

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

**MEMOIRE**

**Présenté pour obtenir le diplôme de**

**MAGISTER EN PHYSIQUE**

**Option : ENERGETIQUE – TRANSFERTS THERMIQUES**

**Thème :**

**APPROCHE NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE  
ENCEINTE FERMEE DELIMITEE PAR DEUX CYLINDRES ELLIPTIQUES  
HORIZONTALS CENTRES ET DEUX PLANS DIAMETRAUX.**

**Par**

**BENDJABALLAH FOUZIA**

**Soutenu le : décembre 2007**

**Devant le jury :**

<b>Présidente</b>	<b>:</b>	<b>A. CHAKER</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>:</b>	<b>M. DJEZZAR</b>	<b>M. de Conférence</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
<b>Examineurs</b>	<b>:</b>	<b>N. BELLEL</b>	<b>M. de Conférence</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>
		<b>S. BENISAAD</b>	<b>M. de Conférence</b>	<b>Univ. Mentouri Cne</b>

Je dédie ce mémoire à mes parents.  
A mon neveu et mes nièces ; Abderraouf, Belkis et Meriem.

A tous les membres de ma famille, grands et petits.  
A tous mes amis

# AVANT-PROPOS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur DJEZZAR Mahfoud, Maître de conférence à l'Université Mentouri Constantine de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestions.

Je tiens à remercier sincèrement Madame Chaker Abla, Professeur à l'université Mentouri de Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen et ce malgré ces nombreuses occupations.

Messieurs BELLEL Nadir et BENISAAD Smaïl Maîtres de conférence à l'Université Mentouri Constantine, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Je tiens à remercier Monsieur BOUCHETTEIBET Tahar d'avoir mis à ma disposition plusieurs PC pour l'exécution des calculs de mon travail.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

# Nomenclature

## Lettres latines

$A_1, A_2$	grands axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m)
$a$	constante définie dans le système de coordonnées elliptiques, (distance aux pôles). (m)
$B_1, B_2$	petits axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m)
$c_p$	chaleur massique à pression constante. ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$e_1$	excentricité de l'ellipse interne. $e_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 - B_1^2}}{A_1}$
$e_2$	excentricité de l'ellipse externe. $e_2 = \frac{\sqrt{A_2^2 - B_2^2}}{A_2}$
$F_r$	facteur géométrique défini dans le paragraphe (3.1).
$F_r'$	facteur géométrique défini dans le paragraphe (3.1).
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur. ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$Gr$	nombre de Grashof défini par $Gr = \frac{g\beta a^3}{\nu^2} \Delta T$ .
$Gr_m$	nombre de Grashof modifié défini par $Gr_m = \frac{g\beta a^4}{\lambda \nu^2} q$ .
$h$	coefficient métrique dimensionnel défini dans la relation (2.15). (m)
$H$	coefficient métrique adimensionnel.
$Nu$	nombre de Nusselt local.
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen.
$P$	pression au sein du fluide. (at)
$Pr$	nombre de Prandtl défini par $Pr = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}$ .
$q$	densité de flux de chaleur. ( $\text{W.m}^{-2}$ )
$S_\Phi$	Terme de source figurant dans l'équation 3.3.
$T$	température du fluide. (K)
$T_1$	Température du cylindre elliptique intérieur. (K)
$T_2$	Température du cylindre elliptique extérieur. (K)

$T_d$	écart de température $T_d=T-T_2$ . (K)
$\Delta T$	écart de température $\Delta T=T_1-T_2$ . (K)
$t$	temps. (s)
$V_\eta, V_\theta$	composantes de la vitesse suivant $\eta$ et $\theta$ . ( $m.s^{-1}$ )
$\vec{V}$	vecteur vitesse. ( $m.s^{-1}$ )
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes. (m)

### Lettres grecques

$\alpha$	angle d'inclinaison.(°)
$\beta$	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\Gamma_\Phi$	coefficient de diffusion figurant dans l'équation 3.3.
$\lambda$	conductivité thermique du fluide. ( $W. m^{-1}. K^{-1}$ )
$\nu$	viscosité cinématique. ( $m^2. s^{-1}$ )
$\rho$	masse volumique du fluide. ( $kg. m^{-3}$ )
$\eta, \theta, z$	coordonnées elliptiques.
$\psi$	fonction de courant. ( $m^2. s^{-1}$ )
$\omega$	vorticité. ( $s^{-1}$ )
$\Phi$	fonction générale figurant dans l'équation 3.3.

### Exposant

+ Paramètres adimensionnels.

### Indices

$i$	Intérieur.
$e$	Extérieur.
$\eta$	Suivant la coordonnée $\eta$
$\theta$	Suivant la coordonnée $\theta$

# Sommaire

<b>INTRODUCTION</b>	1
<b>CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	3
<b>CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE</b>	8
2.1 Description du problème	8
2.2 Hypothèses simplificatrices	8
2.3 Formulation vectorielle	9
2.3.1 Formulation indicielle	9
2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes	10
2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement	11
2.6 Introduction des coordonnées elliptiques	11
2.7 Adimensionalisation	13
2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles	14
2.9 Coefficients d'échange de la chaleur	15
2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt	15
2.9.2 Nombre de Nusselt moyen	15
<b>CHAPITRE 3 – FORMULATION NUMERIQUE</b>	16
3.1 Introduction	16
3.2 Méthode de résolution numérique	16
3.2.1 Volume élémentaire d'intégration	17
3.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\Phi$ dans le volume de contrôle	18
3.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie	22
3.4.1 Discrétisation des conditions aux limites	25
3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	26
3.5.1 Discrétisation des conditions aux limites	27
3.6 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	29
3.6.1 Discrétisation des conditions aux limites	29
3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse	30
3.8 Processus du calcul	30

<b>CHAPITRE 4 – RESULTATS NUMERIQUES</b>	33
4.1 Introduction	33
4.2 Etude du maillage	33
4.3 Comparaison de résultats issus de ce code de calcul avec des résultats de la littérature	34
<b>4.4 Première condition pariétale thermique : Paroi active interne isotherme</b>	35
4.4.1 Influence du nombre de Grashof	35
4.4.1.1 Isothermes et lignes de courant	35
4.4.1.2 Nombre de Nusselt local	42
4.4.1.2.1 Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local – isothermes et isocourants	42
4.4.1.2.2 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique interne	43
4.4.1.2.3 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique externe	44
4.4.1.2.4 Nombre de Nusselt moyen	46
4.4.2 Effet de la variation de l'angle d'inclinaison $\alpha$	47
4.4.2.1 Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha$ est nul	47
4.4.2.2 Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha=45^\circ$	47
4.4.2.3 Nombre de Nusselt local et moyen	50
4.4.3 Influence du facteur de forme géométrique $Fr$	53
4.4.4 Influence du facteur de forme géométrique $F_r'$	54
<b>4.5 Deuxième condition pariétale thermique : Paroi active interne soumise à une densité de flux de chaleur constante</b>	56
4.5.1 Influence du nombre de Grashof modifié	56
4.5.2 Influence du facteur de forme géométrique $Fr$	56
4.5.3 Variation de la température adimensionnelle sur la paroi active interne	60
<b>CONCLUSION</b>	61
<b>ANNEXE : COORDONNEES ELLIPTIQUES</b>	62
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	71

# Introduction

L'étude des transferts de chaleur par convection dans les cavités est intéressante, compte tenu de leurs diverses applications dans le génie industriel. La cavité annulaire, en particulier, est souvent utilisée comme échangeur dans la conversion énergétique.

Comme exemples d'applications, on peut citer le chauffage industriel de l'eau et la stérilisation médicale.

L'objectif du présent travail est d'étudier la convection, naturelle, laminaire et permanente dans une cavité annulaire elliptique délimitée par deux plans diamétraux et orientée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, les deux parois elliptiques sont maintenues isothermes (fig.2.1) tout d'abord, et ensuite la paroi interne est soumise à une densité de flux de chaleur, quant aux parois diamétrales, elles sont adiabatiques. A notre connaissance, cette configuration n'a pas encore été étudiée. Notons que l'enceinte considérée est intéressante. Elle constitue en effet une généralisation qui admet comme cas particulier la cavité annulaire. Le code de calcul mis au point pourra donc aisément être appliqué à ce cas.

Etant donné l'abondance des travaux concernant le phénomène de convection naturelle pouvant se dérouler dans des enceintes fermées, nous illustrons dans le premier chapitre, une riche étude bibliographique qui nous a permis de situer notre travail et de dégager une problématique.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme [55,56] qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développés. Les équations paraboliques décrivant l'écoulement sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis [52,54] tandis que l'équation de la fonction de courant l'est à l'aide d'un développement en série de Taylor, les équations ainsi obtenues sont résolues par la méthode de surrelaxation S.O.R. (Successive Overrelaxation) [53].

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par un résultat numérique et un autre expérimental issu de la littérature et enfin nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant et les isothermes au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Grashof et des facteurs de forme géométriques.

Pour ne pas alourdir le texte, nous présentons en annexe quelques compléments de mathématiques.

# Chapitre 1

## Recherche Bibliographique

Une grande variété de corrélations mathématiques servant à la prédiction des transferts de chaleur est disponible dans la littérature, concernant aussi bien les processus transitoires que permanents.

Parmi les travaux concernant les enceintes rectangulaires, citons celui de Wilkes et Churchill [1] qui ont utilisé la méthode des différences finies avec un schéma implicite aux directions alternées pour résoudre les équations de transfert bidimensionnelles et instationnaires dans une cavité rectangulaire et horizontale, quand l'une des parois verticales est chauffée et l'autre refroidie. Samuels et Churchill [2] ont étudié l'instabilité hydrodynamique due à la convection naturelle pour la même configuration géométrique quand elle est chauffée par le bas. Ils ont déterminé les nombres de Rayleigh critiques pour différentes valeurs du nombre de Prandtl et du rapport longueur/hauteur. Pour la même configuration géométrique, Patterson et Imberger [3] ont étudié la convection naturelle transitoire quand les parois horizontales de la cavité sont isolées alors que les parois verticales subissent, l'une une augmentation de la température d'une quantité  $\Delta T$  et l'autre, une diminution de la même quantité. Ces parois sont ensuite maintenues aux nouvelles températures. Leur analyse leur a permis de montrer que plusieurs types de flux transitoires sont possibles et qu'ils tendent finalement vers deux types de flux stationnaires : une conduction dominante ou une convection dominante. Le même système a été étudié expérimentalement par Yewell et al. [4], une série de thermistors a été utilisée pour mesurer la température en différents points. Ils ont trouvé un bon accord avec les résultats théoriques de Patterson et Imberger [3].

Le cas d'un cylindre vertical partiellement rempli d'un liquide a aussi fait l'objet de divers travaux à cause, en particulier, de ses applications dans le domaine de l'alimentation (pasteurisation du lait et des boissons en boîte par exemple). Lee Jong Ho notamment [5], a étudié numériquement, à l'aide d'une méthode aux différences finies, la convection naturelle instationnaire qui se développe dans l'enceinte à partir d'un état d'équilibre lorsque les parois sont: soit portées à une température plus élevée, soit traversées par un flux de chaleur de

densité constante. Dans les deux cas, des états multicellulaires apparaissent au bout d'un certain temps lorsque le nombre de Grashof (ou le nombre de Grashof modifié) ainsi que le rapport  $R_0/b$  du rayon du cylindre sur sa hauteur sont suffisamment grands. La convection naturelle transitoire dans un cylindre vertical a également été étudiée analytiquement par Sakurai et Matsuda [6], Ils considèrent que l'enceinte est remplie d'un fluide dont la distribution de température varie linéairement avec la hauteur du cylindre, la température externe de la paroi étant la même que celle du fluide à la même hauteur. Ils présentent des équations de transfert lorsque la température externe de la paroi est soudainement modifiée, la distribution restant linéaire. Les termes non linéaires ne sont pas pris en compte et le nombre de Prandtl pris voisin de l'unité. Cette étude a été généralisée par Jischke et Doty [7] à une cavité fermée, de forme quelconque, quand la température de la paroi subit une modification. Hyun [8] a utilisé la méthode des variables primitives pour étudier la convection naturelle à l'intérieur d'un cylindre vertical où la température initiale est uniforme, les conditions pariétales étant les mêmes que celles considérées par Sakurai et Matsuda [6]. La même configuration géométrique a été étudiée numériquement, par Lin et Akins [9] qui ont utilisé la formulation en variables primitives aussi, ils ont pu établir une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh pour une convection dominante. Pour la même géométrie, Lin et Akins [10] ont étudié le comportement transitoire de la convection naturelle, la température du fluide étant initialement uniforme. Le régime transitoire est créé par un changement de la température sur toute la paroi du cylindre. Ils ont présenté les lignes de courant, la localisation de la température minimale, les coefficients de transfert thermique et la température moyenne pour un rapport hauteur/diamètre égal à 1, un nombre de Prandtl égal à 7 et un nombre de Rayleigh de  $10^5$ . Ils ont également établi une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le temps adimensionnel.

La convection naturelle à l'intérieur d'une cavité sphérique, qui a fait l'objet de moins de travaux que dans le cas d'autres enceintes, a été étudié expérimentalement par Tyler et Tuck [11], Ils ont déterminé la variation de la température au centre de la sphère en fonction du temps pour différents gaz. Moshimaru [12] a étudié aussi numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieur d'une cavité sphérique quand la paroi est portée à une température constante.

La plus grande majorité des travaux concernant la convection naturelle dans des enceintes a été consacrée à la géométrie annulaire, formée par l'espace compris entre deux

cylindres ou deux sphères. La première étude sur le transfert de chaleur dans un fluide compris entre deux cylindres horizontaux et coaxiaux a été faite par Beckmann [13] qui a évalué les taux de transfert de chaleur pour l'air, l'hydrogène et le dioxyde de carbone. Pour le même problème. Eckert et al. [14] ont déterminé les taux locaux de transfert de chaleur en utilisant un interféromètre Mach-Zehnder. Grigull et Haut [15] ont utilisé la même technique pour visualiser les différentes structures de l'écoulement et étudier l'influence du rapport des rayons. Powe et al. [16] ont mené une étude plus complète dans ce domaine. Ils ont pu distinguer quatre régimes d'écoulement en utilisant l'air comme fluide test. Le même problème a été étudié expérimentalement par Kuehn et Goldstein [17] dans le cas de l'air et de l'eau pour un nombre de Rayleigh de  $4,7 \cdot 10^4$  et un rapport de rayons égal à 2,6. Ils ont obtenu des résultats en accord avec ceux de l'analyse numérique qu'ils ont réalisée et qui est basée sur la méthode des différences finies et la technique de relaxations successives. Dans un autre travail [18], ils ont introduit le concept de la couche limite pour étudier des écoulements laminaires et turbulents, dans le cas de cylindres horizontaux concentriques ou excentrés et de rangées de cylindres situés à l'intérieur d'une enceinte cylindrique. Les mêmes auteurs [19] ont étudié expérimentalement l'influence de l'excentricité sur le transfert de chaleur. Ils ont présenté des interférogrammes qui permettent de bien visualiser le champ de température et de déterminer les taux de transfert de chaleur. Ils ont mis en évidence un écoulement secondaire localisé au-dessus du cylindre interne quand il est proche du sommet du cylindre externe. Cette structure d'écoulement est confirmée par l'étude numérique de Projahn et al. [20] lorsque les cylindres sont concentriques. Dans leur deuxième étude [21], il semble que ces écoulements persistent même lorsque le nombre de Prandtl est élevé. Quant à Fant et al. [22], ils précisent dans leur étude que le régime bicellulaire n'est obtenu, pour un rapport de rayons de 1.2, que pour des nombres de Rayleigh supérieurs à 2808, alors que pour un rapport de 1.1, c'est un régime tricellulaire qui se développe avec une valeur de transition du nombre de Rayleigh sensiblement plus faible. Naylor et al. [23] ont mené conjointement une étude expérimentale et une étude numérique basée sur une méthode variationnelle d'éléments finis. Ils ont étudié l'effet de l'excentricité du tube interne et de l'angle azimutal sur le champ thermique dans l'espace annulaire pour de faibles nombres de Rayleigh (500-1500). D'autres travaux sur l'effet de l'excentricité sur la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux et isothermes, sont disponibles dans la littérature (Rao et al. [24]. Bau [25], Himasekhar et Bau [26],...). Prusa et Pao [27] ont examiné l'effet du déplacement vertical du cylindre interne dans un espace annulaire de rapport de rayons 2,6. Ils ont utilisé une transformation radiale pour faciliter l'écriture des conditions aux limites. Malgré les nombreux tests effectués sur

l'affinement du maillage, ils n'ont observé aucun écoulement multicellulaire. Kuehn et Goldstein [28] ont mené une étude numérique dans le but de déterminer les effets du nombre de Prandtl et du rapport des rayons sur le transfert de chaleur. Ils ont utilisé la méthode des différences finies et la méthode de relaxations successives pour résoudre les équations de la convection naturelle, laminaire et bidimensionnelle en régime permanent. Pour éliminer les instabilités numériques dues au schéma décentré utilisé dans leur première étude [17], ils ont appliqué une technique hybride lorsque le nombre de Prandtl est faible ou le rapport de rayons est élevé. Ils ont établi une corrélation entre le nombre de Nusselt et deux nombres de Rayleigh basés sur les diamètres des cylindres interne et externe. Mack et Bishop [29] ont étudié la convection naturelle stationnaire entre deux cylindres horizontaux coaxiaux pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh lorsque les deux cylindres sont maintenus à des températures uniformes et différentes. Ils ont utilisé un développement en séries entières du nombre de Rayleigh. Ils ont donné les champs des vitesses et des températures ainsi que les nombres de Nusselt locaux et moyens. Ils ont également montré que l'influence du nombre de Prandtl est faible dans le cas d'un gaz ou d'un liquide non métallique mais qu'elle est importante pour un liquide métallique. Huetz et al. [30] ont utilisé la même méthode dans le cas où le cylindre interne est soumis à un flux de chaleur alors que le cylindre externe est isotherme. Cette configuration géométrique a été étudiée expérimentalement par Liu et al. [31] et une description photographique et qualitative a été présentée par Bishop et Carley [32]. Crawford et al. [33] ont étudié numériquement la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux et horizontaux, en utilisant la méthode des différences finies et une procédure itérative de type Gauss-Seidel. Powe et al. [34] ont utilisé la même méthode afin d'examiner la transition vers un écoulement instationnaire pour l'air, en déterminant le nombre de Rayleigh correspondant au début de formation d'une cellule contrarotative. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les expérimentations de Powe et al. [16]. Quant à Abbott [35], il a utilisé la technique d'inversion de matrices pour obtenir des solutions dans des couches de fluide très minces. Une étude plus récente sur la convection naturelle transitoire entre deux cylindres horizontaux, coaxiaux et isothermes a été réalisée par Cheddadi [36]. Il a déterminé les champs de température et de vitesse en utilisant un schéma implicite aux directions alternées. D'autres types de conditions aux limites sont étudiés dans la littérature. Kumar [37] a étudié le cas où le cylindre interne est soumis à un flux de chaleur constant alors que le cylindre externe est isotherme. Les équations de la vorticité et de la chaleur sont résolues par la méthode des différences finies avec un schéma implicite aux directions alternées. Ils ont étudié l'effet de la variation du rapport de rayons et du nombre de Rayleigh

sur la température du cylindre interne. Ils ont constaté qu'une croissance du nombre de Rayleigh basé sur la même différence de température pour la condition de flux de chaleur constant ou de température uniforme sur le cylindre interne, augmente le transfert de chaleur. Pour des rapports de rayons élevés (supérieurs à 10), les taux de transfert de chaleur sont identiques pour les mêmes types de chauffage. Bishop et al. [38,39] ont étudié expérimentalement la convection naturelle entre deux sphères concentriques ; chacune étant maintenue à une température constante. Les distributions de température, les données du transfert thermique ainsi que deux corrélations entre le nombre de Grashof et le nombre de Nusselt ont été données par Bishop et al. [40], Singh et Ellipt [41] ont étudié le problème de la convection naturelle d'un fluide thermiquement stratifié, compris entre deux sphères concentriques.

Les espaces annulaires formés par des cylindres elliptiques d'axes horizontaux centrés ou excentrés ont aussi donné matière à des travaux, [42-51], citons comme exemple Schreiber et Shingh [43] qui ont fait une étude dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques maintenus à des températures constantes, ils ont utilisé la méthode du développement spectral en séries, pour réduire les équations aux dérivées partielles à trois systèmes d'équations différentielles du second ordre. Djeddar et al [48-51] quant à eux, ont étudié numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire formé de deux cylindres elliptiques d'axes horizontaux et confocaux en utilisant la formulation en variables primitives, ils ont pu déceler des écoulements multicellulaires, pour certaines géométries quand le nombre de Grashof augmente, ceci pour les trois conditions thermiques pariétales utilisées.

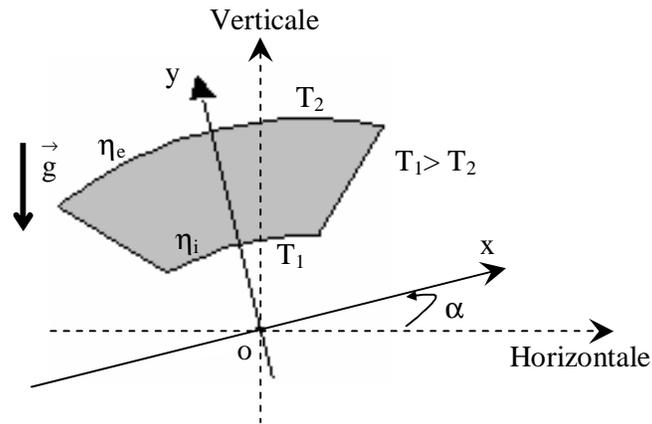
# Chapitre 2

## Analyse théorique

### 2.1 Description du problème

Considérons un espace annulaire, rempli d'un fluide newtonien en l'occurrence de l'air, situé entre deux cylindres elliptiques, horizontaux et centrés et deux plans diamétraux. La figure 1.1 représente une section droite du système.

Les deux parois elliptiques interne et externe sont isothermes maintenues respectivement aux températures  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$ , dans un premier cas de chauffage, ensuite la paroi elliptique interne est soumise à une densité de flux de chaleur constante. Quant aux deux plans diamétraux, ils sont adiabatiques.



**Figure 2.1** Section droite du système

Il se produit, dans l'enceinte une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

### 2.2 Hypothèses simplificatrices

Nous considérons **un écoulement de fluide incompressible**, à propriétés physiques constantes et par ailleurs nous supposons être dans le cadre de **l'approximation de boussinesq**. Celle-ci consiste à considérer les variations de la masse volumique  $\rho$  négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température, supposées linéaires, engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc:

$$\rho = \rho(P, T) = \rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

où :  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique (constant).

$\rho_0$  est la masse volumique de référence (constante).

$T_0$  est la température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à  $\rho_0$ .

La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur, le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des deux parois étant négligées).

Nous admettons que le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.

### 2.3 Formulation vectorielle

- Equation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (2.3)$$

- Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

avec :

$\rho, \lambda$  : masse volumique et conductivité thermique du fluide.

$c_p$  : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

$P$  : tenseur des contraintes.

$\vec{V}, \vec{g}$  : vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.

#### 2.3.1 Formulation indicielle

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.2.a)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i \quad (2.3.a)$$

- Equation de la température:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho C_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.4.a)$$

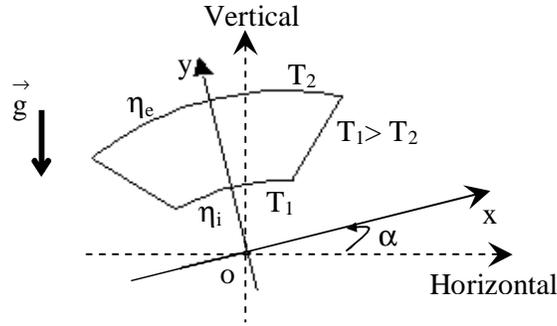
avec :

$P$  : pression du fluide.

$\tau_{ij}$  : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

## 2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes définies sur la figure 2.2.



**Figure 2.2 Coordonnées cartésiennes**

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations (2.2), (2.3) et (2.4) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) \beta T_d + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.6.a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) \beta T_d + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.6.b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

## 2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement

En dérivant les équations du mouvement (2.6.a) et (2.6.b) respectivement par rapport à  $y$  et à  $x$ . Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (g \beta T_d \sin(\alpha)) + u \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.8.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g \beta T_d \cos(\alpha)) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.8.b)$$

En soustrayant l'équation (2.8.a) de (2.8.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité  $\omega$ , nous obtenons :

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = -g \beta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + u \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

Avec :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.10.aa)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.10.b)$$

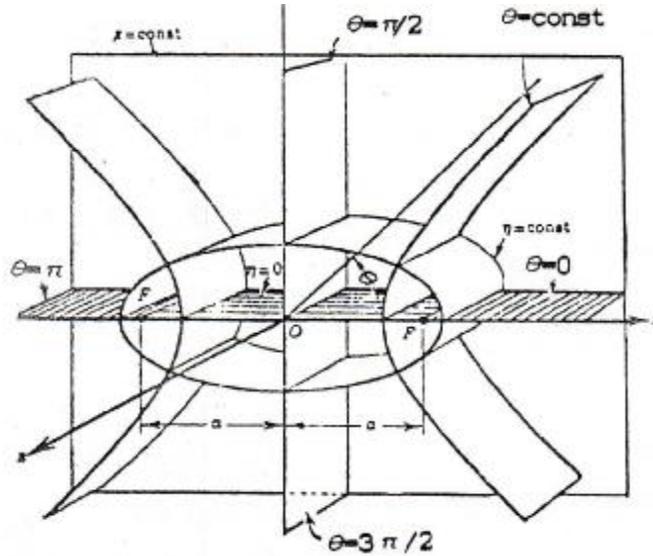
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.bb)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.c)$$

## 2.6 Introduction des coordonnées elliptiques

Il est commode donc de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites "elliptiques"  $(\eta, \theta)$  [55,56] permettent, précisément dans notre cas d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées  $(\eta, \theta, z)$ , les surfaces  $\eta = \text{constantes}$  sont des cylindres elliptiques, les surfaces  $\theta = \text{constantes}$  sont des cylindres hyperboliques et les surfaces  $z = \text{constantes}$  sont des plans parallèles. Comme l'illustre la figure 2.3.



**Figure 2.3 Représentation schématique des coordonnées elliptiques**

La paroi du cylindre elliptique extérieur est représentée par  $\eta = \eta_e = \text{constante}$ , celle du cylindre elliptique intérieur par  $\eta = \eta_i = \text{constante}$ , l'axe des x correspond à  $\eta = 0$ .

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes (voir l'annexe) :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \text{ch}(\eta) \cdot \cos(\theta) \\ y &= a \cdot \text{sh}(\eta) \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Les équations (2.5), (2.7) et (2.9) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0 \quad (2.12)$$

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{g\beta}{h} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{v}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec :

$$a = \frac{A_i}{\text{ch} \eta_i} = \frac{B_i}{\text{sh} \eta_i} = \frac{A_e}{\text{ch} \eta_e} = \frac{B_e}{\text{sh} \eta_e}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= a \left( \text{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta) \right)^{1/2} \\ F(\eta, \theta) &= \frac{\text{sh}(\eta) \cos(\theta)}{\left( \text{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta) \right)^{1/2}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{\text{ch}(\eta) \sin(\theta)}{\left( \text{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta) \right)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

où :

$V_\eta, V_\theta$  sont les composantes de la vitesse suivant les directions  $\eta, \theta$ .

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\left. \begin{aligned} V_\eta &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Nous en déduisons :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.17)$$

## 2.7 Adimensionalisation

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} D_h &= a \text{ (distance focale arbitrairement choisie)} & H &= \frac{h}{D_h} \\ V_\eta^+ &= V_\eta \frac{D_h}{\nu} & V_\theta^+ &= V_\theta \frac{D_h}{\nu} \\ \psi^+ &= \frac{\psi}{\nu} & \omega^+ &= \omega \frac{D_h^2}{\nu} \end{aligned}$$

La température adimensionnelle pour la paroi interne est donnée selon la condition pariétale thermique imposée :

- Cas I « paroi isotherme » :

$$T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ donc le nombre de Grashof est : } Gr = \frac{g \beta D_h^3}{\nu^2} \Delta T$$

- Cas II « densité de flux de chaleur constante  $q$  » :

$$T^+ = \frac{\lambda}{q D_h} (T - T_2) \text{ et donc le nombre de Grashof modifié est : } Gr_m = \frac{g \beta D_h^4}{\lambda \nu^2} q$$

Introduisons aussi le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}$

Et en les portant dans les équations (2.12), (2.13) et (2.14), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+) = 0 \quad (2.18)$$

$$H V_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{1}{P_r} \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{\eta}^+}{H} \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}^+}{H} \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = \frac{Gr^*}{H} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right. \\ \left. - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où les composantes  $V_{\eta}^+$ ,  $V_{\theta}^+$  de la vitesse et de la vorticité  $\omega^+$  adimensionnelles sont définies par :

$$V_{\eta}^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \quad (2.21.a)$$

$$V_{\theta}^+ = - \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \quad (2.21.b)$$

$$\omega^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.22)$$

## 2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

- Conditions sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $\eta = \eta_i = \text{constant}$ ) :

$$V_{\eta}^+ = V_{\theta}^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.23.a)$$

$$\omega^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.23.b)$$

$$q_{\text{constant}} = - \lambda \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_i} \quad (2.23.c)$$

- **Cas I :**  $T_1^+ = 1$  (2.24.a)

- **Cas II :** le gradient de température peut être déterminé à partir de la définition de la température adimensionnelle, de la façon suivante :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{q}{\lambda} \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \quad (2.24.b)$$

En introduisant l'équation (2.24.b) dans l'équation (2.23.c), il vient :

$$\frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_i} = -1 \quad (2.25)$$

- Conditions sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $\eta=\eta_e = \text{constant}$ ) :

$$V_{\eta}^+ = V_{\theta}^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.26.a)$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.26.b)$$

$$T_2^+ = 0 \quad (2.26.c)$$

- Conditions sur le premier plan diamétral ( $\theta = \theta_1 = \text{constant}$ ):

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.27.a)$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.27.b)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (2.27.c)$$

- Conditions sur le second plan diamétral ( $\theta = \theta_{NN} = \text{constant}$ ):

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.28.a)$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.28.b)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{NN}} = 0 \quad (2.28.c)$$

## 2.9 Coefficients d'échange de la chaleur

### 2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt

La définition générale du nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{qa}{\lambda \Delta T} \quad (2.29)$$

$q$  : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta T$  : écart de température  $T_1 - T_2$ .

$$\text{Soit : } q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=\text{cste}}$$

et en utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les deux conditions pariétales thermiques, il vient :

$$\text{- Cas I : } Nu = -\left. \frac{1}{h^+} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=\text{cste}} \quad (2.30)$$

$$\text{- Cas II : } Nu = -\left. \frac{1}{h^+ T^+(\eta_i, \theta)} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=\text{cste}} \quad (2.31)$$

### 2.9.2 Nombre de Nusselt moyen

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu d\theta \quad (2.32)$$

# Chapitre 3 Formulation Numérique

## 3.1 Introduction

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre précédent montre que trois paramètres influencent les profils de la fonction de courant et de la température dans l'espace annulaire, en maintenant le nombre de Prandtl constant, ce sont :

- l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .
- le nombre de Grashof Gr.
- le facteur de forme géométrique Fr ou Ff.

Dans notre travail, nous utilisons :

- Deux valeurs de l'angle d'inclinaisons  $\alpha$  :  $0^\circ$  et  $45^\circ$ .

Nous utilisons des pas  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$  constants.

Plus précisément, nous posons :

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

$$Fr = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{\theta_{NN} - \theta_1} \quad \text{pour } (\eta_{NI} - \eta_1) = \text{constante.}$$

$$Fr' = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{\theta_{NN} - \theta_1} \quad \text{pour } (\theta_{NN} - \theta_1) = \text{constante.}$$

avec :

NI : le nombre de points suivant  $\eta$ .

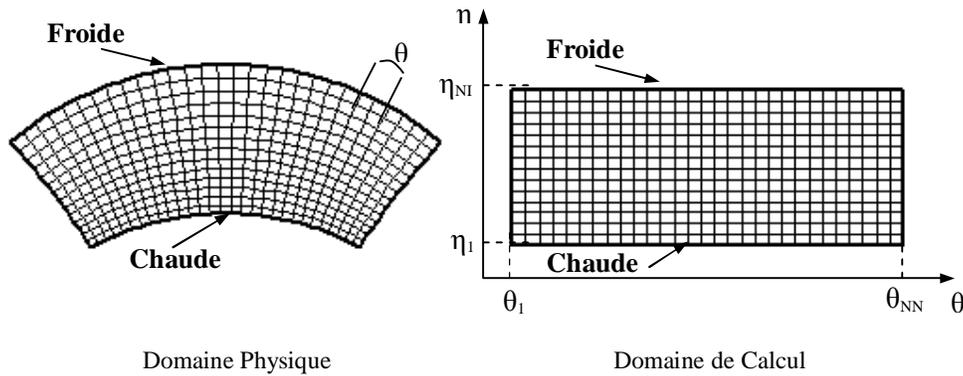
NN : le nombre de points suivant  $\theta$ .

## 3.2 Méthode de résolution numérique

Pour la résolution du système d'équations (2.19), (2.20) et les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Alors que pour l'équation (2.22), nous considérons une solution numérique par la méthode des différences centrées.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts, elles sont bien exposées par S.V. PATANKAR [52], E.F. NOGOTOV [53] et par E. SAATAJIAN [54].

La figure 3.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.



**Figure 3.1** Domaine physique et domaine de calcul.

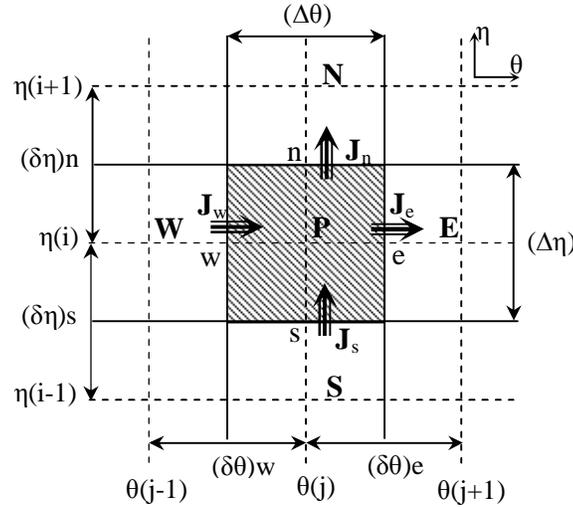
### 3.2.1 Volume élémentaire d'intégration

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $\eta$  et  $\theta$  en un ensemble de volumes élémentaires ou « volume de contrôle » égaux à «  $H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$  ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction  $z$  comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$  et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$ . Les variables scalaires (vorticité, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds  $E$  et  $N$  sont pris dans les directions des coordonnées positives de  $\theta$  et  $\eta$  respectivement et les nœuds  $W$  et  $S$  dans les sens contraires.

La figure 3.2 représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.



**Figure 3.2 Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage  
Dans le domaine de calcul.**

### **3.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle**

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation de la chaleur (2.19) et l'équation du mouvement (2.20).

Elles s'écrivent, compte tenu de l'équation de continuité (2.18), respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( H V_{\eta}^{+} T^{+} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H V_{\theta}^{+} T^{+} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( H V_{\eta}^{+} \omega^{+} - \frac{\partial \omega^{+}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H V_{\theta}^{+} \omega^{+} - \frac{\partial \omega^{+}}{\partial \theta} \right) = H Gr_m \left\{ [G(\eta, \theta) \sin(\alpha) - F(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} + [G(\eta, \theta) \cos(\alpha) + F(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} \right\} \quad (3.2)$$

Ces deux équations sont de la forme générale :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( H V_{\eta}^{+} \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H V_{\theta}^{+} \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = S_{\phi} \quad (3.3)$$

Les sources et les coefficients de diffusion sont spécifiés dans le tableau 3.1

équation	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
3.1	$T^+$	$1/Pr$	0
3.2	$\omega^+$	1	$HGr \left\{ [G(\eta, \theta) \sin(\alpha) - F(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [G(\eta, \theta) \cos(\alpha) + F(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\}$

**Tableau 3.1 Les sources et les coefficients de diffusion des variables  $\Phi$**

$\phi$  : fonction générale (soit  $\omega^+$ , soit  $T^+$ ).

$\Gamma_\phi$  : coefficient adimensionnel.

$S_\phi$  : terme de source.

L'équation de discrétisation d'une variable  $\phi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\phi$ .

$$\int_{w_s}^{e_n} \int \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) H^2 d\eta d\theta + \int_{w_s}^{e_n} \int \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) H^2 d\eta d\theta = \int_{w_s}^{e_n} \int S_\phi H^2 d\eta d\theta$$

ou bien :

$$\int_{w_s}^{e_n} \int \left[ \frac{\partial(H V_\eta^+ \phi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(H V_\theta^+ \phi)}{\partial \theta} \right] H^2 d\eta d\theta = \int_{w_s}^{e_n} \int \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] H^2 d\eta d\theta + \int_{w_s}^{e_n} \int S_\phi H^2 d\eta d\theta$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de  $\phi$ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour approcher les variations de  $\phi$  entre les points du maillage [52]. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, [52].

Posons :

$$\left. \begin{aligned} J_\eta &= \left( HV_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \\ J_\theta &= \left( HV_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

où  $J_\eta$  et  $J_\theta$  sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portons ces valeurs dans l'équation (3.3), on obtient :

$$\frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S_\phi \quad (3.5)$$

L'intégration de l'équation (3.5) dans le volume de contrôle de la figure 3.2 donne :

$$J_n - J_s + J_e - J_w = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (3.6)$$

$J_e$ ,  $J_w$ ,  $J_n$  et  $J_s$  sont les valeurs de flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\overline{S_\phi}$  est la valeur moyenne de  $S_\phi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\Phi_p$  (au nœud P) et se mettre sous la forme :

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_p \cdot \phi_p \quad (3.7)$$

avec  $S_p < 0$ .

Par suite l'équation (3.6) devient :

$$J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \quad (3.8)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (2.18) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.9)$$

où  $F_n$ ,  $F_s$ ,  $F_e$  et  $F_w$ , sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (H V_\eta^+)_n \cdot \Delta \theta \\ F_s &= (H V_\eta^+)_s \cdot \Delta \theta \\ F_e &= (H V_\theta^+)_e \cdot \Delta \eta \\ F_w &= (H V_\theta^+)_w \cdot \Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En multipliant l'équation (3.9) par la fonction  $\Phi_p$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.8), il vient :

$$\begin{aligned} &(J_n - F_n \cdot \phi_p) - (J_s - F_s \cdot \phi_p) + (J_e - F_e \cdot \phi_p) \\ &- (J_w - F_w \cdot \phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'après le schéma numérique du POWER LAW de S.V. PATANKAR [52], on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (3.11) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} J_n - F_n \cdot \phi_p &= a_N (\phi_p - \phi_N) \\ J_s - F_s \cdot \phi_p &= a_S (\phi_s - \phi_p) \\ J_e - F_e \cdot \phi_p &= a_E (\phi_p - \phi_E) \\ J_w - F_w \cdot \phi_p &= a_W (\phi_w - \phi_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} a_N (\phi_p - \phi_N) - a_S (\phi_s - \phi_p) + a_E (\phi_p - \phi_E) \\ - a_W (\phi_w - \phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_P \phi_p = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.14)$$

avec :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W - S_p \Delta V \quad (3.15)$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V \quad (3.16)$$

On introduit maintenant la fonction  $A(|P|)$  du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law), d'après S.V. PATANKAR [52], elle est donnée par :

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1|P|)^5 \right\|$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de l'équation algébrique (3.14) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n A(|P_n|) + \left\| -F_n, 0 \right\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \left\| F_s, 0 \right\| \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \left\| -F_e, 0 \right\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \left\| F_w, 0 \right\| \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Dans les relations (3.17), les grandeurs  $D_n$ ,  $D_s$ ,  $D_e$  et  $D_w$  sont les termes diffusifs, et  $P_n$ ,  $P_s$ ,  $P_e$  et  $P_w$  sont donc, les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration  $(\delta\theta)_n$ ,  $(\delta\theta)_s$ ,  $(\delta\eta)_e$  et  $(\delta\eta)_w$  peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux pas  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$ . Considérons que les interfaces n, s, e et w qui sont les milieux des (P,N), (P,S), (P,E) et (P,W).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.14) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_P$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$ , doit être égal à la somme des autres coefficients et  $S_P\Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variable dépendantes :  $\Phi$  est l'une de ces variables  $T^+$  et  $\omega^+$ . Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$  et la source  $S_\phi$  sont définis dans le tableau 3.1.

### **3.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie**

L'équation de l'énergie est intégrée dans le volume fini typique de dimension  $H^2 \cdot (\Delta\eta)_P \cdot (\Delta\theta)_P$ . En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_P T_P^+ = a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + b \quad (3.21)$$

Comme dans l'équation (3.1), le terme de source  $S_T$  s'annule, le coefficient  $b$  s'annule également et le coefficient  $a_P$  figurant dans l'équation (3.15) devient :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.22)$$

où  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  ont respectivement les mêmes expressions que le système (3.17).

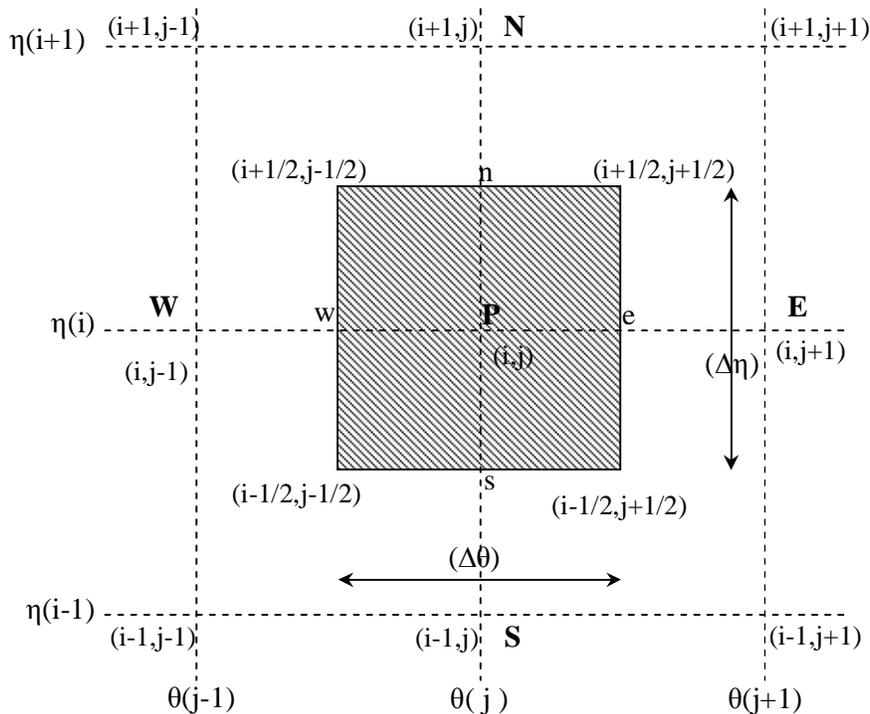
En introduisant la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^+$  dans le système (3.10), il vient :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \Delta\theta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n \\ F_s &= \Delta\theta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s \\ F_e &= \Delta\eta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e \\ F_w &= \Delta\eta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\begin{aligned} \psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2} \end{aligned}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface "e" est établi d'après la démarche de E.F. NOGOTOV [53], comme suit : (voir figure 3.3).



**Figure 3.3 Représentation schématique des nœuds P, E, W, N et S dans le maillage**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e &= \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)}{\Delta \eta} \\ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

Par suite la fonction  $F_e$  s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.a)$$

De la même façon, on écrit le gradient à l'interface "w".

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w &= \frac{\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta \eta} \\ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \eta} \end{aligned}$$

Et la fonction  $F_w$  est donnée par :

$$F_w = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.b)$$

De la même manière, le gradient à l'interface "n" est défini par :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)}{\Delta \theta} \\ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n &= \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F_n = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.c)$$

Le gradient à l'interface "s" s'exprime par la relation :

$$\left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s = \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

Et l'expression  $F_s$  devient :

$$F_s = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient  $\Gamma_\Phi$  prend la valeur  $(1/P_r)$ .

En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{1}{P_r} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{1}{P_r} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= P_r F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= P_r F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= P_r F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= P_r F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21), on écrit  $W$ ,  $P$ ,  $E$ ,  $N$  et  $S$  respectivement  $(i, j-1)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j)$  et  $(i-1, j)$ .

Les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i, j)$ .

Ainsi l'équation (3.21) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$a_P T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) \quad (3.27)$$

### 3.4.1 Discretisation des conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir :

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $I = NI$ ) :

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $I = 1$ ) :

- Cas I :  $a_P = 1$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

- Cas II :  $a_P = 1$

$$a_N = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0 \text{ et } S_T = H \cdot \Delta\eta$$

- Sur la première paroi diamétrale ( $j = 1$ ) :

La relation (2.27.c) donne :  $T^+(i, 2) - T^+(i, 1) = 0$ ,

Nous aurons donc :  $a_P = 1$

$$a_E = 1$$

$$a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Sur la seconde paroi diamétrale ( $j = NN$ ) :

La relation (2.28.c) donne :  $T^+(i, NN) - T^+(i, NN-1) = 0$ ,

Nous aurons donc :

$$a_P = 1$$

$$a_W = 1$$

$$a_E = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

### 3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation discrétisée (3.13) peut se mettre sous forme :

$$a_P \omega_P^+ = a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + b \quad (3.28)$$

L'identification du coefficient  $a_P$  à celui de l'équation (3.15) donne :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.29)$$

avec :

$$S_P \Delta V = 0 \quad (3.30)$$

Les coefficients de l'équation algébrique  $a_N, a_S, a_E$  et  $a_W$  ont pour expressions celles données par le système (3.17).

Lorsque le coefficient  $\Gamma_\phi$  est égal à l'unité, comme nous l'avons montré dans le tableau 3.1, aux interfaces  $n, s, e$  et  $w$ ; les coefficients  $D_n, D_s, D_e$  et  $D_w$  se déduisent des expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Les coefficients  $F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$  ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.24.a), (3.24.b), (3.24.c) et (3.24.d).

Dans le tableau 3.1, nous pouvons constater que le terme constant ( $S_0$ ) du terme de source est donne par :

$$S_0 = HGr \left\{ \left[ G(\eta, \theta) \sin \alpha - F(\eta, \theta) \cos \alpha \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \left[ G(\eta, \theta) \cos \alpha + F(\eta, \theta) \sin \alpha \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} \quad (3.33)$$

Par conséquent, le coefficient b devient :

$$b = S_0 \Delta V$$

Avec:

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \cdot 1$$

b s'écrit donc :

$$b = H^3 Gr \left\{ \left[ G(\eta, \theta) \sin \alpha - F(\eta, \theta) \cos \alpha \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \left[ G(\eta, \theta) \cos \alpha + F(\eta, \theta) \sin \alpha \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \quad (3.34)$$

avec :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2 \Delta \eta} \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2 \Delta \theta} \quad (3.36)$$

Pour homogénéiser on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds W, P, E, N et S deviennent respectivement  $(i, j-1)$  ;  $(i, j)$  ;  $(i, j+1)$  ;  $(i+1, j)$  et  $(i-1, j)$ . Les coefficients  $a_N, a_S, a_E, a_W$  et b sont pris au nœud  $(i, j)$ .

Il s'ensuit que l'équation du mouvement discrétisée (3.28) s'écrit finalement :

$$a_P \omega_P^+(i, j) = a_N \omega_N^+(i+1, j) + a_S \omega_S^+(i-1, j) + a_E \omega_E^+(i, j+1) + a_W \omega_W^+(i, j-1) + b \quad (3.37)$$

### 3.5.1 Discrétisation des Conditions aux limites

En déterminant la vorticité  $\omega^+$  sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par P.J. ROACH [57], qui a exprimé  $\omega^+$  en fonction de  $\psi^+$  et utilisé un développement en série de Taylor :

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $I = 1$ ) :

$$\omega_1^+ = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right)_{\eta=\eta_1}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi active interne ( $i=1, j$ )

$$\Psi^+(2, j) = \Psi^+(1, j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \Psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(1, j) = -\frac{1}{H^2(1)} \left[ \frac{\Psi^+(1, j+1) - 2\Psi^+(1, j) + \Psi^+(1, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\Psi^+(2, j) - \Psi^+(1, j)) \right] \quad (3.38.a)$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $I = NI$ ) :

$$\omega_2^+ = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right)_{\eta=\eta_2}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI)} \left[ \frac{\Psi^+(NI, j+1) - 2\Psi^+(NI, j) + \Psi^+(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\Psi^+(NI-1, j) - \Psi^+(NI, j)) \right] \quad (3.38.b)$$

- Sur la première paroi diamétrale ( $j = 1$ ) :

$$\omega^+(i, 1) = -\frac{1}{H^2(i)} \left[ \frac{\Psi^+(i+1, 1) - 2\Psi^+(i, 1) + \Psi^+(i-1, 1)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{2}{(\Delta\theta)^2} (\Psi^+(i, 2) - \Psi^+(i, 1)) \right] \quad (3.39.a)$$

- Sur la seconde paroi diamétrale ( $j = NN$ ) :

$$\omega^+(i, NN) = -\frac{1}{H^2(i)} \left[ \frac{\Psi^+(i+1, NN) - 2\Psi^+(i, NN) + \Psi^+(i-1, NN)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{2}{(\Delta\theta)^2} (\Psi^+(i, NN-1) - \Psi^+(i, NN)) \right] \quad (3.39.b)$$

### 3.6 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

Réécrivons l'équation adimensionnelle (2.22) sous la forme suivante :

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right) \quad (3.41)$$

Nous remarquons que l'identification de cette équation à l'équation (3.3) est compliquée, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons le développement en série de Taylor :

$$-H^2(i,j) \omega^+(i,j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}$$

avec :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.42)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} -H^2(i,j) \omega^+(i,j) = & \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j) - 2\psi^+(i,j)}{(\Delta \eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1) - 2\psi^+(i,j)}{(\Delta \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi^+(i,j) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j)}{(\Delta \eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1)}{(\Delta \theta)^2} + H^2(i,j) \omega^+(i,j) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

#### 3.6.1 Discrétisation des Conditions aux limites

Les conditions aux limites, que nous avons déterminées pour les parois actives dans les équations (2.23.a) et (2.26.a), et pour les parois adiabatiques dans les équations (2.27.a) et (2.28.a) deviennent :

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $I = 1$ ) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^+(1,j) + 4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{2\Delta \eta} = 0$$

et donc: 
$$\psi^+(1,j) = \frac{4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{3} \quad (3.45.a)$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur (I = NI) :

$$\psi^+(NI,j) = \frac{4\psi^+(NI-1,j) - \psi^+(NI-2,j)}{3} \quad (3.45.b)$$

- Sur la première paroi adiabatique (j = 1) :

$$\psi^+(i,1) = \frac{4\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3)}{3} \quad (3.46.a)$$

- Sur la première paroi adiabatique (j = NN) :

$$\psi^+(i,NN) = \frac{4\psi^+(i,NN-1) - \psi^+(i,NN-2)}{3} \quad (3.46.b)$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "surrelaxation".

### **3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse**

Les équations (2.21.a) et (2.21.b) nous donnent respectivement les composantes adimensionnelles  $V_{\eta}^+$  et  $V_{\theta}^+$  de la vitesse : P.J. ROACHE [57], utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui nous donne :

$$V_{\eta}^+(i,j) = \left. \frac{1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \quad (3.47.a)$$

$$V_{\theta}^+(i,j) = \left. \frac{-1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{i,j} = \frac{-1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right] \quad (3.47.b)$$

$$\forall (i,j) \quad \begin{array}{l} i \neq 1 \ ; \ i \neq NI \\ j \neq 1 \ ; \ j \neq MI \end{array}$$

### **3.8 Processus du calcul**

Pour résoudre le système d'équations (3.27), (3.37) et (3.38) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [53].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une **méthode itérative à coefficient de surrelaxation** :

$$T^{n+1}(i,j) = (1-G_T)T^n(i,j) + \left(\frac{G_T}{a_P}\right) \left[ a_E T^n(i,j+1) + a_W T^{n+1}(i,j-1) + a_N T^n(i+1,j) + a_S T^{n+1}(i-1,j) \right] \quad (3.54)$$

$$\omega^{n+1}(i,j) = (1-G_W)\omega^n(i,j) + \left(\frac{G_W}{a_P}\right) \left[ a_E \omega^n(i,j+1) + a_W \omega^{n+1}(i,j-1) + a_N \omega^n(i+1,j) + a_S \omega^{n+1}(i-1,j) + b(i,j) \right] \quad (3.55)$$

$$\psi^{n+1}(i,j) = (1-G_P)\psi^n(i,j) + \frac{G_P}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^n(i+1,j) + \psi^{n+1}(i-1,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i,j+1) + \psi^{n+1}(i,j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i,j) \omega^{n+1}(i,j) \right] \quad (3.56)$$

n : ordre de l'intégration.

Les paramètres  $G_T$ ,  $G_W$  et  $G_P$  sont les "facteurs de relaxation". Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Grashof (Gr).

Nous résolvons le système d'équations (3.54), (3.55) et (3.56) de la façon suivante :

1/ Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.

2/ Calcul de la distribution de la température.

3/ Calcul de la vorticité.

4/ Calcul de la distribution de la fonction de courant.

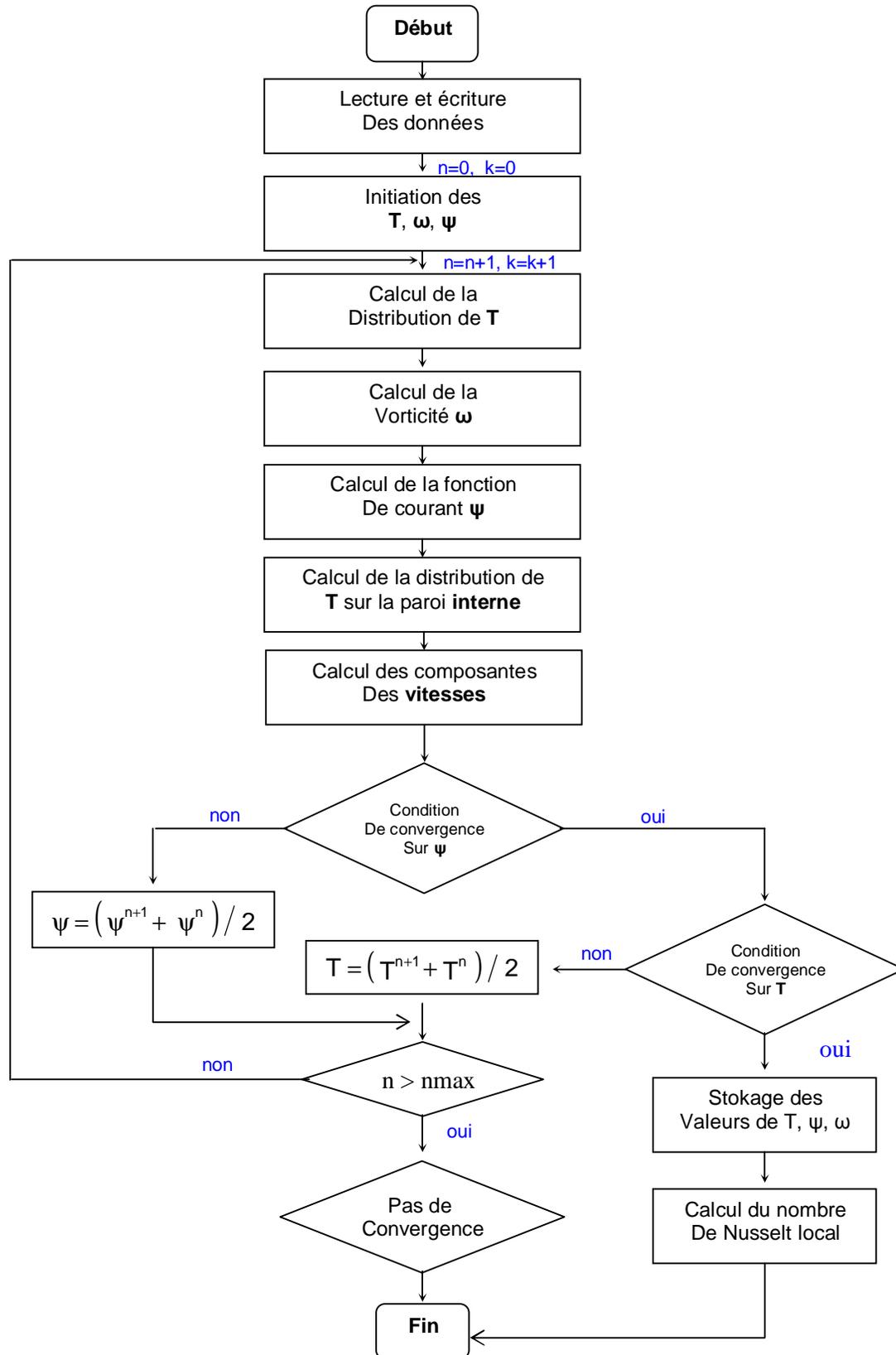
5/ Calcul des composantes des vitesses.

6/ Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de  $\psi$  par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

7/ Le même critère est utilisé pour la température.

8/ Stockage des valeurs de T,  $\omega$ ,  $\psi$ .



# CONCLUSION

Nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle et laminaire dans une enceinte délimitée par deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux et deux plan diamétraux adiabatiques, la paroi elliptique interne étant maintenue isotherme dans un premier cas et soumise à une densité de flux de chaleur constante dans un deuxième cas, alors que la paroi elliptique externe est toujours isotherme.

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de mouvement au sein du fluide et de chaleur à travers les parois actives de l'enceinte. Ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Nous avons mis au point un programme de calcul numérique, basé sur une méthode aux volumes finis, qui permet de déterminer les champs de températures et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système. L'influence du nombre de Grashof, du facteur de forme et l'inclinaison du système, sur l'écoulement en régime stationnaire a été notamment examinée.

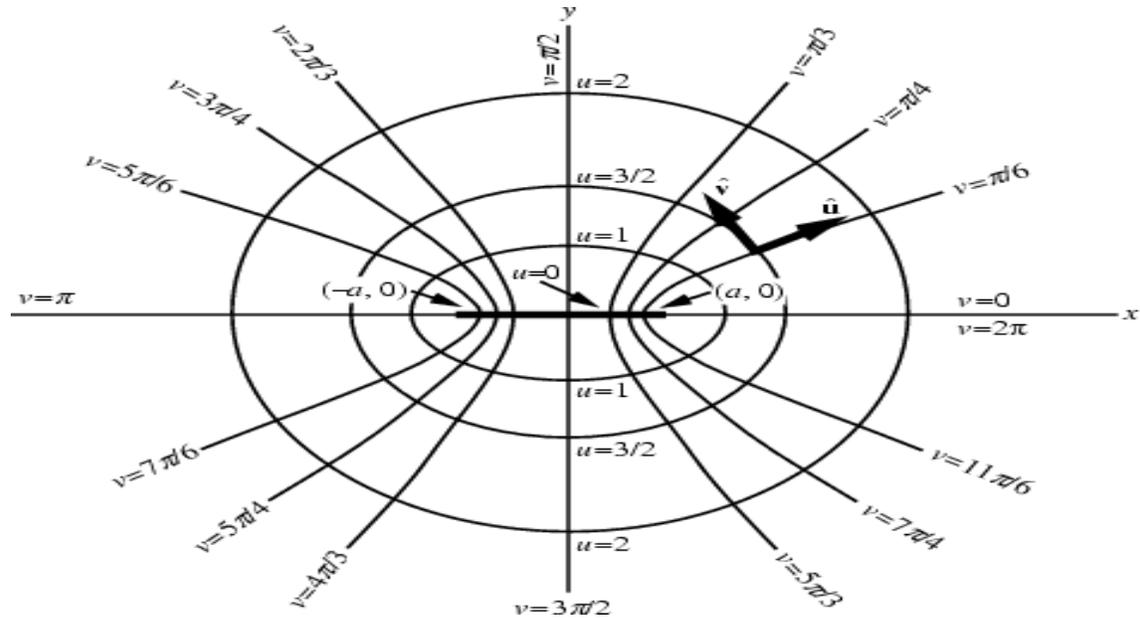
Les résultats des simulations numériques ont montré que la conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Grashof inférieurs à  $10^3$ , quel que soit le facteur de forme. Pour des nombres de Grashof supérieurs à  $10^3$ , le rôle de la convection devient prépondérant, ceci d'une part, d'autre part nous avons que les caractéristiques géométriques de l'enceinte étudiée influent beaucoup sur le transfert.

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'algorithme développé en appliquant d'autres conditions aux frontières de notre enceinte et d'examiner le transfert de chaleur correspondant à d'autres fluides tels que l'ammoniac liquide et le dioxyde de carbone liquide et les comparer au comportement thermique de l'air.

# ANNEXE COORDONNEES ELLIPTIQUES

## A.1 Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure A.1, nous observons dans le plan (xy) un groupe d'ellipses et un groupe de paraboles :



**Figure. A.1** représentation schématique des coordonnées elliptiques

- Les ellipses sont définies par  $u=\text{constant}$ , dont le grand axe est confondu avec l'axe (x).
- Les hyperboles sont définies par  $v = \text{constant}$ .

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ y &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Soit :

$$z = a \operatorname{ch} w \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad w = \eta + i\theta$$

Nous avons :

$$\operatorname{chw} = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{e^\eta e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

en développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{chw} = \cos \theta \operatorname{ch} \eta + i \sin \theta \operatorname{sh} \eta \quad (\text{A.3})$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$z = x + iy = a \operatorname{chw} = a (\cos \theta \operatorname{ch} \eta + i \sin \theta \operatorname{sh} \eta) \quad (\text{A.4})$$

L'identification de la partie réelle à  $x$  et de la partie imaginaire à  $y$  donne :

$$x = a \cos \theta \operatorname{ch} \eta$$

$$y = a \sin \theta \operatorname{sh} \eta$$

## **A.2 Démonstration géométrique**

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos \theta = \frac{x}{a \operatorname{ch} \eta} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{a \operatorname{sh} \eta}$$

soit :

$$\cos^2 \theta = \frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} \quad \text{et} \quad \sin^2 \theta = \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta}$$

comme :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

on en déduit :

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1 \quad (\text{A.5})$$

on pose :

$$\left. \begin{array}{l} A = a \operatorname{ch} \eta \\ B = a \operatorname{sh} \eta \end{array} \right\} \quad (\text{A.6})$$

et comme :

$$\operatorname{ch} \eta > \operatorname{sh} \eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

on se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipses de grand axe  $A = a \operatorname{ch} \eta$  et de petit axe

$$B = a \operatorname{sh} \eta$$

L'équation (A.5) sera donc de la forme :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaire  $(r,\theta)$ ,  $(ds)^2$  est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (du_1)^2 + h_2 (du_2)^2$$

où :

$u_1$  et  $u_2$  sont des coordonnées curvilignes, les quantités  $h_1$  et  $h_2$  les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a  $h_x = h_y = 1$  et en coordonnées elliptiques :

$$h_\eta = h_\theta = a (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes :

$$h^2 \eta = \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^2 \quad (\text{A.8})$$

$$h^2 \theta = \left[ \frac{\partial x}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial z}{\partial \theta} \right]^2 \quad (\text{A.9})$$

$$h^2 z = \left[ \frac{\partial x}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial z}{\partial z} \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

par suite on obtient :

$$h_\eta^2 = h_\theta^2 = a^2 (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) \quad (\text{A.11})$$

$$h_z^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc...

$$\vec{\text{grad}} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{a}_3$$

avec :

$h_1, h_2, h_3$  : coefficients métriques.

$x_1, x_2, x_3$  : coordonnées curvilignes.

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right\}$$

avec :

$V_1, V_2, V_3$  : composantes de la vitesse suivant  $x_1, x_2, x_3$ .

$$h_4 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 \cdot V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 \cdot V_2) \right] \vec{a}_1 + \right. \\ \left. h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 \cdot V_3) \right] \vec{a}_2 + h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot V_1) \right] \vec{a}_3 \right\}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_4} \left[ \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \right)}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \right)}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \right)}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right]$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} h_1 = h_\eta \\ h_2 = h_\theta \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h_\eta = h_\theta = h$$

et nous avons aussi :

$$\begin{cases} x_1 = \eta \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} ; \quad \begin{cases} V_1 = V_\eta \\ V_2 = V_\theta \\ V_3 = V_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_z \end{cases} \quad \text{vecteurs unitaires suivant } \eta, \theta \text{ et } z$$

Ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes :

$$\vec{\operatorname{grad}} \phi = \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \right] + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

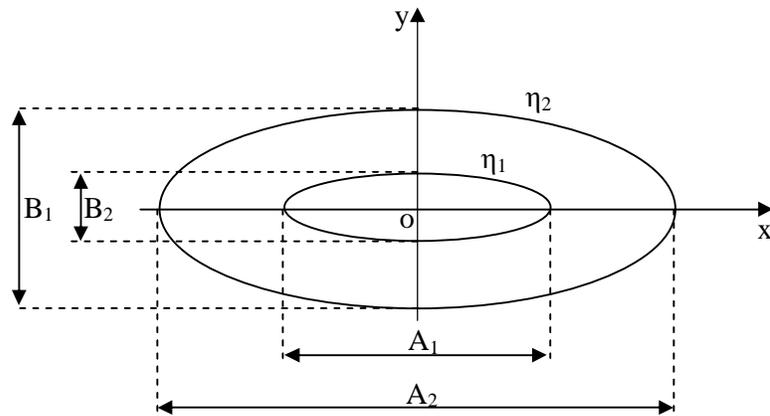
$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{a}_\eta + \left[ \frac{\partial V_\eta}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right] \vec{a}_\theta \\ &+ \left[ h \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \vec{a}_z \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

### A.3.1 Exemple

Cas de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux (fig.A.2).



**Figure. A.2 Représentation schématique de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux**

Les relations (A.6) nous donnent :

$$\frac{A}{B} = \coth \eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (\text{A.17})$$

on en déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A + B}{A - B} \quad (\text{A.18})$$

soit encore :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A + B}{A - B} \right) \quad (\text{A.19})$$

nous aurons donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \right) \quad (\text{A.19.a})$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_2 + B_2}{A_2 - B_2} \right) \quad (\text{A.19.b})$$

### **A.3.2 Excentricité de l'ellipse**

L'excentricité d'une ellipse est donné par :

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad (\text{A.20})$$

avec :  $0 < e < 1$

et A et B sont respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse.

D'autre part la relation (A.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{sh}^2 \eta} \quad (\text{A.21})$$

comme :

$$\text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1$$

on en déduit :

$$\text{ch}^2 \eta - 1 = \text{sh}^2 \eta \quad (\text{A.22})$$

en remplaçant (A.22) dans (A.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{ch}^2 \eta - 1}$$

d'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

soit encore :

$$\frac{1}{\text{ch} \eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

on obtient donc :

$$e = \frac{1}{\text{ch} \eta} \quad (\text{A.23})$$

on aura donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1} \quad (\text{A.23.a})$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$e_2 = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_2} \quad (\text{A.23.b})$$

Les relations (A.21), (A.22) et (A.23) donnent :

$$\operatorname{th}^2\eta = \frac{\operatorname{ch}^2\eta - 1}{\operatorname{ch}^2\eta} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta} = 1 - e^2$$

on aura donc :

$$\operatorname{th}\eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1}$$

ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(\operatorname{th}\eta + 1)}{\operatorname{th}\eta - 1}$$

qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right] \quad (\text{A.23.c})$$

#### **A.4 Formulation des équations de continuité, de la chaleur et du mouvement dans le système de coordonnées elliptiques**

##### **A.4.1 Equation de continuité**

Notre problème étant bidimensionnel, la relation (A.15) s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) \right] \quad (\text{A.24})$$

Ainsi  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ , se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0 \quad (\text{A.25})$$

##### **A.4.2 Equation de la chaleur**

L'équation (1.7) peut se mettre sous la forme :

$$\left( \vec{V} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \right) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} T) \quad (\text{A.26})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.26) donne :

$$\left( \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \right) T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{A.26.a})$$

Des relations (A.13) et (A.24), nous déduisons :

$$\text{div} \left( \vec{\text{grad}} T \right) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.26.b})$$

Nous obtenons donc :

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

#### A.4.3 Equation du mouvement

Réécrivons l'équation (1.9) sous la forme suivante :

$$\left( \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \omega = g \beta \left( -\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right) + \nu \text{div} \left( \vec{\text{grad}} \omega \right) \quad (\text{A.28})$$

Nous expliciterons tout d'abord l'expression suivante :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \quad (\text{A.28.a})$$

en fonction de  $\eta$  et  $\theta$ .

D'après les relations (A.1), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \\ dx &= a \cos \theta \operatorname{sh} \eta d\eta - a \sin \theta \operatorname{ch} \eta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.29.a})$$

et

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \\ dy &= a \sin \theta \operatorname{ch} \eta d\eta + a \cos \theta \operatorname{sh} \eta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.29.b})$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de  $d\eta$  et  $d\theta$  :

$$d\eta = \frac{1}{a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta - \sin^2 \theta)} [ a \cos \theta \operatorname{sh} \eta dx + a \sin \theta \operatorname{ch} \eta dy ] \quad (\text{A.29.c})$$

$$d\theta = \frac{1}{a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta - \sin^2 \theta)} [ -a \sin \theta \operatorname{ch} \eta dx + a \cos \theta \operatorname{sh} \eta dy ] \quad (\text{A.29.d})$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \operatorname{sh} \eta}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-\sin \theta \operatorname{ch} \eta}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.30.a})$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.30.b})$$

Comme les dérivées partielles de  $T$  par rapport à  $x$  et à  $y$  sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.31.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{A.31.b})$$

En tenant compte de la relation (A.30.b), l'équation (A.31.b) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A.31.c})$$

Alors, en utilisant les relations (A.30.a), (A.31.a) et (A.31.c) nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{a(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[ \cos \theta \text{sh} \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \sin \theta \text{ch} \eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.32.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{a(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[ \sin \theta \text{ch} \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + \cos \theta \text{sh} \eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.32.b})$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.28.a), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha &= \frac{1}{a(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ &\left[ \frac{(-\cos \theta \text{sh} \eta \cos \alpha + \sin \theta \text{ch} \eta \sin \alpha)}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\left. + \frac{(\cos \theta \text{sh} \eta \sin \alpha + \sin \theta \text{ch} \eta \cos \alpha)}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

On peut écrire la relation qui précède sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha &= \frac{1}{h} \left[ (-F(\eta, \theta) \cos \alpha + G(\eta, \theta) \sin \alpha) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\left. + (F(\eta, \theta) \sin \alpha + G(\eta, \theta) \cos \alpha) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{\cos \theta \text{sh} \eta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{\sin \theta \text{ch} \eta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.35})$$

Finalement, l'équation du mouvement (A.28) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{g\beta}{h} \left\{ [-F(\eta, \theta) \cos \alpha + G(\eta, \theta) \sin \alpha] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ &\left. + [F(\eta, \theta) \sin \alpha + G(\eta, \theta) \cos \alpha] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{v}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

## Références Bibliographiques

- [1] J. O. Wilkes. S. W. Churchill. The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure, A. I. Ch. E. J., vol. 12, n°. 1, pp. 161-166 (1966).
- [2] M. R. Samuels, S. W. Churchill, Stability of fluid in a rectangular région heated from below, A. I. Ch. E. J.. vol. 13. n0. 1, pp. 77-85 (1967).
- [3] J. Patterson, J. Imberger. Unsteady natural convection in a rectangular cavity, J. Fluid Mech. vol. 100, pp. 65-86 (1980).
- [4] R. Yewell, D. Poulikakos. A. Bejan, Transient natural convection experiments in shallow enclosures, J. Heat Transfer. vol. 104, pp. 533-538 (1982).
- [5] - J. H. Lee, Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique en régime laminaire transitoire dans un récipient cylindrique vertical partiellement rempli d'un fluide Newtonien, Thèse d'état, Université de Perpignan (1984).
- [6] T. Sakurai. T. Matsuda, A temperature adjustment process in a Boussinesq fluid via a buoyancy-induced meridional circulation, J. Fluid Mech. vol. 54, pp. 417- 421 (1972).
- [7] M. C. Jischke, R. T. Doty, Linearized buoyant motion in a closed container, J. Fluid Mech. vol. 71. pp. 729-754 (1975).
- [8] J. M. Hyun, Transient process of thermally stratifying an initially homogeneous fluid in an enclosure, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27. pp. 1936-1938 (1984).
- [9] Y. S. Lin. R. G. Akins. Thermal description of pseudo-steady' state natural convection inside a vertical cylinder, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 29. n°. 2, pp. 301-307 (1986).
- [10] R. G. Akins, Y. S. Lin, Transient behaviour of natural convection inside a vertical cylinder, Chem. Eng. Corn., vol. 43, pp. 69-83 (1986).
- [11] B. J. Tyler, A. F. Tuck, Heat transfer to a gas from a spherical enclosure : measurements and mechanism , Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 10, n°. 2, pp. 251- 253 (1967).
- [12] Y. Mochimaru, Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity, Heat Transfer. Japanese Research, vol. 18, n°. 4, pp. 9-19 (1989).

- [13] W. Beckmann, Die wärmeübertragung in zylindrischen gasschichten bei natürlicher konvektion, Forsch. Geb. Ingenieurwesen. vol. 2, pp.165-178 (1931)
- [14] E. R. G. Eckert. E. E. Soehgen, Study on heat transfer in laminar free convection with the Mach-Zehnder interferometer, Wright-Patterson AFB Tech.. Rep. n0. 5747, ATI-44580 (1948).
- [15] U. Grigull. W. Hauf, Natural convection in horizontal cylindrical annuli, Proc. Third International Heat Transfer Conference, vol. 2. pp. 182-195, (1966).
- [16] R. E. Powe, C. T. Carley, E. H. Bishop. Free convective flow patterns in cylindrical annuli, J. Heat Transfer, vol. 91, pp. 310-314 (1969).
- [17] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinders, J. Fluid Mech., vol. 74, pp. 695-719 (1976).
- [18] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein. Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19. pp. 1127-1134 (1976).
- [19] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, ASME J. Heat Transfer, vol. 100. pp. 635-640 (1978).
- [20] U. Projahn. H. Reiger, H. Beer, Numerical analysis of laminar convection between concentric and eccentric cylinders, Numer. Heat Transfer, vol. 4. pp. 131- 146 (1981).
- [21] U. Projahn, H. Beer. Prandtl Number effects on natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, Wärme-und Stoffübertragung. vol. 19. pp. 249-254 (1985).
- [22] D. B. Fant. J. Prusa, A. P. Rothmayer, Unsteady multicellular natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus, ASME J. Heat Transfer. vol. 112, pp. 379 - 387 (1989).
- [23] D. Naylor, H. M. Badr, J. D. Tarasuk, Experimental and numerical study of natural convection between two eccentric tubes, Int. J. Heat Mass Transfer. vol. 32, pp. 171- 181 (1989).
- [24] Y. F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Takata, S. Hasegawa, Flow patterns of natural convection in horizontal cylindrical annuli, int. J. Heat Mass Transfer, vol. 28, pp. 705- 714 (1985).
- [25] H. H. Bau, Low Rayleigh number thermal convection in a saturated porous medium bounded by two horizontal, eccentric cylinders, ASME J. Heat Transfert, vol. 106, pp. 166-175 (1984 ).

- [26] K. Himashekar, H. H. Bau, Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal convection in horizontal concentric annuli containing saturated porous media, *J. Fluid Mech.*, vol. 187, pp. 267-300 (1988).
- [27] J. Prusa, L. S. Yao, Natural convective heat transfer between eccentric horizontal cylinders, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 105. pp. 108-116 (1983).
- [28] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, A parametric study of Prandtl number and diameter ratio effects on natural convection heat transfer in horizontal cylindrical annuli *ASME J. Heat Transfer*. vol. 102. pp. 768-770 (1980).
- [29] L. R. Mack, E. H. Bishop, Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers, *Quart. Journ. Mech. and applied Math.*, vol. 21, n°. 2. pp.223-241 (1968).
- [30] J. Huetz, J. P. Petit, Natural and mixed convection in concentric annular spaces : experimental and theoretical results for liquid metals, *Proc. of the 5<sup>th</sup> Int. Conf., Tokyo*. pp. 169-172 (1974).
- [31] C. Y. Liu, W. K. Mueller, F. Landis, Natural convection heat transfer in long horizontal cylindrical annuli, *International Developments in Heat Transfer, Part. 5*, pp. 976-984 (1961).
- [32] E. H. Bishop, C. T. Carley. Photographic studies of natural convection between concentric cylinders. In *Proceeding of the 1966 Heat Transfer and Fluid Mechanics institute*, pp. 63-78, Stanford University Press, Stanford (1966).
- [33] L. Crawford. R. Lemfich, Natural convection in horizontal concentric cylindrical annuli, I. and E. C. *Fundamentals*, vol. 4, pp. 260-264 (1962).
- [34] R. E. Powe, C. T. Carfey, S. L. Carruth, A numerical solution for natural convection in cylindrical annuli, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 92, pp. 210-220 (1971).
- [35] M. R. Abbot, A numerical method for solving equations of natural convection in a narrow concentric cylindrical annulus with a horizontal axis, *Quart. J. Mech. And Applied Math.*, vol. 17, pp. 471-481 (1964).
- [36] A. Cheddadi, Bifurcation et transitions thermoconvectives bidimensionnelles et tridimensionnelles en géométrie annulaire. Thèse d'état, EMI, Rabat (1993).
- [37] R. Kumar, Study of natural convection in horizontal annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer*. vol. 31. pp. 1137-1148 (1988).

- [38] E. H. Bishop, R. S. Kolfiat, L. R. Mack, J. A. Scanlan, Photographic studies of convection patterns between concentric spheres, Soc. Photo. Opt. Instrum. Eng. J., vol. 3, pp. 47-49. (1964-1965).
- [39] E. H. Bishop, R. S. Kolfiat, L. R. Mack, J. A. Scanlan, Convective heat transfer between concentric spheres, In Proceeding of the 1964 Heat Transfert and Fluid Mechanics institute, pp. 69-80, Stanford University Press, Stanford (1964).
- [40] E. H. Bishop, L. R. Mack, J. A. Scanlan, Heat transfer by natural convection between concentric spheres, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 9, pp. 649-662 (1966).
- [41] S. N. Singh, J. M. Elliott. Natural convection between concentric spheres in a slightly-thermally stratified médium, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, pp. 395-406 (1981).
- [42] J. H. Lee, and T. S. Lee, Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptical cylinders, Int. J. Heat. Mass. Trans., 24, pp. 1739-1742. (1981).
- [43] W. C. Schreiber, and S. N. SINGH, Natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders, Int. J. Heat. Mass. Trans., 28, pp. 807-822. (1985).
- [44] W. Chmaïsem, S. J. Suh, and M. Daguënet, Numerical study of the Boussinesq model of natural convection in an annular space: having an horizontal axis bounded by circular and elliptical isothermal cylinders, App. Therm. Engin., 22, pp. 1013-1025. (2002).
- [45] C. H. Cheng, and C.C. Chao, Numerical prediction of the buoyancy-driven flow in the annulus between horizontal eccentric elliptical cylinders, Num. Heat. Trans. A 30, pp.283-303. (1996).
- [46] Y. D. Zhu, C. Shu, J. Qiu, and J. Tani, Numerical Simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method, Int. J. Heat. Mass. Trans., 47, pp. 797-808. (2004)
- [47] M. M. Elshamy, M. N. Ozisik, and J. P. Coulter, Correlation for laminar natural convection between con focal horizontal elliptical cylinders, Numer. Heat Transfer, Part A. Vol.18, P.95-112 (1990).
- [48] M. Djezzar, M. Daguënet, Contribution à l'étude de la convection dans différents espaces annulaires, soumis à différentes conditions de chauffage. Thèse de Doctorat d'état, Université Mentouri Constantine (2005)
- [49] M. Djezzar, M. Daguënet, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. 1<sup>ST</sup> International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications. Beïrut-Lebanon, du 31 Mai au 04 Juin 2004.

- [50] M. Djezzar, A. Chaker, and M. Daguene, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of internal eccentricity. *Revue des Energies Renouvelables*, Volume 8, Numéro 1, Juin 2005.
- [51] M. Djezzar, M. Daguene, Natural steady convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of the slope angle. *Journal of Applied Mechanics Transaction of the ASME*, Volume 72, Janvier 2006.
- [52] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New Yorkm, (1980)
- [53] E.F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat Transfer*, McGraw-Hill book company, New York, (1978)
- [54] E. Saadjan, *Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques*, Polytechnica, Paris, (1998)
- [55] P. Moon, and E. Spencer, *Field theory Handbook*, Springer, P. 349, Berlin (1971)
- [56] P. Moon, and E. Spencer, *Field theory Engineers*, D. VAN. Nostrand company, LTD, Toronto, P.356, Canada (1961).
- [57] P.J. ROACHE, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa (1982)

**Titre :** Approche numérique de la convection naturelle dans une enceinte fermée, délimitée par deux cylindres elliptiques horizontaux, centrés et deux plans diamétraux.

**Résumé :**

L'auteur propose dans ce travail, l'étude numérique du phénomène de la convection naturelle, en régime laminaire et permanent, dans une cavité annulaire orientée d'un angle  $\alpha$ , de section droite elliptique, limitée, par deux plans diamétraux. Cette dernière est remplie par un fluide newtonien et incompressible. Le nombre de Prandtl est fixé à 0.7 (cas de l'air) mais le nombre de Grashof varie. En utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, l'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles: les équations de continuité et des quantités de mouvement sont exprimées dans un système de coordonnées dites "elliptiques", pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Pour les conditions de chauffage, ils supposent, dans un premier cas, les deux parois elliptiques de l'enceinte isothermes,  $T_1$  pour la paroi interne et  $T_2$  pour la paroi externe, avec  $T_1 > T_2$ , et dans un deuxième cas, la paroi elliptique interne est soumise à une densité de flux de chaleur constante. Les parois diamétrales sont supposées toujours adiabatiques. Un code de calcul a été mis au point, ce dernier utilise les volumes finis, pour la discrétisation des équations et afin de montrer sa fiabilité, les auteurs comparent des résultats issus de ce dernier avec d'autres résultats similaires existant dans la littérature et ils examinent l'effet de l'inclinaison du système, deux facteurs géométriques et le nombre de Grashof sur les résultats obtenus que ce soit qualitativement ou quantitativement.

**Mots-clés :** convection naturelle, équations de Boussinesq, espaces annulaires, cavités annulaires, enceintes fermées, cylindres elliptiques, Formulation vorticité-fonction de courant.

**Title : Numerical approach of the natural convection, in a closed enclosure, delimited by two horizontal elliptic cylinders and two diametrical plans.**

**Summary** : The author proposes in this work, the numerical study of the phenomenon of the natural convection, in laminar and permanent mode, in a directed annular cavity of an angle has, of elliptic cross-section, limited, by two diametrical plans. The latter is filled by a Newtonian and incompressible fluid. The number of Prandtl is fixed at 0.7 (case of the air) but the number of Grashof varies. By using the approximation of Boussinesq and the vorticity-function formulation of current, the flow is modeled by the differential equations with the derivative partial: the equations of continuity and the momentum are expressed in a frame of reference known as "elliptic ", to facilitate the writing of the boundary conditions and to transform the curvilinear field into a rectangular field. For the conditions of heating, they suppose in a first case, the two elliptic walls of the enclosure isotherms,  $T_1$  for the internal wall and  $T_2$  for the external wall, with  $T_1 > T_2$ , and in a second case the internal wall will be crossed by a constant flux density of heat and the external wall is always maintained isothermal at the temperature  $T_2$ .

A computer code was developed, the latter uses finished volumes, for the discretization of the equations and in order to show its reliability, the authors compare results resulting from the latter with other similar results existing in the literature and they examine the effect of the slope of the system, two geometrical factors and the number of Grashof on the results obtained that it is qualitatively or quantitatively.

**Key words** : natural convection, Boussinesq equations, annular space, annular cavities, closed enclosures, elliptic cylinders, vorticity-function formulation.

**العنوان** الدراسة العددية للحمل الطبيعي، داخل فضاء حلقي مغلق، محصور بين أسطوانتين إهليجيتين أفقيتين مشتركتي البؤرة و مستويين قطريين.

### ملخص

قمنا في إطار هذا العمل بدراسة عددية لظاهرة انتقال الحرارة عن طريق الحمل الطبيعي، الموجود في تجويف حلقي مائل بزواوية  $\alpha$  بالنسبة لشعاع جاذبية الأرض. مقطعه العرضي إهليجي محصور بين مستويين قطريين. هذا التجويف الحلقي مملوء بمائع نيوتوني غير منضغط، يتدفق بصفة رقائقية و دائمة. نأخذ القيمة 0.7 لعدد Prandtl ثابتة (حالة الهواء) و لكن عدد Grashof يتغير. باستعمال تقدير و صيغة. كتب نموذج هذ التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية: معادلات الاستمرارية وكميات الحركة صيغت في جملة للإحداثيات الإهليجية، لتسهيل كتابة الشروط الحدية و تغيير المجال المنحني إلى مجال على شكل مستطيل. بالنسبة لشروط هذا التسخين افترضنا الجدار الداخلي و الخارجي لهذا التجويف ثابت درجة الحرارة،  $T_1$  بالنسبة للجدار الداخلي و  $T_2$  بالنسبة للجدار الخارجي مع  $T_1 > T_2$ . برنامج معلوماتي وضع للقيام بمختلف الحسابات لدراسة هذه الجملة، باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. بعدها قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج مماثلة لأبحاث أخرى

**المفاتيح :** الحمل الطبيعي، معادلات بوسينسك، فضاءات حلقية، أسطوانات إهليجية، طريقة الحجوم المنتهية.