REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L 'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série:

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER

EN PHYSIQUE

SPECIALITE

Physique Théorique

THEME

Equations de Klein-Gordon et de Dirac avec deux ondes planes et orthogonales : Solutions par l'approche intégrale de chemins

Par

TALEB-HACINE Skander

SOUTENU LE : **10/06/2007**

Devant le jury :

Président	: A. Djemel	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur	: L. Chetouani	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs	: A. Lecheheb	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
	: K. Aït Moussa	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
	: T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel

Remerciements

Ce présent travail a été réalisé au laboratoire de physique mathématique et subatomique sous la direction scientifique de Mr le Pr. L. Chetouani.

Je lui exprime ma profonde gratitude et mon très grand respect, pour le sujet qu'il m'a proposé et aussi pour son immense aide dans la concrétisation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier :

Mr le Pr. A. Djemel du département de physique pour avoir accepté de présider le jury.

Mr A. Lecheheb, Maître de Conférence, d'avoir bien voulu accepter d'examiner le présent travail.

Mr K. Aït Moussa, Maître de Conférence, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Mr le Pr. T. Boudjedaa de l'université de Jijel d'avoir également bien voulu accepter de participer au jury et d'examiner ce mémoire.

Qu'ils trouvent ici, toute l'expression de mon dévouement et ma gratitude.

Enfin, je remercie les enseignants du département de physique et spécialement ceux du laboratoire de physique mathématique et subatomique pour le soutien moral qu'ils m'ont manifesté constamment tout au long de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Pour tout problème de physique quantique, il est admis maintenant selon la vitesse des particules que la mécanique quantique non relativiste ou relativiste décrit et explique correctement les phènomènes physiques.

Au départ, nous savons qu'il y avait en parallèle, la mécanique de Schrödinger et une autre utilisant les matrices qui donnaient des résultats comparables à ceux de l'expérience. C'est ainsi que le classique a été complété par le quantique malgré une certaine resistance à cette nouvelle idée probabiliste de la physique .

Les fondements de la mécanique quantique ont été par ailleurs examinés et étudiés par certains physiciens parmi lesquels on peut citer le plus connu Dirac [1]. Et c'est précisement sur une idée conceptuellement classique de cet auteur, concrétisée ensuite par R. P. Feynman, [2]qu'une autre nouvelle approche de la mécanique quantique a vu le jour : il s'agit des intégrales de chemins.

Cette nouvelle approche d'intégrales de chemins avec son cadre classique, est actuellement un moyen simple et accessible à l'esprit humain orthodoxe pour l'analyse et la compréhension des phènomènes physiques en mécanique quantique.

Du point de vue pédagogique, avec des notions simples et uniquement classiques comme l'action , les chemins, le lagangien... que cette approche permet d'aborder le concept probabiliste de la mécanique quantique usuelle qui est non évident pour des esprits non préparés.

C'est ainsi que cette approche est devenue à l'heure actuelle un outil de quantification incontournable surtout pour les théorie modernes comme par exemple la théorie des cordes.

Cependant avec tout ce succès, les intégrales de chemins se développent malgré les difficultés qu'il faut à chaque fois contourner comme par exemple l'intégration de l'entité fondamentale de la physique représentée par le spin qui est de nature discrète au moyens des chemins qui sont d'essence continue.

Dans ce travail, nous considérons le problème d'une particule relativiste soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétique planes et orthogonales et le traitons suivant l'approche path intégrale.

Ensuite le mouvement de la particule dotée du spin $1/2$ (Dirac) est étudié suivant deux formalismes celui de Fradkin-Gitman[3] et celui d'Alexandrou [4] et al.

La comparaison de nos resultats est faite avec ceux de [5].

L'organisation de ce mémoire est la suivante :

- Dans le chapitre 1, il est procèdé au traitement de la particule scalaire relativiste chargée (spin 0 ou de même sans spin), décrite en mécanique quantique par l'équation différentielle du second ordre en coordonnée de l'espace-temps quadri-dimensionnel, qui est l'équation de Klein-Gordon, soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétiques planes et orthogonales. Les conditions d'orthogonalité sont prises conformémént à ceux de [5].

Suivant la technique de Fradkin-Gitman[3] le propagateur est d'abord construit et calculé ensuite. Les fonctions d'onde et le spèctre d'énergie de notre particule scalaire, constituant le test le plus important de nos calculs, sont alors extraits. Le propagateur [6], [7] est par ailleurs déterminée semiclassiquement via la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi [8]

-Dans le chapitre 2, il a été procédé au traitement suivant la technique de Fradkin-Gitman en considérant [3]cette fois çi une particule de Dirac (particule spinorielle relativiste) chargée soumise à l'influence combinées de deux champs d'ondes électromagnétiques planes avec les mêmes conditions que ceux de [5] .

La fonction de Green du problème comparée au cas simple bosonique du chapitre précédent est plus difficile à construire et aussi à obtenir à cause des variables de Grassmann relatives au spin qui interviennent par l'intermédiaire des matrices γ de l'équation de Dirac

-Dans le chapitre 3, le même problème du chapitre 2 est reconsidéré par le formalisme des intégrales de chemins, mais suivant la technique d'Alexandrou et al.[4] dans l'approche dite globale

-Enfin une discussion sur les méthodes et leurs domaines d'application et ainsi les difficultés rencontrées à travers ce mémoire sont données en conclusion.

Chapitre 1

Particule chargée scalaire (spin 0) sous l'action combinée de deux champs d'ondes planes et orthogonales :

1.1 Introduction

Notre but dans ce chapitre, est de calculer la fonction de Green causale pour une particule scalaire (spin 0) relativiste chargée soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes planes, que nous prenons pour faciliter les calculs, orthogonales selon la littérature[5], et tout ceci suivant l'approche du formalisme des intégrales de chemins et enfin, nous extrairons les fonctions d'onde ainsi que le spèctre d'énergie correspondant. Comme confirmation des résultats obtenus, nous ferons la comparaison et la vérification avec ceux de $[6],[7],[9]-[11]$ mais aussi avec les reférences qui existent pour un seul champ et ceci en supprimant soit l'un des deux champs ou soit carrément les deux champs (le cas libre). Avec ces résultats exacts, nous pouvons faire comme complément la comparaison avec la méthode de calcul semi classique usant de l'équation d'Hamilton-Jacobi de la section suivante (section 1.2) et ainsi valider les résultats de cette dernière.

1.2 Méthode Exact(Technique Fradkin-Gitman) :

1.2.1 Construction de la fonction de Green causale

La fonction de Green pour une particule scalaire chargée relativiste soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes planes et qui correspond à l'équation de Klein-Gordon considérée, dans l'espace de configuration est :

$$\left(\mathcal{P}^2{}_b - m^2\right) B^c(x_b, x_a) = -\delta^4\left(x_b - x_a\right) \tag{1.1}$$

où

$\mathcal{P}^2{}_b = \mathcal{P}_b^\mu \mathcal{P}_{\mu_b}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, avec $\eta_{\mu\upsilon} = diag\left(1, -1, -1, -1\right)$ la métrique de l'espace plat de Minkowski et

$$\mathcal{P}_b^\mu\left(\partial_{x_b}, x_b\right) = i\partial_{x_b}^\mu - eA^\mu\left(x_b\right) - eB^\mu\left(x_b\right) \tag{1.2}$$

, $\mu = 0, 1, 2, 3$

avec $i\ \partial_x$ est la représentation espace de configuration de l'opérateur moment conjuguée de la particule, $|e|\rangle 0$ est la charge de la particule, $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ sont les quadrivecteurs potentiel.

Selon Schwinger, $B^c(x_b, x_a)$ se présente comme l'élément de matrice d'un opérateur $\hat{B}^c$:

$B^c(x_b, x_a) = \langle x_b|\ \ \hat{B}^c\ \ |x_b\rangle$

tel que : les $|x\rangle$ sont considérés comme les états propres de l'opérateur auto-adjoint $\hat{X}^\mu$ et forment un système orthonormé complet

$\hat{X}^\mu\left|x\right\rangle = x^\mu\left|x\right\rangle$, $x_b\left|x_a\right\rangle = \delta^4\left(x_b - x_a\right)$, $\left[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = 0$, $\displaystyle\int \left|x\right\rangle\left\langle x\right| dx = 1$, l'opérateur du moment conjugué correspondant $\hat{P}_\mu$ tel que : $\hat{P}^\mu\left|p\right\rangle = p^\mu\left|p\right\rangle$, $\left[\hat{P}_\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = -i\delta_\mu^\nu$,$\langle p_b|\ p_a\rangle = \delta^4\left(p_b - p_a\right)$, $\langle x_b|\ x_a\rangle = \delta^4\left(x_b - x_a\right)$, $\langle x_b|\ \ \hat{P}^\mu\ \ |x_a\rangle = -i\partial_{\mu_b}\delta^4\left(x_b - x_a\right)$,

On représente alors [3], [12], l'opérateur $\hat{\Pi}^\mu$ par la relation : $\mathcal{P}_b^\mu\delta^4\left(x_b - x_a\right) = \langle x|\ \ \hat{\Pi}^\mu\ \ |y\rangle$ alors il vérifie :

$\left[\hat{\Pi}^\mu, \hat{\Pi}^\nu\right]_- = -ie\hat{F}^{\mu\nu}\left(\hat{X}\right)$, alors : $\hat{\Pi}^\mu = -\hat{P}^\mu - eA_\mu\left(\hat{X}\right)$ et $\left[\hat{\Pi}_\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = +i\delta_\mu^\nu$

L'équation (1.1) donne alors l'équation opératorielle suivante :

$$\left(\hat{\Pi}^2 - m^2\right)\hat{B}^c = -1 \tag{1.3}$$

où $\hat{\Pi}^{\mu} = -\hat{P}^{\mu} - e\hat{A}^{\mu}\left(\hat{X}\right) - e\hat{B}^{\mu}\left(\hat{X}\right)$ tel que $\hat{P}^{\mu}$ est l'opérateur quadridimensionnel du moment conjugué.

Alors :

$$\hat{B}^{c} = \frac{-1}{\left(\hat{\Pi}^{2} - m^{2} + i\ \varepsilon\right)} \tag{1.4}$$

En profitant de la technique du temps propre de Schwinger pour un opérateur bosonique (quelques fois Fock-Schwinger), notre fonction de Green s'écrira au moyen d'une intégrale sur le temps propre bosonique λ.

$$\hat{B}^{c} = \frac{i}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-i\ \hat{H}\left(\hat{X},\hat{P}\right)\lambda} d\lambda \tag{1.5}$$

avec

$$\hat{H}\left(\hat{X},\hat{P}\right) = \frac{1}{2}\left(m^{2} - \hat{\Pi}^{2} - i\ \varepsilon\right) \tag{1.6}$$

On peut alors écrire (1.5)dans l'espace de configuration :

$$B^{c}\left(x_{b},x_{a}\right) = \frac{i}{2}\int_{0}^{\infty} \langle x_{b}\left| e^{-i\ \hat{H}\left(\hat{X},\hat{P}\right)\lambda} \right| x_{a}\rangle d\lambda \tag{1.7}$$

En vue d'écrire(1.7) sous forme intégrale de chemins dans l'espace des phases, prenons en compte la procédure de Weyl pour l'ordre des opérateurs et pour passer des opérateurs aux valeurs propres (c'est la discrétisation), subdivisons comme d'habitude l'intervalle $[x_a, x_b]$ en N parties qu'on supposera égales pour simplifier, puis insérant $(N-1)$ fois la relation de complétude (fermeture) :

$$\int |x_{j}\rangle\langle x_{j}|\, d^{4}x_{j} = 1, \tag{1.8}$$

puis N fois la relation de fermeture

$$\int |p_{j}\rangle\langle p_{j}|\, d^{4}p_{j} = 1, \tag{1.9}$$

La fonction de Green aura la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned} B^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \lim \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_{N-1}\langle x_b \left| e^{-i\ \frac{\hat{H}(\hat{X},\hat{P})\lambda}{N}} \right| x_{N-1}\rangle \\ &\times ...\langle x_i \left| e^{-i\ \frac{\hat{H}(\vartheta,\hat{X},\hat{P})\lambda}{N}} \right| x_{i-1}\rangle ...\langle x_1 \left| e^{-i\ \frac{\hat{H}(\vartheta,\hat{X},\hat{P})\lambda}{N}} \right| x_0\rangle \\ &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \lim \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_{N-1}\frac{d\ p_1}{(2\pi)^4}...\frac{d\ p_N}{(2\pi)^4} \\ &\times \exp\left[i\ \sum\left[p_k\frac{\Delta x_k}{\Delta s} - \mathcal{H}(\overline{x}_k,p_k)\right]\Delta s\right] \end{aligned} \tag{1.10}$$

Où nous avons utilisé la notation suivante (selon le point de vue de Weyl) :

$\Delta s = \frac{\lambda}{N}$, $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$(c'est le mid-point), $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

A la limite ($N \to \infty$), on obtient alors sous forme continue et compacte la fonction de Green suivante :

$$B^c(x_b,x_a) = \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int DxDp\exp\left\{i\ \int_0^\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\pi^2-m^2\right)+p\ \dot{x}\right]d\ s\right\} \tag{1.11}$$

Où

L'intégration est au sens des intégrales de chemins, c'est à dire sur les trajectoires $x^\mu(s)$, $p_\mu(s)$, paramétrisées pas le paramètre $s \in [0,\lambda]$ et obéissant aux conditions aux bords :

$x(0) = x_a$, $x(\lambda) = x_b$.

Dans le but d'obtenir la forme Lagrangienne de la fonction de green, qui permet théoriquement de calculer n'importe quelle fonction de Green pour un problème donné, nous avons alors à éliminer les p pour cela il faudrait intégrer fonctionnellement sur les quadrimoment conjugués p, sachant que : $\pi = -p - e\ A(x) - e\ B(x)$, effectuons le changement suivant :

$$p_\mu \to\ -p_\mu - \dot{x}_\mu - e\ A_\mu(x) - e\ B_\mu(x) \tag{1.12}$$

Nous obtenons alors notre forme Lagrangienne

$$\begin{aligned} B^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda\int Dx\ C(\lambda) \\ &\times\exp\left\{i\int_0^\lambda\left[-\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{1}{2}m^2 - e\ \dot{x}\ A(x) - e\ \dot{x}\ B(x)\right]ds\right\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

$C(\lambda) = \int Dp\exp\left\{i\int\frac{p^2}{2}ds\right\}$

De là, on peut directement tirer notre Lagrangien qui est

$$L(x,\dot{x}) = -\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}m^2 - e\ \dot{x}\ A\left(x\right) - e\ \dot{x}\ B\left(x\right) \tag{1.14}$$

et notre action est la suivante

$$\mathbb{A} = \int_0^\lambda \left[-\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}m^2 - e\ \dot{x}\ A\left(x\right) - e\ \dot{x}\ B\left(x\right)\right] ds \tag{1.15}$$

où d'après les équations d'Euleur-Lagrange, les équations classiques quon peut tirées sont :

$$\frac{\delta\mathbb{A}}{\delta x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\dot{x} + eA' + eB' = 0$$

1.2.2 Evaluation de la fonction de Green pour la particule scalaire

En ce qui nous concerne, pour l'évaluation de la fonction de Green, nous prenons comme application, le problème de la particule scalaire relativiste chargée sous l'action combinée de deux champs d'ondes planes orthogonales suivant[5].

Remplaçons alors, les quadri-potentiels $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ au même point d'espace temps (donc dépendant de 4 variables indépendantes)par les quadri-potentiels $A\left(k\ x\right)$ et $B\left(K\ x\right)$ représentant des ondes planes dans l'expression de la fonction de Green sous sa forme Lagrangienne (1.13), tels que : $k\ x = k_\mu x^\mu$ et $K\ x = K_\mu x^\mu$ et qui sont en fait, des scalaires.

Nous allons procéder à une réduction de l'espace temps de quatre dimensions à un espace à une dimension pour chacune des ondes planes considérées.

Nous obtenons alors pour la fonction de Green :

$$\begin{aligned} B^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int DxDp \\ &\times \exp\left\{i\int_0^\lambda \left[-\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) - e\ \dot{x}\ A\left(k\ x\right) - e\dot{x}\ B\left(K\ x\right)\right] ds\right\} \end{aligned} \tag{1.16}$$

A cause de la présence de la dépendance en $k\ x$ et $K\ x$, les calculs paraissent difficiles à faire.

Malgré tout, l'onde plane a des caractéristiques qui vont assurer la solvabilité du problème.

Notre idée principale consiste à utiliser cette particularité par l'introduction de deux nouvelles variables, la première Φ indépendante de $k\ x$ via l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a)\delta(\Phi_b - \Phi_a - k(x_b - x_a)) &= \\ \int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a) \int D\Phi\ Dp_\Phi \exp\left\{i \int_0^\lambda d\ s\ p_\Phi \left(\dot{\Phi} - k\dot{x}\right)\right\} &= 1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Et la deuxième Ω indépendante de $K\ x$ via l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta(\Omega_a - Kx_a)\delta(\Omega_b - \Omega_a - K(x_b - x_a)) &= \\ \int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Omega\ Dp_\Omega \exp\left\{i \int_0^\lambda d\ s\ p_\Omega \left(\dot{\Omega} - K\dot{x}\right)\right\} &= 1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

En fait, ces deux identités nous permettent de séparer la partie représentant l'interaction de la partie libre et ainsi extraire le mouvement libre présent dans l'évolution, en insérant les deux identités précédentes dans l'expression du propagateur (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} B^c(x_b, x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int Dx\ Dp \int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a) \\ &\times \int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Phi\ Dp_\Phi \int D\Omega\ Dp_\Omega \\ &\times \exp\left\{i \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) - \frac{\dot{x}^2}{2} - \ e\ \dot{x}\ \left(A\left(k\ x\right) + \quad B\left(K\ x\right) + \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.\frac{k}{e}\ p_\Phi + \frac{K}{e} p_\Omega\right) + p_\Phi \dot{\Phi} + p_\Omega \dot{\Omega}\right] ds\right\} \end{aligned} \tag{1.19}$$

En vue d'éliminer la variable quadratique $\dot{x}$, effectuons le changement suivant sur p :

$$p\ \rightarrow\ p + \dot{x} + e\ A\left(\Phi\right) + e\ B\left(\Omega\right) + k\ p_\Phi + K\ p_\Omega \tag{1.20}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
B^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int Dx\ Dp \int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a) \\
&\times \int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Phi\ Dp_\Phi \int D\Omega\ Dp_\Omega \\
&\times \exp\left\{ i \int_0^\lambda \left[p\ \dot{x}\ + \frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) + e\ p\ A\left(\Phi\right) + e^2\ A^2\left(\Phi\right) + \right.\right. \\
&\left.\left. e\ p\ B\left(\Phi\right) + e^2\ B^2\left(\Phi\right)\ + p_\Phi\left(\dot{\Phi} + k\ p\right) + p_\Omega\left(\dot{\Omega} + K\ p\right)\right]\right\} ds
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Où

Nous avons adopté la jauge de Lorentz, c'est à dire que : $k\ A = K\ B = 0$ et nous avons utilisé le caractère elatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire : $A\ B = k\ K = K\ A = k\ B = 0$.

Aussi pour voir clairement le découplage du mouvement libre de celui dépendant de l'interaction, intégrons fonctionnellement par rapport à x. Ce qui nous donne des fonctionnelles de Dirac $\delta\left(\dot{p}\right)$. Ce qui nous contraint à considérer p comme constante soit p.

Alors, nous obtenons la fonction de Green suivante :

$$\begin{aligned}
B^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int \frac{dp}{\left(2\pi\right)^4}\ \int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a) \int D\Phi \int D\Omega \\
&\times \int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta(\Omega_a - Kx_a)\ \delta\left(\dot{\Phi} + k\ p\right)\ \delta\left(\dot{\Omega} + K\ p\right) \\
&\times \exp\left\{ i\ p\ \ (x_b - x_a)\ + \frac{i}{2}\ \left(p^2 - m^2\right) + i\int_0^1 \left[e\ p\ A\left(\Phi\right) + e^2\ A^2\left(\Phi\right) + \right.\right. \\
&\left.\left. e\ p\ B\left(\Phi\right) + e^2\ B^2\left(\Phi\right)\right]\ d\tau\right\}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Et ceci après que nous avons effectué une intégration sur p_Φ puis p_Ω.

On voit bien clairement qu'une intégration par rapport à la variable Φ ou de même par rapport à la variable Ω, montre que la contribution des amplitudes sur les chemins Φ ou Ω est essentiellement réduite à l'intégration sur le chemin :

$$\dot{\Phi} = -p\ k \tag{1.23}$$

Mais aussi sur le chemin :

$$\dot{\Omega} = -p\ K \tag{1.24}$$

Qui sont les équations du mouvement classique qui sont tirées facilement des équations classiques d'Euleur-Lagrange.

Alors les chemins sont donnés par :

$$\Phi(\tau) = \Phi_a - k\ p\ \tau \tag{1.25}$$

Et

$$\Omega(\tau) = \Omega_a - K\ p\ \tau \tag{1.26}$$

Sachant que les conditions initiales pour les deux chemins sont :

$\Phi(0) = \Phi_a$

Et

$\Omega(0) = \Omega_a$

Nous voyons bien ici que le choix des deux identités n'a pas été aléatoire ou naïf mais c'était un choix judicieux.

Nous obtenons encore :

$$\begin{aligned} B^c(x_b, x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_b \int d\Omega_a \\ &\quad \times \delta(\Omega_a - Kx_a)\ \delta\left(\Phi_b - k\ x_a + k\ p\right)\ \delta\left(\Omega_b - Kx_a + K\ p\right) \\ &\quad \times \exp\left\{ i\ p\ \ (x_b - x_a)\ \ + \frac{i}{2}\ \left(p^2 - m^2\right) - \right. \\ &\quad \frac{i}{(p\ k)} \int_{k\ x_a}^{\Phi_b} \left[e\ p\ A\left(\Phi\right) + \frac{e^2}{2} A^2\left(\Phi\right) \right] d\Phi - \\ &\quad \left. \frac{i}{(p\ K)} \int_{K\ x_a}^{\Omega_b} \left[e\ p\ B\left(\Omega\right) + \frac{e^2}{2} B^2\left(\Omega\right) \right] d\Omega \right\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pour symétriser la forme du propagateur, remplaçons les fonctions delta $\delta\left(\Phi_b - k\ x_a + k\ p\right)$ et $\delta\left(\Omega_b - Kx_a + K\ p\right)$ par leur représentations intégrales, puis effectuons le changement suivant

$p \to p - k\ p_{\Phi_b} - K\ p_{\Omega_b}$

Après la simplification des termes, et intégration par rapport à Φ_b et Ω_b, On obtient

$$\begin{aligned}
B^c(x_b, x_a) &= \frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&\times \exp\left\{ ip\ (x_b - x_a)\ + \tfrac{i}{2}\ (p^2 - m^2)\ \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{-i}{(p\ k)} \int_{k\ x_a}^{\Phi_b} \left[e\ p\ A(\Phi) + \frac{e^2}{2} A^2(\Phi) \right] d\Phi - \right. \\
&\left. \frac{i}{(p\ K)} \int_{K\ x_a}^{\Omega_b} \left[e\ p\ B(\Omega) + \frac{e^2}{2} B^2(\Omega) \right] d\Omega \right\}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

En changeant p en $-p$ et intégrons sur le temps propre λ, on obtient la forme définitive du propagateur

$$\begin{aligned}
B^c(x_b, x_a) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left\{ -i\ p\ (x_b - x_a)\ \right\}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&\times \exp\left\{ \frac{-i}{(p\ k)} \int_{k\ x_a}^{k\ x_b} \left[e\ (p\ A(\Phi)) - \frac{e^2}{2} A^2(\Phi) \right] d\Phi - \right. \\
&\left. \frac{i}{(p\ K)} \int_{K\ x_a}^{K\ x_b} \left[e\ (p\ B(\Omega)) - \frac{e^2}{2} B^2(\Omega) \right] d\Omega \right\}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Remarque :

Le $i\varepsilon$ c'est seulement pour éviter et ainsi contourner les pôles de la fonction dans le plan complexe sous l'intégrale (problème régularisation).

1.2.3 Extraction des fonctions d'onde et du spèctre d'énergie :

Par intégration par rapport à p^0 (qui est l'énergie de notre particule), on obtient :

$$\begin{aligned}
B^c(x_b, x_a) &= \frac{-i}{2} \sum_{\varepsilon=\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega}\ \exp\left\{ -i\ \varepsilon\omega\,(x_b^0 - x_a^0) + i\ p^i\,(x_{i_b} - x_{i_a})\ \right\} \\
&\times \theta\left[\varepsilon\left(x_b^0 - x_a^0\right)\right] \exp\left\{ \frac{-i}{\varepsilon\omega k^0 - p^i k_i} \int_{k\ x_a}^{k\ x_b} \left[e\ \left(\varepsilon\omega A^0 - p^i A_i\right) - \frac{e^2}{2} A^2 \right] d\Phi - \right. \\
&\left. \frac{i}{\varepsilon\omega K^0 - p^i K_i} \int_{K\ x_a}^{K\ x_b} \left[e\ \left(\varepsilon\omega B^0 - p^i B_i\right) - \frac{e^2}{2} B^2 \right] d\Omega \right\} \\
&= -i \sum_{\varepsilon=\pm} \int d^3p\ \varphi_p^{\varepsilon}(x_b)\, \varphi_p^{*\varepsilon}(x_a)\, \theta\left[\varepsilon\left(x_b^0 - x_a^0\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.30}$$

A travers l'identification, on obtient des fonctions d'ondes normalisées,

$$\begin{aligned}\varphi_p^{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\mp i\ px - \frac{i}{p\ k}\int^{k\ x}\left[e\ \ (pA)\mp\frac{e^2A^2}{2}\right]d\Phi - \right.\\ &\left.\frac{i}{p\ K}\int^{K\ x}\left[e\ \ (pB)\mp\frac{e^2B^2}{2}\right]d\Omega\right\} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Où $\omega = [\mathbf{p}^2 + m^2]^{\frac{1}{2}}$ est l'énergie de la particule de notre problème.

1.3 Méthode de calcul semi-classique :

Le but dans cette section est de résoudre l'équation de Klein-Gordon pour une particule scalaire chargée soumise à l'action de deux champs d'ondes planes, mais par une méthode de calcul semi classique (équation de Hamilton-Jacobi). Donc nous résolvons cette équation pour obtenir la fonction génératrice responsable de la transformation canonique et donnant un Hamiltonien nul.

Le propagateur s'exprime au moyen de la fonction génératrice et peut être ainsi calculé

La fonction de Green du système est ainsi comparée avec la fonction de Green (1.29) du calcul exact de la méthode directe (méthode exacte).

Soit alors l'équation de Klein-Gordon en représentation coordonnées vérifiant la fonction d'onde de notre particule :

$$(\mathcal{P}_b^2 - m^2)B^c(x_b, x_a) = -\delta^4(x_b - x_a) \tag{1.32}$$

Où

$$\mathcal{P}_b^2 = \mathcal{P}_b^{\mu}\mathcal{P}_{b_\mu} = (i\partial_b - e\ A_b(\Phi) - e\ B_b(\Omega))^{\mu}(i\partial_b - e\ A_b(\Phi) - e\ B_b(\Omega))_{\mu}$$

$\mathcal{P}_b$ est le moment conjugué de la particule au point final de l'espace temps x_b.

Pour pouvoir faire un calcul semiclassique, on doit utiliser la formulation hamiltonienne de la fonction de Green.

L'équation que vérifie la fonction de Green B^c est de type hyperbolique, introduisons un pseudo temps ou temps propre s (astuce de Fock) afin de passer à une équation de type Schrödinger (parabolique) .Faisons donc jouer à $-m^2/2$ le rôle d'une énergie et paramétrisons les chemins par ce 5ème paramètre s

Ainsi la solution de l'équation de Klein-Gordon nécessite le calcul de l'intégrale suivante :

$$B^c(x_b, x_a) = \frac{1}{2i} \int_0^\infty d\lambda \exp\left[-\frac{im^2\lambda}{2}\right] K(x_b, x_a; \lambda) \tag{1.33}$$

Où le propagateur (qui est bien sûr écrit en fonction du Lagrangien, on doit donc le réécrire en fonction du Hamiltonien du système) :

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int \mathfrak{D}x(s) \exp\left[i \int_0^\lambda \mathfrak{L}_0 \left[x(s), \dot{x}(s)\right] ds\right] \tag{1.34}$$

Avec

$$\mathfrak{L}_0 \left[x_0(s), \dot{x}(s)\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - eA\left(\frac{dx}{ds}\right) - eB\left(\frac{dx}{ds}\right) \tag{1.35}$$

Le lagrangien relatif à la particule dans le champ des deux ondes planes, en mouvement dans un espace-temps (1+3) muni de la métrique $\eta_{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$, et dont la position est $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Linéarisons le terme quadratique $(dx/ds)^2$ en passant à l'espace des phases. Le propagateur à calculer est alors : (on a changé p en $-p$) :

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int \mathfrak{D}x\mathfrak{D}p \exp\left[-i \int_0^\lambda (p\dot{x} + H)\, ds\right] \tag{1.36}$$

Où

$$H = -\frac{1}{2}(p - eA - eB)^2 \tag{1.37}$$

est l'Hamiltonien qui décrit la dynamique du système, écrit dans l'espace des phases.

Il est très remarquable que le propagateur (1.28) puisse être obtenu à travers une méthode semi-classique, via une transformation canonique.

Pour cela, choisissons alors une transformation canonique de fonction génératrice du 2ème type.

$$(x, p) \overset{F_2}{\to} (Q, P)$$

tel que le mouvement soit gouverné par l'Hamiltonien nul $\mathfrak{H}$.La fonction génératrice de cette transformation est la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\mathfrak{H} = H\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x}, x, s\right) + \frac{\partial F_2}{\partial s} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + eA + eB\right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial s} = 0 \tag{1.38}$$

y est donnée par [8]

$$\begin{aligned} F_2(x,P,s) &= -Px - \frac{1}{Pk}\int^{kx}\left[e\left(PA\right) - \frac{e^2A^2}{2}\right]d\Phi + \\ & -\frac{1}{PK}\int^{Kx}\left[e\left(PB\right) - \frac{e^2B^2}{2}\right]d\Omega + \frac{1}{2}P^2 s \end{aligned} \tag{1.39}$$

Le lien entre les anciennes variables (x,p) et les nouvelles variables (Q,P), est donné par l'équation

$$p_\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial x^\mu} = P_\mu + \frac{k_\mu}{(Pk)}\left[e\left(PA\right) - \frac{e^2A^2}{2}\right] + \frac{K_\mu}{(PK)}\left[e\left(PB\right) - \frac{e^2B^2}{2}\right] \tag{1.40}$$

Et

$$\begin{aligned} Q_\mu &= -\frac{\partial F_2}{\partial P^\mu} = x_\mu - P_\mu s + \frac{1}{Pk}\int^{kx} eA_\mu d\Phi - \frac{1}{PK}\int^{Kx} eB_\mu d\Omega + \\ & -\frac{1}{(Pk)^2}\int^{kx}\left[e\left(PA\right) - \frac{e^2A^2}{2}\right]d\Phi - \frac{1}{(PK)^2}\int^{Kx}\left[e\left(PB\right) - \frac{e^2B^2}{2}\right]d\Omega \end{aligned} \tag{1.41}$$

Rappelons nous que les p_j sont constants dans chaque intervalle $[s_{j-1}, s_j]$, les p_j et x_j ne sont alors pas réellement des variables canoniques, les $p(s)$ sont discontinues alors que les $x(s)$ sont continus. Il n'est pas clair de trouver dans le cas général, le lien entre les variables (x_j, p_j) et les variables (Q_j, P_j).

On peut utiliser la relation , en remplaçant le ∂ par le Δ et en adoptant la prescription du post point,

$$\begin{cases} (p_j)_\mu = -\left(\frac{\Delta F_2}{\Delta x_j^\mu}\right) = -\frac{F_2\left(x_j^\nu, x_j^\mu, P_j, s_j\right) - F_2\left(x_j^\nu, x_{j-1}^\mu, P_j, s_j\right)}{x_j^\mu - x_{j-1}^\mu} \\ (Q_j)_\mu = -\left(\frac{\Delta F_2}{\Delta P_j^\mu}\right) = -\frac{F_2\left(x_j, P_j^\nu, P_{j+1}^\mu, s_j\right) - F_2\left(x_j, P_j^\mu, P_j, s_j\right)}{P_{j+1}^\mu - P_j^\mu} \end{cases} \tag{1.42}$$

Pour chaque $\mu \neq \nu$, $\nu = 0{,}1{,}2{,}3$.

Ces équations nous donnent après développement

$$
\begin{aligned}
(p_j)_\mu &= (P_j)_\mu + \frac{k_\mu}{(P_j k)}\left[e(P_j A_j) - \frac{e^2 A_j^2}{2}\right] + \frac{K_\mu}{(P_j K)}\left[e(P_j B_j) - \frac{e^2 B_j^2}{2}\right] + \\
&\quad + \text{des termes d'ordre supérieur en } \Delta x_j^\mu,
\end{aligned} \tag{1.43}
$$

$$
\begin{aligned}
(Q_j)_\mu &= (x_j)_\mu - (P_j)_\mu s_j + \frac{1}{P_j k}\int^{kx_j} eA_\mu d\Phi + \frac{1}{P_j K}\int^{Kx_j} eB_\mu d\Omega + \\
&\quad - \frac{k_\mu}{(P_j k)^2}\left[e(P_j A_j) - \frac{e^2 A_j^2}{2}\right] - \frac{K_\mu}{(P_j K)^2}\left[e(P_j B_j) - \frac{e^2 B_j^2}{2}\right] \\
&\quad + \text{des termes d'ordre supérieur en } \Delta P_j^\mu.
\end{aligned} \tag{1.44}
$$

De ceci, on voit clairement

$\frac{\partial(x_j,p_j)}{\partial(Q_j,P_j)} = 1 +$ des termes d'ordre supérieur en $(\Delta x_j, \Delta P_j)$ et donc en $(\Delta Q_j, \Delta P_j)$. Ces termes d'ordre supérieur en $(\Delta Q_j, \Delta P_j)$ ne sont pas négligeables dans le cas quantique général.

L'approximation semi-classique consiste alors à négliger ces termes d'ordre supérieur et donc prendre le Jacobien

$\frac{\partial(x_j,p_j)}{\partial(Q_j,P_j)} \approx 1.$

Dans ce calcul semi-classique, seule la contribution des chemins classiques qui est prise en compte pour le calcul de l'intégrale (1.36).

Comme

$$
-p_j \Delta x_j - H(x_j, p_j)\Delta s_j) = -P_j \Delta Q_j + \Delta F_1, \tag{1.45}
$$

Avec $F_1 = F_2 + PQ$, pour n'importe quel intervalle arbitraire $[s_{j-1}, s_j]$, le propagateur (1.36) devient alors

$$
K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) = \lim_{N\to\infty}\int \frac{dp_N}{(2\pi)^4}\prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \frac{dP_j}{(2\pi)^4} \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{N}(-P_j\Delta Q_j + \Delta F_1)\right\} \tag{1.46}
$$

Une intégration par rapport aux Q_j fait apparaitre

$$
\prod_{j=1}^{N-1}(2\pi)^4 \delta(P_j - P_{j+1}).
$$

On peut alors en déduire que P est constante $(P_1 = P_2 = \cdots = P_N = P)$

Alors le propagateur obtenu par le calcul semi-classique, via une transformation canonique, est maintenant donné par

$$K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\{i[F_2(b) - F_2(a)]\} \tag{1.47}$$

Mais il est cependant préférable de remarquer que l'intégration en premier lieu par rapport à P_j fait apparaitre le terme

$$\prod_{j=1}^{N} (2\pi)^4 \delta(Q_j - Q_{j-1})$$

Q est alors constante.

Le propagateur, obtenu par la méthode d'Hamilton-Jacobi devient :

$$\begin{aligned} K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{-iP(x_b - x_a) + \frac{i}{2}P^2 - \frac{i}{Pk}\int_{kx_a}^{kx_b}\left[e(PA) - \frac{e^2A^2}{2}\right]d\Phi\right. \\ &\left. -\frac{i}{PK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}\left[e(PB) - \frac{e^2B^2}{2}\right]d\Omega\right\} \end{aligned} \tag{1.48}$$

Rappelons nous que $pA = PA$, $pB = PB$, $pk = Pk$, $pK = PK$ [cf. $eq.$ (1.40), (1.41)], et insérons la transformation inverse :

$$P = p - \frac{k}{pk}\left[e(pA_b) - \frac{e^2A_b^2}{2}\right] - \frac{K}{pK}\left[e(PB_b) - \frac{e^2B_b^2}{2}\right], \tag{1.49}$$

Dans l'équation (1.48),

$$\begin{aligned} K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{-ip(x_b - x_a) + \frac{i}{2}p^2\lambda - \frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}\left[e(pA) - \frac{e^2A^2}{2}\right]d\Phi - \right. \\ &\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}\left[e(pB) - \frac{e^2B^2}{2}\right]d\Omega - i\left[e(pA_b) - \frac{e^2A_b^2}{2}\right]\left[\lambda - \frac{k(x_b - x_a)}{pk}\right] - \\ &\left. i\left[e(pB_b) - \frac{e^2B_b^2}{2}\right]\left[\lambda - \frac{K(x_b - x_a)}{pK}\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Montrons maintenant que les conditions $pk\lambda = k(x_b - x_a)$ et $pK\lambda = K(x_b - x_a)$, sont implicitement incluses dans l'équation (1.48) A cette fin, posons $\omega = pk\lambda$ et aussi $\varphi = pK\lambda$, et insérons les deux contraintes

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\delta(\omega - pk\lambda) = \int d\omega \frac{dp_\omega}{2\pi} \exp\{ip_\omega(\omega - pk\lambda)\} = 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi\delta(\varphi - pK\lambda) = \int d\varphi \frac{dp_\varphi}{2\pi} \exp\{ip_\varphi(\varphi - pK\lambda)\} = 1 \end{cases} \tag{1.51}$$

Dans l'équation (1.50), nous obtenons

$$\begin{aligned} K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d\omega \frac{dp_\omega}{2\pi} d\varphi \frac{dp_\varphi}{2\pi} \times \exp\left\{ -ip(x_b - x_a) + \frac{i}{2}p^2\lambda - \right. \\ & \frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b} \left[e(pA) - \frac{e^2A^2}{2} \right] d\Phi - \frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b} \left[e(pB) - \frac{e^2B^2}{2} \right] d\Omega - \\ & i\left[e(pA_b) - \frac{e^2A_b^2}{2} \right]\left[1 - \frac{k(x_b - x_a)}{\omega} \right] - i\left[e(pB_b) - \frac{e^2B_b^2}{2} \right] \\ & \left. \times \left[1 - \frac{K(x_b - x_a)}{\varphi} \right] + ip_\omega[\omega - pk\lambda] + ip_\varphi[\varphi - pK\lambda] \right\} \end{aligned} \tag{1.52}$$

En changeant $p - kp_\omega - Kp_\varphi$ en p et par intégration par rapport à p_ω et ω puis par rapport à p_φ et φ, on trouve

$$\begin{aligned} K^{s.cl.}(x_b, x_a; \lambda) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ -ip(x_b - x_a) + \frac{i}{2}p^2\lambda - \frac{i\lambda}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b} \left[e(pA) - \frac{e^2A^2}{2} \right] d\Phi - \right. \\ & \left. \frac{i\lambda}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b} \left[e(pB) - \frac{e^2B^2}{2} \right] d\Omega \right\} \end{aligned} \tag{1.53}$$

Ce résultat est le même que celui obtenu à l'aide d'une intégration discrète (1.28).

Finalement la fonction de Green pour des particules de spin zéro est obtenue, après remplacement dans (1.33) et intégration par rapport au temps propre, on obtient

$$\begin{aligned} B^c(x_b, x_a) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left\{ -i\ p\ (x_b - x_a) \right\}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ & \times \exp\left\{ \frac{-i}{(p\ k)} \int_{k\ x_a}^{k\ x_b} \left[e\ (p\ A(\Phi)) - \frac{e^2}{2}A^2(\Phi) \right] d\Phi - \right. \\ & \left. \frac{i}{(p\ K)} \int_{K\ x_a}^{K\ x_b} \left[e\ (p\ B(\Omega)) - \frac{e^2}{2}B^2(\Omega) \right] d\Omega \right\} \end{aligned} \tag{1.54}$$

qui est la même fonction de Green (1.29)donnée par la méthode éxacte d'où les même fonctions d'ondes ainsi que le même spectre d'énergie (1.31).

1.4 Conclusion

Nous avons réussi à calculer la fonction de Green pour des particules de Klein Gordon en interaction avec le champ relatif à deux ondes planes et orthogonales. La fonction de Green est obtenue par deux méthodes : directe et semi-classique en utilisant les transformations canoniques.

Les fonctions d'ondes ont été ainsi déduites et confirmées.

Chapitre 2

Fonction de Green pour une particule de Dirac chargée dans un champ composé de deux champs d'ondes planes et orthogonales (Technique de Fradkin-Gitman) :

2.1 Introduction

Notre but dans ce chapitre est d'obtenir la fonction de Green relative à une particule de Dirac chargée qui subit l'interaction de deux champs d'ondes planes et orthogonales selon [5] et ainsi extraire de cette fonction de Green toute l'information quantique nécessaire c'est à dire les fonctions d'ondes ainsi que le spectre d'énergie.

2.2 Fonction de Green :

La fonction de Green causale pour une particule de Dirac chargée dans un champ externe de deux ondes planes électromagnétiques orthogonales $S\ \ (x_b, x_a)$ vérifie l'équation de Dirac inhomogène suivante :

$$(\not{P}_b - m)\, S\ (x_b, x_a) = -\delta^4\,(x_b, x_a) \tag{2.1}$$

Selon la méthode de Schwinger la fonction de Green $S\ (x_b, x_a)$ est traitée comme l'élément d'un certain opérateur $\hat{S}$: tel $S\ (x_b, x_a) = \langle x_b|\ \hat{S}\ |x_a\rangle$ où les $|x\rangle$ sont considérés comme les états propres de l'opérateur auto-adjoint X^μ et forment un système orthonormé complet avec $\hat{X}^\mu\,|x\rangle = x^\mu\,|x\rangle$, $\langle x_b\,|x_a\rangle = \delta^4\,(x_b - x_a)\,,\ \left[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = 0,\ \displaystyle\int |x\rangle\,\langle x|\,dx = 1,$

$\not{P} = \mathcal{P}^\mu\Gamma_\mu$ où $\mathcal{P}^\mu = i\partial_x^\mu - e\ A^\mu\,(x) - e\ B^\mu\,(x)$ est la quadri impulsion de la particule de Dirac dans les deux champs d'ondes planes de quadri potentiels A^μ et B^μ orthogonales suivant [5], c-à-d. $AB = KA = kB = kK = 0$ où k et K sont les quadrivecteurs d'ondes des deux ondes respectivement et travaillons aussi dans la jauge de Lorentz $kA = KB = 0$.

On pose alors [12], la quantité $\hat{\mathcal{P}}_b^\mu\delta^4\,(x_b, x_a) = \langle x_b|\ \hat{\Pi}^\mu\ |x_a\rangle$ et $\Gamma^\mu\delta^4\,(x_b, x_a) = \langle x_b|\ \hat{\gamma}^\mu\ |x_a\rangle$

Il peut être alors facilement vérifié que $\left[\hat{\Pi}_\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = i\delta_\mu^\nu$, $\left[\hat{\Pi}^\mu, \hat{\Pi}^\nu\right]_- = -ieF^{\mu\nu}\left(\hat{X}\right)$, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$, $\left[\hat{\Pi}_\mu, \gamma^\nu\right]_- = \left[\gamma^\mu, \hat{X}^\nu\right]_- = 0.$

L'équation pour la fonction de Green est alors équivalente à l'équation suivante pour l'opérateur $\hat{S}$

$$\left(\hat{\not{\Pi}} - m\right)\hat{S}\ = -1 \tag{2.2}$$

avec

$\hat{\Pi}^\mu = -\hat{P}^\mu - e\hat{A} - e\hat{B}$ où $\hat{P}^\mu$ est l'opérateur conjuguée de l'opérateur $\hat{X}^\mu$

2.3 Technique de Fradkin-Gitman :

La technique de Fradkin-Gitman consiste à l'homogénéisation de l'opérateur $\hat{S}$. Alors, on multiplie à droite et à gauche (2.2) par la matrice γ^5, on obtient alors

$$\left(\hat{\Pi}^\mu\gamma^5\gamma_\mu - m\ \gamma^5\right)\tilde{S}\ = -\left(\gamma^5\right)^2 \tag{2.3}$$

Où $\left(\gamma^5\right)^2 = -1$ et $\tilde{S}\ = \hat{S}\ \gamma^5$posons alors $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5\gamma^\mu$ qui est aussi une matrice de Dirac vérifiant l'algèbre de Clifford donc les lois d'anti commutation, alors on peut carrément enlever le tilde et travailler avec l'équation

$$\left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)\tilde{S}\ = 1 \tag{2.4}$$

d'où

$$\tilde{S} = \frac{1}{\left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5} + i\varepsilon\right)} \tag{2.5}$$

On voit bien que notre opérateur est l'inverse d'un opérateur de Fermi (Il contient une somme de termes anti commutant entre eux et seront ultérieurement représenter par des nombres Grassmanniens).

2.3.1 Evaluation de la fonction de Green :

Maintenant, au lieu d'utiliser la représentation classique en temps propre (bosonique) de Schwinger qui convient mieux pour les opérateurs de type bosonique, on utilise une différente représentation au moyen duquelle on introduit un super temps propre (λ, χ) un temps propre bosonique λ et un temps propre fermionique χ.

Alors, formellement l'opérateur $\tilde{S}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\tilde{S} \ &= \ \left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)^{-1} = \frac{\left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)}{\left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)^{2}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int \exp\left\{i\frac{\lambda}{2}\left[\left(\pi^{\mu}\gamma^{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)^{2} + \right.\right. \\ &\left.\left. i\varepsilon\right] + i\chi\left(\pi^{\mu}\gamma^{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)\right\} d\chi\end{aligned} \tag{2.6}$$

Alors,

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int \exp\left(-i\ \hat{H}\right) d\chi \tag{2.7}$$

Avec

$$\hat{H} = \frac{\lambda}{2}\left[m^{2} - \left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu}\right)^{2}\right] + \left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)\chi = \frac{\lambda}{2}\left(m^{2} - \hat{\Pi}^{2} + i\frac{e}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) + \left(\hat{\Pi}^{\mu}\gamma_{\mu} - m\ \gamma^{5}\right)\chi \tag{2.8}$$

Où par définition χ anti commute avec les matrices γ et les intégrales sur les variables Grassmanniennes impaires sont comprises comme des intégrales intégrales formelles.

Maintenant la fonction de Green s'écrit en représentation des coordonnées comme

$$S\ \left(x_b, x_a\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} d\lambda \int \langle x_b| \exp\left(-i\ \hat{H}\right) |x_a\rangle\, d\chi \tag{2.9}$$

pour passer à la représentation intégrale de chemins, subdivisant l'intervalle spatio temporel $[x_a, x_b]$ en N parties que nous supposerons égales pour simplifier, et introduisant entre elles $N-1$ relation de fermétures

$$\int |x_j\rangle\langle x_j|\, d^4x_j = 1, \tag{2.10}$$

notre fonction de Green prend alors la forme discrète suivante

$$\begin{aligned} S\ \left(x_b, x_a\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} d\lambda \int d\chi \int d^4x_1 ... d^4x_{N-1} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N} \langle x_k| \exp\left(-i\ \hat{H}\left(\lambda, \chi\right) \Delta\tau\right) |x_{k-1}\rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour passer de la forme opératorielle à la forme classiques, on développera l'exponentiel en série de Taylor au premier ordre en $\Delta\tau$, et on insère les N relations de fermeture sur l'espace des moments

$$\int |p_j\rangle\langle p_j|\, d^4p_j = 1, \tag{2.12}$$

nous obtenons alors pour un élément de matrice donné l'expression suivante

$$\left\langle x_{k-1}\right| \exp\left(-i\ \mathcal{H}\left(\lambda_k, \chi_k\right) \Delta\tau\right) |x_k\rangle \approx \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \exp\left\{i\left[p_k \frac{\Delta x_k}{\Delta\tau} - \mathcal{H}\left(\lambda, \chi, \overline{x}_k, p_k\right)\right]\Delta\tau\right\} \tag{2.13}$$

Alors, en l'injectant dans l'expression (2.11) , on obtient

$$\begin{aligned} S\ \left(x_b, x_a\right) &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty} d\lambda \int d\chi \int d^4x_1 ... d^4x_{N-1} \frac{d^4p_1}{\left(2\pi\right)^4} ... \frac{d^4p_N}{\left(2\pi\right)^4} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N} \exp\left\{i\left[p_k \frac{\Delta x_k}{\Delta\tau} - \mathcal{H}\left(\lambda, \chi, \overline{x}_k, p_k\right)\right]\Delta\tau\right\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Alors

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \frac{1}{2} T \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int DxDp \\ &\times \exp\left\{ i \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{2} \left(\pi^2 - m^2 - i\frac{e}{2} F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \right) + \left(m\gamma^5 - \pi_\mu\gamma^\mu \right)\chi + p\dot{x} \right] \Delta\tau \right\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

A cause des matrices γ, l'ordre est important, c'est pourquoi nous avant indexé ces matrices de Dirac avec un paramètre τ et ainsi, on a introduit un opérateur de produit chronologique de Dyson T, alors on voit bien que ce n'est pas une forme tout à fait intégrale de chemins c'est pour quoi pour avoir une formulation intégrale de chemins proprement dite, on doit obligatoirement éliminer cet opérateur et ce sera par le biais de l'introduction de courants Grassmanniens couplés aux matrices $\gamma^n(\tau)$ où $n = 0, 1, 2, 3, 5$ à l'aide de la formule suivante [3] :

$$T \exp\left\{ f\ \left(\gamma^n(\tau) \right) \right\} = \exp\left\{ f\ \left(\frac{\delta_g}{\delta\rho_n} \right) \right\} T \exp\left\{ \int_0^1 \rho_n \gamma^n d\tau \right\}_{\rho=0} \tag{2.16}$$

où $\frac{\delta_g}{\delta\rho_n}$ signifie une dérivation fonctionnelle par la gauche par rapport au nième courant Grassmannien et aussi on a [3]

$$\begin{aligned} T \exp\left\{ \int_0^1 \rho_n \gamma^n d\tau \right\} &= \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n} \right) \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\ &\times \exp\left\{ \int_0^1 \left(\Psi_n \dot{\Psi}^n - 2i\rho_n \Psi^n \right) d\tau + \Psi_n(1)\, \Psi^n(0) \right\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Avec

$$\mathcal{D}\Psi = D\Psi \left[\int D\Psi \exp\left\{ \int_0^1 \left(\Psi_n \dot{\Psi}^n \right) d\tau \right\} \right]^{-1}$$

où la contrainte imposée sur l'intégration des variables Grassmanniennes Ψ^n impaires est

$$\Psi(0) + \Psi(1) = \theta \tag{2.18}$$

Où θ^n est une variable de Grassmannienne impaire.

Alors notre fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \frac{1}{2}\exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}\right)\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int DxDp \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{2}\left(\pi^2 - m^2 + 2i\ eF_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\right) - 2i\left(m\Psi^5 - \pi_\mu\Psi^\mu\right)\chi - i\ \Psi_n\dot{\Psi}^n + \right.\right. \\ &\left.\left. p\dot{x}\right] d\tau + \Psi_n(1)\,\Psi^n(0)\right\}\Big|_{\theta=0} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nous voyons bien qu'on est en présence de la forme Hamiltonienne de la fonction de Green et pour passer à la forme Lagrangienne de la fonction de Green et ainsi pouvoir extraire les équations classiques du mouvement, nous éliminons alors le terme contenant la quantité du mouvement p par le changement suivant

$$p^\mu \rightarrow -p^\mu - \frac{\dot{x}^\mu}{\lambda} - e\ A^\mu(x) - e\ B^\mu(x) \tag{2.20}$$

La fonction de Green prend alors la forme Lagrangienne suivante :

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}\right)\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int Dx \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi\mathcal{C}(\lambda) \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2}m^2 - e\ \dot{x}\ A(x) - e\ \dot{x}\ B(x) + i\lambda eF_{\mu\nu}(x)\,\Psi^\mu\Psi^\nu + \right.\right. \\ &\left.\left. i\left(\frac{\dot{x}\ \Psi}{\lambda} - m\Psi^5\right)\chi - i\Psi_n\dot{\Psi}^n\right] d\tau + \Psi_n(1)\,\Psi^n(0)\right\}\Bigg|_{\theta=0} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Où

$$\mathcal{C}(\lambda) = \int Dp\exp\left\{ i\int_0^1 \frac{\lambda}{2}p^2 d\tau \right\}$$

L'action classique correspondante est alors

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2}m^2 - e\ \dot{x}\ A(x) - e\ \dot{x}\ B(x) + i\lambda eF_{\mu\nu}(x)\,\Psi^\mu\Psi^\nu + \right. \\ &\left. i\left(\frac{\dot{x}\ \Psi}{\lambda} - m\Psi^5\right)\chi - i\ \Psi_n\dot{\Psi}^n\right] d\tau \end{aligned} \tag{2.22}$$

Alors l'évolution du système est donnée par les équations du mouvement classique suivante :

$$\frac{\delta \mathbb{A}}{\delta \Psi^{\mu}} = -2i\ \dot{\Psi}_{\mu} - 2i\lambda e F_{\mu\nu}\Psi^{\nu} + i\frac{\dot{x}_{\mu}}{\lambda}\chi = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\delta \mathbb{A}}{\delta \Psi^{5}} = -2i\ \dot{\Psi}^{5} + im\chi = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta \mathbb{A}}{\delta x^{\mu}} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_{\mu}}{\lambda}\right) + \ \dot{x}^{\alpha}\ F_{\alpha\mu}\left(x\right) + ie\lambda\ \partial_{\mu}F_{\nu\alpha}\Psi^{\nu}\Psi^{\alpha} = 0 \tag{2.25}$$

Ces équations , pour le problème des ondes planes seront importantes dans la détermination des intégrales de chemins.

La fonction de Green causale correspondante à une particule de Dirac chargée soumise à l'action composée de deux champs électromagnétiques orthogonaux est donnée par l'expression intégrale de chemins suivante

$$\begin{aligned} S\ \left(x_b, x_a\right) &= \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial \theta^n}) \int_0^{\infty} d\lambda \int d\chi \int DxDp \int_{\psi(1)+\psi(0)=\theta^n} \mathcal{D}\psi \\ &\times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}p^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 - e\dot{x}A(x) - e\dot{x}B(x) + i\lambda e\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\psi^{\mu}\psi^{\nu} \right.\right. \\ &\left.\left. + i\lambda e\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\psi^{\mu}\psi^{\nu} + i(\frac{\dot{x}_{\alpha}\psi^{\alpha}}{\lambda} - m\psi^5)\chi - i\psi_n\dot{\psi}^n \right] + \psi_n(1)\psi^n(0) \right\}\Bigg|_{\theta=0} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Où

x , λ sont des variables Grassmanniennes paires (donc bosoniques c'est à dire commutantes et ici réelles)

θ , χ et Ψ^n sont des variables Grassmanniennes impaires et les conditions aux limites imposées sur elles sont

$x\left(0\right) = x_a,\ x\left(1\right) = x_b,\ \Psi\left(0\right) + \Psi\left(1\right) = \theta$

Pour traiter ce problème, il est claire qu'il est plus commode de passer à la forme hamiltonienne correspondante

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b, x_a) \ = \ & \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int DxDp \int_{\psi(1)+\psi(0)=\theta^n} \mathcal{D}\psi \\
& \times \exp\left\{ i \int_0^1 \left[p\dot{x} + \frac{\lambda}{2}\left(p^2 - m^2\right) + \frac{\lambda}{2} e^2 A^2(x) + \frac{\lambda}{2} e^2 B^2(x) + (\lambda eA + \lambda eB - \right.\right. \\
& i\psi\chi)\, p + i\lambda e \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu + i\lambda e\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu + i\left[(eA + eB)\psi + m\psi^5\right]\chi - \\
& \left.\left. i\psi_n\dot{\psi}^n + \right] \psi_n(1)\psi^n(0) \right\}\Big|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Il apparait maintenant qu'une intégration directe sur les chemins $x(\tau)$ n'est pas possible et ceci à cause de la forme générale des quadripotentiel $A(kx)$ ainsi que $B(Kx)$, mais heureusement, de la dépendance unique des deux potentiels en (kx) et (Kx) successivement, on se permet d'introduire deux nouvelles variables $\Phi = kx$ et $\Omega = Kx$ à l'aide des deux identités suivantes

$$
\int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta\left(\Phi_a - kx_a\right) \delta\left(\Phi_b - \Phi_a - k\left(x_b - x_a\right)\right) = 1 \tag{2.28}
$$

$$
\int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta\left(\Omega_a - Kx_a\right) \delta\left(\Omega_b - \Omega_a - K\left(x_b - x_a\right)\right) = 1 \tag{2.29}
$$

Ou mieux encore, leurs versions intégrales

$$
\int d\Phi_b \int d\Phi_a \delta\left(\Phi_a - kx_a\right) \int D\ \Phi \int Dp_\Phi \exp\left\{ i \int_0^1 p_\Phi \left(\dot{\Phi} - k\dot{x}\right) d\tau \right\} = 1 \tag{2.30}
$$

$$
\int d\Omega_b \int d\Omega_a \delta\left(\Omega_a - Kx_a\right) \int D\ \Omega \int Dp_\Omega \exp\left\{ i \int_0^1 p_\Omega \left(\dot{\Omega} - K\dot{x}\right) d\tau \right\} = 1 \tag{2.31}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b, x_a) \ &= \ \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int d\Phi_a \int d\Phi_b \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_a \int d\Omega_b \delta(\Omega_a - Kx_a) \\
&\times \int DxDpD\Phi Dp_\Phi D\Omega Dp_\Omega \\
&\times \int_{\psi(1)+\psi(0)=\theta^n} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ i \int_0^1 \left[p\dot{x} + \frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) \ + \frac{\lambda}{2} e^2 A^2 (\Phi) + \frac{\lambda}{2} e^2 B^2 (\Phi) + \right.\right. \\
& p_\Phi \dot{\Phi} + p_\Omega \dot{\Omega} + \lambda \left(e\ A(\Phi) + e\ B(\Omega) + \ kp_\Phi + Kp_\Omega - i\frac{\psi\chi}{\lambda} \right) p + i\lambda e \mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi) \Psi^\mu \Psi^\nu + \\
& i\lambda e\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega) \Psi^\mu \Psi^\nu - i \left[\left(e\ A(\Phi) + e\ B(\Omega) + kp_\Phi + Kp_\Omega \right) \psi + m\psi^5 \right] \chi - \\
& \left.\left. i\ \Psi^n \dot{\Psi}_n \right] d\tau + \Psi_n(1) \Psi^n(0) \right\} \Bigg|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Après une intégration fonctionnelle sur les chemins $x\,(\tau)$, nous aurons

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b, x_a) \ &= \ \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \int d\chi \int d\Phi_a \int d\Phi_b \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_a \int d\Omega_b \\
& \times \delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Phi \int Dp_\Phi \int D\Omega \int Dp_\Omega \int_E \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ \ ip\,(x_b - x_a) + \right. \\
& i\frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) + i \int_0^1 \left[\lambda(eAp + \frac{e^2}{2} A^2) + (\lambda pk + \dot{\Phi}) p_\Phi + i\lambda e \mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu + \right. \\
& \lambda(eBp + \frac{e^2}{2} B^2) + (\lambda pK + \dot{\Omega}) p_\lambda + i\lambda e \mathcal{G}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu - i\ \ [(p + eA + eB)\Psi + k\Psi p_\Phi + \\
& \left.\left. K\Psi p_\Omega + m\Psi^5 \right] \chi - i\Psi\dot{\Psi} \right] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0) \ \right\} \Bigg|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

A ce niveau de calcul, on note bien qu'on a séparé le mouvement extérieur libre de celui de l'évolution.

Le couplage spin-champ se réecrit

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu} \Psi^\mu \Psi^\nu = 2(k\Psi)(A'\ \Psi) \tag{2.34}
$$

Pour l'onde A

$$
\mathcal{G}_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu = 2(K\Psi)(B'\ \Psi) \tag{2.35}
$$

Pour l'onde B

Qui inspire à rendre la variable ψ et $k\psi$ indépendante ainsi de même que pour ψ et $K\psi$ et ceci en introduisant deux nouvelles variables $\eta = k\psi$ et $\kappa = K\psi$ via les deux identités Grassmanniennes suivantes

$$\int d\eta_a d\eta_b \delta(\eta_a - k\ \Psi_a) \int D\eta\ \delta\left(p_\eta\left(\dot{\eta} - k\ \dot{\Psi}\right)\right) = 1 \tag{2.36}$$

Et

$$\int d\kappa_a d\kappa_b \delta(\kappa_a - K\ \Psi_a) \int D\kappa\ \delta\left(p_\kappa(\dot{\kappa} - K\ \dot{\Psi})\right) = 1 \tag{2.37}$$

ou encore leur version fonctionnelle

$$\int d\eta_a d\eta_b \delta(\eta_a - k\ \Psi_a) \int D\eta \int Dp_\eta \exp\left\{i \int_0^1 p_\eta(\dot{\eta} - k\ \dot{\Psi})\right\} = 1 \tag{2.38}$$

Et

$$\int d\kappa_a d\kappa_b \delta(\kappa_a - K\ \Psi_a) \int D\kappa \int Dp_\kappa \exp\left\{i \int_0^1 p_\kappa(\dot{\kappa} - K\ \dot{\Psi})\right\} = 1 \tag{2.39}$$

Où η, p_η, κ, p_κ sont des variables de Grassmann impaires.

L'expression de la fonction de Green devient

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) \;=\; & \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \int d\chi \int d\Phi_a \int d\Phi_b \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_a \int d\Omega_b \\ & \times \delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Phi \int Dp_\Phi \int D\Omega \int Dp_\Omega \int d\eta_a \int d\eta_b \delta(\eta_a - k\Psi_a) \\ & \times \int D\eta \int Dp_\eta \int d\kappa_a \int d\kappa_b \delta(\kappa_a - K\Psi_a) \int D\kappa \int Dp_\kappa \int_E \mathcal{D}\Psi \\ & \times \exp\left\{\ ip(x_b - x_a) + i\frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) + i \int_0^1 \left[\lambda(eAp + \frac{e^2}{2}A^2) + \right.\right. \\ & (\lambda pk + \dot{\Phi})p_\Phi + \lambda(eBp + \frac{e^2}{2}B^2) + (\lambda pK + \dot{\Omega})p_\Omega + p_\eta(\dot{\eta} - k\ \dot{\Psi}) + p_\kappa(\dot{\kappa} - K\ \dot{\Psi}) - \\ & i\ \left[(p + eA + eB)\Psi + \eta p_\Phi + \kappa p_\Omega + m\Psi^5\right] \chi + 2ie\lambda\eta A^{'}\Psi + 2ie\lambda\varrho B'\Psi - \\ & \left.\left. i\Psi\dot{\Psi}\right] d\tau + \Psi_n(1)\Psi^n(0)\ \right\}\Big|_{\theta=0} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dans le but de se libérer des conditions aux bords sur ψ et qui nous empèche d'intégrer sur elles, on passe à l'espace des variables de vitesse relatives à elles et ceci comme suit

$$\Psi^n(\tau) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau^{'})\omega^n(\tau^{'})d\tau^{'} + \frac{\theta^n}{2} \tag{2.41}$$

Avec la notation de convolution

$$f\varepsilon g=\int_0^1 f\left(\tau\right)\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)g\left(\tau'\right)d\tau'$$

La nouvelle écriture de la fonction de Green avec la nouvelle notation dans l'espace des vitesses et alors

$$\begin{aligned}
S\ \left(x_b,x_a\right) &= \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\int d\chi\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta(\Phi_a-kx_a)\int d\Omega_a\int d\Omega_b \\
&\times\delta(\Omega_a-Kx_a)\int D\Phi\int Dp_\Phi\int D\Omega\int Dp_\Omega\int d\eta_a\int d\eta_b\delta(\eta_a-k\Psi_a) \\
&\times\int D\eta\int Dp_\eta\int d\kappa_a\int d\kappa_b\delta(\kappa_a-K\Psi_a)\int D\kappa\int Dp_\kappa\int\mathcal{D}\omega \\
&\times\delta\left(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)\right)\ \delta\left(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\theta)\right)\exp\left\{\ ip\left(x_b-x_a\right)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)+\right. \\
&i\int_0^1\left[\lambda(eAp+\frac{e^2}{2}A^2)+(\lambda pk+\dot{\Phi})p_\Phi+\lambda(eBp+\frac{e^2}{2}B^2)+(\lambda pK+\dot{\Omega})p_\Omega+\right. \\
&p_\eta(\dot{\eta}-k\omega)+p_\kappa(\dot{\kappa}-K\omega)+ie\lambda\eta A'(\varepsilon\omega+\theta)+ie\lambda\kappa B'(\varepsilon\omega+\theta)+\frac{i}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n- \\
&i\ \left.\left.\left[\frac{1}{2}(p+eA+gB)(\varepsilon\omega+\theta)+\eta p_\Phi+\kappa p_\Omega+\frac{m}{2}(\varepsilon\omega^5+\theta^5)\right]\chi\right]d\tau\right\}\Bigg|_{\theta=0} \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Dans le but d'extraire l'équation classique du mouvement relative au spin donc faire un lien entre l'évolution classique et quantique, effectuons alors la translation suivante

$$\omega^\mu(\tau)\longrightarrow\omega^\mu(\tau)+ik^\mu\int_0^1\varepsilon^{-1}(\tau-\tau^{'})p_\eta(\tau^{'})d\tau^{'}+iK^\mu\int_0^1\varepsilon^{-1}(\tau-\tau^{'})p_\kappa(\tau^{'})d\tau^{'} \qquad (2.43)$$

Les termes contenant les vitesses (termes linéaires et termes bilinéaires) se transformeront comme suit

$$\varepsilon\omega^\mu\longrightarrow\varepsilon\omega^\mu+ik^\mu p_\eta+iK^\mu p_\kappa \qquad (2.44)$$

Et

$$\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu\longrightarrow\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu-2ip_\eta k\omega-2ip_\kappa K\omega \qquad (2.45)$$

Alors, la fonction de Green aura la forme suivante

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b,x_a) \;=\;& \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\int d\chi\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta(\Phi_a-kx_a)\int d\Omega_a\int d\Omega_b \\
&\times\delta(\Omega_a-Kx_a)\ \int D\Phi\int Dp_\Phi\int D\Omega\int Dp_\Omega\textstyle\int dp_{\eta_a}\int dp_{\kappa_a}\displaystyle\int d\eta_a\int d\eta_b\int D\eta \\
&\times\int Dp_\eta\int d\kappa_a\int d\kappa_b\int D\kappa\int Dp_\kappa\int\mathcal{D}\omega\exp\Big\{\ ip\,(x_b-x_a)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)+ \\
&i\int_0^1\Big[\lambda(eAp+\frac{e^2}{2}A^2)+\ (\lambda pk+\dot\Phi)p_\Phi+\lambda(eBp+\frac{e^2}{2}B^2)+(\lambda pK+\dot\Omega)p_\Omega+ \\
&p_\eta\left(\dot\eta+\frac{pk}{2}\chi\right)+p_\kappa\left(\dot\kappa+\frac{pK}{2}\chi\right)-i\Big[\frac{1}{2}(p+eA+eB)(\varepsilon\omega+\theta)+\eta p_\Phi+\kappa p_\Omega+ \\
&\frac{m}{2}(\varepsilon\omega^5+\theta^5)\Big]\,\chi+p_{\eta_a}\left(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)\right)+p_{\kappa_a}\left(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\theta)\right)+ \\
&ie\lambda\eta A'(\varepsilon\omega+\theta)+ie\lambda\kappa B'(\varepsilon\omega+\theta)+\frac{i}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n\Big]d\tau\ \Big\}\Big|_{\theta=0}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Où l'on a remplacé la fonction de Dirac par l' intégrale de chemins exprimée dans l'espace des phases comme suit

$$
\delta\left(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta)\right)=\int dp_{\eta_a}\exp\left\{ip_{\eta_a}(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\theta))\right\} \tag{2.47}
$$

Et

$$
\delta\left(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\theta)\right)=\int dp_{\kappa_a}\exp\left\{ip_{\kappa_a}(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\theta))\right\} \tag{2.48}
$$

Avec

p_{η_a}, p_{κ_a} étant des variables de Grassmann impaires.

A ce niveau, intégrons d'abord sur les vitesses ω^5. Le résultat est simplement égale à

$$
\int\mathcal{D}\omega^5\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_5\varepsilon\omega^5-\frac{m}{2}\chi\varepsilon\omega^5\right\}=1 \tag{2.49}
$$

et l'intégrale sur les vitesses ω^μ a la forme suivante

$$
\int\mathcal{D}\omega^\mu\exp\left\{\int_0^1\left[-\frac{1}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+\mathcal{J}_\mu\omega^\mu\right]d\tau\right\} \tag{2.50}
$$

Où

$\mathcal{J}_\mu(\tau)$ est le courant définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\mu(\tau) &= -\frac{1}{2}\chi\int_0^1\left[p_\mu+e\ A_\mu(\Phi(\tau^{'}))+eB_\mu(\Omega(\tau^{'}))\right]\varepsilon(\tau^{'}-\tau)d\tau^{'}+\frac{i}{2}k_\mu p_{\eta_a}+\frac{i}{2}K_\mu p_{\kappa_a}- \\ &\lambda e\int_0^1\eta(\tau^{'})A_\mu^{\prime}(\Phi(\tau^{'}))\varepsilon(\tau^{'}-\tau)d\tau^{'}-\lambda e\int_0^1\kappa(\tau^{'})B_\mu^{\prime}(\Omega(\tau^{'}))\varepsilon(\tau^{'}-\tau)d\tau^{'}\end{aligned} \tag{2.51}$$

La forme étant pseudo Gaussienne, l'intégration est simple et est donnée par

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\omega_\mu(\tau)\varepsilon(\tau-\tau')\omega^\mu(\tau')d\tau d\tau'+\int_0^1\mathcal{J}_\mu(\tau)\omega^\mu d\tau\right\}= \\ &=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\mathcal{J}_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^\mu(\tau')d\tau d\tau'\right\}\end{aligned} \tag{2.52}$$

Comme

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathcal{J}_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^\mu(\tau')d\tau' \\ =&\left[e\lambda(p+eA+gB)\varepsilon(\eta A'+\kappa B')+\frac{i}{2}pkp_{\eta_a}+\frac{i}{2}pKp_{\kappa_a}\right]\chi- \\ &e^2\lambda^2\eta A'\varepsilon\eta A'-e^2\lambda^2\kappa B'\varepsilon\kappa B' \\ =&\left[e\lambda(p+eA)\varepsilon(\eta A')+e\lambda(p+eB)\varepsilon(\kappa B')+\frac{i}{2}pkp_{\eta_a}+\frac{i}{2}pKp_{\kappa_a}\right]\chi- \\ &e^2\lambda^2\eta A'\varepsilon\eta A'-e^2\lambda^2\kappa B'\varepsilon\kappa B'\end{aligned} \tag{2.53}$$

Donc, la fonction de Green prendra alors la forme suivante

$$\begin{aligned}
S\ (x_b, x_a) &= \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \int d\chi \int d\Phi_a \int d\Phi_b \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_a \int d\Omega_b \\
&\times\delta(\Omega_a - Kx_a) \int D\Phi \int Dp_\Phi \int D\Omega \int Dp_\Omega \int dp_{\eta_a} \int d\eta_a \int d\eta_b \int D\eta \\
&\times \int Dp_\eta \int dp_{\kappa_a} \int d\kappa_a \int d\kappa_b \int D\kappa \int Dp_\kappa \exp\Bigg\{ ip\,(x_b - x_a) + i\frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) + \\
&i \int_0^1 \Bigg[\lambda(eAp + \frac{e^2}{2}A^2) + (\lambda pk + \dot{\Phi})p_\Phi + \lambda(eBp + \frac{e^2}{2}B^2) + (\lambda pK + \dot{\Omega})p_\Omega + \\
&p_\eta \left(\dot{\eta} + \frac{pk}{2}\chi\right) + \ p_{\eta_a}\left(\eta_a - \frac{1}{2}k\theta - \frac{1}{4}pk\chi\right) + p_{\kappa_a}\left(\kappa_a - \frac{1}{2}K\theta - \frac{1}{4}pK\chi\right) - \\
&i\left[\frac{1}{2}(p + eA + eB)(\theta - e\lambda\varepsilon\eta A' - e\lambda\varepsilon\kappa B') + \eta p_\varphi + \varrho p_\lambda + \frac{m}{2}\theta^5\right]\chi + \\
&p_\kappa\left(\dot{\kappa} + \frac{pK}{2}\chi\right) + \ ie\eta A'\theta \ + ie\lambda\kappa B'\theta - \frac{i}{2}e^2\lambda^2\eta A'\varepsilon\eta A' - \\
&\frac{i}{2}e^2\lambda^2\kappa B'\varepsilon\kappa B'\Bigg] d\tau\ \Bigg\}\Bigg|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

L'intégration fonctionnelle sur les deux variables p_η, p_κ fait apparaitre deux fonctionnelles de Dirac qui expriment les équations de mouvement classiques relatives au spin(projetées sur la direction de leur vecteur d'onde respectif)

$$\dot{\eta} = -\frac{pk}{2}\chi \tag{2.55}$$

Et

$$\dot{\kappa} = -\frac{pK}{2}\chi \tag{2.56}$$

Dont les solutions sont données par

$$\eta(\tau) = \eta_a - \frac{pk}{2}\chi\tau \tag{2.57}$$

Et

$$\kappa(\tau) = \kappa_a - \frac{pK}{2}\chi\tau \tag{2.58}$$

La fonction d'onde se réduit à

$$\begin{aligned}
S\ (x_b,x_a) &= \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\int d\chi\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta(\Phi_a-kx_a)\int d\Omega_a\int d\Omega_b \\
&\times\delta(\Omega_a-Kx_a)\int D\Phi\int Dp_\Phi\int D\Omega\int Dp_\Omega\ \int d\eta_a\int dp_{\eta_a}\int d\eta_b \\
&\times\delta\left(\eta_b-\eta_a+\frac{1}{2}pk\chi\right)\int d\kappa_a\int dp_{\kappa_a}\int d\kappa_b\delta\left(\kappa_b-\kappa_a+\frac{1}{2}pK\chi\right) \\
&\times\exp\Bigg\{\ ip\left(x_b-x_a\right)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)+i\int_0^1\Bigg[\lambda(eAp+\frac{e^2}{2}A^2)+\lambda(eBp+\frac{e^2}{2}B^2)+ \\
&(\lambda pk+\dot{\Phi}-i\ \eta_a\chi)p_\Phi+(\lambda pK+\dot{\Omega}-i\ \kappa_a\chi)p_\Omega+p_{\eta_a}\left(\eta_a-\frac{1}{2}k\theta-\frac{1}{4}pk\chi\right)+ \\
&p_{\kappa_a}\left(\kappa_a-\frac{1}{2}K\theta-\frac{1}{4}pK\chi\right)-i\ \left[\frac{1}{2}(p+eA+eB)\left(\theta-e\lambda\varepsilon\eta_aA'-e\lambda\varepsilon\kappa_aB'\right)+\right. \\
&\left.\frac{m}{2}\theta^5\right]\chi+ie\lambda\left(\eta_a-\frac{pk}{2}\chi\tau\right)A'\theta+ie\lambda\left(\kappa_a-\frac{pK}{2}\chi\tau\right)B'\theta+ \\
&\frac{i}{2}e^2\lambda^2pkA'\varepsilon\tau A'\eta_a\chi+\frac{i}{2}e^2\lambda^2pKB'\varepsilon\tau B'\kappa_a\chi\Bigg]d\tau\Bigg\}\Bigg|_{\theta=0} \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

Où on a utilisé les simplifications suivantes

$$\begin{aligned}
&\left(\eta_a-\frac{pk}{2}\chi\tau\right)A'\left(\Phi(\tau)\right)\varepsilon(\tau-\tau')\left(\eta_a-\frac{pk}{2}\chi\tau'\right)A'(\Phi(\tau')) \\
=\ &\frac{pk}{2}\left(\tau A'(\Phi(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')A'(\Phi(\tau'))-A'(\Phi(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')\tau'A'(\Phi(\tau'))\right)\eta_a\chi \\
=\ &-pkA'(\Phi(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')\tau'A'(\Phi(\tau'))\eta_a\chi \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\left(\kappa_a-\frac{pK}{2}\chi\tau\right)B'\left(\Omega(\tau)\right)\varepsilon(\tau-\tau')\left(\kappa_a-\frac{pK}{2}\chi\tau'\right)B'(\Omega(\tau')) \\
=\ &\frac{pK}{2}\left(\tau B'(\Omega(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')B'(\Omega(\tau'))-B'(\Omega(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')\tau'B'(\Omega(\tau'))\right)\kappa_a\chi \\
=\ &-pKB'(\Omega(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')\tau'B'(\Omega(\tau'))\kappa_a\chi \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

L'intégration ordinaire sur les deux variables grassmanniennes p_{η_a},p_{κ_a} fait apparaitre les deux fonctions de Dirac suivantes :

$\delta\left(\eta_a-\frac{1}{2}k\theta-\frac{1}{4}pk\chi\right)$, $\delta\left(\kappa_a-\frac{1}{2}K\theta-\frac{1}{4}pK\chi\right)$ imposant ainsi les équations suivantes

$$\eta_a=\frac{1}{2}k\theta+\frac{1}{4}pk\chi \qquad (2.62)$$

Et

$$\kappa_a = \frac{1}{2}K\theta + \frac{1}{4}pK\chi \tag{2.63}$$

De même

$$\eta_b = \eta_a - \frac{1}{2}pk\chi \tag{2.64}$$

Et

$$\kappa_b = \kappa_a - \frac{1}{2}pK\chi \tag{2.65}$$

Des relations (2.62) jusqu'à (2.65) on vérifie que

$$\eta_a + \eta_b = k\theta \tag{2.66}$$

Et

$$\kappa_a + \kappa_b = K\theta \tag{2.67}$$

C'est à dire que la condition aux limites sont satisfaites .

L'expression de notre fonction de Green $S\ (x_b, x_a)$ devient

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \int d\chi \int d\Phi_a \int d\Phi_b \delta(\Phi_a - kx_a) \int d\Omega_a \int d\Omega_b \\ &\times\delta(\Omega_a - Kx_a) \int \mathcal{D}\Phi \int Dp_\Phi \int D\Omega \int Dp_\Omega \times \exp\Bigg\{ \ ip\,(x_b - x_a) + \\ &i\frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) + i\int_0^1 \Bigg[\lambda(eAp + \frac{e^2}{2}A^2) + (\lambda pk + \dot{\Phi} - \frac{i}{2}k\theta\chi)p_\Phi + \lambda(eBp + \\ &\frac{e^2}{2}B^2\Bigg) + (\lambda pK + \dot{\Omega} - \frac{i}{2}K\theta\chi)p_\Omega - \frac{i}{2}\Bigg[(p + eA + eB)(\theta - e\lambda\frac{k\theta}{2}A' - \\ &e\lambda\frac{K\theta}{2}B'\Bigg) + m\theta^5]\,\chi + \frac{ie\lambda}{2}\Bigg(-pk\chi\tau + k\theta + \frac{1}{2}pk\chi\Bigg)A'\theta + \\ &\frac{ie\lambda}{2}\,(-pK\chi\tau + \ K\theta + \frac{1}{2}pK\chi\Bigg)B'\theta + \frac{i}{4}e^2\lambda^2 pk\chi A'\varepsilon\tau A'k\theta\chi + \\ &\frac{i}{4}e^2\lambda^2 pK\chi B'\varepsilon\tau B'K\theta\chi\Bigg]d\tau\ \Bigg\}\Bigg|_{\theta=0} \end{aligned} \tag{2.68}$$

Intégrons sur les deux variables ordinaires p_Φ, p_Ω, il apparait les deux fonctionnelles de Dirac

$$\delta(\dot{\Phi} + \lambda pk - \frac{i}{2}k\theta\chi)$$

Et

$$\delta(\dot{\Omega} + \lambda pK - \frac{i}{2}K\theta\chi)$$

Ceci veut dire que les contributions au calcul du propagateur proviennent essentiellement des équations classiques qu'impliquent les arguments des fonctions de Dirac ci-dessus, également on remarqueque le spin contribue par des variables de Grassmann de type paire aux équations du mouvement relative au spin 0.

Ces équations classiques du mouvement externe projetées le long des vecteurs d'ondes respectifs

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -\lambda pk + \frac{i}{2}k\theta\chi \tag{2.69}$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -\lambda pK + \frac{i}{2}K\theta\chi \tag{2.70}$$

S'inverse

$$\frac{d\tau}{d\Phi} = -\frac{1}{\lambda pk}\left(1 + \frac{ik\theta}{2\lambda pk}\chi\right) \tag{2.71}$$

$$\frac{d\tau}{d\Omega} = -\frac{1}{\lambda pK}\left(1 + \frac{iK\theta}{2\lambda pK}\chi\right) \tag{2.72}$$

Compte tenu des équations (2.71) et (2.72), une intégration par partie de chacune d'elles, nous donne

$$-\frac{e}{2}\lambda pk \int_0^1 \tau A'(\Phi)\theta\chi d\tau = \left\{\frac{e}{2}A_b + \frac{e}{2\lambda pk}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} Ad\Phi\right\}\theta\chi \tag{2.73}$$

$$-\frac{e}{2}\lambda pK \int_0^1 \tau B'(\Omega)\theta\chi d\tau = \left\{\frac{e}{2}B_b + \frac{e}{2\lambda pK}\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} Bd\Omega\right\}\theta\chi \tag{2.74}$$

Or

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}e\lambda\int_0^1\int_0^1\left(p+eA(\Phi(\tau)\right)\varepsilon(\tau-\tau')A'(\Phi(\tau'))k\theta\chi d\tau' d\tau \\
&= -\frac{e\lambda}{2(\lambda pk)^2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\left[pA+\frac{e}{2}A^2\right]d\Phi-\frac{ep}{4pk}(A_a+A_b) \\
&+\frac{e^2\lambda}{4(\lambda pk)^2}(A_a+A_b)\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}Ad\Phi]k\theta\chi \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}e\lambda\int_0^1\int_0^1\left(p+eB(\Omega(\tau)\right)\varepsilon(\tau-\tau')B'(\Omega(\tau'))K\theta\chi d\tau' d\tau =$$

$$\left[-\frac{e\lambda}{2(\lambda pK)^2}\int_{\lambda_a}^{\lambda_b}\left[pB+\frac{e}{2}B^2\right]d\lambda-\frac{ep}{4pK}(B_a+B_b)+\frac{e^2\lambda}{4(\lambda pK)^2}(B_a+B_b)\int_{\lambda_a}^{\lambda_b}Bd\Omega\right]K\theta\chi \qquad (2.76)$$

Et

$$\begin{aligned}
&-\frac{e^2}{4}\lambda^2pk\int_0^1\int_0^1 A'(\Phi(\tau^{'}))\varepsilon(\tau'-\tau)\tau A'(\Phi(\tau))k\theta\chi d\tau d\tau' \qquad (2.77)\\
&= \left\{-\frac{e^2}{4pk}A_aA_b-\frac{e^2\lambda^2}{4(\lambda pk)^2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\left[(A_a+A_b)A-A^2\right]d\Phi\right\}k\theta\chi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{e^2}{4}\lambda^2pK\int_0^1\int_0^1 B'(\Omega(\tau^{'}))\varepsilon(\tau'-\tau)\tau B'(\Omega(\tau))K\theta\chi d\tau d\tau' \qquad (2.78)\\
&= \left\{-\frac{e^2}{4pK}B_aB_b-\frac{e^2\lambda^2}{4(\lambda pK)^2}\int_{\lambda_a}^{\lambda_b}\left[(B_a+B_b)B-B^2\right]d\Omega\right\}K\theta\chi
\end{aligned}$$

Aprés remplacements dans l'équation (2.68) on obtient

$$\begin{aligned}
S\ (x_b,x_a) &= \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\int d\chi\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta(\Phi_a-kx_a)\\
&\times\delta\left(\Phi_b-\Phi_a+\lambda pk-\frac{i}{2}k\theta\chi\right)\int d\Omega_a\int d\Omega_b\delta(\Omega_a-Kx_a)\\
&\times\delta\left(\Omega_b-\Omega_a+\lambda pK-\frac{i}{2}K\theta\chi\right)\exp\left\{ip\left(x_b-x_a\right)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)-\right.\\
&\frac{i}{pk}\int_{\Phi_a}^{\Phi_b}(eAp+\frac{e^2}{2}A^2)d\Phi-\frac{i}{pK}\int_{\Omega_a}^{\Omega_b}(eBp+\frac{e^2}{2}B^2)d\Omega+\frac{e}{2pk}\left(k\theta\right)(A_b-A_a)\theta\\
&\times\left[\frac{1}{2}(p\theta+m\theta^5)+\frac{e}{4}(A_a+A_b)\theta-\frac{e}{4pk}\left(p(A_a+A_b)+eA_aA_b\right)k\theta\right]\chi+\\
&\frac{e}{2pK}\left(K\theta\right)(B_b-B_a)\theta\left[\frac{1}{2}(p\theta+m\theta^5)+\frac{e}{4}(B_a+B_b)\theta-\right.\\
&\left.\left.\frac{e}{4pK}\left(p(B_a+B_b)+eB_aB_b\right)K\theta\right]\chi\right\}\Bigg|_{\theta=0}
\end{aligned}\tag{2.79}$$

Pour éliminer les contraintes $\Phi_b=kx_b$ et $\Omega_b=Kx_b$, introduitent au début, les fonctions delta par leurs versions intégrales

$$\delta\left(\Phi_b-\Phi_a+\lambda pk-\frac{i}{2}k\theta\chi\right)=\int\frac{dp_{\Phi_b}}{2\pi}\exp\left\{ip_{\Phi_b}\left(\Phi_b-\Phi_a+\lambda pk-\frac{i}{2}k\theta\chi\right)\right\}\tag{2.80}$$

$$\delta\left(\Omega_b-\Omega_a+\lambda pK-\frac{i}{2}K\theta\chi\right)=\int\frac{dp_{\Omega_b}}{2\pi}\exp\left\{ip_{\Omega_b}\left(\Omega_b-\Omega_a+\lambda pK-\frac{i}{2}K\theta\chi\right)\right\}\tag{2.81}$$

et ensuite changeons l'impulsion p^μ en

$$p^\mu\longrightarrow p^\mu-k^\mu p_{\Phi_b}-K^\mu p_{\Omega_b}\tag{2.82}$$

Il résulte pour la fonction de Green,

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b,x_a) &= \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta(\Phi_a-kx_a)\delta(\Phi_b-kx_b)\\
&\times\int d\Omega_a\int d\Omega_b\delta(\Omega_a-Kx_a)\delta(\Omega_b-Kx_b)\int d\chi\exp\left\{ip\,(x_b-x_a)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)\right.\\
&-\frac{i}{pk}\int_{\Phi_a}^{\Phi_b}(eAp+\frac{e^2}{2}A^2)d\Phi-\frac{i}{pK}\int_{\Omega_a}^{\Omega_b}(eBp+\frac{e^2}{2}B^2)d\Omega+\frac{e}{2pK}\,(K\theta)\,(B_b-B_a)\theta\\
&\times\left[\frac{1}{2}(p\theta+m\theta^5)+\frac{e}{4}(B_a+B_b)\theta-\frac{e}{4pK}\left[p(B_a+B_b)+eB_aB_b\right]K\theta\right]\chi+\\
&\frac{e}{2pk}\,(k\theta)\,(A_b-A_a)\theta\left[\frac{1}{2}(p\theta+m\theta^5)+\frac{e}{4}(A_a+A_b)\theta-\frac{e}{4pk}\left[p(A_a+A_b)+\right.\right.\\
&\left.\left.\left.eA_aA_b\right]k\theta\right]\chi\ \right\}\Big|_{\theta=0}
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

Intégrons sur le temps propre Grassmannien χ, il vient

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b,x_a) &= \exp(i\gamma^n\frac{\partial_g}{\partial\theta^n})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\left\{\frac{1}{2}(p\theta+m\theta^5)\left[1+\frac{e}{2pk}k\theta(A_b-A_a)\theta+\right.\right.\\
&\left.\frac{e}{2pK}K\theta(B_b-B_a)\theta\right]+\frac{e}{4}(A_a+A_b)\theta-\frac{e}{4pk}\left[p(A_b+A_a)+eA_aA_b\right]k\theta+\\
&\frac{e}{4}(B_a+B_b)\theta-\frac{e}{4pK}\left[p(B_b+B_a)+eB_aB_b\right]K\theta+\\
&\left.\frac{e}{8pk}(A_b+A_a)\theta\,(k\theta)\,(A_b-A_a)\theta+\frac{e}{8pK}(B_b+B_a)\theta\,(K\theta)\,(B_b-B_a)\theta\ \right\}\Big|_{\theta=0}\\
&\exp\left\{ip\,(x_b-x_a)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}(eAp+\frac{g^2}{2}A^2)d\varphi-\right.\\
&\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}(gBp+\frac{e^2}{2}B^2)d\lambda\right\}
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

En utilisant l'identité

$$
\exp(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n})f\,(\theta)\mid_{\theta=0}=f(\frac{\partial_l}{\partial\xi})\exp(i\gamma_n\xi^n)\mid_{\xi=0}
\tag{2.85}
$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
S\ (x_b, x_a) \;=\; & \exp(i\gamma^n \frac{\partial_g}{\partial\theta^n}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \Big\{ (p_\mu \frac{\partial_l}{\partial\xi_\mu} + im\gamma^5) \Big[1 + \frac{e}{2pk} k_\nu (A^b_\sigma - A^a_\sigma) \frac{\partial_l^2}{\partial\xi_\nu \partial\xi_\sigma} + \\
& \frac{e}{2pK} K_\nu (B^b_\sigma - B^a_\sigma) \frac{\partial_l^2}{\partial\xi_\nu \partial\xi_\sigma} \Big] + \frac{e}{2}(A^b_\mu + A^a_\mu) \frac{\partial_l}{\partial\xi_\mu} + \frac{e}{2}(B^b_\mu + B^a_\mu) \frac{\partial_l}{\partial\xi_\mu} - \\
& \frac{e}{2pk} \left[p(A_b + A_a) + eA_aA_b \right] k_\mu \frac{\partial_l}{\partial\xi_\mu} - \frac{e}{2pK} \left[p(B_b + B_a) + eB_aB_b \right] K_\mu \frac{\partial_l}{\partial\xi_\mu} + \\
& \frac{e}{4pk}(A^b_\mu + A^a_\mu) k_\nu (A^b_\sigma - A^a_\sigma) \frac{\partial_l^3}{\partial\xi_\mu \partial\xi_\nu \partial\xi_\sigma} + \exp(i\gamma_\mu \xi^\mu) \frac{e}{4pk}(B^b_\mu + B^a_\mu) k_\nu (B^b_\sigma - B^a_\sigma) \\
& \times \frac{\partial_l^3}{\partial\xi_\mu \partial\xi_\nu \partial\xi_\sigma} \Big\} \exp\Big\{ ip\,(x_b - x_a) + i\lambda(p^2 - m^2) - \frac{i}{pk} \int_{ky}^{kx} (eAp + \frac{e^2}{2} A^2) d\Phi - \\
& \frac{i}{pK} \int_{Ky}^{Kx} (eBp + \frac{e^2}{2} B^2) d\Omega \Big\}_{\xi=0}
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

Notons que la dérivation par rapport à ξ_5 donne simplement la matrice $i\gamma^5$.

Développons l'exponentielle $\exp(i\gamma_\mu \xi^\mu)$ comme suit

$$
\exp(i\gamma_\mu \xi^\mu) = 1 - i\xi_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2} \xi_\mu \xi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - \frac{i}{6} \xi_\mu \xi_\nu \xi_\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \gamma^5 \tag{2.87}
$$

Puis effectuons la dérivation par rapport à ξ_μ, et utilisons la relation

$$
\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} = 2AB
$$

Avec

$$
\not{A} = A_\mu \widetilde{\gamma}^\mu
$$

La fonction de Green $S(x_b, x_a)$ devient

$$
\begin{aligned}
S\,(x_b, x_a) \;=\; & \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\lambda \Big\{ (\not{p} + m\gamma^5) \left[1 - \frac{e}{2pk} \not{k}(\not{A}_b - \not{A}_a) - \frac{e}{2pK} \not{K}(\not{B}_b - \not{B}_a) \right] + \\
& e\not{A}_b + e\not{B}_b + \frac{e^2}{2pk} \not{k}\not{A}_a\not{A}_b + \frac{e^2}{2pK} \not{K}\not{B}_a\not{B}_b - \frac{e}{pk} \not{k} pA_b - \frac{e}{pK} \not{K} pB_b - \\
& \frac{e^2}{pk} \not{k} A_aA_b - \frac{e^2}{pK} \not{K} B_aB_b \Big\} \exp\Big\{ ip\,(x_b - x_a) + i\frac{\lambda}{2}(p^2 - m^2) - \\
& \frac{i}{pk} \int_{kx_a}^{kx_b} (eAp + \frac{e^2}{2} A^2) d\Phi - \frac{i}{pK} \int_{Kx_a}^{Kx_b} (eBp + \frac{e^2}{2} B^2) d\Omega \Big\}
\end{aligned} \tag{2.88}
$$

Sachant que

$$S\ \left(x_b,x_a\right)=\widetilde{S}^c\left(x_b,x_a\right)\gamma^5$$

$$\widetilde{\gamma}^\mu=\gamma^5\gamma^\mu$$

$$\left[\gamma^\mu,\gamma^5\right]_+=0,\quad \left(\gamma^5\right)^2=-1$$

Multiplions à droite les deux membres de (2.79) par γ^5 (pour enlever le tilde)et changeons l'impulsion p en $-p$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c\left(x_b,x_a\right) &= \frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\Big\{(\not p+m)\left[1+\frac{e}{2pk}\not k(\not A_b-\not A_a)+\frac{e}{2pK}\not K(\not B_b-\not B_a)\right]- \\ & e\not A_b-e\not B_b+\frac{e^2}{2pk}\not k\not A_a\not A_b+\frac{e^2}{2pK}\not K\not B_a\not B_b+\frac{e}{pk}\not kpA_b+\frac{e}{pK}\not KpB_b- \\ & \frac{e^2}{pk}\not kA_aA_b-\frac{e^2}{pK}\not KB_aB_b\Big\}\exp\Big\{-ip\left(x_b-x_a\right)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)- \\ & \frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}(eAp-\frac{e^2}{2}A^2)d\Phi-\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}(eBp-\frac{e^2}{2}B^2)d\Omega\Big\}\end{aligned}\tag{2.89}$$

Symétrisons cette expression à l'aide de la relation

$$(\not p+m)\left[1+\frac{e}{2\left(pk\right)}\not k(\not A_b-\not A_a)+\frac{e}{2\left(pK\right)}\not K(\not B_b-\not B_a)\right]=$$

$$(\not p+m)\left[1+\frac{e}{2\left(pk\right)}\not k\not A_b+\frac{e}{2\left(pK\right)}\not K\not B_b\right]\left[1-\frac{e}{2\left(pk\right)}\not k\not A_a-\frac{e}{2\left(pK\right)}\not K\not B_a\right]=$$

$$\begin{aligned}= &\left[1+\frac{e}{2pk}\not k\not A_b+\frac{e}{2pK}\frac{e}{2\left(pK\right)}\not K\not B_b\right](\not p+m)\left[1-\frac{e}{2pk}\not k\not A_a-\frac{e}{2pK}\not K\not B_a\right]+ \\ & e\not A_b+e\not B_b-\frac{e}{(pk)}\not k\left(pA_b\right)-\frac{e}{(pK)}\not K\left(pB_b\right)+\frac{e^2}{(pk)}\not k\left(A_aA_b\right)+ \\ & \frac{e^2}{(pK)}\not K\left(B_aB_b\right)-\frac{e^2}{2\left(pk\right)}\not k\not A_a\not A_b-\frac{e^2}{2\left(pK\right)}\not K\not B_a\not B_b\end{aligned}\tag{2.90}$$

On obtient la forme symétrique de la fonction de Green

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= \frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\lambda\left[1+\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_b+\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_b\right](\not{p}+m)\left[1-\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_a-\right.\\ &\left.\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_a\right]\exp\left\{-ip(x_b-x_a)+i\frac{\lambda}{2}(p^2-m^2)-\right.\\ &\left.\frac{i}{(pk)}\int_{kx_a}^{kx_b}(e(Ap)-\frac{e^2}{2}A^2)d\Phi-\frac{i}{(pK)}\int_{Kx_a}^{Kx_b}(e(Bp)-\frac{e^2}{2}B^2)d\Omega\right\} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Finalement l'intégration sur le temps propre λ donne la forme définitive du propagateur

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x,y) &= -\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[1+\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_b+\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}\left[1-\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_a-\right.\\ &\left.\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_a\right]\exp\left\{-ip(x_b-x_a)-\frac{i}{(pk)}\int_{kx_a}^{kx_b}(e(Ap)-\frac{e^2}{2}A^2)d\Phi-\right.\\ &\left.\frac{i}{(pK)}\int_{Kx_a}^{Kx_b}(e(Bp)-\frac{e^2}{2}B^2)d\Omega\right\} \end{aligned} \tag{2.92}$$

2.4 Fonctions d'onde et spèctre d'energie

La détermination des fonctions d'onde s'effectue en appliquant le théorème des résidus. Les pôles de la fonction de Green sont les énergies positives et négatives données respectivement par :

$p_+^0 = \omega - i\varepsilon$ et $p_-^0 = -\omega + i\varepsilon$, $\omega = \sqrt{p^2+m^2}$ étant l'énergie d'une particule libre.

Pour les énergies positives p_+^0 le contour d'intégration est choisi en dessous de l'axe des réels avec $t_b \succ t_a$ afin d'assurer la convergence (pour que l'intégrale puisse s'annule à l'infini). Par contre, le contour d'intégration pour les énergies négatives est choisi au dessus de l'axe des réels avec cette fois ci $t_b \prec t_a$.

L'application du théorème des résidus (l'intégration sur p^0) donne

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= -i\theta(t_b-t_a)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{m}{p^0})\left[1+\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_b+\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(\not{p}+m)}{2m}[1-\\
&\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_a-\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_a\Big]\exp\left\{-ip(x_b-x_a)-\frac{i}{(pk)}\int_{kx_a}^{kx_b}\left[e(pA)-\frac{e^2}{2}A^2\right]d\Phi-\right.\\
&\left.\frac{i}{(pK)}\int_{Kx_a}^{Kx_b}\left[e(pB)-\frac{e^2}{2}B^2\right]d\Omega\right\}-i\theta(t_a-t_b)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{m}{p^0})\left[1-\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_b-\right.\\
&\left.\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(-\widehat{p}+m)}{2m}\left[1+\frac{e}{2(pk)}\not{k}\not{A}_a+\frac{e}{2(pK)}\not{K}\not{B}_a\right]\exp\{-ip(x_b-x_a)-\\
&\left.\frac{i}{(pk)}\int_{kx_a}^{kx_b}\left[e(pA)-\frac{e^2}{2}A^2\right]d\Phi-\frac{i}{(pK)}\int_{Kx_a}^{Kx_b}\left[e(pB)-\frac{e^2}{2}B^2\right]d\Omega\right\}
\end{aligned}$$

En utilisant les opérateurs de projection sur les états d'énergies positives et négatives

$$\Lambda_+=\sum_{\pm s}u(p,s)\overline{u}(p,s)=\frac{\not{p}+m}{2m}$$

$$\Lambda_-=-\sum_{\pm s}v(p,s)\overline{v}(p,s)=\frac{-\not{p}+m}{2m}$$

L'expression du propagateur $S(x_b,x_a)$ se décompose respectivement en fonction d'onde $\Psi^+_{s,p}(x)$ d'énergie positive et $\Psi^-_{s,p}(x)$ d'énergie négative

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= -i\theta(t_b-t_a)\int d^3p\sum_{\pm s}\Psi^{(+)}_{s,p}(x_b)\overline{\Psi}^{(+)}_{s,p}(x_a)\\
&+i\theta(t_b-t_a)\int d^3p\sum_{\pm s}\Psi^{(-)}_{s,p}(x_b)\overline{\Psi}^{(-)}_{s,p}(x_a)
\end{aligned}\tag{2.93}$$

Les fonctions d'onde normalisées décrivant le mouvement de particule de Dirac en interaction avec une onde plane se déduisent comme

$$\begin{aligned}
\Psi^{(+)}_{s,p}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}\right]\left[1+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}\right]u(p,s)\\
&\times\exp\left\{-ipx-\frac{i}{pk}\int_{kx_0}^{kx}\left[epA-\frac{e^2}{2}A^2\right]d\Phi-\frac{i}{pK}\int_{Kx_0}^{Kx}\left[epB-\frac{e^2}{2}B^2\right]d\Omega\right\}
\end{aligned}\tag{2.94}$$

$$\Psi^{(-)}_{s,p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}\right]\left[1-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}\right]v(p,s) \times \exp\left\{ipx - \frac{i}{pk}\int_{kx_0}^{kx}\left[epA+\frac{e^2}{2}A^2\right]d\Phi - \frac{i}{pK}\int_{Kx_0}^{Kx}\left[epB+\frac{e^2}{2}B^2\right]d\Omega\right\} \tag{2.95}$$

Où $\omega = [\mathbf{p}^2 + m^2]^{\frac{1}{2}}$

$u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont les spineurs vérifiant l'équation de Dirac libre et tels que

$$\overline{u}(p,s)u(p,s) = 1$$

$$\overline{v}(p,s)v(p,s) = -1$$

Ce résultat est en total accord avec celui de la littérature[5].

2.5 Conclusion

Nous avons ainsi réussi d'extraire les fonctions d'ondes ainsi que le spèctre d'énergie tel qu'il existe dans la littérature et ceci peut être vérifié par la méthode d'élimination des champs succéssifs.

Chapitre 3

Fonction de Green pour une particule de Dirac chargée dans un champ composé de deux champs d'ondes planes et orthogonales (Technique d'Alexandrou et al. dite Projection Globale) :

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de considérer suivant le formalisme d'Alexandrou et al.[4] et ceci dans sa projection dite globale, le mouvement d'une particule spinorielle (spin $\frac{1}{2}$) relativiste chargée sous l'action de deux champs d'ondes planes et orthogonales, en prenant les mêmes conditions prises par [5].

Nos résultats sont comparés ensuite à ceux de [5] obtenus par la résolution d'équations différentielles (équation d'onde).

Ainsi notre travail consiste à construire d'abord la fonction de Green pour le problème en question via un formalisme d'intégrales de chemin puis ensuite là calculer pour finalement donner les fonctions d'ondes et le spèctre d'énergie.

Alexandrou et al.[4] propose deux manières différentes de calcul pour la fonction de Green qui sont :

-La représentation globale,

-La représentation locale.

3.2 Construction du propagateur

La fonction de Green causale de notre particule de Dirac chargée de charge e dans le champ de deux ondes planes électromagnétiques s'écrit :

$$\hat{S} = \frac{1}{\hat{\not{\Pi}} - m + i\,\varepsilon} \tag{3.1}$$

Il est intéressant de noter que dans le problème de la particule sans spin (chapitre 1), pour avoir la forme intégrale de chemins, les quantités présentes dans l'exponentiel doivent être des variables bosoniques.

Pour cela Fradkin et Gitman ont due introduire par multiplication une matrice γ^5 au dénominateur et ceci pour homogénéiser le dénominateur et le rendre une somme de variables bosoniques.

Comme il a été remarqué par Alexandrou et al., sans la matrice γ^5,le formalisme peut être allégé .

Multipliant donc le numérateur et le dénominateur de la fonction de Green causale de Dirac par le conjugué du dénominateur, on obtient alors, une fonction de Green causale avec un dénominateur bosonique (homogène, dont les termes sont des variables bosoniques) et un numérateur fermionique (non homogène), on obtient ainsi :

$$\hat{S} = \frac{1}{\hat{\not{\Pi}} - m + i\varepsilon} = \left(\hat{\not{\Pi}} + m\right) \frac{1}{\hat{\not{\Pi}}^2 - m^2 + i\varepsilon} \,, \tag{3.2}$$

Et en usant de la technique du temps propre de Schwinger, on obtient :

$$\hat{S} = \frac{1}{\hat{\not{\Pi}} - m + i\varepsilon} = \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda \left(\hat{\not{\Pi}} + m\right) \exp\left(-i\frac{m^2}{2}\lambda\right) \exp\left(i\frac{\hat{\not{\Pi}}^2}{2}\lambda\right) \tag{3.3}$$

On remarque avec cette forme qu'on a aménagé notre fonction de Green de la particule chargée spinorielle en deux parties distinctes :

- L'une $\exp\left(i\frac{\left(\hat{\not{\Pi}}^2 - m^2\right)}{2}\lambda\right)$ est sous forme exponentielle, de nature bosonique, acceptable pour une description de l'évolution de notre système.

- L'autre, $\left(\hat{\not{\Pi}} + m\right)$ est un facteur jouant le rôle d'un projecteur éliminant tout état superflu venant de l'évolution totale du système .

C'est la définition de la projection globale définit par Alexandrou et al.

On remarque bien que pour passer à la représentation intégrale de chemins de notre fonction de Green, le facteur $\left(\hat{\not{\Pi}} + m\right)$ poserait problème et on voit aussi bien que la projection globale est une projection statique ne dépendant pas du temps propre, temps caractérisant l'évolution, mais alors ce facteur est un projecteur qui élimine les états superflus non physique, d'où le sens de la dénomination dite globale.

Ainsi, la différence entre la projection globale et l'autre projection qu'on appelle projection locale est la présence en projection locale d'un opérateur de projection dont le rôle est d'éliminer à chaque instant, et donc d'une manière dynamique, les états non physiques dans l'exponentielle et accompagnant le temps propre donc l'évolution.

Revenons à notre travail et à partir de (3.3), la dynamique de notre système est donnée par l'hamiltonien

$$\hat{H}(\widehat{\Pi}, \widehat{X}, \gamma) = \frac{-1}{2}\hat{\not{\Pi}}^2 = \frac{-\widehat{\Pi}^2}{2} + \frac{i}{4}e\ \hat{F}_{\mu\nu}(\widehat{X})\gamma^\mu\gamma^\nu, \tag{3.4}$$

La fonction de Green relative à une particule de Dirac chargée en interaction avec un champ extérieur composé de deux champs d'ondes planes est donnée par

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_b, x_a) &= \frac{-i}{2}\int d^4z\ \langle x_b \mid \left(\hat{\not{p}} - e\ \hat{\not{A}} - e\ \hat{\not{B}} + m\right) \mid z\rangle \int_0^\infty d\lambda \exp\left(\frac{-im^2\lambda}{2}\right) \\ \times\langle z &\mid \exp\left(-i\hat{H}\lambda\right) \mid x_a\rangle\end{aligned}$$

$$= \frac{-i}{2}(i\not{\partial}_{x_b} - e\not{A}(x_b) - e\not{B}(x_b) + m)\int_0^\infty d\lambda \exp\left(-i\frac{m^2}{2}\lambda\right)\langle x_b \mid \exp\left(-i\widehat{H}\lambda\right) \mid x_a\rangle. \qquad (3.5)$$

Ensuite, l'élément de matrice $\langle x_b \mid \exp\left(-i\widehat{H}\lambda\right) \mid x_a\rangle$, qui représente un opérateur d'évolution sous la forme intégrale de chemins, s'écrit comme suit[4].

$$\begin{aligned}\langle x_b \quad \mid \quad \exp\left(-i\hat{H}\lambda\right) \mid x_a\rangle &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_{x(0)=x_a}^{x(\lambda)=x_b} DxDpD\xi N^{spin} \\ &\times \exp\left\{-i\int_0^\lambda d\tau\left[p.\dot{x} - i\xi.\dot{\xi} + \mathcal{H}\left(\pi, x, 2\xi + \Gamma\right)\right]\right\}_{\Gamma=0}, \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Où

N^{spin} est un facteur de normalisation pour l'intégrale du spin

$$N^{spin} = \left[\int D\xi \exp\left(-\int_0^\lambda d\tau \xi_\mu(\tau)\dot{\xi}^\mu(\tau)\right)\right]^{-1},$$

et en utilisant la condition anti périodique (caractéristique du spin) dite aux limites pour les variables Grassmanniennes ξ et qui est

$$\xi_\mu(0) + \xi_\mu(\lambda) = 0. \qquad (3.7)$$

avec le changement suivant

$$\zeta_\mu(\tau) = \frac{1}{2}\Gamma_\mu + \xi_\mu(\tau). \qquad (3.8)$$

s'écrit

$$\zeta_\mu(0) + \zeta_\mu(\lambda) = \Gamma_\mu, \qquad (3.9)$$

Et l'expression finale de la fonction de Green, après un déplacement de l'intégration de p à π est alors

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c\left(x_b, x_a\right) \quad &= \quad -\frac{i}{2}(i\not{\partial}_{x_b} - e\not{A}(x_b) - e\not{B}(x_b) + m)\exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda \exp\left(-i\frac{m^2}{2}\lambda\right)N^{spin} \\ &\times \int DxD\pi D\zeta \exp\left\{-i\int_0^\lambda d\tau\left[\left(\pi + e\ A(x) + e\ B(x)\right).\dot{x} - i\zeta.\dot{\zeta} + \right.\right. \\ &\left.\left.\mathcal{H}(\pi, x, 2\zeta)\right] + \zeta(0).\zeta(\lambda)\right\}\Big|_{\Gamma=0}, \qquad (3.10)\end{aligned}$$

En effectuant le changement suivant $\pi \rightarrow \pi + \dot{x}$, on obtient alors la fonction de Green

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= -\frac{i}{2}(i\not\partial_{x_b} - e\not A(x_b) - e\not B(x_b) + m)\exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda\; N(\lambda)\exp\left(-\frac{i}{2}m^2\lambda\right)\\ &\times\int DxD\zeta\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau(-\frac{1}{2}\dot{x}^2 + i\zeta\dot{\zeta} - e\dot{x}A(x) - e\dot{x}B(x) + i\zeta\dot{\zeta} -\right.\\ &\left. ieF_{\mu\nu}(x)\zeta^\mu\zeta^\nu) - i\zeta(0)\zeta(\lambda)\right\}\Big|_{\Gamma=0}, \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Où $N(\lambda)$ étant un facteur de normalisation défini par

$$N(\lambda) = \left[\int D\zeta\exp\left(\zeta(0)\zeta(\lambda) - \int_0^\lambda d\tau\zeta\dot{\zeta}\right)\right]^{-1}\int D\pi\exp\left(i\int_0^\lambda d\tau\frac{\pi^2}{2}\right). \qquad (3.12)$$

De cette dernière forme, l'action et le Lagrangien de notre problème sont extraite et ainsi données par

$$A[x,\zeta] \equiv \int_0^\lambda d\tau\; L\left(x,\dot{x},\zeta,\dot{\zeta}\right) - i\zeta(0)\zeta(\lambda) \qquad (3.13)$$

tel que

$$L\left(x,\dot{x},\zeta,\dot{\zeta}\right) = -\frac{1}{2}\dot{x}^2 + i\;\zeta\dot{\zeta} - e\;\dot{x}\;A(x) - e\;\dot{x}\;B(x) - ieF_{\mu\nu}(x)\zeta^\mu\zeta^\nu \qquad (3.14)$$

Les deux premiers termes dans le Lagrangien correspondent, respectivement aux contributions des degrés de liberté orbitaux et ceux du spin à l'énergie cinétique, cependant les deux derniers termes du lagrangien sont les contributions du couplage du champ des photons au courant de convection de l'électron et à son courant de spin.

3.3 Evaluation de la fonction de Green d'une particule de Dirac soumise aux deux champs d'ondes planes et orthogonales (représentation dite globale)

La dynamique du système se détermine alors par le calcul de la fonction de Green

$$\tilde{S}^c(x_b,x_a) = \frac{-i}{2}\left(i\not\partial_{x_b} - e\not A(x_b) - e\not B(x_b) + m\right)S\;(x_b,x_a), \qquad (3.15)$$

Où

$$\begin{aligned}S\left(x_b,x_a\right) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^{\infty}d\lambda\int DxD\pi D\zeta \\ &\times\exp\left\{i\int_0^{\lambda}\left[\frac{-1}{2}\dot{x}^2+i\zeta\dot{\zeta}-e\dot{x}A\left(x\right)-e\dot{x}B\left(x\right)-ieF_{\mu\nu}(x)\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}\right.\right. \\ &\left.+\frac{\pi^2-m^2}{2}\right]d\tau\ +\zeta\left(0\right)\zeta\left(\lambda\right)\}|_{\Gamma=0}\,,\end{aligned}\tag{3.16}$$

Est le propagateur à déterminer, puis on l'injecte dans la formule (3.15) pour ainsi obtenir notre fonction de Green.

A cause du fait remarquable de la dépendance unique de l'onde plane sur la seule variable $(k.x)$, de ce fait, on procède à la réduction du problème d'un problème quadri dimensionnel pas aussi claire à résoudre au même problème mais cette fois unidimensionnel pour chacune des ondes planes, on introduit alors une variable unidimentionnelle $\Phi=k.x$ pour l'onde plane $A\left(x\right)=A\left(k.x\right)=A\left(\Phi\right)$ et une autre $\Omega=K\ x$ pour l'onde plane $B\left(x\right)=B\left(K.x\right)=B\left(\Omega\right)$ par l'introduction des deux identités suivantes

$$\int d\Phi_a\int d\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\int Dp_{\Phi}\int D\Phi\exp\left[i\int_0^{\lambda}p_{\Phi}\left(\dot{\Phi}-k\dot{x}\right)d\tau\right]=1,\tag{3.17}$$

Et

$$\int d\Omega_a\int d\Omega_b\delta\left(\Omega_a-Kx_a\right)\int Dp_{\Omega}\int D\Omega\exp\left[i\int_0^{\lambda}p_{\Omega}\left(\dot{\Omega}-K\dot{x}\right)d\tau\right]=1,\tag{3.18}$$

Alors,

$$\begin{aligned}S\left(x_b,x_a\right) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^{\infty}d\lambda\int d\Phi_ad\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\int d\Omega_ad\Omega_b\delta\left(\Omega_a-Kx_a\right) \\ &\times\int DxD\pi Dp_{\Phi}D\Phi Dp_{\Omega}D\Omega D\zeta \\ &\times\exp\left\{i\int_0^{\lambda}\left[\frac{-1}{2}\dot{x}^2+i\zeta\dot{\zeta}-\dot{x}\ \left(e\ A\left(kx\right)+e\ B\left(Kx\right)+kp_{\Phi}+Kp_{\Omega}\right)-\right.\right. \\ &\left.\left.ieF_{\mu\nu}(x)\zeta^{\mu}\zeta^{\nu}+\frac{\pi^2-m^2}{2}+p_{\Phi}\dot{\Phi}+p_{\Omega}\dot{\Omega}\right]d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(\lambda\right)\right\}\Big|_{\Gamma=0}\,,\end{aligned}\tag{3.19}$$

Où l'action est

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\lambda \left[\frac{-1}{2}\dot{x}^2 + i\,\zeta\dot{\zeta} - \dot{x}(e\,A\,(kx) + e\,B\,(Kx) + kp_\Phi + Kp_\Omega) - ieF_{\mu\nu}(\Phi,\Omega)\zeta^\mu\zeta^\nu + \right. \\ & \left. \frac{(\pi^2 - m^2)}{2} + p_\Phi\dot{\Phi} + p_\Omega\dot{\Omega} \right] d\tau - i\zeta\,(0)\,\zeta\,(\lambda) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Et sous sa forme discrète

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \left[-\frac{1}{2\varepsilon}\Delta x_j^2 - \Delta x_j \left(e\,A\,(kx_j) + e\,B\,(Kx_j) + kp_{\Phi_j} + Kp_{\Omega_j}\right) - ig\mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi_j)\zeta_j^\mu\zeta_j^\nu \right. \\ & \left. -ig\mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega_j)\zeta_j^\mu\zeta_j^\nu + \frac{\left(\pi_j^2 - m^2\right)}{2} + i\,\zeta_j\,\Delta\zeta_j + p_{\Phi_j}\,\Delta\Phi_j + p_{\Omega_j}\,\Delta\Omega_j \right] + \zeta\,(0)\,\zeta\,(\lambda) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Tel que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi) = \partial_\mu A_\nu\,(\Phi) - \partial_\nu A_\mu\,(\Phi) \tag{3.22}$$

Et

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega) = \partial_\mu B_\nu\,(\Omega) - \partial_\nu B_\mu\,(\Omega) \tag{3.23}$$

Avec

$$F_{\mu\nu}\,(x) = F_{\mu\nu}(\Phi,\Omega) = \mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi) + \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega) = \partial_\mu A_\nu\,(\Phi) - \partial_\nu A_\mu\,(\Phi) + \partial_\mu B_\nu\,(\Omega) - \partial_\nu B_\mu\,(\Omega) \tag{3.24}$$

Pour découpler la partie libre que contient la fonction de Green de la partie avec l'interaction, essayons tout d'abord d'éliminer le terme quadratique en $\dot{x}$, c'est pourquoi, on regroupe les termes contenant des Δx en faisant apparaitre un carré parfait en usant des identités remarquables et ceci à partir de l'expression discrète de l'action

$$-\frac{i}{2}\left[\Delta x_j^2 + 2\varepsilon\Delta x_j(e\,A\,(\Phi_j) + e\,B\,(\Omega_j) + kp_{\Phi_j} + Kp_{\Omega_j})\right] =$$

$$-\frac{i}{2}\left[\Delta x_j + \varepsilon(e\,A\,(\Phi_j) + e\,B\,(\Omega_j) + kp_{\Phi_j} + Kp_{\Omega_j})\right]^2 + \frac{i\varepsilon}{2}e^2A^2(\Phi_j) + \frac{i\varepsilon}{2}e^2B^2(\Omega_j), \tag{3.25}$$

Là, on voit la forme gaussienne apparaître, donc

$$
\begin{aligned}
\exp\left\{-i\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\Delta x_j+\varepsilon(e\ A\left(\Phi_j\right)+e\ B\left(\Omega_j\right)+kp_{\Phi_j}+Kp_{\Omega_j})\right]^2\right\} &= \\
\prod_{j=1}^{N+1}\exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\Delta x_j+\varepsilon(e\ A\left(\Phi_j\right)+e\ B\left(\Omega_j\right)+kp_{\Phi_j}+Kp_{\Omega_j})\right]^2\right\} &=
\end{aligned}
$$

$$
\left[i\left(2\pi\varepsilon\right)^2\right]^{N+1}\prod_{j=1}^{N+1}\int\frac{d^4p_j}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[\frac{i\varepsilon}{2}{p_j}^2+i\left(\Delta x_j+\varepsilon\left(e\ A\left(\Phi_j\right)+e\ B\left(\Omega_j\right)+kp_{\Phi_j}+Kp_{\Omega_j}\right)\right)p_j\right] \tag{3.26}
$$

Eliminons maintenant la variable π par intégration fonctionnelle, c'est à dire

$$
\int D\pi\exp\left\{\frac{i}{2}\int d\tau\pi^2\right\}=\lim_{N\to\infty}\prod\int\frac{d^4\pi}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\sum\frac{\varepsilon}{2}{\pi_j}^2\right]=\lim_{N\to\infty}\left[i\left(2\pi\varepsilon\right)^2\right]^{-(N+1)}
$$

Maintenant pour simplifier l'intégrale fonctionelle sur p en une intégrale simple procédant à l'astuce suivante :

$$
\sum_{j=1}^{N+1}\Delta x_j\ p_j=x_Np_{N+1}-x_0p_1+\sum_{j=1}^{N}x_j\left(p_j-p_{j+1}\right)=x_bp_{N+1}-x_ap_1+\sum_{j=1}^{N}x_j\left(p_j-p_{j+1}\right) \tag{3.27}
$$

Ainsi par ce développement, nous obtenons un terme représentant l'onde plane libre et un autre qui après intégration par rapport aux x nous donne des fonctionnelles de Dirac, qui après intégration par rapport aux p nous donnent des contraintes sur les p exprimant naturellement la conservation des quantités de mouvement au cours du temps. On obtient ainsi la partie libre représentant le propagateur de la particule libre inclue dans notre propagateur total alors que le reste représente l'interaction de la particule.

Nous obtenons alors le propagateur suivant

$$
\begin{aligned}
S(x_b,x_a) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\int d\Omega_a d\Omega_b\delta\left(\Omega_a-Kx_a\right)\int Dp_\Phi D\Phi \\
&\times\int Dp_\Omega D\Omega\int\mathcal{D}\zeta\exp\left\{ip\left(x_b-x_a\right)+\frac{i\lambda}{2}\left(p^2-m^2\right)+i\int_0^\lambda\left[e\left(Ap+\frac{e}{2}A^2\right)+e\left(Bp+\frac{e}{2}B\right.\right.\right. \\
&p_\Phi\left(\dot\Phi+pk\right)+p_\Omega\left(\dot\Omega+pK\right)\Big]d\tau\Big\}\times\exp\left\{i\int_0^\lambda\left[i\zeta\dot\zeta-ie\mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi)\zeta^\mu\zeta^\nu-ie\mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega)\zeta^\mu\zeta^\nu\right]d\right. \\
&\zeta(0)\zeta\left(\lambda\right)\Big\}\Big|_{\Gamma=0}
\end{aligned}
$$

Enfin remarquons, comme on l'a déjà noté plus haut, que le propagateur se scinde clairement en deux parties essentielles :

La première partie est le propagateur d'une particule bosonique (spin 0) chargée baignant dans le champ composé de deux champs d'ondes planes orthogonales contenant ainsi un terme représentant l'onde plane libre et un autre terme représentant l'influence du champ extérieur sur cette particule libre.

La deuxième partie est une partie qui contient des termes fermioniques donc elle représente le spin de la particule de Dirac, un terme représentant la dynamique du spin (énergie cinétique spinorielle) et un autre terme représente aussi le couplage spin-champ.

On voit donc bien que le calcul de la première partie soit déjà fait (chapitre 1, section 1) et il nous reste que le calcul de la deuxième partie, donc l'intégration sur les termes fermioniques.

Remarquons tout d'abord que le calcul, nous amène une seconde simplification pour les deux termes contenant les tenseurs électromagnétiques pour les champs d'ondes planes

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\Phi)\zeta^{\mu}\zeta^{\nu} = 2\,(k.\zeta)\,(A'.\zeta)\,. \tag{3.31}$$

Et

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(\Omega)\zeta^{\mu}\zeta^{\nu} = 2\,(K.\zeta)\,(B'.\zeta) \tag{3.32}$$

Avec

$$A' = \frac{\partial A}{\partial \Phi} \tag{3.33}$$

Et de même

$$B' = \frac{\partial B}{\partial \Omega} \tag{3.34}$$

Et tout cela nous suggère bien, inspiré par le changement et la réduction faite auparavant à cause des caractéristiques remarquables des ondes planes, d'introduire une deuxième variable $\eta = k\ \zeta$ pour le premier champ d'ondes planes et une autre variable $\kappa = K\ \zeta$ via les deux identités suivantes

$$\int d\eta_a \int d\eta_b \delta(\eta_a - k\ \zeta_a) \int D\eta \int Dp_\eta \exp\left[i\int_0^\lambda p_\eta\left(\dot{\eta} - k\dot{\zeta}\right)d\tau\right] = 1. \qquad (3.35)$$

Et

$$\int d\kappa_a \int d\kappa_b \delta(\kappa_a - K\ \zeta_a) \int D\kappa \int Dp_\kappa \exp\left[i\int_0^\lambda p_\kappa\left(\dot{\kappa} - K\dot{\zeta}\right)d\tau\right] = 1. \qquad (3.36)$$

Rappelons nous que les seules variables fermioniques du problème sont η ,p_η ,κ ,p_κ ,ζ ,p_ζ ,ξ , p_ξ et Γ, les autres variables sont alors de type bosonique.

Le propagateur est alors,

$$\begin{aligned} S(x_b, x_a) \quad = \quad & \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b \delta\left(\Phi_a - kx_a\right)\int d\Omega_a d\Omega_b \delta\left(\Omega_a - Kx_a\right)\int Dp_\Phi D\Phi \\ & \times\int Dp_\Omega D\Omega \exp\left\{ip\left(x_b - x_a\right) + \frac{i\lambda}{2}\left(p^2 - m^2\right) + i\int_0^\lambda \left[e\left(Ap + \frac{e}{2}A^2\right) + e\left(Bp + \frac{e}{2}B^2\right) + \right.\right. \\ & \left.\left. p_\Phi\left(\dot{\Phi} + pk\right) + p_\Omega\left(\dot{\Omega} + pK\right)\right]d\tau\right\}\int d\eta_a \int d\eta_b \delta(\eta_a - k\ \zeta_a)\int D\eta \int Dp_\eta \\ & \int d\kappa_a \int d\kappa_b \delta(\kappa_a - K\ \zeta_a)\int D\kappa \int Dp_\kappa D\zeta \delta(\kappa_a - K\ \zeta_a)\int D\kappa Dp_\kappa D\zeta \\ & \exp\left\{i\int_0^\lambda \left[-2ie\eta(A'.\zeta) - 2ie\kappa(B'.\zeta) + \ i\zeta\dot{\zeta} + p_\eta\left(\dot{\eta} - k\dot{\zeta}\right) + p_\kappa\left(\dot{\kappa} - K\dot{\zeta}\right)\right]d\tau + \zeta(0)\zeta\left(\lambda\right.\right. \end{aligned}$$

A cause de la contrainte (contrainte anti périodique) sur les variables Grassmanniennes ζ l'intégration sur ces variables n'est pas aussi évidente , c'est pourquoi, on les libère, par une technique dite de vitesses, soit alors la transformation de vitesse suivante

$$\zeta^\mu(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \varepsilon\left(\tau - \tau'\right)\omega\left(\tau'\right)d\tau' + \frac{\Gamma^\mu}{2}, \qquad (3.37)$$

Remarquons, que la transformation est dite celle d'une vitesse à cause de la dérivé qui existe et ceci, est par analogie avec la définition classique d'une vitesse :

$$\omega\left(\tau\right) = \dot{\zeta}\left(\tau\right), \qquad (3.38)$$

$\omega(\tau)$ étant donc une vitesse mais garde la même nature Grassmannienne impaire que la coordonnée (la trajectoire) $\zeta(t)$.

Sachant que $\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)$, est la fonction signe, Les conditions de bords donnent alors

$$\zeta^{\mu}\left(0\right)=\frac{-1}{2}\int_{0}^{\lambda}\omega^{\mu}\left(\tau\right)d\tau+\frac{\Gamma^{\mu}}{2}, \tag{3.39}$$

$$\zeta^{\mu}\left(\lambda\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\lambda}\omega^{\mu}\left(\tau\right)d\tau+\frac{\Gamma^{\mu}}{2}, \tag{3.40}$$

On remarque bien que la condition dite aux limites n'est pas perdue mais elle existera implicitement.

Ainsi, nous pourrons faire d'intégration et on voit alors qu'un terme quadratique en $\omega(\tau)$ est apparu dans l'action suite à cette transformation.

Notre fonction de Green causale est alors

$$\begin{aligned}
S(x_b,x_a) \;=\; & \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_{0}^{\infty}d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\int d\Omega_a d\Omega_b\delta\left(\Omega_a-Kx_a\right)\int Dp_{\Phi}D\Phi \\
& \int Dp_{\Omega}D\Omega\exp\left(A^0\right)\left(\sqrt{\det\varepsilon}\right)^{-1}\int d\eta_a d\eta_b\delta(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\Gamma)) \\
& \times\int D\eta Dp_{\eta}\int d\kappa_a d\kappa_b\delta(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\Gamma))\int D\kappa Dp_{\kappa}D\omega \\
& \times\exp i\int_{0}^{\lambda}d\tau-ie\eta A'(\varepsilon\omega+\Gamma)-ie\kappa B'(\varepsilon\omega+\Gamma)+p_{\eta}\left(\dot{\eta}-k\omega\right)+ \\
& p_{\kappa}\left(\dot{\kappa}-K\dot{\zeta}\right)-\frac{i}{2}\omega\varepsilon\omega\Big|_{\Gamma=0}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Effectuons la transformation suivante

$$\omega^{\mu}(\tau)\longrightarrow\omega^{\mu}(\tau)-ik^{\mu}\int\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')p_{\eta}(\tau')d\tau'-iK^{\mu}\int\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')p_{\kappa}(\tau')d\tau' \tag{3.42}$$

Alors, on aura les transformations linéaire et bilinéaire suivantes

$$\varepsilon\omega^{\mu}\;\longrightarrow\;\varepsilon\omega^{\mu}-2ip_{\eta}k^{\mu}-2ip_{\kappa}K^{\mu}, \tag{3.43}$$

$$-\frac{i}{2}\omega\varepsilon\omega\;\longrightarrow\;-\frac{i}{2}\omega\varepsilon\omega+p_{\eta}k\omega+p_{\kappa}K\omega, \tag{3.44}$$

Le propagateur S devient donc

$$\begin{aligned} S(x_b,x_a) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int\limits_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\int d\Omega_a d\Omega_b\delta\left(\Omega_a-Kx_a\right)\int Dp_\Phi D\Phi \\ &\int Dp_\Omega D\Omega\exp\left(A^0\right)\left(\sqrt{\det\varepsilon}\right)^{-1}\int d\eta_a d\eta_b\delta(\eta_a+\frac{k}{2}(\omega-\Gamma)) \\ &\times\int D\eta Dp_\eta\int d\kappa_a d\kappa_b\delta(\kappa_a+\frac{K}{2}(\omega-\Gamma))\int D\kappa Dp_\kappa D\omega \\ &\times\exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[-ie\eta A'(\varepsilon\omega+\Gamma)-ie\kappa B'(\varepsilon\omega+\Gamma)+p_\eta\dot\eta+p_\kappa\dot\kappa-\frac{i}{2}\omega\varepsilon\omega\right]\right\}\Bigg|_{\Gamma=0} \end{aligned} \tag{3.45}$$

L'intégration sur les p_η puis successivement sur les p_κ fait apparaître des fonctionnelles de Dirac

$$\int Dp_\eta\exp\left(i\int_0^\lambda p_\eta\dot\eta d\tau\right)=\delta\left(\dot\eta\right). \tag{3.46}$$

Et

$$\int Dp\kappa\exp\left(i\int_0^\lambda p_\kappa\dot\kappa d\tau\right)=\delta\left(\dot\kappa\right). \tag{3.47}$$

Ces fonctionnelles de Dirac, qui sont des contraintes sur les chemins vont imposer pour le calcul du propagateur principalement leurs contributions. Ces chemins classiques ont pour équations les arguments des deuxs fonctionnelles de Dirac précédemment citées en haut, données par

$$\dot\eta=0\Longleftrightarrow\ \eta=\eta_a=cte,$$

Et

$$\dot\kappa=0\Longleftrightarrow\kappa=\kappa_a=cte, \tag{3.48}$$

C'est à dire des droites .

En remplaçant les fonctionnelles de Dirac par leurs versions exponentielles et réarangeons les termes en ω dans l'argument de l'exponentiel, on obtient alors

$$\begin{aligned} S(x_b, x_a) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b\delta\left(\Phi_a - kx_a\right)\int d\Omega_a d\Omega_b\delta\left(\Omega_a - Kx_a\right)\int Dp_\Phi D\Phi \\ & \int Dp_\Omega D\Omega\exp\left(A^0\right)\left(\sqrt{\det\varepsilon}\right)^{-1}\int d\eta_a d\eta_b\delta\left(\eta_b - \eta_a\right)dp_{\eta_a}dp_{\kappa_a} \\ & \times\int d\kappa_a d\kappa_b\delta(\kappa_b - \kappa_a)D\omega \\ & \times\exp\left\{\int_0^\lambda d\tau\left[\frac{1}{2}\omega\varepsilon\omega + (e\eta_a(A' + B')\varepsilon + \frac{i}{2}p_{\eta_a}k + \frac{i}{2}p_{\kappa_a}K\right)\right]\omega + \\ & ip_{\eta_a}\eta_a + ip_{\kappa_a}\kappa_a - ip_{\eta_a}\Gamma - ip_{\kappa_a}\Gamma]\}_{\Gamma=0} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Posons

$$\mathcal{J}_\mu(\tau) = \frac{e}{2}\eta_a\int A'_\mu(\Phi(\tau'))\varepsilon(\tau'-\tau)d\tau' + \frac{e}{2}\kappa_a\int B'_\mu(\Omega(\tau'))\varepsilon(\tau'-\tau)d\tau' + \frac{i}{2}k_\mu p_{\eta_a} + \frac{i}{2}K_\mu p_{\kappa_a} \tag{3.50}$$

Ainsi, la forme standard

$$\int D\omega\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda\omega_\mu(\tau)\varepsilon(\tau-\tau')\omega^\mu(\tau')d\tau d\tau' + \int_0^\lambda\mathcal{J}_\mu(\tau)\omega^\mu(\tau)d\tau\right\} \tag{3.51}$$

$$= \sqrt{\det\varepsilon}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_0^\lambda\mathcal{J}_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^\mu(\tau')d\tau d\tau'\right\} = \sqrt{\det\varepsilon} \tag{3.52}$$

puisque

$$\mathcal{J}_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^\mu(\tau') = 0, \tag{3.53}$$

Effectuons l'intégration sur p_{η_a} mais aussi sur les p_{κ_a}

$$\int dp_{\eta_a}\exp\left[i\int_0^\lambda p_{\eta_a}\left(\eta_a - \frac{k}{2}\Gamma\right)d\tau\right] = \delta\left(\eta_a - \frac{k}{2}\Gamma\right), \tag{3.54}$$

Et

$$\int dp_{\kappa_a}\exp\left[i\int_0^\lambda p_{\kappa_a}\left(\kappa_a - \frac{K}{2}\Gamma\right)d\tau\right] = \delta\left(\kappa_a - \frac{K}{2}\Gamma\right), \tag{3.55}$$

Ainsi ces fonctions de Dirac, jouent le rôle de contraintes par leurs arguments, d'où on peut facilement conclure de la conservation des conditions aux limites .

Intégrons sur $p_\Phi$et sur p_Ω

$$\int dp_\Phi \exp\left[i\int_0^\lambda p_\Phi\left(\dot{\Phi}+pk\right)d\tau\right]=\delta\left(\dot{\Phi}+pk\right). \tag{3.56}$$

Et

$$\int dp_\Omega \exp\left[i\int_0^\lambda p_\Omega\left(\dot{\Omega}+pK\right)d\tau\right]=\delta\left(\dot{\Omega}+pK\right). \tag{3.57}$$

Les chemins qui sont présent ici sont des droites d'équations

$$\Phi(\tau)=\Phi_a-pk\tau, \tag{3.58}$$

Et

$$\Omega(\tau)=\Omega_a-pK\tau, \tag{3.59}$$

qui contribuent essentiellement au calcul du propagateur.

Maintenant, puisque le paramètre d'intégration actuel qui est le temps τ et les variables unidimensionnelles Φ et Ω sont clairement liés par les relations $d\tau=\frac{-1}{pk}d\Phi$ et $d\tau=\frac{-1}{pK}d\Omega$. Alors, nous pouvant maintenant exprimer les intégrales en fonction des variables unidimensionnelles des champs d'ondes planes, c'est-à-dire de Φ et de Ω.

Ainsi, la formule du propagateur s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} S\left(x_b,x_a\right) &= \exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right)\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\Phi_a d\Phi_b\delta\left(\Phi_a-kx_a\right)\delta\left(\Phi_b-\Phi_a+pk\lambda\right) \\ &\times\int d\Omega_a d\Omega_b\delta\left(\Omega_a-kx_a\right)\delta\left(\Omega_b-\Omega_a+pK\lambda\right)\exp\left(A^0\left(\Phi,\Omega\right)\right) \\ &\times\exp\left[-\frac{e}{2pk}(k.\Gamma)\left[A_b-A_a\right].\Gamma-\frac{e}{2pK}(K.\Gamma)\left[B_b-B_a\right].\Gamma\right]\Big|_{\Gamma=0}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

Où l'action scalaire devient

$$\begin{aligned} A^0\left(\Phi,\Omega\right) &= ip(x_b-x_a)+\frac{i\lambda}{2}(p^2-m^2)-\frac{i}{pk}\int_{\Phi_a}^{\Phi_b}d\Phi\left[eA.p+\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]- \\ &\frac{i}{pK}\int_{\Omega_a}^{\Omega_b}d\Omega\left[eB.p+\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right] \end{aligned} \tag{3.61}$$

Enfin, il nous reste qu'à faire la dérivation. Pour faciliter les calculs utilisons l'identité suivante

$$\exp\left(\gamma.\frac{\partial}{\partial\Gamma}\right) f\left(\Gamma\right)\bigg|_{\Gamma=0} = f\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\exp\left(\gamma.\xi\right)\bigg|_{\xi=0}, \tag{3.62}$$

Ainsi que le développement de l'exponentielle

$$\exp\left(\gamma.\xi\right) = 1 - \xi^{\mu}\gamma_{\mu} - \frac{1}{2}\xi_{\mu}\xi_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \frac{1}{6}\xi_{\mu}\xi_{\nu}\xi_{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + \xi_0\xi_1\xi_2\xi_3\gamma^5, \tag{3.63}$$

Le propagateur devient

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \int_0^{\infty} d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\Phi_a d\Phi_b \delta\left(\Phi_a - kx_a\right)\delta\left(\Phi_b - \Phi_a + pk\lambda\right) \\ &\times \int d\Omega_a d\Omega_b \delta\left(\Omega_a - Kx_a\right)\delta\left(\Omega_b - \Omega_a + pK\lambda\right)\exp\left(A^0\right) \\ &\times \left[1 - \frac{e}{2pk}k_{\mu}\left[A_b - A_a\right]_{\nu} - \frac{e}{2pK}K_{\mu}\left[B_b - B_a\right]_{\upsilon}\frac{\partial^2}{\partial\xi^{\mu}\partial\xi^{\nu}}\right]\exp\left[\gamma.\xi\right]\bigg|_{\xi=0}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

Et après dérivation notre propagateur est finalement donné par

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \int_0^{\infty} d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\Phi_a d\Phi_b \delta\left(\Phi_a - kx_a\right)\delta\left(\Phi_b - \Phi_a + pk\lambda\right) \\ &\times \int d\Omega_a d\Omega_b \delta\left(\Omega_a - Kx_a\right)\delta\left(\Omega_b - \Omega_a + pK\lambda\right) \\ &\times \exp\left(A^0\left(\Phi, \Omega\right)\right)\left[1 - \frac{e}{2pk}\not{k}\left(\not{A}_b - \not{A}_a\right) - \frac{e}{2pK}\not{K}\left(\not{B}_b - \not{B}_a\right)\right], \end{aligned} \tag{3.65}$$

Avec le déplacement suivant (et ceci après l'élimination des fonctions de Dirac)

$$p_{\mu} \longrightarrow -p_{\mu} + \frac{i}{\lambda}k_{\mu}p_{\Phi_b} + \frac{i}{\lambda}K_{\mu}p_{\Omega_b} \tag{3.66}$$

Notre propagateur $S\ (x_b, x_a)$ devient

$$\begin{aligned} S\ (x_b, x_a) &= \int_0^{\infty} d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[1 + \frac{e}{2pk}\not{k}\left(\not{A}_b - \not{A}_a\right) + \frac{e}{2pK}K\left(\not{B}_b - \not{B}_a\right)\right]\exp\{-ip(x_b - x_a) \\ &+ \frac{i\lambda}{2}(p^2 - m^2) - \frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}\left[eA.p - \frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]d\Phi - \\ &\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}\left[eB.p - \frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]d\Omega\Big\} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Finalement, on revient à l'expression de la fonction de Green et ceci, en injectant l'expression du propagateur (3.67) dans l'expression de la fonction de Green (3.15) , et après un petit développement, On obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{(\not{p}+m)\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}(\not{A}_b-\not{A}_a)+\frac{e}{2pK}\not{K}(\not{B}_b-\not{B}_a)\right]-\right.\\
&e\not{A}_b-\frac{e}{pk}\not{k}A_b.p+e\not{B}_b+\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_a\not{A}_b+\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{B}_a\not{B}_b-\frac{e^2}{pk}\not{k}A_a.A_b-\frac{e^2}{pK}\not{K}B_a.B_b+\\
&\left.\frac{e}{pK}\not{K}B_b.p-\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{A}_b\not{B}_b+\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{A}_b\not{B}_a-\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_b\not{B}_b+\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_a\not{B}_b\right\}\\
&\times\exp\left\{-ip(x_b-x_a)+\frac{i\lambda}{2}(p^2-m^2)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\right.\\
&\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\} \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{(\not{p}+m)\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_b+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_b\right]\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_a-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_a\right]-e\not{A}_b-\right.\\
&e\not{B}_b+\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_a\not{A}_b+\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{B}_a\not{B}_b-\frac{e^2}{pk}\not{k}A_a.A_b-\frac{e^2}{pK}\not{K}B_a.B_b+\frac{e}{pk}\not{k}A_b.p+\frac{e}{pK}\not{K}B_b.p-\\
&\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{A}_b\not{B}_b+\frac{e^2}{2pK}\not{K}\not{A}_b\not{B}_a-\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_b\not{B}_b+\frac{e^2}{2pk}\not{k}\not{A}_a\not{B}_b-\frac{e^2}{4(pk)(pK)}\not{k}\not{A}_b\not{K}\not{B}_a-\\
&\left.\frac{e^2}{4(pk)(pK)}\not{K}\not{B}_b\not{k}\not{A}_a\right\}\times\exp\left\{-ip(x_b-x_a)+\frac{i\lambda}{2}(p^2-m^2)-\right.\\
&\left.\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\} \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

En procédant à la symétrisation de notre fonction de Green, on obtient la forme symétrique en a et b, suivante

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}^c(x_b,x_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_b+\frac{e}{2pk}\not{K}\not{B}_b\right](\not{p}+m)\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_a-\frac{e}{2pk}\not{K}\not{B}_a\right]\right\}\\
&\times\exp\left\{-ip(x_b-x_a)+\frac{i\lambda}{2}(p^2-m^2)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\right.\\
&\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\} \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

Supprimons le paramètre du temps propre λ , qui n'est pas bien sûr physique mais dû essentiellement à la technique utilisée pour avoir une forme intégrale de chemins, et ceci en intégrant l'intégration ordinaire par rapport à ce paramètre du temps propre. On obtient

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_b\right]\left[1+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_a\right]\right.\\ &\times\left[1-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_a\right]\exp\left\{-ip(x_b-x_a)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\right.\\ &\left.\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\}\right. \end{aligned}\tag{3.71}$$

Qui concorde bien avec les résultats obtenus dans le chapitre précédent.

3.4 Extractions des fonctions d'ondes et spèctre d'énergie

En appliquons le théorème des résidus comme d'habitude dans ce genre de problème, les pôles de notre fonction de Green sont les énergies $p_{\pm}^0=\pm\left(\vec{p}^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Le contour d'intégration est choisi dans la moitié inférieure du plan pour les énergies positives avec $t_b \succ t_a$ et c'est exactement l'inverse pour les énergies négatives, Alors

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_b,x_a) &= -\theta(t_b-t_a)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{p^0}\right)\\ &\times\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_b\right]\left[1+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(\not{p}+m)}{2m}\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_a\right]\left[1-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_a\right]\\ &\times\exp\left\{-ip(x_b-x_a)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\right.\\ &\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right.-\theta(t_a-t_b)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{p^0}\right)\\ &\times\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_b\right]\left[1-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_b\right]\frac{(-\not{p}+m)}{2m}\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}_a\right]\left[1+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}_a\right]\\ &\times\exp\left\{-ip(x_b-x_a)-\frac{i}{pk}\int_{kx_a}^{kx_b}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\right.\\ &\left.\frac{i}{pK}\int_{Kx_a}^{Kx_b}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\}\end{aligned}$$

Avec la définition des opérateurs de projection suivante (où $u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont les spineurs libres vérifiant l'équation libre de Dirac telles que $\bar{u}(p,s)\,u(p,s)=1$ et $\bar{v}(p,s)\,v(p,s)=-1$).

$$\Lambda_+ = \sum u\,(p,s)\,\bar{u}\,(p,s) = \frac{(\not{p}+m)}{2m}$$

$$\Lambda_- = \sum v\,(p,s)\,\bar{v}\,(p,s) = \frac{(-\not{p}+m)}{2m}$$

et puisque notre fonction de Green se décompose comme suit

$$\tilde{S}^c\,(x_b,x_a) = -\theta\,(t_b-t_a)\int d^3p\sum \psi^+_{s,p}\,(x_b)\,\bar{\psi}^+_{s,p}\,(x_a) - \theta\,(t_a-t_b)\int d^3p\sum \psi^-_{s,p}\,(x_b)\,\bar{\psi}^-_{s,p}\,(x_a)$$

Alors, nos fonctions d'ondes normalisées sont

$$\begin{aligned}
\psi^+_{s,p}\,(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}\right]\left[1+\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}\right]u\,(p,s) \\
&\quad\times\exp\left\{-ipx-\frac{i}{pk}\int^{kx}d\Phi\left[eA.p-\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\frac{i}{pK}\int^{Kx}d\Omega\left[eB.p-\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^-_{s,p}\,(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{e}{2pk}\not{k}\not{A}\right]\left[1-\frac{e}{2pK}\not{K}\not{B}\right]v\,(p,s) \\
&\quad\times\exp\left\{ipx-\frac{i}{pk}\int^{kx}d\Phi\left[eA.p+\frac{1}{2}e^2A^2(\Phi)\right]-\frac{i}{pK}\int^{Kx}d\Omega\left[eB.p+\frac{1}{2}e^2B^2(\Omega)\right]\right\}
\end{aligned}$$

3.4.1 Conclusion

Nous avons ainsi réussi à extraire les fonctions d'ondes ainsi que le spèctre d'énergie tel qu'il existe dans la littérature et ceci peut être vérifié par la méthode d'élimination des champs succéssifs.

Conclusion générale

Dans ce travail : nous avons utilisé la technique des intégrales de chemins pour résoudre le problème d'une particule relativiste se déplaçant sous l'effet de l'action de la somme de deux ondes électromagnétiques qui ont été choisies planes et orthogonales. La particule étant respectivement de spin 0 et 1/2.

Pour la particule sans spin, nous avons d'abord construit le propagateur dans l'espace des phases et ensuite introduit les caractéristiques des deux ondes au moyen de deux identités afin de réduire l'espace dans lequel se meut notre particule. Aprés de simples changements de variables, des fonctions de Dirac avec des arguments des équations de la mécanique classique ont émergé naturellement et leur présence a permis de réduire énormément les intégrations et l'obtention du propagateur s'est révélée finalement facile.

Ce même propagateur a été recalculé suivant une méthode semiclassique utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi pour déterminer la fonction génératrice responsable de la transformation canonique choisie de manière à rendre l'Hamiltonien final nul, les nouvelles positions et impulsions devenant ainsi des constantes de mouvement.

Nous avons ainsi obtenu de deux manières différentes la fonction de Green.

Pour la particule de spin 1/2, à cause des variables de spin qui ont été remplacées par des variables anti commutantes de Grasmmann, le calcul du propagateur devient un peu plus compliqué. La démarche pour la détermination a été cependant la même que celle utilisée dans le cas du spin 0 : introduction de quatre identités, deux relatives aux caractéristiques des deux ondes plus deux autres relatives aux variables de spin, des changements de variables ont été effectués, des fonctions de Dirac avec des arguments des équations de la mécanique classique sont apparues et par intégration les variables de Grassamann ont été éliminées.

Le calcul a été effectué suivant deux approches

-locale de Fradkin-Gitman

-et une autre plus simple dite globale de Alexandrou et al.

Notons enfin que sans les propriétés des ondes que nous avons utilisé tout au long de ce mémoire : la condition de jauge de Lorentz et d'orthogonalité [5] des deux ondes, le calcul des propagateurs serait devenu vite inextricable.

Le cas général de deux ondes non orthogonales est cependant envisagé. Il sera examiné ultérieurement.

Bibliographie

[1] P. A. M. Dirac, Reviews of Modern Phys., 17, 2-3, (1945).

[2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys, 20, 367, (1948).

[3] E. S. Fradkin, D. M. Gitman, Phys. Rev. D 44, 3230, (1991).

[4] C. Alexandrou, R. Rosenfelder and A. W. Schreiber, arXiv :hep-th/9809101 v2, (1999).

[5] M. Pardy, arXiv :hep-ph/0408288 v1, (2004).

[6] A. O. Barut, I. H. Duru, Phys. Rev. A, 38, 11, (1988).

[7] T. Boudjedaa, L. Chetouani and L. Guechi, Physica Scripta., 46, 289, (1992).

[8] L. Landau et E. Lifchitz, "Théorie des Champs" (Mir, Moscow 1970).

[9] S. Zeggari, Thèse de Magister, Univ. Mentouri de Constantine (1999).

[10] S. Zeggari, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Czec. J. of Phys., 51, 3, 185, (2001).

[11] S. Zeggari, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Physica Scripta., 64, 285, (2001).

[12] V. G. Bagrov and D. M. Gitman, "Exactes Solutions of Relativistic Wave Equations"(Kluwer, Netherlands 1990).

[13] G. J. Papadopoulos, J. T. Devreese, Phys. Rev., D13, 2227, (1976).

[14] S. Bourouaine, Ann. Phys. (Leipzig), 14, 4, 207, (2005).

[15] S. Houat, L. Chetouani, J. Phys. A : Math. Theor., 40, 1349, (2007).

[16] J.D. Bjorken, S. D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", (McGraw-Hill,New York, 1964).

[17] P. A. M. Dirac, "The PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS", (Oxford, 1967).

[18] N. Boudiaf, L. Chetouani, Physica Scripta., 67, 369, (2003).

[19] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, "QuantumMechanics and Path Integrals", (McGraw-Hill, New York,1965).

[20] N. Boudiaf, Thèse de Magister, Univ. Mentouri de Constantine (2000).

[21] S. Bourouaine, Eur. Phys. J., C 44, 131, (2005).

Abstract

In this work, One deals with the problem of the extraction of the wave function as well as the energy of the charged relativistic particle subjected to the double and simultaneous action of two external fields of orthogonal electromagnetic plane waves, and this within the framework of Path Integrals and by using two techniques one is the technique of Fradkin - Gitman applied here to the Dirac charged particle, where the difficulty essentially lies in the dynamics and the quantization of the spin, but also to a charged Klein-Gordon particle where no special difficulty encountered, which results were the guide of comparison and verification for those given by a done pseudo-classical calculations using the Hamilton-Jacobi equation. For comparison goal as well as confirmation of the results obtained for the Dirac particle, the second technique, that of Alexandrou et al. was applied to a charged Dirac particle which gave a more direct result but exact and identical to the first. Appearance of Dirac functions has really simplified the calculi: taking into account their properties and their arguments which privileged classical histories.

Key words:

Dirac particle, Klein-Gordon particle, Path-Integrals, Hamilton-Jacobi equation, Plane wave, Grassmann variables.

ملخص

في هذا العمل، تعاملنا في إطار تكامل المسارات مع مسألة استخراج دالة الموجة وكذلك طاقة جسيمة نسبوية ذات شحنة خاضعة لتأثير مزدوج وآني لحقلين خارجيين من أمواج كهرومغناطيسية مستوية ومتعامدة و هذا باستعمال تقنيتين، إحداهما تقنية Fradkin-Gitman مطبقة على جسيمة Dirac ذات الشحنة، حيث تكمن الصعوبة أساسا في ديناميكا و تكميم عزم اللف (السبين)، وكذلك على جسيمة Klein-Gordon ذات الشحنة أين لم نلاحظ أي صعوبة، حيث كانت هذه الأخيرة وجه مقارنة و تأكيد للنتائج المعطاة بطريقة شبه كلاسيكية تستعمل معادلة Hamilton-Jacobi، و كذلك لغاية مقارنة وتثمين للنتائج المتحصل عليها لجسيمة Dirac. التقنية الثانية ألا وهي تقنية Alexandrou et al. طبقت على جسيمة Dirac ذات الشحنة وأعطت نتائج جد مباشرة ولكن صحيحة و مماثلة تماما للأولى.

ظهور دوال Dirac بسط حقيقة الحسابات: آخذين بعين الإعتبار خواصها و أيضا تمييزها الواضح للمسارات الكلاسيكية

الكلمات المفتاحية

جسيم ***ديراك***، جسيم *Klein-Gordon*، تكامل المسارات، معادلة *Hamilton-Jacobi*، موجة مستوية، متغيرات *Grassmann*.

Résumé:

Dans ce travail, le problème de l'extraction de la fonction d'onde et de l'énergie pour une particule relativiste chargée de Dirac ainsi que celle de Klein-Gordon soumises toutes deux à l'action combinée de deux champs extérieurs d'ondes électromagnétiques planes orthogonales, est traité dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins, en utilisant deux techniques dont l'une récente, formulée par Fradkin-Gitman, ainsi qu'un calcul pseudo-classique utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi pour la particule de Klein Gordon . C'est ainsi que les fonctions de Green ont été déterminées de manière exacte par l'approche de Gitman ainsi que par celle plus simple de Alexandrou et al. en utilisant certaines identités et des transformations choisies convenablement. Des fonctions de Dirac sont alors apparues, ce qui a permis la simplification les calculs grâce aux propriétés connues des fonctions de Dirac en présence d'intégrales. Notons encore que ces fonctions de Dirac ont pour arguments des équations qui ont privilégié les chemins de la mécanique classique sur tous les autres.

Les résultats qui ont été trouvés, sont conformes à ceux qu'ils devraient être

Mots clefs:

Particule de Dirac, Particule de Klein-Gordon, Intégrales de chemins, Equation d'Hamilton-Jacobi, Onde plane, variables de Grassmann.