - P_p) A_f \\ a_b V_b &= \sum a_i V_i + b_v + (P_p - P_b) A_b \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$a_e W_e = \sum a_i W_i + b_w + (P_E - P_P) A_e$$

$$a_w W_w = \sum a_i W_i + b_w + (P_P - P_W) A_w$$

L'indice  $i$  indique les points voisins du point considéré (dans les trois directions), les termes  $b_u, b_v$  et  $b_w$  sont les termes des sources contenant les termes autres que ceux de la pression, ce dernier étant le troisième terme à droite dans chaque équation du système (3.25). On peut réécrire le système (3.25) sous la forme:

$$\begin{aligned} U_n &= \hat{U}_n + d_n (P_N - P_P) \\ U_s &= \hat{U}_s + d_s (P_P - P_S) \\ V_f &= \hat{V}_f + d_f (P_F - P_P) \\ V_b &= \hat{V}_b + d_b (P_P - P_B) \\ W_e &= \hat{W}_e + d_e (P_E - P_P) \\ W_w &= \hat{W}_w + d_w (P_P - P_W) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les vitesses  $\hat{U}_n, \hat{U}_s, \hat{V}_f, \hat{V}_b, \hat{W}_e, \hat{W}_w$ , sont dites pseudo-vitesses, elles sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} \hat{U}_n &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_n} \\ \hat{U}_s &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_s} \\ \hat{V}_f &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_f} \\ \hat{V}_b &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_b} \\ \hat{W}_e &= \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\hat{W}_w = \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w}$$

On considère l'équation de continuité qui a été intégrée dans un volume de contrôle typique, non décalé. Elle est sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left( V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

On remplace les vitesses présentes dans cette équation par leurs définitions (3.26).

On obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & r_n^2 \left[ \hat{U}_n + d_n (P_N - P_P) \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - r_s^2 \left[ \hat{U}_s + d_s (P_P - P_S) \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ & + \left[ \hat{V}_f + d_f (P_F - P_P) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left[ \hat{V}_b + d_b (P_P - P_B) \right] \sin q_b \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left[ \hat{W}_e + d_e (P_E - P_P) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p - \left[ \hat{W}_w + d_w (P_P - P_W) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

On simplifie cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 \hat{U}_n - r_s^2 \hat{U}_s \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left( \hat{V}_f \sin q_f - \hat{V}_b \sin q_b \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left( \hat{W}_e - \hat{W}_w \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p + r_n^2 d_n (P_N - P_P) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ & - r_s^2 d_s (P_P - P_S) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + d_f \sin q_f (P_F - P_P) \Delta r_p \Delta f_p \\ & - d_b \sin q_b (P_P - P_B) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + d_e (P_E - P_P) r_p \Delta r_p \Delta q_p - d_w (P_P - P_W) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ce qui nous intéresse est de trouver une équation pour la pression sous la forme:

$$\begin{aligned}
A_P P_P^{t+\Delta t} = & A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} \\
& + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + S
\end{aligned} \tag{3.31}$$

A partir de l'équation (3.30) on détermine les coefficients  $A_P, A_N, A_S, A_F, A_B, A_E, A_W$  ainsi que le terme source comme suit :

$$\begin{aligned}
A_N &= r_n^2 d_n \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
A_S &= r_s^2 d_s \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P \\
A_F &= d_f \sin q_f \Delta r_P \Delta f_P \\
A_B &= d_b \sin q_b \Delta r_P \Delta f_P \\
A_E &= d_e r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
A_W &= d_w r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
A_P &= A_N + A_S + A_F + A_B + A_E + A_W
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
S = & \left( r_s^2 \hat{U}_s - r_n^2 \hat{U}_n \right) \sin q_P \Delta q_P \Delta f_P + \left( \hat{V}_b \sin q_b - \hat{V}_f \sin q_f \right) \Delta r_P \Delta f_P \\
& + \left( \hat{W}_w - \hat{W}_e \right) r_P \Delta r_P \Delta q_P
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Donc, si on connaît le champs de vitesse on pourra calculer la pression de l'équation (3.31). Dans notre cas, les champs de pression et de vitesse sont à déterminer. Pour résoudre l'équation de la pression (et ainsi obtenir le champ de vitesse) on utilise un champ de vitesse estimé, qui sera introduit comme suit:

$$\begin{aligned}
a_n U_n^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left( P_N^* - P_P^* \right) A_n \\
a_s U_s^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left( P_P^* - P_S^* \right) A_s \\
a_f V_f^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left( P_F^* - P_P^* \right) A_f
\end{aligned}$$

$$a_b V_b^* = \sum a_i V_i^* + b_v + \left( P_P^* - P_B^* \right) A_b \quad (3.34)$$

$$a_e W_e^* = \sum a_i W_i^* + b_w + \left( P_E^* - P_P^* \right) A_e$$

$$a_w W_w^* = \sum a_i W_i^* + b_w + \left( P_P^* - P_W^* \right) A_w$$

Les estimations des vitesses et des pressions auront une étoile \* comme exposant. Les équations du système (3.34) indiquent que les estimations des vitesses sont reliées aux estimations des pressions. On suppose que la valeur de la vitesse (ainsi que celle de la pression) sera égale à une estimation plus une correction:

$$\begin{aligned} U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \\ W &= W^* + W' \\ P &= P^* + P' \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les corrections porte une prime comme exposant. L'équation (3.35) s'étendra à toutes les composantes de la vitesse et donnera lieu aux équations:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^* + U_n' \\ U_s &= U_s^* + U_s' \\ V_f &= V_f^* + V_f' \\ V_b &= V_b^* + V_b' \\ W_e &= W_e^* + W_e' \\ W_w &= W_w^* + W_w' \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour obtenir les équations contenant les corrections, on soustrait le système (3.34) du système (3.26), on obtient:

$$\begin{aligned}
a_n U'_n &= \sum a_i U'_i + (P'_N - P'_p) A_n \\
a_s U'_s &= \sum a_i U'_i + (P'_P - P'_S) A_s \\
a_f V'_f &= \sum a_i V'_i + (P'_F - P'_p) A_f \\
a_b V'_b &= \sum a_i V'_i + (P'_P - P'_B) A_b \\
a_e W'_e &= \sum a_i W'_i + (P'_E - P'_p) A_e \\
a_w W'_w &= \sum a_i W'_i + (P'_P - P'_W) A_w
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Une approximation justifiée par **S.V. Patankar** [11], consiste à négliger les sommes  $\sum a_i U'_i$ ,  $\sum a_i V'_i$  et  $\sum a_i W'_i$ . Donc, les corrections des vitesses ne seront fonctions que des corrections de la pression:

$$\begin{aligned}
a_n U'_n &= (P'_N - P'_p) A_n \\
a_s U'_s &= (P'_P - P'_S) A_s \\
a_f V'_f &= (P'_F - P'_p) A_f \\
a_b V'_b &= (P'_P - P'_B) A_b \\
a_e W'_e &= (P'_E - P'_p) A_e \\
a_w W'_w &= (P'_P - P'_W) A_w
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Le système (3.38) exprime de façon claire que les corrections de vitesse sont directement liées aux corrections de pression. Les relations entre les vitesses et leurs corrections sont donc comme suit:

$$\begin{aligned}
U_n &= U_n^* + d_n (P'_N - P'_p) \\
U_s &= U_s^* + d_s (P'_P - P'_S) \\
V_f &= V_f^* + d_f (P'_F - P'_p) \\
V_b &= V_b^* + d_b (P'_P - P'_B)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$W_e = W_e^* + d_e (P'_E + P'_P)$$

$$W_w = W_w^* + d_w (P'_P - P'_W)$$

Les vitesses ainsi définies dans le système (3.39) doivent satisfaire l'équation de continuité (3.28). En introduisant ces vitesses dans l'équation de continuité, on obtient l'équation:

$$\begin{aligned} & r_n^2 \left( U_n^* - d_n (P'_N - P'_P) \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p - r_s^2 \left( U_s^* - d_s (P'_P - P'_S) \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p \\ & + \left( V_f^* - d_f (P'_F - P'_P) \right) \sin q_f \Delta r_p \Delta f_p - \left( V_b^* - d_b (P'_P - P'_B) \right) \sin q_b \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left( W_e^* - d_e (P'_E - P'_P) \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p - \left( W_w^* - d_w (P'_P - P'_W) \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Cette équation permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la correction de la pression comme suit:

$$A_p P'_P = A_n P'_N + A_s P'_S + A_f P'_F + A_b P'_B + A_e P'_E + A_w P'_W + S' \quad (3.41)$$

On note que les coefficients de l'équation (3.41) sont les mêmes que les coefficients de l'équation (3.31). Mais la source n'est pas la même, elle est égale à:

$$\begin{aligned} S = & \left( r_s^2 U_s^* - r_n^2 U_n^* \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta f_p + \left( V_b^* \sin q_b - V_f^* \sin q_f \right) \Delta r_p \Delta f_p \\ & + \left( W_w^* - W_e^* \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p \end{aligned} \quad (3.42)$$

Donc pour trouver les corrections de la pression on résout le système représenté par l'équation (3.42). Ensuite, on utilise ces corrections pour déterminer les corrections de la vitesse.

### 3.6 Résolution des équations algébriques ou équations discrétisées :

La discrétisation des équations modélisantes donne lieu à un système d'équations algébriques. Ce système s'écrit, sous forme matricielle, comme suivant:

$$[A] \{X\} = \{b\} \quad (3.43)$$

$[A]$  Matrice des coefficients, ces éléments sont connus. Cette matrice possède la particularité d'être une matrice heptagonale, c'est-à-dire qu'elle ne contient que sept entrées, la diagonale, trois entrées sur diagonales et trois entrées sous diagonales.

$\{X\}$  Vecteur des inconnus.

$\{b\}$  Vecteur de charge, ses éléments sont connus.

Pour une résolution itérative de ce système d'équation, on utilise la méthode de balayage, expliquée par **S.V. Patankar** [11], avec l'algorithme de Thomas et l'algorithme tri diagonal cyclique. Cette méthode itérative converge plus vite que les autres méthodes itératives telles que la méthode de Gauss-Seidel.

### 3.7 La méthode de balayage:

Soit le système, d'équations algébriques, représenté par l'équation de discrétisation suivante:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (3.44)$$

La matrice des coefficients de ce système est heptagonale.

Ce système est transformé, momentanément, en le système suivant:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S^* \quad (3.45)$$

Avec:

$$S^* = A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (3.46)$$

La matrice des coefficients du système (3.45) est tri diagonale. Ce système d'équations peut être résolu par l'algorithme de Thomas, qui sera exposé ultérieurement. La solution obtenue est notée  $\Phi^*$ .

La deuxième étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P \Phi_P = A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + S^{**} \quad (3.47)$$

Avec:

$$S^{**} = A_N \Phi_N^* + A_S \Phi_S^* + A_E \Phi_E^* + A_W \Phi_W^* + S \quad (3.48)$$

La matrice des coefficients du système (3.47) est tri diagonale, et le système peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée  $\Phi^{**}$ .

Finalement, la troisième (dernière) étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S^{***} \quad (3.49)$$

Avec:

$$S^{***} = A_N \Phi_N^{**} + A_S \Phi_S^{**} + A_F \Phi_F^{**} + A_B \Phi_B^{**} + S \quad (3.50)$$

La matrice des coefficients du système (3.49) est tri diagonale; mais elle contient un élément non nul à la fin de sa première ligne et un autre élément non nul au début de sa dernière ligne. C'est une matrice tri diagonale cyclique. Et donc, le système (3.49) peut être résolu par l'algorithme tri diagonal cyclique, qui sera présenté plus tard. La solution obtenue, par l'algorithme tri diagonal cyclique est notée  $\Phi^{***}$ . Cette dernière est la solution obtenue après les trois balayages, suivant  $r$ ,  $q$  et  $f$ . Elle représente la solution obtenue après une itération des trois balayages.

### 3.8 Algorithme de Thomas :

Cet algorithme est appelé aussi TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm). Il est utilisé pour résoudre un système d'équations tri diagonal:

$$[A] \{f\} = \{b\} \quad (3.51)$$

Avec :

$[A]$  Matrice des coefficients.

$\{f\}$  Vecteur des inconnues.

$\{b\}$  Vecteur de charge.

La matrice  $[A]$ , doit être tri diagonale. La méthode utilisée pour résoudre ce système d'équations est l'algorithme de Thomas présenté ci-dessous:

Soit le système tri diagonal d'équations algébriques:

$$a_i f_i = b_i f_{i+1} + c_i f_{i-1} + d_i \quad (3.52)$$

$a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  sont des coefficients,  $f_{i+1}$  est la valeur de la variable dépendante dans le point à droite du point  $i$ ,  $f_{i-1}$  est la valeur de la variable dépendante dans le point à gauche du point  $i$ . Cette forme relie donc la variable dépendante au point  $P$  aux points qui lui sont adjacents. Si le premier point est 1 et le nombre de point est  $N$ , on doit (nécessairement) avoir:

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0 \quad (3.53)$$

Soit la relation de récurrence:

$$f_i = P_i f_{i+1} + Q_i \quad (3.54)$$

Cette relation avec (3.52), entraîne deux autres relations de récurrence:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.55)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.56)$$

Avec:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.57)$$

Ces deux paramètres sont connus. Aussi il est facile de démontrer que:

$$P_N = 0 \text{ et } T_N = Q_N \quad (3.58)$$

Récapitulation des étapes de calcul de l'algorithme de Thomas:

- 1- Calcul de  $P_i$  et  $Q_i$  de l'équation (3.57).
- 2- Utiliser les équations (3.55) et (3.56) pour obtenir les  $P_i$  et  $Q_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ .
- 3- Poser  $T_N = Q_N$ .
- 4- Utiliser l'équation (3.54),  $i = N-1, N-2, \dots, 1$  pour obtenir  $f_{N-1}, f_{N-2}, \dots, f_1$ .

Cet algorithme est très efficace et converge rapidement.

### 3.9 Algorithme tri diagonal cyclique:

La solution d'un système, d'équations algébriques, tri diagonal cyclique est un peu plus compliquée que celle du système tri diagonal simple, elle est représenté par l'équation indicielle suivante :

$$a_k \Phi_k = b_k \Phi_{kkk} + c_k \Phi_{kk} + d_k \quad (3.59)$$

$$k = 1, 2, \dots, KL$$

avec:

$$k_{kk} = \begin{cases} k+1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases}$$

$$k_k = \begin{cases} k-1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$(3.60) \quad \Phi_k = E_k \Phi_{k_{kk}} + F_k \Phi_{KL} + G_k$$

$$k = 1, 2, \dots, KL - 1$$

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1}, F_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ et } G_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Cette relation est aussi vraie pour  $k_k$ :

$$\Phi_{k_k} = E_{k_k} \Phi_k + F_{k_k} \Phi_{KL} + G_{k_k}$$

(3.61)

En remplaçant (3.61) dans (3.59) on obtient:

$$(3.62) \quad \Phi_k = \left[ \frac{b_k}{a_k - c_k E_{k_k}} \right] \Phi_{k_{kk}} + \left[ \frac{c_k F_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}} \right] \Phi_{KL} + \left[ \frac{c_k G_{k_k} + d_k}{a_k - c_k E_{k_k}} \right]$$

(3.60) est (3.62) sont identiques et on obtient trois nouvelles relations de récurrence :

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{k_k}}, F_k = \frac{c_k F_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}} \text{ et } G_k = \frac{d_k + c_k G_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}}$$

$$k = 2, 3, \dots, KL - 1$$

Pour calculer les  $\Phi_k$ ,  $k = KL - 1, KL - 2, KL - 3, \dots, 3, 2, 1$ , avec la relation de récurrence (3.60), il nous faut la valeur de  $\Phi_{KL}$  qui sera déterminée dans ce qui suit :

De l'équation (3.59) on a:

$$a_{KL} \Phi_{KL} = b_{KL} \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + d_{KL}$$

Cette équation est réécrite sous la forme:

$$P_1 \Phi_{KL} = Q_1 \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_1 \quad (3.63)$$

avec:

$$P_1 = a_{KL}, \quad Q_1 = b_{KL} \quad \text{et} \quad R_1 = d_{KL}$$

D'après (3.60):

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_2 + F_1 \Phi_{KL} + G_1$$

Cette équation est utilisée dans (3.63) et on obtient:

$$[P_1 - Q_1 F_1] \Phi_{KL} = [Q_1 E_1] \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_1 + Q_1 G_1] \quad ,$$

$$P_2 \Phi_{KL} = Q_2 \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_2$$

Aussi de l'équation (3.60), on a:

$$\Phi_2 = E_2 \Phi_3 + F_2 \Phi_{KL} + G_2$$

Cette équation est utilisée dans la précédente et il vient :

$$[P_2 - Q_2 F_2] \Phi_{KL} = [Q_2 E_2] \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_2 + Q_2 G_2]$$

Qui est réécrite:

$$P_3 \Phi_{KL} = Q_3 \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_3$$

en utilisant l'équation(3.60)...ect  $\Phi_4$  et  $\Phi_{KL}$  et en replace  $\Phi_3$  en fonction de

Cette procédure est continuée jusqu'à l'obtention de l'équation :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = Q_{KL-1} \Phi_{KL-1} + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.64)$$

On peut constater facilement que nous avons trois nouvelles relations de récurrence:

$$P_k = P_{k-1} - Q_{k-1} F_{k-1}$$

$$Q_k = Q_{k-1} E_{k-1}$$

$$R_k = R_{k-1} + Q_{k-1} G_{k-1}$$

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1}$$

Avec l'équation (3.60) on a:

$$\Phi_{KL-1} = E_{KL-1} \Phi_{KL} + F_{KL-1} \Phi_{KL} + G_{KL-1} = [E_{KL-1} + F_{KL-1}] \Phi_{KL} + G_{KL-1}$$

Cette équation est utilisée dans (3.60) et il vient:

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] ( [E_{KL-1} + F_{KL-1}] \Phi_{KL} + G_{KL-1} ) + R_{KL-1}$$

$\Phi_{KL}$  Cette équation donne la valeur de

$$\Phi_{KL} = \frac{[Q_{KL-1} + c_{KL}]G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - [Q_{KL-1} + c_{KL}][E_{KL-1} + F_{KL-1}]}$$

Finalement le calcul de  $\Phi_{kl}$  permet avec l'utilisation de l'équation (3.60) le calcul des  $\Phi_k$

### 3.10 Algorithme SIMPLER

Cet algorithme est une version révisée de l'algorithme SIMPLE. Il est utilisé pour la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses et de la pression. L'idée de base de cet algorithme consiste en l'utilisation d'une initialisation du champ de vitesse, qui après son introduction dans l'équation de pression et sa résolution donnera un champ de pression estimé. Ce champ de pression sera introduit dans les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse et qui donnera un champ de vitesse estimé après leur résolution. Ce champ de vitesse estimé ainsi obtenu, sera utilisé pour l'obtention de la correction de la pression, qui à son tour servira à corriger le champ de vitesse. Ce champ de vitesse corrigé sera utilisé, à nouveau comme champ de vitesse initial, et les étapes précédentes sont poursuivies jusqu'à atteindre la convergence.

Les étapes à suivre sont résumées comme suit:

- 1- Initialiser le champ de vitesse U, V, W.
- 2- Calculer les coefficients des équations de discrétisation de U, V et W.
- 3- Calculer les pseudo vitesses  $\hat{U}, \hat{V}$  et  $\hat{W}$  des équations (3.27) par un calcul direct, en utilisant le champ de vitesse initial.
- 4- Utiliser les pseudo vitesses pour calculer la source de l'équation de discrétisation de la pression, équation (3.31).
- 5- Résoudre l'équation de discrétisation de la pression est ainsi obtenir une estimation du champ de pression.
- 6- Utiliser cette estimation du champ de pression pour calculer les sources des équations de discrétisation de U, V, et W.
- 7- Résoudre les équations de discrétisation de U, V et W; ainsi on obtient un champ de vitesse estimé.
- 8- On utilise le champ de vitesse estimé obtenu pour calculer la source de l'équation de discrétisation de P'. C'est-à-dire la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression, équation (3.41).

- 9- Résoudre l'équation de discrétisation de  $P'$  et ainsi obtenir le champ de la correction de la pression.
- 10- Corriger le champ de vitesse en utilisant les corrections de la pression, équations (3.38).
- 11- Vérifier l'atteinte de la convergence selon le critère de convergence choisit, si cette convergence est atteinte on arrête les calculs. Si la convergence n'est pas atteinte on reprend les calculs de l'étape 2, jusqu'à la convergence.

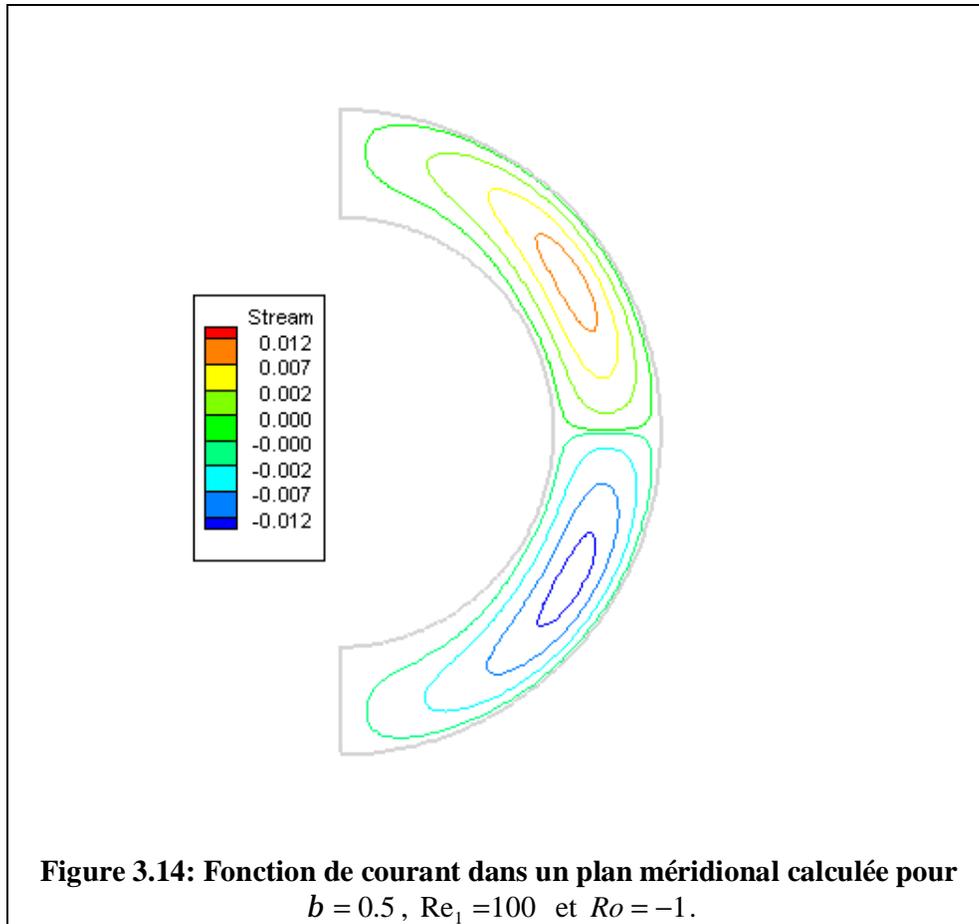
Le critère de convergence dans notre cas est l'atteinte du régime permanent. Une fois le régime stationnaire obtenu, on s'attend à ce que le bilan global de la quantité de mouvement soit satisfait; et on obtient aussi l'égalité des moments (par rapport à l'axe vertical des sphères) des forces exercées sur les surfaces des deux sphères.

### **3.11 Validation**

La solution séquentielle des équations de discrétisation des variables dépendantes suit l'algorithme SIMPLER. Le système d'équations algébriques de discrétisation de chaque variable dépendante est résolu avec la méthode itérative de balayage, utilisant l'algorithme TDMA suivant les directions radiale et polaire et l'algorithme TDMA cyclique suivant la direction azimutale. Les cas correspondants aux nombres de Reynolds égaux à 100, 200, 300 sont résolus avec un pas du temps égal à  $10^{-3}$  et ceux correspondants aux nombres de Reynolds égaux à 400 et 500 avec le pas de temps de  $5 \cdot 10^{-4}$ . Le premier cas, avec le nombre de Reynolds égal à 100 est résolu avec des conditions initiales statiques. Avec chaque variation du nombre de Reynolds, la solution est obtenue avec celle du nombre de Reynolds précédent, comme état initial. Toutes les solutions obtenues sont stationnaires. L'état stationnaire est caractérisé par une évolution temporelle nulle de l'écoulement et l'équilibre des torques des deux sphères.

Le code développé a été validé par comparaison avec les résultats fournis par Munson et Joseph [4] qui sont, qualitativement, exactement similaires à ceux produits par notre code de calcul. La figure 3.14 en est une illustration de l'écoulement unicellulaire produit par le code et les auteurs de la référence [4].

---



## 4. Résultats

L'écoulement de Couette sphérique contrarotatif, pour des faibles nombres de Reynolds, est stationnaire et axisymétrique. L'écoulement est entraîné par les contra-rotations des deux sphères. L'écoulement secondaire, dans le plan méridien, est infinitésimal (et donc négligeable); l'écoulement principal est approximativement représenté par la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Cette distribution peut être obtenue par la solution de l'équation de la quantité de mouvement azimutale simplifiée:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\sin q \partial W}{\partial q} \right) - \frac{W}{r^2 \sin^2 q} = 0 \quad (4.1)$$

Avec les conditions aux limites:

$$\text{A } r=1, \quad W = \sin q \quad (4.2)$$

$$\text{A } r=1.5, \quad W = -0.75 \sin q \quad (4.3)$$

$$\text{A } q = 0, \quad W = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{A } q = p, \quad W = 0 \quad (4.5)$$

La solution, obtenue avec la méthode de séparation des variables **M. D. Greenberg [12]** est:

$$W(r, q) = \left( -\frac{43}{38} + \frac{81}{38} \frac{1}{r^3} \right) r \sin q \quad (4.6)$$

Cette distribution est caractérisée par une distribution polaire sinusoïdale (proportionnelle à  $\sin q$ ): le niveau de la vitesse est nul aux pôles et augmente (en valeur absolue) en allant vers l'équateur. Suivant la direction radiale, le plan méridien se divise en deux parties: l'une avec des vitesses positives (comme celle de la sphère intérieure), l'autre avec des vitesses négatives (comme celle de la sphère extérieure). Ces deux

---

zones sont nécessairement séparées par une surface à vitesse azimutale nulle appelée surface nodale. La surface nodale (où  $W = 0$ ) est une sphère de rayon  $r \approx 1.235$ . Cette surface n'inclue pas l'axe de rotation ( $q = 0$  et  $q = p$ ) où on a aussi  $W = 0$  comme limite. La solution de l'équation (4.6) nous montre que la vitesse angulaire de rotation (égale à  $W$  divisée par le rayon cylindrique  $r \sin q$ ) est purement radiale. Cependant, la solution (4.6) n'est valable que pour les très faibles nombres de Reynolds ( $Re \rightarrow 0$ ).

#### 4.1 Distribution de la vitesse azimutale

Pour les nombres de Reynolds (considérés dans cette étude), l'écoulement de Couette sphérique contrarotatif est tri directionnel (avec trois composantes de vitesse); mais il est stationnaire (il atteint un état permanent) et axisymétrique (invariant suivant la direction azimutale). Il est représenté par un écoulement principal et un écoulement secondaire. L'écoulement principal est illustré par la distribution méridionale de la vitesse azimutale, représentée dans la figure 4.1a-4.1.f, pour les nombres de Reynolds considérés dans cette étude. Pour le nombre de Reynolds le plus faible, la distribution est quasi radiale sphérique. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, la distribution est déformée par des protubérances, près de l'équateur, dues à l'écoulement secondaire.

---

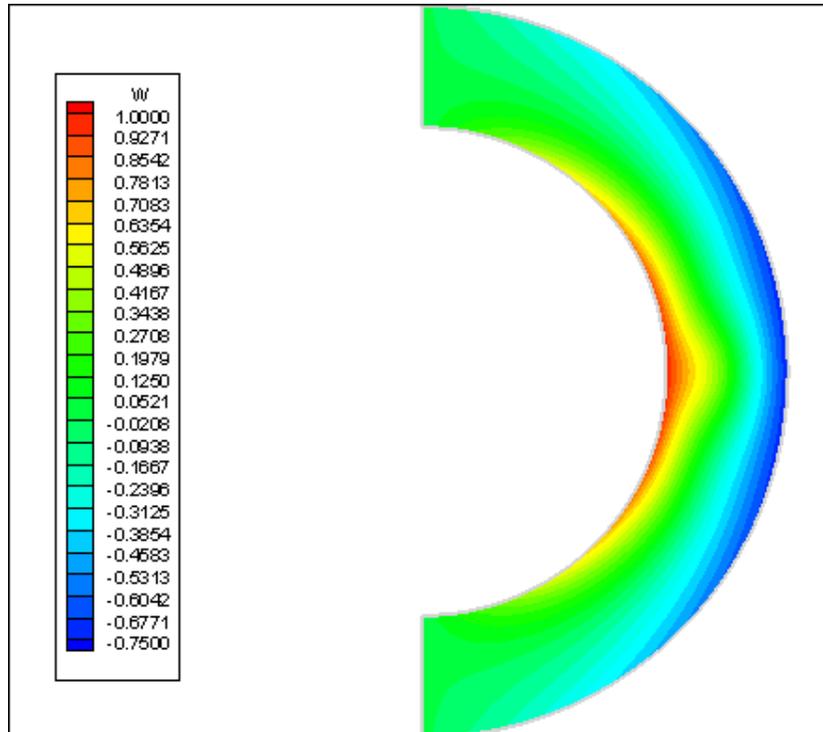


Figure 4.1-a Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour le cas  $Re=100$

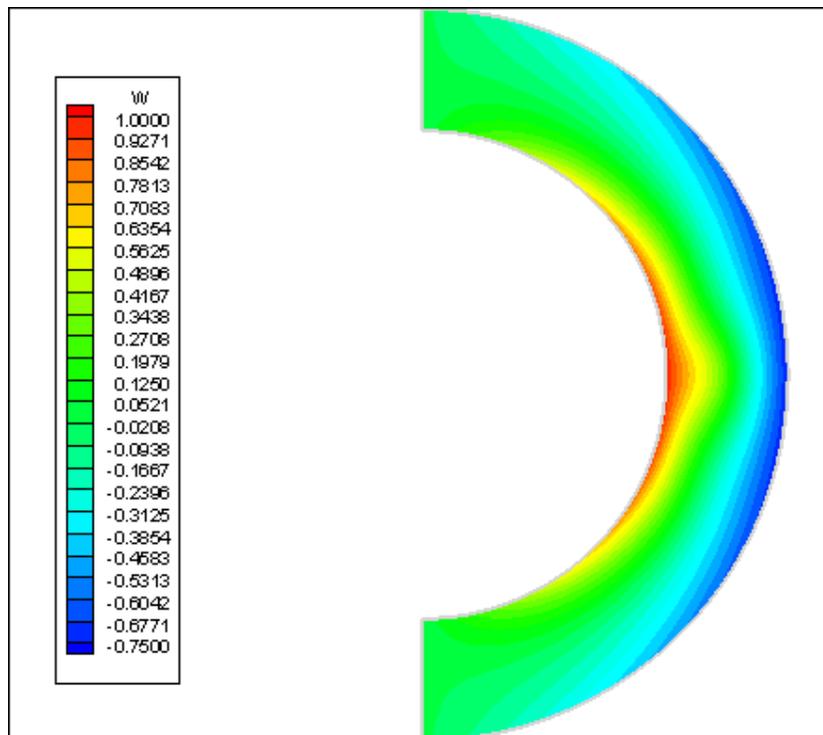


Figure 4.1-b. Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour  $Re=200$

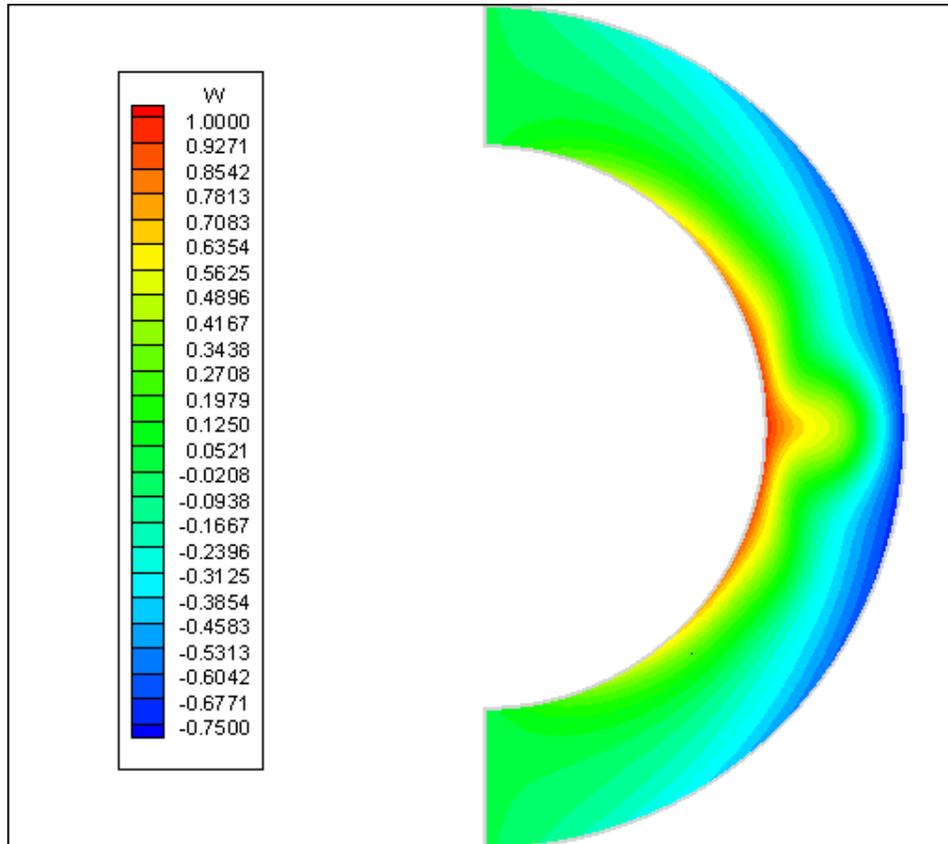


Figure 4.1-c. Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour  $Re=300$

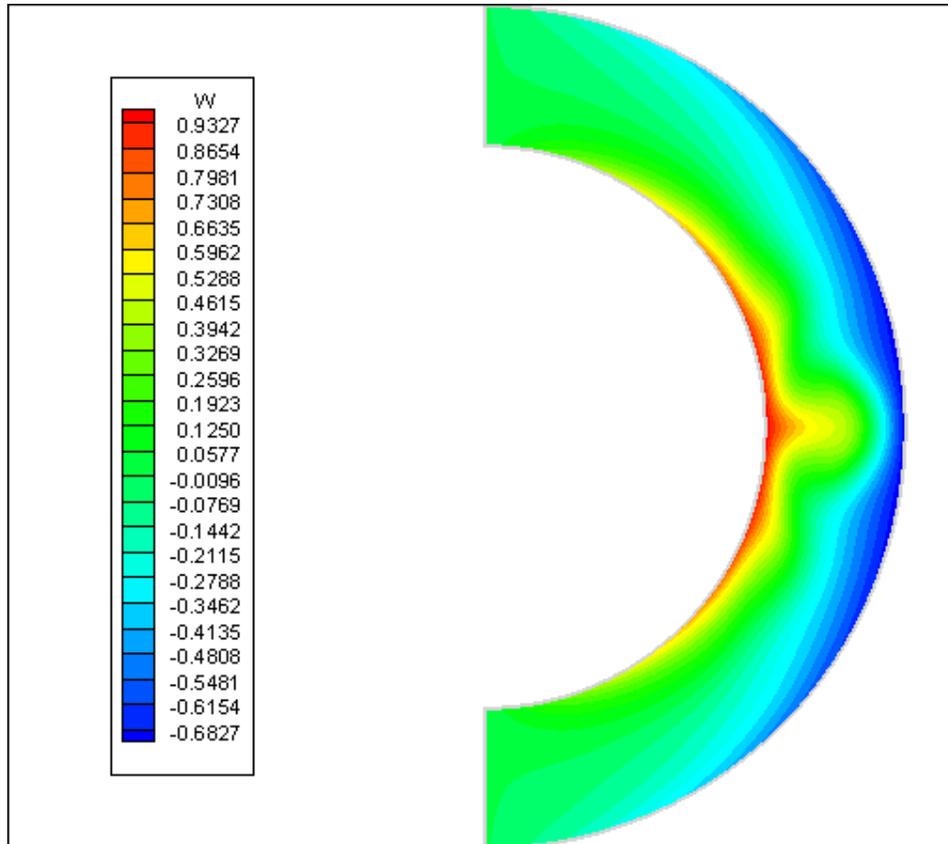
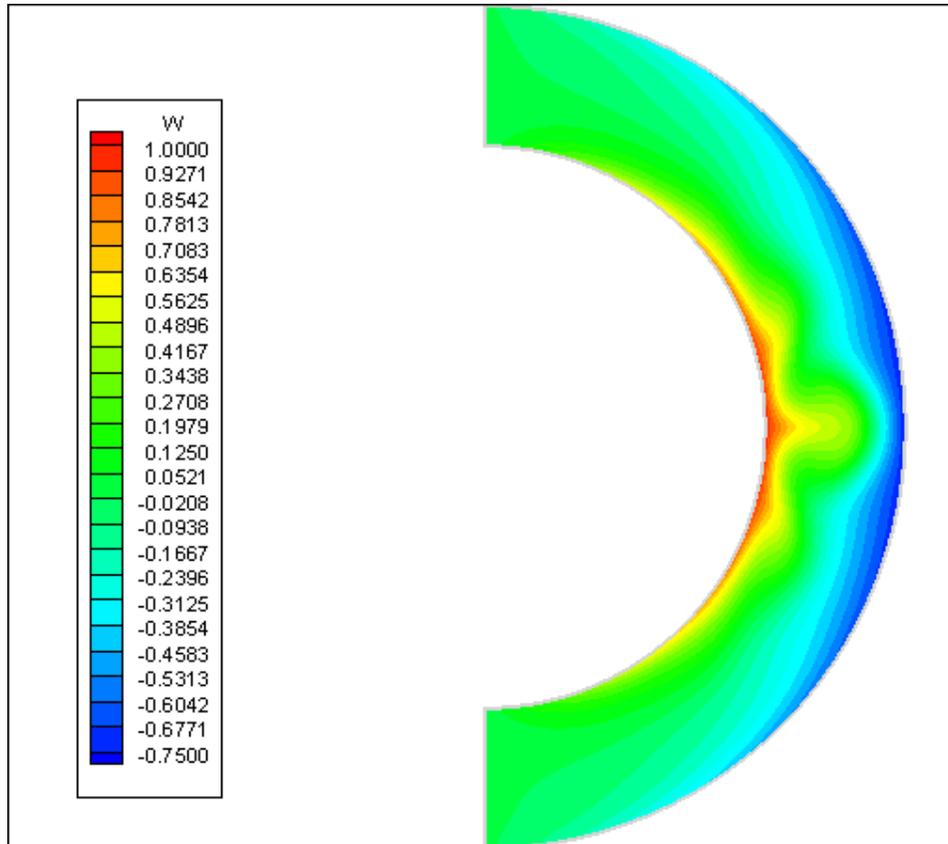


Figure 4.1-d. Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour  $Re=400$



**Figure 4.1-e. Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour  $Re=500$**

## 4.2 Evolution de la vitesse angulaire

Dans les figures 4.2-a – 4.2-e, on représente la distribution méridionale de la vitesse angulaire. Pour le nombre de Reynolds le plus faible (100), la distribution de la vitesse angulaire est quasi radiale sphérique, caractéristique d'une rotation relativement faible. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, la variation angulaire polaire de la vitesse angulaire prend de l'ampleur autour de l'équateur ; sous l'effet de l'écoulement secondaire plus intensifié. Ainsi, la distribution méridionale de la vitesse angulaire manifeste des protubérances autour de l'équateur.

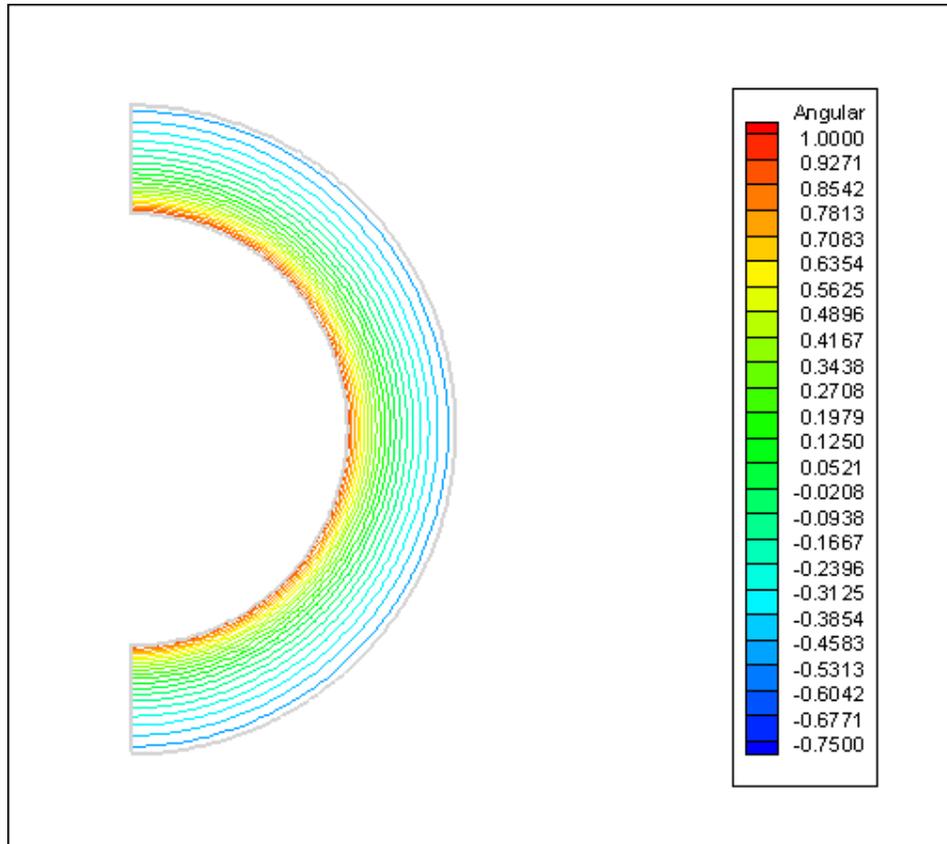


Figure 4.2-a. Distribution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Re=100$

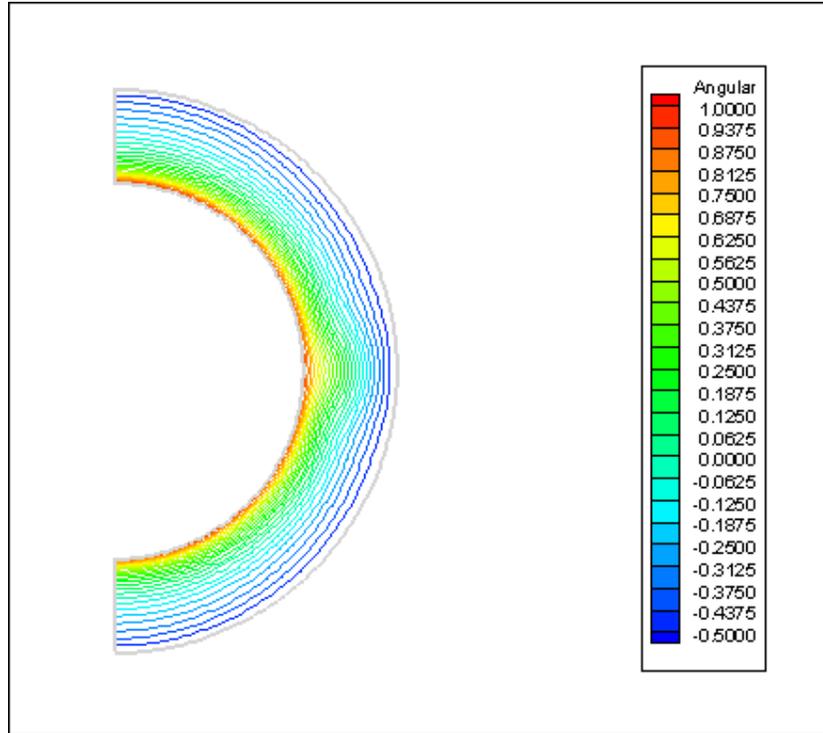


Figure 4.2-b. Distribution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Re=200$

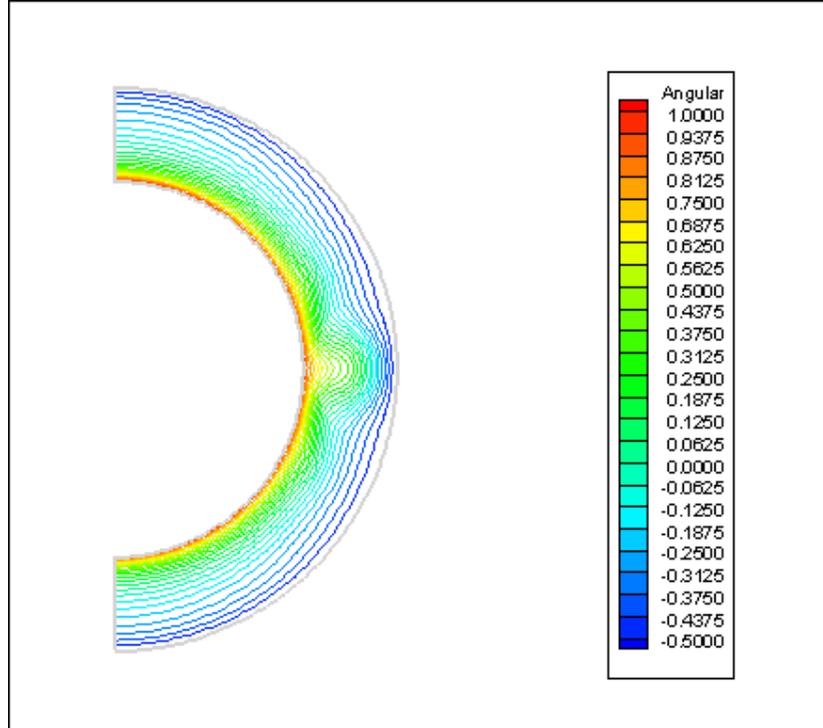


Figure 4.2-c. Distribution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Re=300$

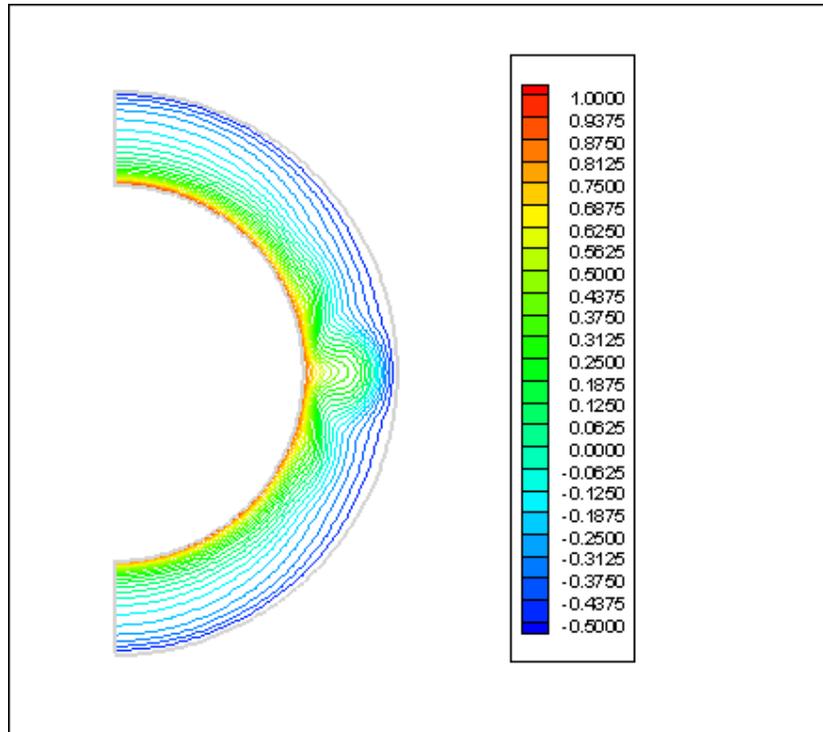


Figure 4.2-d. Distribution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Re=400$

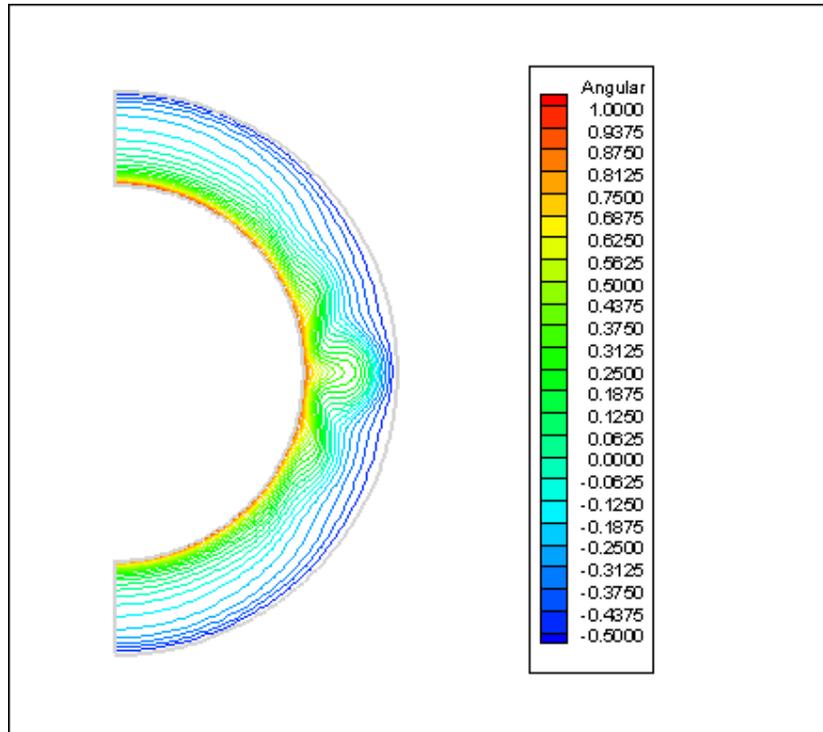


Figure 4.2-e. Distribution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Re=500$

### 4.3 Ecoulement secondaire

Le couplage des trois équations de Navier-Stokes prédit qu'une distribution spatiale de la vitesse azimutale induit un écoulement secondaire considérable dans le plan méridien, pour des nombres de Reynolds qui ne sont pas très faibles (voir les figures 4.3a – 4.3e). L'écoulement secondaire est déterminé par l'équilibre des forces centrifuges, des forces de pression et des forces visqueuses. Pour le premier nombre de Reynolds considéré ( $Re = 100$ ), l'écoulement secondaire se manifeste sous la forme de deux cellules (d'Eckman) contrarotatives dans chaque hémisphère de l'entrefer sphérique. Dans, chaque hémisphère, une cellule est collée à chaque sphère. Avec, l'augmentation du nombre de Reynolds, la forme des cellules de l'écoulement secondaire change: les cellules accolées à la sphère intérieure subissent un pincement à une certaine distance de l'équateur et près de la sphère intérieure. Le pincement est plus fort avec l'augmentation

---

du nombre de Reynolds. L'écoulement secondaire induit par l'écoulement principal (la rotation suivant la direction azimutale) affecte la distribution de ce dernier comme l'exige le couplage des composantes des vitesses dans les équations modélisantes. Ainsi, les isotaques de la vitesse azimutale sont plus déformées par le resserrement du pincement de l'écoulement secondaire (voir les figures 4.1-c, 4.1-d et 4.1-e).

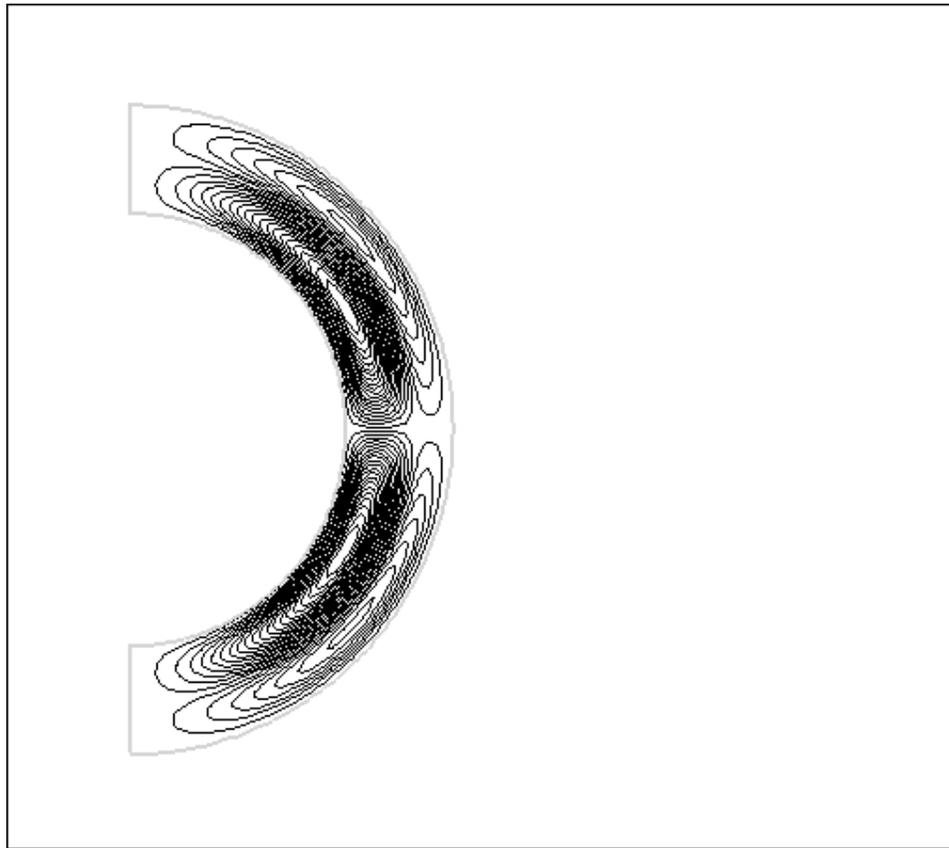
Dans ce qui suit, nous présentons une interprétation physique de l'apparition du phénomène de pincement. Dans notre étude, la fonction de courant est calculée avec la

définition  $V = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$  et avec la valeur arbitraire  $\psi = 0$  à la paroi de la sphère

intérieure. Si on examine la distribution de la fonction de courant de la cellule, près de la sphère intérieure, dans l'hémisphère sud, on constate que les valeurs de la fonction de courant, sont positives ou nulles (la cellule tourne dans le sens horaire). A la limite extérieure de la cellule la fonction de courant est nulle, et elle augmente en allant à l'intérieure de la cellule. Pour le nombre de Reynolds le plus faible (100), le maximum (local) de la vorticité azimutale se trouve au milieu du noyau de la cellule où se localise le maximum de la fonction de courant comme prévu. En s'éloignant du noyau, suivant la direction polaire (vers le pôle sud ou vers l'équateur) la vorticité azimutale diminue; cette distribution de la vorticité n'induit pas un phénomène de pincement de la cellule de l'écoulement secondaire (voir les figures 4.3-f et 4.3-g). Cependant, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, à l'intérieur de la même cellule de l'écoulement secondaire (accolée à la sphère intérieure, dans l'hémisphère sud), les effets d'étirement des lignes de la vorticité augmentent la vorticité azimutale près de l'équateur. Toujours à l'intérieur de la même cellule, en s'éloignant de l'équateur vers le pôle sud, la vorticité diminue puis augmente. Cette variation polaire de la vorticité azimutale diminue le niveau de la

---

fonction de courant (dans la zone de diminution de la vorticité) et le rapproche de celui de la fonction de courant à la limite de la cellule et ceci crée le phénomène de pincement de la cellule de l'écoulement secondaire (voir les figures 4.3-h et 4.3-i). Un raisonnement similaire peut être fait pour expliquer l'induction du pincement de la cellule, de l'écoulement secondaire, accolée à la sphère intérieure, dans l'hémisphère nord; mais avec l'inversement des signes de la fonction de courant et de la vorticité.



**Figure 4.3 -a. Ecoulement secondaire pour  $Re=100$**

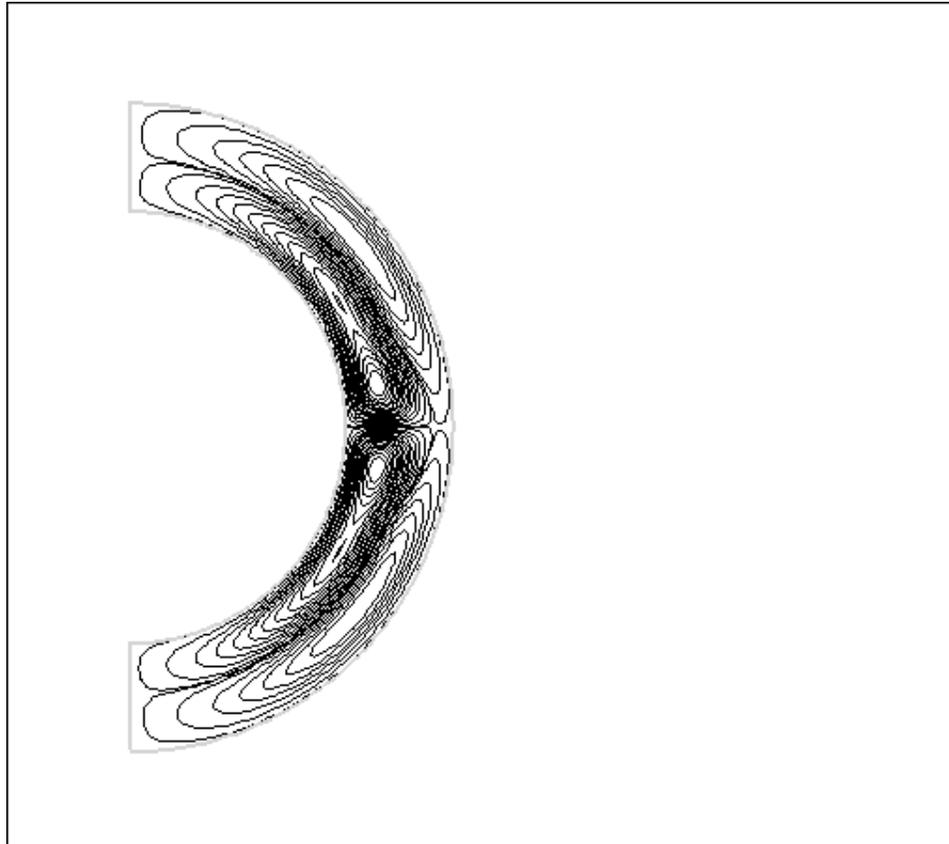


Figure 4.3-b. Ecoulement secondaire pour  $Re=200$

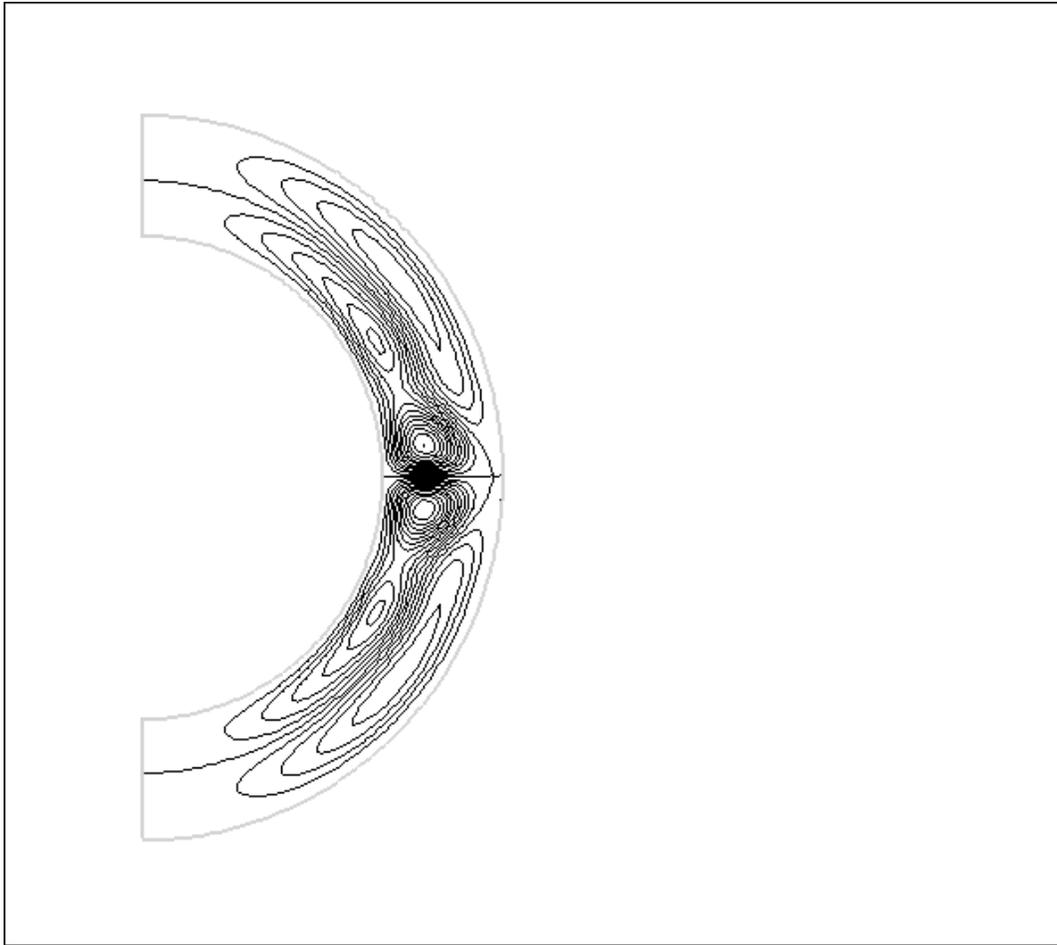


Figure 4.3-c. Ecoulement secondaire pour  $Re=300$

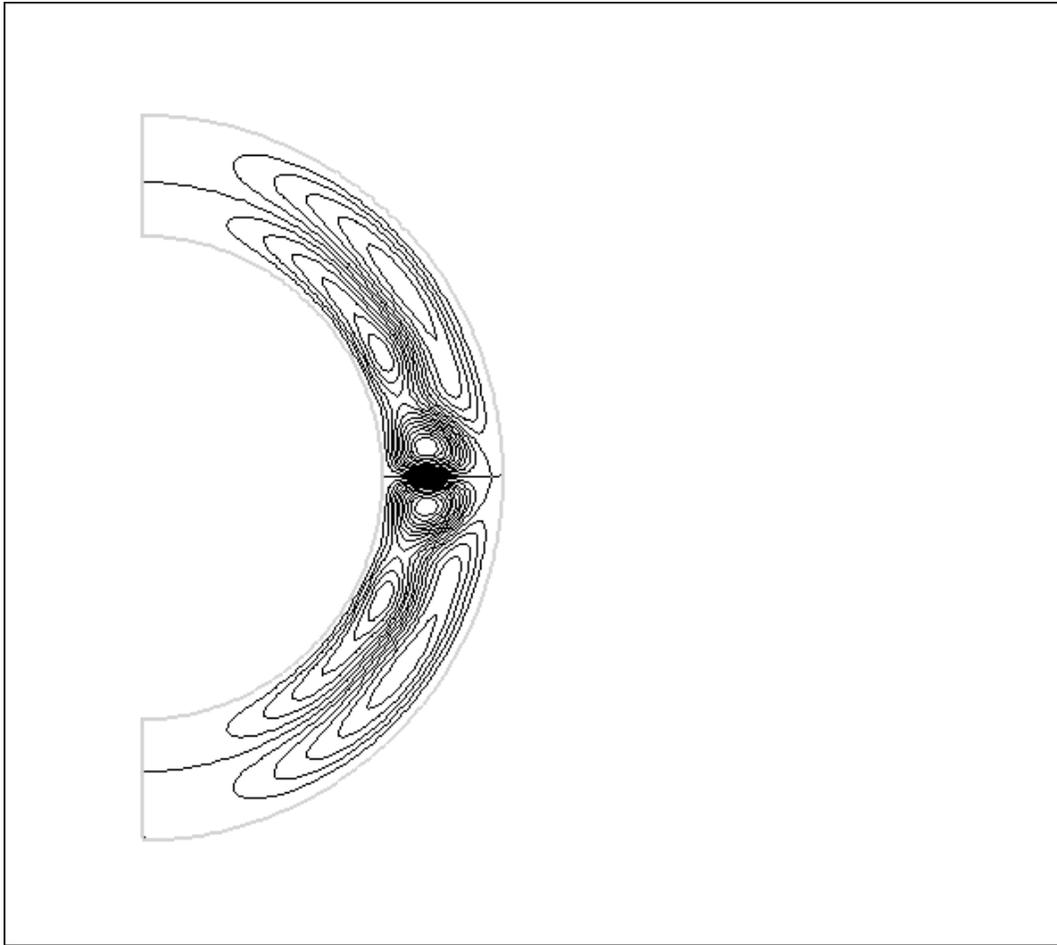


Figure 4.3-d. Ecoulement secondaire pour  $Re=400$

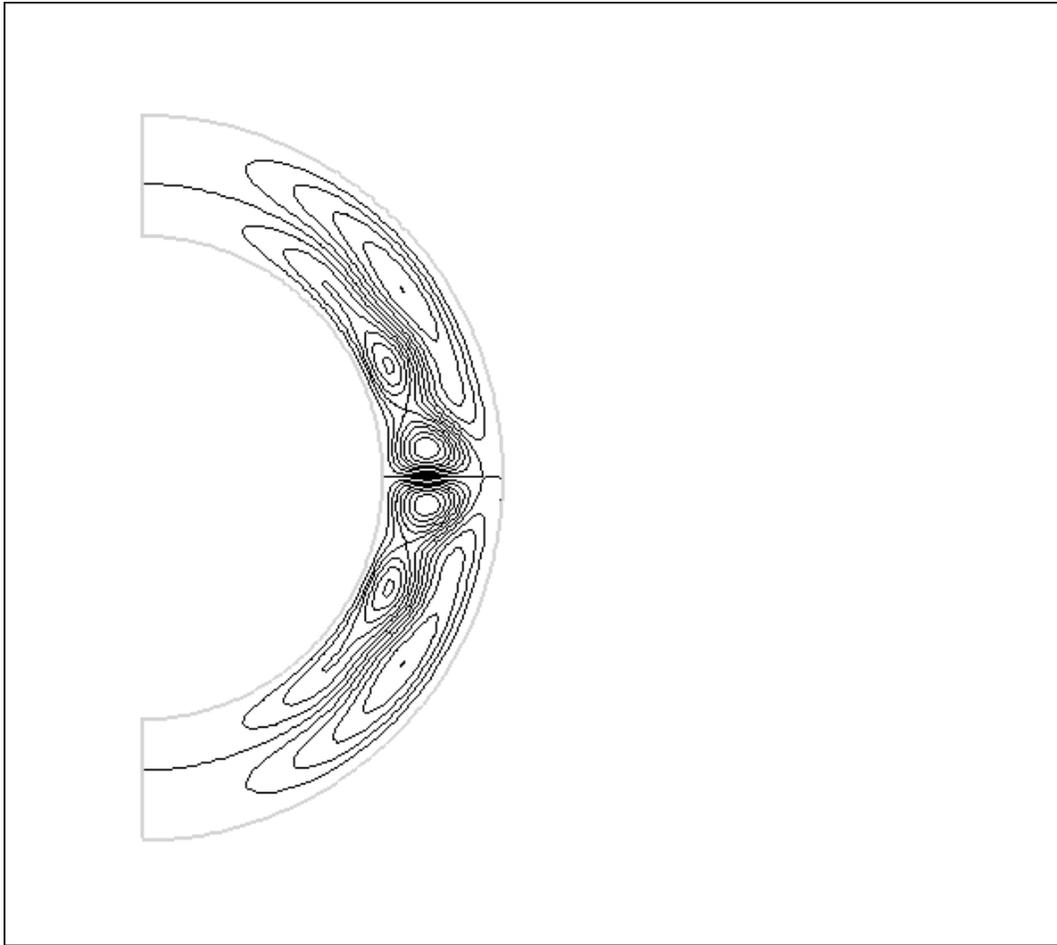
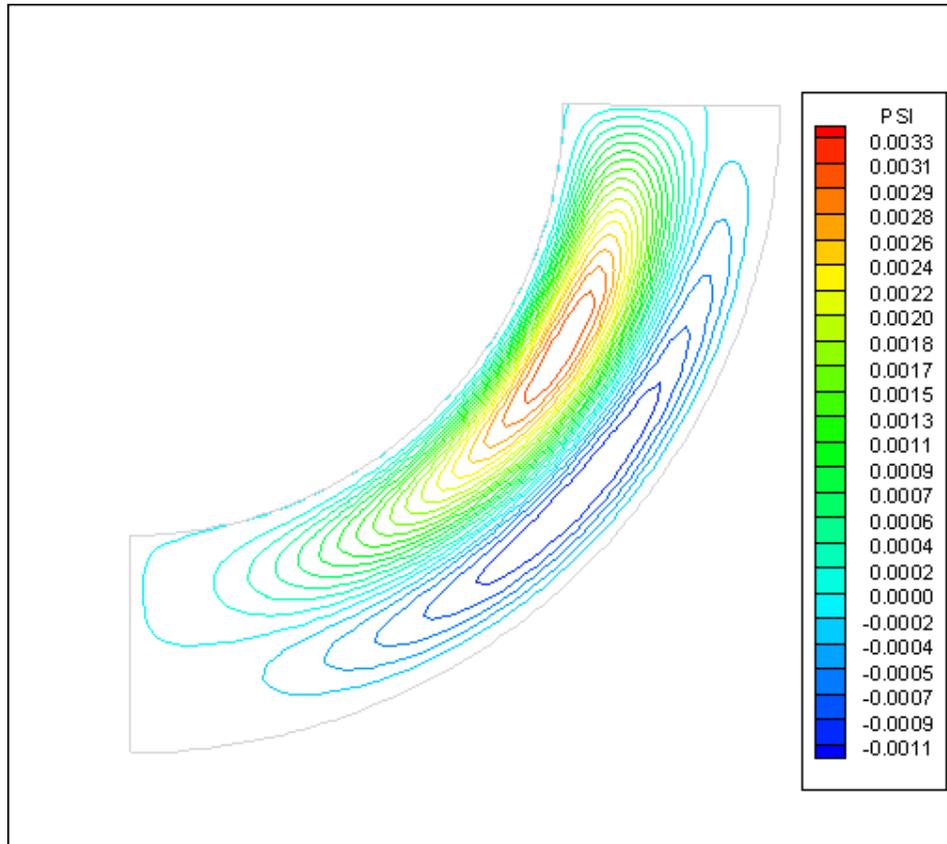
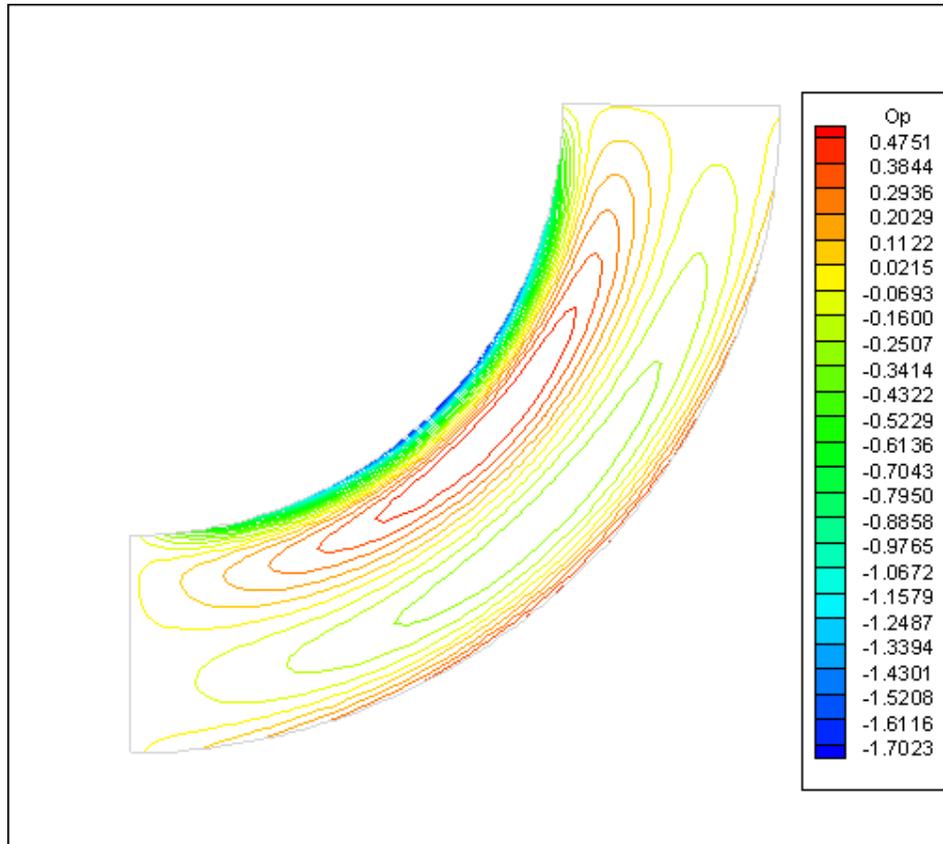


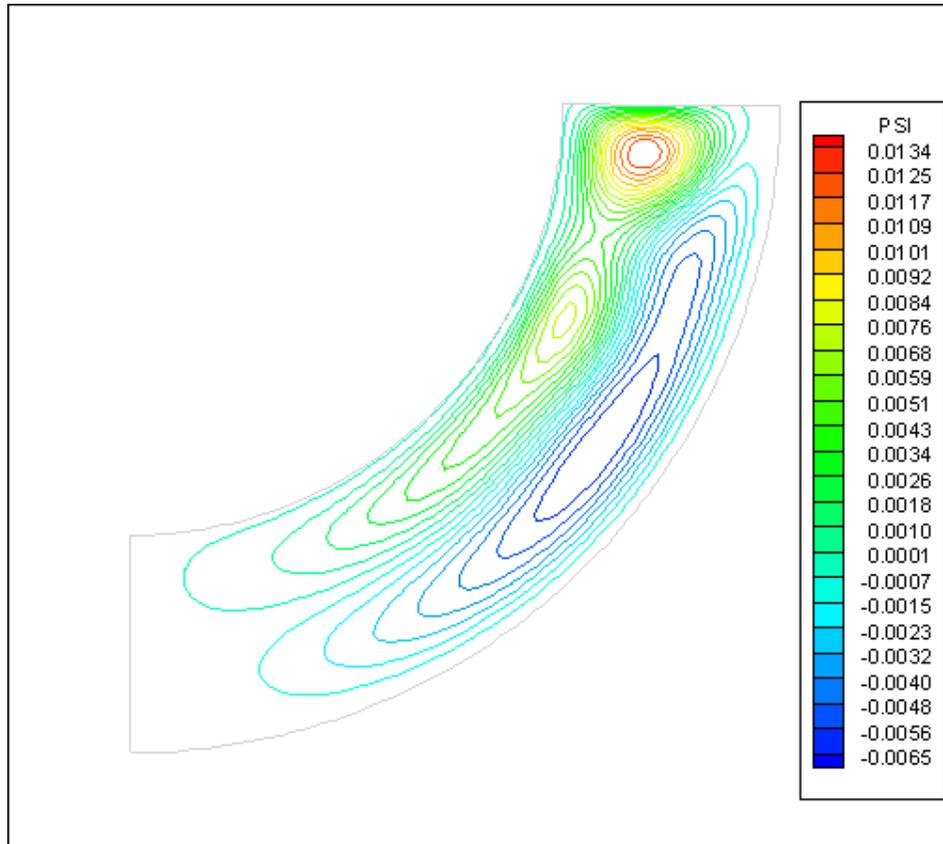
Figure 4.3-e. Ecoulement secondaire pour  $Re=500$



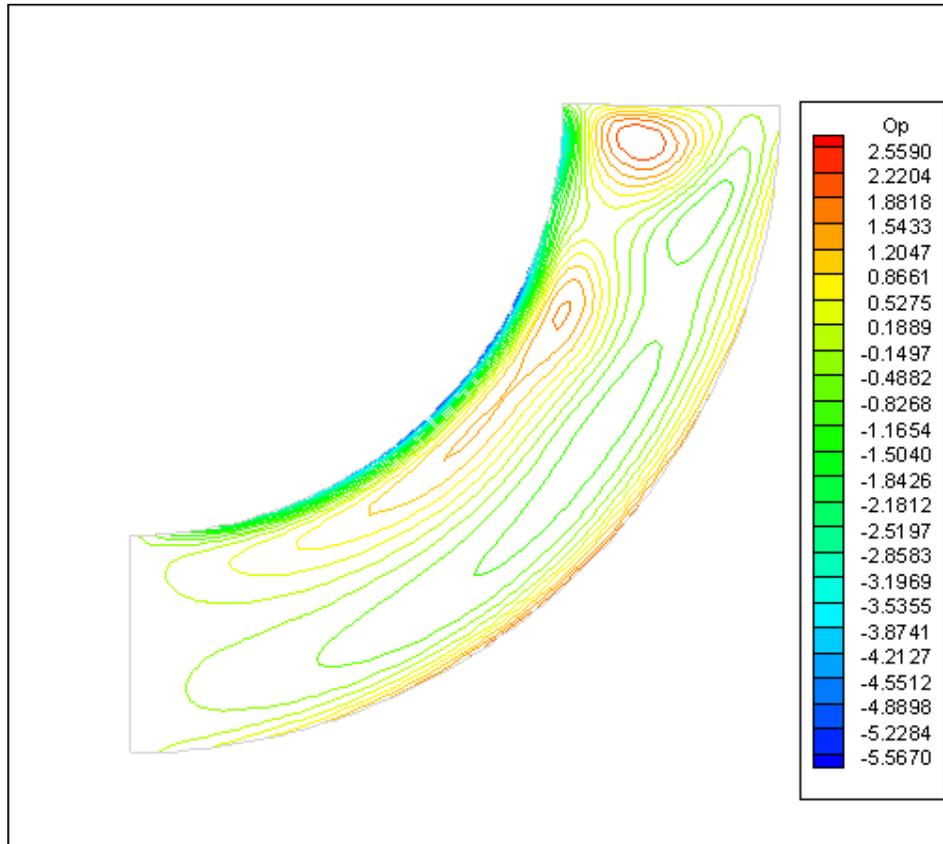
**Figure 4.3-f** Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère sud pour  $Re=100$ .



**Figure 4.3-g Vorticité azimutale de l'écoulement dans l'hémisphère sud  
pour  $Re=100$ .**



**Figure 4.3-h Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère sud pour  $Re=400$ .**



**Figure 4.3-i Vorticité azimutale de l'écoulement dans l'hémisphère sud pour  $Re=400$ .**

#### 4.4 Distribution de la pression

Dans la figure 4.4-a – 4.4-e, on illustre la distribution méridionale de la pression. Cette distribution montre une pression maximale au niveau de l'équateur à la surface de la sphère extérieure. Loin des pôles, la pression croît radialement. Suivant la direction polaire on constate une diminution monotone de la pression en allant de l'équateur vers les pôles. Cette distribution est affectée par l'intensité de l'écoulement secondaire, dépendante du nombre de Reynolds, qui déforme les surfaces isobares.

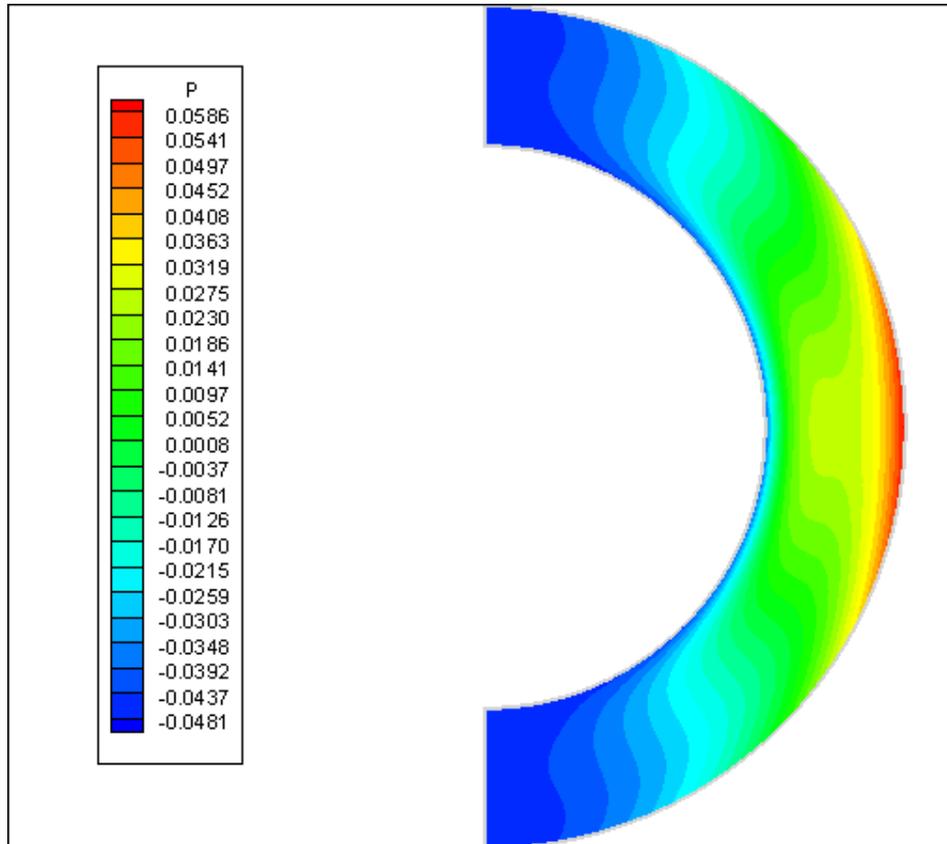


Figure 4.4-a. Distribution méridionale de la pression pour  $Re=100$

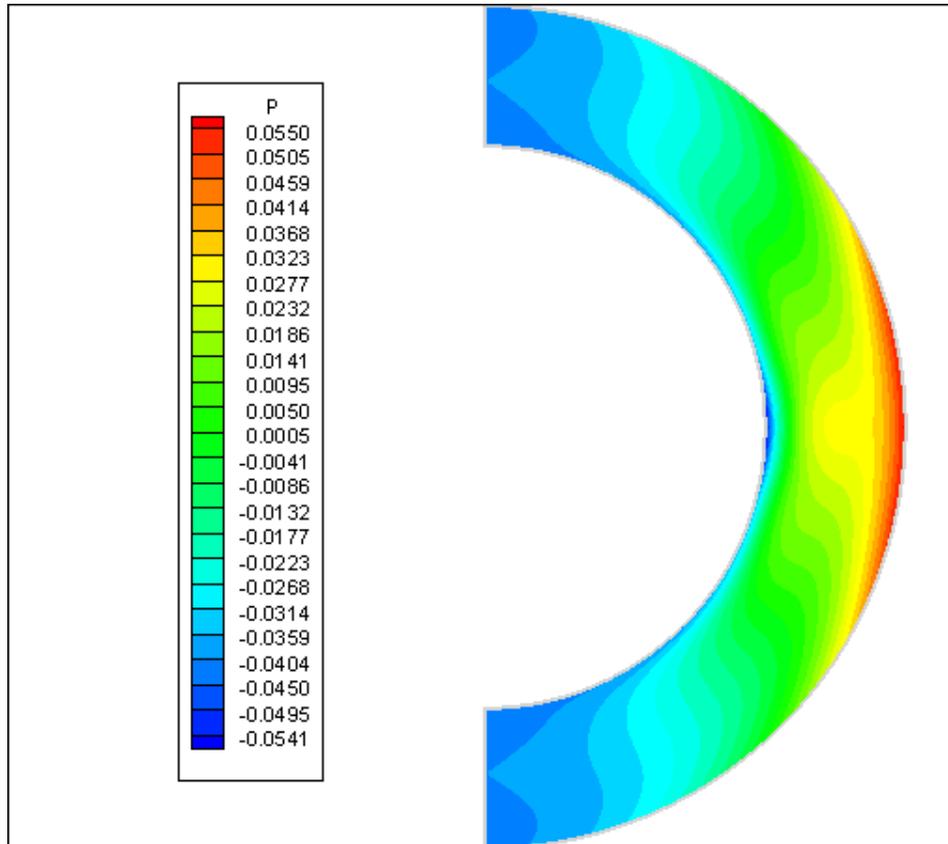


Figure 4.4-b. Distribution méridionale de la pression pour  $Re=200$

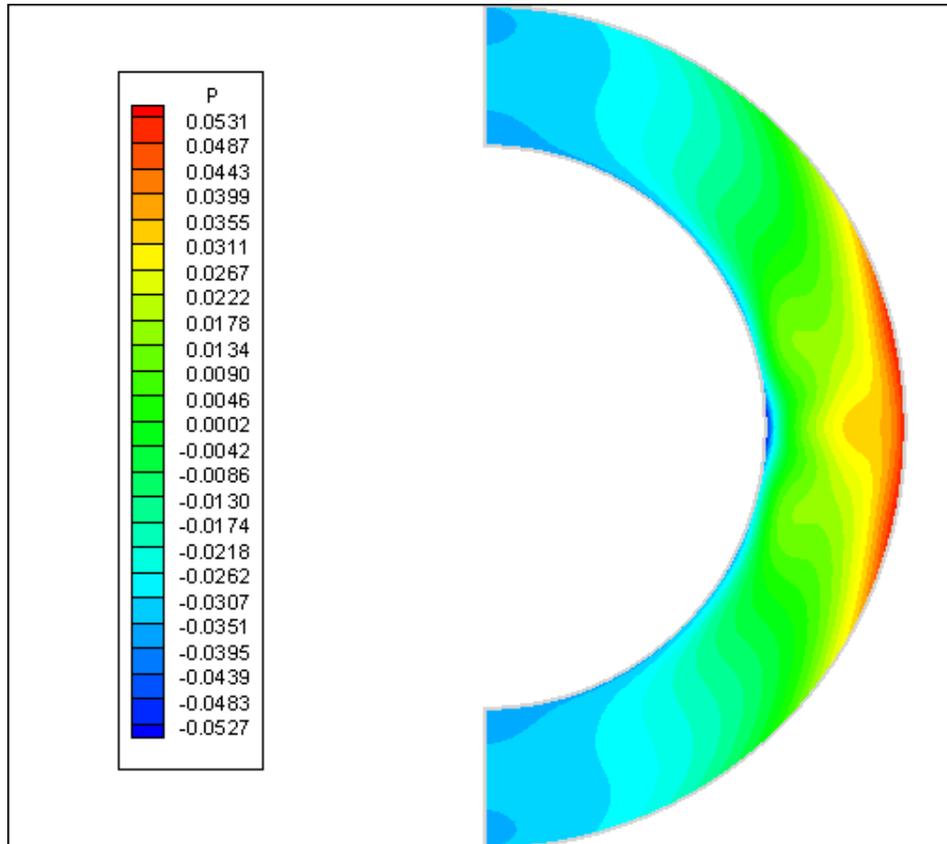


Figure 4.4-c Distribution méridionale de la pression pour  $Re=300$

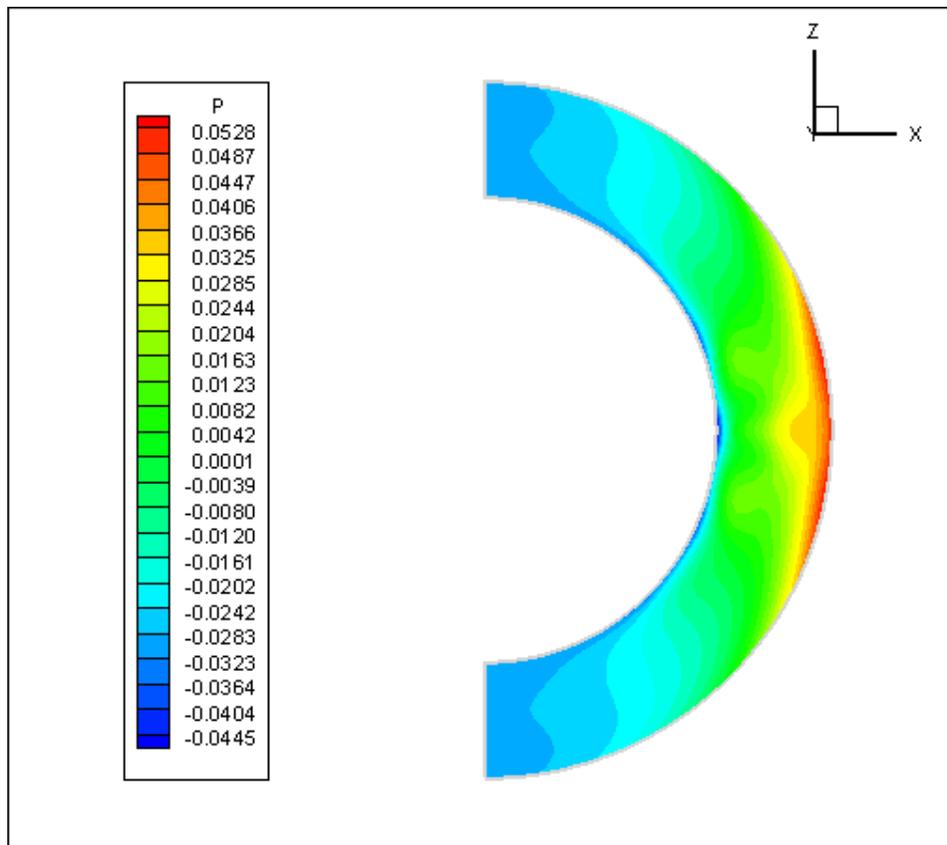


Figure 4.4-d. Distribution méridionale de la pression pour  $Re=400$

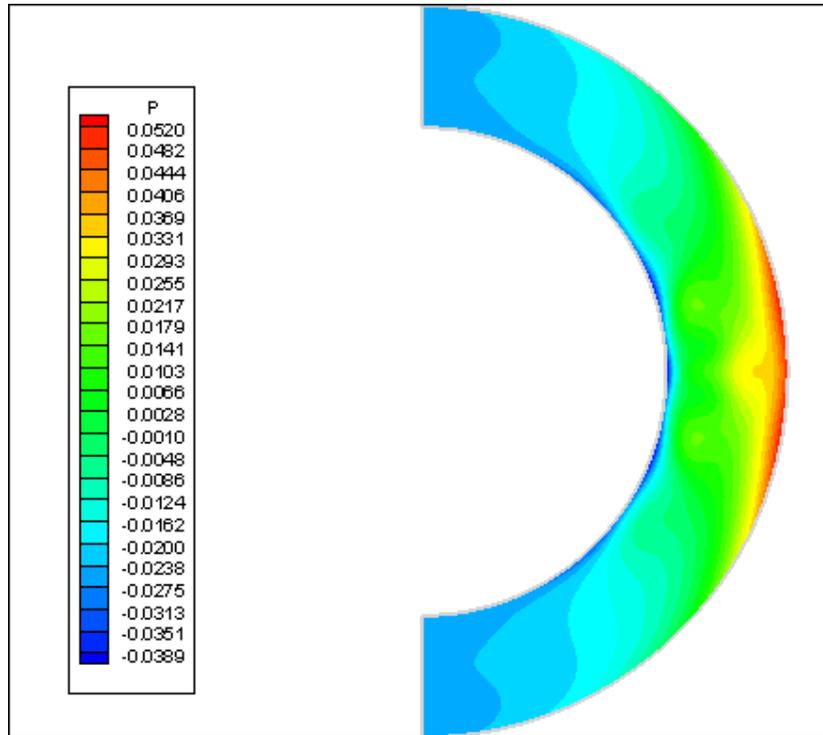


Figure 4.4-e. Distribution méridionale de la pression pour  $Re=500$

#### 4.5 Aspect énergétique de l'écoulement

Dans ce qui suit, on donne une interprétation énergétique de l'écoulement entre deux sphères contrarotatives. A l'état stationnaire, l'écoulement a besoin d'une certaine énergie cinétique pour entretenir son mouvement. Une partie de l'énergie de l'écoulement est transformée en chaleur par la dissipation visqueuse (effet des frottements visqueux dans l'écoulement). Cette énergie dissipée doit être compensée par l'énergie transférée par les sphères rotatives au fluide. L'énergie nécessaire à la rotation des deux sphères est obtenue par des moteurs extérieurs. On peut quantifier la puissance nécessaire à la rotation de chaque sphère par le produit scalaire du vecteur du torque axial (moment axial de la force de cisaillement à la paroi de la sphère) et du vecteur de la vitesse angulaire de la sphère. Les vecteurs des vitesses angulaires des rotations des sphères sont connus ( $\Omega_1 \mathbf{e}_z$  et  $\Omega_2 \mathbf{e}_z$ ). Le vecteur du moment de la force de cisaillement à la surface de la sphère intérieure est défini .

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{r=R_1} &= \int_0^{2p} \int_0^p [r \sin q] \mathbf{e}_r \wedge \left[ -\mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right) r^2 \sin q dq df \right] \mathbf{e}_f \\
&= -\int_0^{2p} \int_0^p \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right) r^3 \sin^2 q dq df \right] \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Le vecteur du moment de la force de cisaillement à la surface de la sphère extérieure est défini par:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{r=R_2} &= \int_0^{2p} \int_0^p [r \sin q] \mathbf{e}_r \wedge \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right) r^2 \sin q dq df \right] \mathbf{e}_f \\
&= \int_0^{2p} \int_0^p \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right) r^3 \sin^2 q dq df \right] \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dans l'équation précédente, on définit:

$$\text{La contrainte de cisaillement à la paroi: } t_{rf} = t_{fr} = \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial f} \right)$$

$$\text{Compte tenu de l'axisymétrie de l'écoulement, } t_{rf} = t_{fr} = \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right)$$

L'élément différentiel de la surface sphérique  $r^2 \sin q dq df$

Le vecteur unitaire azimuthal  $\mathbf{e}_f$

Le vecteur unitaire radial cylindrique  $\mathbf{e}_r$

Le rayon cylindrique  $r = r \sin q$

La puissance nécessaire pour la rotation de la sphère intérieure est:

$$\begin{aligned}
Q &= -\int_0^{2p} \int_0^p \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right) r^3 \sin^2 q dq df \right]_{r=R_1} \mathbf{e}_z \bullet \Omega_1 \mathbf{e}_z \\
&= -\int_0^{2p} \int_0^p \Omega_1 \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right) r^3 \sin^2 q dq df \right]_{r=R_1}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

La puissance nécessaire pour la rotation de la sphère extérieure est:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2p} \int_0^p \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right) r^3 \sin^2 q \, dq \, df \right]_{r=R_2} \mathbf{e}_z \bullet \Omega_2 \mathbf{e}_z \\ &= \int_0^{2p} \int_0^p \Omega_2 \left[ \mathbf{m} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right) r^3 \sin^2 q \, dq \, df \right]_{r=R_2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

D'après le théorème du moment cinétique, on peut montrer qu'en régime stationnaire, la somme vectorielle des torques des forces de cisaillement aux deux surfaces sphérique est nulle: les torques ont des signes opposés et des modules égaux. Cette égalité des modules des torques est représentative de l'atteinte du régime permanent. Considérons le moment cinétique axial du fluide (ayant une masse volumique  $\bar{r}$ ) de l'entrefer sphérique en rotation (autour de l'axe vertical  $z$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= L \dot{\mathbf{e}}_z = \int_0^{2p} \int_0^p \int_{R_1}^{R_2} [r \sin q] \mathbf{e}_r \wedge [\bar{r} r^2 \sin q \, dr \, dq \, df \, W(r, q, f, t)] \mathbf{e}_f \\ &= \int_0^{2p} \int_0^p \int_{R_1}^{R_2} [\bar{r} r^3 \sin^2 q \, dr \, dq \, df \, W(r, q, f, t)] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour le volume de contrôle égal à celui de l'entrefer sphérique fluide, le théorème du moment cinétique s'énonce comme suit:

Le taux de variation temporelle totale du moment cinétique axial est égal à la somme des moments axiaux (torques suivant la direction axiale) des forces extérieures appliquées au fluide de l'entrefer.

$$\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \dot{\mathbf{T}}_{\text{forces extérieures}} \quad (4.12)$$

Sachant que les forces extérieures de pression sont suivant la direction radiale sphérique (normales aux surfaces sphériques), elles n'ont pas de moments axiaux. La force de gravité n'est pas prise en compte dans cette étude, et même si elle est prise en compte, elle n'a pas de moment axial (elle est suivant la direction de l'axe de rotation). Donc

seuls les deux moments axiaux des forces de cisaillement aux surfaces sphériques sont considérés:

$$\frac{d\dot{L}}{dt} = \dot{T}_{force\ de\ cisaillement\ à\ r=R_1} + \dot{T}_{force\ de\ cisaillement\ à\ r=R_2} \quad (4.13)$$

Sachant qu'en régime stationnaire, la vitesse azimutale est axisymétrique et indépendante du temps:  $W(r, q, f, t) = W(r, q)$ , le moment cinétique axial est stationnaire et sa dérivée temporelle totale est nulle; et il vient:

$$\dot{0} = \dot{T}_{force\ de\ cisaillement\ à\ r=R_1} + \dot{T}_{force\ de\ cisaillement\ à\ r=R_2} \quad (4.14)$$

La somme vectorielle des torques (de signes opposés) est nulle et leurs modules sont égaux.

On définit un torque non dimensionnel égal au torque normalisé par  $m\Omega_1 R_1^3$  et dans le tableau 1, on présente les modules du torque des surfaces sphérique des cas considérés. Il est clair que le torque non dimensionnel augmente avec le nombre de Reynolds. Ceci est dû à l'augmentation des forces de cisaillement (non dimensionnelles) aux surfaces sphériques avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

**Tableau 1** : Variation du torque adimensionnel des forces visqueuses aux surfaces sphériques en fonction du nombre de Reynolds.

<b>Nombre de Reynolds</b>	<b>Module du torque adimensionnel</b>
100	57.6
200	58.2
300	67.6
400	74.7
500	79.4

### Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié numériquement l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux compris entre deux sphères concentriques en contrarotation. dans un entrefer relativement large,  $\beta=0.5$ , et un nombre de Rossby relativement modéré, égale à  $-0.5$  et des nombres de Reynolds variant entre 100 et 500 par pas de 100. Le problème a été modalisé mathématiquement par l'équation de la continuité et les équations de la quantité de mouvement dans les trois directions radiale polaire et azimutale des coordonnées sphériques . La discrétisation des termes temporels dans les équations de Navier Stokes est du second ordre. Quant à la discrétisation temporelle des termes convectifs et non linaires, elle est aussi du second ordre et suit le schéma d'Adam-Bashforth. Les termes diffusifs et de pression ont été évalués au temps  $t+\Delta t$ . Les dérivées spatiales ont été discrétisées en utilisant la méthode des différences centrées du second ordre.

La discrétisation des équations modélisantes a généré des systèmes d'équations algébriques dites équations de discrétisation. On a résolu séquentiellement ces systèmes d'équations de discrétisations en utilisant l'algorithme SIMPLER. Chaque système linéaire d'équations est résolu par la méthode itérative du balayage. La technique de balayage englobe l'utilisation de l'algorithme de Thomas ( TDMA ) , dans la direction radiale et méridionale , et de l'algorithme de thomas cyclique ( TDMAC) pour la direction azimutale.

On a obtenu deux régimes d'écoulement. Le premier régime, obtenu avec le nombre de Reynolds égale à 100 est représenté par un écoulement secondaire sous la forme de cellules d'Eckman . Ce régime est caractéristique d'une rotation relativement faible.

Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, on obtient un autre régime représenté par les cellules d'Eckman pincées près de l'équateur. Le pincement est plus fort avec l'augmentation du nombre de Reynolds et peut être le précurseur d'une division des cellules pincées, pour des nombres de Reynolds supérieur à 500.

Comme perspectives, on peut considérer le cas ou les deux sphères seraient sujet à un transfert de chaleur, la présence d'un champ magnétique pourrait aussi être considéré

## LISTE DES FIGURES

	<b>Page</b>
<b>Figure 2.1</b> Schéma des sphères concentriques contra rotatives autour de l'axe Z.....	9
<b>Figure 3.1</b> Volume fini typique.....	17
<b>Figure 3.2</b> Le domaine de calcul discrétisé .....	18
<b>Figure 3.3</b> Maillage typique dans le plan $r-\theta$ , nomenclature des distances polaires.....	19
<b>Figure 3.4</b> Maillage typique dans le plan $r-f$ , nomenclature des distances radiales.....	19
<b>Figure 3.5</b> Maillage typique dans le plan $r-f$ , nomenclature des distances azimutales.....	20
<b>Figure 3.6</b> Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la variable dépendante de l'interface.....	24
<b>Figure 3.7</b> Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la dérivée radiale de la variable dépendante a l'interface.....	25
<b>Figure 3.8</b> Maillage décalé suivant la direction radiale, plan $r-\theta$ .....	27
<b>Figure 3.9</b> Maillage décalé suivant la direction radiale plan $r-f$ .....	27
<b>Figure 3.10</b> Maillage décalé suivant la direction polaire, plan $r-\theta$ .....	34
<b>Figure 3.11</b> Maillage décalé suivant la direction méridionale, plan $\theta - f$ .....	35
<b>Figure 3.12</b> Maillage décalé suivant la direction azimutale, plan $r-f$ .....	43
<b>Figure 3.13</b> Maillage décalé suivant la direction azimutale, plan $\theta - f$ .....	43
<b>Figure 3.14</b> Fonction de courant dans un plan méridional calculé pour $\beta=0.5$ , $Re_1 = 100$ et $Ro = -1$ .....	66
<b>Figure 4.1-a</b> Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour $Re = 100$ .....	70
<b>Figure 4.1-b</b> Distribution méridionale de la vitesse azimutale pour $Re = 200$ .....	70
<b>Figure 4.1-c</b> Distribution méridional de la vitesse azimutale pour $Re = 300$ .....	71
<b>Figure 4.1-d</b> Distribution méridional de la vitesse azimutale pour $Re = 400$ .....	72
<b>Figure 4.1-e</b> Distribution méridional de la vitesse azimutale pour $Re = 500$ .....	73
<b>Figure 4.2-a</b> Distribution méridional de la vitesse angulaire pour $Re = 100$ .....	74
<b>Figure 4.2-b</b> Distribution méridional de la vitesse angulaire pour $Re = 200$ .....	75
<b>Figure 4.2-c</b> Distribution méridional de la vitesse angulaire pour $Re = 300$ .....	75
<b>Figure 4.2-d</b> Distribution méridional de la vitesse angulaire pour $Re = 400$ .....	76

## Liste des figures

---

---

<b>Figure 4.2-e</b> Distribution méridional de la vitesse angulaire pour $Re = 500$ .....	77
<b>Figure 4.3-a</b> Ecoulement secondaire pour $Re=100$ .....	79
<b>Figure 4.3-b</b> Ecoulement secondaire pour $Re=200$ .....	80
<b>Figure 4.3-c</b> Ecoulement secondaire pour $Re=300$ .....	81
<b>Figure 4.3-d</b> Ecoulement secondaire pour $Re=400$ .....	82
<b>Figure 4.3-e</b> Ecoulement secondaire pour $Re=500$ .....	83
<b>Figure 4.3-f</b> fonction de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère sud pour $Re = 100$ .....	84
<b>Figure 4.3-g</b> Vorticité azimuthale de l'écoulement dans l'hémisphère sud pour $Re = 100$ .....	85
<b>Figure 4.3-h</b> Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisphère sud pour $Re=400$ .....	86
<b>Figure 4.3-i</b> Vorticité azimuthale de l'écoulement dans l'hémisphère sud pour $Re = 400$ ... ..	87
<b>Figure 4.4 –a</b> Distribution méridional de la pression pour $Re = 100$ .....	88
<b>Figure 4.4 –b</b> Distribution méridional de la pression pour $Re = 200$ .....	89
<b>Figure 4.4 –c</b> Distribution méridional de la pression pour $Re = 300$ .....	90
<b>Figure 4.4 –d</b> Distribution méridional de la pression pour $Re = 400$ .....	91
<b>Figure 4.4 –e</b> Distribution méridional de la pression pour $Re = 500$ .....	92

## Nomenclature

---

---

### Nomenclature

B	point se trouvant dans le sens négatif de la direction polaire par rapport au point P
$b$	face située entre les deux points P et B
E	point se trouvant dans le sens positif de la direction azimutale par rapport au point P
$e$	face située entre les deux points E et P
F	point se trouvant dans le sens positif de la direction polaire par rapport au point P
$f$	face située entre les deux points F et P
N	point se trouvant dans le sens positif de la direction radiale par rapport au point P
$n$	face située entre les deux points N et P
P	point se trouvant au centre du volume de contrôle typique (point de référence)
$r$	distance radiale
Re	nombre de Reynolds
Ro	nombre de Rossby
S	point se trouvant dans le sens négatif de la direction radiale par rapport au point P
$s$	face située entre les deux points P et S
T	torque
$t$	symbole du temps
U	composantes radiales de la vitesse
V	composantes polaires de la vitesse
W	composantes azimutales de la vitesse
W	point se trouvant dans le sens négatif de la direction azimutale par rapport au point P
$w$	face située entre les deux points P et W
$Dr_n$	distance radiale entre deux points du maillage décalé non typique
$d\theta_f$	distance entre deux points du maillage typique non décalé dans la direction polaire
$df_e$	distance entre deux points du maillage typique non décalé dans la direction azimutale

### Lettres grecques

$\beta$	rapport d'aspect
$f$	angle azimutal
$\Phi$	variable indépendante
$\theta$	angle polaire
$m$	viscosité dynamique du fluide

## Nomenclature

---

---

$n$	viscosité cinématique du fluide
$\Omega_1$	vitesse angulaire de la sphère intérieure
$\Omega_2$	vitesse angulaire de la sphère extérieure
$\rho$	Rayon cylindrique
$\bar{\rho}$	masse volumique du fluide
$\omega$	vorticité
$\psi$	fonction de courant
$\Delta t$	incrément temporel
$\Delta\theta_p$	distance polaire entre deux faces du maillage typique non décalé
$\Delta f_p$	distances radiales entre deux faces du maillage typique non décalé

### Indices

$U$	indique le décalage suivant la direction radiale
$v$	indique le décalage suivant la direction polaire
$w$	indique le décalage suivant la direction azimutale
$r, \theta, \phi$	Relatif aux directions radiale, polaire et azimutale.

### Exposants

$t$	indique que le terme est évalué au temps $t$
$t-\Delta t$	indique que le terme est évalué au temps $t-\Delta t$
$t+\Delta t$	indique que le terme est évalué au temps $t+\Delta t$

## Références bibliographiques

- [1] M. Junk, C. Egbers, Isothermal Spherical Couette Flow, *11<sup>th</sup> Int. Couette-Taylor Workshop, Physics of Rotating Fluids*, C. Egbers, G. Pfister (Eds.) Held at Bremen, Germany 20-23 July 1999, pp.215-233.
- [2] I. Proudman, The Almost Rigid Rotation of Viscous Fluid Between Concentric Spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 1, 1956, pp.505-516.
- [3] K. Stewartson, On Almost Rigid Rotations, *J. Fluid Mech.*, Vol. 26, Part 1, 1966, pp.131-144.
- [4] B. R. Munson, D. D. Joseph, Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres, Basic Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, Part 2, 1971, pp.289-303.
- [5] B. R. Munson, D. D. Joseph, Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres, Hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, Part 2, 1971, pp.305-318.
- [6] J.-P. Bonnet, T. A. de Roquefort, Ecoulement Entre Deux Sphères Concentriques en Rotation, *J. Méc.*, Vol. 15, N°3, 1976, pp.373-396.
- [7] M. Wimmer, Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Two Concentric Rotating Spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 103, 1981, pp.117-131.
- [8] I. M. Yavorskaya, Y. N. Belyaev, Hydrodynamical Stability in Rotating Spherical layers: Application to Dynamics of Planetary Atmospheres, *Acta Astronautica*, Vol. 13, N°6/7, 1986, pp.433-440.
- [9] B. V. Pal'tsev, A. V. Svatsev, I. I. Chechel', Numerical Study of the Basic Stationary Spherical Couette Flow at Low Reynolds Numbers, *Comp. Math. and Math. Physics*, Vol. 47, N°4, 2007, pp.664-686.
- [10] R. L. Panton. Incompressible Flow. John Wiley & Sons. New York. 1984.
- [11] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [12] M. D. Greenberg, "Foundations of Applied Mathematics". Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey. 1978.

## Références bibliographiques

---

---

## Résumé

Cette étude numérique concerne l'évolution de l'écoulement de Couette sphérique, entre deux sphères contrarotatives, avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Le but de l'étude est la détermination de l'apparition et de l'évolution du phénomène de pincement de l'écoulement secondaire dans le plan méridien avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'écoulement est modélisé par les équations différentielles, aux dérivées partielles, de continuité et de Navier-Stokes, avec des conditions initiales et aux limites appropriées, exprimées dans les coordonnées sphériques. La forme non dimensionnelle du modèle mathématique fait apparaître trois paramètres de contrôle : le rapport d'aspect,  $b = (R_2 - R_1) / R_1$  est arbitrairement fixé à 0.5, le nombre de Rossby ( $Ro = \Omega_2 / \Omega_1$ ) est arbitrairement fixé à -0.5 et le nombre de Reynolds  $Re = (R_1^2 \Omega_1 / \nu)$  est varié entre 100 et 500 avec un incrément de 100. Les équations modélisantes sont résolues avec la méthode des volumes finis. La discrétisation spatiotemporelle est avec une précision du second ordre. Le maillage numérique a 32 points suivant la direction radiale, 189 points suivant la direction de l'angle polaire et 32 points suivant la direction de l'angle azimutal. L'évolution temporelle est accomplie avec un pas de temps non dimensionnel égal à  $10^{-3}$ . Les écoulements des cas considérés sont stationnaires et axisymétriques. Pour le nombre de Reynolds initial ( $Re = 100$ ), l'écoulement secondaire, dans le plan méridien, se manifeste sous la forme de deux vortex contrarotatifs (cellules d'Eckman) dans chaque hémisphère. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, les deux cellules près de la sphère intérieure sont déformées par un phénomène de pincement près de l'équateur. Le pincement apparaît faiblement avec le nombre de Reynolds 200; mais se resserre continuellement avec l'augmentation du nombre de Reynolds entre 200 et 500. Cette évolution prédit que le phénomène de pincement est le précurseur d'une possible division des cellules, près de la sphère intérieure, en deux cellules; entraînant une bifurcation importante

## Résumé

---

de l'écoulement, pour des nombres de Reynolds supérieurs. Cette bifurcation sera recherchée dans un travail futur.

Mos clés : sphères contrarotatives –écoulement avec pincement-simulation numérique .

## التلخيص

في هذا العمل درسنا عدديا جريان غير قابل لانضغاط و لزج غير مضطرب بين كرتين متمرکزتين ، تور الكرة الأولى بسرعة زاوية  $\Omega_1$  وتدو الكرة الثانية بسرعة زاوية  $\Omega_2$  في الاتجاه المعاكس .  
نسبة سمك الفجوة الكروية على نصف قطر الكرة الداخلية هي  $\beta = 0.5$  نسبة زاوتي الدوران هي عدد Rossby و تساوي 0.5- في حين عدد Reynolds يتغير من 100 الى 500  
مثلنا النظام المدروس بمعادلة حفظ الكتلة و معادلات حفظ الكميات الثلاث كمية الحركة في الاتجاهات :  
القطرين ، القطبي و السمتي المعادلات حلت بطريقة الحجم المنتهية  
انواع الجريان المحصل عليها هي مستقرة  
من اجل عدد Reynolds يساوي 100 الجريان الثانوي هو جريان بوجود دوامتين  
( vortex - 2 ) مع زيادة قيمة عدد Reynolds يكون لدينا جريان مع انقباض  
( pincement ) يكون ضعيفا من اجل Reynolds يساوي 200 لكنه يزداد بارتفاع عدد Reynolds  
بين 200 و 500 تتم الدراسة الوصفية بكل نوع الجريان

الكلمات الدالة : دوران الكرتين\_جريان بانقباض-المحاكاة العددية

---