

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N<sup>o</sup> d'ordre:.....  
Série:.....

**MEMOIRE**

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER

**Thème**

**Etude des noyaux riches en neutrons près des couches  
fermées de  $Z=28,50$  et  $82$**

**Par**

**SAIFI HANANE**

Soutenu le : / / 2007

**Rapporteur :**

Rouag N.

Univ. Mentouri Constantine

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Magicité et noyaux doublement magiques</b>	<b>5</b>
1.1 Nombres magiques en structure nucléaire . . . . .	6
1.1.1 Propriétés des noyaux magiques . . . . .	6
1.1.2 Effets des couches en structure nucléaire . . . . .	12
1.2 Sous couche N=40 . . . . .	14
1.2.1 Evidence empirique de fermeture de la sous-couche N=40 . . . . .	14
1.2.2 Interprétation sur la semi magicité à N=40 . . . . .	17
1.3 Structure nucléaire des noyaux magiques de Z=28, 50 et 82 et noyaux exotiques autour de ces régions . . . . .	18
1.3.1 Régions des noyaux Sn (Z=50, N=82) et Pb (Z=82,N=126) . . . . .	18
1.3.2 Région du Ni (Z=28, N=40) . . . . .	19
<b>2 Modèle en couches et interactions effectives</b>	<b>21</b>
2.1 Modèle en couches nucléaires . . . . .	21
2.1.1 Principe du modèle . . . . .	22
2.1.2 Le potentiel de l'oscillateur harmonique . . . . .	23
2.1.3 Le potentiel de Wood-Saxon . . . . .	24
2.1.4 Le couplage Spin- orbite . . . . .	25
2.2 Les interactions effectives et le système à deux corps . . . . .	26
2.2.1 Evaluation des éléments de matrice à 2 corps . . . . .	26
2.2.2 L'interaction Delta . . . . .	28
2.2.3 L'interaction delta de surface : <b>SDI</b> . . . . .	29

2.2.4	L'interaction Delta de surface modifiée ( <b>MSDI</b> ) . . . . .	30
2.3	L'espace de valence . . . . .	32
2.4	Applications et limitations du modèle en couches . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Calculs spectroscopiques sur les noyaux riches en neutrons et Similarité</b>	<b>35</b>
3.1	Région du Nickel . . . . .	35
3.1.1	Noyaux à 2 nucléons non identiques . . . . .	36
3.1.2	Noyaux à 2 nucléons identiques . . . . .	39
3.2	Région de l'Etain . . . . .	42
3.2.1	Noyaux à 2 nucléons non identiques . . . . .	42
3.2.2	Noyaux à 2 nucléons identiques . . . . .	44
3.3	Région du Plomb . . . . .	47
3.3.1	Noyaux à 2 nucléons non identiques . . . . .	47
3.3.2	Noyaux à 2 nucléons identiques . . . . .	49
3.4	Similarité . . . . .	52
3.5	Discussion des résultats . . . . .	56
3.6	Comparaison avec d'autres théories . . . . .	57
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
	<b>Références</b>	<b>65</b>
	<b>A Calculs des éléments de matrice d'interaction Delta de deux particules</b>	<b>67</b>
	<b>B Programme Delta :</b>	<b>78</b>
	<b>C Programme MSDI</b>	<b>86</b>

# Introduction

L'étude théorique détaillé sur les noyaux exotiques en parallèle avec l'expérience fournie des informations importantes sur leurs structure, les interactions entre les nucléons au sein du noyau, et aussi la validité des modèles de la structure nucléaire.

Jusqu'à présent, ces études sont focalisées sur les noyaux situent loin de la stabilité, en particulier la région des noyaux riche en neutrons. L'accès à cette région est d'une extrême importance puisqu'on s'attend à observer de nouveaux comportements dans les noyaux dont le rapport  $N/Z$  est très asymétrique ainsi que dans les noyaux peu liés proches de la drip line.

Des modestes recherches dans les noyaux riches en neutrons produisent de nouvelles informations sur l'évolution de la structure nucléaire, l'évolution des nombres magiques loin de la stabilité et aussi les phénomènes nouveaux dérivant d'une géométrie nucléaire différente de celle qui gouverne les noyaux stables (apparition de halo chez les noyaux légers, peau de neutrons, déformation, modification de la répartition en couches...).

Ces recherches ont été réalisées grâce au développement des techniques expérimentales d'un part, et grâce aux avancées effectuées sur les détecteurs de haute performance d'autre part.

L'études des noyaux riches en neutrons près des régions à nombres magiques présentent un outil intéressant pour tester les calculs du modèle en couches et l'interaction nucléaire  $N-N$ , spécialement pour les régions riches en neutrons au voisinage des noyaux doublement magiques  $^{208}\text{Pb}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  et semi doublement magique  $^{68}\text{Ni}$ . L'étude théorique et expérimental des noyaux aux voisinage de ce dernier devient un sujet très intéressent pour les chercheurs de la structure nucléaire et pour les expérimentateurs.

Ce mémoire est articulé en trois chapitres :

Le premier chapitre, porte sur les propriétés des noyaux magiques et doublement magiques, les effets de la magie sur la structure nucléaire, la semi magie du nickel  $^{68}\text{Ni}$ , ainsi que les études des noyaux riches en neutron autour des trois régions du nickel  $^{68}\text{Ni}$ , de l'étain  $^{132}\text{Sn}$  et du plomb  $^{208}\text{Pb}$ .

Le deuxième chapitre, rappelle les notions de base du modèle en couches nucléaire, les interactions effectives schématiques **Delta** et **MSDI**, ainsi que les différentes applications et limitations de ce modèle.

Le troisième chapitre, contient les calculs des spectres en énergie d'excitation des noyaux intéressants dans le cadre du modèle en couches à l'aide des interactions **Delta** et **MSDI**.

La similarité déduite par Blomqvist [1], entre des noyaux riches en neutrons près des deux régions de noyaux doublement magiques  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$ , est élargie à la région riche en neutrons des noyaux semi-doublement magique  $^{68}\text{Ni}$ .

Une confrontation de nos calculs avec les résultats obtenus dans la littérature par d'autres théories est réalisée. Enfin, une conclusion générale de notre travail.

# Chapitre 1

## Magicité et noyaux doublement magiques

Le nombre magique est un concept très important dans plusieurs domaines de la physique, tellesque la physique atomique, la physique nucléaire et la physique des micro-clusters. En physique nucléaire, les noyaux à nombres magiques ont été les sujets chauds des recherches nucléaires depuis le début de ce thème. En particulier, les noyaux magiques en neutrons sont d'intérêt spécial pour l'étude du processus-r astrophysique [2]. Ce nombre magique est la quantité la plus fondamentale gouvernant la structure nucléaire. L'identification de son origine a permis à Mayer et Jensen d'élaborer le modèle en couches nucléaire [3]. L'étude de la structure nucléaire a progressé sur la base de la structure en couche associée aux nombres magiques. Elle a été faite notamment pour les noyaux stables qui sont près ou sur la ligne de stabilité  $\beta$  dans la charte nucléaire. Ces noyaux étaient accessibles expérimentalement. Dans de tels noyaux, la structure en couches est comprise en termes de potentiel d'oscillateur harmonique avec un splitting de nature spin-orbite. Alors qu'avec les études des noyaux exotiques loin de la stabilité et les développements de faisceaux nucléaires radioactifs, les nombres magiques peuvent avoir une issue bien intrigante dans de tels noyaux. On a montré que de nouveaux nombres magiques sont apparus alors que d'autres ont disparu en allant dans la charte des noyaux stables vers les noyaux exotiques expliqués par un comportement particulier de l'interaction nucléon-nucléon.

## 1.1 Nombres magiques en structure nucléaire

L'étude des noyaux stables a démontré que certains édifices nucléaires, composés d'un nombre spécifiques de neutrons ( $N$ ) ou de protons ( $Z$ ), étaient plus liés que d'autres. Ainsi les noyaux ayant des nombres paires de protons et de neutrons sont plus stables que ceux ayant des nombres impairs. En particulier, les noyaux ayant des nombres égaux à 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126 de neutrons et/ou de protons semblent être particulièrement favorables en terme de stabilité nucléaire : ces noyaux sont appelés noyaux magiques.

Les noyaux qui ont un nombre de neutron et de proton égal à un de ces nombres magiques se nomment 'doublement magique' et sont encore plus stables ; exemple :  ${}^4_2\text{He}_2$ ,  ${}^{16}_8\text{O}_8$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$  [4].

L'étude des noyaux magiques et doublements magiques est la base de la construction de nos connaissances sur le matière nucléaire, spécialement à cause de leur stabilité exceptionnelle. Les bases du modèle en couches sont faites essentiellement sur ces couches fermées qui possèdent des propriétés parfaites du point de vue quantique. L'élargissement aux systèmes à quelques nucléons autour de ces couches fermées est faite par la suite.

### 1.1.1 Propriétés des noyaux magiques

La forte indication de la mise en évidence des nombres magiques est la stabilité de ces noyaux, les éléments stables à la fin de la série radioactive naturelle ont tous -un  $N$  ou  $Z$  magique, le calcium fournit un bon exemple de la stabilité exceptionnelle des " noyaux doublement magique "[4].

Cette sur-stabilité des couches fermées est similaire au gaz nobles en physique atomique, le noyau est caractérisée par un grand écart énergétique entre les dernières couches, le système est parfaitement stable et difficile à exciter, un bon exemple de cette stabilité est le cas du  ${}^{208}\text{Pb}$  qui est doublement magique.

C'est bien remarqué que la stabilité des noyaux magiques est relative, on tenant compte des cas des noyaux exotiques doublement magiques comme le  ${}^{78}\text{Ni}$  qui représente une double fermeture de couches mais c'est un élément instable et se situé loin de la stabilité (figure 1-13), sa durée de vie est de 200 ms [5] , son dernier isotope stable est  ${}^{64}\text{Ni}$  (durée de vie de l'ordre des années), mais de point de vue de la physique nucléaire cet élément a une durée de

vie importante en la comparant avec d'autres isotopes plus exotiques.

Ainsi le noyau  $^{48}\text{Ni}$ , qui est doublement magique de côté riche en protons, et attendre être stable, mais quelques théoriciens ont prévu que le  $^{48}\text{Ni}$  doit être instable parce qu'il contient 11 neutrons en moins par rapport aux autres isotopes du nickel [6].

## L'abondance isotopique

Une des premières observables mettant en évidence l'existence des nombres magiques, est l'abondance importante sur terre de certains noyaux pair-pairs ayant des nombres de protons  $Z$  ou de neutrons  $N$  magiques. Parmi ces noyaux, l'exemple du  $^{56}\text{Fe}$ , qui représente une exception à cette règle, est l'élément d'abondance naturelle la plus élevée (figure 1-1), qui résulterait de la décroissance partielle en  $\beta$  du noyau parent  $^{58}\text{Ni}_{28}$  à double fermeture de couches. En plus, la croissance dans l'abondance élémentaire des éléments stables avec  $A \sim 80$  et  $A \sim 130$  est probablement associée aux points de branchement du processus-r de la nucléosynthèse vers les nombres magiques  $N=50$  et  $N=82$  respectivement.

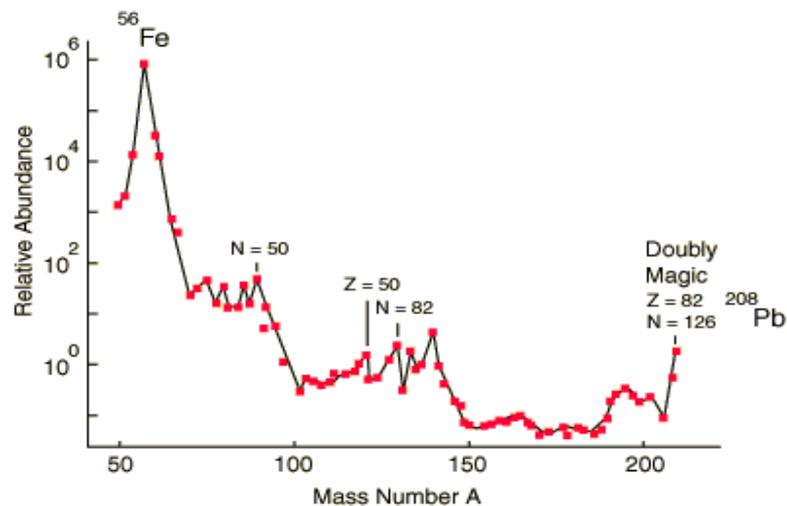


FIG. (1-1) : Abondance isotopiques des éléments sur terre [4].

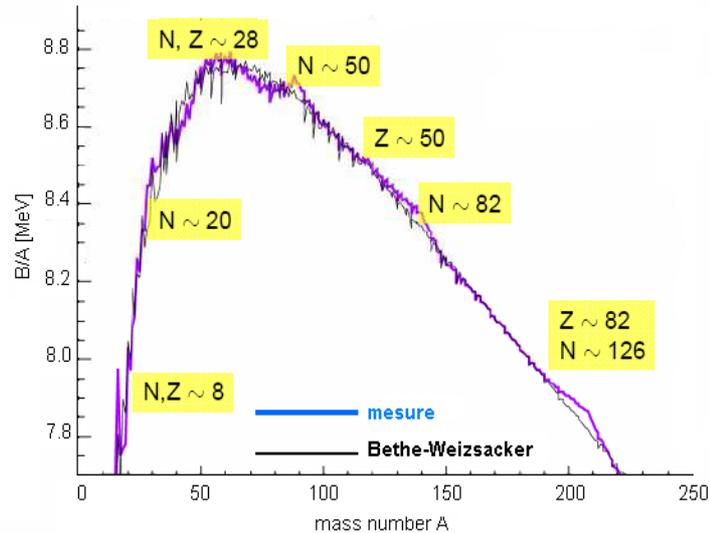
## L'énergie de liaison :

L'énergie de liaison nucléaire est une propriété de base du noyau, elle est un objectif très important pour identifier la structure des couches.

Les mesures expérimentales des masses des noyaux stables ont été une des premières preuves de l'existence des noyaux magiques. Une quantité très sensible à la fermeture de

couche dans les noyaux est dérivée de ces masses et elle peut être bien expliquée en terme d'énergie de liaison de 2 neutrons. Cette énergie est grande pour les nombres magiques, elle possède aussi des maximums pour les nombres magiques de neutron et diminue par l'ajout d'un neutron supplémentaire [4].

L'énergie de liaison expérimentale et calculée par la formule de 'Weizsäcker' pour l'ensemble des noyaux connus actuellement, est montrée sur la figure (1-2) :



**FIG. (1-2) :** Energie de liaison des éléments connus [7]

### L'énergie du premier état excité

L'énergie d'excitation du premier niveau excité est aussi un paramètre indiquant la stabilité d'un noyau. Pour les noyaux pair-pairs, la fermeture de couches implique une grande énergie d'excitation du premier niveau excité  $2^+$ . L'évolution de cette énergie est montrée sur le figure (1-4). Les valeurs maximales correspondent aux noyaux à une fermeture de couches, et les pics correspondent aux noyaux doublement magiques. Ceci est due au fait que les noyaux magiques et doublement magiques sont relativement difficiles à exciter.

### La probabilité de transition

Un autre paramètre qui indique la magie est la mesure de la collectivité d'un noyau ou de la probabilité de transition du premier état excité  $2^+$  vers le fondamental, nommée  $B(E2 : 2^+ \rightarrow 0^+)$ . Sa valeur est beaucoup plus faible pour les noyaux magiques ou doublement magiques.

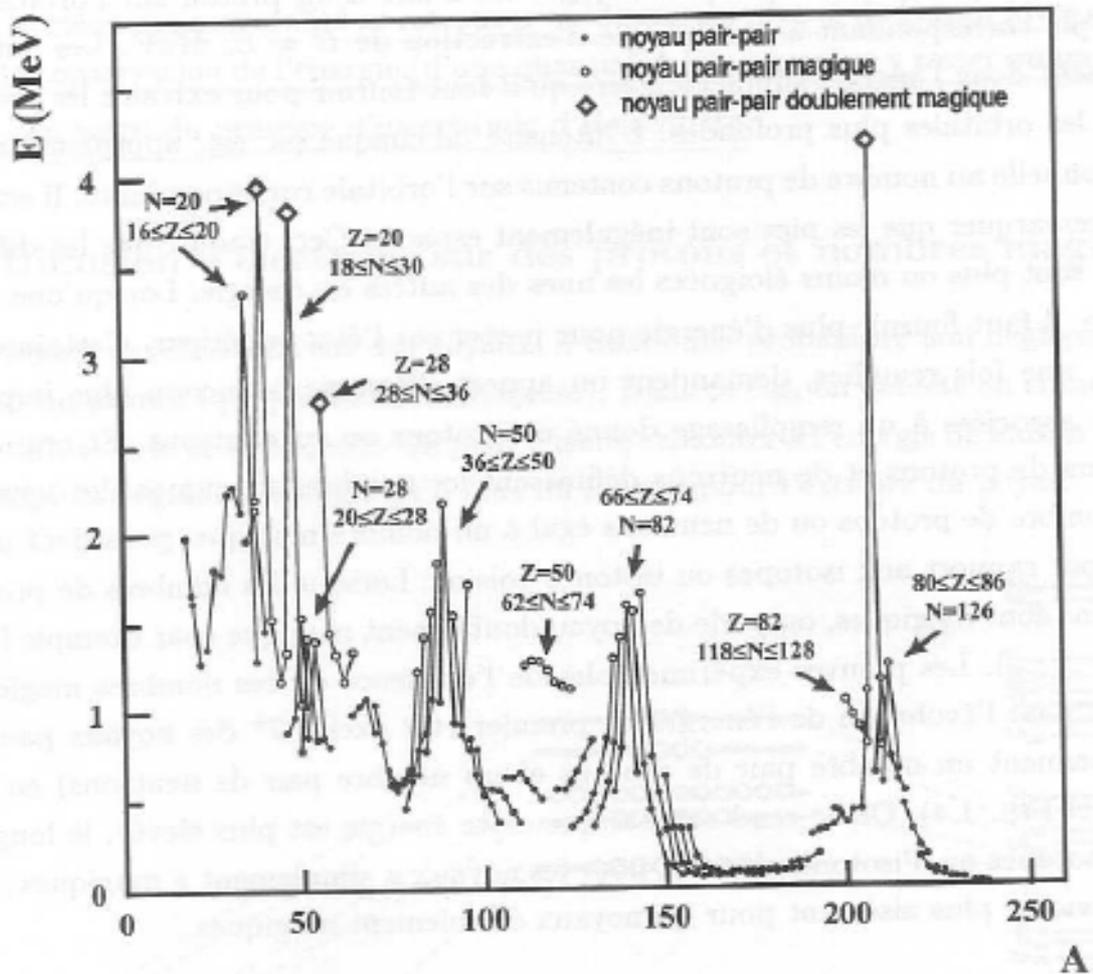


FIG. (1-4) : L'évolution de  $E(2_1^+)$  pour les noyaux pair- pairs [8]

La figure (1-3) montre l'évolution des  $B(E2)$  des isotopes paires avec une fermeture de couche. Il est bien clair qu'à chaque série d'isotopes, l'élément avec double fermeture possède la plus faible valeur de  $B(E2)$ .

### Energie de séparation de nucléons

C'est l'énergie nécessaire transférée au noyau pour déplacer ou enlever un ou deux nucléons. Les nucléons aux fermetures de couches étant appariés, alors il est difficile de les éjecter de ces couches, donc une fermeture de couche est caractérisée par une grande énergie de séparation, juste après cette fermeture, on s'attend immédiatement à une diminution de cette énergie.

- **Energie de séparation de deux neutrons  $S_{2n}$**

Du côté riche en neutrons de la charte nucléaire,  $S_{2n}$  est l'énergie nécessaire pour déplacer les deux derniers neutrons. Elle est maximale pour les noyaux plus liés que leurs voisins.

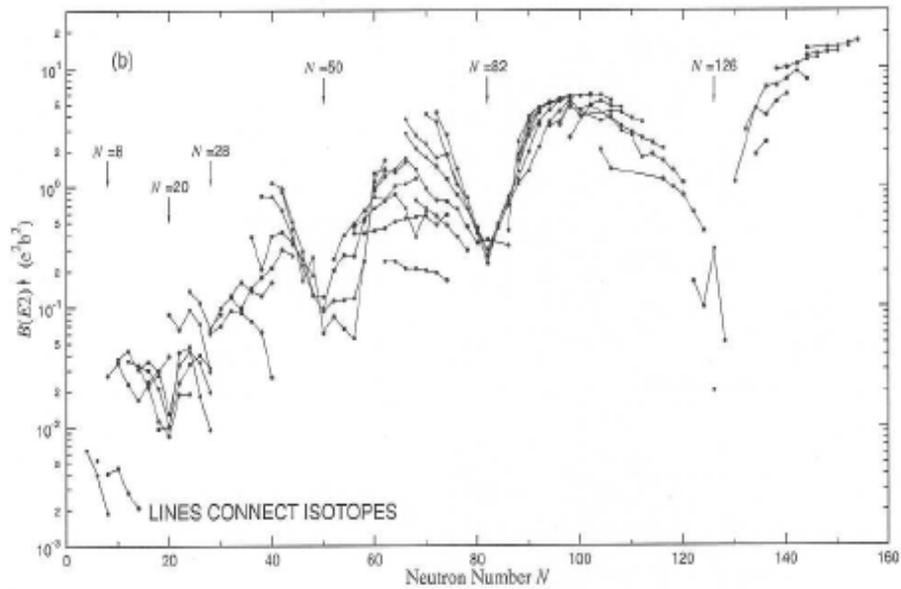


FIG. (1-3) :  $B(E2)$  des noyaux pair-pairs [8].

La variation de  $S_{2n}$  de l'ensemble des isotopes pour différents  $N$  montre qu'il y a une légère variation pour tous les noyaux, mais celle-ci subit une diminution brutale en traversant les nombres magiques où les neutrons seront plus facilement éjectés. Cet effet est schématisé pour la fermeture de couche  $N=50$  sur la figure (1-5) [7]. Les autres fermetures sont bien représentées dans la référence [6].

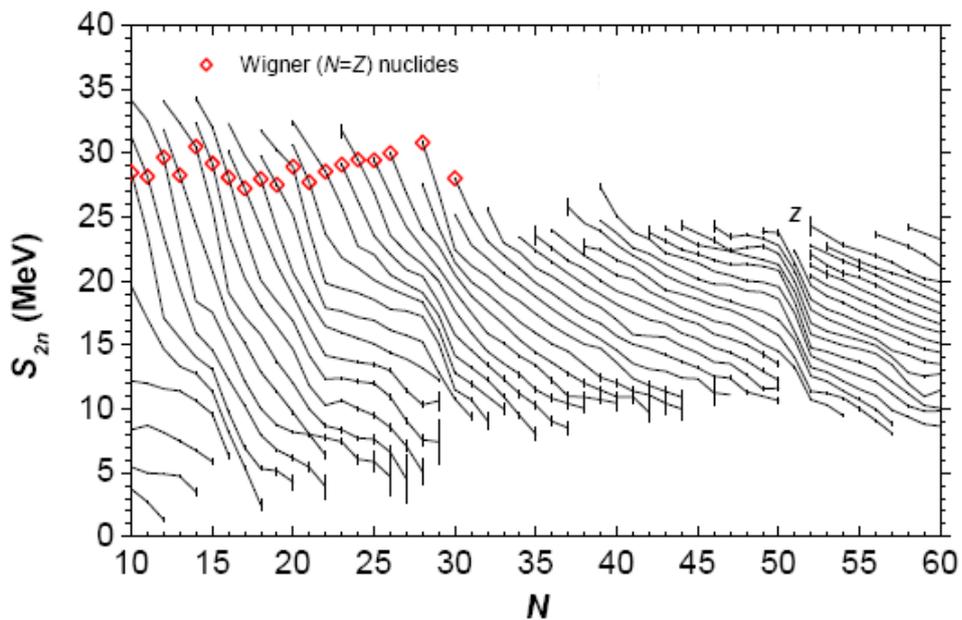


FIG. (1-5) : Variation de  $S_{2n}$  pour l'ensemble des noyaux légers et intermédiaires, en fonction de  $N$  [7].

• **L'énergie de séparation de deux protons  $S_{2p}$**

L'énergie de séparation de 2 protons est [2] :

$$S_{2p}(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 2, N)$$

Où  $B(Z, N)$  est l'énergie de liaison du noyau à  $N$  neutrons et  $Z$  protons,  $S_{2p}$  est important pour décrire les noyaux et les fermetures des couches correspondantes. Sur la figure (1-6) on représente l'énergie de séparation de deux protons pour les isotones de  $N=8, 20, 28, 50, 82$  et  $126$  en fonction de nombre de protons  $Z$ .

L'effet de couches est très clair pour les chaînes isotoniques de  $N= 8, 82$  et  $126$ , mais il est assez clair pour les chaînes isotoniques de  $N=20, 28$  et  $50$ .

**Pour  $N=8$**  : la fermeture de couche  $1p_{1/2}$  à  $Z=8$  est bien claire.

**Pour  $N=20$**  : en plus de la fermeture de couche  $1p_{1/2}$  à  $Z=8$ , on a les deux autres fermetures  $1d_{3/2}$  à  $Z=20$  et  $1f_{7/2}$  à  $Z=28$  correspondantes aux éléments  ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$  et  ${}^{48}_{28}\text{Ni}_{20}$  respectivement.

Une nouvelle semi fermeture de couche est observée dans cette chaîne, est la couche  $1d_{5/2}$  à  $Z=14$ , correspondante à l'élément  ${}^{34}_{14}\text{Si}_{20}$ .

**Pour  $N=28$**  : deux fermetures de couches neutrons sont observées,  $1d_{3/2}$  à  $Z=20$  et  $1f_{7/2}$  à  $Z=28$  qui correspondent aux éléments  ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$  et  ${}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}$  respectivement.

**Pour  $N=50$**  : une fermeture de couche  $1f_{7/2}$  à  $Z=28$  est assez claire, correspondante à l'élément  ${}^{78}_{28}\text{Ni}_{50}$ .

**Pour  $N=82$**  : en addition au fermeture de couche traditionnel  $1g_{9/2}$  à  $Z=50$  ( ${}^{132}_{50}\text{Sn}_{82}$ ), on dénote qu'il y a une nouvelle semi couche  $1g_{7/2}$  à  $Z=58$  est correspond à l'élément  ${}^{140}_{58}\text{Ce}_{82}$ .

**Pour  $N=126$**  : en addition à la fermeture de couche bien connue  $1h_{11/2}$  à  $Z=82$  ( ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ), une nouvelle semi couche  $1h_{9/2}$  est observée à  $Z=92$  ( ${}^{218}_{92}\text{U}_{126}$ ), cet élément est étudié comme un noyau doublement magique.

L'énergie de séparation de deux protons devient négative quand le noyau devient instable ce qui est observé pour les cas des chaînes isotoniques de  $N=8$  et  $20$ , comme les noyaux  ${}^{34}_{14}\text{Si}_{20}$  ( $Z=14$ ) et  ${}^{48}_{28}\text{Ni}_{20}$  ( $Z=28$ ).

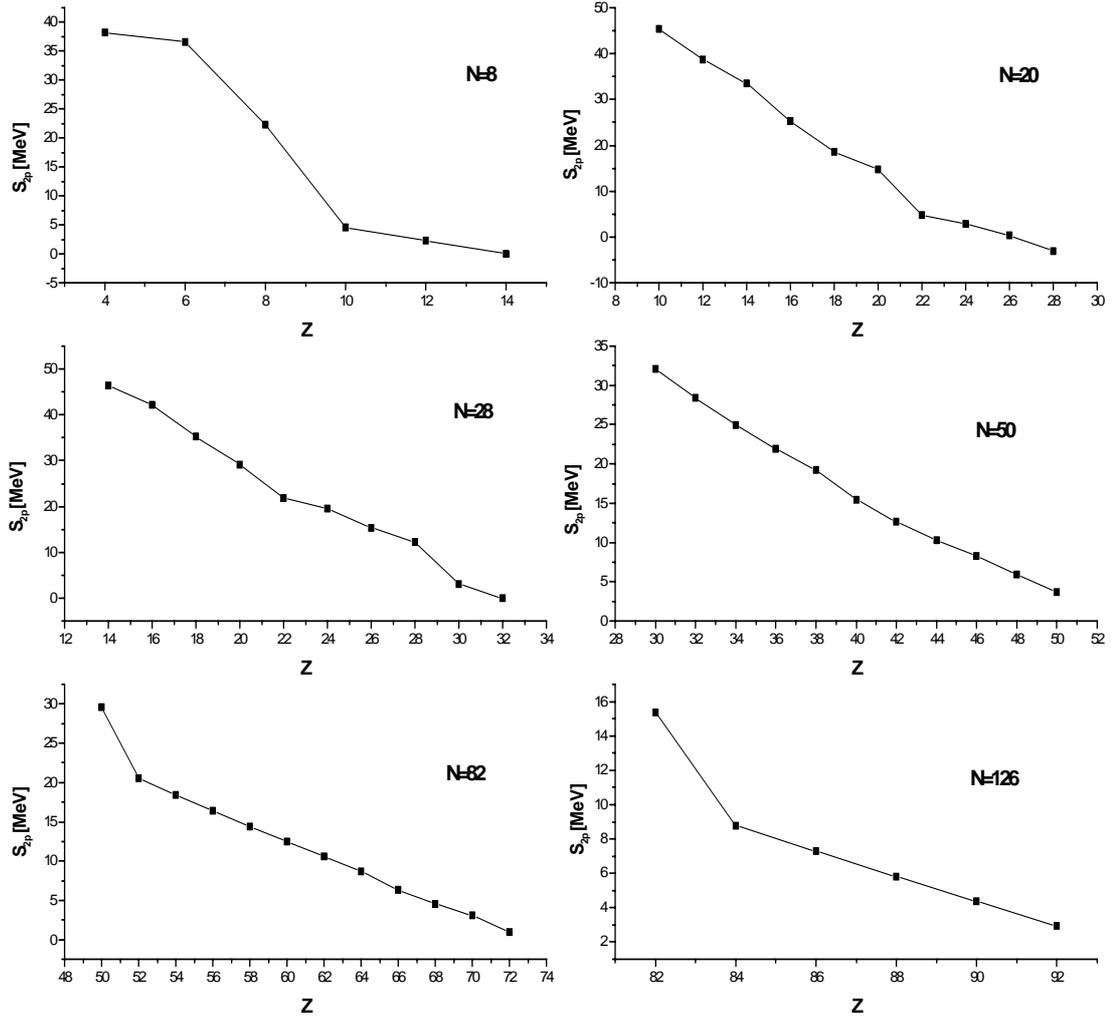


FIG. (1-6) : Evolution de  $S_{2p}$  pour les isotones de  $N=8, 20, 28, 50, 82$  et  $126$  [6].

### 1.1.2 Effets des couches en structure nucléaire

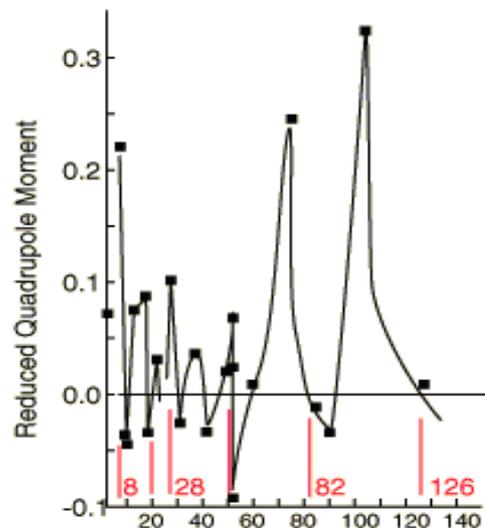
La structure en couche des noyaux a été initialement attribuée à l'accroissement de la stabilité relative des noyaux avec des protons et/ou des neutrons à nombres magiques [9]. Cette stabilité accrue par rapport à leurs voisins se manifeste dans la masse liée à l'énergie de liaison de ces isotopes. Cet effet est encore plus visible dans les spectres des énergies de séparation d'un ou de deux neutrons (figure 1-5). Dans de tels courbes, on observe l'effet du discontinuité très prononcée au nombre magique  $N=126$  pour le plomb.

Les effets de couches sont aussi apparents dans l'accroissement de nombre des isotopes (isotones) stables avec N (Z) magique. en particulier les chaînes étendues des isotopes existés pour le calcium ( $^{40}\text{Ca}$  au  $^{48}\text{Ca}$ ), le nickel ( $^{58}\text{Ni}$  au  $^{64}\text{Ni}$ ) et l'étain ( $^{112}\text{Sn}$  au  $^{124}\text{Sn}$ ) à cause des fermetures à Z=20, 28 et 50 respectivement. Des effets similaires peuvent être obtenus pour les fermetures des couches de neutrons à N=28, 50, 82 et 126.

D'autre part, à la limite de drip line proton, les effets de couches sont responsables de l'augmentation de la stabilité. Ce qui est observé dans le cas du noyau  $^{48}\text{Ni}$ .

D'autres indications des effets des couches sphériques peuvent être obtenues par la mesure des moments quadripolaires électriques Q du noyaux, qui est un paramètre qui décrit la forme de la distribution de charge nucléaire, les valeurs non nulles de Q indiquent que cette distribution n'a pas une symétrie sphérique.

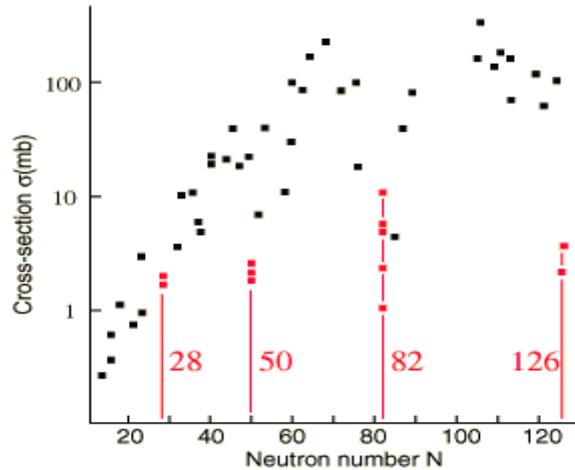
D'après le modèle en couches, les noyaux magiques ont des formes sphériques, donc une densité de symétrie sphérique, ceci implique que les couches fermées possèdent un Q nul ou très proche de zéro. Ce moment dépend de la taille, forme et charge du noyau, ce qui permet d'utiliser le moment quadripolaire réduit qui est représenté sur la figure (1-7) [4].



**FIG. (1-7) :** Moment quadripolaire réduit en fonction de N ou Z, dans le modèle en couche, les couches fermées doivent avoir une symétrie sphérique et un moment nul [4].

Un autre effet de la fermeture des couches porte sur la section efficace de capture d'un neutron. La stabilité des noyaux de N magique rend ces noyaux non préférable au excitation par bombardement de neutron. La probabilité d'absorption de neutron est exprimer comme

une section efficace de capture de neutron incident, cette section est inférieure de deux ordre de grandeur aux celles des autres isotopes qui l'entourent, ce qui est bien représenté sur la figure (1-8), en particulier les noyaux de  $N=28$ ,  $50$ ,  $82$ , et  $126$  [4].



**FIG. (1-8) :** Section efficace de capture des neutrons en fonction de  $N$  [4].

## 1.2 Sous couche $N=40$

### 1.2.1 Evidence empirique de fermeture de la sous-couche $N=40$

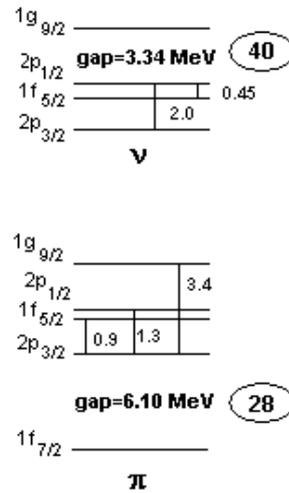
A l'aide d'une cascade de résultats expérimentaux, plusieurs théoriciens et expérimentateurs ont proposé des explications de la fermeture de couche à  $N=40$ . Spécialement, les résultats récents sur les gaps en énergie, les énergies  $\mathbf{E}(2_1^+)$  et la probabilité de transition  $\mathbf{B}(\mathbf{E}2)$ , donnent la signature magique au  $^{68}\text{Ni}$ . La plus part des phénomènes identifiés actuellement dans la région du nickel indiquent la semi fermeture de couche à  $N=40$ , du  $^{68}\text{Ni}$ .

La présence de la fermeture de couches est expliquée en premier par la présence d'une large énergie de gap entre les états individuels, ceci donne naissance à une discontinuité des différentes propriétés du noyaux qui possèdent une fermeture de couches par rapport au noyaux voisins [10]. Plusieurs observations expérimentales ont mis en évidence l'existence de cette semi fermeture.

La proposition que  $N=40$  est une sous couche fermée a été suggérée par la découverte que le premier état excité du  $^{68}\text{Ni}$  (couche proton fermée  $Z=28$ ) a un spin  $0^+$  et se trouve à une

énergie élevée (1770 KeV) comparativement aux premiers états excités dans les noyaux pair-pairs voisins [11].

Dans l'image du modèle en couches une fermeture à N=40 peut être formée lorsque le gap en énergie entre les orbitales  $fp$  ( $p_{3/2}$ ,  $f_{5/2}$  et  $p_{1/2}$ ) et l'orbitale  $g_{9/2}$  est grand (figure 1-9) [10].



**FIG. (1-9) :** Gaps entre les états individuels du  $^{68}\text{Ni}$  [10].

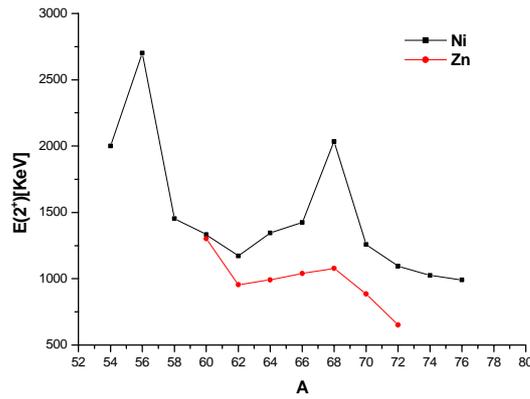
La taille de ce gap est de l'ordre de l'énergie  $\Delta$  d'appariement qui est de 2 MeV à peu près. Généralement, les couches fermées ont des gaps d'énergie supérieures à 3 MeV, bien au dessus de  $\Delta$ . Pour cette raison, la sous couche N=40 est décrite comme une sous couche fermée où couche semi magique.

L'évidence additionnelle que le  $^{68}\text{Ni}$  est un noyau semi doublement magique vient de la valeur expérimentale d'énergie de son premier état excité  $2^+$ , 2033 KeV [12], valeur très élevée comparée à celles du premiers états excité des noyaux pair-pairs voisins (figure 1-10) [12, 13, 14].

On observe que le  $E(2^+)$  augmente de plus que 500 KeV entre  $^{66}\text{Ni}$  et  $^{68}\text{Ni}$ , puis diminue pour le prochain isotope  $^{70}\text{Ni}$ . Il y a deux maxima pour l'énergie  $E(2^+)$ , l'un pour  $^{56}\text{Ni}$  ( $Z=N=28$ ), et l'autre pour le  $^{68}\text{Ni}$  ( $Z=28, N=40$ ), entre les deux les  $E(2^+)$  restent presque constantes et de faibles valeurs.

Par comparaison, l'évolution de  $E(2^+)$  pour les isotopes du Zn ( $Z=30$ ) qui a deux particules protons est complètement différente de celle observée pour le Ni ( $Z=28$ ). Toutes les valeurs de  $E(2^+)$  de cette série des isotopes, sont inférieures de celles du Ni ( $Z=28$ ) et ne

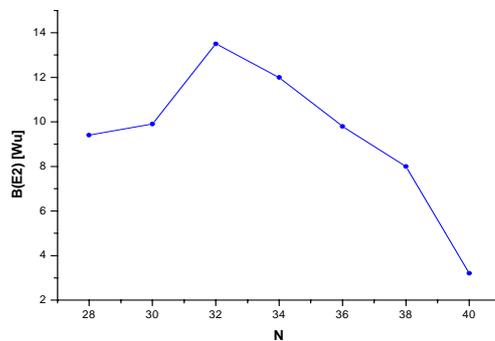
possèdent pas des maxima spécialement aux couches fermées et à la sous couche N=40.



**FIG.(1-10) :** Evolution des énergies d'excitation du premier  $2^+$ , pour les isotopes pairs du Ni ( $Z=28$ ) [13, 14, 15].

Une autre évidence de la semi magicité de N=40 est montrée sur la figure (1-11)[15, 16]. L'évolution de la probabilité de transition en fonction de nombre de neutrons N montre une diminution remarquable.

Le  $B(E : 0^+ \rightarrow 2^+)$  augmente pour les isotopes de nickel de N inférieure à 38 et possède un maximum pour le  $^{60}_{28}\text{Ni}_{32}$  puis commence à diminuer en approchant de  $^{68}\text{Ni}$ . La valeur de  $B(E2)$  du  $^{68}\text{Ni}$  (3.2 Wu) [15] est très faible par rapport au celle du  $^{56}\text{Ni}$  (plus que 2 fois plus petite) et qui représente une des plus petites valeurs pour un noyau semi doublement magique, ceci est due au faite que la parité positive de l'orbital  $1g_{9/2}$  interdit les excitations quadripolaires à partir de la couche  $fp$  de parité négative ce qui implique cette fort réduction de  $B(E2)$  [16]. Ces observations donnent un caractère mais pas purement doublement magique au noyau  $^{68}\text{Ni}$ .



**FIG.(1-11) :** L'évolution de  $B(E2 : 0^+ \rightarrow 2^+)$  pour les isotopes pairs de nickel [15, 16].

D'autre part, l'évolution de l'énergie de séparation de 2 neutrons dans les isotopes du nickel (figure 1-5) montre l'absence de signature de la magie à N=40.

### 1.2.2 Interprétation sur la semi magie à N=40

Il est bien étudié pour les noyaux magiques que l'énergie de séparation de deux neutrons subit une diminution brutale juste après la fermeture de couche en neutron ( voir figure 1-5), cet effet est clair pour la couche N=50, mais moins évident pour N=28 et pratiquement invisible pour N=40.

Pour examiner l'évolution des fermetures de couches, on utilise une quantité nommée "Shell gap" qui peut indiquer la fermeture des couche et qui est donné par [9] :

$$S_n(Z, N) = S_{2n}(Z, N) - S_{2n}(Z, N + 2)$$

La variation de  $S_n$  pour les isotopes du nickel est montré sur la figure (1-12) [5], où la couche fermée possède un maximum à N=28, ( $^{56}\text{Ni}$ ). Mais, ailleurs la variation de la courbe est lisse et ne présente pas de maxima prononcé à N=40, indique aussi l'absence de signature de magie à cette valeur.

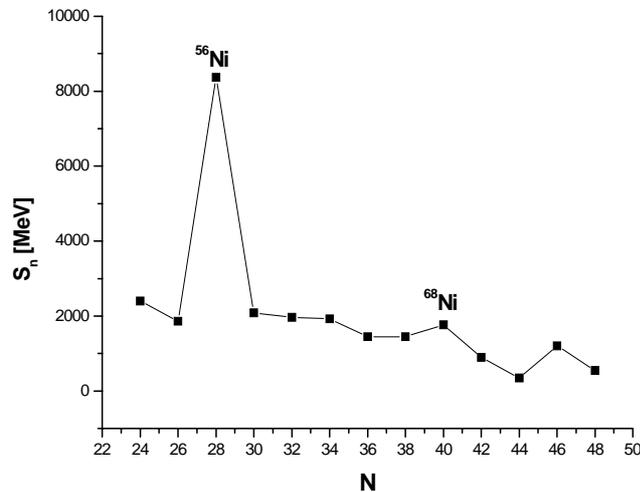


FIG. (1-12) :  $S_n$  expérimentales des isotopes de la série du nickel [6].

## 1.3 Structure nucléaire des noyaux magiques de $Z=28$ , 50 et 82 et noyaux exotiques autour de ces régions

Les régions des noyaux riches en neutron ont été le sujet de plusieurs études intensives expérimentales et théoriques. L'ensemble de ces noyaux sont centrés par des couches fermées ou doublement fermées.

### 1.3.1 Régions des noyaux Sn ( $Z=50$ , $N=82$ ) et Pb ( $Z=82$ , $N=126$ )

Les régions riches en neutrons de  $^{132}\text{Sn}$  et le  $^{208}\text{Pb}$  sont bien étudiées par les physiciens de la structure nucléaire, parce qu'elles fournissent des informations très intéressantes dans la structure nucléaire aussi bien dans l'astrophysique.

L'étude des noyaux autour des couches doublement fermées jouent un rôle clefs pour tester les prédictions du modèle en couches. Dans ce concept, l'intérêt spécial des noyaux autour de ces deux régions, la double fermeture des couches de ces deux noyaux magiques ont fourni une variété d'informations, spécialement sur les effets des couches fermées sur la structure nucléaire.

Dans ce sens, le noyau doublement magique  $^{132}\text{Sn}$  est bien étudié par la théorie et l'expérimental, car il représente la forte fermeture des couches (un large gap de l'ordre de 4 MeV en comparaison avec le  $^{208}\text{Pb}$  qui est de l'ordre de 3 MeV, figure 3-16), et les noyaux de quelques nucléons de valence montre une simple structure similaire à celle de la région du  $^{208}\text{Pb}$ . Ces noyaux fournissent des informations utiles sur les énergies d'excitation des états individuelles, l'interaction **N-N**, et la charge effective dans une partie importante de la charte nucléaire. Comme dans la région du  $^{208}\text{Pb}$ , la région de  $^{132}\text{Sn}$  fournit une excellente opportunité pour les applications du modèle en couches dans des espaces réduits et de tester la validité de l'hamiltonien de l'interaction effective dans cette région [17].

Les noyaux de la région de  $^{132}\text{Sn}$  sont situés loin de la ligne de stabilité figure (1-13), ils sont difficiles à reproduire expérimentalement. Parmi les méthodes de leur production, la fission induite et spontanée par les neutrons thermiques des sources des  $^{252}\text{Cf}$  et  $^{248}\text{Cm}$  jouent un rôle le plus important. Les réactions profondément inélastiques, la fragmentation et la fission aux énergies relativistes sont aussi utilisées [17]. Récemment, les informations expérimentales sont disponibles par la spectroscopie  $\gamma$  des produits de fission par les détecteurs de haute

efficacité.

D'autre part, durant les années précédentes un très grand nombre des données ont été exposés sur l'effet de couche  $Z=82$ , le  $^{208}\text{Pb}$  est l'élément stable le plus lourd, est le système doublement magique le plus étudié expérimentalement et théoriquement.

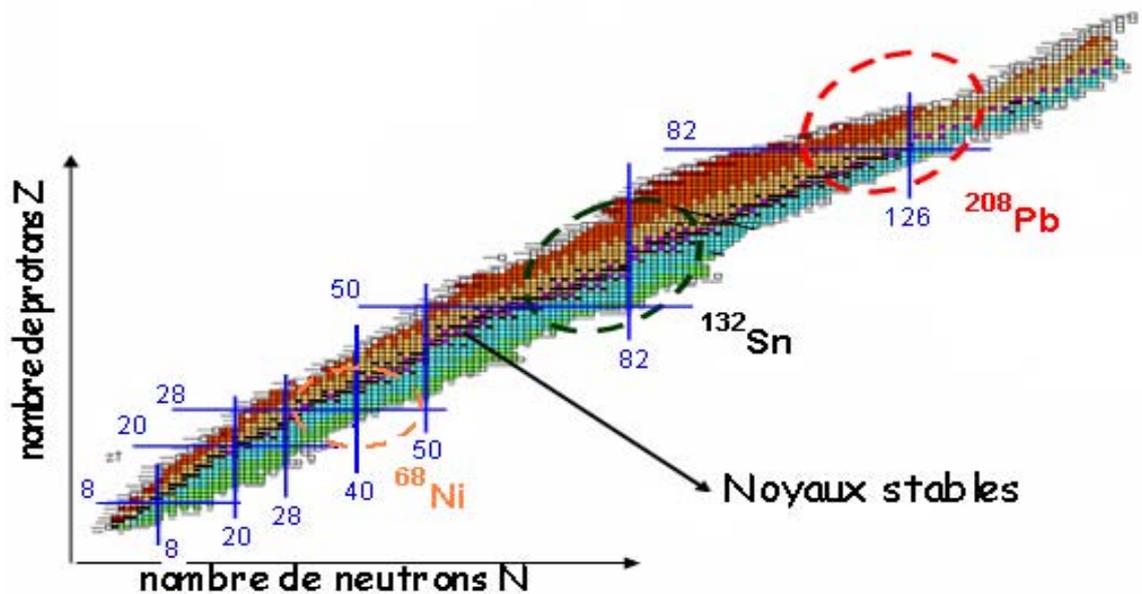


FIG. (1-13) : La charte nucléaire des éléments.

Dans le côté riche en neutrons du  $^{208}\text{Pb}$ , les informations expérimentales sont retardées par l'absence des mécanismes de réaction pour la production de ces noyaux, récemment quelques développements sont réalisés et qui utilisent la spectroscopie des isomères suivant la fragmentation des projectiles par les faisceaux d'uranium qui ont lieu au laboratoire **GSI** (Darmstadt), ceci a fourni des informations sur la désintégration à partir des états isométriques des noyaux dans cette région [9].

Aussi, des informations pareilles peuvent d'être obtenues par la fusion partielle ou les réactions profondément inélastiques pour examiner les systèmes riches en neutrons dans cette région [10].

### 1.3.2 Région du Ni ( $Z=28$ , $N=40$ )

La région riche en neutron du nickel a été le sujet de plusieurs études expérimentales ces dernières années. La plus part de ces recherches sont basées sur les noyaux autour de  $N=40$ ,

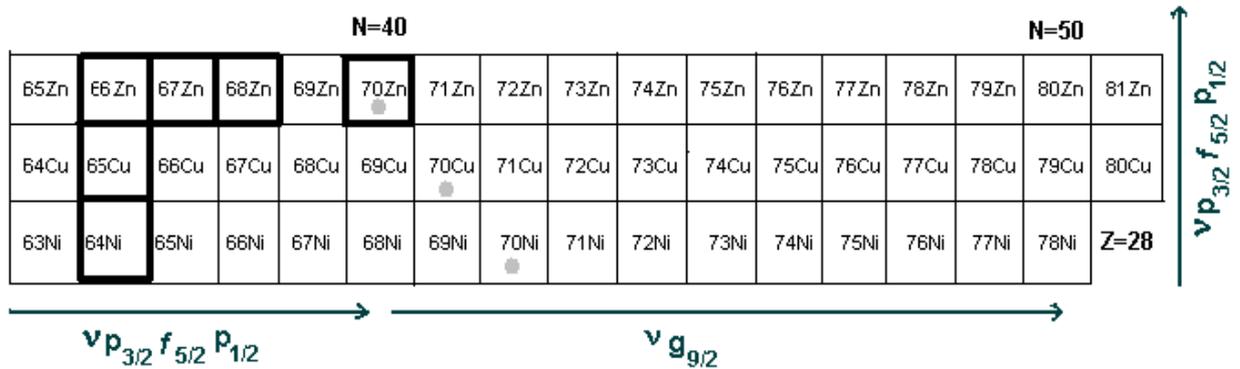
à cause des limitations expérimentales, et peu d'informations existantes sur la région des isotopes du nickel spécialement autour de  $N=50$ , où ces deux régions des isotopes du nickel restent un sujet intéressant.

La majorité des expériences sont faites à ISOLDE, et étudient les modes de désintégration  $\beta$  des différents nuclides.

En effet, localisés loin de la ligne de stabilité, ces noyaux sont très difficiles à produire. Différentes méthodes sont utilisées pour leur production, la fission spontanée ou induites par neutrons thermiques, les processus de fragmentation ou profondément inélastiques à énergie intermédiaire ou relativistes.

Dans ce travail, on étudie les noyaux ayant quelques nucléons de valence autour du coeur supposé inerte le  $^{68}\text{Ni}$ . Ces noyaux sont représentés sur la figure (1-14) [18].

Plusieurs études sont réalisés sur la région du nickel spécialement sur les masses (68-78), en particulier par le groupe de chercheurs à Ganil. Ces études sont basées sur les modes de désintégration des différents isomères et aussi quelques recherches théoriques [10, 11, 12, 19-23].



**FIG.(1-14) :** Partie de la charte nucléaire, de la région riche en neutrons du nickel et ses voisins [18]. Les cercles indiquent les noyaux étudiés dans ce travail, les cadres noirs sont les éléments stables.

Les chercheurs sur cette région rencontrent des difficultés à avoir plus d'informations sur ces noyaux parce qu'ils se situent loin de la vallée de stabilité (figure 1-13), (le dernier isotope du nickel à  $A=64$ ).

L'étude des noyaux de quelques nucléons autour des couches ( $N=40$  et  $N=50$ ) représente un déficit devant les théoriciens de la structure nucléaire pour l'explication de la magie.

# Chapitre 2

## Modèle en couches et interactions effectives

Le noyau atomique est un complexe constitué de neutrons et de protons. La compréhension de cette structure nucléaire conduit les physiciens à poser de nombreux modèles théoriques, détaillés, qui décrivent les propriétés des noyaux situés au voisinage de la vallée de stabilité ou très proches de celle-ci. Jusqu'à présent, ces modèles sont appliqués avec succès à quelques 300 noyaux stables seulement.

En 1935 Van Weizsäcker et Bethe proposent la formule semi empirique de masse qui décrit le noyau atomique comme une goutte liquide. Cette formule bien connue présente les termes de : volume, surface, coulomb, asymétrie, et l'appareillement. Ce modèle a réussi à décrire les propriétés globales des noyaux, spécialement les noyaux magiques, comme l'énergie de liaison et les limites de stabilité dues aux émissions et fissions de particule, ce modèle est mis en évidence par les observations expérimentales qui ne peut pas décrire les détails de la structure nucléaire surtout pour les noyaux les plus exotiques dans les deux côtés de la charte nucléaire.

### 2.1 Modèle en couches nucléaires

Le modèle en couches du noyau atomique a été suggéré dans les années 30 par Bartlett et d'autres physiciens et puis développé en 1949 par Maria Goeppert- Mayer, Hans Jensen, H. E. Suess, et indépendamment par D. Haxel, qui ont partagé le prix Nobel de Physique en 1963 avec Eugène Wigner pour ce travail. Le modèle, regroupe les nucléons à l'intérieur du noyau

dans des couches concentriques de protons ou de neutrons similaires à la structure atomique, et sont énergétiquement séparées les unes des autres. Ce modèle offre les possibilités d'explorer des différentes propriétés des noyaux, en particulier les noyaux magiques

### 2.1.1 Principe du modèle

Le noyau atomique est un système quantique constitué de  $A$  nucléons en interaction. Sa description se fait par l'intermédiaire de son état qui est solution de l'équation de Schrodinger :

$$H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (2-1)$$

Où  $H$  est l'hamiltonien du noyau et  $E$  son énergie. Le hamiltonien se décompose en terme d'énergie cinétique et en terme d'interaction :

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i < j=1}^A V_{i,j} \quad (2-2)$$

$T_i$  est l'énergie cinétique du nucléons et  $V_{i,j}$  est l'interaction entre les nucléons  $i$  et  $j$ .

Le modèle en couches sphérique est basé sur l'hypothèse que le nucléon se déplace à l'intérieur du noyau dans un champ moyen créé par les autres nucléons, l'hamiltonien s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A [T_i + U(\vec{r}_i)] + \sum_{i < j=1}^A V_{i,j} - \sum_{i=1}^A U(\vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^A h_0(i) + \sum_{i < j=1}^A V_{i,j}^{res} = \sum_{i=1}^A h_0(i) + H_{res} \end{aligned} \quad (2-3)$$

où  $H_0$  est l'hamiltonien d'un système de  $A$  nucléons en mouvement indépendant qui est donné par [24] :

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h_0(i) = \sum_{i=1}^A [T_i + U(\vec{r}_i)] \quad (2-4)$$

Dont les fonctions et les énergies propres sont respectivement :

$$\Psi_{a_1, a_2, \dots, a_A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \prod_{i=1}^A \varphi_{a_i}(\vec{r}_i) \quad (2-5)$$



monique à ( $N=3$ ). Mais cette fermeture disparaît avec l'addition du terme spin orbite et se déplace vers la couche  $1g_{9/2}$  qui possède  $N=50$ .

### 2.1.3 Le potentiel de Wood-Saxon

Dans le champ moyen, les détails sur le potentiel doivent être ajustés à l'aide d'observations expérimentales. De plus le potentiel du champ moyen est toujours empirique. Un exemple d'un potentiel central réaliste a été paramétrisé en 1954 par R. Woods et D. Saxon, ceci admet que la forme du potentiel est la même que celle de la distribution de Fermi, et la même aussi que la densité nucléaire, sa formule est donnée par :

$$V_{W.S}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} \quad (2-11)$$

$V_0$  : la profondeur du potentiel de woods-Saxon.

$R_0 = r_0 A^{-\frac{1}{3}}$  : rayon de noyau, représentent la largeur du potentiel.

$a$  : épaisseur de surface qui est toujours ajustée à partir des valeurs expérimentales des énergies d'ionisation.

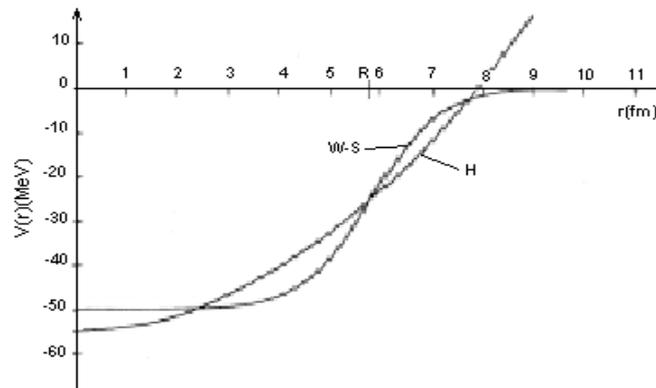
Les valeurs typiques des paramètres sont [25] :

$$V_0 \sim -50 \text{ MeV}$$

$$R_0 \sim 1.1 A^{-1/3}$$

$$a \sim 0.5 \text{ fm}$$

Ce potentiel est schématisé sur la figure (2-1) [25].



**FIG. (2-1) :** Potentiel de Woods-Saxon.

Le potentiel de Woods-Saxon est plus réaliste que celui de l'oscillateur harmonique, car il ne tend pas à l'infini en fonction de rayon  $r$ .

Ces deux potentiels ne sont pas suffisants pour interpréter tous les nombres magiques, d'où la nécessité d'ajouter un terme correctif : le couplage spin-orbite.

### 2.1.4 Le couplage Spin-orbite

Geoppert Mayer et Haxel, Jensen et Suess ont proposé d'ajouter un terme spin-orbite au potentiel du champ moyen de type oscillateur harmonique.

Ce fort couplage permettait d'expliquer naturellement tous les nombres magiques de 2 jusqu'à 126. Le potentiel du champ moyen prend la forme empirique suivante [26] :

$$U(r) = V_{O.H} + D\vec{l}^2 - f(r)\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (2-12)$$

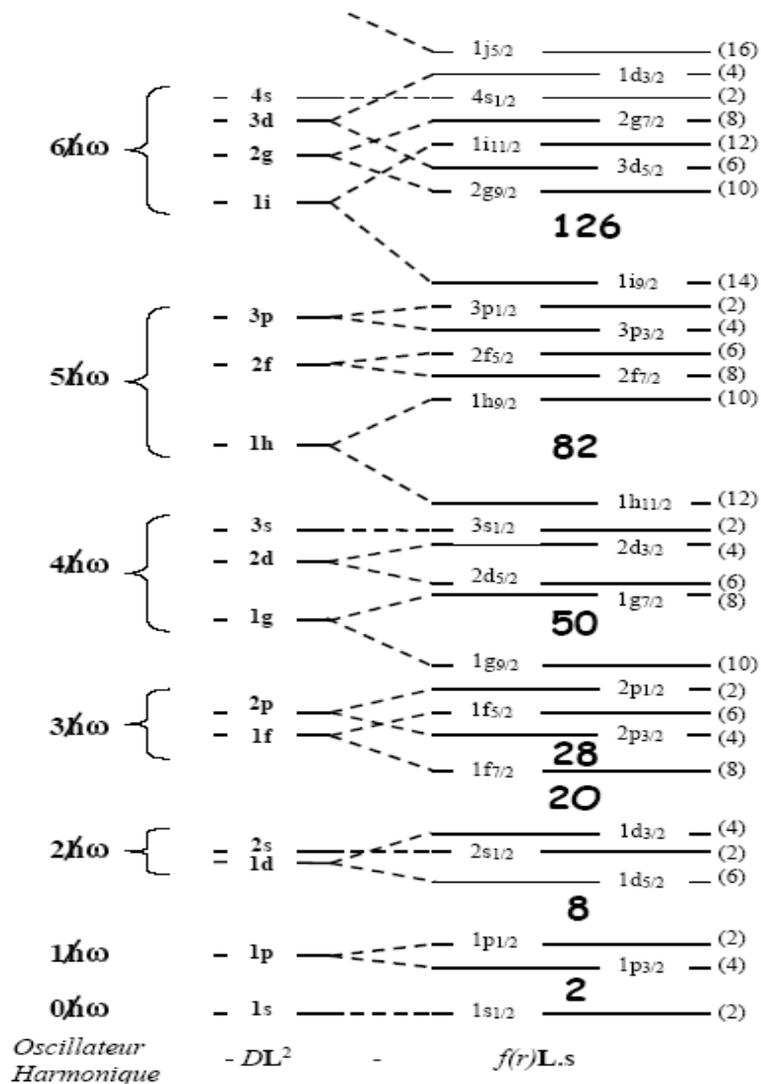


FIG. (2-2) : Niveaux nucléaires schématisés du modèle en couches.

Dans cette équation  $V_{O.H}$  est le potentiel de l'oscillateur harmonique, le terme en  $l^2$  est introduit pour lever la dégénérescence en  $l$  des solutions de l'oscillateur harmonique,  $D$  est une constante,  $l$  le moment angulaire,  $f(r)$  une fonction radiale et  $s$  le spin de la particule.

Le  $D\vec{l}^2$  est le terme qui représente l'effet de bord.

$f(r)\vec{l} \cdot \vec{s}$  est le terme spin-orbite.

Les niveaux nucléaires du modèle en couches en introduisant les effets du couplage spin-orbite sont schématisés sur la figure (2-2) ci-dessus.

## 2.2 Les interactions effectives et le système à deux corps

Pour comprendre le comportement de la matière nucléaire à basse énergie, il faut saisir ce qui assure la cohésion des constituants du noyau et donc déterminer l'interaction entre les nucléons au sein du noyau.

Dans notre travail, on a utilisé les interactions Delta et MSDI (interaction Delta de surface modifiée) afin de reproduire quelques propriétés nucléaires des noyaux des régions étudiées, correspondants aux systèmes à deux corps seulement.

### 2.2.1 Evaluation des éléments de matrice à 2 corps

Soit :  $\Psi_\Gamma(\rho_a\rho_b)$  représente la fonction d'onde antisymétrique d'un système à 2 corps avec une particule sur l'orbitale  $\rho_a$  et l'autre sur l'orbitale  $\rho_b$ , qui sont couplés avec un spin  $J_\Gamma$  et isospin  $T_\Gamma$ , la valeur de l'énergie de ce système est donnée par [27] :

$$E_\Gamma^{(1)}(\rho_a\rho_b) = \langle \rho_a\rho_b | H_{12}^{(1)} | \rho_a\rho_b \rangle_\Gamma = \langle \rho_a\rho_b | V(1,2) | \rho_a\rho_b \rangle_\Gamma \quad (2-13)$$

La valeur de l'élément de matrice à 2 corps ( TBME) dépend de l'interaction résiduelle  $V(1,2)$ , les fonctions d'ondes des particules individuelles  $|\rho_a\rangle$  et  $|\rho_b\rangle$ , et le spin et l'isospin total  $\Gamma$  du système.

Trois méthodes avec trois interactions effectives sont utilisées pour évaluer les éléments de matrice de ce système.

## **Eléments de matrices en utilisant l'interaction effective empirique**

Cette méthode est basée sur l'approche empirique à l'aide des spectres expérimentaux du nuclide. On suppose que le noyau est composé d'un coeur inerte entouré par deux nucléons, dans ce cas les schémas des niveaux sont déterminés à partir des éléments de matrice d'interaction effective résiduelle avec les énergies des états individuels des orbitales actifs qui sont obtenues des spectres expérimentaux du noyau de même coeur entouré par un nucléon célibataire (proton ou neutron), sans tenir compte des effets coulombien entre les protons [27].

Un des avantages de l'approche empirique est qu'elle ne nécessite pas de spécifier l'interaction afin de reproduire le spectre expérimentale, d'ailleurs l'élément de matrice obtenu par cette méthode est peut être introduit des valeurs des énergies en bonne accord avec l'expérience. Toute TBME des interactions effectives doit respecter ce procédure.

Les inconvénients de cette approche sont que pour la majorité des interactions empiriques, le nombre de paramètres est très large. Un exemple utilisant cette approche pour l'application sur les couches 2s1d, donne 63 TBME (28 diagonaux, 35 non diagonaux). En plus, le choix des états expérimentaux supposés être bien décrits dans l'espace modèle considéré et leurs configurations correspondantes.

Cette approche ne peut pas être utile dans les calculs des propriétés dépendantes de phase comme les sections efficaces des réactions de transfert de deux nucléons et les transitions électromagnétiques.

## **Eléments de matrices en utilisant l'interaction effective réaliste**

Dans cette approche, les TBME ne sont pas obtenues par l'ajustement des données spectroscopiques mais ils sont calculées à partir de l'interaction nucléon-nucléon. Le potentiel de cette interaction est dérivé d'une interaction réaliste très utilisée dans les calculs du modèle en couches et une autre obtenue par Hammada-Johnson.

Malheureusement, les applications directes des interactions réalistes dans les calculs du modèle en couches donnent des résultats qui ne sont pas en agrément acceptable avec les données spectroscopiques. Ceci est due au limitation des calculs du modèle en couches sur un espace modèle troncaté.

## Eléments de matrices en utilisant l'interaction effective schématique

Certaines formes simples de l'interaction entre deux particules peuvent être utilisées avec succès pour décrire différentes propriétés nucléaires. Quelques interactions schématiques ainsi que le calcul de TBME sont développés dans le cadre de ce travail.

### 2.2.2 L'interaction Delta

L'interaction Delta est une des interactions effectives résiduelles de portée nulle [20], déterminée par la force nucléaire Delta qui agit entre deux nucléons. Elle représente l'interaction la plus simple mathématiquement, dépendant du terme d'échange de spin. Sa forme est donnée par [28] :

$$V_{ab}(\vec{r}) = -V_{eff}(1 - \alpha + \alpha g \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b) \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \quad (2-14)$$

Les paramètres de la profondeur général de l'interaction  $V_{eff}$ , le terme d'échange  $\alpha$  et le paramètre  $g$  sont ajustés à partir des données expérimentales des noyaux impair-impairs de la région de masse étudiée, et les  $\vec{\sigma}_a, \vec{\sigma}_b$  sont les matrices de Pauli représentant les spin et l'isospin des deux particules a et b.

L'expression de TBME de l'interaction Delta est :

$$\langle j_a j_b JM | V_{ab}(\vec{r}) | j'_a j'_b JM \rangle = \langle j_a j_b JM | -V_{eff}(1 - \alpha + \alpha g \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b) \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | j'_a j'_b JM \rangle \quad (2-15)$$

Le calcul de l'élément de matrice à deux corps est bien développé dans l'annexe A, le TBME est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} M_J = & V_{eff} F_0 (2J+1)^{-1} j_a j'_a j_b j'_b (-1)^{j_a+j'_a+l_a+l'_a} \left\langle j_a \frac{1}{2}, j_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \left\langle j'_a \frac{1}{2}, j'_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right. \right. \\ & \left. \left. (-1)^{j_b+j'_b+l_a+l'_a} \right] - \alpha \left[ \frac{(1+3g)}{4} (1 + (-1)^{l_b+l_a+J}) + \frac{(g-1)}{2} \left( \frac{(-1)^{l_a+l_b+J} - 1}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} (-1)^{j_b+j'_b+l_a+l'_a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-16)$$

Le TBME est défini pour les systèmes de deux nucléons : non identiques (p-n) et identiques

(p-p, n-n)

**Système p-n :**

Le TBME est donné par la relation (2-16).

**Système p-p, n-n :**

On distingue deux cas :

\* Les nucléons se trouvent sur des orbitales différentes, c-à-d ( $l_a \neq l_b, j_a \neq j_b$ ). Dans ce cas, le TBME est donné toujours par la relation (2-16).

\* Les deux nucléons se trouvent sur la même orbitale, c-à-d ( $l_a=l_b=l, j_a=j_b=j$ ) et ( $J=$ paire), danc ce cas le TBME s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle j^2 JM | V_{ab}(\vec{r}) | j'^2 JM \rangle &= V_{eff} F_0 (2J+1)^{-1} j^2 j'^2 (-1)^{j+j'} \left\langle j \frac{1}{2}, j \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \left\langle j' \frac{1}{2}, j' \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \\ &\left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - (-1)^{j+j'+l+l'} \times \frac{(2j+1)(2j'+1)}{J(J+1)} \right] - \alpha \left[ \frac{(g-1)}{2} \times \right. \right. \\ &\left. \left( \frac{(-1)^{l+l'+J} - 1}{2} + (-1)^{j+j'+l+l'} \times \frac{(2j+1)(2j'+1)}{J(J+1)} \right) + \frac{(1+3g)}{4} \right. \\ &\left. \left. (1 + (-1)^{l+l'+J}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-17)$$

### 2.2.3 L'interaction delta de surface : SDI

Un autre exemple des interactions mathématique simple est l'interaction Delta de surface SDI. La simplicité de cette interaction conduit à un succès exceptionnel dans les calculs du modèle en couches d'une variété des propriétés du noyau.

Cette interaction a lieu à la surface du noyau. Car on estime que l'énergie cinétique du noyau est localisée à l'intérieur (le coeur) et l'interaction entre les nucléons a lieu à la surface. L'interaction entre deux nucléons est de nature Delta de courte portée.

D'où l'interaction SDI est décrite par la formule [27] :

$$V^{SDI}(1, 2) = -4\pi A'_T \delta(\vec{r}(1) - \vec{r}(2)) \delta(r(1) - R_0) \quad (2-18)$$

- $\vec{r}(1)$  et  $\vec{r}(2)$  sont les vecteurs positions des deux particules.
- $R_0$  est le rayon nucléaire

Le TBME est donné par :

$$\langle j_a j_b | V^{SDI}(1, 2) | j_c j_d \rangle_{JT} = -4\pi A'_T \langle j_a j_b | \delta(\vec{r}(1) - \vec{r}(2)) \delta(\vec{r}(1) - R_0) | j_c j_d \rangle_{JT} \quad (2-19)$$

L'évaluation des éléments de matrices nous donne la formule suivante [27] :

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b | V^{SDI}(1, 2) | j_c j_d \rangle_{JT} &= (-1)^{n_a+n_b+n_c+n_d} \frac{A_T}{2(2J+1)} \sqrt{\frac{(2j_a+1)(2j_b+1)(2j_c+1)(2j_d+1)}{(1+\delta_{ab})(1+\delta_{cd})}} \\ &\quad \left\{ (-1)^{l_a+l_b+l_c+l_d} [1 - (-1)^{l_a+l_b+J+T}] \left\langle j_b \frac{-1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J0 \right\rangle \times \right. \\ &\quad \left\langle j_d \frac{-1}{2}, j_c \frac{1}{2} \mid J0 \right\rangle - [1 + (-1)^T] \left\langle j_b \frac{1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J1 \right\rangle \\ &\quad \left. \left\langle j_d \frac{1}{2}, j_c \frac{1}{2} \mid J1 \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (2-20)$$

Avec :  $A_T = A'_T C(R_0)$

$C(R_0)$  est l'intégrale radiale

#### 2.2.4 L'interaction Delta de surface modifiée (MSDI)

L'interaction Delta de surface modifiée est donnée par l'expression suivante [27] :

$$V^{MSDI}(1, 2) = -4\pi A'_T \delta(\vec{r}(1) - \vec{r}(2)) \delta(\vec{r}(1) - R_0) + B'(\tau(1), \tau(2)) + C' \quad (2-21)$$

Où :  $\langle \tau(1), \tau(2) \rangle_T = 2T(T+1) - 3$

La contribution des termes ajoutés est donnée par :

$$\langle B(\tau(1), \tau(2)) + C \rangle = \begin{cases} -3B + C & \text{pour } T = 0 \\ B + C & \text{pour } T = 1 \end{cases}$$

On dénote que  $B$  et  $C$  sont les produits de  $B'$  et  $C'$  avec l'intégrale radiale  $C(R_0)$

D'après l'expression de TBME de l'interaction **SDI**, et par la diagonalisation des éléments de matrice, avec :  $\{n_a, l_a, j_a\} = \{n_c, l_c, j_c\}$  et  $\{n_b, l_b, j_b\} = \{n_d, l_d, j_d\}$ , on obtient le TBME de l'interaction MSDI donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b | V^{MSDI}(1, 2) | j_a j_b \rangle_{JT} &= -A_T \frac{(2j_a + 1)(2j_b + 1)}{2(2J + 1)(1 + \delta_{ab})} \left\{ \left\langle j_b \frac{-1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J0 \right\rangle^2 [1 - (-1)^{l_a + l_b + J + T}] \right. \\ &\quad \left. + \left\langle j_b \frac{1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J1 \right\rangle^2 [1 + (-1)^T] \right\} + [2T(T + 1) - 3]B + C \quad (2-22) \end{aligned}$$

A partir de cette expression, on identifie quelques propriétés de l'interaction MSDI.

- Pour :  $AT \succ 0$  et  $B = C = 0$

$$\langle j_a j_b | V^{MSDI}(1, 2) | j_a j_b \rangle_{JT} \leq 0 \quad (2-23)$$

- Pour  $T = 0$  :

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b | V^{MSDI}(1, 2) | j_a j_b \rangle_{J,T=0} &= -A_0 \frac{(2j_a + 1)(2j_b + 1)}{2(2J + 1)(1 + \delta_{ab})} \left\{ [1 - (-1)^{l_a + l_b + J}] \times \right. \\ &\quad \left. \left\langle j_b \frac{-1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J0 \right\rangle^2 + 2 \left\langle j_b \frac{1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J1 \right\rangle^2 \right\} - 3B + C \quad (2-24) \end{aligned}$$

- Pour  $T = 1$  :

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b | V^{MSDI}(1, 2) | j_a j_b \rangle_{J,T=1} &= -A_1 \frac{(2j_a + 1)(2j_b + 1)}{2(2J + 1)(1 + \delta_{ab})} \left\{ [1 + (-1)^{l_a + l_b + J}] \right. \\ &\quad \left. \left\langle j_b \frac{-1}{2}, j_a \frac{1}{2} \mid J0 \right\rangle^2 \right\} + B + C \quad (2-25) \end{aligned}$$

• Le couplage p-n possède deux valeurs d'isospin  $T=1$  (p-n sont parallèles) et  $T=0$  (p-n sont perpendiculaires), le TBME dans ce cas est la combinaison de  $\langle V \rangle_{T=1}$  et  $\langle V \rangle_{T=0}$ .

• Pour un système de particules identiques, le TBME se limite seulement au terme  $\langle V \rangle_{T=1}$  car les deux nucléons se couplent à l'isospin  $T=1$ . Le premier terme de l'expression (2-25) disparaît pour les ( $l_a + l_b + J = \text{impair}$ ) et :

$$\langle j_a j_b | V^{MSDI}(1, 2) | j_a j_b \rangle_{J,T=1} = B + C \quad (2-26)$$

Ceci signifie que les TBME de l'interaction MSDI des états de parité paire ( $l_a + l_b = \text{paire}$ ) sont tous identiques pour les valeurs impaires de  $J$ .

Si les deux particules sont sur la même orbitale ( $l_a = l_b, j_a = j_b = j$ ), le TBME s'écrit :

$$\langle j^2 | V^{MSDI}(1, 2) | j^2 \rangle_{J,T=1} = -A_1 \frac{(2j+1)^2}{2(2j+1)} \left\{ \left\langle j \frac{-1}{2}, j \frac{1}{2} | J0 \right\rangle^2 \right\} + B + C \quad (2-27)$$

• Pour les états de parité ( $J=0$ ), on introduit le coefficient de Clebsch Gordan :

$$\langle j \frac{-1}{2}, j \frac{1}{2} | 00 \rangle^2 = \frac{1}{2j+1} \quad (2-28)$$

On trouve :

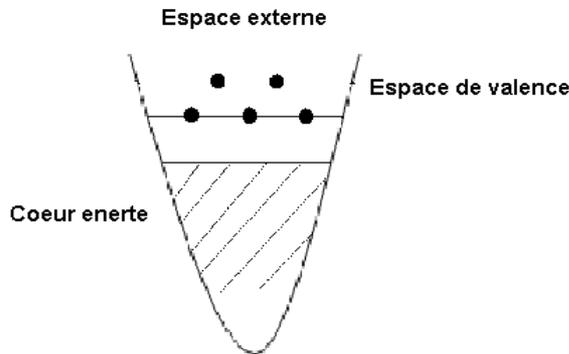
$$\langle j^2 | V^{MSDI}(1, 2) | j^2 \rangle_{J=0,T=1} = -\frac{1}{2} A_1 (2j+1) + B + C \quad (2-29)$$

## 2.3 L'espace de valence

Pour un noyau donné ( $Z, N$ ), le champ moyen définit les états occupés (situés sous le niveau de Fermi) et les états vides (situés au dessus du niveaux de Fermi). L'interaction résiduelle agit essentiellement entre les nucléons situés autour du niveau de Fermi. L'ensemble des orbitales déterminées par le champ moyen se divise en trois groupes :

- ✓ Un cœur inerte composé d'orbitales prises toujours remplies.
- ✓ Un espace de valence qui comprend les orbitales accessibles aux particules de valence.
- ✓ L'espace externe constitué d'orbitales toujours vides.

Ces trois groupes forment l'espace de Hilbert. Cet espace est schématisé sur la figure (2-3).

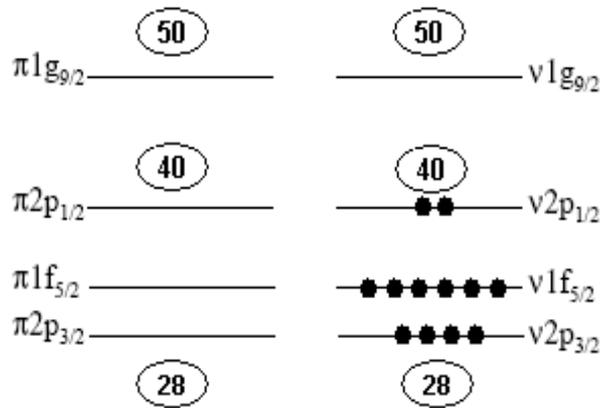


**FIG. (2-3) :** Schématisation de l'espace de Hilbert

Un espace de valence est limité par deux fermetures de couches .

Dans l'exemple du Nickel le cœur inerte du  $^{68}\text{Ni}$  est situé à la fermeture de couches ( $Z=28$ ,  $N=40$ ), et l'espace de valence de proton est la couche  $1f_{7/2}$  qui est la fermeture de couche correspondant au nombre magique 28. L'espace de valence de neutron est la couche  $2p_{1/2}$  qui est compris entre les fermetures de couches correspondantes aux nombres magiques 28 et 50. Les noyaux étudiés ont :

Un nombre de protons comprise entre les nombres magiques 28 et 50 et l'espace de valence correspondant est constitué des couches :  $2p_{3/2}$ ,  $1f_{5/2}$ ,  $2p_{1/2}$  et  $1g_{9/2}$  et  $1g_{7/2}$ . Et un nombre de neutrons de valeur 40 et l'espace de valence est essentiellement les couches  $2p_{3/2}$  et  $1g_{9/2}$ . Ces orbitales sont représentées sur la figure (2-4) [29].



**FIG. (2-4) :** L'espace de valence des protons et des neutrons pour le  $^{68}\text{Ni}$ .

Jusqu'aujourd'hui, Les interactions effectives sur cet espace ne sont pas bien identifiées à cause de l'insuffisance de données expérimentales qui ne permettent pas encore d'expliquer les interactions p-n dans cette région.

L'espace de valence considéré dans les calculs du modèle en couches pour la région de l'étain 132 tenant en compte que ce dernier est un coeur inerte, présenté généralement par les orbitales (  $1g_{7/2}$ ,  $2d_{5/2}$ ,  $2d_{3/2}$ ,  $3s_{1/2}$ ,  $1h_{11/2}$  ) pour les protons et les orbitales (  $1h_{9/2}$ ,  $2f_{7/2}$ ,  $2f_{5/2}$ ,  $3p_{3/2}$ ,  $3p_{1/2}$  ) pour les neutrons [30].

Pour la région du plomb 208 , l'espace de valence considéré est donné par les orbitales (  $1h_{9/2}$ ,  $2f_{7/2}$ ,  $1i_{13/2}$ ,  $2f_{5/2}$ ,  $3p_{3/2}$ ,  $3p_{1/2}$  ) pour les protons , et (  $2g_{9/2}$ ,  $3d_{5/2}$ ,  $1i_{11/2}$ ,  $2g_{7/2}$ ,  $4s_{1/2}$ ,  $2d_{3/2}$  et  $1j_{15/2}$  ) pour les neutrons [31].

## 2.4 Applications et limitations du modèle en couches

Le premier grand succès de ce modèle est de prédire parfaitement le spin et la parité de l'état fondamental des noyaux impairs proche de la ligne de stabilité. En effet, ces noyaux doivent posséder le spin et la parité du nucléon célibataire.

Ce modèle a permis de prédire certaines propriétés du noyau citant le spin, la parité, l'isospin, les moments de transitions électromagnétiques, et les spectres d'énergies. Ces prédictions sont en bon accord avec les expériences pour la majorité des noyaux de  $A$  impair, en particulier ceux doublements magiques et leurs voisins. Par contre, ce modèle ne peut pas prédire le spin-parité des noyaux avec  $N$  et  $Z$  impairs. Ils ne donnent aucune contrainte sur le couplage des neutrons avec les protons célibataires. Pour certains noyaux de  $A$  impair avec plusieurs nucléons de valence il n'y a pas de correspondance entre les prédictions du modèle avec l'expérimentale.

Pour les noyaux ayant une couche fermée à moitié, le modèle ne reproduit plus les résultats expérimentaux, ces noyaux ont un moment quadripolaire très important ce qui implique en addition de l'interaction spin orbite, un potentiel non sphérique ce qu'il n'est pas explicable par le modèle en couches. La bonne estimation que le mouvement des nucléons de valence déforme le noyau et introduit un effet non sphérique au potentiel. Ceci est la base des modèles collectifs, leur hypothèse est que le noyau est constitué d'un coeur dur formé par les nucléons occupant les couches fermés et les nucléons de valence en mouvement similaire à celui des molécules à la surface d'une goutte liquide. Ce mouvement de surface introduit une perturbation non sphérique au potentiel sphérique du coeur. Ces modèles ont bien expliqué les moments dipôlares et quadripôlaire des noyaux déformés ainsi que les états excités de rotation et de vibration.

Actuellement, des variétés de codes de programmation sont développés en utilisant différentes interactions nucléaires définies sur des systèmes simples ou de plus en plus compliqués. Mais la difficulté d'avoir plus d'informations sur les noyaux loin de la vallée de stabilité se pose toujours.

# Chapitre 3

## Calculs spectroscopiques sur les noyaux riches en neutrons et Similarité

Les études spectroscopiques autour des noyaux magiques et doublement magiques avec un rapport exotique en  $N/Z$  fournissent un excellent test pour les ingrédients de base des calculs du modèle en couches nucléaire, tel que les interactions effectives entre les nucléons, loin de la vallée de stabilité. Des interactions effectives, réalistes et schématiques sont utilisées pour décrire certaines propriétés nucléaires de ces noyaux et de ceux dans leur voisinage. Dans ce modèle, les intégrales radiales sont déterminées sur la base de l'oscillateur harmonique d'énergie  $\hbar\omega = 41 A^{-\frac{1}{3}}$  [32] et les éléments de matrice à deux corps sont calculés en utilisant les énergies des états individuels des spectres expérimentaux. Ces énergies sont notamment bien connues pour les noyaux des régions  $^{208}\text{Pb}$  et  $^{132}\text{Sn}$  mais peu connues pour celle de  $^{68}\text{Ni}$ .

Dans notre étude, le modèle en couches est utilisé pour calculer les spectres énergétiques des noyaux à deux nucléons de valence autour de ces coeurs magiques ou semi magique au moyen des interactions schématiques Delta et MSDI.

### 3.1 Région du Nickel

L'étude des noyaux des couches  $fp$  est devenue d'un intérêt majeur, car les calculs de modèle en couches à large échelle sont capables de déduire microscopiquement la compétition

entre les excitations à une particule et celles collectives dans tout l'espace de configuration  $fp$ . Dans la région du nickel, la fermeture de la couche  $N=40$  a été un sujet d'études intensives. Son intérêt a été déclenché par les observations expérimentales de l'énergie d'excitation du premier niveau  $2_1^+$  du noyau  $^{68}\text{Ni}$  ( $Z=28, N=40$ ) [9], lors des décroissances  $\beta$  des noyaux de la région. Le nickel 68 est un bon coeur pour les noyaux adjacents, de plus il n'est pas très loin de la stabilité ( figure 1-13). Le caractère de sa double magicité a été suggéré dans le début des années 80 et testé expérimentalement [33]. Le nombre de proton  $Z=28$  dans les isotopes du nickel est magique. D'un côté,  $^{68}\text{Ni}$  ne montre pas d'irrégularité prononcée dans l'énergie de séparation de deux protons, comme il est attendu pour les noyaux magiques. Et d'un autre côté, l'énergie élevée du premier état excité  $2^+$  et la faible valeur du  $B(E2 : 0^+ \rightarrow 2_1^+)$  sont souvent indicateurs d'une magicité. En effet, le  $B(E2 : 0^+ \rightarrow 2_1^+)$  du  $^{68}\text{Ni}$  ( $280 \pm 60 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ ) est significativement plus faible que celui du noyau doublement magique  $^{56}\text{Ni}$  ( $620 \pm 120 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ ). Pour les neutrons, le gap énergétique à  $N=40$  sépare la couche sphérique  $pf$  de l'orbitale intruse  $1g_{9/2}$ . Cependant, cette sous couche sphérique fermée n'est pas suffisamment grand pour stabiliser la forme sphérique quand l'interaction résiduelle est prise en compte. Expérimentalement, le noyau  $^{80}\text{Zr}$  ( $Z=40, N=40$ ) est un rotor déformé. Ainsi, l'évidence expérimentale de la double magicité du  $^{68}\text{Ni}$  est controversée.

### 3.1.1 Noyaux à 2 nucléons non identiques

$^{70}\text{Cu}_{41}$  :

Ce noyau, ayant un proton en dehors de la couche fermée de  $Z=28$  et un neutron en dehors de la sous couche semi-fermée  $N=40$ , du coeur  $^{68}\text{Ni}$ , est un élément adéquat pour les calculs de modèle en couches. Car, il peut fournir des informations utiles sur l'interaction p-n. Cet élément a trois états isomères ( $I^\pi=6^-, 3^-$  et  $1^+$ ). Les différentes configurations spectroscopiques de ses états sont déterminées en couplant un proton occupant l'une des orbitales  $\pi pf$  et un neutron occupant l'orbitale  $\nu 1g_{9/2}$ . Le spin total résultant a des valeurs possibles entre  $|j_1 - j_2|$  et  $(j_1 + j_2)$ . Le résultat de ce couplage est montré sur la figure (3-1-b) avec les détails suivants [28] :

$$\begin{aligned} \pi 2p_{3/2} \nu 1g_{9/2} &\rightarrow 6_1^-, 3^-, 4_1^-, 5_1^- \\ \pi 1f_{5/2} \nu 1g_{9/2} &\rightarrow 2^-, 4_2^-, 5_2^-, 6_2^- \\ \pi 1g_{9/2} \nu 1g_{9/2} &\rightarrow 1^+, 9^+ \end{aligned}$$

Nous signalons que les niveaux  $4_2^-, 5_2^-, 6_2^-$  et  $9^+$  sont considérés et étudiés théoriquement pour des justifications que nous donnerons dans le paragraphe de la similarité.

Les énergies d'excitation sont calculées à partir de la relation suivante [34] :

$$E^x = (\varepsilon_J^1 - \varepsilon_f^1) + (\varepsilon_J^2 - \varepsilon_f^2) + \langle V \rangle_J - \langle V \rangle_f \quad (3-1)$$

L'état fondamental correspond expérimentalement à  $6_1^-$ . On obtient les énergies des états excités :

$$E_{3^-, 4_1^-, 5_1^-} = \langle V \rangle_{3^-, 4_1^-, 5_1^-} - \langle V \rangle_{6_1^-}$$

$$E_{2^-, 4_2^-, 5_2^-, 6_2^-}^x = (\varepsilon\pi_{1f_{5/2}} - \varepsilon\pi_{2p_{3/2}}) + \langle V \rangle_{2^-, 4_2^-, 5_2^-, 6_2^-} - \langle V \rangle_{6_1^-}$$

$$E_{1^+, 9^+}^x = (\varepsilon\pi_{1g_{9/2}} - \varepsilon\pi_{2p_{3/2}}) + \langle V \rangle_{1^+, 9^+} - \langle V \rangle_{6_1^-}$$

Les énergies des états individuels dans la région du  $^{68}\text{Ni}$  sont déterminées expérimentalement à partir des spectres des noyaux à un proton de valence ( $^{69}\text{Cu}_{40} = ^{68}\text{Ni}_{40} \otimes \pi$ ) et/ou un neutron de valence ( $^{69}\text{Ni}_{41} = ^{68}\text{Ni}_{40} \otimes \nu$ ) autour du coeur  $^{68}\text{Ni}_{40}$  (figure 3-1-a) [28].

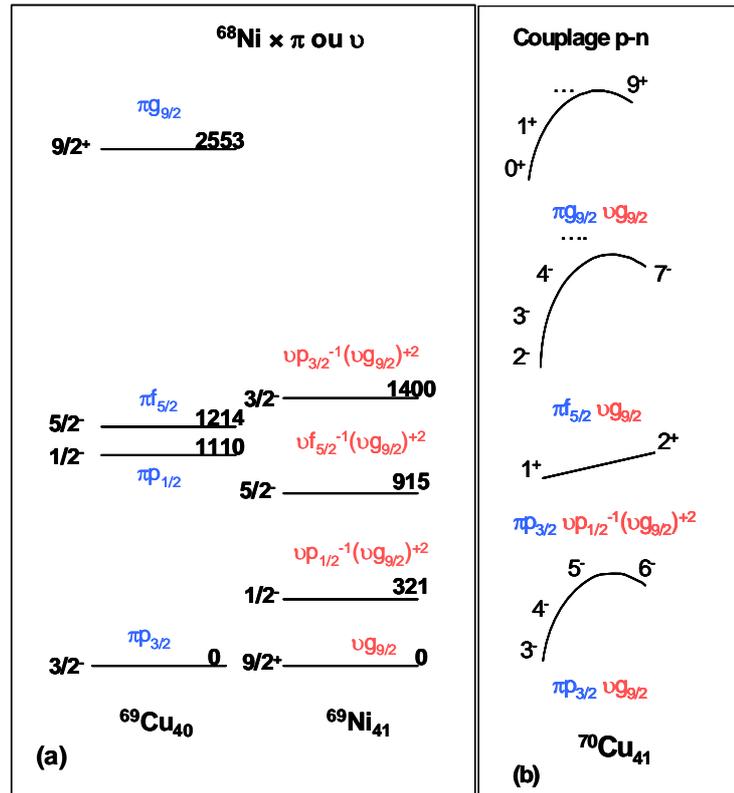


FIG. (3-1) : (a) Energies des états individuels à 1 p, 1n célibataire, (b) couplage (p-n)

Signalons que pour l'interaction MSDI d'un système à 2 nucléons non identiques, les

énergies d'excitation des niveaux sont calculées à partir de la relation suivante [34] :

$$E^x = (\varepsilon_J^1 - \varepsilon_f^1) + (\varepsilon_J^2 - \varepsilon_f^2) + \frac{1}{2} [\langle V^{MSDI} \rangle_J(T=1) + \langle V^{MSDI} \rangle_J(T=0)] - \frac{1}{2} [\langle V^{MSDI} \rangle_f(T=1) + \langle V^{MSDI} \rangle_f(T=0)] \quad (3-2)$$

Pour calculer ces énergies, on détermine les valeurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_0$ ,  $B$  et  $C$  de l'équation (2-22) afin de reproduire les spectre expérimentaux. L'ajustement des paramètres pour les deux interactions Delta et MSDI est fait de manière à avoir un accord satisfaisant entre la théorie et l'expérience.

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.1892$ ,  $g=1.0298$ ,  $V_{eff}=560$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.0839$ ,  $A_0=0.3571$ ,  $B=-0.565$ ,  $C=0.635$ ) pour MSDI sont reportés dans le tableau (3-1) et montrés sur la figure (3-2) :

$J^\pi$	$6_1^-$	$3^-$	$4_1^-$	$2^-$	$5_1^-$	$5_2^-$	$4_2^-$	$6_2^-$	$1^+$	$9^+$
Eexp	0	101	229	369	507	/	/	/	1980	/
Ecal (delta)	0	182	279	199	504	1345	1369	1606	1504	1983
Ecal (MSDI)	0	152	238	851	429	1464	1478	1605	1980	2116

**Tableau (3-1) :** Energies en keV expérimentales [13, 28] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{70}\text{Cu}$ .

Les états  $3^-$ ,  $4_1^-$ , et  $5_1^-$  sont bien reproduits par les deux interactions, on observe dans le calcul de Delta une inversion d'ordre entre les niveaux  $2^-$  et  $4_1^-$ , et que les niveaux  $2^-$  et  $1^+$  sont éloignés de leurs correspondants expérimentaux.

Par comparaison, l'interaction MSDI garde l'ordre des états  $4_1^-$  et  $2^-$  et produit l'inversion entre les états  $2^-$  et  $5_1^-$ , et reproduit exactement le niveau  $1^+$ .

La variation des paramètres B et C a une très légère influence sur les positions des états de basse énergie. Par contre les niveaux de parité positive et d'énergie élevée subissent une grande variation en fonction de ces paramètres.

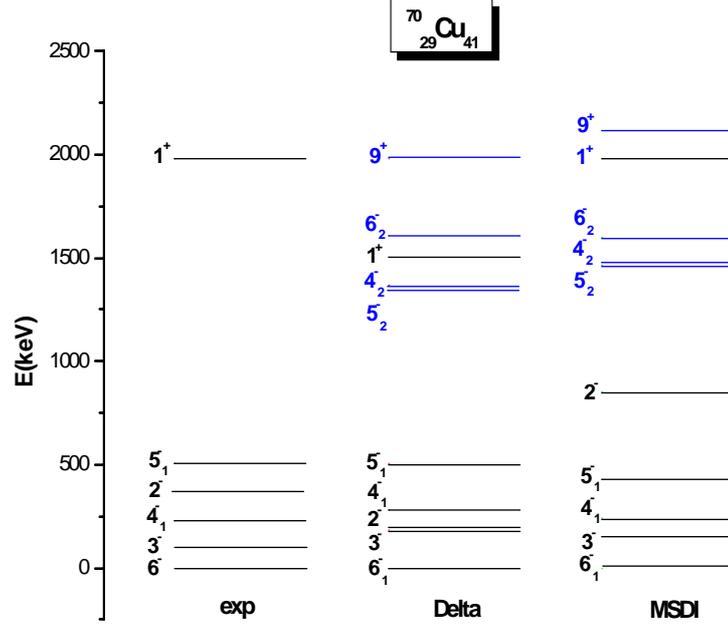


FIG.(3-2) : Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  ${}^{70}_{29}\text{Cu}_{41}$

### 3.1.2 Noyaux à 2 nucléons identiques

Ces noyaux ont deux nucléons identiques, donc pour l'interaction MSDI, le seul paramètre à ajuster est le  $A_1$ .

${}^{70}\text{Ni}_{42}$  :

Ce noyau a 2 neutrons de valence autour du coeur  ${}^{68}\text{Ni}$ . Dans ce cas, l'espace modèle est limité à la sous couche ( $\nu 1g_{9/2}$ ).

Les configurations des états énergétiques sont identifiées à partir du modèle en couches, par le couplage de deux neutrons. Ces configurations [17] sont :

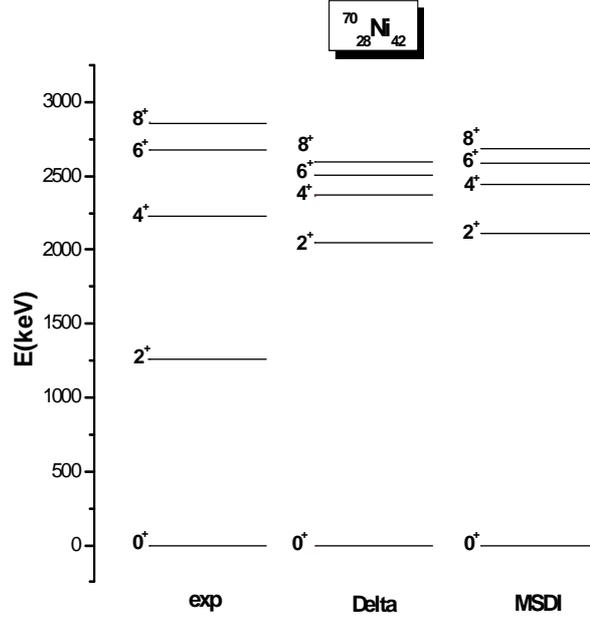
$$\nu(1g_{9/2})^2 \rightarrow (0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+)$$

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.1899$ ,  $g = 1.2$ ,  $V_{eff}=860.8$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.5587$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ ) pour MSDI sont reportés dans le tableau (3-2) et montrés sur la figure (3-3) :

Tous les niveaux sont reproduits d'une manière satisfaisante à 250 keV près, par contre l'énergie de l'état  $2^+$  n'est pas reproduite par les deux interactions. Ces énergies ne changeant pas en fonction de B et C pour le calcul avec l'interaction MSDI.

$J^\pi$	$0^+$	$2^+$	$4^+$	$6^+$	$8^+$
Eexp	0	1260	2230	2678	2860
Ecal (Delta)	0	2051	2366	2505	2598
Ecal (MSDI)	0	2116	2442	2585	2681

**Tableau (3-2) :** Energies en keV expérimentales [13, 17] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{70}\text{Ni}$ .



**FIG.(3-3) :** Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{70}\text{Ni}_{42}$

$^{70}\text{Zn}_{40}$  :

Ce noyau a 2 protons de valence. L'espace modèle est alors composé des sous couches :  $(2p_{3/2}, 1f_{5/2})$ . Les configurations sont [13, 28] :

$$\pi (1f_{5/2})^2 \rightarrow 0^+, 2_1^+, 4_1^+$$

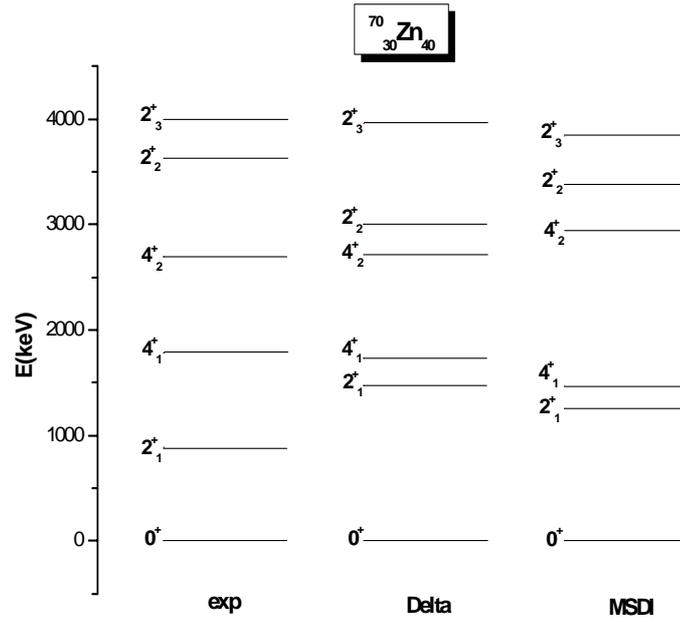
$$\pi 1f_{5/2} \pi 2p_{3/2} \rightarrow 4_2^+, 2_2^+$$

$$(\pi 2p_{3/2})^2 \rightarrow 2_3^+$$

La configuration de l'état  $2_3^+$  est théorique. Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.1798$ ,  $g=0.5971$ ,  $V_{eff}=600$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.5429$ ,  $B=1.12$ ,  $C=0.328$ ) pour MSDI sont reportés dans le tableau (3-3) et montrés sur la figure (3-4) :

$J^\pi$	$0^+$	$2_1^+$	$4_1^+$	$4_2^+$	$2_2^+$	$2_3^+$
Eexp	0	885	1786	2693	3635	4001
Ecal (Delta)	0	1476	1731	2717	3004	3963
Ecal (MSDI)	0	1256	1474	2946	3381	3840

**Tableau (3-3) :** Energies en keV expérimentales [13, 28, 35] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{70}\text{Zn}$ .



**FIG.(3-4) :** Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{70}\text{Zn}_{40}$

De même que pour le noyau  $^{70}\text{Ni}$ , les deux interactions reproduisent le spectre expérimental du noyau  $^{70}\text{Zn}$  à l'exception du niveau  $2_1^+$  où l'écart entre la valeur calculée et celle expérimentale est grand. On remarque que l'interaction Delta reproduit mieux les énergies des niveaux que MSDI à l'exception de niveau  $2_2^+$ .

## 3.2 Région de l'Etain

Les noyaux riches en neutrons ayant quelques nucléons de valence autour du noyau qui possède une forte fermeture de couche de  $^{132}\text{Sn}$  ont un grand intérêt expérimental et théorique. Cette région est importante dans le domaine de la structure nucléaire, car elle fournit des informations sur les interactions empiriques **N-N** [36], et aussi pour les applications et les calculs du processus-r en astrophysique. On s'intéresse dans ce travail au système à deux nucléons autour de ce coeur doublement magique, et on applique les interactions Delta et MSDI. La base de l'oscillateur utilisée avec une énergie déterminée par  $\hbar\omega=45A^{-1/3}-25A^{-2/3}$ .

### 3.2.1 Noyaux à 2 nucléons non identiques

$^{134}\text{Sb}_{83}$  :

Ce noyau a 1 proton et 1 neutron en dehors du coeur de  $^{132}\text{Sn}_{82}$ . Cet élément a 2 isomères ( $I^\pi=0^-, 7^-$ ).

L'étude des noyaux doublement impairs qui ont un neutron et un proton de valence tels que le  $^{134}\text{Sb}$  et ces homologues dans ce travail, a une grande importance, car il donne des détails sur l'interaction n-p. Les énergies expérimentales sont prise des références [13, 30, 37].

L'espace modèle utilisé est constitué des orbitales : ( $1g_{7/2}, 2f_{7/2}, 1h_{9/2}, 1i_{13/2}, 1h_{11/2}$ )

Les différentes configurations des états énergétiques sont identifiées à partir du modèle en couches, le couplage d'un proton avec un neutron, et montrées sur la figure (3-5-b). Elle sont données par [30, 37, 30]:

$$\pi 1g_{7/2} \nu 2f_{7/2} \rightarrow 7^-, 5_1^-, 4^-, 6^-$$

$$\pi 1g_{7/2} \nu 1h_{9/2} \rightarrow 8^-, 5_2^-$$

$$\pi 1h_{11/2} \nu 2f_{7/2} \rightarrow 9^+$$

$$\pi 1g_{7/2} \varepsilon \nu 1i_{13/2} \rightarrow 10^+$$

$$\pi 1h_{11/2} \nu 1i_{13/2} \rightarrow 12^-$$

L'état fondamental est à  $7^-$  et les énergies des états excités sont obtenues par :

$$E_{5_1^-, 4^-, 6^-}^x = \langle V \rangle_{5_1^-, 4^-, 6^-} - \langle V \rangle_{7^-}$$

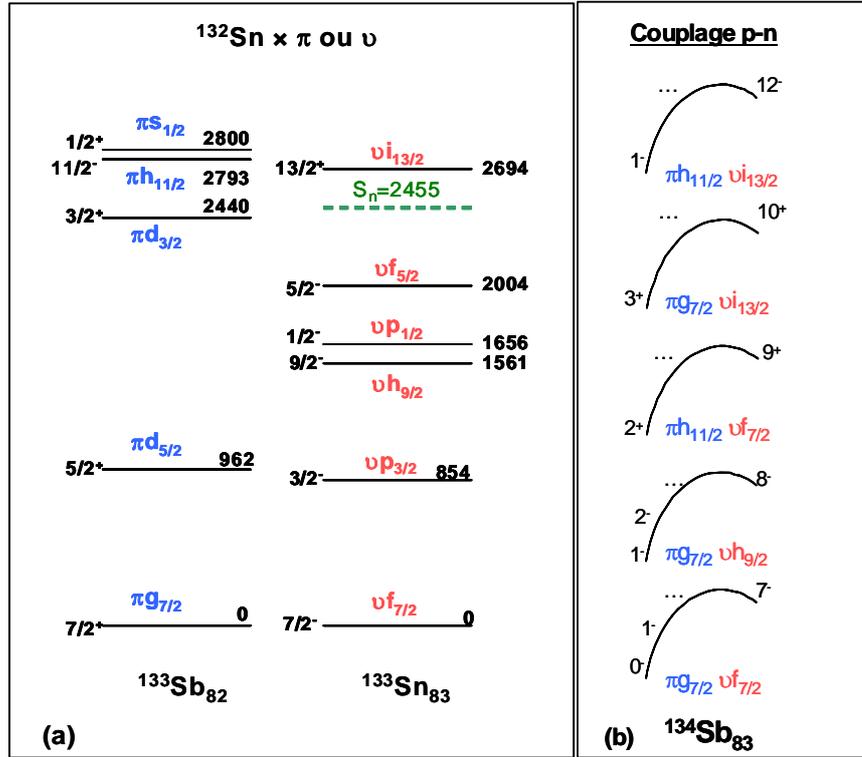
$$E_{8^-, 5_2^-}^x = (\varepsilon \nu 1h_{9/2} - \varepsilon \nu 2f_{7/2}) + \langle V \rangle_{8^-, 5_2^-} - \langle V \rangle_{7^-}$$

$$E_{9^+}^x = (\varepsilon \pi 1h_{11/2} - \varepsilon \pi 1g_{7/2}) + \langle V \rangle_{9^+} - \langle V \rangle_{7^-}$$

$$E_{10^+}^x = (\varepsilon \nu 1i_{13/2} - \varepsilon \nu 2f_{7/2}) + \langle V \rangle_{10^+} - \langle V \rangle_{7^-}$$

$$E_{12^+}^x = (\varepsilon\pi_{1h_{11/2}} - \varepsilon\pi_{1g_{7/2}}) + (\varepsilon\nu_{1i_{13/2}} - \varepsilon\nu_{2f_{7/2}}) + \langle V \rangle_{12^+} - \langle V \rangle_{7^-}$$

Les différences des énergies individuelles sont prises du spectres des noyaux  $^{133}\text{Sb}_{82}$  et  $^{133}\text{Sn}_{83}$  [31], représentées sur la figure (3-5-a).



**FIG. (3-5) :** (a) Energies des états individuels a 1 p, 1n célibataire, (b) couplage(n,p).

Les énergies d'excitations calculée avec les valeurs des paramètres( $\alpha=0.185$ ,  $g=1.5$ ,  $V_{eff}=900$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.15$ ,  $A_0=0.45$ ,  $B=0$ ,  $C=0$  pour MSDI) sont présentées dans le tableau (3-4) et schématisées sur la figure (3-6) :

$J^\pi$	$7^-$	$5_1^-$	$4^-$	$6^-$	$8^-$	$5_2^-$	$9^+$	$10^+$	$12^-$
Eexp	0	162	276	338	1072	1106	2128	2435	4238
Ecal (Delta)	0	89	155	249	759	1897	2527	2529	4672
Ecal (MSDI)	0	173	295	401	1296	1998	2501	2641	5069

**Tableau (3-4) :** Energies en keV expérimentales [13, 30, 37] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{134}\text{Sb}$ .

La séquence de tous les niveaux est respectée, par les deux interactions. Les niveaux de basse énergies  $5_1^-$ ,  $4^-$ ,  $6^-$  et  $8^-$  sont bien reproduits par l'interaction MSDI contrairement au

niveaux de haute énergies . Les deux interactions montrent que le niveau  $5_2^-$  est trop loin de l'expérimental.

Les énergies d'excitation des niveaux ne subissent pas une grande variation en fonction de B et C sauf pour des grandes valeurs. Notons que l'interaction MSDI reproduit mieux le spectre expérimental de  $^{134}\text{Sb}$ .

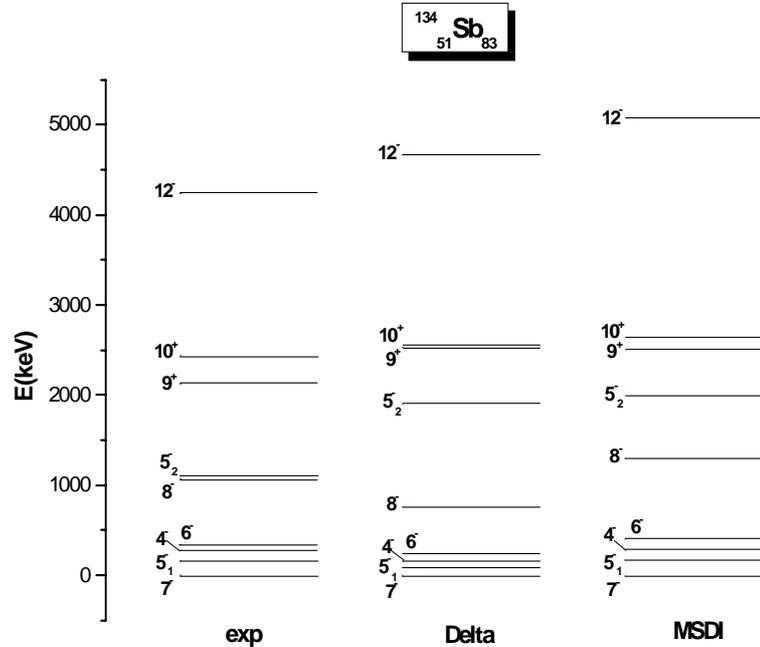


FIG.(3-6) : Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{134}_{51}\text{Sb}_{83}$

### 3.2.2 Noyaux à 2 nucléons identiques

$^{134}\text{Sn}_{84}$  :

$^{134}\text{Sn}$  est un noyau a deux neutrons en dehors de la couche fermée ( $1h_{11/2}$ ) des neutrons du noyau  $^{132}\text{Sn}_{82}$ , l'espace modèle est ( $1h_{9/2}, 2f_{7/2}$ ) les configurations sont [17, 30, 38] :

$$v(2f_{7/2})^2 \rightarrow 0^+, 2^+, 4^+, 6^+$$

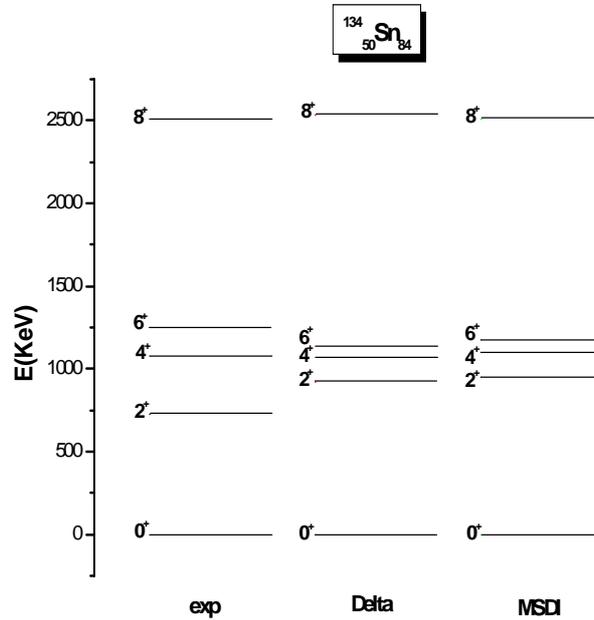
$$v2f_{7/2}v1h_{9/2} \rightarrow 8^+$$

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.2029$ ,  $g=0.9773$ ,  $V_{eff}=710$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.311$ ,  $B=1.956$ ,  $C=1.5766$ ) pour MSDI sont présentés dans le tableau (3-5) et schématisés sur la figure (3-7) :

$J^\pi$	$0^+$	$2^+$	$4^+$	$6^+$	$8^+$
Eexp	0	726	1074	1247	2509
Ecal (Delta)	0	922	1069	1140	2532
Ecal (MSDI)	0	948	1099	1172	2509

**Tableau (3-5) :** Energies en keV expérimentales [13, 30] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{134}\text{Sn}$ .

Nous remarquons que les deux interactions permettent de reproduire correctement les valeurs expérimentales de tous les états.



**FIG.(3-7) :** Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{134}_{50}\text{Sn}_{84}$

$^{134}\text{Te}_{82}$  :

Ce noyau a 2 protons de valence. L'espace modèle est  $(1g_{7/2}, 2d_{5/2})$ . Les configurations sont obtenues par le couplage de deux protons sont [13, 30] :

$$(\pi 1g_{7/2})^2 \rightarrow 0^+, 2_1^+, 4_1^+, 6_1^+$$

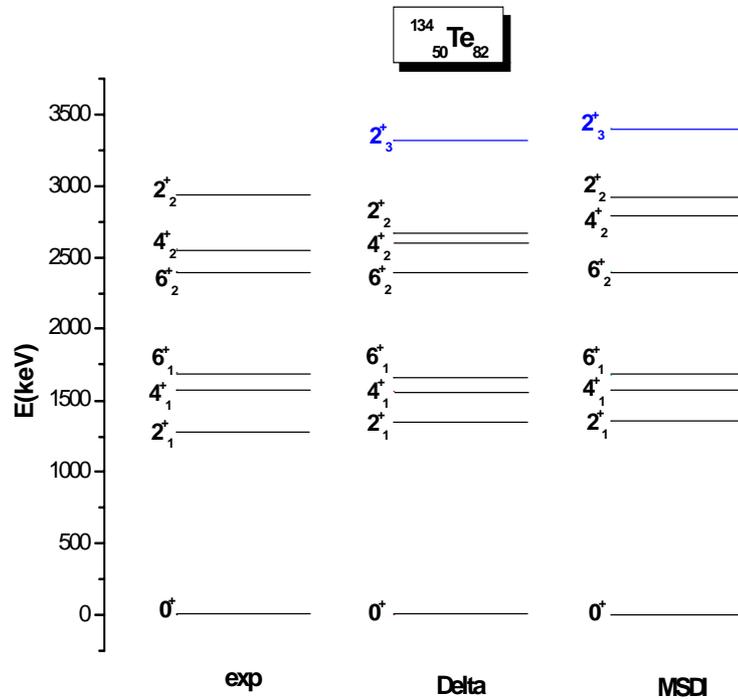
$$\pi 1g_{7/2} \pi 2d_{5/2} \rightarrow 6_2^+, 4_2^+, 2_2^+$$

$$(\pi 2d_{5/2})^2 \rightarrow 2_3^+$$

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.185$ ,  $g =0.8873$ ,  $V_{eff}=849.8$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.446$ ,  $B=0.302$ ,  $C=0.25$ ) pour MSDI sont présentés dans le tableau (3-6) et schématisés sur le figure (3-8) :

$J^\pi$	$0^+$	$2_1^+$	$4_1^+$	$6_1^+$	$6_2^+$	$4_2^+$	$2_2^+$	$2_3^+$
Eexp	0	1279	1576	1691	2398	2555	2934	/
Ecal (Delta)	0	1346	1560	1663	2391	2604	2674	3323
Ecal (MSDI)	0	1359	1575	1680	2399	2791	2921	3404

**Tableau (3-6) :** Energies en keV expérimentales [13, 30] et calculées avec les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{134}\text{Te}$ .



**FIG.(3-8) :** Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{134}_{52}\text{Te}_{82}$

Les deux interactions reproduisent de manière satisfaisante à environ 200 keV les énergies d'excitation de tous les niveaux.

Les deux interactions donnent des valeurs proches pour l'énergie de l'état théorique  $2_3^+$ . Les paramètres B et C de l'interaction MSDI ont une influence sur les énergies des niveaux  $6_2^+$ ,  $4_2^+$ ,  $2_2^+$  et  $2_3^+$ .

### 3.3 Région du Plomb

La région du  $^{208}\text{Pb}$  établie une position importante dans la structure simple, où les propriétés des modes élémentaires des excitations peuvent être étudiées dans des conditions bien définies à cause de la stabilité de ces éléments. Il y a une longue histoire de recherches expérimentales et théoriques dans le cadre du modèle en couches des noyaux de quelques nucléons de valence en dehors du noyau  $^{208}\text{Pb}$ . Cet intérêt est la cause de l'excellente double magie de ce noyau. Les noyaux présentés dans notre travail sont ceux ayant deux nucléons de valence autour du  $^{208}\text{Pb}$ . Nos calculs des énergies d'excitation sont réalisés en utilisant toujours l'interaction Delta et l'interaction MSDI. La base de l'oscillateur utilisée avec une énergie déterminée par  $\hbar\omega = 45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}$  [39].

#### 3.3.1 Noyaux à 2 nucléons non identiques

$^{210}\text{Bi}_{127}$ :

Ce noyau a 1 proton et 1 neutron en dehors du coeur de  $^{208}\text{Pb}_{126}$ . L'étude de ce noyau nous donne des informations sur l'interaction effective p-n. Les différentes configurations des états sont identifiées à partir du modèle en couches, du couplage d'un proton avec un neutron. Ce qui est montré sur la figure (3-9-b). L'espace modèle est  $(1h_{9/2}, 2g_{9/2}, 1i_{11/2}, 1i_{13/2}, 1j_{15/2})$  et les configurations sont [13, 37, 40, 41] :

$$\pi 1h_{9/2} \nu 2g_{9/2} \rightarrow 9^-, 7_1^-, 6^-, 8^-$$

$$\pi 1h_{9/2} \nu 1i_{11/2} \rightarrow 10^-, 7_2^-$$

$$\pi 1i_{13/2} \nu 2g_{9/2} \rightarrow 11^+$$

$$\pi 1h_{9/2} \nu 1j_{15/2} \rightarrow 12^+$$

$$\pi 1i_{13/2} \nu 1j_{15/2} \rightarrow 14^-$$

L'état fondamental est à  $9^-$ , et les énergies des états excités sont :

$$E_{7_1^-, 6^-, 8^-}^x = \langle V \rangle_{7_1^-, 6^-, 8^-} - \langle V \rangle_{9^-}$$

$$E_{10^-, 7_2^-}^x = (\varepsilon \nu 1i_{11/2} - \varepsilon \nu 2g_{9/2}) + \langle V \rangle_{10^-, 7_2^-} - \langle V \rangle_{9^-}$$

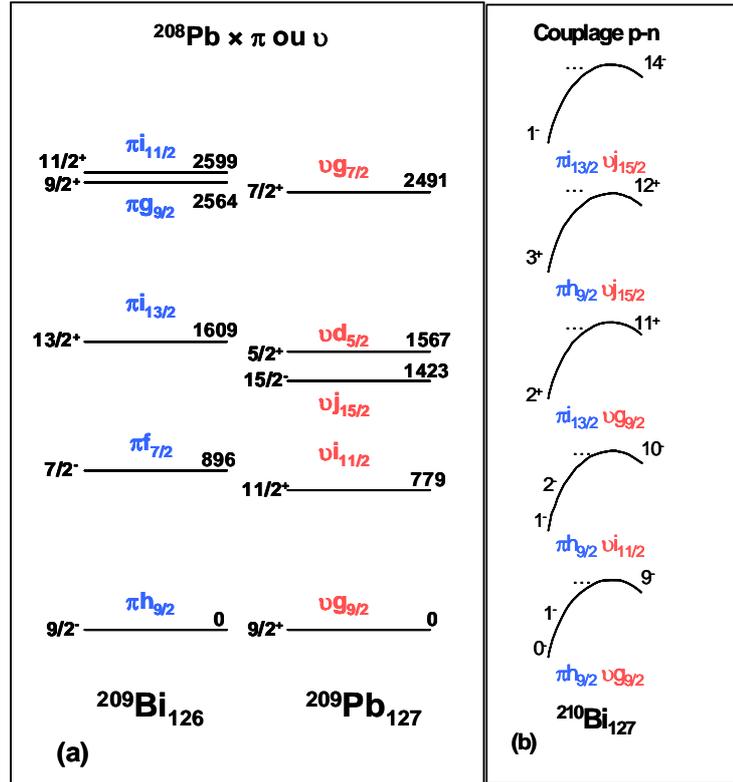
$$E_{11^+}^x = (\varepsilon \pi 1i_{13/2} - \varepsilon \pi 1h_{9/2}) + \langle V \rangle_{11^+} - \langle V \rangle_{9^-}$$

$$E_{12^+}^x = (\varepsilon \nu 1j_{15/2} - \varepsilon \nu 2g_{9/2}) + \langle V \rangle_{12^+} - \langle V \rangle_{9^-}$$

$$E_{14^-}^x = (\varepsilon \pi 1i_{13/2} - \varepsilon \pi 1h_{9/2}) + (\varepsilon \nu 1j_{15/2} - \varepsilon \nu 2g_{9/2}) + \langle V \rangle_{14^-} - \langle V \rangle_{9^-}$$

Les différences des énergies individuelles sont prises des noyaux  $^{209}\text{Bi}_{126}$  et  $^{209}\text{Pb}_{127}$  [31]

comme montré sur la figure (3-9-a).



**FIG. (3-9) :** (a) Energies des états individuels à 1 p, 1n célibataire, (b) couplage(p-n)

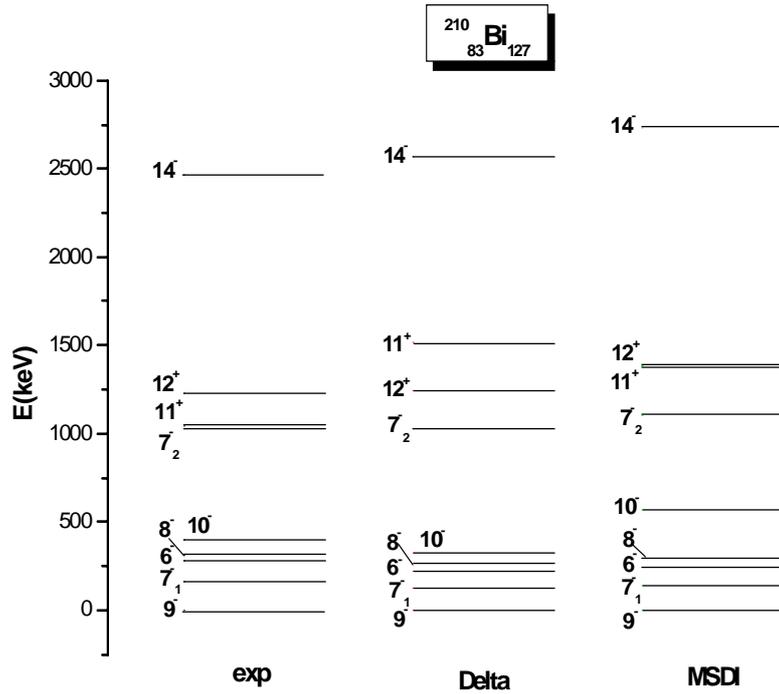
Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.1787$ ,  $g=0.521$ ,  $V_{eff}=850.93$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.09$ ,  $A_0=0.3$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ ) pour MSDI sont présentés dans le tableau (3-7) et schématisés sur le figure (3-10) :

$J^\pi$	$9^-$	$7_1^-$	$6^-$	$8^-$	$10^-$	$7_2^-$	$11^+$	$12^+$	$14^-$
Eexp	0	163	279	312	399	1030	1045	1228	2462
Ecal (Delta)	0	129	229	265	400	1010	1555	1244	2648
Ecal (MSDI)	0	136	246	297	570	1106	1382	1389	2729

**Tableau (3-7) :** Energies en keV expérimentales [13, 35, 37] et calculées par l'interaction Delta et MSDI pour le noyau  $^{210}\text{Bi}$ .

Tous les niveaux sont bien reproduits par les deux interactions à l'exception du niveau  $11^+$  qui est très éloigné de son correspondant expérimental. L'interaction Delta montre une inversion entre les états  $11^+$ ,  $12^+$ . Par comparaison, l'interaction MSDI garde la séquence de tous les niveaux.

On remarque aussi la même variation en fonction de B et C que pour le cas de  $^{134}\text{Sb}$ .



**FIG.(3-10)** : Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{210}_{83}\text{Bi}_{127}$

### 3.3.2 Noyaux à 2 nucléons identiques

$^{210}\text{Pb}_{128}$  :

Le  $^{210}\text{Pb}$  est un noyau a deux neutrons en dehors de la couche fermée du noyau  $^{208}\text{Pb}$  , son espace modèle est :  $(2g_{9/2}, 1i_{11/2})$ . Les configurations sont [13] :

$$v(2g_{9/2})^2 \rightarrow 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+$$

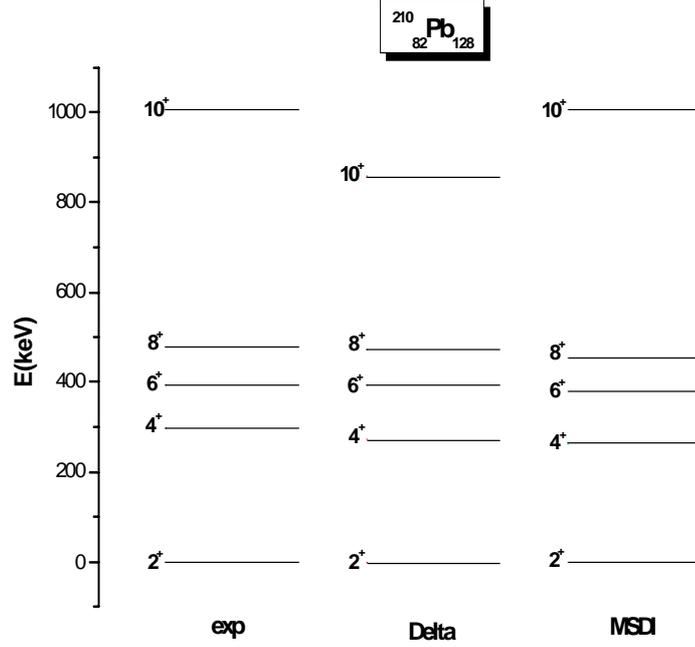
$$v2g_{9/2}v1i_{11/2} \rightarrow 10^+$$

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.08$ ,  $g=0.3$ ,  $V_{eff}=1200$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.45$ ,  $B=0.745$ ,  $C=0.239$ ) pour MSDI sont présentés dans le tableau (3-8) et schématisés sur le figure (3-11) :

Tous les niveaux sont reproduits par les deux interactions. On note que l'influence de B et C est sur l'énergie de l'état  $10^+$  seulement.

$J^\pi$	$2^+$	$4^+$	$6^+$	$8^+$	$10^+$
Eexp	0	298	395	478	1006
Ecal (Delta)	0	272	392	472	859
Ecal (MSDI)	0	262	378	455	1006

**Tableau (3-8) :** Energies en keV expérimentales [13, 35] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{210}\text{Pb}$ .



**FIG.(3-11) :** Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{210}_{82}\text{Pb}_{128}$

$^{210}\text{Po}_{126}$  :

Ce noyau est bien étudié dans le cadre du modèle en couches car il présente un noyau idéal pour tester les éléments de matrice d'interaction résiduelle à deux corps  $\pi - \pi$  [42], en utilisant l'espace modèle  $(1h_{9/2}, 2f_{7/2})$  et les configurations suivantes [13, 39, 41] :

$$\pi(1h_{9/2})^2 \rightarrow 2^+, 4_1^+, 6_1^+, 8^+$$

$$\pi 1h_{9/2} \pi 2f_{7/2} \rightarrow 8_2^+, 6_2^+, 4_2^+$$

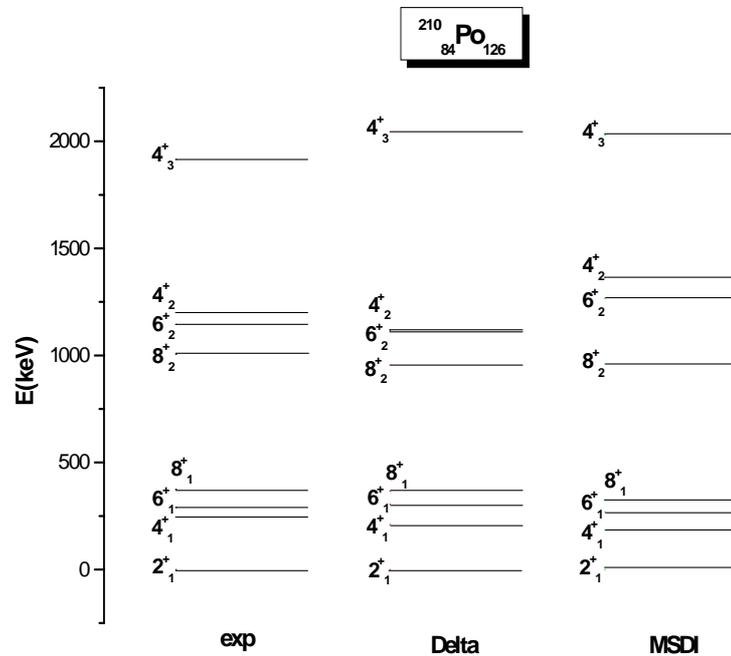
$$(\pi 2f_{7/2})^2 \rightarrow 4_3^+$$

Les résultats obtenus avec les valeurs des paramètres ( $\alpha=0.161$ ,  $g=0.8$ ,  $V_{eff}=995$ ) pour Delta, et avec ( $A_1=0.324$ ,  $B=0.2$ ,  $C=0.1838$ ) pour MSDI sont présentés dans le tableau (3-9) et schématisés sur le figure (3-12) :

$J^\pi$	$2^+$	$4_1^+$	$6_1^+$	$8_1^+$	$8_2^+$	$6_2^+$	$4_2^+$	$4_3^+$
Eexp	0	246	292	376	1007	1145	1202	1914
Ecal (Delta)	0	222	320	385	1028	1224	1284	2059
Ecal (MSDI)	0	189	272	328	958	1269	1364	2034

4 2107. **Tableau (3-9)** : Energies en keV expérimentales [13, 35] et calculées par les interactions Delta et MSDI pour le noyau  $^{210}\text{Po}$ .

Tous les états du spectre expérimental sont globalement bien reproduits à l'exception des états  $6_2^+$ ,  $4_2^+$ , par contre la séquence des niveaux est bonne.



**FIG.(3-12)** : Spectres énergétique expérimental et calculés du noyau  $^{210}_{84}\text{Po}_{126}$

### 3.4 Similarité

La similarité entre la forte fermeture de couches du noyau  $^{132}\text{Sn}$  et celle du  $^{208}\text{Pb}$  ouvre la possibilité d'explorer les propriétés des états simples des noyaux de la région  $^{132}\text{Sn}$  sous des conditions comparables mais non identiques à ceux de la région du  $^{208}\text{Pb}$ . Les difficultés expérimentales rencontrées pour l'étude de la région de  $^{132}\text{Sn}$  sont reliées aux circonstances que les noyaux de cette région se trouvent très loin de la ligne de stabilité- $\beta$  contrairement à ceux de la région du  $^{208}\text{Pb}$  ( figure 1-13). Cette étude est basée sur l'identification de certaines homologues entre les noyaux ayant une structure de valence similaire : avoir des règles de similarité en ordre et en espacement énergétique, de spin et de parité des états. Ce qui a été déjà étudié par Blomqvist [1] pour les deux régions  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$ .

Le but de ce travail est d'élargir cette similarité aux noyaux de quelques nucléons de valence autour du coeur semi doublement magique  $^{68}\text{Ni}$  et leurs homologues prévus dans les régions de l'étain et du plomb. Sur la figure (3-13) ci-dessous sont représentés les spectres des énergies expérimentales des noyaux  $^{68}\text{Ni}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$ ; où on remarque que le premier état excité du Nickel est situé à environ 2 MeV de son fondamental et en dessous de ceux de l'étain et du plomb. Les noyaux de cette région se situent loin de la ligne de stabilité  $\beta$  ( figure 1-13), ce qui conduit à une difficulté supplémentaire pour obtenir plus d'informations.

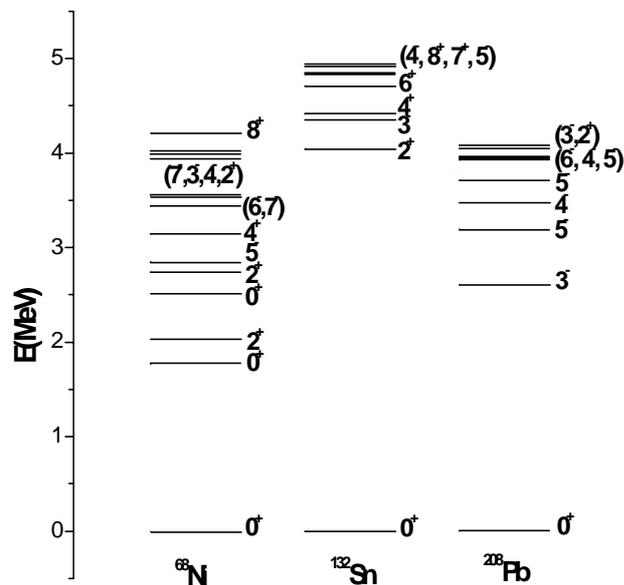
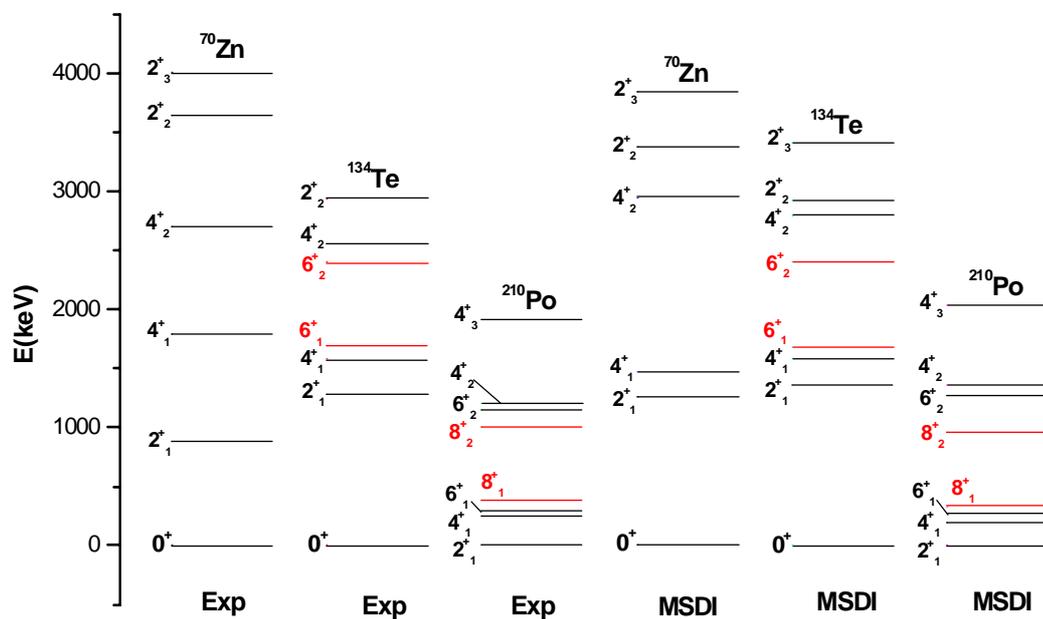


FIG. (3-13) : Spectres expérimentaux de  $^{68}\text{Ni}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$  [13].

Afin de bien ressortir la similarité entre les trois régions, nous avons examiné dans les noyaux au voisinage de  $^{208}\text{Pb}$  et  $^{132}\text{Sn}$  les niveaux qui ont leurs homologues dans ceux autour de  $^{68}\text{Ni}$ . A la base des données expérimentales des noyaux des trois régions, on a essayé d'identifier une certaine homologie entre les états expérimentaux homologues, au moyen de leurs configurations prises de la théorie et dans la littérature.

### Système p-p

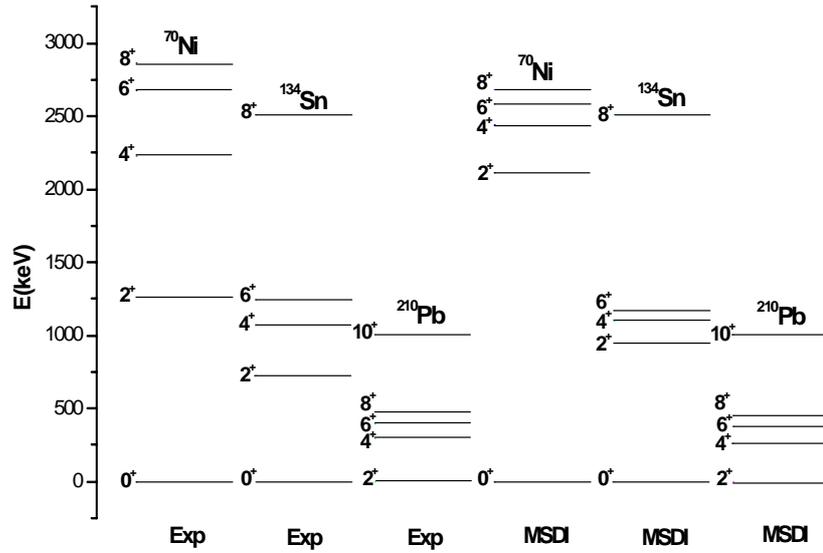
Les spectres expérimentaux et calculés par l'interaction MSDI des trois noyaux ayant deux protons de valence  $^{70}\text{Zn}$ ,  $^{134}\text{Te}$  et  $^{210}\text{Po}$  sont représentés sur la figure (3-14). Leur comparaison nous a permis d'extraire les niveaux qui ont une homologie dans leurs configurations.



**FIG. (3-14) :** Comparaison entre les spectres expérimentaux et calculés avec l'interaction MSDI des noyaux  $^{70}\text{Zn}$ ,  $^{134}\text{Te}$  et  $^{210}\text{Po}$ .

### Système n-n

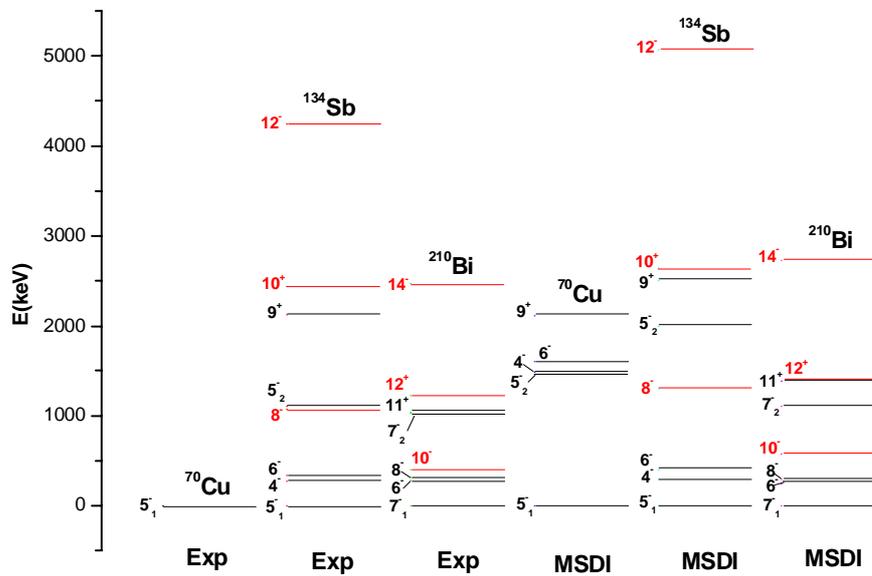
Pour les noyaux ayant 2 neutrons de valence :  $^{70}\text{Ni}$ ,  $^{134}\text{Sn}$  et  $^{210}\text{Pb}$ , la comparaison entre leurs spectres énergétiques expérimentaux et calculés est présentée sur la figure (3-15) ci-dessous. Pour le  $^{210}\text{Pb}$ , nous nous intéressons aux niveaux qui ont une ressemblance à ceux de  $^{134}\text{Sn}$  et  $^{70}\text{Ni}$ .



**FIG. (3-15) :** Comparaison entre les spectres expérimentaux et calculés avec l'interaction MSDI des noyaux  $^{70}\text{Ni}$ ,  $^{134}\text{Sn}$  et  $^{210}\text{Pb}$ .

### Système p-n

Pour les noyaux ayant un proton et un neutron de valence  $^{70}\text{Cu}$ ,  $^{134}\text{Sb}$  et  $^{210}\text{Bi}$ , la comparaison entre les spectres expérimentaux et calculés est représentée sur la Figure (3-16).



**FIG. (3-16) :** Comparaison entre les spectres expérimentaux et calculés avec l'interaction MSDI des noyaux  $^{70}\text{Cu}$ ,  $^{134}\text{Sb}$  et  $^{210}\text{Bi}$ .

## Résultats et discussion de la similarité

• Dans le cas de système p-p, tous les états de  $^{70}\text{Zn}$  ont leurs homologues dans les deux autres régions à l'exception des états  $6_1^+$  et  $6_2^+$  dans  $^{134}\text{Te}$  et leurs homologues  $8_1^+$  et  $8_2^+$  dans  $^{210}\text{Po}$  qui n'ont pas de similaires dans  $^{70}\text{Zn}$ . A l'aide de ces homologies on a proposé les configurations des états  $2_2^+$ ,  $4_2^+$  et  $2_3^+$  du  $^{70}\text{Zn}$ , et aussi la proposition de l'état théorique  $2_3^+$  de  $^{134}\text{Te}$  ainsi que sa configuration. Pour ce système, les homologies identifiées sont :

$$\begin{aligned} \text{(I}_a) & \left\{ \begin{array}{l} J_{Zn} = J_{Te} = J_{Po} - 2 \\ \pi_{Zn} = \pi_{Te} = \pi_{Po} \end{array} \right. \\ \text{(II}_a) & \left\{ \begin{array}{l} n_{Zn} = n_{Te} = n_{Po} \\ l_{Zn} + 1 = l_{Te} = l_{Po} - 1 \\ j_{Zn} + 1 = j_{Te} = j_{Po} - 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

• Dans le cas du système n-n, les similarités déduites sont respectées par tous les états à l'exception du niveau  $8^+$  du  $^{70}\text{Ni}$ , qui a la même ressemblance en J et  $\pi$  avec ces deux homologues  $8^+$  dans  $^{134}\text{Sn}$  et  $10^+$  dans  $^{210}\text{Pb}$ . Par contre, ces deux derniers sont parfaitement similaires. Dans ce cas, les homologies identifiées sont :

$$\begin{aligned} \text{(I}_b) & \left\{ \begin{array}{l} J_{Ni} = J_{Sn} = J_{Pb} - 2 \\ \pi_{Ni} = \pi_{Sn} = \pi_{Pb} \end{array} \right. \\ \text{(II}_b) & \left\{ \begin{array}{l} n_{Ni} + 1 = n_{Sn} = n_{Pb} \\ j_{Ni} - 1 = j_{Sn} = j_{Pb} - 1 \\ l_{Ni} - 1 = l_{Sn} = l_{Pb} - 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

• Le système p-n est le plus compliqué, car les états théoriques proposés spécialement pour le  $^{70}\text{Cu}$  ne respectent pas les homologies des autres systèmes mais respectent les similarités en J et  $\pi$ .

On ne peut avoir une similarité qu'avec quelques niveaux théoriques de  $^{70}\text{Cu}$ .

Les états  $5_1^-$ ,  $4_2^-$ ,  $6^-$ ,  $5_2^-$  et  $9^+$  de  $^{70}\text{Cu}$  ont leurs homologues  $5_1^-$ ,  $4^-$ ,  $6^-$ ,  $5_2^-$  et  $9^+$  dans le  $^{134}\text{Sb}$  et  $7_1^-$ ,  $6^-$ ,  $8^-$ ,  $7_2^-$  et  $11^+$  dans le  $^{210}\text{Bi}$ . Les autres états de haut spin  $8^-$ ,  $10^+$  et  $12^-$  de  $^{134}\text{Sb}$  possèdent comme homologues  $10^-$ ,  $12^+$  et  $14^-$  de  $^{210}\text{Bi}$ .

L'ordre des états homologues est respecté généralement, à l'exception de l'inversion entre les valeurs théoriques des niveaux  $4_2^-$ ,  $6_2^-$  et  $5_2^-$  de  $^{70}\text{Cu}$ .

Les homologies identifiées sont :

$$\begin{array}{l}
\text{(I}_c\text{)} \left\{ \begin{array}{l} J_{Cu} = J_{Sb} = J_{Bi} - 2 \\ \pi_{Cu} = \pi_{Sb} = \pi_{Bi} \end{array} \right. \\
\text{(II}_c\text{)} \left\{ \begin{array}{l} n_{Sb} = n_{Bi} \\ l_{Sb} = l_{Bi} - 1 \\ j_{Sb} = j_{Bi} - 1 \end{array} \right.
\end{array}$$

On remarque qu' il n'existe aucune homologie en  $n$  ,  $l$  et  $j$  entre les états de  $^{70}\text{Cu}$  et  $^{134}\text{Sb}$  ,ou  $^{70}\text{Cu}$  et  $^{210}\text{Bi}$  , ce qui conduit à conclure qu'il existe une similarité incomplète ou partielle entre le  $^{70}\text{Cu}$  et ces deux homologues des régions  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$ , alors qu'elle est très claire entre ces deux derniers [34].

### 3.5 Discussion des résultats

Dans cette section, on représente les différents résultats obtenus par les deux interactions spécialement pour la région du Nickel, et on essaye de les interpréter.

► les spectres énergétiques calculés du noyau  $^{70}\text{Zn}$  sont en accord satisfaisant avec l'expérience ( figure 3-4), d'une part à cause de la stabilité de ce noyau ( figure1-14) et d'autre part, ce noyau a deux protons de valence en dehors de la couche  $1f_{7/2}$  ( $Z=28$ ), couche magique traditionnelle, parfaitement fermée.

► Pour Le  $^{70}\text{Ni}$ , les paramètres B et C n'ont aucune influence sur les valeurs des énergies des états. Pour certaines valeurs des paramètres de l'interaction Delta, le spectre énergétique devient le même que celui calculé par l'interaction MSDI.

► Les spectres calculés par les deux interactions pour le noyau  $^{70}\text{Cu}$  montrent un accord satisfaisant avec l'expérience pour les états connus expérimentalement (  $6_1^-$ ,  $3^-$ ,  $4_1^-$ ,  $5_1^-$  et  $1^+$ ).

► Pour les noyaux à deux nucléons identiques, l'interaction MSDI montre que B et C n'ont d'influence que sur les énergies des états qui proviennent des configurations mélangées, c-à-d les nucléons sont sur des orbitales différentes. Donc, on peut conclure que l'introduction de la correction d'isospin par le paramètre B permet de reproduire globalement les états de hautes énergies pour les noyaux à deux nucléons identiques des régions étudiées.

► L'ensemble des paramètres choisis des deux interactions pour les noyaux  $^{134}\text{Sn}$ ,  $^{210}\text{Pb}$ ,  $^{134}\text{Te}$  et  $^{210}\text{Po}$  conforte bien l'expérience.

► Les spectres en énergie des noyaux à deux nucléons de valence montrent que la majorité

des états à deux particules dans la région de  $^{68}\text{Ni}$  ont leur homologue de même spin et parité dans la région de  $^{132}\text{Sn}$  et même parité et deux unités de spin en moins dans la région du  $^{208}\text{Pb}$ . De plus, l'espacement en énergie et l'ordre des états homologues sont globalement similaires dans les trois régions.

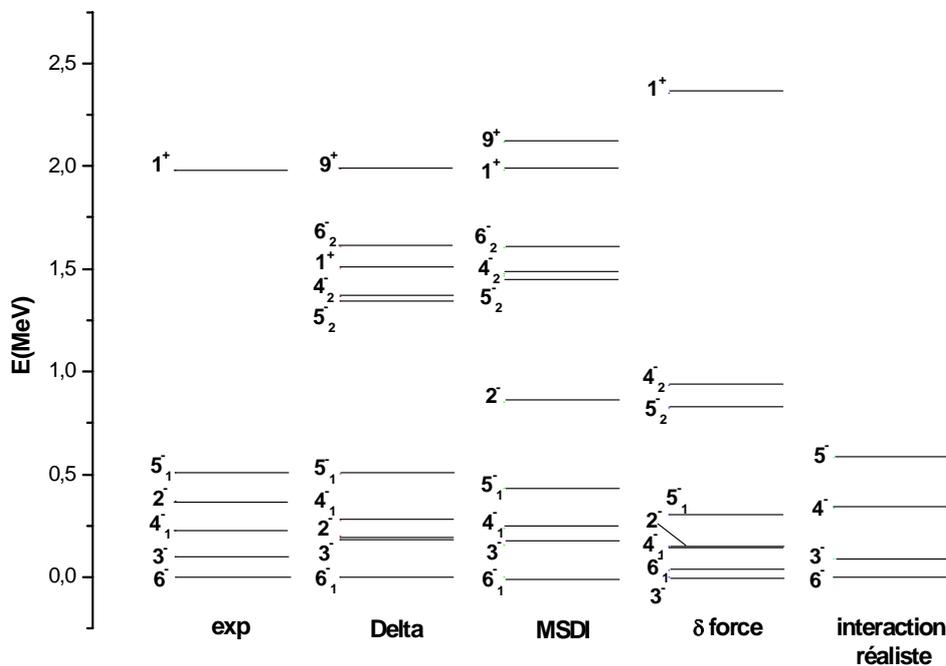
► L'interaction MSDI reproduit les spectres énergétiques de la majorité des noyaux étudiés mieux que l'interaction Delta.

► Les valeurs des paramètres des deux interactions qu'on a utilisé dans les calculs des énergies ne sont pas les seules valeurs optimales qui reproduisent les états énergétiques des noyaux étudiés spécialement pour l'interaction Delta.

### 3.6 Comparaison avec d'autres théories

Dans cette section, nous avons comparé les résultats obtenus par l'interaction Delta et MSDI avec ceux obtenus par les autres théories, qui sont des interactions dérivées du potentiel **CD Bonn**, en commençant par les noyaux de deux nucléons de valence de la région du  $^{68}\text{Ni}$ .

•  $^{70}\text{Cu}$  :

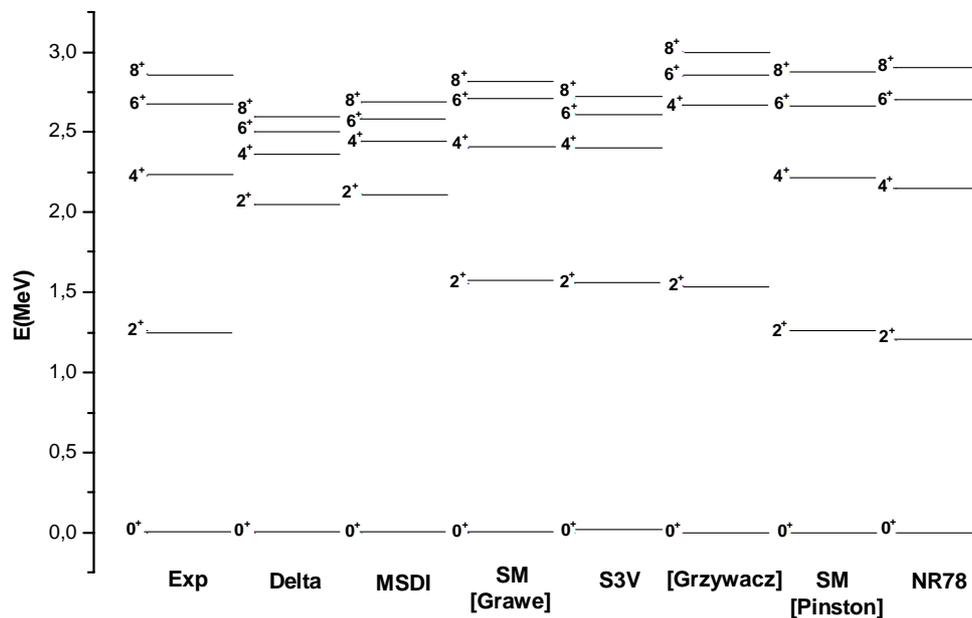


**FIG. (3–17) :** Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{70}\text{Cu}$ .

Très peu de théories qui ont concerné cet élément, mais les informations expérimentales sont de plus en plus en développement par différents laboratoires essentiellement les groupes de Ganil. Un des théoriciens intéressé à cette région, est J. Van. Roosbroeck [28], qui a utilisé des interactions réaliste et Delta. Sur la figure (3-17) ci dessus, sont représentés l'ensemble des spectres.

On remarque un bon accord entre nos résultats et ceux obtenus par l'interaction réaliste pour les niveaux de basses énergies. L'interaction  $\delta$  avec les paramètres ajustés [28] donne des résultats loin de l'expérience. Il y'a une inversion entre les états  $3^-$  et  $6_1^-$ .

●  $^{70}\text{Ni}$  :



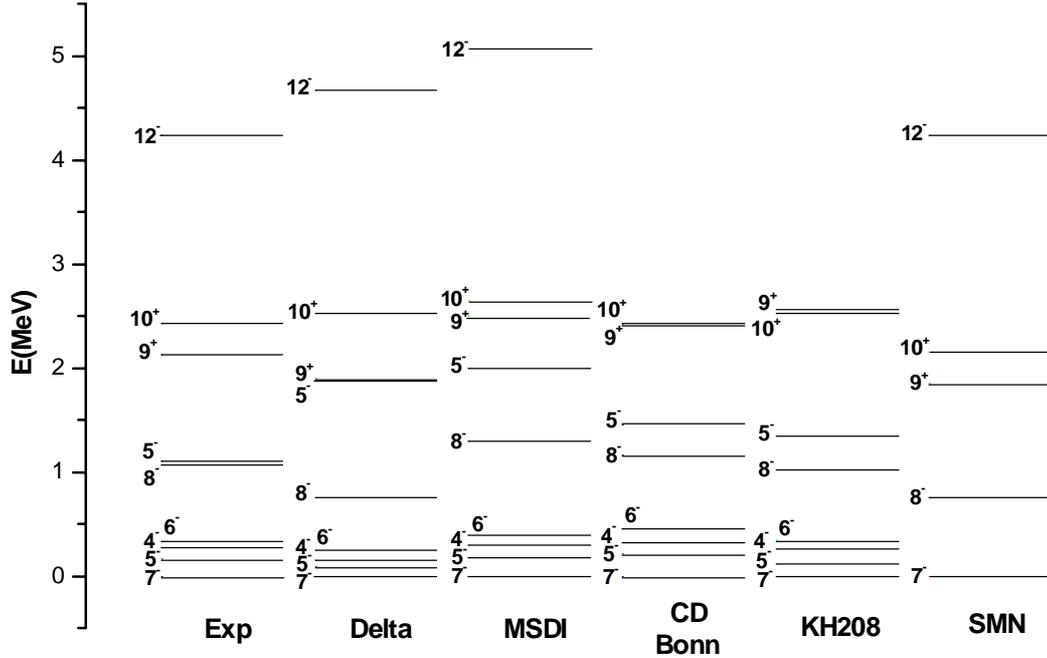
**FIG. (3–18) :** Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{70}\text{Ni}$ .

Certaines études théoriques sont développés sur les isotopes pairs du nickel, spécialement de la région semi- magique, en particulier le  $^{70}\text{Ni}$ . Dans la littérature les interactions **SM** [18], **S3V** [43] et **NR78** [16] sont les interactions les plus utilisées sur cette région.

Les résultats schématisés sur la figure (3-18) ci-dessus, obtenus par J. A. Pinston et al [17], en utilisant l'interaction **SM**, et par A. F. Lisetskiy [16] en utilisant l'interaction **NR78** dérivée du potentiel réaliste **CD Bonn**, donnent les meilleurs accords avec l'expérience. Tandisque les résultats de R. Grzywacz et al [21], H. Grawe [18] utilisant les interactions

résiduelles **S3V** et **SM**, montrent que le niveau  $2^+$  est toujours au-dessus de son correspondant expérimental. Les autres niveaux se rapprochent de leurs correspondants. La même remarque est faite pour les résultats de notre travail, et qui nous permet de dire qu'ils sont comparables à ceux obtenus par H. Grawe [18] avec l'interaction **S3V**.

•  $^{134}\text{Sb}$  :



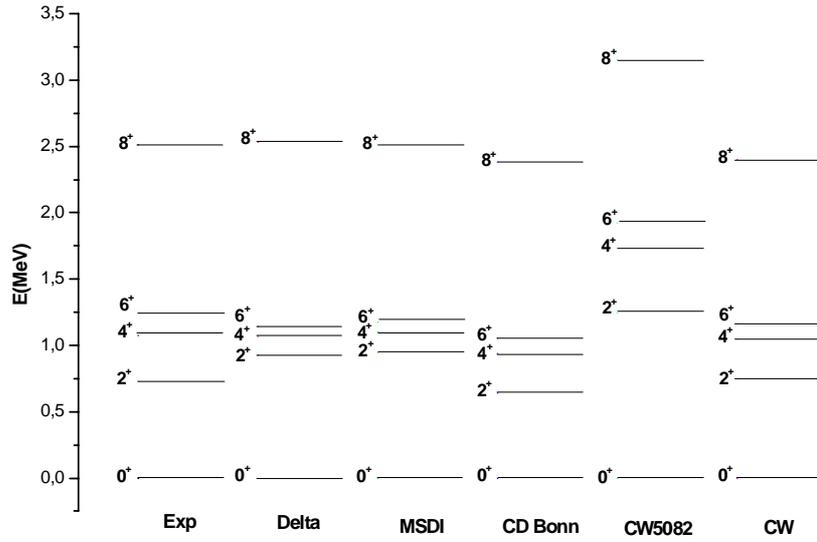
**FIG. (3–19)** : Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{134}\text{Sb}$

Plusieurs calculs sont développés pour ce noyau. Nos calculs avec l'interaction Delta et MSDI sont comparés à ceux obtenus par les interactions dérivées du potentiel **CD Bonn**.

Les calculs qui ont été fait par J. Shergur [44], en utilisant l'interaction **KH208** et l'interaction dérivée du potentiel **CD Bonn**, montrent un bon accord avec l'expérience et avec nos résultats. Ce calcul a bien reproduit la séquence de tous les niveaux. Par contre, on remarque une inversion entre les états  $9^+$  et  $10^+$  pour les calculs du **KH208**.

Les calculs par **SMN** de S. Saha [30] qui sont faits pour les niveaux de hautes énergies, montrent un bon accord avec l'expérience à l'exception du niveau  $8^-$ . Ce calcul reproduit la séquence des niveaux  $9^+$  et  $10^+$ .

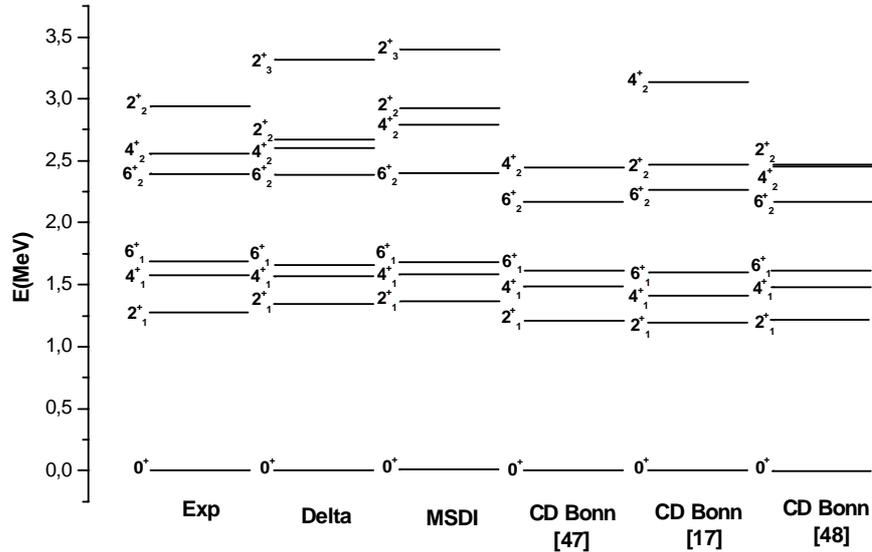
●  $^{134}\text{Sn}$  :



**FIG. (3–20)** : Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{134}\text{Sn}$

On remarque un bon ajustement du niveau  $2^+$  par le calcul de **CD Bonn** [38] et l'interaction **CW** [45]; contrairement au résultats obtenus par l'interaction **CW5082** [46], On remarque que nos résultats sont très proches à ceux de **CW**.

●  $^{134}\text{Te}$  :



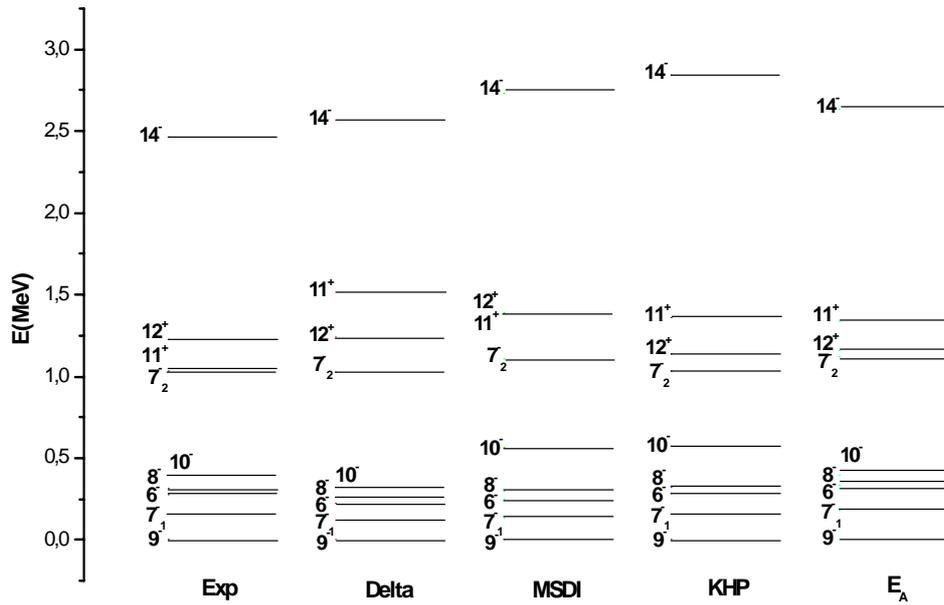
**FIG. (3–21)** : Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{134}\text{Te}$

Les résultats de l'interaction Delta et MSDI sont comparés à ceux calculés par les interactions dérivées du potentiel **CD Bonn**. [17, 47, 48]. Cette comparaison est montrée sur la figure (3-21).

On remarque que l'interaction Delta reproduit bien la séquence des niveaux, ainsi que toutes les autres interactions à l'exception des résultats de l'interaction dérivée du potentiel **CD Bonn** [17], où on observe une inversion d'ordre entre les états  $2_2^+$  et  $4_2^+$ .

Les niveaux  $2^+$ ,  $4_1^+$  et  $6_1^+$  sont très proches dans tous les calculs. Le spectre calculés par F. Majeed [48] est en bon accord avec l'expérience.

●  $^{210}\text{Bi}$  :

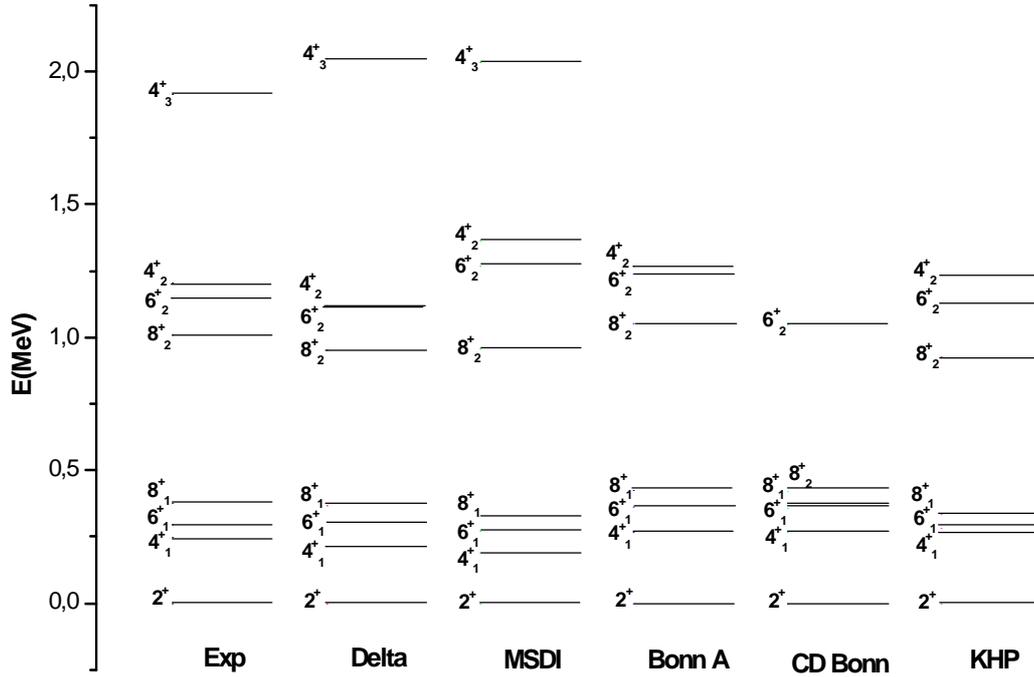


**FIG. (3–22)** : Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{210}\text{Bi}$

Nos résultats sont comparés à ceux de Warbortun [41], avec l'interaction p-n obtenue par le potentiel Kuo- Herling (**KHP**), et à ceux d'Alexa [40], avec les interactions **EA**.

Toutes les interactions reproduisent bien les niveaux de basse énergie  $9^-$ ,  $7_1^-$ ,  $6^-$ ,  $8^-$ ,  $10^-$  et  $7_2^-$ , aussi bien leurs séquences, l'inversion entre les niveaux  $11^+$  et  $12^+$  existe aussi dans les autres calculs. Les états de haute énergie sont moins reproduits.

●  $^{210}\text{Po}$  :



**FIG. (3–23) :** Comparaison du spectre énergétique expérimental avec ceux calculés par les interactions Delta et MSDI et ceux donnés dans la littérature du noyau  $^{210}\text{Po}$

Nos résultats sont comparés à ceux obtenus avec les interactions dérivées du potentiel **Bonn A** [39], **CD Bonn** [49] et le potentiel Kuo- Herling [41] (figure 3-23).

Toutes les interactions reproduisent bien le spectre expérimental.

Généralement, nos résultats sont en bon accord avec l'expérience et avec ceux obtenus avec les autres théories.

# Conclusion

Ce travail est articulé sur les applications du modèle en couches pour les noyaux à quelques nucléons de valence autour des couches fermées, en particulier le système à deux corps, qui joue un rôle important dans les prédictions de la théorie de ce modèle spécialement l'interaction  $\mathbf{N} - \mathbf{N}$ . On s'intéresse aux noyaux riches en neutrons près des noyaux doublement magiques  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$ , et du noyau semi-doublement magique  $^{68}\text{Ni}$ . Les différentes études expérimentales réalisées sur le  $^{68}\text{Ni}$  ont mis en évidence la spécificité de ce noyau et soulevé sa magie ( $N=40$ ) en particulier : très faible  $\mathbf{B}(\mathbf{E}2)$  et grande énergie  $2^+$ . L'extension de l'étude des noyaux de cette région est indispensable afin d'avoir une vue globale et suivre l'évolution des nombres magiques loin de la stabilité. Notons enfin, que l'orbitale  $1g_{9/2}$ , situé entre  $N=40$  et  $N=50$  et une orbitale intruse et son remplissage influe sur la structure du noyau.

Dans le cadre du modèle en couches, les spectres en énergie des isobares de  $A=70, 134$  et  $210$  sont déterminés en utilisant les interactions schématiques Delta et MSDI.

Les prédictions du modèle en couches, des noyaux ayant 1p-1n de valence, notamment le noyau du  $^{70}\text{Cu}$  montrent un accord satisfaisant avec l'expérience. Les valeurs des énergies donnent des informations sur l'interaction résiduelle  $\pi - \nu$ , en particulier l'interaction entre les couches  $pf$  et la couche  $1g_{9/2}$  dans cette région. Pour les noyaux  $^{134}\text{Sb}$  et  $^{210}\text{Bi}$ , l'accord avec l'expérience est bon surtout pour les états de bas spin. De même pour le noyau du  $^{70}\text{Ni}$ , la reproduction du premier état excité  $2^+$  ne permet pas de reproduire les autres niveaux et vis versa.

Notons de plus que l'ordre des états énergétiques est généralement respecté sauf dans le cas des noyaux à deux nucléons non identiques, où on observe certaines inversions entre les états, par exemple entre  $2^-$  et  $5^-$  du  $^{70}\text{Cu}$ , et entre  $11^+$  et  $12^+$  du  $^{210}\text{Bi}$ , et cela pour certaines valeurs des paramètres .

L'inversion entre les niveaux  $3^-$  et  $6^-$  pour le  $^{70}\text{Cu}$  obtenue dans le calcul du Roosbroeck n'est pas essentielle car elle n'apparaît que pour certaines valeurs de paramètres.

D'après l'ensemble de ces résultats, on peut conclure que l'interaction MSDI donne une meilleure reproduction des spectres en énergie et de la séquence des niveaux.

L'extension de la similarité entre les deux régions de l'étain et du plomb vers la région du nickel a été étudiée sur la base des données expérimentales (spin, parité et énergie des états...). Celle-ci est validée et complétée théoriquement au moyen de calcul de modèle en

couches par l'interaction MSDI. Toutes les similarités sont exploitées, soit pour l'ordre et l'espacement en énergie des états des noyaux, soit pour leurs correspondances dans les trois régions. Cette étude est rendue difficile dans le cas du système p-n, du fait de l'insuffisance de données expérimentales disponibles sur les noyaux de la région du nickel. Une similarité globale est déduite entre les états des noyaux à 2 nucléons de valence. Nous avons obtenu les correspondances entre les spins et parités des noyaux dans les trois régions :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{Ni} = J_{Sn} = J_{Pb} - 2 \\ \pi_{Ni} = \pi_{Sn} = \pi_{Pb} \end{array} \right.$$

Notons que l'homologie en n, l, et j n'est que partielle, ceci est due au fait que les noyaux  $^{132}\text{Sn}$  et  $^{208}\text{Pb}$  possèdent des doubles fermetures de couches et sont favorables à cette similarité au contraire de celle du noyau semi fermé  $^{68}\text{Ni}$ . L'espace de valence est dans ce cas réduit à l'orbitale  $1g_{9/2}$  pour les neutrons, et ne donne pas la possibilité d'avoir plusieurs configurations de couplage neutrons au contraire des espaces larges de l'étain et du plomb.

Enfin, le noyau semi-doublement magique  $^{68}\text{Ni}$  n'est peut être un coeur idéal pour les calculs de modèle en couches. Ceci est due au fait que la région du nickel et ses isotopes forme une région de déformation ; et donc le potentiel de l'interaction doit contenir un terme correctif représentant cette déformation. Un coeur inerte à double fermeture comme le  $^{78}\text{Ni}$  (8 trous) ou le  $^{56}\text{Ni}$  (14 particules de valence) serait mieux adapté dans les calculs à l'aide d'hamiltonien à plusieurs corps (trous).

La comparaison entre nos résultats avec ceux obtenus par des calculs à l'aide des interactions résiduelles dérivées du potentiel **CD-Bonn**, montre un accord satisfaisant avec l'expérience.

L'étude intensive des noyaux de la région du nickel nécessite un grand développement de techniques expérimentales, et l'utilisation de nouvelles interactions effectives déterminées sur l'espace  $pf$ , et les codes de calculs avancés comme OXBASH, ANTOINE, IBM , etc...

# Références

- [1] J. Blomqvist, Proceedings of the 4th International Conference on Nuclei Far from Stability, Helsingor, Denmark, report N° 81-09, CERN, p. 536-541, (1981). CERN, Geneva,
- [2] L. S. Geng et al, J. Phys. G30, 1915-1928 (2004)
- [3] T. Otsaka et al, Phys. Rev. Lett. 87, 082502 (2001)
- [4] <http://hyperphysics.phys-astr.gsu.edu/hbase/nuclear>
- [5] G. E. Brown et al., Nucl. Phys. A729 (2003)
- [6] <http://physicsweb.org/articles/news>
- [7] <http://www.cscsm.in2p3.fr/nominatif/lunney>
- [8] O. Perru, thèse de Doctorat, Université de Paris Sud, U.F.R scientifique d'Orsay (2004)
- [9] B. Blank, Nucl. Phys. News, V10, 4, 20-28 (2000)
- [10] A. M. Oros-Peusquens and P.F. Mantica, Nucl. Phys. A 669, 81-100 (2000)
- [11] W. F. Muller, Phys. Rev. C 83, 3613-3616 (1999)
- [12] R. Broda et al, Phys. Rev. Lett. 74, 6, 868-871 (1995)
- [13] ENSDF, "National Data Center", <http://www.nndc.bnl.gov/nndc/ensdf/>
- [14] C. Mazzocchi et al, Phys. Lett. B 622, 45-54 (2005)
- [15] O. Sorlin et al, Phys. Rev. Lett. 88, 092501 (2002)
- [16] A. Lisetskiy et al, Phys. Rev. C 70, 044314 (2004).
- [17] J. A. Pinston and J. Genevey, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 30, R57-R82 (2004)
- [18] H. Grawe et al., Nucl. Phys. A704, 211c-221c (2002)
- [19] I. Deloncle and B. Roussière, [xxx.arxiv.org](http://xxx.arxiv.org), arXiv : nucl-th / 0309050 (2003)
- [20] N. A. Smirnova et al, Phys. Rev. C69, 044306 (2004)
- [21] R. Gryzwacz et al, Phys. Rev. C 68 044304 (2002)
- [22] T. Ishii et al, Phys. Rev. Lett. 84, 1, 39-42 (2000)
- [23] L. Weissman et al, Phys. Rev. C65, 024315 (2002)
- [24] K. L. G. Heyde, "The nuclear shell model", Springer -Verlag (1996)
- [25] Piet Van Isacker, Conf. "Nuclear Structure and Decay Data : Theory and Evaluation" Trieste, Italie (2006)
- [26] F. Nowacki, Cours de l'école internationale Joliot-Curie de physique nucléaire, IN2P3-CNRS, p142 (2002).
- [27] P. J. Brussard and P. W. M. Glaudemans, "Shell Model Applications in nuclear

spectroscopy, Ed. N. H. P. C (1977)

- [28] J. Van. Roosboeck, Phys. Rev. C69, 034313 (2004)
- [29] J. Van Roosbroeck, PhD thesis, Katholik Univercity, Leuven (2002)
- [30] S. Sarkar and M. S. Saha, Eur. Phys. J. A 21, 61-66 (2004)
- [31] A. Covello et al, Phys. Atom. Nucl. 67, 1611-1618 (2004)
- [32] A. Deshalit and H. Feshbach, "Theoretical Nuclear Physics Vol.1", Wiley (1990)
- [33] K. Langanke et al, Phys. Rev. C67, 044314 (2003)
- [34] Bouhellel Mouna, thèse de magister, Université Mentouri- Constantine (2002)
- [35] Richard Firestone, Virginia S. Shirley, "Table of isotopes" Eighth edition Volume I-II (1996)
- [36] S. Sarkar and M. S. Sarkar, xxx.arxiv.org, arXiv : nucl-th / 0503067 (2005), talk presented at " 4<sup>th</sup> International Balkan School on Nuclear Physics, Bodrum, 22-29 September 2004"
- [37] B. Fornal and R. Proda, Phys, Rev C63, 024322 (2001)
- [38] L Coraggio et al, Phys. Rev. C65, 051306 (2002)
- [39] L. Coraggio et al , Phys. Rev C 60, 064306 (1999)
- [40] P. Alexa et al, Phys Rev C 55, 179-187 (1997)
- [41] E. K. Warburton and B. A. Brown, Phys. Rev. C43, 602 (1991)
- [42] L. Coraggio et al , xxx.arxiv.org, arXiv : nucl-th/ 9812046 (1998), talk presented at " VII Convegno su Problemi di Fisica Teorica, Cortona, October 1998"
- [43] M. Sawicka et al, Phys Rev C 68, 044304 (2003)
- [44] J. Shergur et al, Phys. Rev. C71, 064321 (2005)
- [45] A. Korgul and W.Urban, Eur. Phys. J. A7, 167-176 (2000)
- [46] W. T. Chou and E. K. Warburton, Phys. Rev. C 45, 1721 (1992)
- [47] B. A. Brown, Phys. Rev. C 71, 044317 (2005)
- [48] F. A. Majeed, xxx.arxiv.org, arXiv : nucl.th/0601084 (2006)
- [49] L. Coraggio et al, xxx.arxiv.org, arXiv : nucl-th/ 0109025 (2001), talk presented at " INPC 2001, 29 July- 3 August 2001, Berkeley (USA)"

# Annexe A

## Calculs des éléments de matrice d'interaction Delta de deux particules

L'interaction Delta entre deux particules a et b est donnée par la formule suivante [28] :

$$V_{ab}(\vec{r}) = -V_{eff}(1 - \alpha + \alpha g \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b) \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \quad (\text{A-1})$$

Soit  $M_J$  l'élément de la matrice d'interaction :

$$M_J = \langle j_a j_b JM | V_{ab}(\vec{r}) | j'_a j'_b JM \rangle = \langle j_a j_b JM | -V_{eff}(1 - \alpha + \alpha g \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b) \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | j'_a j'_b JM \rangle \quad (\text{A-2})$$

$$M_J = -V_{eff}(1 - \alpha) [\langle j_a j_b JM | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | j'_a j'_b JM \rangle + \alpha g \langle j_a j_b JM | \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | j'_a j'_b JM \rangle] \quad (\text{A-3})$$

On transforme le couplage J-J au couplage L-S en utilisant la relation [32]

$$|l_a j_a l_b j_b JM\rangle = \sum_{LS} \sqrt{(2j_a + 1)(2j_b + 1)(2L + 1)(2S + 1)} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{Bmatrix} |l_a l_b SLJM\rangle \quad (\text{A-4})$$

avec  $j = \sqrt{2j + 1}$

$$L = \sqrt{2L + 1}$$

$$S = \sqrt{2S + 1}$$

$$\begin{aligned}
M_J = & -V_{eff}[(1 - \alpha)\langle l_a l_b L S | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b \acute{L} \acute{S} \rangle + \\
& \alpha g \langle l_a l_b L S | \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b \acute{L} \acute{S} \rangle] \sum_{LS} \sum_{\acute{L}\acute{S}} j_a j'_a j_b j'_b L S L' S' \\
& \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ S' & L' & J \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{A-5}$$

posons :

$$A_J = j_a j'_a j_b j'_b L S L' S' \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ S' & L' & J \end{matrix} \right\} \tag{A-6}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
M_J = & -V_{eff} \sum_{LS} \sum_{\acute{L}\acute{S}} A_J [(1 - \alpha)\langle l_a l_b L S | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b \acute{L} \acute{S} \rangle + \alpha g \\
& \langle l_a l_b L S | \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b \acute{L} \acute{S} \rangle]
\end{aligned} \tag{A-7}$$

Mais  $\delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$  ne dépend pas du spin et commute avec  $\vec{L}$  donc :

$$\langle l_a l_b L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b \acute{L} M'_L \rangle = \langle l_a l_b L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b L M_L \rangle \delta(L, L') \delta(M_L, M'_L) \tag{A-8}$$

$A_J$  devient :

$$A_J = \sum_{LS} j_a j'_a j_b j'_b L^2 S^2 \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \tag{A-9}$$

Donc :

$$M_J = -V_{eff} \sum_L \sum_{S=0,1} A_J \left[ (1-\alpha) \langle l_a l_b L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b L M_L \rangle + \alpha g \langle l_a l_b S M_S | \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b S M_S \rangle \right] \quad (\text{A-10})$$

Ou bien :

$$M_J = -V_{eff} \sum_L \sum_{S=0,1} A_J [(1-\alpha) \langle L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | L M_L \rangle + \alpha g \langle S M_S | \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | S M_S \rangle] \quad (\text{A-11})$$

d'autre part :

$$\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \text{ donc } \langle \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \rangle = 2S(S+1) - 3$$

$$\text{pour : } \begin{cases} S = 0, \langle \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \rangle = -3 \\ S = 1, \langle \vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b \rangle = +1 \end{cases}$$

$$M_J = -V_{eff} \sum_L j_a j'_a j_b j'_b L^2 \begin{Bmatrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} [(1-\alpha) \langle L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | L M_L \rangle + \alpha g \langle S M_S | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | S M_S \rangle] - 3 \sum_L j_a j'_a j_b j'_b L^2 \begin{Bmatrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ 0 & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ 0 & L & J \end{Bmatrix} [(1-\alpha) \langle L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | L M_L \rangle + \alpha g \langle S M_S | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | S M_S \rangle] \quad (\text{A-12})$$

Calculons :

$$\langle l_a l_b L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | \acute{l}_a \acute{l}_b L M_L \rangle \quad (\text{A-13})$$

D'après Deshalit [27], on a :

$$\langle l_a l_b L M_L | \delta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) | l'_a l'_b L M_L \rangle = F^0 l_a l_b l'_a l'_b \begin{pmatrix} l_a & l_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'_a & l'_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-14})$$

avec  $F^0$  le déterminant de Slater :

$$F^0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r^2} R_{n_a l_a}^2(r) R_{n_b l_b}(r) dr$$

Posons :

$$A'_J(S) = \sum_L j_a j'_a j_b j'_b L^2 l_a l_b l'_a l'_b F^0 \begin{pmatrix} l_a & l_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} l'_a & l'_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \quad (\text{A-15})$$

$$M_J = -V_{eff} [A'_J(S=1) - 3A'_J(S=0)] [(1-\alpha) + \alpha g] \quad (\text{A-16})$$

Pour calculer les  $A'_J(S)$ , on utilise l'identité de Deshalit-Talmi [32] :

$$\begin{pmatrix} l_a & l_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{matrix} \right\} = \sum_{m_i} \begin{pmatrix} j_a & \frac{1}{2} & l_a \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & \frac{1}{2} & l_b \\ m_3 & m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & S & L \\ m_5 & m_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ m_2 & m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix} \quad (\text{A-17})$$

posons :

$$\begin{aligned}
col(S) = \sum_L (2L+1) & \begin{pmatrix} l_a & l_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_a & j_a \\ 1/2 & l_b & j_b \\ S & L & J \end{Bmatrix} \\
& \begin{pmatrix} l'_a & l'_b & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l'_a & j'_a \\ 1/2 & l'_b & j'_b \\ S & L & J \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A-18}$$

Donc  $col(S)$  devient :

$$\begin{aligned}
col(S) = \sum_L (2L+1) \sum_{m_i m'_i} & \begin{pmatrix} j_a & \frac{1}{2} & l_a \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & \frac{1}{2} & l'_a \\ m'_1 & m'_2 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} j_b & \frac{1}{2} & l_b \\ m_3 & m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_b & \frac{1}{2} & l'_b \\ m'_3 & m'_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & S & L \\ m_5 & m_6 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} J & S & L \\ m'_5 & m'_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ m_2 & m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ m'_2 & m'_4 & m'_6 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ m'_1 & m'_3 & m'_5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A-19}$$

mais :

$$\sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \tag{A-20}$$

alors :

$$\begin{aligned}
col(S) = & \sum_{m_i m'_i} \begin{pmatrix} j_a & \frac{1}{2} & l_a \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & \frac{1}{2} & l'_a \\ m'_1 & m'_2 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} j_b & \frac{1}{2} & l_b \\ m_3 & m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_b & \frac{1}{2} & l'_b \\ m'_3 & m'_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ m_2 & m_4 & m_6 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ m'_2 & m'_4 & m'_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_1 & m_3 & m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ m'_1 & m'_3 & m'_5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A-21}$$

mais  $m_i, m'_i$  prennent les valeurs  $+\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  donc ces valeurs permises sont :

$$m_1 = m'_1 = m_3 = m'_3 = \frac{1}{2} \text{ et } m_2 = m'_2 = m_4 = m'_4 = -\frac{1}{2} \text{ (et l'inverse)}$$

$$m_1 = m'_1 = m_4 = m'_4 = \frac{1}{2} \text{ et } m_2 = m'_2 = m_3 = m'_3 = -\frac{1}{2} \text{ (et l'inverse)}$$

$$m_2 = m'_2 = m_3 = m'_3 = \frac{1}{2} \text{ et } m_4 = m'_4 = m_1 = m'_1 = -\frac{1}{2} \text{ (et l'inverse)}$$

on utilise les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{A-22}$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| \langle 00 \rangle \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A-23}$$

et

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A-24}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{A-25}$$

pour calculer  $col(S=0)$  : on utilise l'identité suivante :

$$\begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j+l+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & l \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(2l+1)}} \tag{A-26}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & l \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l+1}}{\sqrt{2(2l+1)}} \quad (\text{A-27})$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{col}(S = 0) &= -\frac{1}{8}(-1)^{j_b+j'_b}(l_a l_b l'_a l'_b)^{-1} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \left[ (-1)^{l_a+l'_a} + (-1)^{l_b+l'_b} + (-1)^{l_b+l'_a+J} + (-1)^{l'_b+l_a+J} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

Et pour calculer le col (S=1) : on utilise les identités suivantes :

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a+j_b+J}]^2}{4J(J+1)} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (\text{A-29})$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{(2j_3+1)}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-30})$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (\text{A-31})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (\text{A-32})$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{col}(S = 1) &= \frac{1}{12}(-1)^{j_b+j'_b}(l_a l_b l'_a l'_b)^{-1} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \left\{ \frac{(-1)^{l_b+l'_a+J} + (-1)^{l'_b+l_a+J} - (-1)^{l_a+l'_a} - (-1)^{l_b+l'_b}}{2} + (-1)^{j_b+j'_b} \left( 1 + (-1)^{l_a+l'_a+l_b+l'_b} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a+j_b+J}][ (2j'_a + 1) + (2j'_b + 1)(-1)^{j'_a+j'_b+J} ]}{4J(J+1)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-33})$$

On a :

$$M_J = -V_{eff} \left\{ (1 - \alpha) \left[ A'_J(S = 1) - 3A'_J(S = 0) \right] + \alpha g \left[ A'_J(S = 1) - 3A'_J(S = 0) \right] \right\} \quad (\text{A-34})$$

Ecrivant le  $M_J$  en utilisant le  $col(S)$  on trouve :

$$M_J = -V_{eff} j_a j_b j'_a j'_b (l_a l_b l'_a l'_b) F_0 \left\{ (1 - \alpha) [3col(S = 1) + 1col(S = 0)] + \alpha g [3col(S = 1) - 3col(S = 0)] \right\} \quad (\text{A-35})$$

Ou bien :

$$M_J = -V_{eff} j_a j_b j'_a j'_b (l_a l_b l'_a l'_b) F_0 \left\{ [3col(S = 1) + 1col(S = 0)] - \alpha [(col(S = 1)(1 - 3g) + 3col(S = 0)(1 - g))] \right\} \quad (\text{A-36})$$

Après calculs, on trouve :

$$M_J = -V_{eff} \frac{F_0}{4} j_a j_b j'_a j'_b (-1)^{j_b + j'_b} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \left[ -(-1)^{l_a + l'_a} - (-1)^{l_b + l'_b} + (-1)^{j_b + j'_b} (1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b}) \right] \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a + j_b + J}][(2j'_a + 1) + (2j'_b + 1)(-1)^{j'_a + j'_b + J}]}{4J(J + 1)} \right] - \alpha [(1 - g) \left( \frac{(-1)^{l_b + l'_a + J} + (-1)^{l'_b + l_a + J} - (-1)^{l_a + l'_a} - (-1)^{l_b + l'_b}}{2} + (-1)^{j_b + j'_b} (1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b}) \right) - (1 + 3g) \left( \frac{(-1)^{l_b + l'_a + J} + (-1)^{l'_b + l_a + J} - (-1)^{l_a + l'_a} - (-1)^{l_b + l'_b}}{2} \right) - (1 + 3g) \left( \frac{(-1)^{l_b + l'_a + J} + (-1)^{l'_b + l_a + J} + (-1)^{l_a + l'_a} + (-1)^{l_b + l'_b}}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{A-37})$$

Ou :

$$\begin{aligned}
M_J = & V_{eff} \frac{F_0}{4} j_a j_b j'_a j'_b (-1)^{j_b + j'_b} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'_a & j'_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
& \left\{ \left[ (-1)^{l_a + l'_a} + (-1)^{l_b + l'_b} - (-1)^{j_b + j'_b} (1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b}) \right. \right. \\
& \left. \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a + j_b + J}][(2j'_a + 1) + (2j'_b + 1)(-1)^{j'_a + j'_b + J}]}{4J(J+1)} \right] - \alpha [(g-1) \\
& \left( \frac{(-1)^{l_b + l'_a + J} + (-1)^{l'_b + l_a + J} - (-1)^{l_a + l'_a} - (-1)^{l_b + l'_b}}{2} + (-1)^{j_b + j'_b} (1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b}) \right. \\
& \left. \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a + j_b + J}][(2j'_a + 1) + (2j'_b + 1)(-1)^{j'_a + j'_b + J}]}{4J(J+1)} \right) + (1 + 3g) \\
& \left. \left. \left( \frac{(-1)^{l_b + l'_a + J} + (-1)^{l'_b + l_a + J} + (-1)^{l_a + l'_a} + (-1)^{l_b + l'_b}}{2} \right) \right] \right\} \quad (A-38)
\end{aligned}$$

pour  $j_a = j'_a$  et  $j_b = j'_b$  :

$$\begin{aligned}
M_J = & V_{eff} \frac{F_0}{2} j_a^2 j_b^2 \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \left\{ \left[ 1 - (1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b}) \right. \right. \\
& \left. \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a + j_b + J}]^2}{4J(J+1)} \right] - \alpha \left[ (g-1) \left( \frac{(-1)^{l_b + l_a + J} - 1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. + 1 + (-1)^{l_a + l'_a + l_b + l'_b} \frac{[(2j_a + 1) + (2j_b + 1)(-1)^{j_a + j_b + J}]^2}{4J(J+1)} \right) + (1 + 3g) \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{(-1)^{l_b + l_a + J} + 1}{2} \right) \right] \right\} \quad (A-39)
\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_a - j_b}}{\sqrt{2J+1}} \left\langle j_a \frac{1}{2}, j_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \quad (A-40)$$

$$\begin{aligned}
M_J = & V_{eff} \frac{F_0}{4} (2J+1)^{-1} j_a j_b j'_a j'_b (-1)^{j_a+j'_a} \left\langle j_a \frac{1}{2}, j_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \left\langle j'_a \frac{1}{2}, j'_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \\
& \left\{ \left[ (-1)^{l_a+l'_a} + (-1)^{l_b+l'_b} - (-1)^{j_b+j'_b} (1 + (-1)^{l_a+l'_a+l_b+l'_b}) \right. \right. \\
& \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right] - \alpha [(g-1) \\
& \left( \frac{(-1)^{l_b+l'_a+J} + (-1)^{l'_b+l_a+J} - (-1)^{l_a+l'_a} - (-1)^{l_b+l'_b}}{2} + (-1)^{j_b+j'_b} \left( 1 + (-1)^{l_a+l'_a+l_b+l'_b} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right) \right] + (1+3g) \\
& \left. \left. \left( \frac{(-1)^{l_b+l'_a+J} + (-1)^{l'_b+l_a+J} + (-1)^{l_a+l'_a} + (-1)^{l_b+l'_b}}{2} \right) \right] \right\} \quad (A-41)
\end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned}
M_J = & V_{eff} F_0 (2J+1)^{-1} j_a j'_a j_b j'_b (-1)^{j_a+j'_a} \left\langle j_a \frac{1}{2}, j_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \left\langle j'_a \frac{1}{2}, j'_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \\
& \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - (-1)^{j_b+j'_b} (1 + (-1)^{l_a+l'_a+l_b+l'_b}) \right. \right. \\
& \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right] \\
& - \alpha \left[ \frac{(g-1)}{2} \left( \frac{(-1)^{l_a+l_b+J} - 1}{2} + (-1)^{j_b+j'_b} \left( 1 + (-1)^{l_a+l'_a+l_b+l'_b} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right) \right] + \\
& \left. \left. \frac{(1+3g)}{4} (1 + (-1)^{l_b+l_a+J}) \right] \right\} \quad (A-42)
\end{aligned}$$

Finalement on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned}
M_J = & V_{eff} F_0 (2J+1)^{-1} j_a j'_a j_b j'_b (-1)^{j_a+j'_a+l_a+l'_a} \left\langle j_a \frac{1}{2}, j_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \left\langle j'_a \frac{1}{2}, j'_b \frac{-1}{2} \mid J0 \right\rangle \quad (A-43) \\
& \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} \right. \right. \\
& (-1)^{j_b+j'_b+l_a+l'_a} \left. \right] - \alpha \left[ \frac{(1+3g)}{4} (1 + (-1)^{l_b+l_a+J}) + \frac{(g-1)}{2} \left( \frac{(-1)^{l_a+l_b+J} - 1}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[(2j_a+1) + (2j_b+1)(-1)^{j_a+j_b+J}][(2j'_a+1) + (2j'_b+1)(-1)^{j'_a+j'_b+J}]}{4J(J+1)} (-1)^{j_b+j'_b+l_a+l'_a} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

# Annexe B

## Programme Delta :

```
PROGRAM DELT
REAL NU
REAL INT1,INT2
COMMON/SHELL/E(20),N(20),L(20),J(20),NUM(20)
COMMON/PARAM/ALFA,g,VEFF,IDENT
COMMON/VN06FC/FCT(40)
COMMON/VN07CB/NU,AKNL(4,4,8),ANL(4,8),INT1(20),INT2(20)
C
C <JA JB,JIVIJC JD,J>
C MATRIX ELEMENTS IN ORDER <J(N)J(P),JJ|V|J(N)J(P),JJ>
C (L+S)J IN THAT ORDER
C R(N,L) POSITIVE AT THE ORIGIN
C N=1,2,3,....
C JA=2*J DOUBLE PHYSICAL VALUE
C LA SINGLE PHYSICAL VALUE
C V=-VEFF*(1-ALPHA+ALPHA*g*SIGMA(P)*SIGMA(N))*DELTA FUNCTION
C NU=(M*OMEGA)/(2.*HBAR)
C
C GOOD ESTIMATES ARE VEFF=400;ALPHA=0.2
C IDENT=1 IDENTICAL PARTICLES
C
```

```

C INPUT DATA FOR PN-MATRIX ELEMENTS NU,ALFA,VEFF,IDENT
C
CALL VN07AL
WRITE(2,360)NU
360 FORMAT(1H , 'NU=',F10.8/)
READ(1,500)ALFA,g,VEFF,IDENT
500 FORMAT(2F7.4,F9.4,I2)
FCT(1)=1.
DO 50 I=2,40
FCT(I)=FCT(I-1)*(I-1.)/10.
50 CONTINUE
C
C IMAX TOTAL NUMBER OF S.P .ORBITS
C
READ(1,31)IMAX
31 FORMAT(I2)
WRITE(2,26)IMAX
26 FORMAT('IMAX=',I4)
DO 38 I=1,IMAX
READ(1,32)E(I),N(I),L(I),J(I),NUM(I)
32 FORMAT(F8.4,4I4)
WRITE(2,33)E(I),N(I),L(I),J(I),NUM(I)
33 FORMAT('E(I)=' ,F8.5,3X, 'N(I)=' ,I4,3X, 'L(I)=' ,I4,3X, 'J(I)=' ,I4,3X, '
1NUM(I)=' ,I4)
38 CONTINUE
WRITE(2,365)ALFA,g,VEFF
365 FORMAT(1H , 'ALFA=' ,F7.4, 'g=' ,F7.4, 'VEFF=' ,F9.4)
60 READ(1,34)I1,I2,I3,I4,JP,ICON
34 FORMAT(6I3)
X=DELTA(I1,I2,I3,I4,JP)
      F0=SLATER(NA,L(I1),NB,L(I2),NC,L(I3),ND,L(I4))

```

```

S0=S(J(I1),J(I2),JP)
WRITE(2,36)JP,X
36 FORMAT(I2,E20.6)
IF (ICON.EQ.0) GOTO 60
STOP
END
FUNCTION DELTA(I1,I2,I3,I4,JP)
COMMON/PARAM/ALFA,g,VEFF,IDENT
COMMON/SHELL/E(20),N(20),L(20),J(20),NUM(20)
REAL NORM1,NORM2
NA=N(I1)-1
NB=N(I2)-1
NC=N(I3)-1
ND=N(I4)-1
A1=0.5
IF(IDENT.EQ.1)A1=1.
IF(JP.EQ.0.AND.IDENT.NE.1)GOTO 106
IF(JP.GE.1.AND.IDENT.NE.1)GOTO 101
106 ZL=0.
GOTO 102
101 ZL=S(J(I2),J(I1),JP)*S(J(I4),J(I3),JP)/(4.*JP*(JP+1.))
102 XL=SQRT(((J(I1)+1.)*(J(I2)+1.)*(J(I3)+1.)*(J(I4)+1.))*(-1)**((J(I1)
1+J(I3))/2+L(I1)+L(I3)))/(2.*JP+1.)*
2VN02BA(J(I2),J(I1),2*JP,1,-1,0)*
3VN02BA(J(I4),J(I3),2*JP,1,-1,0)*
4(A1*(1.-(-1)**((J(I2)+J(I4))/2+L(I1)+L(I3))*ZL)-
5ALFA*((g-1.)/2*((-1)**(L(I1)+L(I2)+JP)-1.)/2+(-1)**
6((J(I2)+J(I4))/2+L(I1)+L(I3))*ZL)+(1.+3*g)/4*(1.+(-1)**
7(L(I1)+L(I2)+JP))))*VEFF*
8SLATER(NA,L(I1),NB,L(I2),NC,L(I3),ND,L(I4))
NORM1=1.

```

```

NORM2=1.
      IF(IDENT.NE.1)GOTO 104
IF(I1.EQ.I2)NORM1=1./SQRT(2.)
IF(I3.EQ.I4)NORM2=1./SQRT(2.)
104 XL=XL*NORM1*NORM2
DELTA=XL
RETURN
END
FUNCTION S(IA,IB,IC)
C HULPFUNKTIE
S=IA+1+(IB+1)*((-1)**((IA+IB)/2+IC))
RETURN
END
FUNCTION VN02BA(J1,J2,J,M1,M2,M)
COMMON/VN06FC/FCT(40)
INTEGER Z,ZMIN,ZMAX,FASE
C VN02BA DENOTES THE CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENT
C <J1,M1,J2,M2 I J1,J2,J,M>
C
CC=0.
IF(M1+M2-M)20,1,20
1 IF(IABS(M1)-IABS(J1))2,2,20
2 IF(IABS(M2)-IABS(J2))3,3,20
3 IF(IABS(M)-IABS(J))4,4,20
4 IF(J-J1-J2)5,5,20
5 IF(J-IABS(J1-J2))20,6,6
6 ZMIN=0
IF(J-J2+M1)7,8,8
7 ZMIN=-J+J2-M1
8 IF(J-J1-M2+ZMIN)9,10,10
9 ZMIN=-J+J1+M2

```

```

10 ZMAX=J1+J2-J
IF(J2+M2-ZMAX)11,12,12
11 ZMAX=J2+M2
12 IF(J1-M1-ZMAX)13,14,14
13 ZMAX=J1-M1
14 DO 15 Z=ZMIN,ZMAX,2
JA=Z/2+1
JB=(J1+J2-J-Z)/2+1
JC=(J1-M1-Z)/2+1
JD=(J2+M2-Z)/2+1
JE=(J-J2+M1+Z)/2+1
JF=(J-J1-M2+Z)/2+1
FASE=(-1)**(Z/2)
F2=FASE
15 CC=CC+F2/(FCT(JA)*FCT(JB)*FCT(JC)*FCT(JD)*FCT(JE)*
1FCT(JF))
JA=(J1+J2-J)/2+1
JB=(J1-J2+J)/2+1
JC=(-J1+J2+J)/2+1
JD=(J1+M1)/2+1
JE=(J1-M1)/2+1
JF=(J2+M2)/2+1
JG=(J2-M2)/2+1
JH=(J+M)/2+1
JI=(J-M)/2+1
JJ=(J1+J2+J+2)/2+1
F1=J+1
CC=SQRT(F1*FCT(JA)*FCT(JB)*FCT(JC)*FCT(JD)*FCT(JE)*
1FCT(JF)*FCT(JG)*FCT(JH)*FCT(JI)/FCT(JJ))*CC
20 VN02BA=CC /SQRT(10.)
RETURN

```

```

END
FUNCTION SLATER(NI,LI,NII,LII,NK,LK,NKK,LKK)
C
C FUNCTION SLATER CALCULATES SLATER-INTEGRALS WITH A DELTA-FORCE
C USING FOUR RADIAL HARMONIC OSCILLATOR WAVEFUNCTIONS WITH QUAN-
TUM
C NUMBERS (NI,LI),(NII,LII),(NK,LK),(NKK,LKK) AND N=0,1,2,3.
C
C (NI,LI),(NII,LII),(NK,LK),(NKK,LKK) : THE FOUR SETS OF QUANTUM
C NUMBERS OF THE 4 RADIAL WAVEFUNCTIONS WITH N=0,1,2,3 AND
C L=0,1,2,3,4,5,6,7
C INT : THE SLATER-INTEGRAL (DIVISION BY 4*PI INCLUDED)
C
COMMON/VN07CB/NU,AKNL(4,4,8),ANL(4,8),INT1(20),INT2(20)
REAL NU
REAL INT1,INT2
ROM=0.
L=LI+LII+LK+LKK
NI1=NI+1
NII1=NII+1
NK1=NK+1
NKK1=NKK+1
LI1=LI+1
LII1=LII+1
LK1=LK+1
LKK1=LKK+1
L1=(L+1)/2
IF(L/2.EQ.L/2.) GO TO 1
DO 2 I=1,NI1
DO 2 II=1,NII1
DO 2 K=1,NK1

```

```

DO 2 KK=1,NKK1
L2=L1+I+II+K+KK-4
2 ROM=ROM+AKNL(I,NI1,LI1)*AKNL(II,NII1,LII1)*AKNL(K,NK1,LK1)*AKNL(KK
1,NKK1,LKK1)*INT1(L2)
GO TO 3
1 DO 4 I=1,NI1
DO 4 II=1,NII1
DO 4 K=1,NK1
DO 4 KK=1,NKK1
L2=L/2+I+II+K+KK-3
4 ROM=ROM+AKNL(I,NI1,LI1)*AKNL(II,NII1,LII1)*AKNL(K,NK1,LK1)*AKNL(KK
1,NKK1,LKK1)*INT2(L2)
3 SOM=ROM
SLATER=ANL(NI1,LI1)*ANL(NII1,LII1)*ANL(NK1,LK1)*ANL(NKK1,LKK1)*SOM
1*(2*NU)**1.5/78.95683523
RETURN
END
SUBROUTINE VN07AL
C
C SUBROUTINE CALCULATES A NUMBER OF COEFFICIENTS NECESSARY FOR
THE
C CALCULATIONS OF THE SLATER-INTEGRALS
C
C FAK1(N),N=1,4 : FAK1(N)=(N-1)!
C FAK2(N),N=1,11 : FAK2(N)=(2N-1)!!
C ANL(N,L),N=1,4, L=1,8 :
C ANL(N,L)=SQRT(2**(L-N+2)*(2*NU)**(L+1/2)*(2L+2N-3)!!)/SQRT(SQRT(PI)
C *((2L-1)!!)**2*(N-1)!)
C AKNL(K,N,L),K=1,4, N=1,4, L=1,8 :
C AKNL(K,N,L)=(-2)**(K-1)*(N-1)!*(2L-1)!!/(K-1)!(N-K)!(2L+2K-3)!!
C INT1(I),I=1,20 : INT1(I)=I!/2**(I+1)

```

```

C INT2(I),I=1,20 : INT2(I)=SQRT(PI)*(2I-1)!!/2**(2I+1/2)
C NU=M*OMEGA/2*H-BAAR
REAL NU
REAL INT1,INT2
COMMON/VN07CB/NU,AKNL(4,4,8),ANL(4,8),INT1(20),INT2(20)
DIMENSION FAK1(21),FAK2(20)
READ(1,1) NU
1 FORMAT(F10.8)
FAK1(1)=1.
DO 2 IR=1,20
2 FAK1(IR+1)=FAK1(IR)*IR
FAK2(1)=1.
DO 3 IR=1,19
3 FAK2(IR+1)=FAK2(IR)*(2*IR+1)
DO 4 N=1,4
DO 4 L=1,8
LNS=L+N
F1=FAK2(LNS-1)/(FAK2(L)**2*FAK1(N))
ANL(N,L)=SQRT(2.***(L-N+2.)*F1)
DO 4 K=1,N
KNS=N-K
LKS=L+K
4 AKNL(K,N,L)=(-2)**(K-1)*FAK1(N)*FAK2(L)/(FAK1(K)*FAK1(KNS+1)*FAK2(
1LKS-1))
DO 5 I=1,20
INT1(I)=FAK1(I+1)/2**(I+1)
5 INT2(I)=1.25331413731550*FAK2(I)/4.**I
RETURN
END

```

# Annexe C

## Programme MSDI

```
PROGRAM msdi
COMMON/SHELL/E(20),N(20),L(20),J(20),NUM(20)
COMMON/PARAM/AT,B,C,IT
COMMON/VN06FC/FCT(40)
READ(1,100)IT
100 FORMAT(I2)
WRITE(2,110)IT
110 FORMAT('T=',I2)
    READ(1,120)AT,B,C
120    FORMAT(3F8.4)
    WRITE(2,130)AT,B,C
130 FORMAT(1H,'AT=', 'B=', 'C=',3F8.4)
FCT(1)=1.
DO 500 I=2,40
FCT(I)=FCT(I-1)*(I-1.)/10.
500 CONTINUE
C
C IMAX TOTAL NUMBER OF S.P .ORBITS
C
READ(1,140)IMAX
140 FORMAT(I2)
```

```

WRITE(2,150)IMAX
150 FORMAT('IMAX=',I4)
DO 501 I=1,IMAX
READ(1,160)E(I),N(I),L(I),J(I),NUM(I)
160 FORMAT(F8.4,4I4)
WRITE(2,170)E(I),N(I),L(I),J(I),NUM(I)
170 FORMAT('E(I)=' ,F8.5,3X,'N(I)=' ,I4,3X,'L(I)=' ,I4,3X,'J(I)=' ,I4,3X,'
1NUM(I)=' ,I4)
501 CONTINUE
60 READ(1,180)I1,I2,JP,ICON
180 FORMAT(4I3)
      X=SD(I1,I2,JP)
CY=VN02BA(J(I2),J(I1),2*JP,-1,1,0)
CZ=VN02BA(J(I2),J(I1),2*JP,1,1,2)
WRITE(2,200)JP,X
200 FORMAT(I2,E20.6)
IF (ICON.EQ.0) GOTO 60
STOP
END
FUNCTION SD(I1,I2,JP)
COMMON/PARAM/AT,B,C,IT
COMMON/SHELL/E(20),N(20),L(20),J(20),NUM(20)
REAL NORM1
ZL=((J(I1)+1.)*(J(I2)+1.))/(2.*(2.*JP+1.))
FZ=1.-(-1)**(L(I1)+L(I2)+JP+IT)
YL=((VN02BA(J(I2),J(I1),2*JP,-1,1,0))**2)*FZ
SL=((VN02BA(J(I2),J(I1),2*JP,1,1,2))**2)*(1.+((-1)**IT))
Y0=YL+SL
Z0=-AT*ZL*Y0
F0=(2.*IT*(IT+1.)-3.)*B+C
XL=Z0+F0

```

```

NORM1=1
C NORM2=1
IF(I1.EQ.I2)NORM1=1./2.
CIF(I3.EQ.I4)NORM2=1./SQRT(2.)
XL=XL*NORM1
SD=XL
RETURN
END
FUNCTION VN02BA(J1,J2,J,M1,M2,M)
COMMON/VN06FC/FCT(40)
INTEGER Z,ZMIN,ZMAX,FASE
C VN02BA DENOTES THE CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENT
C <J1,M1,J2,M2 I J1,J2,J,M>
CC=0.
IF(M1+M2-M)20,1,20
1 IF(IABS(M1)-IABS(J1))2,2,20
2 IF(IABS(M2)-IABS(J2))3,3,20
3 IF(IABS(M)-IABS(J))4,4,20
4 IF(J-J1-J2)5,5,20
5 IF(J-IABS(J1-J2))20,6,6
6 ZMIN=0
IF(J-J2+M1)7,8,8
7 ZMIN=-J+J2-M1
8 IF(J-J1-M2+ZMIN)9,10,10
9 ZMIN=-J+J1+M2
10 ZMAX=J1+J2-J
IF(J2+M2-ZMAX)11,12,12
11 ZMAX=J2+M2
12 IF(J1-M1-ZMAX)13,14,14
13 ZMAX=J1-M1
14 DO 15 Z=ZMIN,ZMAX,2

```

```

JA=Z/2+1
JB=(J1+J2-J-Z)/2+1
JC=(J1-M1-Z)/2+1
JD=(J2+M2-Z)/2+1
JE=(J-J2+M1+Z)/2+1
JF=(J-J1-M2+Z)/2+1
FASE=(-1)**(Z/2)
F2=FASE
15 CC=CC+F2/(FCT(JA)*FCT(JB)*FCT(JC)*FCT(JD)*FCT(JE)*
1FCT(JF))
JA=(J1+J2-J)/2+1
JB=(J1-J2+J)/2+1
JC=(-J1+J2+J)/2+1
JD=(J1+M1)/2+1
JE=(J1-M1)/2+1
JF=(J2+M2)/2+1
JG=(J2-M2)/2+1
JH=(J+M)/2+1
JI=(J-M)/2+1
JJ=(J1+J2+J+2)/2+1
F1=J+1
CC=SQRT(F1*FCT(JA)*FCT(JB)*FCT(JC)*FCT(JD)*FCT(JE)*
1FCT(JF)*FCT(JG)*FCT(JH)*FCT(JI)/FCT(JJ))*CC
20 VN02BA=CC /SQRT(10.)
RETURN
END

```