

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**N° d'ordre :  
Série :**

**MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE**

**SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE**

**THEME**

**SUPER-INTEGRABILITE SUR UNE HYPERBOLOÏDE  
A DEUX DIMENSIONS**

Par

**BOUDEBZA LYDIA**

SOUTENU LE : / / 2007

**Devant le jury :**

<b>Président :</b>	<b>F. BENRACHI</b>	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
<b>Rapporteur :</b>	<b>B. BENTAG</b>	M.C. Univ. Mentouri Constantine.
<b>Examineurs :</b>	<b>T. BOUDJEDAA</b>	Prof. Univ. Jijel.
	<b>A. BENSLAMA</b>	Prof. Univ. Mentouri Constantine.

## Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*A la mémoire de mon Père,*

*A ma très chère Mère,  
A mon unique frère Hamza,  
A mon petit adorable Minou,*

*A ma chère Grand-mère, mes chères Tantes et à mon unique Oncle,  
A tous mes Cousins et Cousines, surtout Nounou et Farrah,  
A Yousra, Ahcen, Zinou, Nardjessa, Mamouze,*

*A Mr Fakher,  
A mon amie intime : Djalila,*

*A mes meilleurs amies : Nedjma, Manel, Naouel,  
Sans oublier mes amis : Assia, Sabah, Liza, Skander, Halim, Salim et  
Mehdi.*

# Remerciements

*Ce présent travail a été réalisé au département de physique de la faculté des sciences exactes de l'université Mentouri-Constantine.*

*J'exprime ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire de Magister, madame Bentag Baya, maître de conférences au laboratoire de la physique mathématique et de la physique subatomique qui m'a proposé ce sujet et pour son soutien constant qui m'a aidé à concrétiser ce travail.  
Je la remercie vivement pour ses précieuses remarques et encouragements.*

*Je remercie Mme F. Benrachi professeur au même laboratoire de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

*Je remercie vivement Mr T. Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel, pour la documentation qui m'a été d'une grande utilité et de bien vouloir accepter d'examiner ce travail.*

*Mes remerciements aussi à Mr A. Benslama professeur à l'université Mentouri-Constantine et à Mr.A.Boudine, maître de conférences au Centre Universitaire O.E.B d'avoir bien voulu accepter de participer au jury et d'examiner ce mémoire.*

*Je remercie mon collègue Khoudja Lamine doctorant en physique théorique pour son aide efficace et surtout pour sa gentillesse*

*Je remercie également tous les membres de la famille Menaseria pour leur aide qui ma servie à achever la saisie de ce mémoire*

*Je remercie également tous mes collègues théoriciens.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction :</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>le Formalisme des Intégrales de Chemins</b>	<b>7</b>
2.1	Origine du concept d'intégrale de chemins . . . . .	7
2.2	Rappel sur le propagateur de l'équation de Schrödinger . . . . .	9
2.2.1	Propagateur élémentaire : formule de Feynman-Dirac . . . . .	10
2.2.2	Forme discrète du propagateur : . . . . .	12
2.3	Intégrale de chemin dans l'espace des phases . . . . .	14
2.4	La Méthode Duru-Kleinert . . . . .	17
2.4.1	Procédure de transformations spatio-temporelles . . . . .	17
2.4.2	Dérivation du potentiel effectif . . . . .	21
2.5	Conclusion : . . . . .	27
<b>I</b>	<b>Application de l'Intégrale de Chemin dans l'Espace Euclidien :</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>La Technique de la Fonctionnelle Delta de Dirac</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Rappel sur la démarche de la Technique : . . . . .	30
3.3	Applications : . . . . .	34
3.4	Conclusion : . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Application de l'Intégrale de Chemins dans l'Espace Courbe</b>	<b>65</b>
<b>4</b>	<b>L'approche des Intégrales de Chemins pour un Potentiel Super intégrable sur une Hyperboloïde à Deux Dimensions</b>	<b>66</b>
4.1	Introduction . . . . .	66

4.2	Intégrale de Chemins sur un Espace Courbe . . . . .	68
4.2.1	La prescription de " l'Ordre de Weyl " : . . . . .	69
4.2.2	La prescription de la " Forme Produit " : . . . . .	74
	<b>Application</b>	<b>78</b>
4.3	Potentiel de Higgs et systèmes de coordonnées . . . . .	79
4.3.1	système de coordonnées Pseudo-sphériques : . . . . .	81
4.3.2	système de coordonnées Equidistantes : . . . . .	81
4.3.3	système de coordonnées Hyperboliques : . . . . .	82
4.3.4	système de coordonnées Elliptiques : . . . . .	83
4.4	Propagateur en coordonnées Pseudo-sphériques et Equidistantes : . . . . .	84
4.4.1	Spectre d'énergie et fonctions d'ondes : . . . . .	93
4.5	Propagateur en coordonnées hyperboliques et elliptiques : . . . . .	97
4.6	Conclusion : . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Conclusion :</b>	<b>105</b>
	<b>Appendices</b>	<b>106</b>

# Chapitre 1

## Introduction :

La mécanique quantique joue un rôle fondamental pour la description et la compréhension des phénomènes naturels. En effet, dès que ces derniers se produisent dans le monde infiniment petit, ils ne sont explicables que dans le cadre de la physique quantique. Les lois classiques, celles qui gouvernent notre quotidien macroscopiques, cessent d'être valables pour des corps matériels animés de très grandes vitesses, comparables à celles de la lumière ( domaine relativiste ); de plus elles sont aussi en défaut à l'échelle atomique ou subatomique ( domaine quantique ). Il est cependant important de remarquer que, dans les deux cas, la physique classique apparaît comme une approximation des nouvelles théories. Nous pouvons situer la naissance de la physique quantique en 1900, année où Max Planck présenta son célèbre article sur le rayonnement du corps noir. Durant la trentaine d'années qui ont suivi, plusieurs expériences ont démontré l'incapacité de la physique classique ( mécanique, thermodynamique, électromagnétisme ) d'expliquer certains comportements de la matière au niveau microscopique. Pour parvenir à donner une interprétation cohérente de ces expériences, il a été nécessaire d'introduire des concepts radicalement différents de ceux de la physique classique. Par exemple, on a dû abandonner la notion de trajectoire et considérer que les particules microscopiques ont parfois un comportement semblable à une onde. L'ensemble de ces nouveaux concepts a donné naissance à une nouvelle physique, la "physique quantique", qui s'est développée rapidement puisqu'en 1927, déjà les fondements de la théorie sont achevés. Par son abandon des concepts-clés de la mécanique classique, nous pouvons dire que la physique quantique constitue une véritable révolution dans notre façon d'interpréter les mesures expérimentales. Avec la relativité introduite par Einstein, la physique quantique est un des piliers de l'édifice théorique de la physique contemporaine du 21<sup>ème</sup> siècle.

La forme mathématique que nous donnons à la plupart des théories et lois physiques a été recherchée dès l'antiquité. la mise en équations est souvent la partie la plus difficile du travail, parfois la plus féconde du point de vue de la compréhension des faits et des lois. Sans doute cette opération est

un art qui demande beaucoup de réflexion et de pratique. Les mathématiques ne sont pas l'affaire des seuls mathématiciens. Elles intéressent, plus ou moins, toutes les autres disciplines scientifiques. Nous en avons besoin, elles s'appliquent, elles se prêtent à la modélisation avec souplesse et efficacité. Dans l'autre sens, les mathématiques s'enrichissent, plus ou moins, de toutes les autres disciplines scientifiques. Aujourd'hui plus que jamais, des idées, des concepts, des méthodes mathématiques viennent d'ailleurs. Elles sont brassées et travaillées par les mathématiciens, et, sous forme mathématisée, elles irriguent des champs imprévus. En général, un formalisme mathématique se juge par sa simplicité, sa puissance et sa généralité, notamment dans les domaines liés aux applications récentes. En ce qui concerne la physique théorique, le principe d'action ( principe variationnel associé à la formulation hamiltonienne ) était à l'origine de ses progrès rapides. Il s'est révélé très fécond pour l'étude de toutes les disciplines de la physique théorique de cette époque. Tout en offrant souvent une aide considérable dans les applications pratiques aux problèmes de la mécanique, cette formulation plus abstraite était surtout d'un haut intérêt à cause du rôle essentiel qu'elle jouait dans l'élaboration des théories plus modernes de la matière. Ainsi cette formulation de la mécanique classique était un tournant exceptionnel parce qu'elle ouvrait la voie à la mécanique statistique et à la théorie quantique. Mais en plongeant dans les eaux obscures et impénétrables de la physique atomique, l'appareil mathématique de la mécanique classique n'arrivait pas à expliquer les observations obtenues des résultats expérimentaux du monde microscopique. Par conséquent, les scientifiques ont tenté l'élaboration de plusieurs formalismes mathématiques qui répondent aux nécessités et exigences modernes suscitées par l'apparition de la physique quantique et relativiste. Ainsi, il y a eu dans l'ordre la mécanique des matrices de Heisenberg [1] et la mécanique ondulatoire de Schrödinger [2]. Ici, les tentatives pour formaliser certains notions du domaine de la théorie des phénomènes liés aux interactions fortes des particules à partir des mêmes méthodes de la physique quantique n'ont pas abouti à des résultats physiques réels car la situation est d'un tout autre caractère qui fera appel à des concepts fondamentalement nouveaux. Ainsi, les travaux de Dirac ont conduit dès 1930 à poser la base d'une nouvelle formulation mathématique [3] plus complète et capable d'inclure certaines grandeurs qui ne possèdent pas d'analogues classiques. En 1942, s'inspirant des idées ingénieuses de Dirac, Feynman propose une nouvelle méthode de quantification qui repose sur le Lagrangien pour pouvoir décrire un système ne possédant pas nécessairement d'hamiltonien. Sa motivation première était de quantifier la nouvelle formulation de l'électrodynamique classique basée sur l'action à distance. Ainsi, il reformule entièrement la mécanique quantique d'une façon naturelle et assez concise avec un outil mathématique remarquablement simple, l'intégrale de chemin. Cette nouvelle approche qui offre un point de vue alternatif sur la mécanique quantique s'est rapidement imposé en physique théorique avec sa généralisation à la théorie quantique des champs,

permettant notamment une quantification des théories de jauge non abéliennes beaucoup moins compliquée que la procédure de la quantification canonique. Malgré tous ces développements, l'application de cette technique au traitement des potentiels de la mécanique quantique est restée restreinte aux systèmes quadratiques. Cependant, grâce aux travaux remarquables de Duru et Kleinert, plusieurs systèmes quantiques qui sont à l'origine du succès enregistré de l'équation de Schrödinger ont été exactement solutionnés via l'intégrale de chemin. En l'occurrence, le système coulombien [4] a trouvé la forme Gaussienne dans l'espace des phases à l'aide d'une transformation canonique des variables de Kustaanheimo et Stiefel [5] et en reparamétrisant le parcours d'intégration par un paramètre temps et l'intégrale de chemin de l'atome d'hydrogène en coordonnées polaires dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  a pu être transformé en une intégrale de chemin dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  relative à deux oscillateurs harmoniques indépendants à deux dimensions [6]. La technique des transformations spatiales et temporelles a permis à l'intégrale de chemin de jeter des ponts aux domaines contigus de la physique mathématique et de la physique théorique. Elle a été illustrée par la résolution d'une façon particulièrement élégante de plusieurs problèmes importants de la mécanique quantique non-relativiste dans divers systèmes de coordonnées. Des exemples traités par la méthode de Duru-Kleinert qui sont souvent cités sont les suivants [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Le présent mémoire illustre l'approche de l'intégrale de chemin en résolvant certains problèmes importants de la mécanique quantique non-relativiste. Tout d'abord, par leur variété, ils permettent d'acquérir une grande maîtrise des techniques mathématiques indispensable à l'étude de la théorie quantique, dans le cadre des notions familières de la physique classique. D'autre part, ils interviennent largement dans la solution des sujets modernes ; il arrive souvent que les représentations intégrales des problèmes complexes se réduisent à celles de ces problèmes élémentaires.

Le mémoire comporte deux parties et quelques appendices.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons en premier lieu l'intégrale de chemin dans une formulation ( espace de configuration ) où nous soulignons les relations étroites entre la mécanique quantique de Schrödinger et les concepts de ce formalisme ainsi que la mise en correspondance de façon explicite, claire et logique des mécaniques classique et quantique. Aussi, la construction de l'intégrale de chemin est étendue aux hamiltoniens qui sont des fonctions générales  $H(p, q)$  des variables d'espaces de phase  $p, q$  ; de ce fait, nous obtenons une intégrale de chemin dans laquelle l'action prend sa forme hamiltonienne et l'intégration porte sur des trajectoires  $\{p(t), q(t)\}$  dans l'espace de phase. En deuxième lieu, nous évoquons d'une façon détaillée la méthode de Duru-Kleinert qui permet de réduire l'action pour un grand nombre de systèmes physiques quantiques à une forme quadratique et conduit par voie de conséquence à une intégrale de chemin Gaussienne dont l'intérêt n'échappe plus à personne.



Dans le troisième chapitre, des hamiltoniens connus comme celui de l'oscillateur harmonique, de Coulomb, particule libre sur une sphère à deux dimensions,... dont les traitements par la mécanique quantique habituelle existent depuis bien longtemps sont reconsidérés par l'intégrale de chemin en vue, précisément, de leurs applications fréquentes en physique. Ces hamiltoniens sont analysés sous l'angle d'une nouvelle approche qui utilise la fonctionnelle de Dirac et l'espace des phases. Les propagateurs sont reconstruits d'une manière plus élémentaire et très élégante.

Dans le quatrième chapitre une formulation explicite de l'intégrale de chemin sur un espace courbe est donnée. Une étude détaillée sur les hamiltoniens super intégrables est présentée dans le cadre de cette approche dans l'espace Riemannien avec une courbure constante [15]. Le propagateur relatif au potentiel de l'oscillateur de Higgs a été évalué dans quatre systèmes de coordonnées permettant la séparation des variables : systèmes de coordonnées pseudo-sphériques, équidistantes, elliptiques et hyperboliques. Au moyen de quelques transformations temporelles appropriées, le propagateur en question est séparé au produit de deux propagateurs indépendants de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié à une dimension. Le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes sont exactement obtenus. Néanmoins, le calcul explicite n'a été effectué que dans les cas des deux premiers systèmes de coordonnées ; l'étude de ce même problème, dans les deux derniers systèmes de coordonnées ( elliptiques et hyperboliques ) est confrontée à des difficultés liées notamment à la nature complexe de ces coordonnées. Des tentatives sont menées dans le but de les surmonter. Cette étude prouve encore une fois la validité et la puissance des intégrales de chemin qui assure à tous les phénomènes naturels une description élégante et précise.

## Chapitre 2

# le Formalisme des Intégrales de Chemins

### 2.1 Origine du concept d'intégrale de chemins

En mécanique quantique, la formulation hamiltonienne qui a été inventée et développée par Bohr, Born, Dirac, Heisenberg, Pauli, et Schrödinger et d'autres [16] en 1925 – 1926 est basée sur le fait que la probabilité de trouver une particule au point  $q$  à l'instant  $t$  est égale à  $|\Psi(q, t)|^2$  où la fonction d'onde  $\Psi(q, t)$  solution de l'équation de Schrödinger est l'amplitude de probabilité de la particule au point  $(q, t)$ . En 1933, Dirac a considéré que la formulation lagrangienne est plus fondamentale que la formulation hamiltonienne. Il est arrivé à la conclusion que le propagateur de la mécanique quantique est **analogue** à  $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right]$  où  $S$  est l'action classique évaluée le long du chemin classique [3]. En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique appelée formulation des intégrales de chemins. Le coeur de cette formulation est le propagateur (noté  $K$ ) qui contient toutes les informations du système physique. Ce dernier qui définit l'amplitude de la probabilité d'évolution d'une particule du point  $A$  au point  $B$ , est formulé comme étant une somme d'une infinité d'amplitudes partielles associées à chacun des chemins notés  $\Gamma$ , qui relie  $A(q_i, t_i)$  et  $B(q_f, t_f)$ , dont la phase est proportionnelle à la quantité  $\exp\left[\frac{i}{\hbar}Sq(t)\right]$ , où  $S$  est l'action classique évaluée le long du chemin  $\Gamma$ , c'est à dire  $S = \int_{(\Gamma)} L(q, \dot{q}, t) dt$ , où  $L(q, \dot{q}, t)$  est le Lagrangien de la particule.

$$K(B, T ; A, 0) = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possibles de A vers B}}} \phi [q(t)] = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possibles de A vers B}}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S q(t) \right].$$

C'est à dire

FIG. 2-1 – Transition entre deux états de localisation

$$K(q_f, t_f ; q_i, t_i) = \int Dq(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(t)]\right). \quad (2.1)$$

De ce fait, Dirac considérait seulement le chemin classique  $\Gamma_0$ , alors que Feynman a prouvé que tous les chemins contribuent dans le sens où la particule quantique, contrairement à la particule classique, emprunte tous les chemins possibles de l'espace-temps joignant  $A(q_i, t_i)$  et  $B(q_f, t_f)$ , et les amplitudes associées à ces chemins s'ajoutent selon le principe de superposition de la mécanique quantique.

Ainsi, afin de comprendre ce que Dirac veut dire par **analogie**, Feynman étudie le cas d'une particule non relativiste de masse  $m$  pour laquelle le lagrangien s'écrit

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q),$$

nous savons que :

$$\langle q_2 | \Psi(t + \varepsilon) \rangle = \Psi(q_2, t + \varepsilon) = \int dq_1 \langle q_2(t + \varepsilon) | q_1(t) \rangle \langle q_1 | \Psi(t) \rangle. \quad (2.2)$$

Feynman suppose alors une relation de proportionnalité

$$\Psi(q_2, t + \varepsilon) = A \int dq_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(t)]\right) \Psi(q_1, t), \quad (2.3)$$

où  $A$  est une constante inconnue. Feynman démontre que cette équation implique que  $\Psi(q, t)$  obéit à

l'équation de Schrodinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t), \quad (2.4)$$

à la condition que la constante inconnue  $A$  soit égale à

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Rappel sur le propagateur de l'équation de Schrödinger

Considérons une particule de masse  $m$  non relativiste, décrite en mécanique quantique par une fonction d'onde. Supposons que l'on se donne la condition initiale  $\Psi(q_0, t_0)$  à un instant  $t_0$  fixé. Alors, la fonction d'onde à un instant ultérieur  $t_1 > t_0$ , solution de l'équation de Schrödinger, est donnée par l'équation intégrale

$$\Psi(q_1, t_1) = \int dq_0 K(q_1, t_1; q_0, t_0) \Psi(q_0, t_0), \quad (2.6)$$

où  $K(q_1, t_1; q_0, t_0)$  est le propagateur de la particule

$$K(q_1, t_1; q_0, t_0) = \langle q_1 | \exp -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_1 - t_0) | q_0 \rangle. \quad (2.7)$$

$\hat{H}$  est l'opérateur hamiltonien de la particule.

Rapplons que si  $t_2 > t_1 > t_0$ , le propagateur obéit à l'équation de **Chapman-Kolmogorov**

$$K(q_2, t_2; q_0, t_0) = \int dq_1 K(q_2, t_2; q_1, t_1) K(q_1, t_1; q_0, t_0), \quad (2.8)$$

cette relation va nous permettre de trouver l'expression du propagateur en terme d'une intégrale de chemin.

Cherchons l'expression du propagateur  $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$  entre l'instant initial  $t_i$  et l'instant final  $t_f$ .

Ce pendant, il est utile de considérer la subdivision de l'intervalle de temps  $\Delta t = t_f - t_i$  en  $N$  intervalles de temps élémentaires de durée  $\varepsilon$  en introduisant les  $N + 1$  instants

$$t_k = t_0 + k\varepsilon, \quad k = 0, \dots, N,$$

avec

$$t_0 = t_i, \quad t_N = t_f, \quad T = t_f - t_i = N\varepsilon,$$

il ya donc  $N - 1$  instants intermédiaires  $t_k$  entre l'instant initial  $t_i$  et l'instant final  $t_N$ . pour que les intervalles de temps aient une durée  $\varepsilon = t_{k+1} - t_k$  élémentaire, la limite  $N \rightarrow \infty$  est sous-entendue.

L'application de l'équation de Chapman-Kolmogorov une première fois permet d'écrire

$$K(q_N, t_N; q_0, t_0) = \int dq_{N-1} K(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}) K(q_{N-1}, t_{N-1}; q_0, t_0), \quad (2.9)$$

puis, en l'appliquant une deuxième fois

$$K(q_N, t_N | q_0, t_0) = \int dq_{N-1} dq_{N-2} K(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}) K(q_{N-1}, t_{N-1}; q_{N-2}, t_{N-2}) \times \\ \times K(q_{N-2}, t_{N-2}; q_0, t_0),$$

et ainsi de suite, nous obtenons au final après  $N - 1$  applications aux  $N - 1$  temps intermédiaires

$$K(q_N, t_N; q_0, t_0) = \int \left[ \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right] K(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}) \times \dots \times K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) \times \\ \times \dots \times K(q_1, t_1; q_0, t_0). \quad (2.10)$$

nous sommes ainsi amenés à considérer le propagateur élémentaire

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \langle q_{k+1} | \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{H} | q_k \rangle. \quad (2.11)$$

### 2.2.1 Propagateur élémentaire : formule de Feynman-Dirac

Pour une particule de masse  $m$  non relativiste à une dimension dans un potentiel, dont l'opérateur hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(\hat{q}),$$

et le propagateur élémentaire s'écrit

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \left\langle q_{k+1} \left| \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left( \hat{H}_0 + V(\hat{q}) \right) \right| q_k \right\rangle. \quad (2.12)$$

Nous utilisons la formule de **Trotter-Kato**

$$\exp t \left( \hat{A} + \hat{B} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp \frac{t}{n} \hat{A} \times \exp \frac{t}{n} \hat{B} \right)^n. \quad (2.13)$$

( Cette formule n'est pas triviale, car les opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ne commutent en général pas ).

Nous obtenons ici

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \left\langle q_{k+1} \left| \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \widehat{H}_0 \times \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(\widehat{q}) \right| q_k \right\rangle. \quad (2.14)$$

Nous pouvons sortir l'exponentielle contenant le potentiel qui ne dépend que de la position

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \left\langle q_{k+1} \left| \exp -\frac{i}{\hbar} \varepsilon \widehat{H}_0 \right| q_k \right\rangle \times \exp -\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(q_k),$$

l'élément de matrice restant est le propagateur de la particule libre, donc nous pouvons finalement écrire l'expression

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = K_0(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) \times \exp -\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(q_k), \quad (2.15)$$

or l'expression du propagateur libre est connue exactement

$$K_0(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon} (q_{k+1} - q_k)^2\right). \quad (2.16)$$

Nous remarquons que l'argument de l'exponentielle peut se réécrire en terme d'une expression discrétisée de la vitesse

$$\dot{q}_k = \frac{(q_{k+1} - q_k)}{\varepsilon},$$

comme

$$K_0(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \varepsilon \dot{q}_k^2\right),$$

nous en déduisons le propagateur élémentaire s'écrit

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \varepsilon \dot{q}_k^2\right) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(q_k)\right), \quad (2.17)$$

les arguments des deux exponentielles étant maintenant des nombres complexes, nous pouvons écrire sans difficultés

$$K_0(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \varepsilon \left(\frac{m}{2} \dot{q}_k^2 - V(q_k)\right)\right]. \quad (2.18)$$

Le terme entre parenthèse représente le Lagrangien de la particule

$$L(q_k, \dot{q}_k) = \frac{m}{2} \dot{q}_k^2 - V(q_k), \quad (2.19)$$

d'où la formule de Feynman-Dirac pour le propagateur élémentaire

$$K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_k, \dot{q}_k)\right]. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Forme discrète du propagateur :

Nous injectons l'expression de Feynman-Dirac dans la formule générale

$$K(q_N, t_N; q_0, t_0) = \int \left[ \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right] K(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}) \times \dots \times K(q_{k+1}, t_{k+1}; q_k, t_k), \quad (2.21)$$

il vient que

$$\begin{aligned} K(q_N, t_N; q_0, t_0) &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int \left[ \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_{N-1}, \dot{q}_{N-1})\right] \times \dots \times \\ &\quad \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_k, \dot{q}_k)\right] \times \dots \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_0, \dot{q}_0)\right], \end{aligned}$$

l'argument des exponentielles étant des nombres complexes, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} K(q_N, t_N; q_0, t_0) &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int \left[ \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_{N-1}, \dot{q}_{N-1}) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_k, \dot{q}_k) + \dots + \frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q_0, \dot{q}_0)\right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

nous reconnaissons dans l'argument de l'exponentielle une discrétisation de l'action classique

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon L(q_k, \dot{q}_k) = \int_{t_0}^{t_N} L(q(t), \dot{q}(t)) dt = S[q(t)], \quad (2.23)$$

nous en déduisons l'expression du propagateur comme intégrale fonctionnelle sur tous les chemins continus

$$K(q_N, t_N; q_0, t_0) = K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int Dq(t) \exp\frac{i}{\hbar} S[q(t)], \quad (2.24)$$

avec la mesure formelle

$$Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \left[ \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right]. \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) admet l'interprétation suivante : pour calculer l'amplitude de transition du point initial  $q_i$  à l'instant  $t_i$  vers le point final  $q_f$  à l'instant  $t_f$  il faut considérer tous les chemins continus  $q(t)$  vérifiant les conditions aux limites  $q(t_i) = q_i$  et  $q(t_f) = q_f$ . Chaque chemin se voit attribuer un " poids " complexe de module unité  $\exp(iS[q(t)]/\hbar)$ , où  $S[q(t)]$  est l'action classique calculée sur ce chemin. nous " sommeons " alors cette infinité non dénombrable de poids complexes, et nous obtenons

enfin l'amplitude de transition désirée.



### 2.3 Intégrale de chemin dans l'espace des phases

A une dimension, l'évolution d'une particule soumise à un potentiel  $V(x)$ , et qui est repérée par les positions  $x_i$  et  $x_f$  aux instants fixés  $t_i$  et  $t_f$  respectivement, peut être décrite en définissant le propagateur comme étant l'amplitude de probabilité de transition exprimée à l'aide de l'opérateur d'évolution [17]

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_i | \widehat{U}(t_f - t_i) | x_f \rangle \Theta(t_f - t_i), \quad (2.26)$$

avec

$$\Theta(t_f - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t_f > t_i \\ 0 & \text{pour } t_i > t_f \end{cases}. \quad (2.27)$$

En divisant l'intervalle de temps  $T = t_f - t_i$  en  $N + 1$  intervalles infinitésimaux égaux, nous pouvons décomposer l'opérateur d'évolution en  $N + 1$  opérateurs élémentaires

$$\widehat{U}(t_f - t_i) = \widehat{U}(t_{N+1} - t_N) \widehat{U}(t_N - t_{N-1}) \dots \widehat{U}(t_n - t_{n-1}) \dots \widehat{U}(t_1 - t_0), \quad (2.28)$$

où  $t_{N+1} = t_f$ ,  $t_0 = t_i$  et  $T = \varepsilon(N + 1)$ .

En insérant  $N$  relations de fermeture entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1; \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.29)$$

le propagateur peut être écrit sous la forme d'un produit de  $N + 1$  propagateurs élémentaires

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \prod_{n=1}^N dx_n, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned}\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \langle x_n | \widehat{U}(t_n - t_{n-1}) | x_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \varepsilon \widehat{H}\right) | x_{n-1} \rangle,\end{aligned}\quad (2.31)$$

$x_0 = x_i$  et  $x_{N+1} = x_f$ .

L'opérateur Hamiltonien  $\widehat{H}$  de la particule est donné par

$$\widehat{H}(x, p, t) = \widehat{T}(p, t) + \widehat{V}(x, t), \quad (2.32)$$

où  $\widehat{T}(p, t)$  est l'opérateur énergie cinétique et  $\widehat{V}(x, t)$  l'opérateur énergie potentielle.

Pour  $\varepsilon$  très petit, nous pouvons appliquer la formule de Baker-Hausdorf [14]

$$\exp\frac{-i}{\hbar}\varepsilon\widehat{H} = \exp\frac{-i}{\hbar}\varepsilon\widehat{V} \exp\frac{-i}{\hbar}\varepsilon\widehat{T} \exp\frac{-i}{\hbar}\varepsilon^2\widehat{X},$$

où l'opérateur  $\widehat{X}$  représente le développement suivant

$$\widehat{X} = \frac{1}{2} [\widehat{V}, \widehat{T}] - \frac{\varepsilon}{\hbar} \left( \frac{1}{6} [\widehat{V}, [\widehat{V}, \widehat{T}]] \right) - \frac{1}{3} [[\widehat{V}, \widehat{T}], \widehat{T}] + \dots$$

Ensuite nous négligeons les termes supérieur ou égal à  $\varepsilon^2$  et nous insérons les deux relations de fermeture suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} |p_n\rangle \langle p_n| = 1, \quad (2.33)$$

dans l'expression (2.31), nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{H}(t_n)} | x_{n-1} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{V}(x, t_n)} | x \rangle \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{T}(p, t_n)} | x_{n-1} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{V}(x, t_n)} | x_{n-1} \rangle \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon T(p_n, t_n)]\right),\end{aligned}\quad (2.34)$$

en tenant compte de l'élément de matrice

$$\langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{V}(x, t_n)} | x \rangle = \delta(x_n - x) e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(x, t_n)}, \quad (2.35)$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \langle x_n | \widehat{U}(t_n - t_{n-1}) | x_{n-1} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_n (x_n - x_{n-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon [T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n)]] \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

par substitution de (2.36) dans (2.30) et en définissant la fonction de Green via la transformation de Fourier nous obtenons

$$\begin{aligned} G(x_f, x_i; E) &= \int_0^\infty dT \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] K(x_f, t_f; x_i, t_i) \\ &= \int_0^\infty dT \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N [dx_n] \int \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} A_N \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec l'action

$$A_N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n (x_n - x_{n-1}) - \varepsilon (T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n) - E)],$$

et  $T = t_f - t_i$ .

## 2.4 La Méthode Duru-Kleinert

L'évaluation du propagateur est souvent confronté au problème de singularité. Cette dernière est à l'origine de complications physiques et mathématiques. Ce problème a été surmonté par l'introduction de la technique des transformations spatio-temporelles de Duru-Kleinert, qui est une combinaison d'une Reparamétrisation des trajectoires et d'une transformation spatiale. Lors de cette transformation, nous tenons compte des corrections apportées, qui se traduisent au niveau de l'action par un potentiel supplémentaire en  $\hbar^2$  appelé Potentiel Effectif. Ce dernier est de nature purement quantique. Depuis, un nombre impressionnant de travaux a été consacré aux problèmes de la mécanique quantique non relativiste. Ainsi, une large classe de potentiels a été correctement établie à l'intérieur de ce formalisme.

### 2.4.1 Procédure de transformations spatio-temporelles

L'action discrète est dès fois mal définie à cause de la singularité, qui apparaisse dans certains types de potentiels. Pour cela il est nécessaire de reparamétriser l'action en fonction d'un nouveau temps (pseudo temps)  $\mathbf{s}$  au lieu du temps habituel  $\mathbf{t}$ . Cette reparamétrisation sera suivie par une transformation spatiale ( $q \rightarrow Q$ ) judicieusement choisie :

Considérons une particule repérée par les positions  $A$  et  $B$  aux instants fixés  $t_a$  et  $t_b$  respectivement. Dans l'espace des phases, le propagateur qui gouverne son évolution dans le potentiel  $V(x)$  est défini par l'intégrale de chemin de Feynman

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx(t) Dp(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p\dot{x} - H) dt \right\}, \quad (2.38)$$

avec l'Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (2.39)$$

Supposons que le potentiel  $V(x)$  est aussi compliqué qu'une évaluation directe de l'intégrale de chemin ne soit pas possible. Souvent il est nécessaire d'effectuer une transformation de coordonnée  $x \rightarrow \zeta$  représentée par  $x = g(\zeta)$ , accompagnée d'une transformation temporelle  $t \rightarrow s$  définie par  $dt = f(x) ds$ . Pour effectuer cette transformation spatio-temporelle aux calculs des intégrales de chemins, nous commençons par écrire l'opérateur résolvante

$$\widehat{R} = \frac{i\hbar}{E - H + i0}, \quad (2.40)$$

en multipliant  $\widehat{R}$  à gauche et à droite par  $\widehat{f}_r$ ,  $\widehat{f}_r$ , nous aurons

$$\widehat{R} = \widehat{f}_r \frac{i\hbar}{(E - H + i0) \widehat{f}_r},$$

ou

$$\widehat{R} = \frac{i\hbar}{\widehat{f}_l (E - H + i0)} \widehat{f}_l$$

ou plus généralement :

$$\widehat{R} = \widehat{f}_r \frac{i\hbar}{\widehat{f}_l (E - H + i0) \widehat{f}_r} \widehat{f}_l, \quad (2.41)$$

avec  $f_l, f_r$  sont des fonctions arbitraires appelées les fonctions Régulatrices, qui sont choisies d'une manière appropriées.

Elles sont définies par Kleinert comme suit

$$\begin{aligned} f(x) &= f_l(x_n) f_r(x_{n-1}) \\ &= f_l^{1-\lambda}(x_n) f_r^\lambda(x_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $\lambda$  est un paramètre au choix.

Puis en exprimant l'opérateur  $\frac{i\hbar}{\widehat{f}_l(E-H+i0)\widehat{f}_r}$  dans la représentation de Schwinger [18], on peut associer à l'opérateur résolvante (2.41) un élément de matrice appelé amplitude de transition pour une énergie fixée ou fonction de Green

$$G(x_b, x_a; E) = \langle x_b | \widehat{R} | x_a \rangle = \int_{s_a}^{\infty} ds_b \langle x_b | \widehat{U}_E(s_b - s_a) | x_a \rangle, \quad (2.43)$$

où  $\widehat{U}_E(s_b - s_a)$  est l'opérateur pseudo-temporel d'évolution défini par

$$\widehat{U}_E(S) = f_r(x) e^{-\frac{i}{\hbar} S f_l(x) (H-E) f_r(x) f_l(x)}. \quad (2.44)$$

En subdivisant la variable temporelle  $S$  en  $(N + 1)$  intervalles infinitésimaux

$$S = s_b - s_a = (N + 1) \varepsilon_s,$$

et en insérant  $N$  relations de fermeture pour arriver à la représentation intégrale approximée de la fonction Green

$$G(x_b, x_a; E) \simeq (N + 1) \int_0^{\infty} d\varepsilon_s \langle x_b | \widehat{U}_E^N(\varepsilon_s (N + 1)) | x_a \rangle, \quad (2.45)$$

avec

$$\langle x_b | \widehat{U}_E^N(\varepsilon_s(N+1)) | x_a \rangle = f_r(x_b) f_l(x_a) \prod_{n=1}^N \left[ \int dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} A_E^N\right), \quad (2.46)$$

où  $A_E^N$  est l'action exprimée sous forme discrète ainsi

$$A_E^N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon_s f_l(x_n) [H(p_n, x_n) - E] f_r(x_n)], \quad (2.47)$$

avec  $ds = \varepsilon_s = \varepsilon / f_l(x_n) f_r(x_n) = dt / f_l(x_n) f_r(x_n)$ .

L'intégration sur les variables  $p_n$ , nous donne l'intégrale de chemins dans l'espace de configuration

$$\begin{aligned} \langle x_b | \widehat{U}_E^N(\varepsilon_s(N+1)) | x_a \rangle &\approx \frac{f_r(x_b) f_l(x_a)}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s f_l(x_b) f_r(x_a) / M}} \\ &\times \prod_{n=1}^N \left[ \int \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s f(x_n) / M}} \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} A_E^N\right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec

$$A_E^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left\{ \frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon_s f_l(x_n) [V(x_n) - E] f_r(x_{n-1}) \right\}. \quad (2.49)$$

A la limite quand  $N \rightarrow \infty$  ceci peut s'écrire par l'intégrale suivant

$$(x_b | x_a)_E = \int_0^\infty ds \left[ f_r(x_b) f_l(x_a) \int Dx(s) e^{\frac{i}{\hbar} A_E^f[x]} \right], \quad (2.50)$$

avec

$$A_E^f = \int_0^s ds \left\{ \frac{M}{2f(x(s))} \dot{x}'^2 - f(x(s)) [V(x(s)) - E] \right\}. \quad (2.51)$$

Cette action est obtenue d'après la forme générale de l'aplitude de l'énergie

$$A_E(x) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) + E \right], \quad (2.52)$$

par la reparamétrisation suivante

$$dt = ds f(x(s)).$$

L'introduction de  $f(x)$  a apporté le terme cinétique d'une forme gênante, qui contient une masse

dépendante de l'espace  $\left(\frac{M}{f(x)}\right)$ . Cette dépendance est enlevée par une transformation de la coordonnée

$$x = h(q). \quad (2.53)$$

La dérivation différentielle de cette coordonnée est donnée par

$$dx = h'(q) dq, \quad (2.54)$$

nous exigeons la fonction  $h(q)$  pour satisfaire

$$h'^2(q) = f(h(q)) \quad (2.55)$$

L'action (2.51) devient

$$A_E^{f,q} = \int_0^s ds \left\{ \frac{M}{2} q'^2 - f(q(s)) [V(q(s)) - E] \right\}, \quad (2.56)$$

avec les notation habituelle  $f(q) \equiv f(h(q))$  et  $V(q) \equiv V(h(q))$ .

L'amplitude de l'énergie (2.52) peut être reliée avec l'amplitude pseudo énergie associée a l'action transformée (2.56), si cette dernière est atténuée par un potentiel effectif [14] que nous allons le dérivé par la suite tel que

$$V_{eff}(q) = -\frac{\hbar^2}{M} \left[ \frac{1}{4} \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{8} \left( \frac{h''}{h'} \right)^2 \right], \quad (2.57)$$

donc

$$(q_b | q_a) \varepsilon = \int_0^\infty ds \int D_q(s) e^{\frac{i}{\hbar} A_{E,\varepsilon}^{DK}[q]} \quad (2.58)$$

avec  $A_{E,\varepsilon}^{DK}[q]$

$$A_{E,\varepsilon}^{DK}[q] = \int_0^s ds \left\{ \frac{M}{2} q'^2 - f(q(s)) [V(q(s)) - E] - V_{eff}(q(s)) + \varepsilon \right\}.$$

## 2.4.2 Dérivation du potentiel effectif

Pour dériver le potentiel effectif (2.57), nous considérons l'amplitude du pseudo opérateur d'évolution (2.48) du paragraphe précédent

$$\begin{aligned} \langle x_b | \hat{U}_E^N(\varepsilon_s(N+1)) | x_a \rangle &\approx \frac{f_r(x_b) f_l(x_a)}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f_l(x_b) f_r(x_a) / M} \\ &\times \prod_{n=1}^N \left[ \int \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f(x_n) / M} \right] \times \\ &\sum_{n=1}^{N+1} \left\{ \frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (\Delta x_n)^2 \right. \\ &\left. + \varepsilon_s [E - V(x_n)] f_l(x_n) f_r(x_{n-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec

$$A_E^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left\{ \frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (\Delta x_n)^2 + \varepsilon_s [E - V(x_n)] f_l(x_n) f_r(x_{n-1}) \right\}.$$

L'équation (2.59) comporte essentiellement trois termes :

1. le préfacteur. 2. la mesure. 3. l'action.

En développant ces derniers au tour du poste point nous obtenons des corrections quantiques associées à chaque terme, qui se rassemble en une seule correction totale

$$(1 + C)_T = (1 + C_{mes}) (1 + C_f) (1 + C_{act}). \quad (2.60)$$

1. Commençons tout d'abord par le calcul de la correction sur la mesure  $C_{mes}$  :

Le terme qui contient la mesure est le suivant

$$\prod_{n=1}^N \left[ \int \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f(x_n) / M} \right], \quad (2.61)$$

en développant  $(\Delta x_n)$  au tour du poste point, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= h(q) \implies x_n = h(q_n) \\ \implies \Delta x_n &= h(\Delta q_n), \end{aligned} \quad (2.62)$$

le développement de Tayllor de  $h(\Delta q_n)$ , nous donne :

$$\Delta x_n \approx h'(q) \Delta q - \frac{1}{2} h''(q) \Delta q^2 + \frac{1}{6} h'''(q) \Delta q^3 + \dots \quad (2.63)$$



Pour abrégier l'écriture nous posons

$$e_1 = h' = f^{\frac{1}{2}}, e_2 = h'', e_3 = h''', \dots$$

donc

$$\Delta x_n \approx e_1 \Delta q - \frac{1}{2} e_2 \Delta q^2 + \frac{1}{6} e_3 \Delta q^3 + \dots \quad (2.64)$$

Puisque  $x \rightarrow q$ , il existe un Jacobien dû à la transformation tel que

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(\Delta x)}{\partial(\Delta q)} \\ &\approx e_1 - e_2 \Delta q + \frac{1}{2} e_3 \Delta q^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

en posant

$$\frac{1}{e_1} = \bar{e}, \quad (2.66)$$

nous aurons pour le Jacobien la forme suivante

$$J \approx e_1 \left\{ 1 - \bar{e} e_2 \Delta q + \frac{1}{2} \bar{e} e_3 \Delta q^2 + \dots \right\}, \quad (2.67)$$

à partir de l'expression du Jacobien, nous pouvons déduire la correction sur la mesure comme suit

$$C_{mes} = -\bar{e} e_2 \Delta q + \frac{1}{2} \bar{e} e_3 \Delta q^2 + \dots \quad (2.68)$$

**2.** Passons maintenant au calcul de la correction sur l'action  $C_{act}$

Le terme qui contient l'action est le suivant

$$\frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (\Delta x_n)^2, \quad (2.69)$$

d'après l'équation (2.64)

$$\begin{aligned} (\Delta x_n)^2 &\approx \left\{ e_1 \Delta q - \frac{1}{2} e_2 \Delta q^2 + \frac{1}{6} e_3 \Delta q^3 + \dots \right\}^2, \\ (\Delta x_n)^2 &\approx e_1^2 \Delta q^2 \left\{ 1 - (\bar{e} e_2) \Delta q + \left[ \frac{1}{3} (\bar{e} e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e} e_2)^2 \right] \Delta q^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le développement de  $f_r(x_{n-1})$  au voisinage du poste point nous donne

$$f_r(x_{n-1}) \approx f_r(x_n) \left\{ 1 - \frac{f'_r}{f_r} \Delta q + \left[ -\frac{1}{2} (\bar{e}e_2) \frac{f'_r}{f_r} + \frac{1}{2} \frac{f''_r}{f_r} + \frac{1}{2} (\bar{e}e_2) \frac{f'_r}{f_r} \right] \Delta q^2 + \dots \right\}, \quad (2.71)$$

où

$$f'_r = \frac{\partial f_r}{\partial q}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \bar{e}, \quad \frac{\partial f_r}{\partial q} = \bar{e}^2 + f''_r + \bar{e}e_2.$$

et d'après le développement de Taylor de la forme  $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^n + \dots$$

donc

$$\frac{1}{f_r(x_{n-1})} \approx \frac{1}{f_r(x_n)} \left\{ 1 + \frac{f'_r}{f_r} \Delta q + \left[ \left( \frac{f'_r}{f_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f''_r}{f_r} \right] \Delta q^2 + \dots \right\}, \quad (2.72)$$

donc le terme de l'action devient

$$\begin{aligned} \frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (\Delta x_n)^2 &= \frac{e_1^2 M}{2\varepsilon_s f_l(x_n)} (\Delta q)^2 \left\{ 1 - (\bar{e}e_2) \Delta q \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{3} (\bar{e}e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 \right] \Delta q^2 + \dots \right\} \times \\ &\quad \frac{1}{f_r(x_n)} \left\{ 1 + \frac{f'_r}{f_r} \Delta q + \left[ \left( \frac{f'_r}{f_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f''_r}{f_r} \right] \Delta q^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

avec la condition

$$e_1 = f^{\frac{1}{2}}. \quad (2.74)$$

donc (2.73) devient

$$\begin{aligned} \frac{M}{2\varepsilon_s f_l(x_n) f_r(x_{n-1})} (\Delta x_n)^2 &= \frac{M}{2\varepsilon_s} (\Delta q)^2 \left\{ 1 - (\bar{e}e_2) \Delta q \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{3} (\bar{e}e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 \right] \Delta q^2 + \dots \right\} \times \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{f'_r}{f_r} \Delta q + \left[ \left( \frac{f'_r}{f_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f''_r}{f_r} \right] \Delta q^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

avec

$$f_n = f(x_n) = f_l(x_n) f_r(x_n).$$

les termes qui correspondent le préfacteur peut se mettre sous une autre forme du poste point comme

suit

$$\frac{f_r(x_b) f_l(x_a)}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f_l(x_b) f_r(x_a) / M} \prod_{n=1}^N \left[ \int \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f(x_n) \hbar / M} \right] \equiv$$

$$\frac{[f(x_b) f(x_a)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} / M} \left[ \frac{f_r(x_a)}{f_r(x_b)} \right]^{-\frac{5}{4}} \times \left[ \frac{f_l(x_a)}{f_l(x_b)} \right]^{\frac{1}{4}} \prod_{n=2}^{N+1} \left[ \int \frac{d\Delta x_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f_n / M} \right], \quad (2.76)$$

avec

$$\prod_{n=1}^N \int dx_n = \prod_{n=2}^{N+1} \int d\Delta x_n,$$

nous considérons que

$$f_l(x) = f(x)^{1-\lambda} \text{ et } f_r(x) = f(x)^\lambda, \quad (2.77)$$

après un simple calcul le terme

$$\frac{[f(x_b) f(x_a)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} / M} \left[ \frac{f_r(x_a)}{f_r(x_b)} \right]^{-\frac{5}{4}} \times \left[ \frac{f_l(x_a)}{f_l(x_b)} \right]^{\frac{1}{4}} \prod_{n=2}^{N+1} \left[ \int \frac{d\Delta x_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f_n / M} \right]$$

$$\equiv \frac{f_b^{\frac{3\lambda}{2}} f_a^{\frac{(1-3\lambda)}{2}}}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} / M} \prod_{n=2}^{N+1} \left[ \int \frac{d\Delta x_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} f_n / M} \right], \quad (2.78)$$

( avec  $f(x_b) \equiv f_b$  et  $f(x_a) \equiv f_a$  ).

le préfacteur doit être symétriser

$$f_b^{\frac{3\lambda}{2}} f_a^{\frac{(1-3\lambda)}{2}} = f_b^{\frac{1}{4}} f_a^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{N+1} \left( \frac{f_{n-1}}{f_n} \right)^{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda}, \quad (2.79)$$

donc (2.59) devient

$$K(\Delta q) = \frac{f_b^{\frac{1}{4}} f_a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2i\pi \hbar \varepsilon_s} / M} \prod_{n=1}^N \left[ \int \frac{d(\Delta q_n)}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon_s} \hbar / M} \right]$$

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[ \frac{M}{2\varepsilon_s} (\Delta q_n)^2 + \varepsilon_s f(q_n) [E - V(q_n)] + \dots \right] \right\} (1 + C), \quad (2.80)$$

d'après (2.77), et l'utilisation du développement de l'exponentielle

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

nous aurons la correction sur l'action ainsi

$$\begin{aligned}
C_{act} = & \frac{iM(\Delta q)^2}{\hbar 2\varepsilon_s} \left\{ - \left( (\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right) \Delta q + \right. \\
& + \left[ \frac{1}{3} (\bar{e}e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 + \frac{1}{2} \left( -\lambda \frac{f''}{f} + \lambda(\lambda+1) \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right) - \lambda \bar{e}e_2 \frac{f'}{f} \right] (\Delta q)^2 \left. \right\} \\
& - \frac{iM^2(\Delta q)^4}{2\hbar^2 4\varepsilon_s^2} \left( (\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right)^2 \Delta q^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.81}$$

**3.** La correction sur le préfacteur  $C_f$  se calcul ainsi que

Le terme qui contient le préfacteur est

$$f_b^{\frac{3}{2}\lambda} f_a^{\frac{(1-3\lambda)}{2}} = f_b^{\frac{1}{4}} f_a^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{N+1} \left( \frac{f_{n-1}}{f_n} \right)^{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda}, \tag{2.82}$$

Le développement de Taylor au tour du poste point de la fonction  $f_{n-1}$  à l'ordre deux nous donne

$$f_{n-1} \approx \left\{ f(x_n) - \Delta x_n \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} + \frac{1}{2} (\Delta x_n)^2 \frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x_n^2} + \dots \right\}, \tag{2.83}$$

donc

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \approx \left\{ 1 - \Delta x_n \frac{1}{f_n} \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} + \frac{1}{2} (\Delta x_n)^2 \frac{1}{f_n} \frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x_n^2} + \dots \right\}, \tag{2.84}$$

en substituant les expressions de  $\Delta x_n$  et de  $\Delta x_n^2$  dans (2.84), le rapport  $\frac{f_{n-1}}{f_n}$  s'écrit

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \approx 1 - \left\{ \left( \frac{e_1}{f_n} \right) \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \Delta q + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{e_2}{f_n} \right) \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{e_1^2}{f_n} \right) \frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x_n^2} \right] \Delta q^2 + \dots \right\}. \tag{2.85}$$

Il reste à calculer  $\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}$  et  $\frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x_n^2}$  ainsi que

$$\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} = \frac{1}{e_1} f' \tag{2.86}$$

et

$$\frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x_n^2} = -\frac{e_2}{e_1^3} f' + \frac{1}{e_1^3} f'' \tag{2.87}$$

$\implies$

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \approx 1 - \frac{f'}{f} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} \Delta q^2 + \dots, \tag{2.88}$$

En utilisant le développement de Taylor de la forme  $(1+x)^n$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_{n-1}}{f_n}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{3\lambda}{2}} &\approx 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(-\frac{f'}{f} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} \Delta q^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \Delta q^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.89)$$

La correction sur le préfacteur est donnée par

$$C_f = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(-\frac{f'}{f} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} \Delta q^2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \Delta q^2 + \dots \quad (2.90)$$

Finalement, en substituant (2.68), (2.81) et (2.94) dans (2.90) nous aurons

$$\begin{aligned} C_T = & \left[ \left[ -\bar{e}e_2 \Delta q + \frac{1}{2} \bar{e} e_3 \Delta q^2 + \dots \right] + \right. \\ & \left[ \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(-\frac{f'}{f} \Delta q + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} \Delta q^2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \Delta q^2 + \dots \right] \\ & \left[ + \frac{iM}{\hbar} \frac{(\Delta q)^2}{2\varepsilon_s} \left\{ - \left(\bar{e}e_2\right) - \lambda \frac{f'}{f} \right\} \Delta q + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{3} (\bar{e}e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 + \frac{1}{2} \left(-\lambda \frac{f''}{f} + \lambda(\lambda+1) \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) - \lambda \bar{e}e_2 \frac{f'}{f} \right] (\Delta q)^2 \right\} \\ & \left. - \frac{M^2}{2\hbar} \frac{(\Delta q)^4}{4\varepsilon_s^2} \left(\bar{e}e_2 - \lambda \frac{f'}{f}\right)^2 (\Delta q)^2 + \dots \right] + C_{mes}C_f + C_{mes}C_{act} + C_f C_{act} \\ & + C_{mes}C_f C_{act}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Il reste à calculer les termes  $C_{mes}C_f$ ,  $C_{mes}C_{act}$ ,  $C_f C_{act}$ ,  $C_{mes}C_f C_{act}$  (voir appendice (A.1)).

Les valeurs moyennes se calculent en appliquant l'expression suivante

$$\langle (\Delta q)^{2n} \rangle = \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M}\right)^n (2n-1)!!, \quad (2.92)$$

il en résulte

$$\langle \Delta q^2 \rangle = \frac{i\hbar\varepsilon}{M}, \quad \langle \Delta q^4 \rangle = \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M}\right)^2 3!! = 3 \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M}\right)^2. \quad (2.93)$$

Substituons  $C_{mes}C_f$ ,  $C_{mes}C_{act}$ ,  $C_f C_{act}$  et  $C_{mes}C_f C_{act}$  ainsi que les valeurs moyennes dans l'expression de la correction totale (2.91), nous aurons, après un simple calcul, la correction totale suivante :

$$C_T = -\frac{\varepsilon_s \hbar}{M} \left( \frac{1}{4} \bar{e} e_3 - \frac{3}{8} (\bar{e} e_2)^2 \right). \quad (2.94)$$

La présence de la correction totale  $C_T$  donne naissance à un potentiel effectif en  $\hbar^2$ , tel que

$$V_{eff} = -\frac{i\hbar^2}{M} \left( \frac{1}{4} \bar{e} e_3 - \frac{3}{8} (\bar{e} e_2)^2 \right). \quad (2.95)$$

Finalement l'expression du propagateur (2.84) s'écrit sous la forme devient

$$\begin{aligned} K(\Delta q) &= \left( \frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon_s} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[ \frac{M}{2\varepsilon_s} (\Delta q_n)^2 + \varepsilon_s E f(q_n) \right] \right\} (1 + C), \\ &= \left( \frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon_s} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[ \frac{M}{2\varepsilon_s} (\Delta q_n)^2 + \varepsilon_s E f(q_n) - V_{eff} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

## 2.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté en premier lieu l'intégrale de chemin qui a été suggéré par Dirac et développé par Feynman comme étant une nouvelle formulation de la mécanique quantique non relativiste qui repose essentiellement sur les notions de propagateur et de chemin d'espace-temps. Nous avons vu que l'intégrale de chemin présente les quantités physiques comme des moyennes avec un poids approprié sur un ensemble de trajectoires. Ainsi, elle donne un sens assez concret à la notion de fluctuations quantiques. L'avantage de cet objet mathématique est que nous pouvons définir la mécanique quantique directement à partir des concepts classiques car le propagateur traduisant l'évolution quantique entre deux états de localisation s'exprime explicitement en terme d'un concept classique qui est l'action ( intégrale du Lagrangien ). Nous avons également présenté l'intégrale de chemin dans l'espace des phases. Nous avons vérifié que le propagateur se construit à partir du formalisme usuel d'opérateurs de la mécanique quantique où l'action prend une forme hamiltonienne et la somme sur tous les chemins possibles est étendue au trajectoires de cet espace des phases  $\{p(t), x(t)\}$ . En deuxième lieu, nous avons exposé avec un maximum de détails les outils mathématiques utiles et souvent indispensables à l'étude des systèmes de la physique quantique non relativiste.

Première partie

**Application de l'Intégrale de Chemin  
dans l'Espace Euclidien :**

## Chapitre 3

# La Technique de la Fonctionnelle Delta de Dirac

### 3.1 Introduction

L'étude quantique des systèmes physiques est basée sur l'équation aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien ou sur le propagateur de l'équation de Schrödinger via l'intégrale de chemin ; Comme une approche alternative à cette dernière. Il existe des systèmes physiques dont l'hamiltonien est suffisamment simple pour que son équation aux valeurs propres et son amplitude de transition d'un point initial vers un point final puissent être résolues exactement. Cependant, ceci ne se produit que pour un très petit nombre de problèmes ; en général, l'équation est trop compliquée pour que l'on puisse trouver ses solutions sous forme analytique et leur formulation sous forme d'intégrales de chemin est difficile. Il faut alors avoir recours à des méthodes d'approximation qui permettent, dans certains cas, d'obtenir analytiquement des solutions approchées de l'équation aux valeurs propres fondamentale ou à une résolution numérique encore que les méthodes numériques rencontrent souvent plusieurs difficultés. D'une part les objets mathématiques manipulés exigent des ressources informatiques très élevées. Par conséquent, il est tout naturel de développer les outils mathématiques qui permettent d'abord de décrire correctement le phénomène physique et qui permettent également de simplifier le problème initial dans le but d'obtenir la solution sous forme analytique se prêtant à l'analyse. Malheureusement, l'appareil mathématique de la physique théorique et de la physique mathématique est généralement extrêmement encombrant et englobe toute une série d'artifices particuliers. Il arrive rarement que les mathématiques pour la physique contiennent très peu de calculs ennuyeux. Le besoin des approches très générales et suffisamment simples des mathématiques utilisées dans la physique se faisait donc sentir depuis longtemps.



La nouvelle méthode de construction du propagateur proposée dans ce chapitre est due à Arlen Anderson et Scott B. Anderson [19]. C'est une méthode remarquablement simple qui repose en fait sur l'idée maîtresse des transformations spatio-temporelles généralisées par Duru-Kleinert. Les intégrales de chemins pour des systèmes quantiques intégrables sont présentées sous une forme simplifiée et originale qui utilise la fonctionnelle Delta de Dirac et l'espace des phases. A l'aide des transformations, essentiellement canoniques, l'intégrale de chemins pour des hamiltoniens qui sont des fonctions générales  $H(p, q)$  des variables d'espace des phases  $p, q$  s'est reconvertie en une intégrale de chemins dans laquelle l'action prend sa forme hamiltonienne linéaire dans la variable de la position et l'intégration portée sur les trajectoires  $q(t)$  peut être directement effectuée pour donner naissance à une fonctionnelle Delta de Dirac dont l'argument est la deuxième équation d'Hamilton  $\left(\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ . Il est facile ensuite d'évoluer l'intégration explicite sur les moments conjugués  $p(t)$  qui redonne l'intégrale ordinaire. Le but de ce chapitre est double. D'une part, nous développons d'une façon claire la technique de la fonctionnelle Delta de Dirac qui a été brièvement exposée par les auteurs. D'autre part, nous mettons en pratique cette technique pour examiner certains problèmes de la mécanique quantique qui admettent une solution sous forme explicite dans le cadre d'une variété de méthode comprenant l'équation de Schrödinger et les intégrales de chemin de Feynman, à savoir : l'oscillateur harmonique simple, l'oscillateur quadratique inverse, le potentiel Coulombien, le potentiel de Morse et le mouvement d'une particule libre sur une sphère à deux dimensions. Nous donnons le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes des états liés. A ce chapitre est annexé un appendice ( appendice B ) qui regroupe l'essentiel de ce qui concerne les techniques mathématiques dont nous avons fait usage en construisant les propagateurs relatifs aux différents problèmes analysés.

### 3.2 Rappel sur la démarche de la Technique :

Cette méthode est constituée essentiellement de deux étapes :

1. En premier lieu il y a l'intégration fonctionnelle sur la variable  $q$  d'une intégrale de chemin dont l'Hamiltonien est linéaire en  $q$ .
2. Cette intégration permet d'avoir une fonction Delta dont l'argument est l'équation du mouvement de la variable  $p$ .

La présence de la fonction delta nous permet d'obtenir, à partir de l'intégration sur  $p$ , une intégrale ordinaire sur la condition initiale de la solution de l'équation de mouvement.

Nous pouvons constater qu'à ce niveau l'intégration de la fonction delta donne naissance à un facteur appelé Facteur de Composition dépendant des temps initial et final et de la dernière variable d'intégration.

Considérons une intégrales de chemin définie dans l'espace des phases

$$K(b, T; a, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left\{ i \int [p\dot{q} - f(p) q - h(p)] dt \right\}, \quad (3.1)$$

sa représentation dans l'espace des configurations s'écrit

$$K(b, T; a, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} dq_n (2\pi)^{-N} \exp \left\{ i \sum_{n=0}^{N-1} p_n(q_{n+1} - q_n) - \frac{1}{2} f(p_n) (q_{n+1} + q_n) \varepsilon - h(p_n) \varepsilon \right\}, \quad (3.2)$$

où  $\varepsilon = \frac{T}{N}$ ,  $q_0 = a$ ,  $q_N = b$ .

Après intégration sur les  $dq_n$ , nous obtenons un produit des fonctions delta de variable  $p$ .

Alors (3.2) prend la forme

$$K(b, T; a, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n (2\pi)^{-1} \prod_{n=1}^{N-1} \delta \left[ p_{n-1} - p_n - \frac{1}{2} f(p_{n-1}) \varepsilon - \frac{1}{2} f(p_n) \varepsilon \right] \times \exp \left\{ i (p_{n-1} b - p_0 a) - i \prod_{n=0}^{N-1} h(p_n) \varepsilon \right\}, \quad (3.3)$$

et par conséquent l'intégration sur  $p$  se réduit a une intégrale simple.

Choisissons  $p_k$  comme dernière variable d'intégration.

$p_k$  représente la condition initiale lors de la résolution de l'équation du mouvement du premier ordre.

Considérons d'abord l'intégration sur  $dp_{k+1}$  et effectuons l'intégration de de la fonction delta suivante

$$\delta \left[ p_k - p_{k+1} - \frac{1}{2} f(p_{k+1}) \varepsilon - \frac{1}{2} f(p_k) \varepsilon \right],$$

pour cela, utilisons l'identité suivante

$$\delta [g(p)] = \sum_{r \in \text{racines}} \frac{\delta(p - p_r)}{|g'(p_r)|}, \quad (3.4)$$

où  $p_r$  sont les racines de l'équation  $g(p) = 0$ .

Il est clair que cette identité ramène la fonction delta à une autre fonction delta linéaire en  $p_{k+1}$ .

Nous supposons que l'équation du mouvement ( argument de la fonction delta ) admet une seule racine.

Alors la fonction delta se réduit à

$$\frac{\delta [p_{k+1} - F(p_k, (k+1)\varepsilon)]}{1 + \frac{1}{2} f'(p_{k+1})\varepsilon},$$

il vient que la fonction delta en  $p_n$  est la suivante

$$\frac{\delta [p_n - F(p_k, n\varepsilon)]}{1 + \frac{1}{2} f'(p_n)\varepsilon}, \quad (3.5)$$

où  $F[p_k, n\varepsilon]$  est la solution de l'équation du mouvement à l'instant  $n\varepsilon$ , donné pour le moment initial  $p_k$  à l'instant  $k\varepsilon$ .

Une procédure similaire à celle d'en haut peut être utilisée afin d'intégrer sur  $p_{k-1}$ . Dans ce cas le signe de l'argument de la fonction delta change et par conséquent, nous aurons le résultat suivant

$$\frac{\delta [p_n - F(p_k, n\varepsilon)]}{1 - \frac{1}{2} f'(p_n)\varepsilon}, \quad (3.6)$$

après intégration sur  $p$ , nous arrivons à l'expression du propagateur suivante

$$\begin{aligned} K(b, T; a, 0) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_k}{(2\pi)} \exp \left\{ i(p_{n-1} b - p_0 a) - i \sum_{n=0}^{N-1} h(p_n)\varepsilon \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{N-1} f'(p)_n \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k-1} f'(p)_n \varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $p_n = F(p_k, n\varepsilon)$  est la solution de l'équation du mouvement à l'instant  $n\varepsilon$  avec la condition initiale à l'instant  $k\varepsilon$ .

A la limite  $N \rightarrow \infty$ , la sommation sur  $f'(p_n)$  devient une intégrale

$$-\frac{1}{2} \int_{t_k}^T f'(p) dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_k} f'(p) dt, \quad (3.8)$$

et du moment que  $\dot{p} = -f(p)$  représente l'équation du mouvement.

(3.8) sera équivalente à

$$\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{f[p(T)] f[p(0)]}{f^2(p_k)} \right]. \quad (3.9)$$

La relation

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dp_k} \frac{dp_k}{dt}$$

nous laisse écrire  $f [p (T)]$  sous la forme suivante

$$f [p (T)] = \frac{dp (T)}{dp_k} f (p_k)$$

L'exponentielle de l'expression (3.9) donne le Facteur de Composition suivant

$$\left[ \frac{dp (T)}{dp_k} \frac{dp (0)}{dp_k} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

ainsi alors, le résultat final d'une intégrale de chemin linéaire en coordonnée est le suivant

$$K (b, T; a, 0) = \int \frac{dp_k}{2\pi} \left[ \frac{dp (T)}{dp_k} \frac{dp (0)}{dp_k} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i [p (T) b - p (0) a] - i \int_0^T h (p) dt \right\}. \quad (3.11)$$

### 3.3 Applications :

Comme exemples d'applications, nous allons étudier certains problèmes de la mécanique quantique représentés dans le tableau suivant ( $m = \hbar = 1$ ) :

Problème	Hamiltonien
Oscillateur Harmonique Simple	$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2.$
Oscillateur Quadratique Inverse	$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + gq^{-2}.$
Potentiel de Coulomb	$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + e^2 q^{-1}.$
Potentiel de Morse	$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 - V_0 (e^{-2\beta q} - 2\lambda e^{-\beta q}).$
Particule libre sur une sphère à ( $d = 2$ )	$H(p, q) = \frac{1}{2} p_\theta^2 + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \left( p_\phi^2 - \frac{1}{4} \right).$

# 1. Oscillateur harmonique simple :

Une des applications directes de la méthode de la fonctionnelle Delta de Dirac est le calcul de l'intégrale de chemin correspondant à l'oscillateur harmonique. C'est ce que nous allons illustrer en mettant en œuvre les différentes techniques mathématiques exposées en section (3.2). L'exemple le plus simple est celui d'une particule se déplaçant dans un potentiel ne dépendant que de  $q$  et de la forme  $V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ . Nous exploitons alors ce résultat pour déterminer le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes des états liés.

Ce système est d'une importance particulière car un grand nombre de systèmes physiques sont régis par les équations de l'oscillateur harmonique ; citons par exemple les vibrations des atomes d'une molécule autour de leur position d'équilibre, les oscillateurs des atomes ou ions d'un réseau cristallin ( phonons ), le champs électromagnétique est formellement équivalent à un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants.

le propagateur correspondant s'écrit dans l'espace des phases comme suit

$$K_{O.H}(b, T ; A, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right) dt. \quad (3.12)$$

Commençons par linéariser l'Hamiltonien en  $q$ . Pour ce la effectuons le changement de variable suivant

$$p = \bar{p} - i \omega q, \quad (3.13)$$

substituons (3.13) dans (3.12) puis intégrons le terme  $i\omega q \dot{q}$ , nous obtenons la forme linéaire du propagateur (3.12) comme suit

$$K_{O.H}(b, T ; A, 0) = \exp \left[ \frac{\omega}{2} (b^2 - a^2) \right] \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} i \omega q p \right) dt. \quad (3.14)$$

Intégrant par partie le premier terme de l'action  $p \dot{q}$

$$\int_0^T p \dot{q} dt = p(T) b - p(0) a - \int_0^T q \dot{p} dt,$$

ainsi l'intégration sur la variable  $q$  est directe et donne la fonction delta de Dirac de la variable  $p$  ainsi

$$(2\pi)^{N-1} \delta [ \dot{p} - i\omega p ]. \quad (3.15)$$

De ce fait le propagateur (3.14) prend la forme suivante

$$K_{O.H}(b, T; A, 0) = \exp \left[ \frac{\omega}{2} (b^2 - a^2) \right] \int \left[ \frac{dp}{2\pi} \right] \delta [\dot{p} - i \omega p] \\ \times \exp \left( i \int [p(T) b - p(0) a] - i \frac{1}{2} \int p^2 dt \right). \quad (3.16)$$

L'argument de la fonction  $\delta [\dot{p} - i\omega p]$  représente l'équation du mouvement classique. C'est une équation du premier ordre qui admet la solution

$$p(t) = C e^{i \omega (t - \frac{T}{2})},$$

la condition initiale convenable  $p_0$  est choisie à l'instant  $t = \frac{T}{2}$ . Par conséquent, la solution de l'équation différentielle  $\dot{p} - i\omega p$  est

$$p(p_0, t) = p_0 e^{i \omega (t - \frac{T}{2})}. \quad (3.17)$$

En utilisant la relation (3.10), le facteur de composition est égal à l'identité.

En utilisant la relation (3.11) puis l'intégration fonctionnelle sur les  $p$  donne le résultat suivant  $\left( \frac{p_0^2}{\omega} \sin(\omega T) \right)$ .

Par la suite, nous obtenons

$$K_{O.H}(b, T; A, 0) = \exp \left[ \frac{\omega}{2} (b^2 - a^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \times \\ \times \exp \left\{ i p_0 \left[ b e^{i \omega \frac{T}{2}} - a e^{-i \omega \frac{T}{2}} \right] - \frac{i}{2\omega} p_0^2 \sin(\omega T) \right\}. \quad (3.18)$$

L'intégration sur la variable  $p_0$  est évaluée en utilisant la formule de linéarisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-ap^2 + bp + c] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left( \frac{b^2}{4a} + c \right).$$

Finalement, l'expression du propagateur relatif à l'oscillateur harmonique s'écrit

$$K_{O.H}(b, T; a, 0) = \exp \left( \frac{\omega}{2\pi i \sin(\omega T)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{i\omega}{2 \sin(\omega T)} [b^2 + a^2] \cos(\omega T) - 2ab \right). \quad (3.19)$$

## Fonction d'ondes et Spectre d'énergie :

Afin d'obtenir, les énergies des états liés et les fonctions d'ondes correspondants, écrivons tout d'abord la fonction de Green associée au propagateur (3.19) sous la forme d'un développement spectral.

$$G_{O.H}(b, a; E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{E - E_n} \Psi_n(b) \Psi_n^*(a) \quad (3.20)$$

Ceci est possible en utilisant la formule de Mehler [20]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-z^2)} \left[ (x^2 + x'^2)(1+z^2) - 4xx'z \right] \right\} \\ = & \exp \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x'^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(x'). \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $H_n(x)$  sont les polynômes d'Hermit, tel que

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; \dots & H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Pour arriver à ce but, considérons la fonction de Green, transformée de Fourier du propagateur

$$G_{O.H}(b, a; E) = \int_0^{\infty} dT e^{iET} K_{O.H}(b, a; T), \quad (3.22)$$

en posant

$$z = e^{-i\omega T},$$

ceci implique que

$$\frac{z}{1-z^2} = \frac{1}{2i \sin \omega T}, \quad \frac{1+z^2}{1-z^2} = i \frac{\cos \omega T}{\sin \omega T},$$

et par identification nous obtenons

$$x = \sqrt{\omega} b, \quad x' = \sqrt{\omega} a,$$

après un simple calcul, l'expression de la fonction de Green (3.22) devient

$$G_{O.H}(b, a; E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \int_0^T dT e^{iET} z^{\frac{1}{2}} z^n \exp \left( -\frac{B^2}{2} - \frac{A^2}{2} \right) H_n(B) H_n(A). \quad (3.23)$$

L'intégration sur la variable temporelle  $T$  donne naissance aux pôles dans le plan de l'énergie

$$\int_0^T dT e^{iET} z^{\frac{1}{2}} z^n = \int_0^{\infty} dT e^{iET - \frac{i}{2}\omega T - in\omega T} = \frac{1}{E - \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)}.$$



Le spectre discret de l'énergie se déduit de l'équation

$$E - \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) = 0,$$

dont la solution est

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.24)$$

Les fonctions d'ondes se déduisent directement à partir des résidus correspondants aux pôles c'est-à-dire

$$\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) = \lim_{E \rightarrow E_n} \frac{E - E_n}{i} G_{O.H}(b, a; E),$$

après un simple calcul, nous aurons

$$\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega b^2}{2} - \frac{\omega a^2}{2}\right) H_n(\sqrt{\omega}b) H_n(\sqrt{\omega}a), \quad (3.25)$$

de sorte que la fonction d'onde normalisée est donnée par l'expression suivante

$$\Psi_n(b) = \left( \frac{\omega}{2^{2n} \pi (n!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} H_n(\sqrt{\omega}b) \exp\left(-\frac{\omega b^2}{2}\right). \quad (3.26)$$

## 2. Oscillateur quadratique inverse :

Comme exemple d'application de la transformation canonique (*voir appendice (B.1)*) par la méthode de la fonctionnelle delta, considérons une particule dans un potentiel quadratique inverse avec l'hamiltonien

$$H_{QI}(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + g(q^{-2}),$$

Le propagateur du système dans l'espace des phases est donné par l'expression

$$K_{Q,I}(b, T; A, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^T p\dot{q} - H_{QI}(p, q) dt \right). \quad (3.27)$$

Dans le but de linéariser l'action sur la variable de la position  $q(t)$ , effectuons la transformation canonique définie par

$$q = f(Q) = 2\sqrt{Q}, \quad p = \sqrt{Q}P,$$

il s'ensuit que la mesure et le préfacteur prennent respectivement les expressions suivantes respectivement

$$g^{\frac{1}{2}}(Q) = f'(Q) = Q^{-\frac{1}{2}},$$

$$[g(B) g(A)]^{\frac{-1}{4}} = (BA)^{\frac{1}{4}},$$

où  $B = \frac{b^2}{4}$  et  $A = \frac{a^2}{4}$ .

D'après l'expression du potentiel effectif (B.1.8) (*voir Appendice (B.1)*), nous avons

$$V_e = \frac{1}{32Q}.$$

L'expression du propagateur en fonction des nouvelles variables  $P, Q$  s'écrit

$$\tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) = (BA)^{\frac{1}{4}} \left[ \int \frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^T P\dot{Q} - \frac{1}{2}P^2 Q - 2\omega^2 Q^2 - \frac{g + \frac{1}{8}}{4Q} dt \right). \quad (3.28)$$

Le terme qui contient  $\frac{1}{Q}$ , peut être éliminer en effectuant le changement suivant

$$P = \bar{P} - i\frac{\alpha}{Q},$$

donc le propagateur (3.28) devient

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) = (BA)^{\frac{1}{4}} \left[ \int \frac{d\bar{P}dQ}{2\pi} \right] \exp \left\{ \left[ i \int_0^T \bar{P}\dot{Q} - i\alpha \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{1}{2} \bar{P}^2 Q + i \alpha \bar{P} \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \omega^2 Q + \frac{(2\alpha^2 - g - \frac{1}{8})}{4Q} \right] dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

en choisissant  $(2\alpha^2 = g + \frac{1}{8})$ , nous remarquons que le terme  $(\frac{2\alpha^2 - g - \frac{1}{8}}{4Q})$  s'annule et l'intégration du terme  $\frac{\dot{Q}}{Q}$  donne

$$\int_0^T \frac{\dot{Q}}{Q} dt = \left( \frac{B}{A} \right)^\alpha,$$

après avoir enlever la barre de  $\bar{P}$ , (3.29) devient

$$\tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) = (BA)^{\frac{1}{4}} (BA)^\alpha \left[ \int \frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^T P\dot{Q} - \frac{1}{2} P^2 Q + i \alpha P - 2 \omega^2 Q \right) dt. \quad (3.30)$$

Intégrant par partie terme  $P\dot{Q}$ , puis intégrant sur la coordonnée  $Q$ . Une fonction delta de Dirac se produit dont l'expression

$$(2\pi)^{N-1} \delta \left( \dot{P} + \frac{1}{2} P^2 + 2\omega^2 \right). \quad (3.31)$$

L'argument de l'équation (3.31) représente une équation différentielle du premier ordre qui peut s'intégrer en utilisant la condition initiale

$$P_0 = P(0),$$

pour résoudre cette équation différentielle, il est préférable de la ramener à une forme plus simple. Ceci se fait par le changement de variable suivant

$$P(t) = 2 \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}, \quad (3.32)$$

l'équation (3.31) devient

$$\dot{P} + \frac{1}{2} P^2 + 2\omega^2 = 0 \iff \ddot{f} + \omega^2 f = 0, \quad (3.33)$$

il est clair que l'équation (3.33) admet la solution générale suivante

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (3.34)$$

avec

$$A = f_0, \quad B = \frac{\dot{f}_0}{\omega},$$

alors (3.34) s'écrit

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{f}_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (3.35)$$

en remplaçant dans (3.32), la solution  $P(t)$  est égale à

$$P(t) = \frac{P_0 \cos(\omega t) - 2\omega \sin(\omega t)}{P_0 (2\omega)^{-1} \sin(\omega t) + \cos(\omega t)}. \quad (3.36)$$

Dans ces conditions, le facteur de composition sera

$$\left[ \frac{dp(T)}{dp_0} \frac{dp(0)}{dp_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{f_0}{f(T)}. \quad (3.37)$$

L'intégration du terme  $\alpha P$  donne

$$\exp\left(-\int_0^T \alpha P dt\right) = \left(\frac{f_0}{f(T)}\right)^{2\alpha},$$

le propagateur  $\tilde{K}_{Q,I}$  aura pour expression

$$\tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) = (BA)^{\frac{1}{4}} (BA)^\alpha \int \frac{dP_0}{2\pi} \left(\frac{f_0}{f(T)}\right)^{1+2\alpha} \exp i[p(T)B - p(0)A], \quad (3.38)$$

avec

$$\frac{f(T)}{f_0} = P_0 \frac{\sin(\omega T)}{2\omega} + \cos(\omega T).$$

Nous pouvons ramener l'intégrale sur la variable  $P_0$ , à une forme familière qui donne la fonction de Bessel modifiée au moyen du changement de variable suivant

$$u = P_0 + 2\omega \cot(\omega T),$$

le propagateur (3.38) devient

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) &= (BA)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\pi} \exp(i2\omega \cot(\omega T)(B+A)) \\ &\times (BA)^\alpha \left(\frac{2\omega}{\sin(\omega T)}\right)^{(1+2\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} du u^{-(1+2\alpha)} \\ &\times \exp\left[-i\left(Au + \frac{4B\omega^2}{u \sin^2(\omega T)}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

A ce niveau, nous pouvons utiliser la représentation intégrale de la fonction de Bessel Modifiée pour évaluer l'intégrale (3.39)

$$-2 \pi i I_\nu(-i 2 a z) = z^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} dt t^{-(1+\nu)} \exp\left(-ia \left[t + \frac{z^2}{t}\right]\right),$$

avec

$$\arg(a) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\nu) > -1.$$

Finalement, en utilisant l'identité  $e^{i\nu m \pi} I_\nu(z) = I_\nu(e^{i m \pi} z)$  et en revenant aux anciennes variables  $a$  et  $b$ , le propagateur relatif au potentiel d'un oscillateur quadratique inverse est donné par

$$\tilde{K}_{Q,I}(B, T; A, 0) = (ba)^{\frac{1}{2}} \frac{2\omega}{i \sin(\omega T)} \exp\left(i \frac{\omega}{2} \cot(\omega T) (a^2 + b^2)\right) I_{2\alpha}\left(\frac{-iab\omega}{\sin(\omega T)}\right). \quad (3.40)$$

avec

$$2\alpha = \left(2g + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re}(2\alpha) > -1.$$

Ce résultat est équivalent à celui de Peak et Inomata [21].

## Fonction d'ondes et Spectre d'énergie :

La fonction de Green relative au propagateur d'oscillateur quadratique inverse (3.40) est donnée par

$$G_{Q,I}(b, a; E) = \int_0^\infty dT e^{iET} K_{Q,I}(b, a; T),$$

pour trouver le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes associées, nous utilisons la formule suivante [[22], p 729]

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-2i\lambda z} \csc z \exp\left(\frac{1}{2}i(u+v) \cot z\right) I_{2\mu}\left[-i(uv)^{\frac{1}{2}} \csc z\right] dz \\ &= \frac{\Gamma\left(\lambda + \mu + \frac{1}{2}\right)}{(uv)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\mu + 1)} W_{\lambda, \mu}(\mu) M_{\lambda, \mu}(v), \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec  $\mu > \nu$  et  $W(u)$  et  $M(v)$  sont les fonctions de Whittaker et de Kummer respectivement.

Par identification nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{E}{2\omega}, & \alpha &= \mu, & z &= \omega T, \\ u &= \omega a^2, & v &= \omega b^2, \end{aligned}$$

l'expression de la fonction de Green (3.41) devient

$$\begin{aligned}
G_{QI}(b, a; E) &= -i (ba)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + \frac{1}{2})}{(\omega ba) \Gamma(2\alpha + 1)} W_{\lambda, \alpha}(\omega b^2) M_{\lambda, \alpha}(\omega a^2), \\
&= \frac{-i}{\omega} (ba)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha + 1)} W_{\lambda, \alpha}(\omega b^2) M_{\lambda, \alpha}(\omega a^2).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Le spectre d'énergie de l'oscillateur quadratique inverse se déduit à partir des pôles de la fonction Gamma  $\Gamma(\lambda + \alpha + \frac{1}{2})$  de l'équation (3.42); et comme celle-ci possède des pôles simples en  $n = 0, 1, 2, \dots$  nous obtenons de l'équation

$$\lambda + \alpha + \frac{1}{2} = -n. \tag{3.43}$$

Ce qui entraîne

$$E_n = 2\omega \left( n + \alpha + \frac{1}{2} \right). \tag{3.44}$$

Les fonctions d'ondes se déduisent à partir des résidus aux pôles  $\lambda + \alpha + \frac{1}{2} = -n$ , comme suit

$$\lim_{\lambda + \alpha + \frac{1}{2} \rightarrow -n} \left( \lambda + \alpha + \frac{1}{2} + n \right) \Gamma \left( \lambda + \alpha + \frac{1}{2} \right) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{3.45}$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) = -\frac{1}{\omega (ba)^{\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2\alpha + 1)} W_{-(n + \alpha + \frac{1}{2}), \alpha}(\omega b^2) M_{-(n + \alpha + \frac{1}{2}), \alpha}(\omega a^2). \tag{3.46}$$

### 3. Potentiel de Coulomb :

Une autre application particulière des résultats de la section (3.2) est le problème d'une particule soumise au potentiel de Coulomb. L'objet de cette section est la construction d'une manière naturelle du propagateur et la détermination des niveaux d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés. Le potentiel est défini par  $V_C(q) = \frac{e^2}{q}$  et le propagateur est défini dans l'espace des phases ainsi

$$K_C(b, T; a, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^T p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{e^2}{q} \right) dt. \quad (3.47)$$

Il est clair que l'expression (3.47) du propagateur est mal définie du fait que le potentiel  $V(q)$  admet une singularité en  $q = 0$ . Il est donc nécessaire d'éliminer cette singularité afin d'obtenir une intégrale de chemin stable. Une possibilité pour contourner ce problème consiste à reparamétriser les chemins via une transformation temporelle appropriée définie par

$$f(q(t)) dt = ds \rightarrow q^{-1} dt = ds.$$

En suivant la méthode de calcul décrite dans le paragraphe (B.2) de l'Appendice ( B ), le nouveau propagateur est donné par ( $g(q) = f'(q) = 1$ )

$$\tilde{K}_C(b, S; a, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^S p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 q + \frac{i p}{2} + e^2 + E q \right) ds, \quad (3.48)$$

après avoir intégré par partie le terme  $p \dot{q}$ , l'intégration sur  $q$  produit la fonction delta de Dirac suivante

$$(2\pi)^{N-1} \delta \left[ \dot{p} + \frac{1}{2} p^2 - E \right]. \quad (3.49)$$

Nous remarquons que cette équation différentielle coïncide exactement avec celle obtenue pour l'oscillateur quadratique inverse (3.31) et par conséquent, elle admet la même solution (3.36) ( $2\omega^2 \rightarrow -E$ ).

De même, le facteur de composition est égal à

$$\left[ \frac{dp(T)}{dp_0} \frac{dp(0)}{dp_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{f_0}{f(S)},$$

et l'intégration du terme  $\frac{p}{2}$  donne

$$\exp \left( - \int_0^S \frac{p}{2} ds \right) = \frac{f_0}{f(S)}.$$

Après substitution de ces résultats dans l'équation (3.48), le propagateur se ramène à une intégrale

ordinaire sur la variable  $p_0$

$$K_C(b, T ; a, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \int_0^\infty dS b \exp(-iET + ie^2S) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \left( \frac{f_0}{f(S)} \right)^2 \times \exp^{i[p(S)b - p(0)a]}. \quad (3.50)$$

Pour pouvoir intégrer sur  $p_0$ , faisons le changement de variable suivant  $u = \frac{f_0}{f(S)}$  et utilisons la représentation intégrale de la fonction de Bessel Modifiée

$$-2 \pi i I_\mu(-i 2 a z) = z^\mu \int_{-\infty}^{+\infty} dt t^{-(1+\mu)} \exp\left(-ia \left[t + \frac{z^2}{t}\right]\right),$$

le propagateur relatif au problème de Coulomb prend la forme ci-dessous

$$K_C(b, T ; a, 0) = (ba)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp(-iET + ie^2S) \frac{\omega}{i\pi \sin(\omega S)} \exp(2i\omega \cot(\omega S)(b+a)) I_1\left(\frac{-i4\omega(ba)^{\frac{1}{2}}}{\sin(\omega S)}\right), \quad (3.51)$$

avec

$$\omega = \left(\frac{-E}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = 1.$$



# Fonction d'ondes et Spectre d'énergie :

Pour déterminer le spectre d'énergies et les fonctions d'ondes, considérons la fonction de Green, transformée de fourier du propagateur (3.51)

$$K_C(b, T ; a, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} \exp(-iET) G_C(b, a; E).$$

où

$$G_C(b, a; E) = 2(ba)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dS \exp(ie^2 S) \frac{\omega}{\sin(\omega S)} \exp(2i\omega \cot(\omega S) (b+a)) I_1 \left( \frac{-i4\omega (ba)^{\frac{1}{2}}}{\sin(\omega S)} \right). \quad (3.52)$$

et appliquons la fomrle de Hille-Hardy [[22] , p 1038]

$$\begin{aligned} & \frac{z^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} \exp\left(-\frac{1}{2}(x+y) \frac{1+z}{1-z}\right) I_{\mu} \left(2 \frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n n! \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x+y)\right)}{\Gamma(\mu+n+1)} (xy)^{\frac{\mu}{2}} L_n^{\mu}(x) L_n^{\mu}(y), \end{aligned} \quad (3.53)$$

valable pour  $|z| < 1$ . Les  $L_n^{\alpha}(x)$  sont les polynômes de Laguerre.

Pour cela, posons  $z = e^{-2i\omega S}$  dans (3.53) .

Il est facile de voir que

$$\mu = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+z}{1-z} = i \frac{\cos \omega S}{\sin \omega S}$$

la fonction de Green (3.52) devient

$$G_C(b, a; E) = 4i(BA)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dS \exp(ie^2 S) \frac{zz^{-\frac{1}{2}}}{1-z} \exp\left[-(A+B) \left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] I_1 \left(2 \frac{(ABz)^{\frac{1}{2}}}{1-z}\right), \quad (3.54)$$

avec

$$A = 2\omega a, \quad B = 2\omega b, \quad (3.55)$$

elle se réécrit aussi

$$\begin{aligned} G_C(b, a; E) &= i(B'A')^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dS \exp(ie^2 S) \frac{zz^{-\frac{1}{2}}}{1-t} \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}(A'+B') \left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] I_1 \left(2 \frac{(A'B'z)^{\frac{1}{2}}}{1-z}\right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

où

$$A' = \frac{A}{2}, \quad B' = \frac{B}{2},$$

l'intégration sur la variable  $S$  dans (3.56) génère des pôles dans le plan de l'énergie

$$\int_0^\infty dS \exp\left(-i[2\omega+2n\omega-e^2]S\right) = \frac{1}{2\omega(1+n)-e^2}. \quad (3.57)$$

Le spectre discret de l'énergie est alors donné par l'équation  $2\omega(1+n)-e^2=0$ , ou encore

$$E_n = \frac{-e^4}{2(n+1)^2}. \quad (3.58)$$

Nous obtenons finalement, à partir des résidus de la fonction de Green (3.56), les fonctions d'onde normalisées des états liés.

C'est à dire

$$\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) = \lim_{E \rightarrow E_n} \frac{E - E_n}{i} G_C(b, a; E),$$

ce qui nous donne

$$\Psi_n(B') \Psi_n^*(A') = - (B'A')^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{n+1}\right)^2 n! \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(A'+B')\right)}{\Gamma(n+2)} L_n^1(B') L_n^1(A'). \quad (3.59)$$

## 4. Potentiel de Morse :

Dans cette application, nous allons analyser un autre cas intéressant pour son rôle particulièrement important dans l'analyse des vibrations anharmoniques, l'évaluation du transfert d'énergie moléculaire, l'étude de la diffusion d'atomes par une surface et en physique nucléaire, il a été utilisé comme modèle des interactions nucléon-nucléon et pion-nucléon. Il s'agit du système de mécanique quantique correspondant au potentiel de l'oscillateur de Morse

$$V(q) = V_0 \left( e^{-2\beta q} - 2\lambda e^{-\beta q} \right),$$

où  $V_0$ ,  $\lambda$  et  $\beta$  sont des constantes positives.

Le propagateur relatif à ce potentiel s'écrit dans l'espace des phases

$$K_M(b, T; A, 0) = \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left( i \int_0^T p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - V_0 \left( e^{-2\beta q} - 2\lambda e^{-\beta q} \right) \right) dt. \quad (3.60)$$

En premier lieu, faisons la transformation canonique définie par

$$q = f(Q) = -\frac{2}{\beta} \ln Q, \quad (3.61)$$

il s'ensuit que nous aurons les quantités suivantes

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{1}{2} \beta Q P, \\ g(Q) &= f'^2(Q) = 4\beta^{-2} Q^{-2}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

ainsi que le préfacteur

$$[g(A)g(B)]^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\beta} (BA)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.63)$$

Après substitution de ces quantités dans (3.60), le propagateur relatif à l'oscillateur de Morse s'écrit en fonction des nouvelles variables  $(Q, P)$  comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{K}_M(B, T; A, 0) &= [g(B)g(A)]^{-\frac{1}{4}} \int \left[ \frac{dP dQ}{2\pi} \right] \times \\ &\times \exp \left( i \int_0^T P \dot{Q} - \frac{1}{2g} P^2 - V_0 (Q^4 - 2\lambda Q^2) - V_e(Q) \right) dt, \end{aligned} \quad (3.64)$$

avec  $V_e(Q)$  est le potentiel effectif donné par l'équation (B.1.8) de l'Appendice ( B ). Et  $B = \exp\left(\frac{-\beta}{2}b\right)$ ,  $A = \exp\left(\frac{-\beta}{2}a\right)$ .

Il est clair que les propagateurs  $K_M(b, T ; a, 0)$  et  $\tilde{K}_M(B, T ; A, 0)$  sont reliés par

$$K_M(b, T ; a, 0) = [g(B)g(A)]^{\frac{-1}{4}} \tilde{K}_M(B, T ; A, 0). \quad (3.65)$$

En deuxième lieu, effectuons la transformation temporelle suivante afin de donner à l'action la forme familière

$$g(Q) ds = dt. \quad (3.66)$$

Suite à cette transformation, il apparaît le préfacteur suivant

$$[g(B)g(A)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.67)$$

ainsi que le potentiel effectif  $\tilde{V}_e$ , dont l'expression est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{V}_e(Q) &= V_e(Q) \times g(Q) - \frac{g'^2}{8g^2} \\ &= \frac{g''}{8g} - \frac{5g'^2}{32g^2} = -\frac{1}{8Q^2}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Finalement, cette transformation temporelle conduit au propagateur

$$\begin{aligned} \tilde{K}_M(B, T ; A, 0) &= \frac{2}{\beta} (BA)^{\frac{-1}{2}} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iET} \int \left[ \frac{dP dQ}{2\pi} \right] \times \\ &\times \exp \left( i \int_0^S P \dot{Q} - \frac{1}{2} P^2 - \frac{4V_0(Q^2 - 2\lambda)}{\beta^2} + \frac{4E}{\beta^2 Q^2} + \frac{1}{8Q^2} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.69)$$

A partir de l'équation (3.69), nous remarquons que le potentiel relatif à l'oscillateur de Morse se reconvertit à celui relatif à l'oscillateur quadratique inverse

$$U(Q) = \frac{1}{2} \omega^2 Q^2 + g(Q^{-2}),$$

avec

$$\omega^2 = 8V_0\beta^{-2}, \quad g = \left( -4E\beta^{-2} - \frac{1}{8} \right), \quad 2\alpha = (-8E\beta^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (3.40), nous aurons

$$\tilde{K}_M(B, T ; A, 0) = \frac{2}{\beta} (BA)^{\frac{-1}{2}} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp \left( -iET + i 8 \lambda V_0 \beta^{-2} S \right) K_{Q,I}(B, S, A, 0), \quad (3.70)$$

cette expression est valable pour  $\text{Re}(2\alpha) > -1$ .

L'expression explicite du propagateur  $\tilde{K}_M(B, T ; A, 0)$  est

$$\begin{aligned} \tilde{K}_M(B, T ; A, 0) &= \frac{2}{\beta} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp\left(-iET + i 8 \lambda V_0 \beta^{-2} S\right) \frac{\omega}{i \sin(\omega S)} \\ &\times \exp\left(\frac{i \omega}{2} \cot(\omega S) (B^2 + A^2)\right) I_{2\alpha}\left(\frac{-iBA\omega}{\sin(\omega S)}\right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ce résultat coïncide exactement avec celui de la littérature [25].

Changeons  $S$  à  $\frac{S}{\omega}$  et revenons aux anciennes variables  $a$  et  $b$ , nous obtenons l'expression finale du propagateur relatif au potentiel de Morse

$$\begin{aligned} K_M(B, T ; A, 0) &= \frac{2}{\beta} \int_0^\infty \frac{dS}{i \sin(S)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp(-iET + i \lambda \omega S) \\ &\times \exp\left(\frac{i \omega}{2} \cot(S) (e^{-\beta b} + e^{-\beta a})\right) I_{2\alpha}\left(\frac{-i\omega e^{-\beta \frac{(b+a)}{2}}}{\sin(S)}\right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

où

$$\omega^2 = 8V_0\beta^{-2} \quad \text{et} \quad 2\alpha = (-8E\beta^{-2})^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{Re}(2\alpha) > -1).$$

# Fonction d'ondes et Spectre d'énergie :

Pour calculer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde, commençons par écrire la fonction de Green, transformée de Fourier du propagateur (3.71)

$$K_M(b, T; a, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} \exp(-iET) G_M(b, a; E).$$

$$G_M(b, a; E) = \frac{2}{\beta} \int_0^\infty dS \exp(i\lambda\omega^2 S) \frac{\omega}{\sin(S\omega)} \times \exp\left(\frac{i\omega}{2} \cot(\omega S) (B^2 + A^2)\right) I_{2\alpha}\left(\frac{-i\omega BA}{\sin(\omega S)}\right), \quad (3.73)$$

et utilisons la formule (3.41) appliquée dans le problème de l'oscillateur quadratique inverse.

Par identification nous obtenons

$$\mu = \alpha, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\omega}, \quad u = \omega B^2, \quad v = \omega A^2,$$

la fonction de Green (3.73) devient

$$G_M(b, A; E) = \frac{2}{\beta} \frac{\Gamma(\lambda' + \alpha + \frac{1}{2})}{(\omega AB) \Gamma(2\alpha + 1)} W_{\lambda', \alpha}(\omega B^2) M_{\lambda', \alpha}(\omega A^2). \quad (3.74)$$

Le spectre d'énergie discret se déduit à partir des pôles de la fonction Gamma de l'équation (3.74), cela se produit quand

$$\lambda' + \alpha + \frac{1}{2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.75)$$

ce qui entraîne

$$E_n = -\frac{1}{2}\beta^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda^2 V_0 + \lambda\beta\sqrt{2V_0} + \lambda\beta \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (3.76)$$

les fonctions d'ondes se déduisent à partir des résidus aux pôles  $\lambda' + \alpha + \frac{1}{2} = -n$ , ainsi

$$\lim_{\lambda' + \alpha + \frac{1}{2} \rightarrow -n} \left(\lambda' + \alpha + \frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\lambda' + \alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (3.77)$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$\Psi_n(B') \Psi_n^*(A') = \frac{2}{\beta} \frac{(-1)^n}{(\omega AB) \Gamma(2\alpha + 1) n!} W_{\lambda', \alpha}(\omega B^2) M_{\lambda', \alpha}(\omega A^2). \quad (3.78)$$

## 5. Particule libre sur une sphère à (d=2) :

Pour illustrer la technique générale de la fonctionnelle Delta de Dirac, nous allons reconsidérer maintenant le mouvement libre sur la sphère. Nous allons montrer que le problème de la sphère va être reconverti au problème de Morse qui lui même se reconverti ensuite au problème de l'oscillateur quadratique inverse.

Considérons, pour cette particule que la masse est constante, le propagateur qui commande l'évolution de système physique en mouvement libre sur une sphère à deux dimensions s'écrit dans l'espace des phases ainsi :

$$K(b, T; a, 0) = (g(b)g(a))^{-\frac{1}{4}} \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \times \exp \left( i \int_0^T p \dot{q} - \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j - V_e(q) \right) dt, \quad (3.79)$$

avec

$$V_e(q) = \frac{1}{4} g^{ij}_{,ij} - \frac{1}{2} g^{\frac{1}{4}} \Delta g^{-\frac{1}{4}},$$

où  $\Delta = g^{-\frac{1}{2}} \partial_i g^{ij} g^{\frac{1}{2}} \partial_j$  et la notation  $g^{ij}_{,ij}$  signifie la dérivée seconde de  $g^{ij}$ .

pour une particule se mouvant sur une sphère à deux dimensions, l'élément de ligne s'écrit

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2,$$

et donc le propagateur (3.79) devient

$$K_S(\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) = (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int D_\theta D p_\theta D_\phi D p_\phi \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[ p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{p_\theta^2}{2M} - \frac{p_\phi^2 - \frac{1}{4}}{2M \sin^2 \theta} \right] \right\}. \quad (3.80)$$

Tout d'abord fixons les chemins  $\theta(t)$  et  $p_\theta$  et considérons l'intégrale sur les chemins  $\phi(t)$  et  $p_\phi$ . Soit  $K_\phi$  la partie du propagateur (3.80) dépendante des variables  $\phi$  et  $p_\phi$

$$K_\phi = \int D_\phi D p_\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ p_\phi \dot{\phi} - \frac{p_\phi^2 - \frac{1}{4}}{2M \sin^2 \theta} \right] \right\}, \quad (3.81)$$

intégrons le terme  $p_\phi \dot{\phi}$  par partie afin de linéariser l'action sur  $\phi$ , ensuite effectuons l'intégration sur

$\phi$  pour faire apparaître la fonction Delta de Dirac

$$K_\phi = \int \frac{[dp_\phi]}{2\pi} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p_\phi \phi \Big|_0^T \right\} \delta \left[ \dot{P}_\phi \right] \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{p_\phi^2}{2M \sin^2 \theta} dt \right], \quad (3.82)$$

avec

$$[dp_\phi] = \prod_{n=1}^N dp_{\phi_n}.$$

Le fait que  $p_\phi$  soit constant ( d'après la propriété de delta ); l'intégrale ci-dessus s'intègre facilement et donne

$$K_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \left[ \exp \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i) \right] \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{p^2}{2M \sin^2 \theta} dt \right]. \quad (3.83)$$

Considérons maintenant la partie dépendante des variables  $\theta$  et  $p_\theta$

$$K_\theta = \int D_\theta Dp_\theta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[ p_\theta \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2M} - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{2M \sin^2 \theta} \right] \right\}, \quad (3.84)$$

ou sa forme discrète

$$K_\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} d\theta_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{M}{2\varepsilon} \Delta\theta_n^2 - \frac{(p^2 - \frac{1}{4})\varepsilon}{2M \sin^2 \theta_n} \right] \right\}, \quad (3.85)$$

et effectuant la transformation spatiale  $\theta \rightarrow Q$  définie par

$$Q = \cos \theta \implies \theta = \arccos Q = f(Q), \quad (3.86)$$

en conséquence, nous obtenons les résultats suivantes

$$\Delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1} = f(Q_n) - f(Q_{n-1}), \quad (3.87)$$

sachant que

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n &= \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n-1}), \\ \frac{1}{2}\Delta Q_n &= \frac{1}{2}(Q_n - Q_{n-1}), \end{aligned}$$

nous tirons

$$\begin{aligned} Q_n &= \tilde{Q}_n + \frac{1}{2}\Delta Q_n, \\ Q_{n-1} &= \tilde{Q}_n - \frac{1}{2}\Delta Q_n, \end{aligned}$$



donc (3.87) devient

$$\Delta\theta_n = f\left(\tilde{Q}_n + \frac{1}{2}\Delta Q_n\right) - f\left(\tilde{Q}_n - \frac{1}{2}\Delta Q_n\right). \quad (3.88)$$

Développons la différence  $\Delta\theta_n$  en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en  $\Delta Q_n$ , c'est-à-dire à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , il vient que

$$\Delta\theta_n \simeq (\Delta Q_n) f'(\tilde{Q}_n) + \frac{1}{24}(\Delta Q_n)^3 f'''(\tilde{Q}_n). \quad (3.89)$$

Les ordres supérieurs à 2 donnent une contribution nulle.

alors

$$(\Delta\theta_n)^2 \simeq (\Delta Q_n)^2 f'^2(\tilde{Q}_n) + \frac{1}{12}(\Delta Q_n)^4 f'(\tilde{Q}_n) f'''(\tilde{Q}_n), \quad (3.90)$$

$$\sin^2 \tilde{\theta}_n \simeq 1 - \tilde{Q}_n^2. \quad (3.91)$$

la transformation utilisée change la mesure comme suit

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(\frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} dQ_n &= \prod_{n=1}^N \left(\frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} f'(Q_n) dQ_n \\ &= \prod_{n=1}^N \left(\frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \{f'(Q_f) f'(Q_i)\}^{\frac{-1}{2}} \\ &\quad \times \prod_{n=1}^N \{f'(Q_n) f'(Q_{n-1})\}^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dQ_n, \end{aligned} \quad (3.92)$$

développons  $f'(Q_n) f'(Q_{n-1})$  en série de Taylor autour du mid-point

$$\begin{aligned} f'(Q_n) &= f'\left(\tilde{Q}_n + \frac{1}{2}\Delta Q_n\right) \simeq f'(\tilde{Q}_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta Q_n) f''(\tilde{Q}_n) + \frac{1}{8}(\Delta Q_n)^2 f'''(\tilde{Q}_n) \\ f'(Q_{n-1}) &= f'\left(\tilde{Q}_n - \frac{1}{2}\Delta Q_n\right) \simeq f'(\tilde{Q}_n) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Delta Q_n) f''(\tilde{Q}_n) + \frac{1}{8}(\Delta Q_n)^2 f'''(\tilde{Q}_n). \end{aligned}$$

A l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , le produit  $f'(Q_n) f'(Q_{n-1})$  se réduit à

$$f'(Q_n) f'(Q_{n-1}) \simeq f'(\tilde{Q}_n) \left[ 1 + \frac{1}{8} \left\{ \frac{f'''(\tilde{Q}_n)}{f'(\tilde{Q}_n)} - \frac{f''^2(\tilde{Q}_n)}{f'(\tilde{Q}_n)} \right\} (\Delta Q_n)^2 \right].$$

Reportons ce résultat dans (3.92), nous aurons pour la mesure l'expression suivante

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left( \frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} d\theta_n &= (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^N \left( \frac{M f_n'^2(\tilde{Q}_n)}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dQ_n \\ &\times \prod_{n=1}^N \left[ 1 + \frac{1}{8} \left\{ \frac{f_n''''(\tilde{Q}_n)}{f_n'(\tilde{Q}_n)} - \frac{f_n'^2(\tilde{Q}_n)}{f_n'(\tilde{Q}_n)} \right\} (\Delta Q_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

pour abrégier l'écriture, nous posons dans la suite  $f(\tilde{Q}_n) \equiv \tilde{f}_n$ .

Insérons (3.90) et (3.93) dans (3.85), le propagateur  $K_\theta$  s'écrit

$$\begin{aligned} K_\theta &= (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{M \tilde{f}_n'^2}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dQ_n \\ &\times \prod_{n=1}^N \left[ 1 + \frac{1}{8} \left\{ \frac{\tilde{f}_n''''}{\tilde{f}_n'} - \frac{\tilde{f}_n'^2}{\tilde{f}_n'} \right\} (\Delta Q_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{M}{2\varepsilon} \tilde{f}_n'^2 \left\{ (\Delta Q_n)^2 + \frac{1}{12} (\Delta Q_n)^4 \frac{\tilde{f}_n''''}{\tilde{f}_n'} \right\} - \frac{(p^2 - \frac{1}{4})\varepsilon}{2M(1 - \tilde{Q}_n^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Les termes  $(\Delta Q_n)^2$  et  $(\Delta Q_n)^4$  seront approximés et remplacés suivant la procédure de Schulman-Laughlin[26] par un potentiel effectif purement quantique comme suit

$$\langle (\Delta Q_n)^2 \rangle \rightarrow \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{M \tilde{f}_n'^2} \right), \quad \langle (\Delta Q_n)^4 \rangle \rightarrow 3 \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{M \tilde{f}_n'^2} \right)^2, \quad (3.95)$$

le potentiel effectif est alors donné par

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2\varepsilon \tilde{f}_n'^2}{8M \tilde{f}_n'^4}. \quad (3.96)$$

Il vient que le propagateur  $K_\theta$  s'écrit

$$\begin{aligned} K_\theta &= (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{M \tilde{f}_n'^2}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dQ_n \\ &\times \prod_{n=1}^N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{M}{2\varepsilon} \tilde{f}_n'^2 (\Delta Q_n)^2 - \frac{p^2\varepsilon}{2M(1 - \tilde{Q}_n^2)} + \frac{\hbar^2\varepsilon}{8M} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

sa représentation dans l'espace des phases est la suivante

$$K_\theta = (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \int DQDP \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[ P\dot{Q} - \frac{(1-Q^2)}{2M} P^2 - \frac{p^2}{2M(1-Q^2)} + \frac{\hbar^2}{8M} \right] dt \right\}, \quad (3.98)$$

changeons  $P$  en  $P - ip(1-Q^2)^{-1}$  pour éliminer le quatrième terme et produire une différentielle totale de  $Q$ . L'action devient alors

$$S = P\dot{Q} - \frac{1-Q^2}{2M} P^2 + \frac{ipP}{M} - \frac{ip}{(1-Q^2)} \dot{Q} + \frac{\hbar^2}{8M},$$

l'intégration du terme  $-\frac{ip}{(1-Q^2)} \dot{Q}$  donne  $-ip \operatorname{arct}hQ \Big|_A^B$ , où  $B = \cos\theta_f$  et  $A = \cos\theta_i$ .

Pour linéariser l'action en  $Q$ , nous introduisons l'identité définie par une intégrale sur la position finale de  $-\infty$  à  $+\infty$  d'une intégration de parcours relative à une particule libre.

Prenons le complexe conjugué de cette identité dont le but est d'éliminer le terme  $P^2Q^2$ .

Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db \int [Dx]_0^b \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{M}{2} \dot{x}^2 dt \right] = 1, \quad (3.99)$$

nous obtenons alors

$$K_\theta = (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{ip}{\hbar} \operatorname{arct}hQ \Big|_A^B \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} db \int [Dx]_0^b \int DQDP \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[ P\dot{Q} - \frac{(1-Q^2)}{2M} p^2 + \frac{ipP}{M} + \frac{\hbar^2}{8M} - \frac{M}{2} \dot{x}^2 \right] \right\}, \quad (3.100)$$

changeons  $\dot{x}$  en  $\dot{x} + \frac{PQ}{M}$ .

Ce changement conduit à un potentiel effectif

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2}{8M}. \quad (3.101)$$

Intégrons le terme  $P\dot{Q}$  par partie, ensuite l'intégration sur la variable  $Q$  produit la fonction Delta de Dirac suivante

$$\delta [P\dot{x} + \dot{P}]. \quad (3.102)$$

Substituons les résultats obtenus dans l'expression (3.100), nous trouvons

$$\begin{aligned}
K_\theta &= (\sin \theta_f \sin \theta_i)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{p}{\hbar} \operatorname{arcth} Q \Big|_A^B \right] \int_{-\infty}^{+\infty} db \int \frac{[dP]}{2\pi\hbar} \delta [P\dot{x} + \dot{P}] \\
&\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} [P(T)B - P(0)A] \right] \\
&\times \int [Dx]_0^b \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[ -\frac{M}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2M} p^2 + \frac{ipP}{M} \right] \right\}. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Maintenant, l'intégration sur les  $P_n$  se fait en remplaçant  $P$  par la solution de l'équation (3.102)

$$P\dot{x} + \dot{P} = 0, \tag{3.104}$$

ceci revient à dire que la contribution principale des amplitudes sur tous les chemins  $\{x\}$  est limitée au chemin  $x(t)$ , solution de l'équation (3.104) ( $P(t) = P_0 \exp^{-x(t)}$ ).

Alors le calcul du propagateur (3.103) se réduit au calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned}
K_\theta &= (\sin \theta_f \sin \theta_i)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{p}{\hbar} \operatorname{arcth} Q \Big|_A^B \right] \int_{-\infty}^{+\infty} db \exp \left[ \frac{-b}{2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_0}{2\pi\hbar} \\
&\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} P_0 (B e^{-b} - A) \right] \int [Dx]_0^b \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[ -\frac{M}{2} \dot{x}^2 + \left( -\frac{P_0^2}{2M} \right) \left[ e^{-2x(t)} - \frac{2ip}{P_0} e^{-x(t)} \right] \right] \right\}, \tag{3.105}
\end{aligned}$$

où la quantité  $\exp \left[ \frac{-b}{2} \right]$  représente le facteur de composition donnée par (3.10)

L'intégrale fonctionnelle en  $x$  contient le Potentiel de Morse

$$V(x) = V_0 \left( e^{-2x(t)} - e^{-x(t)} \right), \tag{3.106}$$

avec

$$V_0 = -\frac{P_0^2}{2M} \quad \text{et} \quad 2\lambda V_0 = \frac{ipP_0}{M}.$$

Le potentiel étant complexe, donc il n'est pas possible d'obtenir des états liés (énergies réelles). Puisque il n'y a pas d'états liés, alors il est clair que

$$\int_0^\infty dP_0 + \int_{i\infty}^0 dP_0 + \int_C dP_0 = \oint_C dP_0 = 0,$$

car il n'y a pas de pôles à l'intérieur de  $C$ .

Comme  $\int_C dP_0 = 0$  (rayon de l'arc  $\rightarrow \infty$ ), si non, les fonctions d'ondes ne tendent pas vers 0 à  $\infty$ .

Alors :  $\int_0^\infty dP_0 = -\int_{i\infty}^0 dP_0 = \int_0^{i\infty} dP_0 = \int_0^\infty idP_0$  (nous avons changé  $P_0$  en  $idP_0$ ).

Nous n'avons pas considéré l'intégrale  $\int_{-\infty}^0$  car nous avons supposé qu'il ne contribue pas dans le résultat final ( pour  $P_0 < 0$  il n'y a pas d'état liés ).

Le propagateur  $K_\theta$  prend alors, la forme suivante

$$\begin{aligned} K_\theta &= (\sin\theta_f \sin\theta_i)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{p}{\hbar} \text{arcth}Q \Big|_A^B\right] \int_{-\infty}^{+\infty} db \exp\left[\frac{-b}{2}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idP_0}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp\left[\frac{-P_0}{\hbar} (B e^{-b} - A)\right] \times \int [Dx]_0^b \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 - \left(-\frac{P_0^2}{2M}\right) \left[e^{-2x(t)} - \frac{2p}{P_0} e^{-x(t)}\right]\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Soit  $K_x^*(b, T; , 0)$  le complexe conjugué du propagateur relatif à une particule soumise à l'action du potentiel de Morse

$$K_x^*(b, T, 0, 0) = \int [Dx]_0^b \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 - \left(-\frac{P_0^2}{2M}\right) \left[e^{-2x(t)} - \frac{2p}{P_0} e^{-x(t)}\right]\right]\right\}. \quad (3.108)$$

Le calcul de cette expression se ramène au calcul du propagateur relatif à l'oscillateur quadratique inverse dont le potentiel

$$U(x) = \frac{1}{2}Mw^2x^2 + \frac{\hbar^2}{2M}gx^{-2}, \quad (3.109)$$

avec

$$w^2 = \frac{8}{M}V_0 = \frac{4P_0^2}{M^2}, \quad 2\alpha = \left(-\frac{8EM}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{-2EM}{\hbar^2}}, \quad g = -\frac{8EM}{\hbar^2} - \frac{1}{4},$$

Au moyen de transformations spatiales et temporelles suivantes

$$x = f(q) = -2 \ln q, \quad dt = f'^2(q) ds = 4q^{-2} ds,$$

il vient que

$$K_x^*(b, T, 0, 0) = 2 \exp \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} ET - \frac{i}{\hbar} \frac{4pP_0S}{M}\right] K_{IQ}^*\left(e^{-\frac{b}{2}}, S, 1, 0\right), \quad (3.110)$$

de sorte que le propagateur  $K_{IQ}^*$  est donné par l'expression

$$\begin{aligned} K_{IQ}^*\left(e^{-\frac{b}{2}}, S, 1, 0\right) &= \frac{1}{4\pi} \exp\left[-b\alpha - \frac{b}{4}\right] \exp\left[\frac{-iP_0}{\hbar} \cot(ws) \left(e^{-b} + 1\right)\right] \\ &\left(\frac{4P_0}{\sin(ws)}\right)^{1+2\alpha} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dU U^{-(1+2\alpha)} \\ &\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{U}{4} + \frac{4P_0^2 e^{-b}}{U \sin^2(ws)}\right]\right], \end{aligned} \quad (3.111)$$

changeons  $S$  en  $\frac{S}{w}$  et reportons dans (3.111)

$$\begin{aligned}
K_{IQ}^* \left( e^{-\frac{b}{2}}, \frac{S}{w}, 1, 0 \right) &= \frac{1}{4\pi} \exp \left[ -b \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) \right] \exp \left[ \frac{-iP_0}{\hbar} \cot(S) \left( e^{-b} + 1 \right) \right] \\
&\times \left( \frac{4P_0}{\sin(S)} \right)^{1+2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dU U^{-(1+2\alpha)} \\
&\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{U}{4} + \frac{4P_0^2 e^{-b}}{U \sin^2(S)} \right] \right]. \tag{3.112}
\end{aligned}$$

Rassemblant les résultats (3.83) ,(3.107) ,(3.110) et (3.111), insérons-les dans (3.80) et effectuons ensuite les substitutions suivantes

$$P_0 \rightarrow \sin SP_0 \quad \text{et} \quad U \rightarrow 4U,$$

nous obtenons à la fin pour le propagateur  $K_S$ , l'expression suivante

$$\begin{aligned}
K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= \frac{M}{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i) + \frac{p}{\hbar} \text{arctanh} Q \Big|_A^B \right] \\
&\times \int_0^\infty \frac{dS}{\pi} \exp \left( \frac{-i2p}{\hbar} S \right) \int_{-\infty}^{+\infty} db \\
&\times \exp \left[ -b \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \right] \int_0^{+\infty} \frac{idP_0}{2\pi\hbar} P_0^{2\alpha} \\
&\times \exp \left\{ iP_0 \left[ e^{-b} (-\cos S + iB \sin S) - \cos S - iA \sin S \right] \right\} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dU U^{-(1+2\alpha)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( U + \frac{P_0^2 e^{-b}}{U} \right) \right]. \tag{3.113}
\end{aligned}$$

# Intégration :

Pour intégrer sur  $P_0$ , faisons les changements suivants  $U \rightarrow P_0U$  et  $q \rightarrow qU^2$  avec  $q = e^{-b}$ . Nous obtenons pour le propagateur, l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= \frac{M}{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i) + \frac{p}{\hbar} \operatorname{arctanh} Q \left| \frac{B}{A} \right. \right] \\
 &\times \int_0^\infty \frac{dS}{\pi} \exp \left( \frac{-i2p}{\hbar} S \right) \int_0^{+\infty} dq q^{\alpha-\frac{1}{2}} \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dU \int_0^{+\infty} \frac{idP_0}{2\pi\hbar} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} P_0 U^2 q [-\cos(S) + \right. \\
 &\quad \left. -iB \sin(S)] - \cos(S) - iA \sin(S) + U(q+1) - \right. \\
 &\quad \left. \cos(S) - iA \sin(S) \right\}, \tag{3.114}
 \end{aligned}$$

l'intégration sur  $P_0$  est si simple elle donne immédiatement

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty dP_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} P_0 [U^2 q (-\cos(S) + iB \sin(S)) + U(q+1) - \cos(S) - iA \sin(S)] \right\} \\
 &= \frac{i\hbar}{U^2 q (-\cos(S) + iB \sin(S)) + U(q+1) - \cos(S) - iA \sin(S)}, \tag{3.115}
 \end{aligned}$$

pour abrégier l'écriture nous posons  $\mathbf{A} = -\cos(S) - iA \sin(S)$  et  $\mathbf{B} = -\cos(S) + iB \sin(S)$ .

L'intégrale en  $dU$  s'intègre par application du théorème de Cauchy.

Le contour est le demi-cercle décrit dans le sens direct.

L'expression à intégrer  $\left( \frac{i\hbar}{q\mathbf{B}U^2 + U(q+1) + \mathbf{A}} \right)$  possède deux pôles simples, mais seulement un pôle est à l'intérieur du contour indiqué ci-dessus.

En utilisant le théorème des Résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU}{q\mathbf{B}U^2 + U(q+1) + \mathbf{A}} = \frac{2i\pi}{\left[ (q+1)^2 - 4q\mathbf{A}\mathbf{B} \right]^{\frac{1}{2}}},$$

il vient en substituant dans (3.114)

$$\begin{aligned}
K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= -\frac{M}{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \times \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i) + \frac{p}{\hbar} \text{arct}hQ \Big|_A^B \right] \\
&\times \int_0^\infty \frac{dS}{\pi} \exp \left( \frac{-i2p}{\hbar} S \right) \\
&\times \int_0^{+\infty} i dq q^{\alpha-\frac{1}{2}} \left[ (q+1)^2 - 4q\mathbf{AB} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Maintenant pour obtenir les valeurs de  $E$ , nous suivons les étapes suivantes :

**1.** La simplification de l'expression  $\left[ (q+1)^2 - 4q\mathbf{AB} \right]^{\frac{1}{2}}$  en  $\left[ q^2 - 2qz + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$ , et l'utilisation de l'identité

$$\cos S \mp x \sin S = \sqrt{1+x^2} \cos (S \pm \text{arct}gx),$$

ainsi avec le changement  $S \rightarrow \bar{S} - \frac{1}{2} \text{arct}gQ \Big|_A^B$ ; nous aurons par substitution de ces résultats dans (3.116) l'expression suivante

$$\begin{aligned}
K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= -\frac{M}{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \\
&\times \int_{-\infty}^\infty \frac{dS}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \\
&\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i - 2\bar{S}) \right] \int_0^{+\infty} i dq q^{\alpha-\frac{1}{2}} \times \left[ q^2 - \right. \\
&\left. 2q \left( \sin \theta_i \sin \theta_f \cos 2\bar{S} + \cos \theta_f \cos \theta_i \right) + 1 \right]^{-1/2}. \tag{3.117}
\end{aligned}$$

**2.** l'intégration sur  $p$  donne

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p (\phi_f - \phi_i - 2\bar{S}) \right] \\
&= \delta (\phi_f - \phi_i - 2\bar{S}).
\end{aligned}$$

**3.** l'intégration sur  $\bar{S}$  impose  $\bar{S} = \frac{1}{2} (\phi_f - \phi_i)$ , et avec l'utilisation de la propriété de  $\delta$

$$\delta (aX) = a\delta (X),$$



en effet

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dS}{\pi} \delta(\phi_f - \phi_i - 2\bar{S}) [q^2 - 2q (\sin \theta_i \sin \theta_f \cos 2\bar{S} + \cos \theta_f \cos \theta_i) + 1]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} [q^2 - 2q (\sin \theta_i \sin \theta_f \cos(\phi_f - \phi_i) + \cos \theta_f \cos \theta_i) + 1]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

4. en reportant (3.118) dans (3.127) , le propagateur  $K_S$  se met sous la forme

$$\begin{aligned} K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= \frac{M}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \\ &\times \int_0^{+\infty} i dq q^{\alpha-\frac{1}{2}} [q^2 - 2q \cos \Psi + 1]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

5. l'intégration sur  $q$  donne les Polynômes de Legendre

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} i dq q^{\alpha-\frac{1}{2}} [q^2 - 2q \cos \Psi + 1]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \pi \csc [(\alpha + 1/2) \pi] p_{\alpha-\frac{1}{2}} (-\cos \Psi), \end{aligned} \quad (3.120)$$

nous obtenons donc, compte tenu de (3.135)

$$\begin{aligned} K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= \frac{M}{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idE}{4\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} ET \right] \\ &\times \csc [(\alpha + 1/2) \pi] p_{\alpha-1/2} (-\cos \Psi), \end{aligned} \quad (3.121)$$

où  $\alpha = \sqrt{\frac{-2EM}{\hbar^2}}$ .

6. en fin pour intégrer sur  $E$ , changeons la variable d'intégration en passant à la nouvelle variable  $\alpha$  . et comme les fonctions de Legendres ont le comportement asymptotique suivant[22]

$$p_\nu (\cos \phi) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \frac{\cos \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \phi - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \phi}} + 0 \left( \nu^{-\frac{3}{2}} \right)$$

7. Puis en passant aux calculs des Résidus de l'expression

$$\begin{aligned} K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= -\frac{i}{4\pi} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right\} \oint_{(c)} \frac{\alpha d\alpha}{\sin [(\alpha + 1/2) \pi]} \\ &\times \exp \left[ -\frac{i\hbar}{2M} \alpha^2 T \right] p_{\alpha-1/2} (-Z) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Nous obtenons donc pour le propagateur  $K_S$ , l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 K_S (\theta_f, \phi_f, T; \theta_i, \phi_i, 0) &= -\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{8M} T \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_n T \right] \\
 &\times p_{n-1} (-Z) (n - 1/2) (-1)^n / 2\pi,
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

avec

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2M} \left( n - \frac{1}{2} \right)^2. \tag{3.124}$$

### 3.4 Conclusion :

La technique que nous avons présentée ici permet le calcul d'une manière très simple du propagateur pour des hamiltoniens quantiques qui sont des fonctions générales des variables d'espace des phases  $\{p(t), q(t)\}$ . L'idée centrale des calculs est la linéarisation de l'action par rapport à la variable de la position  $q(t)$ . Cette opération se caractérise, contrairement à la tradition, par l'apparition d'une fonctionnelle Delta de Dirac de la deuxième équation du mouvement dans le formalisme hamiltonien (équation du mouvement sur la variable  $p(t)$ , moment conjugué à  $\dot{q}(t)$ ). Sous cette forme l'intégrale fonctionnelle sur les moments  $p(t)$  est immédiate et donne naissance à un facteur dit facteur de composition qui dépend de la solution de l'équation différentielle obtenue. Nous avons illustré cette technique en résolvant, sous forme explicite, certains problèmes importants de la mécanique quantique. Le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'onde sont exacts et concordent parfaitement avec ceux de la littérature.

Cette méthode a mieux suscité la détermination du propagateur et peut se généraliser à des hamiltoniens plus compliqués.

Deuxième partie

**Application de l'Intégrale de Chemins  
dans l'Espace Courbe**

## Chapitre 4

# L'approche des Intégrales de Chemins pour un Potentiel Super intégrable sur une Hyperboloïde à Deux Dimensions

### 4.1 Introduction

Historiquement, l'espace euclidien est seulement l'espace physique de dimension 2 ou 3 ( plan ou espace ) dans lequel ont été définis les points, les droites, les distances et les angles. A ces objets ont été affectées des propriétés comme « par deux points distincts ne passe qu'une seule droite », ou bien « la somme des angles d'un triangle vau deux droites ». Les transformations caractéristiques de ces espaces euclidiens sont les isométries : elles transforment des figures géométriques en d'autres figures géométriques de même dimension. Ces espaces euclidiens naturels sont les univers où sont démontrés tous les grands théorèmes de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace. Ils sont les objets d'étude de tous les géométries avant Euclide jusqu'aux mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle. A cette date cependant, cette vision de l'espace euclidien naturel commence à montrer ses limites. Il est alors nécessaire d'en donner une définition plus formelle et plus générale. C'est Gauss qui en 1824 avait formulé la possibilité qu'il existe des géométries alternatives à celles d'Euclide. Il existe différentes géométries non-euclidiennes dont les plus connues sont les " géométries riemanniennes " ( 1867 ) ( à courbure constante et positive ) et les " géométries de Hobatchevski " ( 1829 ) ( de type hyperbolique donc à une courbure non-constante et négative ). La description géométrique de la théorie physique due à Einstein trouve ses origines dans les avancées de la géométrie non-euclidienne, qui remontent aux différentes tentatives aux cours des siècles de démontrer le cinquième postulat d'Euclide, énonçant que par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée. Ces efforts culminèrent au XIX<sup>e</sup>

siècle avec la réalisation par les mathématiciens Nicolaï Ivanovitch Hobatchevsky, Janos Bolyai et cal Friedrich Gauss que ce postulat pouvait sans inconvénient être remplacé par un différent ( plusieurs parallèles possibles, ou pas de parallèles du tout ), et ne constituait donc en fait qu'un axiome arbitraire. Aucune de ces géométries n'était plus « vraie » que les autres : il s'agissait simplement d'outils conceptuels différents pouvant servir de support à des usages également différents. La surface d'une sphère, par exemple, peut indifféremment être considérée comme la surface d'un objet euclidien à 3 dimensions ou comme un espace non-euclidien particulier à deux dimensions, la seconde représentation pouvant s'avérer plus commode dans certains cas. Dans ce sens, plusieurs tentatives réussies d'analyser des systèmes dynamiques super-intégrables dans des zones de l'espace où la géométrie est très fortement courbée et donc localement non-euclidienne ont été enregistrées. La notion " systèmes super-intégrables " est reliée aux potentiels pour lesquels l'équation de Schrödinger admet une séparation de variables dans plusieurs systèmes de coordonnées [27, 28]. Cette notion a été introduite pour la première fois dans les travaux de Evans [29], Wojciechowski [30], Smorodinsky-Winternitz et d'autres [31, 32, 33]. Dans ces travaux, nous trouvons une classification générale des hamiltoniens à deux et à trois dimensions qui possèdent des groupes d'invariance dynamique. Cette classification était établie selon le nombre de degrés de liberté, les intégrales de mouvements quadratiques par rapport aux quantités de mouvement et aux variables des systèmes de coordonnées pour lesquels le potentiel admet une séparation des variable : un système hamiltonien classique est intégrable s'il possède autant d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté. Il est super-intégrable s'il admet plus d'intégrales que de degrés de liberté. Les mêmes définitions sont lieu en mécanique quantique, mais les intégrales de mouvement sont des opérateurs. Généralement, dans un espace à  $D$  dimensions, un système est dit " maximally " super intégrables s'il possède  $(2D - 1)$  intégrales de mouvements et il est dit super-intégrables " minimally " s'il possède  $(2D - 2)$  intégrales de mouvements ( l'énergie comprise ); [29, 31, 34, 35, 36] par exemple : sur une sphère à deux dimensions, nous trouvons deux potentiels super-intégrables, et sur une sphère à trois dimensions il a trois maximally et quatre minimally potentiels super-intégrables.

L'objectif de ce chapitre est l'étude par l'approche des intégrales de chemin du mouvement sur une hyperboloïde à deux dimensions d'une particule soumise à l'action d'un potentiel super-intégrable, Oscillateur de Higgs. Le traitement sera effectué dans les systèmes de coordonnées suivantes : pseudo sphériques, équidistantes, elliptiques et hyperboliques.

Le plan de notre étude est le suivant : Dans le paragraphe qui suit nous rappelons en détails de l'intégrale de chemins sur un espace courbe où le propagateur a été formulé suivant deux prescription ; la prescription dite " l'ordre de Weyl " et la prescription " forme produit ". Ensuite, nous présentons les systèmes de coordonnées dans lesquels le potentiel en question admet une séparation de variables

en donnant dans chaque système de coordonnées la forme de l'hamiltonien correspondante. Nous trouvons aussi un tableau qui récapitule les différents systèmes de coordonnées utilisés. Dans le dernier paragraphe, nous formulons explicitement l'intégrale de chemin associé à notre potentiel dans deux systèmes de coordonnées à savoir, le système de coordonnées pseudo-sphériques et le système de coordonnées équidistantes. Les intégrales de chemin ont été séparées en utilisant des transformations temporelles appropriées et ont été effectuées en utilisant la solution de l'intégrale de chemin associée au potentiel de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié. Le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes sont exactement obtenus. Dans le cas de systèmes de coordonnées elliptiques et hyperboliques, l'étude de ce problème s'avérait très difficile à cause de la nature complexe de ces coordonnées. Des tentatives ont été menées pour contourner ces difficultés, malheureusement, nous n'avons pas abouti au résultat car le calcul était très long et fastidieux. Nous terminons le chapitre par une conclusion.

## 4.2 Intégrale de Chemins sur un Espace Courbe

Pour un espace courbe, la première formulation du propagateur dans le cadre des intégrales de chemin est due à Dewitt [37]. Explicitement, le propagateur est défini sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_i; T) &= \int_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} \sqrt{g} D_{Dew} q(t) \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{m}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(q) + \frac{\hbar^2 R}{6m} \right] dt \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \int \sqrt{g(q^{(j)})} dq^{(j)} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2} g_{ab}(q^{(j-1)}) \Delta q^{a,(j)} \Delta q^{b,(j)} - \varepsilon V(q^{(j-1)}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon \hbar^2}{6m} R(q^{(j-1)}) \right] \right\}. \tag{4.1.1}
\end{aligned}$$

La correction quantique  $\Delta V_{Dew} = \frac{\hbar^2 R}{6m}$  est indispensable pour dériver de l'équation d'évolution

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{LB} + V(q) \right] \Psi(q, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t), \tag{4.1.2}$$

à partir de l'équation de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{LB} + V(q) \right] \Psi(q, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t), \tag{4.1.3}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace Beltrami défini par

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q^j}, \text{ avec } g = \det(g_{ij}) \quad (4.1.4)$$

Les termes de la métrique contenus dans l'expression de l'action sont évalués au prépoint  $q^{(j-1)}$ . Notons que l'intégrale de chemin (4.1.1) peut être définie en adoptant d'autres points, comme le postpoint  $q^{(j)}$  ou le mid-point  $\bar{q}^{(j)} = \frac{1}{2}(q^{(j)} + q^{(j-1)})$  où la correction quantique  $\Delta V$  sera changé selon le point adopté.

#### 4.2.1 La prescription de " l'Ordre de Weyl " :

La définition de l'intégrale de chemin par rapport au mid-point est une autre formulation reliée à l'ordre de Weyl ; très convenable pour écrire l'Hamiltonien  $H$ . Pour construire l'approche des intégrales de chemin sur un espace courbe de dimension  $d$ , nous considérons le lagrangien classique avec une métrique arbitraire  $g_{ij}$  et un élément de ligne  $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$ , tel que

$$L_{cl} = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - V(q) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + b_i \dot{q}^i - V(q), \quad (4.1)$$

ce qui implique l'hamiltonien quantique suivant

$$H = p_i \dot{q}^i - L, \quad (4.2)$$

avec

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m g_{ij} \dot{q}^j + b_i, \quad (4.3)$$

ce qui entraîne pour l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} g^{ij} (p_i - b_i) (p_j - b_j) + V(q) \\ &= \frac{1}{2m} [g^{ij}(\hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j] - \frac{1}{m} [g^{ij}(\hat{q}) b_i(\hat{q}) \hat{p}_j] + \frac{1}{2m} [b^i(\hat{q}) b_i(\hat{q})] + V(\hat{q}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Pour exprimer  $H$  à l'aide des opérateurs associés à la position et à la quantité de mouvement, nous construisons les opérateurs

$$p_i = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \Gamma_i \right), \quad (4.5)$$



ce qui entraîne pour l'hamiltonien

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int \sqrt{g} dq \Psi_1^*(q) \Psi_2(q), \quad (4.6)$$

et  $\Gamma_i$  sont les symboles de Christoffel définis par

$$\Gamma_i = \frac{\partial}{\partial q^i} \ln \sqrt{g}. \quad (4.7)$$

En termes des opérateurs  $p_i$ , l'écriture de l'hamiltonien (4.4) est confrontée au problème d'ordre de ces derniers. Pour éviter ce problème, nous utilisons la prescription de **l'ordre de Weyl** [38] comme suit :

Considérons la quantité  $q^m p^n$ , l'ordre de Weyl du produit  $(q^m p^n)_W$  est juste la moyenne arithmétique de tout le classement possible des facteurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$ .

Par exemple :

$$(F(\hat{q})\hat{p}) = \frac{1}{2} [F(\hat{q})\hat{p} + \hat{p}F(\hat{q})], \quad (4.8)$$

$$(F(\hat{q})\hat{p}^2) = \frac{1}{4} [F(\hat{q})\hat{p}^2 + 2\hat{p}F(\hat{q})\hat{p} + \hat{p}F(\hat{q})]. \quad (4.9)$$

En général, un produit d'ordre de Weyl d'une coordonnée et d'un opérateur de la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} (\hat{q}^m \hat{p}^r)_{Weyl} &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^m {}^m C_l \hat{q}^{m-l} \hat{p}^r \hat{q}^l, \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} \hat{q}^{m-l} \hat{p}^r \hat{q}^l. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pour écrire l'hamiltonien  $H$  (4.4), nous suivons les exemples de calcul (4.8) et (4.9). Suivant la prescription de " l'ordre de Weyl ", nous aurons

$$\begin{aligned} [g^{ij}(\hat{q}) b_i(\hat{q}) \hat{p}_j]_W &= \frac{1}{2} [g^{ij}(\hat{q}) b_i(\hat{q}) \hat{p}_j + \hat{p}_j g^{ij}(\hat{q}) b_i(\hat{q})] \\ &= \frac{-i\hbar}{2} \left[ b^i \partial_i + g^{-\frac{1}{2}} \partial_i \left( g^{\frac{1}{2}} b^i \right) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

et

$$\begin{aligned}
[g^{ij}(\hat{q})\hat{p}_i\hat{p}_j]_W &= \frac{1}{4} [\hat{p}_i\hat{p}_j g^{ij}(\hat{q}) + 2\hat{p}_i g^{ij}(\hat{q})\hat{p}_j + g^{ij}(\hat{q})\hat{p}_i\hat{p}_j] \\
&= -\frac{\hbar^2}{4} \left( 4g^{ij} \left[ \partial_i\partial_j + \Gamma_i\partial_j + \frac{1}{2}(\partial_i\Gamma_j) + \frac{1}{4}\Gamma_i\Gamma_j \right] + \right. \\
&\quad \left. + 4(\partial_i g^{ij}) \left( \partial_j + \frac{1}{2}\Gamma_j \right) + (\partial_i\partial_j g^{ij}) \right) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$= -\hbar^2 \left( \Delta + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}g^{ij}\Gamma_{il}^k\Gamma_{jk}^l \right), \tag{4.13}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami défini par (4.1.4)

et

$$R = g^{ij}R_{ij}, \tag{4.14}$$

est la courbure scalaire.

le tenseur de Ricci  $R_{ij} = R_{ij,k}^k$  est défini comme

$$R_{ij} = \Gamma_{ik,j}^k - \Gamma_{ij,k}^k + \Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^k - \Gamma_{ij}^l\Gamma_{kl}^k, \tag{4.15}$$

avec les symboles de Christoffel sont définis par

$$\Gamma_{jl}^i = \frac{1}{2}g^{ik}(g_{jk,l} + g_{kl,j} - g_{jl,k}), \tag{4.16}$$

tel que

$$g_{jk,l} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}.$$

Nottons que

$$[b_i(\hat{q})b^i(\hat{q})]_W = b_i(\hat{q})b^i(\hat{q}) ; [V(\hat{q})]_W = V(\hat{q}), \tag{4.17}$$

Finalement l'hamiltonien (4.4) s'écrit suivant la prescription de l'ordre de Weyl ainsi :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [g^{ij}(\hat{q})\hat{p}_i\hat{p}_j]_W - \frac{1}{m} [g^{ij}(\hat{q})b_i(\hat{q})\hat{p}_j]_W + \frac{1}{2m} [b^i(\hat{q})b_i(\hat{q})]_W + [V(\hat{q})]_W, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\hbar b^i\partial_i + \frac{i\hbar}{2m}g^{-\frac{1}{2}}\partial_i\left(g^{\frac{1}{2}}b^i\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}b^ib_i + V(\hat{q}) - \frac{\hbar^2}{8m}\left(R + g^{ij}\Gamma_{il}^k\Gamma_{jk}^l\right), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$= \hat{H}_W + \Delta V_{Weyl}. \tag{4.20}$$

où  $\Delta V_{weyl}$  représente la correction quantique définie par

$$\begin{aligned}\Delta V_{weyl}(q) &= \frac{\hbar^2}{8m} \left( R + g^{ij} \Gamma_{ij}^k \Gamma_{jk}^l \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8m} \left( g^{ij} \Gamma_i \Gamma_j + 2 (g^{ij} \Gamma_i)_{,j} + g^{ij}_{,ij} \right).\end{aligned}\quad (4.21)$$

### Construction du propagateur :

Pour construire le propagateur dans l'espace courbe nous suivons la même procédure appliquée dans le deuxième chapitre, basée sur la formule de Trotter.

L'amplitude de transition pour une particule repérée par le point initial  $q_i$  à l'instant  $t_i$  et le point final  $q_f$  à l'instant  $t_f$  est donnée par

$$K(q_f, t_f, q_i, t_i) = \langle q_f | \exp \frac{-i}{\hbar} (t_f - t_i) \hat{H} | q_{j-1} \rangle, \quad (4.22)$$

en subdivisant la variable temporelle  $T$  en  $N$  intervalles infinitésimales

$$T = (t_f - t_i) = N\varepsilon,$$

puis en insérant l'identité pour l'espace courbe suivante

$$\int g^{\frac{1}{2}} d^n q |q\rangle \langle q| = 1, \quad (4.23)$$

nous aurons

$$K(q_f, t_f, q_i, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} [g(q_j)]^{\frac{1}{2}} dq_j \prod_{n=1}^N \langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} | q_{j-1} \rangle \quad (4.24)$$

avec

$$K(q_j, q_{j-1}; \varepsilon) = \langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} | q_{j-1} \rangle \quad (4.25)$$

où  $\hat{H}$  est l'hamiltonien relatif à l'ordre de weyl (4.4).

$$\begin{aligned}\langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}_W | q_{j-1} \rangle &= \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[ \frac{1}{2m} g^{ij}(\hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j - \frac{1}{m} g^{ij}(\hat{q}) b_i(\hat{q}) \hat{p}_j + \frac{1}{2m} b^i(\hat{q}) b_i(\hat{q}) \right. \\ &\quad \left. + V(\hat{q}) + \Delta V_W(\hat{q}) \right] | q_{j-1} \rangle,\end{aligned}\quad (4.26)$$

en utilisant les relations suivantes

$$\begin{aligned}\langle q_f, t | q_i, t \rangle &= [g(q_f) g(q_i)]^{-\frac{1}{4}} \delta(q_f - q_i) \\ \langle q, t | p, t \rangle &= \langle q | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} [f(p) g(p)]^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{i}{\hbar} (p \cdot q),\end{aligned}\quad (4.27)$$

d'où nous pouvons vérifier la formule suivante

$$\langle q_f, t | (p_i^r) | q_i, t \rangle = [g(p) g(p)]^{-\frac{1}{4}} \int (2\pi\hbar)^{-d} (p_i^r) \exp \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_f - q_i). \quad (4.28)$$

Dans le but d'écrire (4.10) sous forme d'un élément de matrice, nous utilisons le résultat (4.28), nous aurons

$$\langle q_f | (\widehat{q}^m \widehat{p}^r)_{Weyl} | q_i \rangle = [g(q_f) g(q_i)]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{d^n p^{(j)}}{(2\pi\hbar)^d} p^r \left( \frac{q_f + q_i}{2} \right)^m \exp \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_f - q_i),$$

ou plus généralement

$$\langle q_f | (F(\widehat{q}) \widehat{p}^r)_{Weyl} | q_i \rangle = [g(q_f) g(q_i)]^{-\frac{1}{4}} F(\widehat{q}) \int \frac{d^n p^{(j)}}{(2\pi\hbar)^d} p^r \exp \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_f - q_i). \quad (4.29)$$

Le propagateur (4.25) devient

$$\begin{aligned}K(q_j, q_{j-1}; \varepsilon) &= [g(q_j) g(q_{j-1})]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[ \frac{1}{2m} g^{ij}(\overline{q}_j) \widehat{p}_i \widehat{p}_j - \frac{1}{m} g^{ij}(\overline{q}_j) b_i(\widehat{q}) \widehat{p}_j + \frac{1}{2m} b^i(\overline{q}_j) b_i(\overline{q}_j) \right. \right. \\ &\left. \left. + V(\overline{q}_j) + \Delta V_W(\overline{q}_j) \right] \right\} \times \exp \left( \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_j - q_{j-1}) \right),\end{aligned}\quad (4.30)$$

c'est-à-dire

$$K(q_j, q_{j-1}; \varepsilon) = [g(q_j) g(q_{j-1})]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_j - q_{j-1}) - H_{eff}(\overline{q}_j, p) \right\}.$$

Pour simplifier les calculs considérons le cas  $b = 0$ . En substituant (4.30) dans (4.24), nous obtenons la **forme hamiltonienne** de l'intégrale de chemins suivant la prescription de " l'Ordre de Weyl " ainsi

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_i; T) &= [g(q_f) g(q_i)]^{\frac{-1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \left( \int dq^{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \left( \int \frac{dp^{(j)}}{(2\pi\hbar)^d} \right) \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \Delta q^{(j)} p^{(j)} - \varepsilon H(p^{(j)}, \bar{q}^{(j)}) \right] \right\}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

où

$$H(p^{(j)}, \bar{q}^{(j)}) = \frac{1}{2m} g^{ab}(\bar{q}^{(j)}) p_a^{(j)} p_b^{(j)} + V(\bar{q}^{(j)}) + \Delta V_W(\bar{q}^{(j)}), \tag{4.32}$$

est l'Hamiltonien effectif défini par rapport au mid-point.

En intégrant sur les variables  $p^{(j)}$ , se fait en utilisant le résultat de l'intégrale Gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp -p^2 x^2 \pm qx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp \left( \frac{q^2}{4p^2} \right), \tag{4.33}$$

nous aurons

$$\int dp \exp i(q.p) - \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det(g_{ab})} \exp \left( -\frac{1}{2} g_{ab} p^a p^b \right). \tag{4.34}$$

Finalement, nous obtenons l'intégrale de chemins, suivant la prescription de " l'Ordre de Weyl " dans l'espace des configurations par rapport au mid-point ( $MP$ ) ainsi

$$K(q_f, q_i; T) = [g(q_f) g(q_i)]^{\frac{-1}{4}} \int_{q(t^i)=q^i}^{q(t^f)=q^f} \sqrt{g} D_{MP} q(t) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t^i}^{t^f} L_{eff}(q, \dot{q}) dt \right], \tag{4.35}$$

ou sous forme discrète

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_i; T) &= [g(q_f) g(q_i)]^{\frac{-1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left( \int dq^{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \sqrt{g(\bar{q}^{(j)})} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon} g_{ab}(\bar{q}^{(j)}) \Delta q^{a,(j)} \Delta q^{b,(j)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \varepsilon V(\bar{q}^{(j)}) - \varepsilon \Delta V_W(\bar{q}^{(j)}) \right] \right\}, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

où  $q^{(j)} = q(t' + j\varepsilon)$ ,  $\bar{q}^{(j)} = \frac{1}{2} (q^{(j-1)} + q^{(j)})$ ,  $\Delta q^{(j)} = q^{(j)} - q^{(j-1)}$ ,  $\varepsilon = \frac{T}{N} = \frac{t'' - t'}{N}$  à la limite  $N \rightarrow \infty$ .

#### 4.2.2 La prescription de la " Forme Produit " :

A côté de la prescription de l'ordre de Weyl, il existe une deuxième prescription dite prescription de la " Forme Produit " [39]. L'adoption de cette dernière prescription est par fois très utile pour la

formulation des intégrales de chemins sur l'espace courbe à condition que la tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  soit réel et symétrique et de rang  $d$ . Elle simplifie remarquablement les calculs ( Voir Corollaire p. 85, éq (4.45) et (4.46) ).

Supposons que le tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  est réel et symétrique et de rang  $d$ , nous pouvons le représenter sous la forme

$$g_{\alpha\beta}(q) = h_{\alpha\gamma}(q) h_{\beta\gamma}(q), \quad (4.37)$$

où  $h_{\alpha\gamma}$  et  $h_{\beta\gamma}$  sont des matrices réelles symétriques  $d \times d$  et satisfont la relation  $h_{\alpha\beta}$  et  $h^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ .

La racine carrée du déterminant de  $g_{\alpha\beta}$ ,  $\sqrt{g}$  et les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\alpha}$  sont définis par

$$\sqrt{g} = \det h_{\alpha\beta} = h, \quad \Gamma_{\alpha} = \frac{h_{,\alpha}}{h}, \quad h_{,\alpha} = \frac{\partial h}{\partial q^{\alpha}}. \quad (4.38)$$

A l'aide des opérateurs

$$P_{\alpha} = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}} + \frac{h_{,\alpha}}{2h} \right),$$

l'hamiltonien s'écrit suivant la prescription de la forme produit comme

$$H = \frac{1}{2m} h^{\alpha\gamma}(q) p_{\alpha} p_{\beta} h^{\beta\gamma}(q) + V(q) + \Delta V_{PF}(q), \quad (4.39)$$

avec la correction quantique correspondante

$$\begin{aligned} \Delta V_{PF}(q) = & \frac{\hbar^2}{8m} \left[ 4h^{\alpha\gamma} h^{\beta\gamma}_{,\alpha\beta} + 2h^{\alpha\gamma} h^{\beta\gamma} \frac{h_{,\alpha\beta}}{h} \right. \\ & \left. + 2h^{\alpha\gamma} \left( h^{\beta\gamma}_{,\beta} \frac{h_{,\alpha}}{h} + h^{\beta\gamma}_{,\alpha} \frac{h_{,\beta}}{h} \right) - h^{\alpha\gamma} h^{\beta\gamma} \frac{h_{,\alpha} h_{,\beta}}{h^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

### Construction du propagateur :

De la même manière, nous parvenons à la construction des intégrales de chemins suivant la prescription de la " forme produit " come suit :

Considérons les propriétés de la position  $|q\rangle$  et les états propres de la quantité de mouvement  $|p\rangle$  ainsi

$$\begin{aligned} \langle q'' | q' \rangle &= (g' g'')^{-\frac{1}{4}} \delta(q'' - q'), \\ \langle q | p \rangle &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp \frac{i}{\hbar} p q. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
K(q_f, t_f, q_i, t_i) &= \langle q_i | \exp \frac{-i}{\hbar} T \hat{H} | q_f \rangle \\
&= \prod_{j=1}^{N-1} \left( \sqrt{g(\bar{q}^{(j)})} \int dq^{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} | q_{j-1} \rangle, \tag{4.42}
\end{aligned}$$

où  $\hat{H}$  est l'hamiltonien relatif à la prescription de la forme produit (4.39).

$$\begin{aligned}
\langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}_{FP} | q_{j-1} \rangle &= \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[ \frac{1}{2m} h^{\alpha\gamma}(q) p_\alpha p_\beta h^{\beta\gamma}(q) + V(q) + \Delta V_{FP}(q) \right] | q_{j-1} \rangle, \\
&= \frac{[g(q^{(j)}) g(q^{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi)^d} \int \exp \left( \frac{i}{\hbar} p (q_j - q_{j-1}) \right) dp \\
&\quad - \frac{i\varepsilon}{2m} \langle q_j | h^{\alpha\gamma}(q) p_\alpha p_\beta h^{\beta\gamma}(q) | q_{j-1} \rangle - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle q_j | V(q) + \Delta V_{FP}(q) | q_{j-1} \rangle,
\end{aligned}$$

pour la partie potentiel, l'élément de matrice correspondant est donné par

$$\langle q_j | V(q) + \Delta V_{FP}(q) | q_{j-1} \rangle = \frac{[g(q_j) g(q_{j-1})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi)^d} [V(q) + \Delta V_{FP}(q)] \int \exp \left( \frac{i}{\hbar} p (q_j - q_{j-1}) \right) dp,$$

ainsi, pour la partie cinétique, l'élément de matrice correspondant est donné par

$$\begin{aligned}
\langle q_j | h^{\alpha\gamma}(q) p_\alpha p_\beta h^{\beta\gamma}(q) | q_{j-1} \rangle &= h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)}) \int dp dq \langle q^{(j)} | p_\alpha p_\beta | p \rangle \langle p | q \rangle \langle q | q^{(j-1)} \rangle \\
&= h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)}) \frac{[g(q_j) g(q_{j-1})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi)^d} \\
&\quad \times \int \exp \left( \frac{i}{\hbar} p \Delta q^{(j)} \right) p_\alpha p_\beta dp,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle q_j | \exp \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}_{FP} | q_{j-1} \rangle &\simeq \frac{[g(q_j) g(q_{j-1})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi)^d} \int dp \\
&\quad \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \Delta q^{(j)} - \frac{i\varepsilon}{2m} h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)}) p_\alpha p_\beta \right. \\
&\quad \left. - \frac{i\varepsilon}{\hbar} (V(q^{(j)}) + \Delta V_{FP}(q^{(j)})) \right].
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Trotter nous arrivons à la **forme hamiltonienne** pour la prescription de

la " forme produit " ainsi

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_i; T) &= [g(q_f) g(q_i)]^{\frac{-1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \left( \int dq^{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \left( \int \frac{dp^{(j)}}{(2\pi\hbar)^d} \right) \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{J+1}^N \left[ p \Delta q^{(j)} - \frac{\varepsilon}{2m} h^{\alpha\gamma, (j)} h^{\beta\gamma, (j-1)} p_\alpha^{(j)} p_\beta^{(j)} \right. \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon \left( V(q^{(j)}) + \Delta V_{FP}(q^{(j)}) \right) \right] \right\}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

L'intégration sur les moments  $P$ , nous donne la **forme lagrangienne** pour la prescription de la " forme produit " ainsi

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \int \sqrt{g(q^{(j)})} dq^{(j)} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{J+1}^N \left[ \frac{\varepsilon}{2m} h^{\alpha\gamma, (j)} h^{\beta\gamma, (j-1)} \Delta q^{\alpha, (j)} \Delta q^{\beta, (j)} \right. \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon \left( V(q^{(j)}) + \Delta V_{PF}(q^{(j)}) \right) \right] \right\}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

**Corollaire :**

A  $d = 2$ , si la métrique  $g_{\alpha\beta}$  peut se transformer sous la forme suivante

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} = f^2 \delta_{\alpha\beta}, \tag{4.45}$$

où  $f$  est une fonction arbitraire, la correction du potentiel de la " forme produit " s'annule.

$$\Delta V_{PF}(q^{(j)}) = 0. \tag{4.46}$$



# Application

Formulation des intégrales de chemins  
pour le potentiel de Higgs sur une  
hyperboloïde  
à deux dimensions

### 4.3 Potentiel de Higgs et systèmes de coordonnées

Sur une hyperboloïde à deux dimensions, il y a neuf systèmes de coordonnées où la séparation de l'équation de Schrödinger et l'intégrale de chemins est possible.

Nous allons traiter le mouvement d'une particule sur une hyperboloïde à deux dimensions dans quatre systèmes de coordonnées, à savoir, le systèmes de coordonnées Pseudo-sphériques, le systèmes de coordonnées Equidistantes, le systèmes de coordonnées Hyperboliques et le systèmes de coordonnées Elliptiques, soumise à un potentiel super intégrable appelé " l'Oscillateur de Higgs " défini par :

$$V(u) = \frac{mR^2\omega^2}{2} \left( \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{u_1^2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} \right], \quad (4.47)$$

où  $(k_{1,2} \geq 0)$ .

Dans cette application, nous allons traiter via l'intégrale de chemins ce même potentiel dans ces mêmes systèmes de coordonnées où nous allons poursuivre la prescription de " l'ordre de Weyl " ( Section 4.2.1 ), pour les systèmes de coordonnées Pseudo-sphériques et Equidistantes et la prescription de la " Forme Produit " ( Section 4.2.2 ), pour les systèmes de coordonnées Hyperboliques et Elliptiques. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés et continus seront obtenus.

Chaque systèmes de coordonnées est caractérisés par un élément de ligne  $ds$ , une métrique  $g_{\nu\nu}$ , des opérateurs de la quantité de mouvement  $p_i$ , un hamiltonien  $H$  et la forme du potentiel séparé.

Le tableau suivant représente les systèmes de coordonnées, où la séparation des variables via l'intégrale de chemin pour l'oscillateur de Higgs (4.47) est possible. Les systèmes de coordonnées où nous avons pu faire la séparation des variables sont soulignés.

Potentiel de Higgs $V(u)$	Systèmes de coordonnées	Coordonnées	Forme du potentiel
$V(u) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{u_1^2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} \right]$	<u>Pseudo-sphériques</u>	$\begin{aligned} u_0 &= \cosh \tau \\ u_1 &= R \sinh \tau \cos \varphi \\ u_2 &= R \sinh \tau \sin \varphi \\ (\tau > 0, \varphi \in [0, 2\pi]) \end{aligned}$	$V(u) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \tanh^2 \tau + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( \frac{1}{\sinh^2 \tau} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \varphi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \varphi} \right] \right)$
	<u>Equidistantes</u>	$\begin{aligned} u_0 &= R \cosh a \cosh b \\ u_1 &= R \cosh a \sinh b \\ u_2 &= R \sinh a \\ (a, b \in \mathfrak{R}) \end{aligned}$	$V(u) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 a \cosh^2 b} \right) + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 a \sinh^2 b} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 a} \right]$
	<u>Hyperboliques</u>	$\begin{aligned} u_0 &= -Rcn\mu cn\nu \\ u_1 &= iRsn\mu dn\nu \\ u_2 &= iRdn\mu sn\nu \\ \mu &\in (iK', iK'+2K) \\ \nu &\in [0, 4K') \end{aligned}$	$V(u) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \left( 1 - \frac{1}{cn^2 \mu cn^2 \nu} \right) + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{sn^2 \mu dn^2 \nu} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \mu sn^2 \nu} \right]$
	<u>Elliptiques</u>	$\begin{aligned} u_0 &= Rsn\alpha dn\beta \\ u_1 &= iRcn\alpha cn\beta \\ u_2 &= iRdn\alpha dn\alpha \\ \alpha &\in (iK', iK'+2K) \\ \beta &\in [0, 4K') \end{aligned}$	$V(u) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \left( 1 - \frac{1}{sn^2 \alpha dn^2 \beta} \right) + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{cn^2 \alpha cn^2 \beta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \alpha sn^2 \beta} \right]$

Potentiel de Higgs et systèmes de coordonnées.

### 4.3.1 système de coordonnées Pseudo-sphériques :

$$u_0 = R \cosh \tau, \quad u_1 = R \sinh \tau \cos \varphi, \quad u_2 = R \sinh \tau \sin \varphi, \quad (4.48)$$

( $\tau > 0, \varphi \in [0, 2\pi]$ ).

- **L'élément de ligne**

$$ds^2 = R^2 (d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2). \quad (4.49)$$

- **La métrique**

$$g_{\tau\varphi} = R^2 \text{diag} (1, \sinh^2 \tau), \quad (4.50)$$

donc

$$g = \sqrt{\det g_{\tau\varphi}} = R^2 \sinh \tau. \quad (4.51)$$

- **Les opérateurs de la quantité de mouvement** (*voir Appendice C*)

$$p_\tau = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \coth \tau \right), \quad p_\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.52)$$

- **L'Hamiltonien** (*voir Appendice C*)

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\ &= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( p_\tau^2 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} p_\varphi^2 \right) + \frac{1}{8mR^2} \left( 1 - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

avec

$$\Delta V = \frac{1}{8mR^2} \left( 1 - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right), \quad (4.54)$$

où c'est le même résultat si nous utilisons l'équation (4.21).

- **La Forme du potentiel**

Le potentiel séparé dans les coordonnées pseudo sphériques doit avoir la forme suivante

$$V(\tau, \varphi) = V_1(\tau) + \frac{V_2(\varphi)}{\sinh^2 \tau}. \quad (4.55)$$

### 4.3.2 système de coordonnées Equidistantes :

$$u_0 = R \cosh a \cosh b, \quad u_1 = R \cosh a \sinh b, \quad u_2 = R \sinh a. \quad (4.56)$$

$(a, b \in \mathbb{R})$ .

- **L'élément de ligne**

$$ds^2 = R^2 (da^2 + \cosh^2 a db^2). \quad (4.57)$$

- **la métrique**

$$g_{ab} = R^2 \text{diag} (1, \cosh^2 a), \quad (4.58)$$

donc

$$g = \sqrt{\det g_{ab}} = R^2 \cosh a. \quad (4.59)$$

- **Les opérateurs de la quantité de mouvement**

$$p_a = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{2} \tanh a \right), p_b = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial b}. \quad (4.60)$$

- **L'hamiltonien**

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \tanh a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\cosh^2 a} \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right), \\ &= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( p_a^2 + \frac{1}{\cosh^2 a} p_b^2 \right) + \frac{1}{8mR^2} \left( 1 + \frac{1}{\cosh^2 a} \right), \end{aligned} \quad (4.61)$$

avec

$$\Delta V = \frac{1}{8mR^2} \left( 1 + \frac{1}{\cosh^2 a} \right), \quad (4.62)$$

- **La Forme du potentiel**

Le potentiel séparé dans les coordonnées equidistantes doit avoir la forme suivante

$$V(a, b) = V_1(a) + \frac{V_2(b)}{\cosh^2 a}. \quad (4.63)$$

### 4.3.3 système de coordonnées Hyperboliques :

$$u_0 = -R \operatorname{cn} \mu \operatorname{cn} \nu, \quad u_1 = iR \operatorname{sn} \mu \operatorname{dn} \nu, \quad u_2 = iR \operatorname{dn} \mu \operatorname{sn} \nu,$$

$(\mu \in (iK', K' + 2K), \nu \in [0, 4K'])$ .

- **L'élément de ligne**

$$ds^2 = R^2 (k^2 \operatorname{cn}^2 \mu + k'^2 \operatorname{cn}^2 \nu) (d\mu^2 + d\nu^2). \quad (4.64)$$

- **La métrique**

$$g_{\mu\nu} = R^2 \text{diag} (k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu, k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu), \quad (4.65)$$

donc

$$g = \sqrt{\det g_{\mu\nu}} = R^2 (k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu). \quad (4.66)$$

- **Les opérateurs de la quantité de mouvement**

$$p_\mu = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{k^2 sn \mu cn \mu dn \mu}{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu} \right), \quad (4.67)$$

$$p_\nu = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{k^2 sn \nu cn \nu dn \nu}{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu} \right). \quad (4.68)$$

- **L'Hamiltonien**

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{1}{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right), \\ &= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu}} (p_\mu^2 + p_\nu^2) \frac{1}{\sqrt{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu}}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

- **La Forme du potentiel**

Le potentiel séparé dans les coordonnées hyperboliques doit avoir la forme suivante

$$V(\mu, \nu) = \frac{V_1(\mu) + V_2(\nu)}{k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu}. \quad (4.70)$$

**4.3.4 système de coordonnées Elliptiques :**

$$u_0 = R sn \alpha dn \beta, \quad u_1 = iR cn \alpha cn \beta, \quad u_2 = iR dn \alpha sn \beta, \quad (4.71)$$

( $\alpha \in (iK', K' + 2K)$  ,  $\beta \in [0, 4K')$ ).

- **L'élément de ligne**

$$ds^2 = R^2 (k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2). \quad (4.72)$$

- **La métrique**

$$g_{\alpha\beta} = R^2 \text{diag} (k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta, k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta), \quad (4.73)$$

donc

$$g = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} = R^2 (k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta). \quad (4.74)$$

#### - Les opérateurs de la quantité de mouvement

$$p_\alpha = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{k^2 sn \alpha cn \alpha dn \alpha}{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta} \right), \quad (4.75)$$

$$p_\beta = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{k^2 sn \beta cn \beta dn \beta}{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta} \right). \quad (4.76)$$

#### - L'Hamiltonien

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{1}{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right), \\ &= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta}} (p_\alpha^2 + p_\beta^2) \frac{1}{\sqrt{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

#### - La Forme du potentiel

Le potentiel séparé dans les coordonnées elliptiques doit avoir la forme suivante

$$V(\mu, \nu) = \frac{V_1(\alpha) + V_2(\beta)}{k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta} \quad (4.78)$$

## 4.4 Propagateur en coordonnées Pseudo-sphériques et Equidistantes :

En suivant la prescription de l'ordre de Weyl, le propagateur relatif à une particule soumise au potentiel de Higgs en coordonnées pseudo-sphériques et équidistantes est donnée comme suit :

#### I- En Coordonnées Pseudo-sphériques :

Le propagateur (4.36) en coordonnées pseudo-sphériques à la forme suivante :

$$\begin{aligned} K^{(V)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{mR^2}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} \sinh \tilde{\tau} d\tau_j d\varphi_j \\ &\times \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [A(j, j-1)], \end{aligned} \quad (4.79)$$

avec

$$A(j, j-1) = \left( \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left( (\Delta\tau_j)^2 + \sinh^2 \tilde{\tau}_j (\Delta\varphi_j)^2 \right) - \frac{mR^2\omega^2}{2} \varepsilon \tanh^2 \tilde{\tau}_j \right) - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2mR^2} \left[ \frac{1}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right], \quad (4.80)$$

et

$$[g(q'')g(q')]^{-\frac{1}{4}} = (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.81)$$

donc

$$K^{(V)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) = (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{mR^2}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^N \sinh \tilde{\tau}_j \times \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j d\varphi_j \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [A(j, j-1)], \quad (4.82)$$

avec

$$A(j, j-1) = \left( \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left[ (\Delta\tau_j)^2 + \sinh^2 \tilde{\tau}_j (\Delta\varphi_j)^2 \right] - \frac{mR^2\omega^2}{2} \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) - \varepsilon \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} \right) \right) - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2mR^2} \left[ \frac{1}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (4.83)$$

comme nous pouvons l'écrire aussi tel que

$$A(j, j-1) = \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left( (\Delta\tau_j)^2 + \sinh^2 \tilde{\tau}_j (\Delta\varphi_j)^2 \right) - \varepsilon \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} \right) - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2mR^2} \left[ \frac{1}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] \quad (4.84)$$

avec

$$\nu^2 = \frac{m^2\omega^2 R^4}{\hbar^2} + \frac{1}{4}.$$

### - Fonction de Green :

Le propagateur relatif à l'action (4.84) semble loin de l'évaluation exacte. Nous remarquons que les variables  $\tau$  et  $\varphi$  ne sont pas séparées, c'est pourquoi nous nous sommes efforcés d'introduire l'énergie



$E$  au moyen de la fonction de Green, transformée de Fourier du propagateur

$$G(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) = \int_0^\infty dT \exp\left(\frac{i}{\hbar} ET\right) K^{(V)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T). \quad (4.85)$$

- Transformation temporelle ( $t \rightarrow s$ ) :

Ensuite, nous utilisons la procédure de reparamétrisation des parcours [4], en effectuant la transformation temporelle  $t \rightarrow s$  définie par

$$\frac{dt}{ds} = R^2 \sinh^2 \tau \quad ie \quad T = \int_0^S R^2 \sinh^2 \tau(s) ds,$$

ou sous forme discrète

$$\varepsilon = \varepsilon_s R^2 \sinh \tau_j \sinh \tau_{j-1}, \quad (4.86)$$

où  $\varepsilon_s = s_j - s_{j-1}$ .

Le développement du produit  $\sinh \tau_j \sinh \tau_{j-1}$  au tour du mid-point, nous donne

$$\sinh \tau_j \sinh \tau_{j-1} = \left(1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} + \dots\right). \quad (4.87)$$

Si nous insérons dans (4.85), la contrainte

$$\int_0^\infty ds \delta\left(T - \int_0^S R^2 \sinh^2 \tau(s) ds\right) = 1, \quad (4.88)$$

associée à la transformation (4.86), la fonction de Green sera de la forme

$$\begin{aligned} G(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) &= \int_0^\infty dS \exp\left(\frac{i}{\hbar} E \int_0^S R^2 \sinh^2 \tau(s) ds\right) \times \\ &\quad \times K^{(V)}\left(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; \int_0^S R^2 \sinh^2 \tau(s) ds\right), \\ &= \int_0^\infty dSP_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; S). \end{aligned} \quad (4.89)$$

En utilisant le développement de Taylor  $\left(\frac{1}{1+x}\right)$  et en ne considérant que les termes d'ordre 1 en  $\varepsilon$  pour le mesure et d'ordre 2 en  $\varepsilon$  pour l'action, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon_s}\right)^N \int \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sinh \tilde{\tau}_j} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right)^{N-1} \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j d\varphi_j \exp\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [B(j, j-1)], \end{aligned} \quad (4.90)$$

$P_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T)$  représente le nouveau noyau avec la nouvelle action  $B(j, j-1)$  définie par

$$\begin{aligned}
B(j, j-1) &= \frac{m}{2\varepsilon_s} \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2 \right) + \\
&+ \varepsilon_s R^2 \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} \right) \right] \\
&- \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{2m} \left[ \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \frac{1}{4} \right) - \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right].
\end{aligned}$$

- Procédure de M.C Laughlin Schulman :

la procédure de Mc.Laughlin et Schulman [26], consiste à remplacer les termes d'ordre  $\varepsilon$  dans la mesure et d'ordre  $\varepsilon^2$  dans l'action, à savoir,  $(\Delta\tau_j)^2$ ,  $(\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2$  et  $(\Delta\tau_j)^4$  par une correction quantique  $\theta(\hbar^2)$ . (voir Appendice C).

$$(\Delta\tau_j)^2 \rightarrow \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \right), (\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \rightarrow \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \right)^2, (\Delta\tau_j)^4 \rightarrow 3 \sinh^4 \tilde{\tau}_j \left( \frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \right)^2, \quad (4.91)$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^N \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\varepsilon_s} \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \times \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right\} \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j d\varphi_j \\ = & \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2\varepsilon_s} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2 \right) - \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{4m} \right\} \right] \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j d\varphi_j. \end{aligned}$$

$\left( \frac{-\hbar^2 \varepsilon}{4m} \right)$  constitue une première correction quantique en  $\hbar^2$  (voir Appendice C.4). La séparation des variables  $\tau$  et  $\varphi$  se fait, dès lors aisément et nous parvenons à la décomposition suivante

$$P_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; S) = P_\tau(\tau'', \tau'; S) P_\varphi(\varphi'', \varphi'; S), \quad (4.92)$$

où

$$\begin{aligned} P_\varphi(\varphi'', \varphi'; S) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon_s} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\varphi_j \\ & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon_s} (\Delta\varphi_j)^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{2m} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \tilde{\varphi}} \right) \right] \right\}, \quad (4.93) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P_\tau(\tau'', \tau'; S) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \frac{m}{2\pi \hbar i \varepsilon_s} \right)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\sinh \tilde{\tau}_j} \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j \\
&\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon_s} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) - \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{8m} \right] \right. \\
&+ \varepsilon_s R^2 \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2 \omega^2}{2} \right) \right] \\
&\left. + \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{2m} \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right\}. \tag{4.94}
\end{aligned}$$

A ce niveau, nous remarquons que les propagateurs  $P_\varphi$  et  $P_\tau$  correspondent respectivement aux potentiels de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller Modifié avec une masse variable.

Dans le but de rendre la masse constante, effectuons la transformation temporelle suivante

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sinh^2 \tau(t)}, \tag{4.95}$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon}{\sinh \tau_j \sinh \tau_{j-1}} = \frac{\varepsilon}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} + \dots \right), \tag{4.96}$$

Pour celà, utilisons les développements de Taylor  $\left( \frac{1}{1+x} \right)$  et  $(1+x)^n$ .

Nous pouvons donc, exprimer (4.94) en terme de l'ancien paramètre  $\varepsilon$

$$\begin{aligned}
P_\tau(\tau'', \tau'; S) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \frac{m}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{8 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j \\
&\exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon} \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) (\Delta\tau_j)^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{8m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right] \right. \\
&+ \varepsilon R^2 \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \right] \\
&\left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left[ - \left( \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] \right\}. \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Vu la nature infinitésimale des variables  $(\Delta\tau_j)^2$  et  $(\Delta\tau_j)^4$ , la procédure de McLaughlin et Schulman (*voir Appendice C.5*);

$$(\Delta\tau_j)^2 \rightarrow \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right), \quad (\Delta\tau_j)^4 \rightarrow 3 \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right)^2, \tag{4.98}$$

les rend équivalentes à une correction quantique  $\left(\frac{\hbar^2 \varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right)$ .

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{8 \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right) (\Delta\tau_j)^2 \right\} \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j \\ &= \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 + \frac{\hbar^2 \varepsilon}{8m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right] \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j, \end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned} P_\tau(\tau'', \tau'; S) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \frac{m}{2\pi \hbar i \varepsilon_s} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 + \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} + \frac{\hbar^2 \varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon R^2 \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

soit encore, en notation continue

$$\begin{aligned} P_\tau(\tau'', \tau'; S) &= (R^2 \sinh \tau'' \sinh \tau')^{-\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} ET \right) \int D\tau(t) \exp \frac{i}{\hbar} T \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[ \frac{m}{2} \dot{\tau}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{-\frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

- Retour à la fonction de Green :

Nous allons insérer la contrainte suivante

$$\int_0^\infty \delta \left( S - \int_0^T \frac{dt}{\sinh^2 \tau(t)} \right) dT = 1, \quad (4.101)$$

donnant lieu à

$$G(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) = \int_0^\infty P_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) dT. \quad (4.102)$$

## II- En Coordonnées Equidistantes :

Maintenant, nous allons discuter l'intégrale de chemin associée à ce potentiel super intégrable en coordonnées équidistantes. En construisant l'intégrale de chemin dans un espace courbe, nous suivent la même représentation adoptée dans le paragraphe précédent. Nous obtenons ainsi

$$K^{(V)}(a'', a', b'', b'; T) = (R^2 \cosh a'' \cosh a')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{mR^2}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^N \cosh \tilde{a} da_j db_j \\ \times \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N [A(j, j-1)], \quad (4.103)$$

où

$$A(j, j-1) = \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left[ (\Delta a_j)^2 + \cosh^2 \tilde{a} (\Delta b_j)^2 \right] - \frac{mR^2 \omega^2}{2\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 \tilde{a}_j \cosh^2 \tilde{b}_j} \right) \\ - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mR^2} \left[ \frac{1}{\cosh^2 \tilde{a}} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{b}_j} + \frac{1}{4} \right) + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{a}_j} + \frac{1}{4} \right]. \\ = \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left( (\Delta a_j)^2 + \cosh^2 \tilde{a} (\Delta b_j)^2 \right) - \varepsilon \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \\ - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mR^2} \left[ \frac{1}{\cosh^2 \tilde{a}} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{b}_j} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tilde{b}_j} + \frac{1}{4} \right) + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{a}_j} \right].$$

Pour calculer le propagateur (4.103), nous faisons appel à l'énergie au moyen de la fonction de Green et nous effectuons une première transformation temporelle telle que

$$dt = R^2 \cosh^2 a(s) ds, \quad (4.104)$$

ou sous forme discrète

$$\varepsilon = \varepsilon_s R^2 \cosh a_j \cosh a_{j-1},$$

au tour du mid-point le produit  $\cosh a_j \cosh a_{j-1}$  s'écrit

$$\cosh a_j \cosh a_{j-1} = \left( 1 - \frac{(\Delta a_j)^2}{4 \cosh^2 \tilde{a}} + \dots \right), \quad (4.105)$$

avec la contrainte

$$\int_0^\infty ds \delta \left( T - \int_0^S \cosh^2 a(s) ds \right) = 1, \quad (4.106)$$

nous parvenons par les mêmes étapes suivies dans la section ( I ), à la décomposition des variables  $a_j$

et  $b_j$  ainsi

$$P_b(b'', b'; S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon_s} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} db_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\varepsilon_s} (\Delta b_j)^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{2mR^2} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 b} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 b} \right) \right] \right\}, \quad (4.107)$$

et

$$P_a(a'', a'; S) = (R^2 \cosh a'' \cosh a')^{-\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon_s} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\cosh \tilde{a}_j} da_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon_s} \left( \frac{(\Delta a_j)^2}{\cosh^2 \tilde{a}} - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{8m} \right) + \varepsilon_s R^2 \cosh^2 \tilde{a} \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \right] - \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{2m} \cosh^2 \tilde{a} \left( -\frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tilde{a}} \right) \right]. \quad (4.108)$$

Pour calculer le propagateur  $P_a$ , effectuons une deuxième transformation temporelle telle que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cosh^2 a(t)}, \quad (4.109)$$

ou sous forme discrète

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon}{\cosh a_j \cosh a_{j-1}} = \frac{\varepsilon}{\cosh^2 \tilde{a}_j} \left( 1 + \frac{(\Delta a_j)^2}{4 \cosh^2 \tilde{a}_j} + \dots \right). \quad (4.110)$$

Le propagateur  $P_a$  sera donc, après un simple calcul sous la forme suivante

$$P_a(a'', a'; S) = (R^2 \cosh a'' \cosh a')^{\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} da_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta a_j)^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left( \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 a_j} - \frac{-\frac{1}{4}}{\cosh^2 a_j} \right) \right] + \varepsilon R^2 \left[ E - \left( \frac{\hbar^2}{8m} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right) \right]. \quad (4.111)$$

Pour revenir à la fonction de Green, nous insérons la contrainte suivante

$$\int_0^\infty \delta \left( S - \int_0^T \frac{dt}{\sinh^2 \tau(t)} \right) dT = 1,$$

donnant lieu

$$G(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) = \int_0^\infty P_E(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) dT$$

#### 4.4.1 Spectre d'énergie et fonctions d'ondes :

##### I- Coordonnées Pseudo-sphériques :

Nous remarquons que le propagateur relatif au potentiel de Higgs en coordonnées pseudo-sphérique admet les solutions associées aux potentiels de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller Modifié  $[\tau]0, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , (voir *Appendice C.3*), dont : ( $N = m+n \in \mathbb{N}$  est le nombre quantique principal,  $\lambda = 0$  et  $\nu^2 = \frac{m^2 \omega^2 R^4}{2\hbar^2} + \frac{1}{4}$ ).

$$K(u'', u'; T) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-iE_N T/\hbar} \Psi_{nm}(\tau'', \varphi''; R) \Psi_{nm}(\tau', \varphi'; R) + \int dp e^{-iET/\hbar} \Psi_{pm}(\tau'', \varphi''; R) \Psi_{pm}(\tau', \varphi'; R) \right\}, \quad (4.4.1)$$

la fonction d'onde discrète prend la forme suivante

$$\Psi_{nm}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{-\frac{1}{2}} S_n^{(\lambda, \nu)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi), \quad (4.4.2)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_m^{(\pm k_1, \pm k_2)}(\varphi) &= \left[ 2(2m \pm k_1 \pm k_2 + 1) \frac{m! \Gamma(m \pm k_1 \pm k_2 + 1)}{\Gamma(1 + m \pm k_1) \Gamma(1 + m \pm k_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times (\sin \varphi)^{\pm k_2 + 1/2} (\cos \varphi)^{\pm k_1 + 1/2} P_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\cos 2\varphi). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

et

$$\begin{aligned} S_n^{(\lambda, \nu)}(\tau; R) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left[ \frac{2(\nu - 2n - 1) \Gamma(n+1) \Gamma(\nu - n)}{\Gamma(\nu - n) n!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times (\sinh \tau)^{1/2} (\cos \tau)^{n - \nu + 1/2} {}_2F_1(-n, \nu - n; 1; \tanh^2 \tau). \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Le spectre d'énergie discret est donné par

$$\begin{aligned} E_N &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ (2N \pm k_1 \pm k_2 - \nu + 2)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{m}{2} \omega^2 R^2, \\ N_{\max} &= \left\lfloor \frac{1}{2} (\nu - \lambda - 1) \right\rfloor. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$



La fonction d'onde continue et le spectre d'énergie correspondant sont donnés par

$$\Psi_{pm}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{\frac{-1}{2}} S_p^{(\lambda, \nu)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_1, \pm k_2)}(\varphi), \quad (4.4.6)$$

où

$$\begin{aligned} S_p^{(\lambda, \nu)}(\tau; R) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{\sqrt{p \sinh \pi p}}{2\pi^2 R^2} \Gamma\left(\frac{\nu + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\nu + 1 - ip}{2}\right) \\ &\times (\tanh \tau)^{1/2} (\cos \tau)^{ip} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{\nu + 1 - ip}{2}, \frac{-\nu + 1 - ip}{2}; 1; \tanh^2 \tau\right) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

et  $\phi_m^{(\pm k_1, k_2)}(\varphi)$  est la même que (4.4.3).

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{m}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.4.8)$$

## II- Coordonnées Equidistantes :

Nous obtenons en utilisant la solution de l'intégrale de chemins associée au potentiel de Pöschl-Teller Modifié (*Voir Appendice C.4.2*), avec le nombre quantique principal  $N = n + m$

$$K(u'', u'; T) = \sum_{m=0}^{N_{\max}^{(m)}} \left\{ \sum_{n=0}^{N_{\max}^{(n)}} e^{-iE_N T/\hbar} \Psi_{nm}(a'', b''; R) \Psi_{nm}(a', b'; R) + \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{pm}(a'', b''; R) \Psi_{pm}^*(a', b'; R) \right\} \quad (4.4.9)$$

où  $N_{\max}^{(1)} = [\frac{1}{2}(\nu + k_1 - 1)]$ ,  $N_{\max}^{(2)} = [\frac{1}{2}(\lambda - k_2 - 1)]$  sont les nombres quantiques des fonctions d'ondes en  $b$  et en  $a$  respectivement.

La fonction d'onde discrète a la forme suivante

$$\Psi_{mn}(a, b; R) = (\cosh \tau)^{-\frac{1}{2}} S_n^{(\pm k_2, \lambda)}(a; R) \Psi_m^{(\pm k_1, \nu)}(b), \quad (4.4.10)$$

$$S_n^{(\pm k_2, \lambda)}(a; R) = \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \left[ \frac{2(\mp k_2 - 2n - 1) \Gamma(n + 1 \pm k_2) \Gamma(-n)}{\Gamma(\mp k_2 - n) n!} \right]^{\frac{1}{2}} \times (\sinh a)^{\pm k_2 + 1/2} (\cosh a)^{n + 1/2} {}_2F_1(-n, -n; 1 \pm k_2; \tanh^2 a), \quad (4.4.11)$$

$$\Psi_m^{(\pm k_1, \nu)}(b) = \frac{1}{\Gamma(1 + k_1)} \left[ \frac{2(\nu \mp k_1 - 2m - 1) \Gamma(m + 1 \pm k_1) \Gamma(\nu - m)}{\Gamma(\nu \mp k_1 - m) m!} \right]^{\frac{1}{2}} \times (\sinh b)^{\pm k_1 + 1/2} (\cosh b)^{m - \nu + 1/2} {}_2F_1(-m, \nu - m; 1 \pm k_1; \tanh^2 b). \quad (4.4.12)$$

Le spectre d'énergie discret a la même forme que dans le cas du système de coordonnées pseudo sphériques

$$E_N = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[ (2N \pm k_1 \pm k_2 - \nu + 2)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{m}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.4.13)$$

La fonction d'onde continue est donné par

$$\Psi_{pk}(a, b; R) = (\cosh a)^{-\frac{1}{2}} S_p^{(\pm k_2, \lambda)}(a; R) \Psi_k^{(\pm k_1, \nu)}(b), \quad (4.4.14)$$

où

$$\begin{aligned}
S_p^{(\pm k_2, \lambda)}(a; R) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \frac{\sqrt{p \sinh \pi p}}{2\pi^2 R^2} (\tanh a)^{\pm k_2 + 1/2} (\cosh a)^{ip} \\
&\times \Gamma\left(\frac{\mp k_2 + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\pm k_2 + 1 - ip}{2}\right) \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{\nu + 1 - ip}{2}, \frac{-\nu + 1 - ip}{2}; 1 \pm k_2; \tanh^2 a\right), \tag{4.4.15}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{(\pm k_1, \nu)}(b) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_1)} \frac{\sqrt{k \sinh \pi k}}{2\pi^2 R^2} (\tanh b)^{\pm k_1 + 1/2} (\cosh b)^{ik} \\
&\times \Gamma\left(\frac{\nu \mp k_1 + 1 - ik}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\pm k_1 - \nu + 1 - ik}{2}\right) \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{\nu \pm k_1 + 1 - ik}{2}, \frac{\pm k_1 - \nu + 1 - ik}{2}; 1 \pm k_1; \tanh^2 b\right), \tag{4.4.16}
\end{aligned}$$

Le spectre d'énergie a la même forme que pour le système de coordonnées pseudo sphériques ainsi

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{m}{2} \omega^2 R^2. \tag{4.4.17}$$

## 4.5 Propagateur en coordonnées hyperboliques et elliptiques :

Pour ces deux systèmes, le propagateur de la particule soumise au même potentiel est donnée suivant la prescription de la forme produit ainsi que

### I- En Coordonnées Hyperboliques :

Le propagateur en coordonnées hyperboliques prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
 K^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; T) &= \frac{1}{R^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{mR^2}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) d\mu_j d\nu_j \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{mR^2}{2\varepsilon} \left[ (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) \left( (\Delta\mu_j)^2 + (\Delta\nu_j)^2 \right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \varepsilon \frac{mR^2 \omega^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{cn^2 \mu_j cn^2 \nu_j} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mR^2} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{sn^2 \mu_j dn^2 \nu_j} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \mu_j sn^2 \nu_j} \right) \right] \right\}. \tag{4.112}
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que la métrique  $g_{\mu\nu}$ , est symétrique et de rang  $d = 2$ , donc, nous pouvons appliquer la définition de la forme produit ainsi

$$g_{\mu\nu}(q) = h_{\mu\gamma}(q) h_{\nu\gamma}(q) \implies h_{\mu\nu}(q) = \sqrt{g_{\mu\nu}(q)}, \tag{4.113}$$

et

$$\sqrt{g} = \det h_{\mu\nu}, \tag{4.114}$$

donc

$$h_{\mu\nu}(q) = R \text{diag} \left( \sqrt{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}, \sqrt{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j} \right), \tag{4.115}$$

d'après (4.44), nous aurons pour la forme du propagateur en coordonnées hyperboliques la forme

suivante

$$\begin{aligned}
K^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; T) &= \frac{1}{R^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{mR^2}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) d\mu_j d\nu_j \\
&\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{mR}{2\varepsilon} \times \right. \right. \\
&\left. \left[ (\Delta\mu_j) \sqrt{(k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) (k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1})} (\Delta\mu_j) \right. \right. \\
&\left. \left. + (\Delta\nu_j) \sqrt{(k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) (k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1})} (\Delta\nu_j) \right] \right. \\
&\left. - \varepsilon \frac{mR^2 \omega^2}{2} - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mR^2} \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{sn^2 \mu_j dn^2 \nu_j} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \mu_j sn^2 \nu_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{cn^2 \mu_j cn^2 \nu_j} \right) \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon \Delta V_{PF}(q_j) \right] \right\}. \tag{4.116}
\end{aligned}$$

où

$$\lambda^2 = \frac{m^2 R^4 \omega^2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}.$$

Nous remarquons que les variables  $\mu$  et  $\nu$  ne sont pas séparées, c'est pour quoi nous allons appliquer la relation

$$K(x'', x'; T) = \frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp\left(-\frac{i}{\hbar} ET\right) G(x'', x'; E),$$

où la fonction de Green  $G(x'', x'; E)$  peut se réécrire sous une autre forme [40]

$$\begin{aligned}
G(x'', x'; E) &= f(x'') \int_0^\infty \langle x'' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} s'' f(x) (H - E)\right] | x' \rangle ds'', \\
&= f(x') \int_0^\infty \langle x'' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} s'' (H - E) f(x)\right] | x' \rangle ds'', \\
G(x'', x'; E) &= \sqrt{f(x') f(x'')} \\
&\times \int_0^\infty \langle x'' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} s'' \sqrt{f(x)} (H - E) \sqrt{f(x)}\right] | x' \rangle ds''. \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Si nous considérons que l'hamiltonien est défini par la prescription (4.39) de la forme produit,

alors la relation (4.117), devient d'après les relations (4.41)

$$\begin{aligned}
G(x'', x'; E) &= \sqrt{f(x') f(x'')} \int_0^\infty ds'' \prod_{j=1}^{N-1} \int dq^{(j)} \\
&\times \prod_{j=1}^N \langle q^{(j)} | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \varepsilon \sqrt{f(x)} (H_{FP} - E) \sqrt{f(x)} \right] | q^{(j-1)} \rangle \\
&= \frac{\sqrt{f(x') f(x'')}}{(g' g'')^{\frac{1}{4}}} \int_0^\infty ds'' \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int dq^{(j)} \prod_{j=1}^N \left( \int \frac{dp^{(j)}}{(2\pi\hbar)^d} \right) \\
&\times \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left( p \Delta q^{(j)} - \varepsilon \sqrt{f(q^{(j)}) f(q^{(j-1)})} \left[ \frac{h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)})}{2m} p_\alpha p_\beta \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + V(q^{(j)}) + \Delta V_{PF}(q^{(j)}) - E \right] \right) \right\}, \tag{4.118}
\end{aligned}$$

l'intégration sur la variable  $p$ , nous donne la forme de la fonction de Green dans l'espace des configuration comme suit

$$\begin{aligned}
G(x'', x'; E) &= (f' f'')^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{2})} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s} \right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \int \sqrt{\frac{g(q^{(j)})}{f^d(q^{(j)})}} dq^{(j)} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2\varepsilon_s} \frac{h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)})}{\sqrt{f(q^{(j)}) f(q^{(j-1)})}} \Delta q^{\alpha,(j)} \Delta q^{\beta,(j)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\varepsilon_s f(q^{(j)}) V(q^{(j)}) + \Delta V_{PF} q^{(j)} - E \right] \right\}, \tag{4.119}
\end{aligned}$$

$$= (f' f'')^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{2})} \int_0^\infty \tilde{K}(q'', q'; s'') ds'', \tag{4.120}$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(q'', q'; s'') &= \int_{q(s')=q'}^{q(s'')=q''} \sqrt{\tilde{g}} D_{FP} q(s) \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[ \frac{m}{2} \tilde{h}_{\alpha\gamma} \tilde{h}_{\beta\gamma} q^\alpha q^\beta - f[V(q) + \Delta V_{PF}(q) - E] \right] ds \right\}. \tag{4.121}
\end{aligned}$$

est la forme produit canonique, où nous avons noter

$$\tilde{h}_{\alpha\gamma} = \frac{h_{\alpha\gamma}}{\sqrt{f}}, \sqrt{\tilde{g}} = \det(\tilde{h}_{\alpha\gamma}). \tag{4.122}$$

Remarque

Pour  $d = 2$ , le préfacteur

$$(f' f'')^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{2})} = 1.$$

Revenant au systèmes de coordonnées hyperboliques à  $d = 2$ , l'équation (4.119) s'écrit

$$\begin{aligned} G^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; E) &= (g'' g')^{\frac{-1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{Nd}{2}} \prod_{j=1}^N \int \sqrt{\frac{g(q^{(j)})}{f^d(q^{(j)})}} dq^{(j)} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m}{2\varepsilon} \frac{h^{\alpha\gamma}(q^{(j)}) h^{\beta\gamma}(q^{(j-1)})}{\sqrt{f(q^{(j)}) f(q^{(j-1)})}} \Delta q^{\alpha,(j)} \Delta q^{\beta,(j)} \right. \right. \\ &\left. \left. - i\varepsilon f(q^{(j)}) V(q^{(j)}) + \Delta V_{PF} q^{(j)} - E \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

en effectuant la transformation temporelle suivante

$$\begin{aligned} dt &= f(s) ds, \\ &= R^2 (k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu) ds, \end{aligned} \quad (4.124)$$

donc (4.122) devient

$$\begin{aligned} &= [R^2 (k^2 cn^2 \mu_0 + k'^2 cn^2 \nu_0) (k^2 cn^2 \mu_N + k'^2 cn^2 \nu_N)]^{-\frac{1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \\ &\int \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j)}{R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j)}} d\mu_j d\nu_j \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} \left[ (\Delta\mu_j) \frac{\sqrt{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j} \sqrt{k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1}}}{\sqrt{(k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) (k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1})}} (\Delta\mu_j) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. + (\Delta\nu_j) \frac{\sqrt{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j} \sqrt{k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1}}}{\sqrt{(k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) (k^2 cn^2 \mu_{j-1} + k'^2 cn^2 \nu_{j-1})}} (\Delta\nu_j) \right] \right. \\ &\left. - \varepsilon R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) \frac{mR^2 \omega^2}{2} \right. \\ &\left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) \left( \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{sn^2 \mu_j dn^2 \nu_j} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \mu_j sn^2 \nu_j} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{cn^2 \mu_j cn^2 \nu_j} \right) \right. \\ &\left. + R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) (\Delta V_{FP} - E) \right] \}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

En utilisant la Corollaire précédente, pour  $d = 2$ , la métrique peut se transformer en  $g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} = f^2 \delta_{\alpha\beta}$ , telle que la fonction  $f$  est donner par

$$f = \sqrt{R^2 (k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu)},$$

c'est-à-dire

$$g_{\alpha\beta} = R^2 (k^2 cn^2 \mu + k'^2 cn^2 \nu) \text{diag}(1, 1),$$

en déduit donc que  $\Delta V_{FP} = 0$ .

Alors

$$\begin{aligned}
G^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; E) &= [R^2 (k^2 cn^2 \mu_0 + k'^2 cn^2 \nu_0) (k^2 cn^2 \mu_N + k'^2 cn^2 \nu_N)]^{-\frac{1}{4}} \\
&\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} d\mu_j d\nu_j \\
&\times \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} [(\Delta\mu_j)^2 + (\Delta\nu_j)^2] \\
&- \varepsilon R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) \frac{mR^2 \omega^2}{2} \\
&+ R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) E \\
&+ \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left[ \left( \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k'^2}{cn^2 \mu_j} + \frac{k^2}{cn^2 \nu_j} \right) \right. \\
&+ \left( k_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{sn^2 \mu_j dn^2 \nu_j} \right) \\
&\left. + \left( k_2^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{dn^2 \mu_j sn^2 \nu_j} \right) \right]. \tag{4.126}
\end{aligned}$$



Finalement, le propagateur calculé dans le systèmes de coordonnées hyperboliques est donné par

$$\begin{aligned}
K^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; T) &= \frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp\left(-\frac{i}{\hbar} ET\right) \\
&\times [R^2 (k^2 cn^2 \mu_0 + k'^2 cn^2 \nu_0) (k^2 cn^2 \mu_N + k'^2 cn^2 \nu_N)]^{-\frac{1}{4}} \\
&\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi \hbar \varepsilon}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} d\mu_j d\nu_j \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} [(\Delta\mu_j)^2 + (\Delta\nu_j)^2] \right. \\
&- \varepsilon R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) \frac{mR^2 \omega^2}{2} \\
&+ R^2 (k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j) E \\
&+ \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left[ \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{k'^2}{cn^2 \mu_j} + \frac{k^2}{cn^2 \nu_j}\right) \right. \\
&+ \left(k_1^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{sn^2 \mu_j dn^2 \nu_j}\right) \\
&\left. \left. + \left(k_2^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{dn^2 \mu_j sn^2 \nu_j}\right) \right] \right\}. \tag{4.127}
\end{aligned}$$

## II- En Coordonnées Elliptiques :

En suivant la même technique employée dans les coordonnées hyperboliques, nous arrivons à écrire le propagateur en coordonnées elliptiques sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
K^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{mR^2}{2i\pi \hbar \varepsilon}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} R (k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) d\alpha_j d\beta_j \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{mR^2}{2\varepsilon} [(k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) ((\Delta\alpha_j)^2 + (\Delta\beta_j)^2) \right. \\
&- \varepsilon^2 \omega^2 \left(1 - \frac{1}{sn^2 \alpha_j dn^2 \beta_j}\right)] \\
&\left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{cn^2 \alpha_j cn^2 \beta_j} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{dn^2 \alpha_j sn^2 \beta_j}\right) \right\}. \tag{4.128}
\end{aligned}$$

En effectuant la transformation temporelle

$$dt = R^2 (k^2 cn^2 \alpha + k'^2 cn^2 \beta) ds, \tag{4.129}$$

la fonction de Green (4.119) s'écrit après un simple calcul

$$\begin{aligned}
G^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; E) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} d\alpha_j d\beta_j \\
&\times [R^2 (k^2 cn^2 \alpha_0 + k'^2 cn^2 \beta_0) (k^2 cn^2 \alpha_N + k'^2 cn^2 \beta_N)]^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} [(\Delta\alpha_j)^2 + (\Delta\beta_j)^2] \right. \\
&- \varepsilon R^2 (k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) \frac{mR^2 \omega^2}{2} \\
&+ R^2 (k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) E \\
&+ \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left[ \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j}{sn^2 \alpha_j dn^2 \beta_j} \right) \right. \\
&+ \left( k_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k'^2}{cn^2 \alpha_j} + \frac{k^2}{cn^2 \beta_j} \right) \\
&\left. \left. + \left( k_2^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{dn^2 \alpha_j sn^2 \beta_j} \right) \right] \right\}, \tag{4.130}
\end{aligned}$$

où

$$\nu^2 = \frac{m^2 R^4 \omega^2}{\hbar^2} + \frac{1}{4}.$$

Finalement, le propagateur calculé dans le système de coordonnées elliptiques est donné par

$$\begin{aligned}
K^{(V)}(\mu'', \mu', \nu'', \nu'; T) &= \frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp \left( -\frac{i}{\hbar} ET \right) \\
&\times [R^2 (k^2 cn^2 \alpha_0 + k'^2 cn^2 \beta_0) (k^2 cn^2 \alpha_N + k'^2 cn^2 \beta_N)]^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} [(\Delta\alpha_j)^2 + (\Delta\beta_j)^2] \right. \\
&- \varepsilon R^2 (k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) \frac{mR^2 \omega^2}{2} \\
&+ R^2 (k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j) E \\
&+ \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \left[ \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \alpha_j + k'^2 cn^2 \beta_j}{sn^2 \alpha_j dn^2 \beta_j} \right) \right. \\
&\left( k_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k'^2}{cn^2 \alpha_j} + \frac{k^2}{cn^2 \beta_j} \right) \\
&\left. \left. + \left( k_2^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{k^2 cn^2 \mu_j + k'^2 cn^2 \nu_j}{dn^2 \alpha_j sn^2 \beta_j} \right) \right] \right\}. \tag{4.131}
\end{aligned}$$

## 4.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons montré que la fonction de Green associée au potentiel super-intégrable de l'oscillateur de Higgs, peut être calculée par l'approche des intégrales de chemin dans l'espace Riemannien notamment, sur une hyperboloïde à deux dimensions. L'intégrale de chemin à été donnée dans quatre systèmes de coordonnées à savoir, les coordonnées pseudo-sphériques, équidistantes, hyperboliques et elliptiques. Pour les deux premiers systèmes de coordonnées, l'intégrale de chemin est effectuée, dans le cadre de la prescription de l'ordre de Weyl, en utilisant des transformations temporelles adéquates qui permet de ramener l'intégrale de chemin aux intégrales de chemin relatives au potentiel de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié. Le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes sont déduits exactement. Pour les deux derniers systèmes de coordonnées, le calcul de l'intégrale de chemin est formulée dans le cadre de la prescription de la forme produit en raison de la forme symétrique de la matrice métrique  $g_{\mu\nu}$ . A ce niveau, nous avons remarqué que la séparation des variables n'est pas encore atteinte à cause de la nature complexe des coordonnées hyperboliques et elliptiques. Par conséquent, nous étions dans l'obligation d'adopter la prescription forme produit canonique [41] et au moyen d'une transformation temporelle, nous avons réussi à donner à la fonction de Green une forme moins compliquée.

## Chapitre 5

### Conclusion :

Dans ce travail nous avons traité certains problèmes de la mécanique quantique non relativiste au moyen de l'approche des intégrales de chemin de Feynman. Comme une première application, nous avons analysé dans l'espace Euclidien un ensemble de systèmes quantiques mettant en jeu des formes générales de potentiels largement utilisés dans plusieurs branches de la physique tout en adoptant la méthode de Duru-Kleinert et la méthode de la fonctionnelle Dirac. Ensuite, nous avons traité le potentiel super intégrable "Oscillateur de Higgs" comme une deuxième application dans l'espace courbe de Riemann, nous avons discuté le comportement des solutions relatives au mouvement d'une particule sur une hyperboloïde à deux dimensions dans quatre systèmes de coordonnées où la séparation des variables est possible. Ces solutions ont été calculées dans les deux premiers systèmes pseudo-sphériques et équidistants à l'aide des techniques du formalisme des intégrales de chemin qui sont essentiellement les transformations temporelles. L'utilisation de ces dernières a été reprise au cours du raisonnement pour réduire le propagateur de Higgs à celui de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié. Les spectres d'énergies et les fonctions d'ondes relatives au potentiel en question sont déduits directement. Tandis que pour les deux derniers systèmes de coordonnées hyperboliques et elliptiques la construction des intégrales de chemin rencontre des difficultés à cause de la nature complexe de ces coordonnées.

Les résultats obtenus dans cette approche sont parfaitement identiques avec ceux de la littérature.

# Appendices

# Appendice A

## Le Formalisme des Intégrales de Chemins

### ➤ **A.1.** Calcul de La Correction Totale

### A.1. Calcul de la Correction Totale :

La correction (2.91) peut se calculer comme suit

$$C_T = C_{mes} + C_f + C_{act} + C_{es}C_f + C_{mes}C_{act} + C_fC_{act} + C_{mes}C_fC_{act}. \quad (\text{A.1.1})$$

Il suffit alors de calculer les termes  $C_{mes}C_f$ ,  $C_{mes}C_{act}$  et  $C_fC_{act}$  séparément :

$C_{mes}C_f$

$$C_{mes}C_f = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) (\bar{e}e_2) \left(\frac{f'}{f}\right) (\Delta q)^2 + \dots \quad (\text{A.1.2})$$

$C_{mes}C_{act}$

$$C_{mes}C_{act} = \frac{iM}{\hbar} \frac{(\Delta q)^4}{2\varepsilon_s} \left\{ - \left[ (\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right] \right\} (-\bar{e}e_2) + \dots \quad (\text{A.1.3})$$

$C_fC_{act}$

$$C_fC_{act} = \frac{iM}{\hbar} \frac{(\Delta q)^4}{2\varepsilon_s} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{f'}{f}\right) \left( (\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right) + \dots, \quad (\text{A.1.4})$$

le terme  $C_{mes}C_fC_{act}$  donne une contribution nulle car il est de l'ordre supérieur à  $\varepsilon$ .

La condition  $e_1 = f^{\frac{1}{2}}$  implique que

$$\begin{cases} \frac{f'}{f} = 2\bar{e}e_2, \\ \frac{f''}{f} = 2 \left[ (\bar{e}e_2)^2 + \bar{e}e_3 \right], \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

en substituant (A.1.5) dans (2.81) et (2.90), les corrections relatives à l'action et le préfacteur sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} C_{act} &= \frac{iM}{\hbar} \frac{(\Delta q)^2}{2\varepsilon_s} \left\{ - (1 - 2\lambda) \bar{e}e_2 \Delta q + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{1}{3} (\bar{e}e_3) + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 - \lambda \left( (\bar{e}e_2)^2 + (\bar{e}e_3) \right) + 2\lambda(\lambda + 1) (\bar{e}e_2)^2 - 2\lambda (\bar{e}e_2)^2 \right] (\Delta q)^2 \right\} \\ &- \frac{iM^2}{2\hbar^2} \frac{(\Delta q)^4}{4\varepsilon_s^2} (1 - 2\lambda)^2 (\bar{e}e_2)^2 \Delta q^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\begin{aligned} C_f &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left\{ \left( -2\bar{e}e_2 \Delta q + \frac{1}{2} \left( (\bar{e}e_2)^2 + (\bar{e}e_3) \right) \Delta q^2 \right) \right\} \\ &- 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda\right) (\bar{e}e_2)^2 \Delta q^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

# Appendice B

## La Technique de la Fonctionnelle Delta de Dirac

- **B.1.** La Transformation Canonique
- **B.2.** Rparamétrisation des chemins d'espace-temps



**B.1. La Transformation Canonique  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  :**

La transformation

$$q = f(Q), \quad (\text{B.1.1})$$

sera canonique quand nous aurons

$$\frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1,$$

la transformation la plus générale permise pour  $p$  est

$$p = \frac{P}{f'(Q) + h(Q)}. \quad (\text{B.1.2})$$

par convention nous pouvons prendre  $h(Q) = 0$ .

Après le changement  $q = f(Q)$ , l'opérateur  $\hat{p} = -i \frac{d}{dq}$  se transforme en

$$\hat{p} = -i f'(Q)^{-1} \frac{d}{dQ}. \quad (\text{B.1.3})$$

Le produit interne était  $\int \Psi^*(q) \chi(q) dq$ .

Nous aurons besoin d'exprimer ces quantités en fonctions des nouveaux opérateurs  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$ .

Suite à cette transformation la mesure devient

$$dq = f'(Q) dQ.$$

L'opérateur impulsion doit être son propre adjoint ( herméatique ) et doit satisfaire la relation de commutation canonique  $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$ .

soit  $\hat{Q} \equiv Q$ , à une dimension

$$\begin{aligned} ds^2 &= dq^2 = (f'(Q) dQ)^2 \\ &= g^{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta, \end{aligned}$$

par identification nous aurons

$$g^{\frac{1}{2}}(Q) = f'(Q), \quad (\text{B.1.5})$$

ceci implique que

$$\begin{cases} \hat{P} = -i g^{\frac{-1}{4}}(Q) \partial_Q g^{\frac{1}{4}}(Q), \\ \hat{p} = g^{\frac{-1}{4}}(Q) \hat{P} g^{\frac{-1}{4}}(Q). \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

Finalement l'opérateur hamiltonien ordonné s'écrit

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left[ H \left( g^{\frac{-1}{4}}(Q) \widehat{P} g^{\frac{-1}{4}}(Q), f(Q) \right) \right] \\ = & \frac{1}{4} \left( g^{-1} \widehat{P}^2 + \widehat{P}^2 g^{-1} \right) + V \left( f \left( \widehat{Q} \right) \right) + V_e \left( f \left( \widehat{Q} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

avec

$$V_e = -\frac{g''}{8g^2} + \frac{9g'^2}{32g^3}. \quad (\text{B.1.8})$$

## B.2. Reparamétrisation des chemins d'espace-temps :

Comme dans le cas de la transformation canonique sur la coordonnée  $q$  ( $q \rightarrow Q$ ) via une fonction arbitraire  $f$  telle que  $q = f(Q)$ , il est aussi souvent utile de faire une transformation sur la variable temporelle  $t$  définie par

$$f [q(t)] dt = ds, \quad (\text{B.2.1})$$

il n'y a pas une relation directe entre  $t$  et  $s$ , car la nouvelle définition du temps dépend explicitement de  $q(t)$ . Cette transformation a été introduite pour la première fois par Duru-Kleinert [4, 6], puis elle a été développée par Pak et Sokmen[42].

Pour trouver la forme du propagateur après cette transformation, nous commençons par la fonction de Green relative à l'énergie qui est indépendante du temps

$$K_E(b, a) = i \int_0^\infty dT e^{iET} K(b, T; a, 0). \quad (\text{B.2.2})$$

Compte tenu de la contrainte donc

$$T = \frac{ds}{f(b)}, \quad (\text{B.2.3})$$

le  $K(b, T; a, 0)$  se transforme en  $\tilde{K}(b, S; a, 0)$  comme suit

$$K_E(b, a) = i \int_0^\infty \frac{dS}{f(b)} \tilde{K}(b, S; a, 0). \quad (\text{B.2.4})$$

La relation entre la fonction de Green relative à l'énergie  $K_E(b, a)$  et le propagateur dépendant du temps réel  $K(b, T; a, 0)$  est

$$K(b, T; a, 0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iET} \int_0^\infty \frac{dS}{f(b)} \tilde{K}(b, S; a, 0). \quad (\text{B.2.5})$$

Pour construire la représentation intégrale de chemin  $\tilde{K}(b, S; a, 0)$ , il est nécessaire de retourner à l'équation de Schrödinger originale et retrouver la transformation de cette équation. Cela va donner correctement la nouvelle intégrale de chemin. Il n'est pas convenable d'essayer de changer le temps directement dans l'intégrale de  $K(b, T; a, 0)$ , car faire cela revient à négliger un terme important qui est le potentiel effectif, ce terme est produit en ordonnant l'opérateur de Schrödinger transformé.

En appliquant  $(H - E)$  à la fonction de Green (B.2.4), on aura d'après la première définition de Dirac  $(H - E) K_E(b, a) = \delta(b - a)$  le résultat suivant

$$\delta(b - a) = i \int_0^\infty dS (H - E) f^{-1}(b) \tilde{K}(b, S; a, 0), \quad (\text{B.2.6})$$

# Appendice C

## L'approche des intégrales de chemins pour un potentiel super-intégrable sur une hyperboloïde à deux dimensions

- **C.1.** Rappels et Définitions
- **C.2.** Fonctions Elliptiques de Jacobi
- **C.3.** Le potentiel de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié
- **C.4.** Première Correction Quantique
- **C.5.** Seconde Correction Quantique

où l'opérateur  $H$  agit sur  $b$ .

Si nous assumons que  $\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}(b, S; a, 0) = \delta(b - a)$ , nous aurons

$$\delta(b - a) = i \int_0^\infty dS (i\partial_s) \tilde{K}(b, S; a, 0), \quad (\text{B.2.7})$$

d'après (B.2.6) et (B.2.7) nous concluons que

$$(H - E) f^{-1}(b) \tilde{K}(b, S; a, 0) = (i\partial_s) \tilde{K}(b, S; a, 0), \quad (\text{B.2.8})$$

et si l'opérateur ordonné  $H$  est donné par

$$\mathcal{L}(H(\hat{p}, \hat{q})) = \frac{1}{2} \text{symm} \left( \frac{1}{g(\hat{q})} \hat{p}^2 \right) + V(\hat{q}),$$

alors, l'intégrale de chemin pour  $\tilde{K}$  est

$$\begin{aligned} \tilde{K}(b, S; a, 0) &= [g(b) g(a)]^{-\frac{1}{4}} \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^S \left( pq - \frac{1}{2g} p^2 - \frac{if'}{2g f^2} p - \frac{g' f'}{4g^2 f^2} - \frac{V}{f} + \frac{E}{f} \right) ds \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

pour éliminer le terme linéaire en  $p$ , nous effectuons le changement suivant

$$p = \bar{p} - \frac{i f'}{2 f},$$

et par substitution dans (B.2.9), nous aurons après un simple calcul et intégration du terme

$$i \int_0^S \frac{i f'}{2 f} \dot{q} ds = \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

le propagateur suivant

$$\begin{aligned} \tilde{K}(b, S; a, 0) &= [g(b) g(a)]^{-\frac{1}{4}} \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{2}} \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^S \left[ pq - \frac{1}{2g} \bar{p}^2 - \frac{f'}{8g f^3} - \frac{g' f'}{4g^2 f^2} - \frac{V}{f} + \frac{E}{f} \right] ds \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

en remplaçant cela dans l'équation (B.2.5), nous aurons finalement l'expression du propagateur

symétrique en  $a$  et  $b$

$$K(b, T; a, 0) = [g(b) g(a)]^{\frac{-1}{4}} \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iET} \int_0^\infty dS \int \left[ \frac{dp dq}{2\pi} \right] \\ \times \exp \left\{ i \int_0^S \left[ p\dot{q} - \frac{1}{2g} \frac{\hat{p}^2}{f} - \frac{if'}{8g f^3} \hat{p} - \frac{g' f'}{4g^2 f^2} - \frac{V}{f} + \frac{E}{f} \right] ds \right\}, \quad (\text{B.2.11})$$

Choisissons maintenant  $f$  de telle sorte que le terme en  $p^2$  prend une forme habituelle; c'est-à-dire  $f = g^{-1}$ .

Alors  $V_e$  s'écrit après substitution dans l'équation (B.1.8) comme suit

$$V_e = \frac{-g'^2}{8g^2}, \quad (\text{B.2.12})$$

et suite à cette transformation, le préfacteur devient  $[g(b) g(a)]^{\frac{1}{4}}$ .

### C.1. Rappels et Définitions :

\* Un espace est dit avoir une (*métrique géométrique*) si nous possédons un moyen de mesurer l'intervalle séparant deux points infiniment voisins. Nous appellerons un vecteur, un segment de droite orienté séparant deux points infiniment voisins

$$d\vec{s} = dx^\mu \vec{e}_\mu. \quad (\text{C.1.1})$$

\* L'intervalle  $d\vec{s}^2$  (*élément de ligne*) entre deux points infiniment voisins sera donc

$$\begin{aligned} d\vec{s}^2 &= d\vec{s} \cdot d\vec{s} = dx^\mu \vec{e}_\mu \cdot dx^\nu \vec{e}_\nu, \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

\* Les coefficients  $g_{\mu\nu}$  qui définissent la métrique de l'espace sont les composantes covariantes d'un tenseur de rang deux.

Si nous pouvons trouver un système de coordonnées tel que

$$d\vec{s}^2 = \pm (dx^0)^2 \pm (dx^1)^2 \pm (dx^2)^2 \pm (dx^3)^2 \pm \dots, \quad (\text{C.1.3})$$

l'espace est dit *Plat*.

Dans ce cas  $g_{\mu\nu} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$ , si tous les signes sont identiques l'espace est dit *Euclidien*,

et si certains signes sont (+) et d'autres (-) l'espace est dit *Pseudo euclidien*.

\* L'espace temps de *Minkowski* qui est noté habituellement ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) est un espace *Pseudo euclidien*.

$$\eta_{00} = \mp 1 \text{ et } \begin{cases} \eta_{\mu\nu} = \pm 1 & \text{pour } \mu = \nu \neq 0, \\ \eta_{\mu\nu} = 0 & \text{pour } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

tandisque l'espace cartésien à trois dimensions habituel dans lequel ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ), indique que les vecteurs de bases sont orthonormés est un espace *euclidien*.

\* Un espace est courbe s'il n'existe aucun système de coordonnées dans lequel la métrique sera plate.

### Exemple de calcul :

Considérons le cas du système de coordonnées Pseudo-sphériques :

calcul de  $d\vec{s}^2$  :

En appliquant l'équation (C.1.3), l'élément de ligne en coordonnées pseudo-sphériques s'écrit après un simple calcul

$$d\vec{s}^2 = (d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2). \quad (\text{C.1.3})$$

Nous obtenons pour la métrique en coordonnées pseudo sphériques la forme suivante

$$g_{\tau\varphi} = \text{diag} (1, \sinh^2 \tau). \quad (\text{C.1.4})$$

### Calcul des opérateurs de la quantité de mouvement $p_i$ :

Les opérateurs de la quantité de mouvement ont la forme suivante [14]

$$p_i = \frac{\hbar}{i} \left( \partial_i + \frac{1}{2} \Gamma_i \right), \quad (\text{C.1.5})$$

avec

$$\Gamma_i = g^{-\frac{1}{2}} \partial_i g^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.1.6})$$

En coordonnées pseudo sphériques

$$\Gamma_\tau = \coth \tau, \Gamma_\varphi = 0, \quad (\text{C.1.7})$$

donc

$$\begin{cases} p_\tau = \frac{\hbar}{i} \left( \partial_\tau + \frac{1}{2} \coth \tau \right), \\ p_\varphi = \frac{\hbar}{i} \partial_\varphi. \end{cases} \quad (\text{C.1.8})$$

### Calcul de l'hamiltonien $H_0$ :

D'une part, l'hamiltonien  $H_0$  s'écrit en terme d'opérateurs de la quantité de mouvement donné par (C.1.8) ainsi

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p_\tau^2 + p_\varphi^2), \quad (\text{C.1.9})$$

c'est à dire

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \partial^2 \tau + \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{4 \sinh^2 \tau} + \frac{1}{4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (\text{C.1.10})$$



D'autre part, l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme suivante

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \quad (\text{C.1.11})$$

où le Laplacien  $\Delta$  en coordonnées pseudo-sphériques est donné par

$$\Delta_s f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{C.1.12})$$

il s'ensuit que pour le système de coordonnées pseudo sphériques, le Laplacien s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{R^2 \sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sinh \tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \tau} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{C.1.13})$$

calculons le terme  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sinh \tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sinh \tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \sinh \tau \right) \frac{\partial f}{\partial \tau} + \sinh \tau \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2},$$

alors (C.1.13) s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \left( \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\sin^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (\text{C.1.14})$$

et (C.1.11) devient

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\sin^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{C.1.15})$$

En comparant (C.1.10) et (C.1.15), nous aurons pour l'hamiltonien dans le système de coordonnées pseudo sphériques, l'hamiltonien suivant

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( p_\tau^2 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} p_\varphi^2 \right) + \frac{\hbar^2}{8mR^2} \left( 1 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.1.16})$$

il est clair que  $H$  est de la forme

$$H = H_0 + \Delta V, \quad (\text{C.1.17})$$

avec

$$\Delta V = \frac{\hbar^2}{8} \left( 1 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right). \quad (\text{C.1.18})$$

Pour les autres systèmes de coordonnées ( équidistantes, hyperboliques et elliptiques ), le calcul des

termes ci-dessus se fait de la même manière.

## C.2. Quelques propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi (sn, cn, dn) :

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont des fonctions qui possèdent deux pôles simples dans une période, l'un des pôles est réel et l'autre est imaginaire pure [43].

Ces fonction sont définies par

$$t = sn u, \quad u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (C.2.1)$$

$$cn u = \sqrt{1 - sn^2 u}, \quad (C.2.2)$$

et

$$dn u = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u}, \quad (C.2.3)$$

où le signe de la racine carrée est choisi tel que  $cn u \rightarrow 1$ ,  $dn u \rightarrow 1$ , si  $u \rightarrow 0$ .

Les équations (C.2.2), (C.2.3) peuvent aussi être représentées par les équations suivantes

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \quad dn^2 u - k^2 sn^2 u = 1. \quad (C.2.4)$$

En dérivant l'équation (C.2.1), nous aurons

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}, \quad (C.2.5)$$

et

$$\frac{d}{du} sn u = cn u dn u. \quad (C.2.6)$$

En dérivant (C.2.4) et utilisant (C.2.6), nous obtenons aussi

$$\frac{d}{du} cn u = -sn u dn u, \quad (C.2.7)$$

$$\frac{d}{du} dn u = -k^2 sn u cn u. \quad (C.2.8)$$

Les développements de Taylor des fonctions  $sn u$ ,  $cn$  et  $dn u$  à l'origine sont présentés comme suit

$$\begin{cases} sn u = u - \frac{1+k^2}{6}u^3 + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{u^5}{5!} - \dots \\ cn u = 1 - \frac{u^2}{2} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{u^6}{6!} + \dots \\ dn u = 1 - k^2 \frac{u^2}{2} + k^2 (4 + k^2) \frac{u^4}{4!} - k^2 (16 + 44k^2 + k^4) \frac{u^6}{6!} + \dots \end{cases} \quad (C.2.9)$$

### C.3. Potentiel de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié :

Le traitement du problème de l'oscillateur de Higgs se réduit à celui du problème de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller Modifié, notamment en coordonnées pseudo sphériques et elliptiques.

#### C.3.1. Le potentiel de Pöschl-Teller :

La solution via les intégrales de chemins pour le potentiel de Pöschl-Teller se trouve dans [24, 44, 46, 47, 48, 49, 50].

$$\begin{aligned}
& \int_{x(t')=x'}^{x(t'')=x''} Dx(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{M}{2} \dot{x}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 x} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 x} \right) \right] dt \right\} \\
= & \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \phi_n^{(\alpha, \beta)}(x') \phi_n^{(\alpha, \beta)}(x''), \\
= & \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} G_{PT}^{(\alpha, \beta)}(x'', x', E),
\end{aligned} \tag{1}$$

avec  $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ .

Les fonctions d'onde et le spectre d'énergie sont donnés par

$$\begin{aligned}
\phi_n^{(\alpha, \beta)}(x') &= \left[ 2(\alpha + \beta + 2n + 1) \frac{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times (\sin x)^{\alpha + \frac{1}{2}} (\cos x)^{\beta + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2x).
\end{aligned} \tag{2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2M} (2n + \alpha + \beta + 1)^2. \tag{3}$$

Les  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  sont les polynômes de Jacobi [[22], p.1035] et la fonction d'onde  $\phi_n^{(\alpha, \beta)}(x')$  est normalisée  $\int_0^{2\pi} \left| \phi_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right|^2 dx = 1$ .

### C.3.2. Le potentiel de Pöschl-Teller Modifié :

Le cas du potentiel de Pöschl-Teller Modifié se trouve dans [44, 48, 49, 50, 46, 47]

$$\begin{aligned}
& \int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} Dr(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[ \frac{M}{2} \dot{r}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 r} + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 r} \right) \right] dt \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \Psi_n^{(k,\lambda)*}(r') \Psi_n^{(k,\lambda)}(r'') + \int_0^\infty dp e^{-\frac{i}{\hbar} E_p T} \Psi_p^{(k,\lambda)*}(r') \Psi_p^{(k,\lambda)}(r''), \quad (1) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} G_{mPT}^{(k,\lambda)}(r'', r', E).
\end{aligned}$$

Les fonctions d'onde ainsi que le spectre d'énergie sont donnés par :

- Pour les états discrets

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{(k,\lambda)}(r) &= N_n^{(k,\lambda)} (\sinh r)^{k+\frac{1}{2}} (\cosh r)^{n-\lambda+\frac{1}{2}} \\
&\quad \times {}_2F_1(-n, \lambda - n; 1 + k; \tanh r), \\
N_n^{(k,\lambda)} &= \frac{1}{\Gamma(1+k)} \left[ \frac{2(\lambda - k - 2n - 1) \Gamma(n+1+k) \Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda - k - n) n!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)
\end{aligned}$$

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2M} (2n + k - \lambda + 1)^2. \quad (3)$$

- Pour les états continus

$$\begin{aligned}
\Psi_p^{(k,\lambda)}(r) &= N_p^{(k,\lambda)} (\cosh r)^{ip} (\tanh r)^{k+\frac{1}{2}} \\
&\quad \times {}_2F_1\left(\frac{\lambda + k + 1 - ip}{2}, \frac{k - \lambda + 1 - ip}{2}; 1 + k; \tanh^2 r\right), \\
N_p^{(k,\lambda)} &= \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{\sqrt{p \sinh \pi p}}{2\pi^2} \Gamma\left(\frac{\lambda + k + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k - \lambda + 1 - ip}{2}\right). \quad (4)
\end{aligned}$$

$$E_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2M}. \quad (5)$$

#### C.4. Première Correction Quantique :

Nous verrons, dans cette partie que les variations  $(\Delta\tau_j)^2$ ,  $(\Delta\tau_j)^4$  et  $(\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2$  qui apparaissent dans la mesure et l'action du propagateur (4.48) seront remplacées par une correction quantique. Pour celà, appliquons la procédure de MC-Schulman au terme ci-dessous

$$\begin{aligned}
& \int d\tau_j d\varphi_j \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \exp \left[ \frac{im}{2\hbar\varepsilon_s} \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right] \\
= & \int d\tau_j d\varphi_j \left( 1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \left[ 1 + \frac{im}{2\hbar\varepsilon_s} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^4}{4 \sinh^4 \tilde{\tau}_j} + \frac{(\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] \\
& \exp \left[ \frac{im}{2\hbar\varepsilon_s} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right], \tag{C.4.1}
\end{aligned}$$

En utilisant les égalités

$$\begin{aligned}
W_0(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \\
W_2(\alpha) &= \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \\
W_4(\alpha) &= \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},
\end{aligned}$$

nous trouvons

$$\alpha = \frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j}; \quad \beta = \frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}. \tag{C.4.2}$$

$$\begin{aligned}
\int (\Delta\tau_j)^2 \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j &= \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \right) \\
&\times \int \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j, \tag{C.4.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int (\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \exp \left[ -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( (\Delta\tau_j)^2 + \sinh^2 \tilde{\tau}_j (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right] d\tau_j d\varphi_j \\
= & \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left( \frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \right)^2 \int \exp \left[ -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \left( (\Delta\tau_j)^2 + \sinh^2 \tilde{\tau}_j (\Delta\varphi_j)^2 \right) \right] d\tau_j d\varphi_j, \tag{C.4.4}
\end{aligned}$$

$$\int (\Delta\tau_j)^4 \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} (\Delta\tau_j)^2\right) d\tau_j = 3 \sinh^4 \tilde{\tau}_j \left(\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m}\right)^2 \times \int \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s \sinh^2 \tilde{\tau}_j} (\Delta\tau_j)^2\right) d\tau_j. \quad (\text{C.4.5})$$

c'est-à-dire

$$(\Delta\tau_j)^2 \rightarrow \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left(\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m}\right); (\Delta\tau_j)^2 (\Delta\varphi_j)^2 \rightarrow \sinh^2 \tilde{\tau}_j \left(\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m}\right)^2; (\Delta\tau_j)^4 \rightarrow 3 \sinh^4 \tilde{\tau}_j \left(\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m}\right)^2. \quad (\text{C.4.6})$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & \int \prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right) \prod_{j=1}^{N-1} d\tau_j d\varphi_j \times \\ & \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\varepsilon_s} \left(1 + \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j}\right) \left(\frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2\right)\right] \\ & = \int d\tau_j d\varphi_j \left(1 - \frac{i\hbar\varepsilon_s}{4m}\right) \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon_s} \left(\frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (\text{C.4.7})$$

$\varepsilon$  étant infiniment petit

$$\left(1 - \frac{i\hbar\varepsilon_s}{4m}\right) \simeq \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 \varepsilon_s}{4m}\right). \quad (\text{C.4.8})$$

Il en résulte que (C.4.7) s'écrit

$$\int d\tau_j d\varphi_j \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon_s} \left(\frac{(\Delta\tau_j)^2}{\sinh^2 \tilde{\tau}_j} + (\Delta\varphi_j)^2\right) - \frac{i\hbar^2 \varepsilon_s}{4m}\right]. \quad (\text{C.4.9})$$

Aussi, la valeur moyenne à l'ordre de  $\varepsilon$  qui s'écrit

$$\langle C\Delta q \rangle = i\hbar\varepsilon_s \left[ -\bar{e}e_2 - \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \frac{f'}{f} + 3 \right] 2 \left( \bar{e}e_2 - \lambda \frac{f'}{f} \right), \quad (\text{A.1.8})$$

sera

$$\langle C\Delta q \rangle = 0. \quad (\text{A.1.9})$$

Finalement, en rassemblant les équations (A.1.2), (A.1.3), (A.1.4), (A.1.6) et (A.1.7), la correction totale est donnée par

$$\begin{aligned} C_T &= \bar{e}e_2 \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) \Delta q \left[ -\frac{iM}{\hbar\varepsilon_s} (\Delta q)^2 - 3 \right] \\ &+ (\bar{e}e_2)^2 \left[ \frac{9}{2} \left( \lambda + \frac{1}{6} \right) \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) (\Delta q)^2 \right. \\ &+ i \left( 4\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{7}{8} \right) \frac{iM}{\hbar\varepsilon_s} (\Delta q)^4 - \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \frac{M^2}{\hbar^2\varepsilon_s^2} (\Delta q)^6 \left. \right] \\ &+ \bar{e}e_3 \left[ -\frac{3}{2} \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) (\Delta q)^2 - \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{3} \right) \frac{iM}{\hbar\varepsilon_s} (\Delta q)^4 \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ , nous aurons le potentiel effectif (2.95)

$$V_{eff} = -\frac{i\hbar^2}{M} \left( \frac{1}{4}\bar{e}e_3 - \frac{3}{8}(\bar{e}e_2)^2 \right).$$



### C.5. Seconde Correction Quantique :

Dans la mesure de pouvoir découpler les variables  $\tau_j$  et  $\varphi_j$ , il importe de remplacer les variations d'ordre de  $\varepsilon_s^2$  de (4.56), dues à la transformation temporelle  $t \rightarrow s$  (4.53), par leur correspondant de MC-Schulman, à l'ordre 1 en  $\varepsilon_s$ , le terme

$$\int d\tau_j d\varphi_j \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{8 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \times \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) (\Delta\tau_j)^2 \right\}, \quad (\text{C.5.1})$$

s'écrit

$$\int d\tau_j d\varphi_j \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{8 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \left[ 1 - \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^4}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( (\Delta\tau_j)^2 \right) \right\}.$$

Un raisonnement tout à fait analogue au précédent (*Appendice C.4*) permet d'avoir

$$\int (\Delta\tau_j)^2 \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j = \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right) \int \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j, \quad (\text{C.5.2})$$

$$\int (\Delta\tau_j)^4 \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j = 3 \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right)^2 \int \exp \left( -\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (\Delta\tau_j)^2 \right) d\tau_j, \quad (\text{C.5.3})$$

autrement dit

$$(\Delta\tau_j)^2 \rightarrow \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right); \quad (\Delta\tau_j)^4 \rightarrow 3 \left( \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \right)^2, \quad (\text{C.5.4})$$

et par conséquent

$$\int d\tau_j \left( 1 - \frac{(\Delta\tau_j)^2}{8 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \left[ 1 - \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( \frac{(\Delta\tau_j)^4}{4 \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \right] \quad (\text{5.1})$$

$$\exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( (\Delta\tau_j)^2 \right) \right\} = \int d\tau_j \left( 1 + \frac{i\hbar\varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left( (\Delta\tau_j)^2 \right) \right\}, \quad (\text{C.5.5})$$

$\varepsilon$  étant infiniment petit

$$\left( 1 + \frac{i\hbar\varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right) \simeq \exp \left( \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2 \varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right). \quad (\text{C.5.6})$$

Il en résulte que (C.5.5) s'écrit

$$\int d\tau_j \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\varepsilon} ((\Delta\tau_j)^2) + \frac{\hbar^2\varepsilon}{4m \sinh^2 \tilde{\tau}_j} \right\} \quad (\text{C.5.7})$$

# Bibliographie

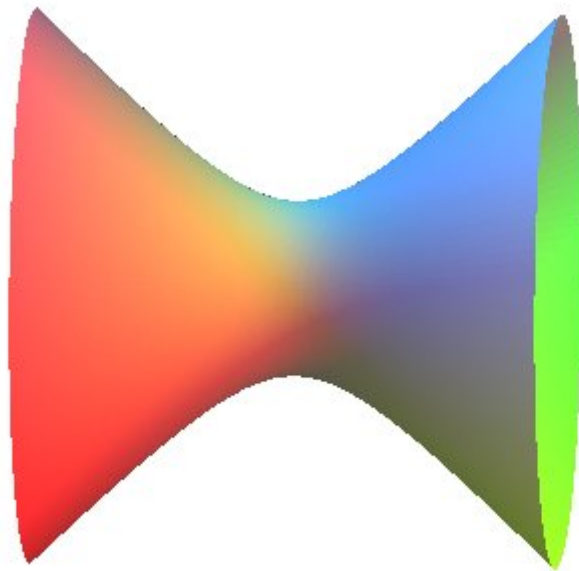
- [1] W. Heisenberg, Zeitsch. f. Phys. **33** (1925) 879.
- [2] E. Schrödinger, Ann. der Phys. **79** (1925) 361-489; **80** (1926) 437; **81** (1926) 109.
- [3] P.M.A. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics. (Oxford Clarendon Press, 1958).
- [4] I. H. Duru et H. Kleinert, Phys. Lett. **B 84** (1979) 185.
- [5] P. Kustaanheimo et E. Stiefel, J. Reine Angew; Math. **218** (1965) 204.
- [6] I. H. Duru et H. Kleinert, Fortschr. Phys. **30** (1982) 401.
- [7] M.A. Kayed and A. Inomata, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 107.
- [8] P.R. Cai, A. Inomata and R. Wilson. Phys. Lett. **A 86** (1983) 117.
- [9] A. Inomata and M.A. Kayed. J. Phys. **A 18** (1985) L 235.
- [10] A.O. Barut, A. Inomata, A. Junker. J. Phys. **A 20**. (1987) 6271.
- [11] C. Grosche, J. Phys. **A. Math. Gen. 22** (1989) 5073.
- [12] N. Rosen et P. M. Morse. Phys. Rev. **42** (1932) 210.
- [13] L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann., et M. Letlout, II Nouvo Cimento **B 105** (1990) 387; J. Math. Phys. **35** (1994) 1185; T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann, J. Math. Phys. **32** (1991) 441; L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann, A. Lecheheb. J. Math. Phys. **34** (1993) 1257; Czech J. Phys. **45** (1995) 669; B. Bentag, L. Chetouani, Czech. J. Phys. **50** (2000) 593-696.
- [14] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics and Polymer Physics.  
( World Scientific, Singapore, 1990 ) 2nd Edition.
- [15] E. G. Kalnins, W. Miller, Jr., G. S. Pogosyan, Superintegrability and associated polynomial solutions; Eucliden space and the sphere in two dimensions, J. Math. Phys. **37** (1996) 6439.
- [16] D. C. Khandekar, S. V. Lawande et K. V. Bhagwat. Path Integral Methods and their Applications.  
( 1993 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd ).

- [17] A. Messiah, *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1964); L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique Quantique*. (Editions Mir, Moscou, 1967) Tome III.
- [18] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [19] A. Anderson, S.B. Anderson, *Phase Space Path Integration of Integrable Quantum Systems*; *Annals of Physics* **199** (1990) 155-186.
- [20] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher transcendental functions*; **I-III** (1955) 272. McGraw Hill, New York.
- [21] D. Peak and A. Inomata, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1422; W. Langguth and A. Inomata. *J. Math. Phys.* **20** (1979) 499.
- [22] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals; Series and Products*; Academic Press; New York, (1980).
- [23] M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (1965), formula 13.1.3. Dover, New York.
- [24] I. H. Duru and H. Kleinert. *Phys. Lett. B* **84** (1979) 185; *Fortschr. Phys.* **30** (1982) 401.
- [25] I. H. Duru, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2689.
- [26] D. McLaughlin et L.S. Schulman, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2520. New York.
- [27] N.W. Evans, *Super-integrability in classical mechanics*; *Phys. Rev. A* **41** (1990) 5666; *Group theory of the Smorodinsky-Winternitz system*; *J. Math. Phys.* **32** (1991) 3369.
- [28] N.W. Evans, *Super-integrability of the Winternitz system*; *Phys. Lett. A* **147** (1990) 483.
- [29] N. W. Evans, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 5666.
- [30] S. Wojciechowski, *Phys. Lett. A* **95** (1983) 279.
- [31] J. Fris, V. Mandrosov, Ya.A. Smorodinsky, M. Uhler, P. Winternitz, *Phys. Lett.* **16** (1965) 354.
- [32] A.A. Makarov, J.A. Smorodinsky, Kh. Valiev, P. Winternitz, *Nuovo Cimento A* **52** (1967) 1061.
- [33] P. Winternitz, Ya.A. Smorodinsky; M. Uhler, I. Fris, *Sov. J. Nucl. Phys.* **4** (1967) 444.
- [34] C. Grosche, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, *Fortschr, Phys.* **43** (1995) 453.
- [35] C. Grosche, G.S. Pogosyan, A.N, Sissakian, *Path Integral Discussion for Smorodinsky-Winternitz Potentials IV. The Three-Dimensional Hyperboloid*. DESY Report, (in preparation).
- [36] C. Grosche, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, *Fortschr. Phys.* **43** (1995) 523.
- [37] B.S. Dewitt, *Dynamical theory in curved spaces. I. A. Review of the classical and quantum action principles*; *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 377.

- [38] C. Grosche and F. Steiner, The path integral on the poincaré upper half-plane and for Liouville quantum mechanics ; DESY preprint 87-035 and Phys. Lett. A **123** (1987) 319.
- [39] C. Grosche, The product form for path integrals on curved manifolds ; DESY 87-160 (1987) .
- [40] H. Kleinert, How to do the time sliced path integral for the H atom ; Phys. Lett. A **120** (1987) 361.
- [41] C. Grosche, An introduction into the path integral, (1992) 29-92.
- [42] N. K. Pak and I. Sokmen, Phys. Rev. A **30** (1984) 1629.
- [43] Z.X. Wang. D.R. Guo. Special functions ( World Scientific 1989 ) .
- [44] M. Böhm, G. Junker, J. Math. Phys. **28** (1987) 1978.
- [45] I.H. Duru, Phys. Rev. D **30** (1984) 2121.
- [46] A. Inomata, H. Kuratsuji, C.C. Gerry, Path Integrals and Coherent States of  $SU(2)$  and  $SU(1,1)$ , World Scientific, Singapore, (1992).
- [47] H. Kleinert, I. Mustapic, J. Math. Phys. **33** (1992) 643.
- [48] C. Grosche, Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae. DESY Rport, DESY 95-021, February, (1995) (Habilitationsschrift), 228, to be published by World Scientific.
- [49] C. Grosche, F. Steiner, J. Math. Phys. **36** (1995) 2354.
- [50] C. Grosche, F. Steiner, Table of Feynman Path Integrals ; To appear in : Springer Tracks in Modern Physics (1996).

# HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE $H_1$

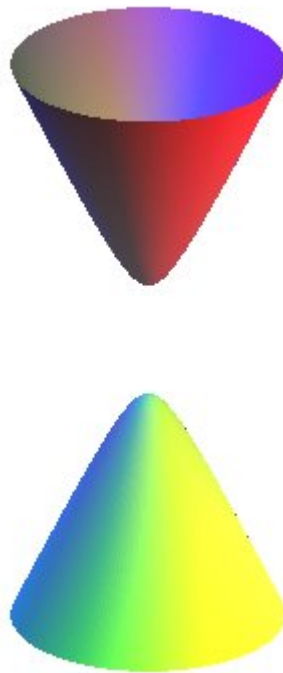
One-sheet hyperboloid



Équation cartésienne :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a \geq b$ .  
Quand  $a = b$  : hyperboloïde à une nappe de révolution.  
Quand  $a = b = c$  : hyperboloïde à une nappe équilatère.

# HYPERBOLOÏDE À DEUX NAPPES $H_2$

Two-sheet hyperboloid

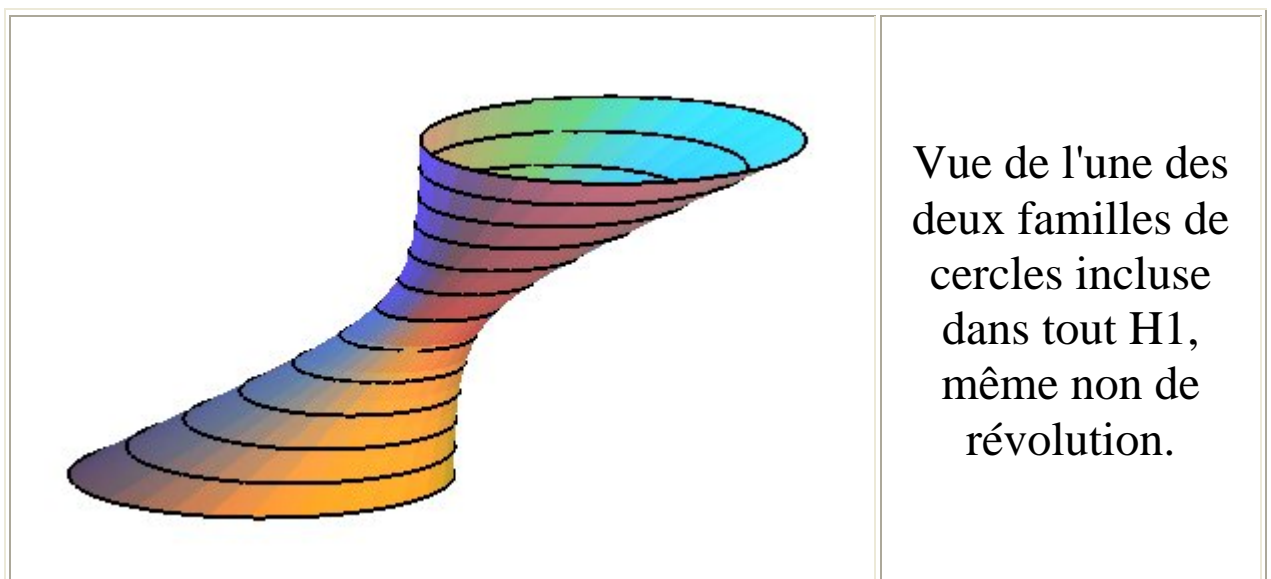
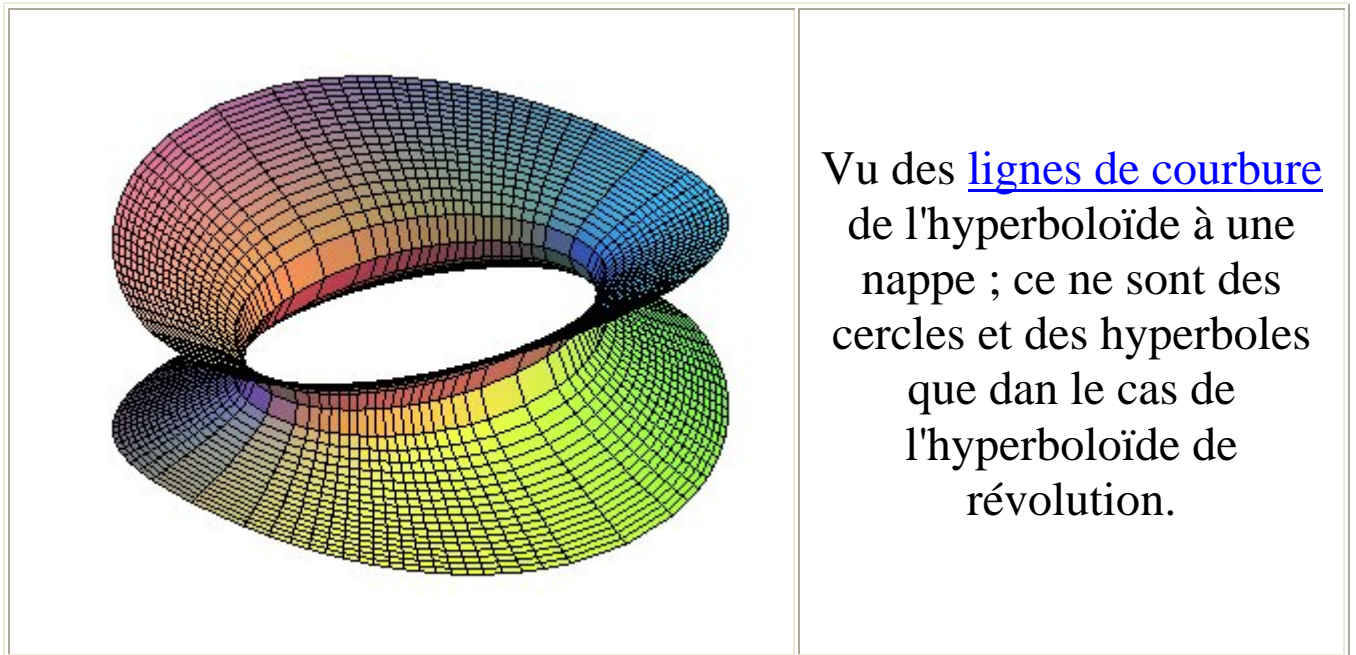


Équation cartésienne :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ,  $a \geq b$ .

Pour  $a = b$  : hyperboloïde à deux nappes de révolution.

Pour  $a = b = c$  : hyperboloïde à deux nappes équilatère.

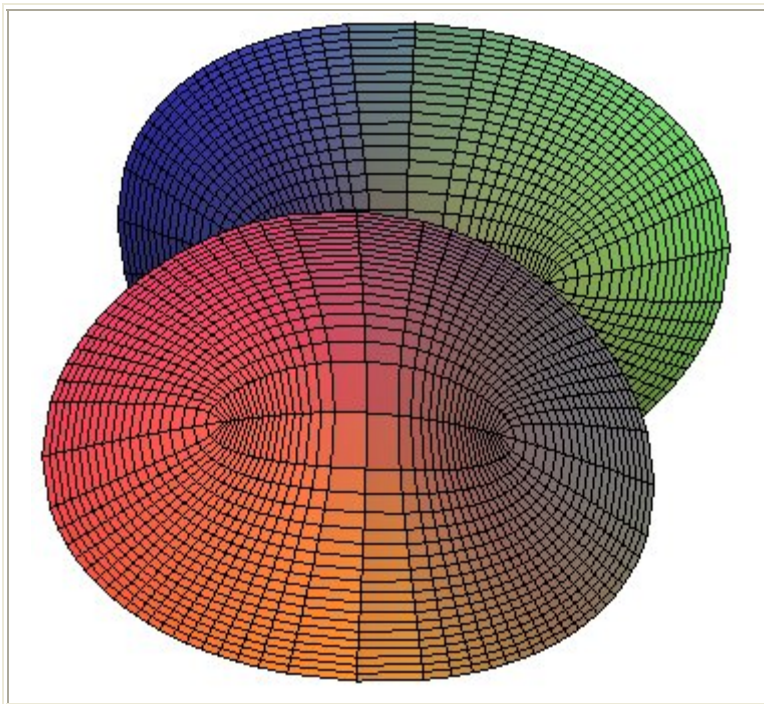
L'hyperboloïde à une nappe *de révolution* peut être défini comme la surface de révolution engendrée par une droite non coplanaire avec l'axe de révolution ou comme la surface de révolution engendrée par la rotation d'une [hyperbole](#) autour de son axe non transverse.



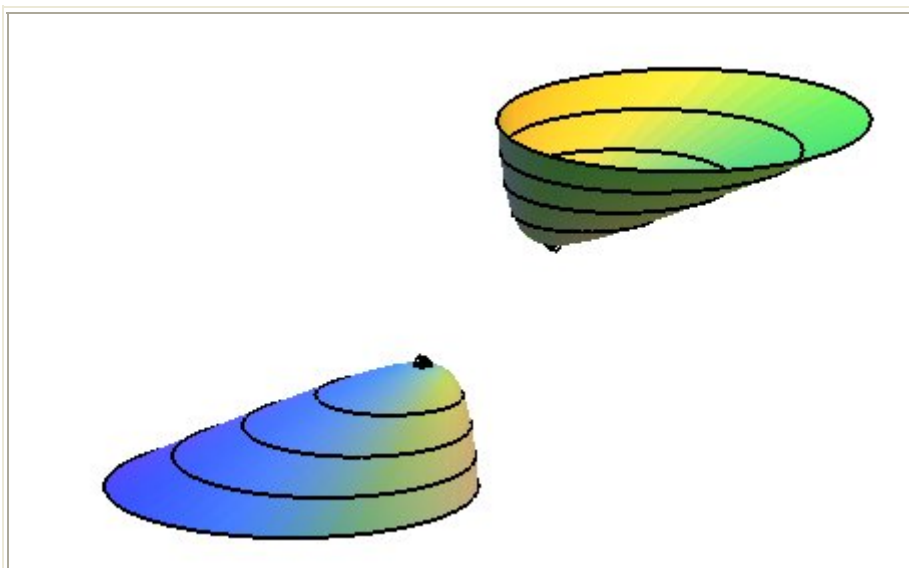


L'hyperboloïde à deux nappes de révolution peut être défini comme la surface de révolution engendrée par la rotation d'une [hyperbole](#) autour de son axe transverse.

C'est le lieu des points  $M$  vérifiant  $|MF - MF'| = 2a$ , où  $F$  et  $F'$  sont les foyers communs à ces hyperboles.



Vu des [lignes de courbure](#) de l'hyperboloïde à deux nappes ; ce ne sont des cercles et des hyperboles que dans le cas de l'hyperboloïde de révolution. Les 4 points singuliers sont les [ombilics](#).



Vue de l'une des deux familles de cercles incluse dans tout  $H^2$ , même non de révolution, avec les deux [ombilics](#) correspondants.

A cause de sa propriété d'être réunion de droites, l'hyperboloïde à une nappe, comme le [paraboloïde hyperbolique](#) est très utilisé en architecture.



Tours de refroidissement de centrale nucléaire.



Château d'eau à La Roche de Glun dans la Drôme



A Kobé au Japon

## ملخص

تخص هذه الرسالة دراسة الحركات الغير نسبية في إطار نظرية تكامل المسالك لـ Feynman.

في الجزء الأول منها، تم دراسة بعض مسائل الميكانيكا الكمية في فضاء إقليدس عن طريق استعمال الدالة دالتا

لـ Dirac مع الأخذ بعين الاعتبار طريقة التحولات لـ Duru-Kleinert.

في الجزء الثاني منها، نهدف إلى دراسة مسألة كمون فائق التكامل ( Oscillateur de Higgs ) في فضاء

ريمان ذو انحناء ثابت فوق سطح لقطع زائد ذو بعدين في أربعة جمل من الإحداثيات.

في حالة كل من جملة الإحداثيات شذو كروية و المتساوية المسافات، فإن تكامل المسارات تكون مماثلة لنتائج

بوش تيلارو بوشنتيلارمبدل. وقد تم الحصول على طيف الطاقة و دوال الموجة المرافقة بواسطة تحويلات

زمنية مناسبة.

أما في حالة جملة الإحداثيات القطوع الزائدة و الإهليجية ، عدة محاولات أجريت من أجل مواجهة الصعوبات

الخاصة بفصل المتغيرات في صيغة الناشر، قد استخدمت عن طريق الوصفة القانونية للشكل الجدائي و تطبيق

تحول زمني. لكن لم نتمكن من الوصول إلى الهدف المطلوب نظرا لصعوبة الحسابات.

مفاتيح الكلمات

تكامل المسارات، الناشر، دالة Green، طيف، طاقة، كمون فائق التكامل، عنصر خطي، المترية، الإنحاء.

## Abstract

This work is devoted to the study of non-relativistic movements in the context of Feynman path integral formalism.

In a first part, the treatment of some several known problems of the quantum mechanics has been reconsidered in Euclidian space by mean of the Delta functional technique used in phase space and the transformations of Duru and Kleinert.

In second part, the aim of the studies is to resolve, in curved space with constant curvature, the problem of superintegrable Higgs potential on the two-dimensional hyperboloid in four coordinate systems. In the pseudo spherical and equidistant coordinates systems case, the two path integral formulations of the Higgs oscillator have a simple structure involving Pöschl-Teller and modified Pöschl-Teller path integrals by adopting the prescription of the Weyl ordering and applying successive appropriate times transformations. The spectrum energy and wave function of discrete states are found exactly. However, in the hyperbolic and elliptic coordinates systems case, the path integral formulation is too complicated to allow an explicit solution because of their complex nature. Some attempts have been done in order to overcome these difficulties by using the canonical prescription of the product form and applying time transformation. But unfortunately we could not succeed to the goal wanted because of the difficulty of the calculations.

Key Words: Path Integral, propagator, Green function, Spectrum, Energy, Superintegrable Potential, Line element, Metric, curvature.

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de mouvements non relativistes dans le contexte du formalisme des intégrales de chemins de Feynman.

Dans la première partie, certains problèmes connus de la mécanique quantique ont été reconsidérés via l'intégrale de chemin de l'espace Euclidien au moyen de la technique de la fonctionnelle de Dirac utilisée dans l'espace des phases et les transformations de Duru et Kleinert.

Dans la deuxième partie, le but est de traiter, dans l'espace Riemannien avec une courbure constante, le mouvement d'une particule soumise à un potentiel super intégrable « l'oscillateur de Higgs » sur une hyperboloïde à deux dimensions, dans quatre systèmes de coordonnées où le système admet une séparation de variables. Dans le cas des systèmes de coordonnées pseudo sphériques et équidistantes, l'intégrale de chemins a été évaluée en adoptant la prescription de l'ordre de Weyl et en appliquant successivement certaines transformations et plus particulièrement temporelles convenablement choisies qui la ramène à celle de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié. Dans chaque système de coordonnées, le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes des états liés ont été exactement obtenues et sont conformes à la littérature. En ce qui concerne le cas des systèmes de coordonnées hyperboliques et elliptiques on est confronté à des difficultés liées notamment à la nature complexe de ces coordonnées. Des tentatives ont été menées afin de surmonter le problème de la séparation de variables via la prescription canonique de la forme produit et l'application d'une transformation temporelle. Mais malheureusement nous n'avons pas pu aboutir au but désiré à cause de la difficulté des calculs.

Mots clés : Intégrales de Chemins, Propagateur, Fonction de Green, Spectre, Energie, Potentiel Super Intégrable, Élément de Ligne, Métrique, Courbure.