

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

N° de série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE
MAGISTRE EN PHYSIQUE ENERGETIQUE
OPTION: PHOTOTHERMIQUE

THEME

ÉCOULEMENT DE COUETTE SPHERIQUE COROTATIF

PAR

SORAYA KEBOUT

Soutenu le: 03/ 03 / 2008

Devant le jury :

Président	: L.BAHI	Professeur	Université Mentouri Constantine
Rapporteur	: T.BOUFENDI	M. de Conférence	Université Mentouri Constantine
Examineurs	: M.AFRID	Professeur	Université Mentouri Constantine
	S.BENISSAAD	M. de Conférence	Université Mentouri Constantine

Remerciements

Je tiens à remercier le docteur **T.BOUFENDI** pour l'encadrement de cette thèse de Magister, ses conseils et ses critiques qui m'ont permis de présenter ce modeste travail.

Je tiens à remercier le professeur **L.BAHI** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse.

Je tiens à remercier également le professeur **M.AFRID** d'avoir accepté d'être membre de jury ainsi que pour ses conseils et ses critiques.

Je tiens à remercier aussi le docteur **S.BENISSAAD** d'avoir accepté d'être membre de Jury.

SOMMAIRE

	Page
Remerciements	1
Nomenclature	2
Liste des figures	5
Chapitre 1 Introduction et Recherche bibliographique	7
Chapitre 2 Modélisation mathématique du problème	18
2.1 Description du problème.....	18
2.2 Modèle mathématique.....	19
2.2.1 Equation de continuité.....	19
2.2.2 Equation de quantité de mouvement.....	19
2.2.2.1 Equation de quantité de mouvement suivant la direction radiale r	19
2.2.2.2 Equation de quantité de mouvement suivant la direction polaire q	19
2.2.2.3 Equation de quantité de mouvement suivant la direction azimutale j	19
2.2.3 Conditions aux limites du problème	20
2.2.4 Adimensionnalisation des variables.....	20
2.2.5 Réécriture les équations sous forme adimensionnelle.....	21
2.2.5.1 Equation de continuité	21
2.2.5.2 Equation de quantité de mouvement radiale.....	21
2.2.5.3 Equation de quantité de mouvement polaire.....	22
2.2.5.4 Equation de quantité de mouvement azimutale.....	22
2.2.6 Les conditions aux limites sous forme adimensionnelles.....	22
2.3 Calcul du moment angulaire.....	23
Chapitre 3 Résolution numérique	24
3.1 La Méthode numérique.....	24
3.2 Discrétisation du domaine physique.....	26
3.3 La discrétisation des équations.....	26
3.3.1 La discrétisation temporelle.....	26
3.3.1.1 Les termes non stationnaires.....	27
3.3.1.2 Les termes non linéaires.....	27

3.3.2 La discrétisation spatiale.....	27
3.4 Stockage des variables.....	28
3.5 Discrétisation des équations modélisantes.....	28
3.5.1 Discrétisation de l'équation de continuité.....	28
3.5.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement	29
3.5.2.1 Discrétisation du terme temporel.....	29
3.5.2.2 Discrétisation des termes convectifs.....	29
3.5.2.3 Discrétisation des autres termes à gauche.....	30
3.5.2.4 Discrétisation des termes diffusifs.....	31
3.5.2.5 Discrétisation des autres termes à droite.....	32
3.5.2.6 Discrétisation du terme de pression.....	33
3.5.3 Discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement.....	35
3.5.3.1 Discrétisation du terme temporel.....	35
3.5.3.2 Discrétisation des termes convectifs.....	35
3.5.3.3 Discrétisation des autres termes à gauche.....	36
3.5.3.4 Discrétisation des termes diffusifs.....	37
3.5.3.5 Discrétisation des autres termes à droite.....	37
3.5.3.6 Discrétisation du terme de pression.....	38
3.5.4 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement.....	41
3.5.4.1 Discrétisation du terme temporel.....	41
3.5.4.2 Discrétisation des termes convectifs.....	41
3.5.4.3 Discrétisation des autres termes à gauche.....	43
3.5.4.4 Discrétisation des termes diffusifs.....	43
3.5.4.5 Discrétisation des autres termes à droite.....	44
3.5.4.6 Discrétisation du terme de pression.....	45
3.5.5 Discrétisation des conditions aux limites.....	47
3.5.5.1 Pour la vitesse radiale U	47
3.5.5.2 Pour la vitesse polaire V	47
3.5.5.3 Pour la vitesse azimutale W	48
3.6 Equation de discrétisation de la pression	49
3.7 Résolution des équations discrétisées.....	54
3.8 La méthode de Balayage.....	54
3.8.1 Balayage suivant r	55
3.8.2 Balayage suivant q	55

3.8.3 Balayage suivant j	55
3.9 Algorithme de Thomas.....	56
3.10 Algorithme tri diagonal cyclique.....	57
3.11 L'algorithme SIMPLER.....	59
3.12 Atteinte du régime permanent ou convergence.....	60
Chapitre 4 Résultats et discussion.....	61
4.1 Le problème de Stokes.....	61
4.2 Cas de la faible corotation : $Re = 1$	63
4.3 Le cas d'une rotation modérée : $Re = 500$	66
4.4 Cas avec $Re \geq 1000$	71
4.5 Conclusion.....	84
Chapitre 5 Conclusion générale.....	85
Références bibliographiques.....	86
Résumés.....	89

Chapitre 1 Introduction et Recherche bibliographique

Introduction

L'étude des fluides en rotation est particulièrement importante pour la compréhension des écoulements atmosphériques et océanique. En effet, les écoulements dans l'atmosphère et les océans, observés par rapport à la surface de la terre, s'effectuent dans un repère tournant à la vitesse angulaire Ω locale de rotation de celle-ci ; ils sont donc influencés par cette rotation. Les écoulements en rotation interviennent aussi dans de nombreux processus industriels et sont également observables à l'échelle du laboratoire [1]. La structure des écoulements dans des récipients en rotation est fortement influencée par celle-ci, en particulier au niveau des couches limites. Des expériences de laboratoire montées sur des plateaux tournants sont par ailleurs très utilisées pour modéliser l'influence de la rotation de la terre sur l'écoulement de l'atmosphère et de l'océan, et donnent lieu à des effets spectaculaires. Quand on parle des écoulements, on parle des types de ces écoulements et les régimes qui apparaissent. Ces derniers dépendent principalement du nombre de Reynolds qui est le rapport entre le flux convectif de la quantité de mouvement et le flux diffusif de la quantité de mouvement et caractérise l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion visqueuse. Dans un écoulement à petit nombre de Reynolds, les forces visqueuses et le transport diffusif associé sont dominants. Le profil d'écoulement résulte d'un équilibre entre les forces de frottement visqueux et les gradients de pression ou forces en volume imposées extérieurement. Ces écoulements sont observés aux basses vitesses, et dans des systèmes de très petite taille. Au contraire, dans les écoulements à grand nombre de Reynolds, le transport de quantité de mouvement par convection est dominant. Les écoulements correspondants sont beaucoup moins stables, ce sont par exemple les écoulements turbulents. Ils sont observés aux fortes vitesses, dans des fluides peu visqueux ou dans des systèmes de grande taille. Plusieurs études théoriques, expérimentales et numériques ont été consacrées aux écoulements confinés entre deux sphères en rotation. Ces études ont permis l'élaboration des diagrammes de bifurcation de l'écoulement et de la transition laminaire-turbulent.

Les recherches concernant l'écoulement de Couette sphérique et sa stabilité commence depuis les quarante années précédentes avec un intérêt accru pour ces problèmes appliqués qui associent astrophysique et géophysique. Ces recherches considèrent soit le cas sans transfert de chaleur soit le cas avec transfert de chaleur.

Egbers [2] a trouvé que l'écoulement du fluide dans un espace sphérique entre deux sphères est l'une des géométries de base de la dynamique liquide comme l'écoulement de Couette-Taylor dans un espace cylindrique ou l'écoulement de cisaillement au dessus d'une plaque, **figure 1.1**. Et que l'étude des phénomènes de transition de laminaire à l'écoulement turbulent est toujours d'intérêt fondamental pour ces systèmes. Il a trouvé que l'écoulement de Couette sphérique avec un espace large est également approprié pour simuler à grande échelle les phénomènes astro- et géophysiques d'écoulement et les phénomènes de convection comme ils se produisent à l'intérieure de la terre ou d'autres planètes.

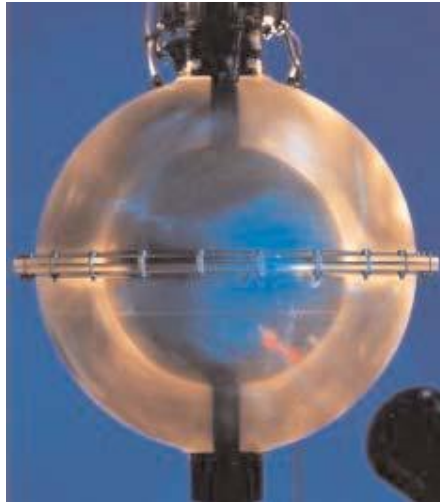


Fig 1.1. *L'expérience de l'écoulement de Couette sphérique d'après [2]*

Marcus et Egbers [3] trouvent que le sujet des instabilités hydrodynamiques et de la transition à la turbulence est d'importance pour la compréhension des systèmes dynamiques non linéaires. Progresser dans la compréhension des instabilités, des bifurcations et les itinéraires dans le chaos a été faite principalement en mettant l'attention sur un nombre restreint des systèmes hydrodynamiques relativement simples comme la convection de Rayleigh-Benard et l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation (L'écoulement de Couette-Taylor).

Particulièrement, l'étude des instabilités et de la turbulence dans l'écoulement de Couette sphérique est d'importance principale pour la compréhension des mouvements astrophysiques et géophysiques globaux. Mais l'étude de l'écoulement de Couette sphérique est également importante pour la théorie générale de stabilité hydrodynamique particulièrement lorsque l'on sait que cet écoulement est une combinaison normale d'écoulement circulaire de Couette à l'équateur et de l'écoulement entre deux disques aux pôles. Un autre dispositif important de la géométrie sphérique est que l'écoulement principal implique deux types de symétries, la symétrie de réflexion à l'équateur et la symétrie de translation en ce qui concerne l'axe de rotation. Selon l'allongement, les deux types de bifurcation peuvent exister dans l'écoulement de Couette sphérique.

Wang et Li [4] ont noté que l'écoulement de Couette sphérique ressemble à l'écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques en rotation (TCF) (l'écoulement de Couette-Taylor) particulièrement dans les régions situées à l'équateur de la sphère, où la force centrifuge est la plus grande. Ils précisent que les paramètres de contrôle de l'écoulement de Couette sphérique sont le nombre de Reynolds qui est basé sur la vitesse angulaire de la sphère intérieure $Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$, le

rapport d'aspect $b \left(b = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)$, et le nombre de Rossby $\left(Ro = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$ qui représente

le rapport des vitesses angulaires des deux sphères. En fonction du nombre de Rossby, on peut avoir trois configurations : les deux sphères peuvent être en co-rotation, ou en contra-rotation, ou en configuration rotor-stator (l'une des sphères en rotation et l'autre reste immobile).

Balyaev et Yavorskaya [5] considèrent que l'écoulement de Couette sphérique est plus complexe que l'écoulement de Couette cylindrique, et la rotation différentielle consiste un axe et un ou deux tourbillons circulés qui dépend du rapport entre les vitesses angulaires des deux sphères $\left(w = \frac{w_2}{w_1} \right)$ dans le plan méridien, et dépend aussi

du nombre de Reynolds ($Re = w_1 R_1^2$), et de l'épaisseur relative de la couche

$$(d = \frac{R_2 - R_1}{R_1}).$$

Egbers et al [6] ont étudié une géométrie d'un espace moyen $\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} = 0.25\right)$ et ont employé le Laser Doppler Anémomètre et obtenu que l'écoulement de Couette sphérique est caractérisé par les vortex de Taylor au niveau de l'équateur pour un espace mince entre les sphères et par le bras en spiral ondulé près des pôles pour un espace large. Et une seule paire de vortex apparaît au niveau de l'équateur sur la transition à l'écoulement supercritique. Aussi, si le nombre de Reynolds augmente, les vortex de Taylor deviennent onduleux. Aux nombres de Reynolds plus élevés, les auteurs [5] ont observé une structure en spirale allant du pôle vers l'équateur.

Barre et Solana [7] ont étudié numériquement et expérimentalement le champ d'écoulement dans la région polaire entre deux sphères excentriques dans trois cas (une des sphères est en rotation et l'autre est stationnaire, le cas des deux sphères corotatives ou le cas des deux sphères contra-rotatives). Numériquement, ils ont utilisé la méthode d'élément fini et expérimentalement ils procèdent par la visualisation de l'écoulement en utilisant un phototrope rayonnant par un laser UV. A des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds, ils ont observé expérimentalement d'autres structures instables, une bulle d'oscillation axialement ou une structure irrégulière tridimensionnelle.

L'écoulement de Couette-Taylor compris entre deux sphères corotatives présentes deux différences essentielles par rapport à celui entre deux cylindres concentriques.

La première est à caractère géométrique. L'entrefer compris entre deux cylindres concentriques possède une seule courbure (suivant la direction azimutale), alors que l'entrefer entre deux sphères concentriques possède deux courbures (l'une suivant la direction azimutale et une autre suivant la direction polaire). La seconde différence est de type dynamique. Bien que les sphères sont en rotation avec des vitesses angulaires constantes, les vitesses de rotation présentent des variations polaires considérables. Aux pôles, ces vitesses sont nulles tandis qu'elles sont maximales à l'équateur. Cette

variation polaire de la vitesse azimutale cause une stratification polaire importante de l'accélération centrifuge ainsi que de la pression. Le régime d'un écoulement de Couette-taylor entre deux sphères concentriques rotatives dépend de l'épaisseur de l'entrefer, du niveau des vitesses angulaires de rotation et de leur rapport. Plusieurs configurations géométriques et dynamiques sont possibles. L'entrefer peut-être mince, modéré ou large comparativement au rayon qui représente une échelle caractéristique de longueur. Pour une rotation des deux sphères autour du même axe, on peut avoir une corotation ou une contre rotation et enfin une configuration rotor stator avec la rotation d'une des deux sphères.

Il existe une littérature considérable concernant l'écoulement de Couette Taylor en particulier celui du cas rotor stator. Dans ce qui suit nous résumons la bibliographie qui nous a été disponible relative au cas corotatif.

Soward et Bassom [8] ont considéré l'instabilité d'amplitude finie d'un écoulement de Couette sphérique incompressible entre deux sphères concentriques co-rotatives autour d'un axe commun avec des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 respectivement. Dans cette limite, il est bien connu que le début de l'instabilité linéaire (globale) soit manifesté par des vortex de Taylor près de l'équateur. Selon la théorie linéaire ceci se produit à un nombre de Taylor critique qui, remarquablement, dépasse la valeur locale obtenue en rapprochant les sphères comme cylindres à proximité de l'équateur. Aussi, l'équation d'amplitude qui régit la modulation spatio-temporelle des vortex qui provoque un ordre intéressant de bifurcation. En particulier, l'aspect des bifurcations globales annonce le début des solutions sous critique d'amplitude finie dépendantes du temps. Ils ont trouvés aussi que, pour les nombres de Taylor élevés, il existe une région localement instable dans laquelle l'équation d'amplitude admet les solutions sous forme d'impulsions telle que chaque impulsion oscille à une fréquence proportionnelle à sa distance du plan équatorial.

Harris et al. [9] ont utilisé une équation complexe non homogène de Landau pour traiter les vortex de Taylor entre deux sphères concentriques co-rotatives autour d'un axe commun de symétrie. Ils ont trouvé que les vortex sont situés près de l'équateur et sont très faibles loin de l'équateur et dérivant vers lui.

La stabilité de l'écoulement de Couette sphérique co-rotatif et contrarotatif a fait l'objet d'une étude numérique par **Yang et Luo** [10]. Pour un entrefer mince (épaisseur normalisée par le rayon de la sphère intérieure égal à 0.18), ils déterminent le diagramme de bifurcation pour des nombres de Reynolds donnés (Re_1 et Re_2) basés sur les vitesses angulaires et les rayons des sphères intérieures et extérieures. Ils identifient des états d'écoulement stables et instables pour $Re_1 < 1000$ et $-500 \leq Re_2 \leq 400$, qui incluent la corotation. Dans le domaine $Re_2 > 0$, ils trouvent trois régimes stables d'écoulement : l'écoulement avec 0-vortex, l'écoulement avec 1-vortex et enfin celui avec 2-vortex.

Dormy et al [11] ont utilisé un modèle numérique pour étudier l'écoulement produit entre deux sphères en rotation rapide mais avec des vitesses de rotation légèrement différentes. Ils ont intégré les équations de mouvement selon l'axe de rotation et obtient une équation bidimensionnelle à résoudre dans le plan équatorial.

La géométrie du problème dans le plan méridien est présentée dans la **figure 1.2**.

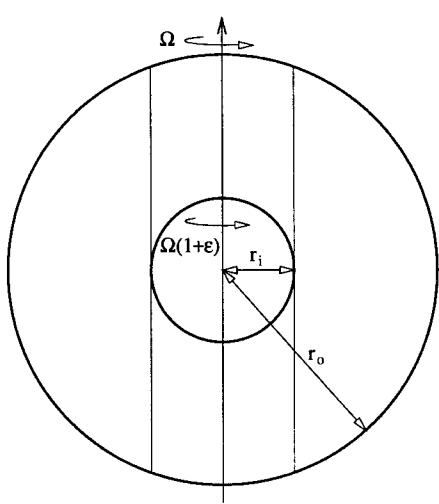


Figure 1.2. La géométrie du problème dans un plan méridien. D'après [11]

A partir de cette étude, ils ont trouvé une couche de cisaillement axisymétrique et cylindrique se formant autour du centre. Cette couche est connue sous le nom de « Couche de Stewartson ». Pour un forçage assez fort, cette couche se déstabilise (non équilibrée) sous forme d'onde de Rossby, des tourbillons alignés avec l'axe de rotation.

Dans un autre article **Philander** [12] parle sur les travaux de Stewartson et Proudman qui ont analysé les propriétés dynamiques d'un fluide occupant l'espace entre deux sphères concentriques tournantes avec des vitesses angulaires légèrement différentes. Ils ont considéré que l'écoulement à l'intérieure du cylindre entourant la sphère intérieure est semblable à celui qui résulte quand la conduite est symétrique. Ils ont trouvé qu'il existe une couche d'Eckman qui génère sur la sphère extérieure et persiste à l'extérieure de ce cylindre. La divergence de cette couche d'Eckman cause le mouvement lent et axial dans la région non visqueux loin de ce cylindre. Sur le cylindre deux couches de cisaillement apparaissent.

De son coté **Proudman** [13] a fait une étude: les deux sphères concentriques sont en rotation autour un axe à peu près identique avec presque la même vitesse angulaire, de sorte que les efforts visqueux au dessus des surfaces sphériques induisent un écoulement qui peut être représenté par une petite perturbation superposée sur une rotation rigide de corps du fluide dans l'ensemble. L'auteur a trouvé que la surface cylindrique qui touche la sphère intérieure est une surface singulière dans laquelle les gradients de vitesse sont très grands.

Partout en dehors de ce cylindre, le fluide tourne comme corps rigide avec la même vitesse angulaire que la sphère externe. Il a discuté également sur les mécanismes de la couche cylindrique de cisaillement.

Il existe une autre étude qui est basée sur l'apparition de la couche de Stewartson, celle de **Hollerbach et al.** [14] qui ont étudié expérimentalement et numériquement la stabilité de la couche de Stewartson présente dans une couche de fluide sphérique rotatives avec une vitesse angulaire inférieure à celle de la sphère intérieure. L'épaisseur de l'entrefer normalisé par le rayon intérieure est égale à 0.5. ces auteurs ont trouvé en premier lieu que l'écoulement stationnaire et axisymétrique est divisé en deux zones séparées par un cylindre vertical tangent à la sphère intérieure. En dehors du cylindre indiqué, l'écoulement s'aligne parallèlement à l'axe de rotation conformément au théorème de Taylor-Proudman. En deuxième lieu, ils ont trouvé une couche de cisaillement se développe à partir du cylindre tangent vers la sphère extérieure. Cependant, à l'intérieure du cylindre tangent la variation de la vitesse

angulaire est limitée dans les couches d'Eckman près des sphères. En dehors de ces couches minces, la vitesse angulaire est constante est égale à la moyenne arithmétique des vitesses angulaires des deux sphères. Les auteurs ont trouvé aussi que pour un nombre d'Eckman suffisamment petit, la couche de Stewartson perd son axisymétrie avec l'augmentation du nombre de Rossby.

Cardin et al[15] ont étudié une couche fluide contenue entre deux sphères concentriques en rotation rapide avec une des sphères qui tourne légèrement plus vite que l'autre. Ils ont fait une étude expérimentale sur la dynamo. Ils ont fixé $Re = 10^8$ et $E = 10^{-8}$ (E est le nombre d'Eckman). Ils ont trouvé que, lorsque les deux sphères ne laissent qu'un très petit espace du fluide, on retombe sur le cas de Couette cylindrique avec ses rouleaux quasi-axisymétriques.

Ils ont trouvé que, quand la sphère interne est conductrice, le couplage électromagnétique permet en effet d'entraîner le fluide dans tout le volume entre les deux sphères, pouvant même d'obtenir une super-rotation du fluide. Tous ces phénomènes pourraient rendre les mouvements plus aptes à faire démarrer une dynamo. A partir de cette étude, ils ont obtenus empiriquement les lois asymptotiques donnant le couple et la puissance des moteurs nécessaire pour imposer soit une rotation différentielle donnée, soit une décélération, soit une accélération des parois.

Wimmer [16] fait une étude comparative entre l'écoulement entre deux sphères (corotatives, contra-rotatives) et l'écoulement entre deux cylindres rotatifs. Il a installé un moteur qui a permis à la sphère externe d'être tournée indépendamment de la sphère intérieure. Il fait varier le rapport des vitesses angulaires dans l'intervalle $[-1.576, 0.92]$ et considère deux cas, le premier cas:

$$R_1 = 7.8cm \text{ et } R_2 = 8cm, \frac{R_1}{R_2} = 0.975, s = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = 0.0256, s = R_2 - R_1 = 0.2.$$

$$\text{Et le deuxième cas: } R_1 = 7.2cm, R_2 = 8cm, \frac{R_1}{R_2} = 0.900, s = 0.111, s = 0.8.$$

A partir de cette étude expérimentale, Wimmer trouve que le champ d'écoulement entre les sphères tournantes est différent de celui entre les cylindres. Dans ce dernier

cas, l'écoulement principal est un écoulement circulaire tandis que l'écoulement principal entre les sphères est entièrement tridimensionnel. Et que l'écoulement de Couette sphérique rotatif dépend du rapport des rayons et des vitesses angulaires. Il a trouvé aussi que l'écoulement secondaire (c'est-à-dire l'écoulement dans le plan méridien entre l'équateur et les pôles) est conduit par le déséquilibre des forces centrifuges dans la couche sphérique. Et que le rapport des vitesses angulaires des deux sphères détermine l'épaisseur de la couche résultante, qui influence alternativement le champ d'écoulement produit. Et que la rotation régulière des sphères dans la même direction avec la même vitesse angulaire, a comme conséquence la situation exceptionnelle d'une rotation rigide du corps qui inclut le fluide. Dans ce cas le produit $\Omega_2 R_2^2$ doit toujours plus grand que $\Omega_1 R_1^2$ pour obtenir la stabilité.

L'une des références de l'écoulement de Couette sphérique corotatif avec transfert thermique est l'étude de **Macaraeg** [17] qui utilise un fluide diélectrique pour simuler la gravitation. Il a utilisé un modèle numérique basé sur les équations de Navier Stokes incompressibles dans une formulation vorticité/fonction de courant discrétisées par une représentation pseudo spectrale dans la direction latitudinale et une représentation des différences finis dans les directions radiales. Le fluide est confiné entre deux sphères concentriques corotatives avec isolation. A partir de cette étude l'auteur trouve que la cellule est plus forte dans le cas de diélectrique que la cellule du champ uniforme. Il a trouvé aussi que le nombre de Grashoff (Gr) est une fonction d'accélération gravitationnelle. Et que pour un taux de rotation donné, le traitement distribue les différences de plus grandes températures à la limite correspondent aux plus grandes valeurs du flux max.

Miller et Gall [18] ont utilisé des modèles numériques pour étudier l'écoulement d'un liquide contenu entre deux hémisphères rigides concentriques corotatives avec un gradient thermique imposé sur les deux sphères (avec $R_1 = 5cm$, $R_2 = 6cm$, $u = 0.01$, $k = 0.000716$). Les températures sont plus faibles dans la sphère intérieure que dans la sphère extérieure. Ils ont utilisé les équations de

Navier-Stokes qui assumant la symétrie autour de l'axe polaire. Ils ont comparé les solutions hydrostatiques et non hydrostatiques pour les cas cylindriques et sphériques. Ils ont constaté que les différences entre les solutions hydrostatiques et non hydrostatiques sont petites, et les différences sont confinées la plupart du temps aux régions près du pôle et de l'équateur. Et ont trouvé aussi que l'effet non hydrostatique sur l'état axisymétrique n'affecte pas la stabilité baroclinique de l'écoulement.

Dans l'article suivant **Lesueur et Mangeney** [19] ont utilisé une simulation numérique par la méthode spectrale pour résoudre les équations de Navier-Stokes non linéaire couplées à l'équation de la chaleur, en utilisant l'approximation de Boussinesq. Le fluide est confiné entre deux sphères rigides en corotation. Il est soumis à un chauffage isotrope imposé sur la sphère interne et à un chauffage différentiel sur la sphère externe. Ils ont fait une simulation numérique du mouvement d'un fluide en rotation dans une couche sphérique épaisse. Ce travail s'attaque à l'étude des instabilités liées à ces deux modes de chauffage. Le but principal de cette étude est de préciser que le chauffage des planètes est dû au chauffage interne, ou au chauffage solaire?

Dans l'article suivant, **Nakabayashi et Tshuchida** [20], ont utilisé la méthode spectrale pour étudier un écoulement de Couette sphérique entre deux sphères concentriques indépendamment tournantes pour un rapport d'aspect $b = 0.14$. Ils ont trouvé des vortex de Taylor-Görtler (TG) qui apparaissent pour le cas de deux sphères co-tournantes, alors que les vortex et les torsions en spirale dans des vortex Toroidal de TG apparaissent pour le cas de deux sphères contre-tournantes. Les mêmes résultats ont été obtenus dans l'article [21].

Blockley et al. [22] ont étudié quelques solutions complexes de l'équation hétérogène (non homogène) complexe de Ginzburg-Landau. Cette équation surgit dans la théorie faiblement non linéaire de linéaires de l'écoulement de Couette sphérique entre deux sphères concentriques tournantes toutes les deux autour d'un axe commun avec des vitesses angulaires distinctes dans une limite étroite. Ils ont vu des vortex confinés près de l'équateur, et ont trouvé que l'écoulement principal se compose d'un

écoulement primaire ainsi qu'une plus faible circulation méridienne entre l'équateur et les pôles. Et ont trouvé aussi que, quand la sphère intérieure tourne plus rapidement que la sphère externe, les forces centrifuges sont la plus grandes à proximité de l'équateur. Et quand le rapport d'espace entre les sphères au rayon de la sphère intérieure est petit, la géométrie locale au niveau de l'équateur ressemble les cylindres concentriques.

Dans notre étude nous considérons le cas d'un écoulement de Couette-Taylor sphérique et corotatif. Nous avons arbitrairement choisis une épaisseur d'entrefer égal à la moitié du rayon de la sphère intérieure ainsi que le rapport des vitesses angulaires (le nombre de Rossby) égal à 0.5. Donc, le seul paramètre de contrôle variable dans notre étude est le nombre de Reynolds proportionnel au produit de la vitesse angulaire et le carré du rayon de la sphère intérieure et inversement proportionnel à la viscosité cinématique du fluide. Les valeurs sélectionnées du nombre de Reynolds sont 1, 500, 1000, 2000, 3000 et 4000. Nous présenterons et discuterons le régime d'écoulement pour toutes les variations du nombre de Reynolds de 1 à 4000. Cette thèse est organisée en cinq chapitre: le premier contient une recherche bibliographique sur les écoulements tridimensionnels entre les sphères concentriques rotatives. Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation mathématique du problème. Ce dernier est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de continuité et de quantité de mouvement et de leurs conditions initiales et aux limites, dans les coordonnées sphériques.

Dans le troisième chapitre, on utilise la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations modélisantes et leurs conditions initiales et aux limites. On utilisera des schémas de discrétisation du second ordre dans l'espace et dans le temps, de toutes les équations du modèle. On présentera aussi leurs résolutions selon l'algorithme SIMPLER qui donne la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation. Dans le quatrième chapitre, on va exposer la validation des résultats obtenus par notre code de calcul, ainsi que les résultats numériques obtenus pour le cas spécifique qu'on a étudié. Ce cas correspond à $b = 0.5$ et $1 \leq Re \leq 4000$. Les résultats seront discutés dans ce chapitre. La conclusion de notre travail numérique fera l'objet du dernier chapitre.

Chapitre 2 Modélisation mathématique du problème

2.1 Description du problème:

On considère un écoulement tridimensionnel permanent d'un fluide incompressible visqueux de viscosité m , compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 corotatives autour un axe avec des vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 ($\Omega_1 > \Omega_2$). L'épaisseur de l'entrefer est fixée à 0.5. Le nombre de Rossby $\left(Ro = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$ est arbitrairement fixé à 0.5. On néglige l'effet de la pesanteur. La géométrie du problème est illustrée dans la **figure (2.1)**.

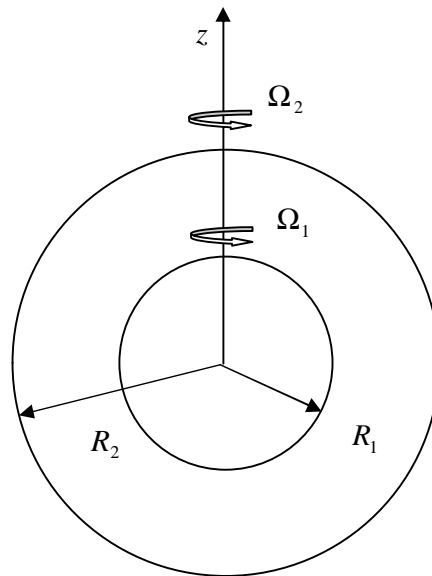


Figure 2.1 : Géométrie du problème

Avec : $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq q \leq p$, $0 \leq j \leq 2p$

On choisit le système de coordonnées sphériques (r, q, j) , où l'axe (OZ) est l'axe de rotation.

2.2 Modèle mathématique

Les conditions initiales:

$$\text{A } t = 0, U=V=W=0 \quad (2.1)$$

Pour $t > 0$:

2.2.1 Equation de continuité

Pour un fluide incompressible ($divV = 0$), l'équation de continuité en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (W) = 0 \quad (2.2)$$

U, V, W sont les composantes radiales, polaires et azimutales de la vitesse.

2.2.2 Equations de quantité de mouvement.

2.2.2.1 Equation de quantité de mouvement suivant la direction r

$$\begin{aligned} r \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (U V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (U W) - \frac{V^2}{r} - \frac{W^2}{r} \right] = \\ m \left[\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 U}{\partial j^2} - \frac{2U}{r^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \\ - \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) - \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2.2.2 Equation de quantité de mouvement suivant la direction polaire q

$$\begin{aligned} r \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (V W) + \frac{U V}{r} - \frac{W^2 \cot q}{r^2} \right] = \\ m \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 V}{\partial j^2} - \frac{V}{r^2 \sin^2 q} + \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.2.3 Equation de quantité de mouvement suivant la direction azimutale j

$$r \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V W \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (W W) + \frac{U W}{r} + \frac{W V}{r} \cot q \right] =$$

$$m \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 W}{\partial j^2} + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial U}{\partial j} + \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial V}{\partial j} - \frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right] - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial j}$$

2.2.3 Les conditions aux limites du problème

Pour r

$$A r = R_1, U = V = 0, W = R_1 \Omega_1 \sin q \quad (2.6)$$

$$A r = R_2, U = V = W = R_2 \Omega_2 \sin q \quad (2.7)$$

Pour q

$$A q = 0, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (2.8)$$

$$A q = p, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (2.9)$$

Pour j

Les conditions de périodicité sont :

$$U(r, q, j) = U(r, q, j + 2p)$$

$$V(r, q, j) = V(r, q, j + 2p) \quad (2.10)$$

$$W(r, q, j) = W(r, q, j + 2p)$$

2.2.4 Adimensionnalisation des variables

Les variables adimensionnelles sont définies comme suit :

$$r^* = \frac{r}{R_1} : \text{Distance radiale adimensionnelle}$$

$$U^* = \frac{U}{\Omega_1 R_1} : \text{Vitesse radiale adimensionnelle}$$

$$V^* = \frac{V}{\Omega_1 R_1} : \text{Vitesse méridionale adimensionnelle}$$

$$W^* = \frac{W}{\Omega_1 R_1} : \text{Vitesse azimutale adimensionnelle}$$

$$Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{u} : \text{Nombre de Reynolds}$$

$$t^* = \frac{t}{\left(\frac{R_1}{R_1 \Omega_1}\right)} : \text{Temps adimensionnel}$$

$$P^* = \frac{P - P_0}{r(\Omega_1 R_1)^2} : \text{Pression adimensionnelle}$$

En utilisant ces variables adimensionnelles pour écrire les conditions aux limites et les équations qui modélisent le problème sous la forme adimensionnelle suivante:

2.2.5 Réécritures des équations sous forme adimensionnelle

(Remarque : on omet d'écrire l'exposant * pour des raisons de commodité).

La condition initiale :

$$\text{A } t = 0, U=V=W=0 \tag{2.11}$$

A $t > 0$,

2.2.5.1 Equation de continuité

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (W) = 0 \tag{2.12}$$

2.2.5.2 Equation de quantité de mouvement radiale :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (U V \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (U W) - \frac{V^2}{r} - \frac{W^2}{r} = \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 U}{\partial j^2} - \frac{2U}{r^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \\ & \left[-\frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) - \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.5.3 Equation de quantité de mouvement polaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 UV) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (VW \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (VW) + \frac{UV}{r} - \frac{W^2 \cot q}{r} = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 V}{\partial j^2} - \right. \\ \left. - \frac{V}{r^2 \sin^2 q} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.5.4 L'équation de quantité de mouvement azimutale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 UW) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (VW \sin q) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (WW) + \frac{UW}{r} + \frac{WV}{r} \cot q = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \frac{\partial^2 W}{\partial j^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial U}{\partial j} + \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \frac{\partial V}{\partial j} - \frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right] - \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial P}{\partial j} \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2.6 Les conditions aux limites sous forme adimensionnelles

Les équations différentielles sont résolues avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{A } r=1, U=V=0, W=\sin q \quad (2.16)$$

$$\text{A } r = \frac{R_2}{R_1} = 1.5, U=V=0, W = \frac{R_2 \sin q \Omega_2}{R_1 \Omega_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \sin q = 1.5 R_0 \sin q \quad (2.17)$$

$$\text{A } q=0, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{A } q=p, \frac{\partial U}{\partial q} = V = \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (2.19)$$

3.12 Calcul du moment angulaire

Le fluide qui s'écoule dans la couche sphérique applique un moment angulaire sur la sphère intérieure et sur la sphère extérieure. On peut calculer ce moment angulaire à partir des étapes suivantes :

Premièrement on calcule les contraintes de cisaillement

$$t_{jr} = t_{rj} = m \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial j} \right] \quad (2.20)$$

Et puis on calcule la force élémentaire appliquée

$$d\mathbf{F} = t_{rj} dS \cdot \mathbf{e}_j = m \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial j} \right] r^2 \sin q dq dj \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.21)$$

L'écoulement est axisymétrique, c'est-à-dire qu'il n'y pas une variation suivant la direction azimutale, donc $\frac{\partial}{\partial j} = 0$.

Donc l'équation (3.59) devient :

$$d\mathbf{F} = m \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] r^2 \sin q dq dj \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.22)$$

Donc le moment angulaire est définis comme suit

$$d\mathbf{M} = (r \sin q) \mathbf{e}_r \wedge d\mathbf{F} = \left[m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] r^4 \sin^2 q dq dj \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.23)$$

$$dM = \left[m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) r^4 \sin^2 q dq dj \right] \quad (2.24)$$

Donc on peut calculer le moment angulaire appliqué sur les sphères par le fluide par la relation suivante:

$$M = \int_0^p \int_0^{2p} m \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] r^4 \sin^2 q dq dj \quad (3.25)$$

Et que le moment axial de la force de cisaillement à la surface d'une sphère est défini par:

$$T = \int_0^p \int_0^{2p} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial U}{\partial j} \right] r^3 \sin^2 q dq dj \quad (3.26)$$

Chapitre 3 Résolution numérique

3.1 La méthode numérique

Les équations modélisantes, et leurs conditions initiales et aux limites, sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis bien décrite dans Patankar [23]. L'entrefer est discrétisé en volumes finis sphériques. Le maillage comprend 32 points suivant la direction radiale, 189 points suivant la direction polaire et 32 points suivant la direction azimutale. Les projections du maillage dans le plan horizontal (passant par l'équateur) et un plan méridien sont illustrées dans la **figure 3.1**.

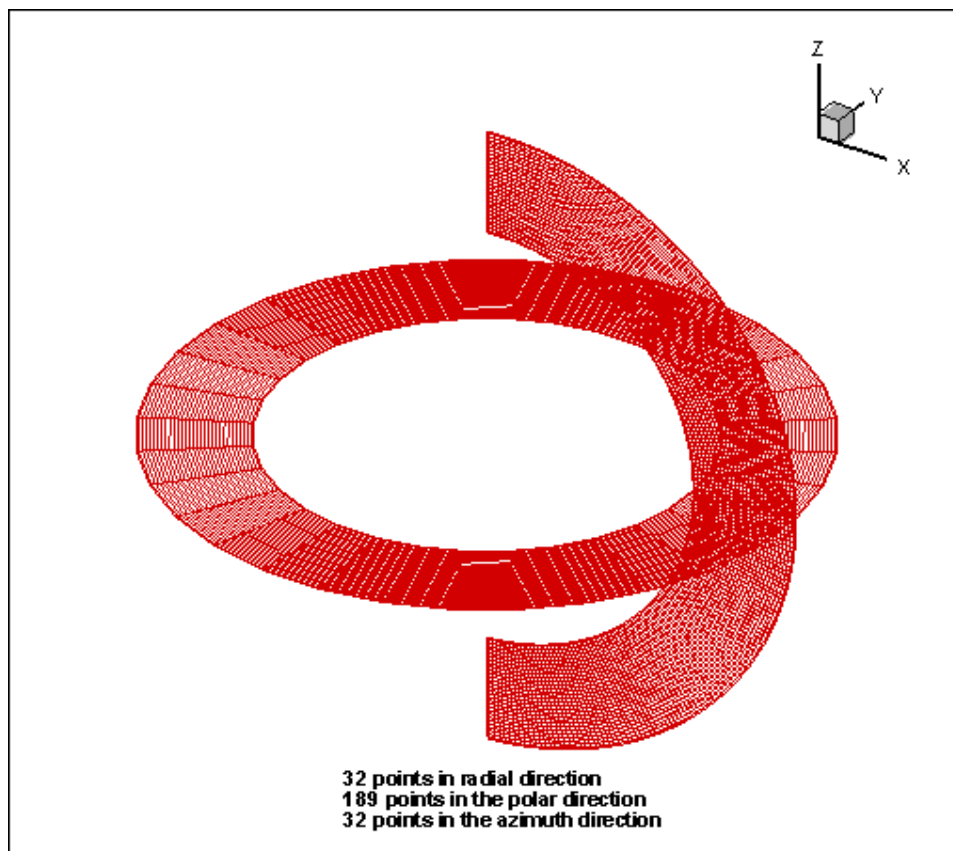


Figure 3.1 : Les projections du maillage dans le plan horizontal et un plan méridien

Chaque point est centré dans le volume fini qui l'inclut. La pression est centrée dans les nœuds des volumes finis typiques alors que les composantes de la vitesse sont centrées aux faces de ces volumes. Ainsi, les volumes finis des composantes de la vitesse sont décalés (par rapport aux volumes finis typiques) dans les sens positifs de leurs coordonnées respectives. Le maillage cité est uniforme suivant chaque direction. La discrétisation spatio-temporelle est du second ordre. La discrétisation des dérivées temporelles est celle d'Euler Backward du second ordre. La discrétisation temporelle des termes convectifs et non linéaires suit le schéma d'Adam-Bashforth. Cependant, la discrétisation temporelle des termes diffusifs et des gradients de pression est totalement implicite. Concernant, la discrétisation spatiale, le schéma des différences centrées est utilisé pour l'approximation des variables et leurs dérivées. Donc, la discrétisation spatiotemporelle est du second ordre ; c'est-à-dire qu'elle a des erreurs de troncature d'ordre $((\Delta t)^2, (\Delta r)^2, (\Delta j)^2)$. Le résultat de la discrétisation des équations modélisantes est quatre équations de discrétisation pour les quatre variables dépendantes : les trois composantes de vitesse et la pression. Chaque équation de discrétisation représente un système d'équation dont la solution permettra, en principe, l'obtention des valeurs de la variable concernée aux points du maillage (Medjroubi[25]). La solution séquentielle des équations de discrétisation des variables dépendantes suit l'algorithme SIMPLER discuté par [24]. La solution numérique du système d'équations linéaires d'une variable est accomplie par la méthode de balayage. Cette technique itérative fait appel à l'algorithme de Thomas suivant les directions radiale et polaire et l'algorithme tri diagonal cyclique suivant la direction azimutale. Commenant par les conditions initiales, la marche dans le temps est poursuivie (avec un pas du temps $\Delta t = 10^{-5}$ pour le cas de $Re = 1$ et $\Delta t = 10^{-3}$ pour tous les autres cas) jusqu'à l'atteinte d'un régime temporel établi : dans notre étude un régime stationnaire est obtenu pour tous les cas considérés. Certains cas, sont résolus avec la solution d'un nombre de Reynolds inférieur comme condition initiale. Le régime permanent (stationnaire) est caractérisé par une invariance temporelle de toutes les variables calculées. Aussi, en régime permanent, les moments axiaux des forces des frottements visqueux aux surfaces des sphères sont équilibrés comme l'exige le théorème du moment cinétique. Tous les calculs sont fait avec un micro-ordinateur Pentium 4, avec une fréquence égale à 1.7Ghz et 512 MB de RAM.

3.2 Discrétisation du domaine physique

Le domaine physique est transformé en un domaine de calcul par sa division en un certain nombre de petits volumes sphériques. La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini de volumes. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces. Le point P situé au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction. Pour la direction suivant r , les points sont notés N, S et les faces sont repérées par n, s . Pour la direction suivant q , les points sont notés F, B et les faces sont repérées par f, b . Pour la direction suivant j , les points sont notés E, W et les faces sont repérées par e, w .

Dans notre étude, on divise le domaine en 193536 volumes finis. Ce choix est limité par la capacité de notre moyen de calcul. Au centre d'un volume fini typique il y a un point P . Les centres des faces latérales (du volume) est, ouest, nord, sud, front et arrière sont dénommés, ci après, e, w, n, s, f, b respectivement. Chaque volume fini, à l'intérieur du domaine, est entouré de six autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N, S, F, B . suivant la procédure recommandée par [23], la pression est stockée aux centres des volumes, mais les trois composantes de vitesse sont stockées aux centres des faces latérales des volumes. Les figures qui illustrent des exemples des faces des volumes finis dans les plans $r-q$, $r-j$ et $q-j$ sont bien définis dans la thèse de Medjroubi [24]. Les dimensions d'un volume fini typique sont Δr_p , Δq_p et Δj_p . Les distances entre le point P et les points adjacents E, W, N, S, F, B sont $dj_e, dj_w, dr_n, dr_s, dq_f, dq_b$ respectivement. Cependant, les équations de Navier Stokes sont intégrées dans des volumes finis décalés. L'équation de conservation de quantité de mouvement radiale est discrétisée dans un volume fini décalé vers la direction radiale positive. L'équation de conservation de quantité de mouvement polaire est discrétisée dans un volume fini décalé vers la direction angulaire positive. L'équation de conservation de quantité de mouvement azimutale est discrétisée dans un volume fini décalé vers la direction angulaire positive.

3.3 La discrétisation des équations

3.3.1 La discrétisation temporelle

3.3.1.1 Les termes non stationnaires

La discrétisation des termes non stationnaires dans les équations de mouvement suit un schéma temporel du second ordre. Si on considère Φ comme variable dépendante du temps, un développement limité en série de Taylor au deuxième ordre des variables Φ^t et $\Phi^{t-\Delta t}$

$$\Phi^t = \Phi^{t+\Delta t} - \Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.1)$$

$$\Phi^{t-\Delta t} = \Phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.2)$$

On multiplie la relation (3.1) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3.2), et on obtient :

$$4\Phi^t - \Phi^{t-\Delta t} = 3\Phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.3)$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{3\Phi^{t+\Delta t} - 4\Phi^t + \Phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + 0(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

A partir de cette relation on trouve que l'erreur de troncature est de l'ordre de $(\Delta t)^2$.

3.3.1.2 la discrétisation des termes non linéaires

La discrétisation des termes convectifs et non linéaires dans l'ensemble des équations, suit le schéma explicite d'Adams-Bashforth qui est obtenu par une expansion en série de Taylor.

$$\Phi^{t+\Delta t} = 2\Phi^t - \Phi^{t-\Delta t} \quad (3.5)$$

3.3.2 La discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma des différences centrées avec une précision du second ordre (l'erreur de troncature est d'ordre deux). Ainsi, la valeur d'une variable Φ sur une face commun à deux volumes adjacents est la moitié des deux valeurs nodales. Aussi, la dérivée spatiale d'une variable sur une face commun est la différence des valeurs de la variable des nœuds en amont et en aval de l'interface divisée par la distance qui se sépare.

Ainsi, l'erreur de troncature de la discrétisation spatiale sera de l'ordre de $(\Delta r)^2$, $(\Delta \theta)^2$ et $(\Delta j)^2$ pour les directions radiale, polaire et azimutale respectivement. (Voir référence [24]).

3.4 Stockage des variables

Les variables scalaires comme la pression sont stockées dans les nœuds du maillage. Cependant les composantes du champ de vitesse sont stockées aux centres des faces des volumes de contrôle. Ce type de maillage dit intercalé permet une meilleure estimation du flux convectif, ainsi une bonne estimation de la force de pression dans les équations de mouvement. Il offre de plus une grande stabilité numérique.

3.5 Discrétisation des équations modélisantes

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, on adopte la convention suivante en ce qui concerne l'exposant de chaque terme discrétisé :

- les termes au temps $t - \Delta t$ porteront l'exposant $t - \Delta t$
- les termes au temps t porteront l'exposant t
- les termes au temps $t + \Delta t$ porteront l'exposant $t + \Delta t$
- $Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{n}$ (Re est le nombre de Reynolds).

Avec :

Ω_1 est la vitesse angulaire de rotation de la sphère intérieure

R_1 est le rayon de la sphère intérieure

Et n étant la viscosité cinématique

3.5.1 Discrétisation de l'équation de continuité :

L'équation de continuité sera discrétisée dans un volume de contrôle typique (il est montré sur la thèse de Medjroubi [24])

$$\begin{aligned}
 \int_w^e \int_s^n \int_f^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj &= (r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t}) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 \int_w^e \int_s^n \int_f^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj &= (V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b) r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
 \int_b^f \int_w^e \int_s^n \int_t \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial W}{\partial j} r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj &= (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) r_P \Delta r_P \Delta q_P
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc l'équation de continuité discrétisée s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 (r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t}) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P &+ (V_f^{t+\Delta t} \sin q_f - V_b^{t+\Delta t} \sin q_b) r_P \Delta r_P \Delta j_P \\
 + (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) r_P \Delta r_P \Delta q_P &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.5.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement

3.5.2.1 Discrétisation du terme temporel

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} r_n^2 \sin q_P \Delta r_n \Delta q_P \Delta j_P \tag{3.8}$$

3.5.2.2 Discrétisation des termes convectifs

$$\begin{aligned}
 &\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \\
 &= 2 \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) /{}^t \sin q \, dr \, dq \, dj - \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) /{}^{t-\Delta t} \sin q \, dr \, dq \, dj \\
 &= 2 (r^2 U U)_{n_u}^t \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P - 2 (r^2 U U)_{s_u}^t \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 &\quad - (r^2 U U)_{n_u}^{t-\Delta t} \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P + (r^2 U U)_{s_u}^{t-\Delta t} \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 &= 2 (r_{n_u}^2 U_{n_u}^t U_{n_u}^t) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P - 2 (r_{s_u}^2 U_{s_u}^t U_{s_u}^t) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 &\quad - (r_{n_u}^2 U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t}) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P + (r_{s_u}^2 U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t}) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 &= \frac{1}{2} r_{n_u}^2 (U_{N_u}^t + U_{P_u}^t)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P - \frac{1}{2} r_{s_u}^2 (U_{S_u}^t + U_{P_u}^t)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
 &\quad - \frac{1}{4} r_{n_u}^2 (U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t})^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P + \frac{1}{4} r_{s_u}^2 (U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{S_u}^{t-\Delta t})^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (UW) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = 2 \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial j} (UW)^t r \, dr \, dq \, dj - \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial j} (UW)^{t-\Delta t} r \, dr \, dq \, dj \\
 & = \left[2(UW)_{e_u}^t - 2(UW)_{w_u}^t \right] r_{P_u} dr_n \Delta q_P - \left[(UW)_{e_u}^{t-\Delta t} - (UW)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} dr_n \Delta q_P \\
 & = \left[2(U_{e_u}^t W_{e_u}^t) - 2(U_{w_u}^t W_{w_u}^t) \right] r_{P_u} dr_n \Delta q_P - \left[(U_{e_u}^{t-\Delta t} W_{e_u}^{t-\Delta t}) - (U_{w_u}^{t-\Delta t} W_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] r_{P_u} dr_n \Delta q_P \quad (3.10) \\
 & = \left[2(U_{e_u}^t W_{e_u}^t - U_{w_u}^t W_{w_u}^t) - (U_{e_u}^{t-\Delta t} W_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} W_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] r_n dr_n \Delta q_P \\
 & = \frac{1}{2} (U_{E_u}^t + U_{P_u}^t) (W_{neu}^t + W_e^t) r_n dr_n \Delta q_P - \frac{1}{2} (U_{P_u}^t + U_{W_u}^t) (W_w^t + W_{nwu}^t) r_n dr_n \Delta q_P \\
 & - \frac{1}{4} (U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t}) (W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t}) r_n dr_n \Delta q_P + \frac{1}{4} (U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t}) (W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^t) r_n dr_n \Delta q_P
 \end{aligned}$$

3.5.2.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{V^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = -2 (V_{P_u}^2)^t r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P + (V_{P_u}^2)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \\
 & = -2 \left[\frac{V_{nfu}^t + V_f^t + V_b^t + V_{nbu}^t}{4} \right]^2 r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P + \\
 & + \left[\frac{V_{nfu}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{W^2}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = -2 (W_{P_u}^2)^t r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P + (W_{P_u}^2)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \\
 & = -2 \left[\frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P + \\
 & + \left[\frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_{P_u} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

3.5.2.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{n_u}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{s_u}^{t+\Delta t} \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_u}^2 \left(\frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_N} \right) - r_{s_u}^2 \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_S} \right) \right] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{f_u}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial U}{\partial q} \right)_{b_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta j_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\sin q_{f_u} \left(\frac{U_{F_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dq_f} \right) - \sin q_{b_u} \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{dq_b} \right) \right] dr_n \Delta j_p \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial j^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial j} \right)_{e_u}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial U}{\partial j} \right)_{w_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \Delta q_p \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_p} \left(\frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dj_e} \right) - \frac{1}{\sin q_p} \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{dj_w} \right) \right] dr_n \Delta q_p \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$- \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{U}{r^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - \frac{2}{\text{Re}} U_{P_u}^{t+\Delta t} \sin q_p dr_n \Delta q_p \Delta j_p \quad (3.16)$$

3.5.2.5 Discrétisation des autres termes à droite

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (V \sin q) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = -\frac{2}{\text{Re}} \left[2 (V \sin q)_{f_u}^t - 2 (V \sin q)_{b_u}^t \right] dr_n \Delta j_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[(V \sin q)_{f_u}^{t-\Delta t} - (V \sin q)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] dr_n \Delta j_P \\
 & = -\frac{4}{\text{Re}} \left[V_{f_u}^t \sin q_{f_u} - V_{b_u}^t \sin q_{b_u} \right] dr_n \Delta j_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[V_{f_u}^{t-\Delta t} \sin q_{f_u} - V_{b_u}^{t-\Delta t} \sin q_{b_u} \right] dr_n \Delta j_P \\
 & = -\frac{2}{\text{Re}} \left[(V_f^t + V_{nf_u}^t) \sin q_{f_u} - (V_b^t + V_{nb_u}^t) \sin q_{b_u} \right] dr_n \Delta j_P \\
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left[(V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t}) \sin q_{f_u} - (V_b^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t}) \sin q_{b_u} \right] dr_n \Delta j_P \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial W}{\partial j} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = -\frac{2}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial W}{\partial j} \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = -\frac{2}{\text{Re}} \left[(2W)_{e_u}^t - (2W)_{w_u}^t \right] dr_n \Delta q_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[(W)_{e_u}^{t-\Delta t} - (W)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] dr_n \Delta q_P \tag{3.18} \\
 & = -\frac{2}{\text{Re}} \left[(W_e^t + W_{neu}^t) - (W_w^t + W_{mwu}^t) \right] dr_n \Delta q_P + \frac{1}{\text{Re}} \left[(W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t}) - (W_w^{t-\Delta t} + W_{mwu}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta q_P
 \end{aligned}$$

3.5.2.6 Discrétisation du terme de pression

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - \left(P_{n_u}^{t+\Delta t} - P_{s_u}^{t+\Delta t} \right) r_{p_u}^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \quad (3.19)$$

$$= \left(P_p^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_{p_u}^2 \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p$$

On écrit l'équation de quantité de mouvement radiale sous la forme suivante :

$$A_{P_u} U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} U_{F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} U_{B_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} U_{W_u}^{t+\Delta t} + S_u \quad (3.20)$$

Sachant que :

$$A_{N_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_p^2}{\Delta r_p} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p$$

$$A_{S_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_p^2}{\Delta r_p} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p$$

$$A_{F_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_f}{dq_f} \right) dr_n \Delta j_p$$

$$A_{B_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin q_b}{dq_b} \right) dr_n \Delta j_p$$

$$A_{E_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p dj_e} \right)$$

$$A_{W_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{dr_n \Delta q_p}{\sin q_p dj_w} \right) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
A_{P_u} &= A_{N_u} + A_{S_u} + A_{F_u} + A_{B_u} + A_{E_u} + A_{W_u} + \frac{3}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P + \\
&+ \frac{2}{\text{Re}} \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
S_u &= \frac{4U_{P_u}^t}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P - \frac{U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P - \\
&- \frac{1}{2} r_{n_u}^2 (U_{N_u}^t + U_{P_u}^t)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P + \frac{1}{2} r_{s_u}^2 (U_{S_u}^t + U_{P_u}^t)^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
&+ \frac{1}{4} r_{n_u}^2 (U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t})^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P - \frac{1}{4} r_{s_u}^2 (U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t}) \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P \\
&- \frac{1}{2} (U_{F_u}^t + U_{P_u}^t) (V_f^t + V_{nf_u}^t) r_n dr_n \sin q_P \Delta j_P + \frac{1}{2} (U_{P_u}^t + U_{B_u}^t) (V_b^t + V_{nb_u}^t) r_n dr_n \sin q_P \Delta j_P \\
&+ \frac{1}{4} (U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t}) (V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t}) r_n dr_n \sin q_P \Delta j_P \\
&- \frac{1}{4} (U_{B_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t}) (V_b^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t}) r_n dr_n \sin q_P \Delta j_P \\
&- \frac{1}{2} (U_{E_u}^t + U_{P_u}^t) (W_e^t + W_{neu}^t) r_n dr_n \Delta q_P + \frac{1}{2} (U_{P_u}^t + U_{W_u}^t) (W_{nwu}^t + W_w^t) r_n dr_n \Delta q_P \\
&+ \frac{1}{4} (U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t}) (W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t}) r_n dr_n \Delta q_P - \frac{1}{4} (U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t}) (W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}) r_n dr_n \Delta q_P \\
&+ \left[\frac{V_f^t + V_{nf_u}^t + V_b^t + V_{nb_u}^t}{2} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \\
&- \left[\frac{V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \\
&+ \left[\frac{W_e^t + W_{neu}^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{2} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P - \\
&- \left[\frac{W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin q_P dr_n \Delta q_P \Delta j_P \\
&- \frac{2}{\text{Re}} (V_f^t + V_{nf_u}^t) \sin q_f dr_n \Delta j_P + \frac{2}{\text{Re}} (V_b^t + V_{nb_u}^t) \sin q_b dr_n \Delta j_P \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} (V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t}) \sin q_f dr_n \Delta j_P + \frac{1}{\text{Re}} (V_b^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t}) \sin q_b dr_n \Delta j_P \\
&+ (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n^2 \sin q_P \Delta q_P \Delta j_P
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.5.3 Discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement

3.5.3.1 Discrétisation du terme temporel

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) r^2 \sin q dr dq dj dt &= (V_{P_v})_{t+\Delta t}^t r_{P_v}^2 \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \\ &= \left(\frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t} - 4V_{P_v}^t + V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right) r_{P_v}^2 \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.5.3.2 Discrétisation des termes convectifs

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 UV) r^2 \sin q dr dq dj dt \\ = 2 \left[(r^2 UV)_{n_v}^t - (r^2 UV)_{s_v}^t \right] \sin q_f dq_f \Delta j_P - \left[(r^2 UV)_{n_v}^{t-\Delta t} - (r^2 UV)_{s_v}^{t-\Delta t} \right] \sin q_f dq_f \Delta j_P \\ = 2 \left[(r_{n_v}^2 U_{n_v}^t V_{n_v}^t) - (r_{s_v}^2 U_{s_v}^t V_{s_v}^t) \right] \sin q_f dq_f \Delta j_P \\ - \left[(r_{n_v}^2 U_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t}) - (r_{s_v}^2 U_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t}) \right] \sin q_f dq_f \Delta j_P \\ = \frac{1}{2} r_{n_v}^2 (U_n^t + U_{nfv}^t) (V_{N_v}^t + V_{P_v}^t) \sin q_f dq_f \Delta j_P - \frac{1}{2} r_{s_v}^2 (U_s^t + U_{sfv}^t) (V_{S_v}^t + V_{P_v}^t) \sin q_f dq_f \Delta j_P \\ - \frac{1}{4} r_{n_v}^2 (U_n^{t-\Delta t} + U_{nfv}^{t-\Delta t}) (V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) \sin q_f dq_f \Delta j_P + \\ + \frac{1}{4} r_{s_v}^2 (U_s^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t}) (V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) \sin q_f dq_f \Delta j_P \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (vV) r^2 \sin q dr dq dj dt = \\ = 2 \left[(vV)_{f_v}^t - (vV)_{b_v}^t \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P - \left[(vV)_{f_v}^{t-\Delta t} - (vV)_{b_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P \\ = 2 \left[(V_{f_v}^t V_{f_v}^t) - (V_{b_v}^t V_{b_v}^t) \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P - \left[(V_{f_v}^{t-\Delta t} V_{f_v}^{t-\Delta t}) - (V_{b_v}^{t-\Delta t} V_{b_v}^{t-\Delta t}) \right] r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P \quad (3.26) \\ = \frac{1}{2} (V_{F_v}^t + V_{P_v}^t)^2 r_P \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P - \frac{1}{2} (V_{B_v}^t + V_{P_v}^t)^2 r_P \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P \\ - \frac{1}{4} (V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t})^2 r_P \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P + \frac{1}{4} (V_{B_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t})^2 r_P \sin q_f \Delta r_P \Delta j_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (VW) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = 2 \left[(VW)_{e_v}^t - (VW)_{w_v}^t \right] r_{P_v} \Delta r_P dq_f - \left[(VW)_{e_v}^{t-\Delta t} - (VW)_{w_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \Delta r_P dq_f \\
 & = 2 \left[(V_{e_v}^t W_{e_v}^t) - (V_{w_v}^t W_{w_v}^t) \right] r_{P_v} \Delta r_P dq_f - \left[(V_{e_v}^{t-\Delta t} W_{e_v}^{t-\Delta t}) - (V_{w_v}^{t-\Delta t} W_{w_v}^{t-\Delta t}) \right] r_{P_v} \Delta r_P dq_f \quad (3.27) \\
 & = \frac{1}{2} (V_{E_v}^t + V_{P_v}^t) (W_{fev}^t + W_e^t) r_P \Delta r_P dq_f - \frac{1}{2} (V_{w_v}^t + V_{P_v}^t) (W_{fww}^t + W_w^t) r_P \Delta r_P dq_f \\
 & - \frac{1}{4} (V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) (W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t}) r_P \Delta r_P dq_f + \frac{1}{4} (V_{w_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) (W_{fww}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}) r_P \Delta r_P dq_f
 \end{aligned}$$

3.5.3.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{UV}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = 2 (U_{P_v}^t V_{P_v}^t) r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P - (U_{P_v}^{t-\Delta t} V_{P_v}^{t-\Delta t}) r_{P_v} \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \quad (3.28) \\
 & = 2 \left[\left(\frac{U_n^t + U_{nfv}^t + U_s^t + U_{sfv}^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_P \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \\
 & - \left[\left(\frac{U_n^{t-\Delta t} + U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_P \sin q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} - \left(\frac{W^2 \cot q}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = -2 (W_{P_v}^2)^t r_{P_v} \cos q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P + (W_{P_v}^2)^{t-\Delta t} r_{P_v} \cos q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \quad (3.29) \\
 & = -2 \left[\frac{W_e^t + W_{fev}^t + W_w^t + W_{fww}^t}{4} \right]^2 r_P \cos q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P \\
 & + \left[\frac{W_e^{t-\Delta t} + W_{fev}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fww}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_P \cos q_f \Delta r_P dq_f \Delta j_P
 \end{aligned}$$

3.5.3.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{n_v}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_v}^{t+\Delta t} \right] \sin q_f \, dq_f \, \Delta j_P \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_v}^2 \left(\frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - r_{s_v}^2 \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \sin q_f \, dq_f \, \Delta j_P \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{f_v}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{b_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_P \Delta j_P \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\sin q_{f_v} \left(\frac{V_{F_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_F} \right) - \sin q_{b_v} \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta q_B} \right) \right] \Delta r_P \Delta j_P \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial j^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial j} \right)_{e_v}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial V}{\partial j} \right)_{w_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_P \, dq_f \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_f} \left(\frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{dj_e} \right) - \frac{1}{\sin q_f} \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{F_v}^{t+\Delta t}}{dj_w} \right) \right] \Delta r_P \, dq_f \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

3.5.3.5 Discrétisation des autres termes à droite

$$- \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{e_v} \int_{w_v}^{t+\Delta t} \int_t \left(\frac{V}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\sin q_f} V_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta r_P \, dq_f \, \Delta j_P \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = \frac{2}{\text{Re}} \left[2 \left(U_{f_v}^t - U_{b_v}^t \right) - \left(U_{f_v}^{t-\Delta t} - U_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
 & = \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{nf_v}^t + U_{sf_v}^t}{2} \right) - \left(\frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
 & - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{nf_v}^{t-\Delta t} + U_{sf_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial W}{\partial j} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = - \frac{2}{\text{Re}} \left(2 W_{e_v}^t - 2 W_{w_v}^t \right) \cot q_f \Delta r_p dq_f + \frac{2}{\text{Re}} \left(W_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
 & = - \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{W_e^t + W_{fev}^t}{2} \right) - \left(\frac{W_w^t + W_{fwv}^t}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
 & + \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{W_e^{t-\Delta t} + W_{fev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{W_w^{t-\Delta t} + W_{fwv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_f \Delta r_p dq_f
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

3.5.3.6 Discrétisation du terme de pression

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - \left(P_{f_v}^{t+\Delta t} - P_{b_v}^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
 & = \left(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

On réécrit l'équation de quantité de mouvement suivant q sous la forme généralisée :

$$A_{P_v} V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_{N_v} V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{F_v}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{B_v}^{t+\Delta t} + A_{E_v} V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{W_v}^{t+\Delta t} + S_v \tag{3.37}$$

Les coefficients sont :

$$\begin{aligned}
 A_{N_v} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_{n_v}^2}{dr_n} \right) \sin q_f dq_f \Delta j_p & A_{S_v} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_{s_v}^2}{dr_s} \right) \sin q_f dq_f \Delta j_p \\
 A_{F_v} &= \frac{1}{\text{Re}} (\sin q_{f_v}) \left(\frac{\Delta r_p \Delta j_p}{\Delta q_F} \right) & A_{B_v} &= \frac{1}{\text{Re}} (\sin q_{b_v}) \left(\frac{\Delta r_p \Delta j_p}{\Delta q_B} \right) \\
 A_{E_v} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_f} \right) \left(\frac{\Delta r_p dq_f}{dj_e} \right) & A_{W_v} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_f} \right) \left(\frac{\Delta r_p dq_f}{dj_w} \right)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 A_{P_v} &= \frac{3}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_f} \right) \Delta r_p dq_f \Delta j_p + A_{N_v} + A_{S_v} \\
 &\quad + A_{F_v} + A_{B_v} + A_{E_v} + A_{W_v}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
S_v &= \frac{2V_{P_v}^t}{\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p - \frac{V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p \\
&- \frac{1}{2} r_n^2 (U_n^t + U_{nfv}^t) (V_{N_v}^t + V_{P_v}^t) \sin q_f dq_f \Delta j_p + \frac{1}{2} r_s^2 (U_s^t + U_{sfv}^t) (V_{S_v}^t + V_{P_v}^t) \sin q_f dq_f \Delta j_p \\
&+ \frac{1}{4} r_n^2 (U_n^{t-\Delta t} + U_{nfv}^{t-\Delta t}) (V_{N_v}^t + V_{P_v}^t) \sin q_f dq_f \Delta j_p \\
&- \frac{1}{4} r_s^2 (U_s^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t}) (V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) \sin q_f dq_f \Delta j_p \\
&- \frac{1}{2} (V_{F_v}^t + V_{P_v}^t)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p + \frac{1}{2} (V_{B_v}^t + V_{P_v}^t)^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
&+ \frac{1}{4} (V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t})^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p - \frac{1}{4} (V_{B_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t})^2 r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
&- \frac{1}{2} (W_{E_v}^t + V_{P_v}^t) (W_e^t + W_{fev}^t) r_p \Delta r_p dq_f + \frac{1}{2} (W_{W_v}^t + V_{P_v}^t) (W_{fwv}^t + W_w^t) r_p \Delta r_p dq_f \\
&+ \frac{1}{4} (W_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) (W_e^{t-\Delta t} + W_{fev}^{t-\Delta t}) r_p \Delta r_p dq_f - \frac{1}{4} (W_{W_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t}) (W_{fwv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}) r_p \Delta r_p dq_f \\
&- 2 \left[\left(\frac{U_{nfv}^t + U_n^t + U_{sfv}^t + U_s^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p \\
&+ \left[\left(\frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p \\
&- 2 \left[\frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_{fwv}^t + W_w^t}{4} \right]^2 r_p \cos q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p \\
&+ \left[\frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_{fwv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}}{4} \right] r_p \cos q_f \Delta r_p dq_f \Delta j_p \\
&+ \frac{2}{\text{Re}} [(U_{nfv}^t + U_{sfv}^t) - (U_n^t + U_s^t)] \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
&- \frac{1}{\text{Re}} [(U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t}) - (U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t})] \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p \\
&- \frac{2}{\text{Re}} [(W_e^t + W_{fev}^t) - (W_{fwv}^t + W_w^t)] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
&+ \frac{1}{\text{Re}} [(W_e^{t-\Delta t} + W_{fev}^{t-\Delta t}) - (W_{fwv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t})] \cot q_f \Delta r_p dq_f \\
&+ (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) r_p \sin q_f \Delta r_p \Delta j_p
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.5.4 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement

3.5.4.1 Discrétisation du terme temporel

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt &= [W_{P_w}]_t^{t+\Delta t} r_{P_w}^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\ &= \frac{3 W_{P_w}^{t+\Delta t} - 4 W_{P_w}^t + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.5.4.2 Discrétisation des termes convectifs

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt &= \\ &= 2 \left[(r^2 U W)_{n_w}^t - (r^2 U W)_{s_w}^t \right] \sin q_e \Delta q_p dj_e - \left[(r^2 U W)_{n_w}^{t-\Delta t} - (r^2 U W)_{s_w}^{t-\Delta t} \right] \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &= 2 \left[(r_{n_w}^2 U_{n_w}^t W_{n_w}^t) - (r_{s_w}^2 U_{s_w}^t W_{s_w}^t) \right] \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &\quad - \left[(r_{n_w}^2 U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t}) - (r_{s_w}^2 U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t}) \right] \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &= 2 r_{n_w}^2 \left(\frac{U_{new}^t + U_n^t}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{N_w}^t}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &\quad - 2 r_{s_w}^2 \left(\frac{U_{sew}^t + U_s^t}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{S_w}^t}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &\quad - r_{n_w}^2 \left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\ &\quad + r_{s_w}^2 \left(\frac{U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin q_e \Delta q_p dj_e \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (VW) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = 2 \left[(VW)_{f_w}^t - (VW)_{b_w}^t \right] r_{P_w} \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e - \left[(VW)_{f_w}^{t-\Delta t} - (VW)_{b_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \\
 & = 2 \left[(V_{f_w}^t W_{f_w}^t) - (V_{b_w}^t W_{b_w}^t) \right] r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \\
 & - \left[(V_{f_w}^{t-\Delta t} W_{f_w}^{t-\Delta t}) - (V_{b_w}^{t-\Delta t} W_{b_w}^{t-\Delta t}) \right] r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \tag{3.43} \\
 & = 2 \left(\frac{V_{f_w}^t + V_{f_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{f_w}^t + W_{f_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \\
 & - 2 \left(\frac{V_{b_w}^t + V_{b_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{b_w}^t + W_{b_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \\
 & - \left(\frac{V_{f_w}^{t-\Delta t} + V_{f_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{f_w}^{t-\Delta t} + W_{f_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e \\
 & + \left(\frac{V_{b_w}^{t-\Delta t} + V_{b_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{W_{b_w}^{t-\Delta t} + W_{b_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_P \sin q_e \Delta r_P \, dj \, e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial j} (WW) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 & = 2 \left[(WW)_{e_w}^t - (WW)_{w_w}^t \right] r_{P_w} \Delta r_P \Delta q_P - \left[(WW)_{e_w}^{t-\Delta t} - (WW)_{w_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \Delta r_P \Delta q_P \\
 & = 2 \left[(W_{e_w}^t W_{e_w}^t) - (W_{w_w}^t W_{w_w}^t) \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
 & - \left[(W_{e_w}^{t-\Delta t} W_{e_w}^{t-\Delta t}) - (W_{w_w}^{t-\Delta t} W_{w_w}^{t-\Delta t}) \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P \\
 & = \left[2 \left(\frac{W_{E_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{W_{P_w}^t + W_{W_w}^t}{2} \right)^2 \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P \tag{3.44} \\
 & - \left[\left(\frac{W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P
 \end{aligned}$$

3.5.4.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left(\frac{UW}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \left[2(UW)_{P_w}^t - (UW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \sin q_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e \\
 &= 2 \left[\left(\frac{U_{new}^t + U_n^t + U_{sew}^t + U_s^t}{4} \right) W_{P_w}^t \right] r_P \sin q_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e \\
 &\quad - \left[\left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{4} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \right] r_P \sin q_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left(\frac{VW \cot q}{r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = \\
 &= \left[2(VW)_{P_w}^t - (VW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] \cot q_e r_{P_w} \sin q_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e \\
 &= 2 \left(\frac{V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t}{4} \right) W_{P_w}^t \cot q_e \sin q_P r_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e \\
 &\quad - \left(\frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}}{4} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e \sin q_P r_P \Delta r_P \Delta q_P dj_e
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.5.4.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{n_w}^{t+\Delta t} - \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{s_w}^{t+\Delta t} \right] \sin q_e \Delta q_P dj_e \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[r_{n_w}^2 \left(\frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - r_{s_w}^2 \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \sin q_e \Delta q_P dj_e
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin q} \frac{\partial}{\partial q} \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{f_w}^{t+\Delta t} - \left(\sin q \frac{\partial W}{\partial q} \right)_{b_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta j_e \quad (3.48) \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\sin q_{f_w} \left(\frac{W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dq_f} \right) - \sin q_{b_w} \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{dq_b} \right) \right] \Delta r_p \Delta j_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 q} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial j^2} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \right)_{e_w}^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\partial W}{\partial j} \right)_{w_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta q_p \quad (3.49) \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sin q_{e_w}} \left(\frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{\Delta j_e} \right) - \frac{1}{\sin q_{w_w}} \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{\Delta j_w} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

3.5.4.5 Discrétisation des autres termes à droite

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial U}{\partial j} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \frac{2}{\text{Re}} \left[2 \left(U_{e_w}^t - U_{w_w}^t \right) - \left(U_{e_w}^{t-\Delta t} - U_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
 &= \frac{4}{\text{Re}} \left(U_{e_w}^t - U_{w_w}^t \right) \Delta r_p \Delta q_p - \frac{2}{\text{Re}} \left(U_{e_w}^{t-\Delta t} - U_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta q_p \quad (3.50) \\
 &= \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{new}^t + U_{sew}^t}{2} \right) - \left(\frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p \\
 &\quad - \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \frac{2 \cot q}{r^2 \sin q} \left(\frac{\partial V}{\partial j} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt \\
 &= \frac{2}{\text{Re}} \left[2(V_{e_w}^t - V_{w_w}^t) - (V_{e_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w}^{t-\Delta t}) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
 &= \frac{4}{\text{Re}} \left[\left(\frac{V_{f_{ew}}^t + V_{b_{ew}}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_f^t + V_b^t}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \quad (3.51) \\
 &- \frac{2}{\text{Re}} \left[\left(\frac{V_{f_{ew}}^{t-\Delta t} + V_{b_{ew}}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left(\frac{W}{r^2 \sin^2 q} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_e} \right) W_{P_w}^{t+\Delta t} \Delta r_p \Delta q_p dj_e \quad (3.52)$$

3.5.4.6 Discrétisation du terme de pression

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t - \frac{1}{r \sin q} \left(\frac{\partial P}{\partial j} \right) r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \, dt = - (P_{e_w}^{t+\Delta t} - P_{w_w}^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 &= (P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

On réécrit l'équation de quantité de mouvement azimutale sous la forme généralisée :

$$A_{P_w} W_{P_w}^{t+\Delta t} = A_{N_w} W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} W_{F_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} W_{B_w}^{t+\Delta t} + A_{E_w} W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} W_{W_w}^{t+\Delta t} + S_w \quad (3.54)$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned}
 A_{N_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_n^2}{dr_n} \right) \sin \theta_e \Delta \theta_p d\varphi_e & A_{S_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{r_s^2}{dr_s} \right) \sin \theta_e \Delta \theta_p d\varphi_e \\
 A_{F_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin \theta_f}{d\theta_f} \right) \Delta r_p d\varphi_e & A_{B_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\sin \theta_b}{d\theta_b} \right) \Delta r_p d\varphi_e \quad (3.55) \\
 A_{E_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin \theta_e \Delta \varphi_E} \right) \Delta r_p \Delta \theta_p & A_{W_w} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin \theta_w \Delta \varphi_W} \right) \Delta r_p \Delta \theta_p
 \end{aligned}$$

$$A_{P_w} = A_{N_w} + A_{S_w} + A_{F_w} + A_{B_w} + A_{E_w} + A_{W_w} + \frac{3}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_p + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\sin q_e} \right) \Delta r_p \Delta q_p dj_e$$

$$\begin{aligned}
 S_w &= \frac{4W_{P_w}^t}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{1}{2} r_{n_w}^2 (U_n^t + U_{new}^t) (W_{P_w}^t + W_{N_w}^t) \sin q_e \Delta q_p dj_e + \frac{1}{2} r_{s_w}^2 (U_s^t + U_{sew}^t) (W_{P_w}^t + W_{S_w}^t) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} r_{n_w}^2 (U_n^{t-\Delta t} + U_{new}^{t-\Delta t}) (W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t}) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{1}{4} r_{s_w}^2 (U_s^{t+\Delta t} + U_{sew}^{t+\Delta t}) (W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t}) \sin q_e \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{1}{2} (V_f^t + V_{few}^t) (W_{F_w}^t + W_{P_w}^t) r_p \sin q_e \Delta r_p dj_e + \frac{1}{2} (V_{bew}^t + V_b^t) (W_{P_w}^t + W_{B_w}^t) r_p \sin q_e \Delta r_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} (V_f^{t-\Delta t} + V_{few}^{t-\Delta t}) (W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}) r_p \sin q_e \Delta r_p dj_e \\
 &- \frac{1}{4} (V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}) (W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t}) r_p \sin q_e \Delta r_p dj_e \\
 &- \frac{1}{2} (W_{E_w}^t + W_{P_w}^t)^2 r_p \Delta r_p \Delta q_p + \frac{1}{2} (W_{P_w}^t + W_{W_w}^t)^2 r_p \Delta r_p \Delta q_p + \frac{1}{4} (W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t})^2 r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 &- \frac{1}{2} (W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t})^2 r_p \Delta r_p \Delta q_p - \frac{1}{2} (U_{new}^t + U_n^t + U_{sew}^t + U_s^t) W_{P_w}^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} (U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}) W_{P_w}^{t-\Delta t} r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \tag{3.56} \\
 &- \frac{1}{2} (V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t) W_{P_w}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} (V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{1}{2} (U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t) W_{P_w}^t r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} (U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}) W_{P_w}^{t-\Delta t} r_p \sin q_e \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{1}{2} (V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t) W_{P_w}^t \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &+ \frac{1}{4} (V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot q_e r_p \sin q_p \Delta r_p \Delta q_p dj_e \\
 &- \frac{2}{\text{Re}} [(U_{new}^t + U_{sew}^t) - (U_n^t + U_s^t)] \Delta r_p \Delta q_p + \frac{1}{\text{Re}} [(U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t}) - (U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t})] \Delta r_p \Delta q_p \\
 &- \frac{2}{\text{Re}} [(V_{few}^t + V_{bew}^t) - (V_f^t + V_b^t)] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} [(V_{few}^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}) - (V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t})] \cot q_e \Delta r_p \Delta q_p \\
 &+ (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

3.5.5 Discrétisation des conditions aux limites

3.5.5.1 Pour la vitesse radiale U

$$A_{r=1}, U=0$$

$$\begin{aligned} A_{P_u} U_{P_u}^{t+\Delta t} = 0 &\Leftrightarrow A_{P_u} = 1, A_{E_u} = A_{W_u} = A_{N_u} = A_{S_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = 0, S_u = 0 \\ A_p(1, j, k) &= 1 \\ S_u(1, j, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$A_{r=R_2/R_1}, U=0$$

$$\begin{aligned} A_{P_u} U_{P_u} = 0 &\Leftrightarrow A_{P_u} = 1, A_{E_u} = A_{W_u} = A_{N_u} = A_{S_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = 0, S_u = 0 \\ A_{P_u}(IL-1, j, k) &= 1 \\ S_u(IL-1, j, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} A_{q=0}, \frac{\partial U}{\partial q} = 0 &\Rightarrow \frac{U_{F_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dq_f} = 0 \Rightarrow U_{P_u}^{t+\Delta t} = U_{F_u}^{t+\Delta t} \\ \Rightarrow A_{P_u} = A_{F_u} = 1, A_{E_u} = A_{W_u} = A_{N_u} = A_{S_u} = A_{B_u} = S_u = 0 \\ A_{P_u}(i, 1, k) &= 1 \\ A_{F_u}(i, 1, k) &= 1 \\ S_u(i, 1, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} A_{q=p}, \frac{\partial U}{\partial q} = 0 &\Rightarrow \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{dq_b} = 0 \Rightarrow U_{P_u}^{t+\Delta t} = U_{B_u}^{t+\Delta t} \\ \Rightarrow A_{P_u} = A_{B_u} = 1, A_{E_u} = A_{W_u} = A_{N_u} = A_{S_u} = A_{F_u} = S_u = 0 \\ A_{P_u}(i, JL, k) &= 1 \\ A_{B_u}(i, JL, k) &= 1 \\ S_u(i, JL, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.5.5.2 Pour la vitesse polaire V

$$\begin{aligned} A_{r=1}, V_{P_v}^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow A_{P_v} = 1, A_{E_v} = A_{W_v} = A_{N_v} = A_{S_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S_v = 0 \\ A_{P_v}(1, j, k) &= 1 \\ S_v(1, j, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

A $r = R_2/R_1, V = 0$

$$\begin{aligned} V_{P_v}^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow A_{P_v} = 1, A_{E_v} = A_{W_v} = A_{N_v} = A_{S_v} = A_{B_v} = A_{F_v} = S_v = 0 \\ A_{P_v}(iL, j, k) &= 1 \\ S_v(iL, j, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.62}$$

A $q = 0, V = 0$

$$\begin{aligned} V_{P_v}^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow A_{P_v} = 1, A_{E_v} = A_{W_v} = A_{N_v} = A_{S_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S_v = 0 \\ A_{P_v}(i, 1, k) &= 1 \\ S_{P_v}(i, 1, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

A $q = p, V = 0$

$$\begin{aligned} V_{P_v}^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow A_{P_v} = 1, A_{E_v} = A_{W_v} = A_{N_v} = A_{S_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S_v = 0 \\ A_{P_v}(i, JL-1, k) &= 1 \\ S_{P_v}(i, JL-1, k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

3.5.5.3 Pour la vitesse azimutale W

A $r = 1, W = \sin q$

$$\begin{aligned} W_{P_w}^{t+\Delta t} = \sin q &\Rightarrow A_{P_w} = 1, S_w = \sin q \\ A_{P_w}(1, j, k) &= 1 \\ S_w(1, j, k) &= \sin q_p(j) \end{aligned} \tag{3.65}$$

A $r = R_2/R_1,$

$$\begin{aligned} W_{P_w}^{t+\Delta t} &= \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \sin \theta \Rightarrow \\ A_{P_w} = 1, S_w &= \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \sin \theta, A_{E_w} = A_{W_w} = A_{N_w} = A_{S_w} = A_{B_w} = A_{F_w} = 0 \\ A_{P_w}(iL-1, j, k) &= 1 \\ S_w(iL-1, j, k) &= \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \sin \theta \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } q = 0, \frac{\partial W}{\partial q} /^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow \frac{W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dq_f} = 0 \Rightarrow W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t} = 0 \Rightarrow W_{P_w}^{t+\Delta t} = W_{F_w}^{t+\Delta t} \\
 \Rightarrow A_{P_w} = 1, A_{F_w} = 1, A_{E_w} = A_{W_w} = A_{N_w} = A_{S_w} = A_{B_w} = S_w = 0 \\
 A_{P_w}(i, 1, k) &= 1 \\
 A_{F_w}(i, 1, k) &= 1 \\
 S_w(i, 1, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } \theta = \pi, \frac{\partial W}{\partial \theta} /^{t+\Delta t} = 0 &\Rightarrow \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{d\theta_f} = 0 \Rightarrow W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t} = 0 \Rightarrow W_{P_w}^{t+\Delta t} = W_{B_w}^{t+\Delta t} \\
 \Rightarrow A_{P_w} = A_{B_w} = 1, A_{E_w} = A_{W_w} = A_{N_w} = A_{S_w} = A_{F_w} = S_w = 0 \\
 A_{P_w}(i, JL - 1, k) &= 1 \\
 A_{B_w}(i, JL - 1, k) &= 1 \\
 S_w(i, JL - 1, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.6 Equation de discrétisation de la pression

Les équations de quantité de mouvement discrétisées, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 a_n U_n &= \sum a_i U_i + b_u + (P_N - P_P) A_n \\
 a_s U_s &= \sum a_i U_i + b_u + (P_P - P_S) A_s \\
 a_f V_f &= \sum a_i V_i + b_v + (P_F - P_P) A_f \\
 a_b V_b &= \sum a_i V_i + b_v + (P_P - P_B) A_b \\
 a_e W_e &= \sum a_i W_i + b_w + (P_E - P_P) A_e \\
 a_w W_w &= \sum a_i W_i + b_w + (P_P - P_W) A_w
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

L'indice i indique les points voisins du point considéré dans les trois directions. b_u , b_v et b_w sont les termes des sources contenant les autres termes que ceux de la pression. On peut réécrire le système (3.69) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U_n &= \hat{U}_n + d_n(P_N - P_P) \\
 U_s &= \hat{U}_s + d_s(P_P - P_S) \\
 V_f &= \hat{V}_f + d_f(P_F - P_P) \\
 V_b &= \hat{V}_b + d_b(P_P - P_B) \\
 W_e &= \hat{W}_e + d_e(P_E - P_P) \\
 W_w &= \hat{W}_w + d_w(P_P - P_W)
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Les vitesses $\hat{U}_n, \hat{U}_s, \hat{V}_f, \hat{V}_b, \hat{W}_e, \hat{W}_w$, sont dites pseudo-vitesses, elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_n &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_n} & \hat{U}_s &= \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_s} \\
 \hat{V}_f &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_f} & \hat{V}_b &= \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_b} \\
 \hat{W}_e &= \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_e} & \hat{W}_w &= \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

On considère l'équation de continuité qui a été intégrée dans un volume de contrôle typique non décalé. Elle est sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t}) \sin \theta_p \Delta \theta_p \Delta \varphi_p + (V_f^{t+\Delta t} \sin \theta_f - V_b^{t+\Delta t} \sin \theta_b) r_p \Delta r_p \Delta \varphi_p + \\
 + (W_w^{t+\Delta t} - W_e^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

On remplace les vitesses présentent dans cette équation par leurs formules (3.70), et on obtient :

$$\begin{aligned}
 r_n^2 [\hat{U}_n + d_n(P_N^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t})] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p - r_s^2 [\hat{U}_s + d_s(P_P^{t+\Delta t} - P_S^{t+\Delta t})] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \\
 + [\hat{V}_f + d_f(P_F^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t})] \sin q_f r_p \Delta r_p \Delta j_p - [\hat{V}_b + d_b(P_P^{t+\Delta t} - P_B^{t+\Delta t})] \sin q_b r_p \Delta r_p \Delta j_p \\
 + [\hat{W}_w + d_w(P_P^{t+\Delta t} - P_W^{t+\Delta t})] r_p \Delta r_p \Delta q_p - [\hat{W}_e + d_e(P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t})] r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

On simplifie cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left(r_n^2 \hat{U}_n - r_s^2 \hat{U}_s \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p + \left(\hat{V}_f \sin q_f - \hat{V}_b \sin q_b \right) r_p \Delta r_p \Delta j_p + \left(\hat{W}_w - \hat{W}_e \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 & + r_n^2 d_n \left(P_N^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p - r_s^2 d_s \left(P_P^{t+\Delta t} - P_S^{t+\Delta t} \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p + \\
 & d_f \left(P_F^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right) \sin q_f r_p \Delta r_p \Delta j_p - d_b \left(P_P^{t+\Delta t} - P_B^{t+\Delta t} \right) \sin q_b r_p \Delta r_p \Delta j_p + \\
 & + d_w \left(P_P^{t+\Delta t} - P_W^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p - d_e \left(P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

On réécrit l'équation de pression sous la forme :

$$A_p P_P^{t+\Delta t} = A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S_p \tag{3.75}$$

A partir de l'équation (3.74) on détermine les coefficients $A_p, A_N, A_S, A_E, A_W, A_F, A_B, S$.

$$\begin{aligned}
 A_E &= d_e r_p \Delta r_p \Delta q_p & A_W &= d_w r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 A_N &= r_n^2 d_n \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p & A_S &= r_s^2 d_s \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \\
 A_F &= d_f \sin q_f r_p \Delta r_p \Delta j_p & A_B &= d_b \sin q_b r_p \Delta r_p \Delta j_p
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B$$

$$\begin{aligned}
 S_p &= \left(r_s^2 \hat{U}_s - r_n^2 \hat{U}_n \right) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p + \left(\hat{V}_b \sin q_b - \hat{V}_f \sin q_f \right) r_p \Delta r_p \Delta j_p \\
 &+ \left(\hat{W}_e - \hat{W}_w \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation de la pression, on utilise un champ de vitesse estimé, qui sera introduit comme suit :

$$\begin{aligned}
 a_n U_n^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left(P_N^* - P_P^* \right) A_n \\
 a_s U_s^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left(P_P^* - P_S^* \right) A_s \\
 a_f V_f^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left(P_P^* - P_F^* \right) A_f \\
 a_b V_b^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left(P_P^* - P_B^* \right) A_b \\
 a_e W_e^* &= \sum a_i W_i^* + b_w + \left(P_P^* - P_E^* \right) A_e \\
 a_w W_w^* &= \sum a_i W_i^* + b_w + \left(P_P^* - P_W^* \right) A_w
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

On suppose que les valeurs de la vitesse et de pression seront égales à une estimation et une correction :

$$\begin{aligned}
 U &= U^* + U' \\
 V &= V^* + V' \\
 W &= W^* + W' \\
 P &= P^* + P'
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

Les estimations des vitesses et de pression portent une étoile, et les corrections portent une prime à l'exposant.

Donc :

$$\begin{aligned}
 U_n &= U_n^* + U_n' \\
 U_s &= U_s^* + U_s' \\
 V_f &= V_f^* + V_f' \\
 V_b &= V_b^* + V_b' \\
 W_e &= W_e^* + W_e' \\
 W_w &= W_w^* + W_w'
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 a_n U_n' &= \sum a_i U_i' + (P_N' - P_P') A_n \\
 a_s U_s' &= \sum a_i U_i' + (P_P' - P_S') A_s \\
 a_f V_f' &= \sum a_i V_i' + (P_F' - P_P') A_f \\
 a_b V_b' &= \sum a_i V_i' + (P_P' - P_B') A_b \\
 a_e W_e' &= \sum a_i W_i' + (P_E' - P_P') A_e \\
 a_w W_w' &= \sum a_i W_i' + (P_P' - P_W') A_w
 \end{aligned}
 \tag{3.80}$$

Une approximation justifiée par Patankar[23], consiste à négliger les sommes $\sum a_i U_i'$, $\sum a_i V_i'$, $\sum a_i W_i'$. Donc, les corrections des vitesses ne seront que des corrections de la pression :

$$\begin{aligned}
 a_n U_n' &= (P_N' - P_P') A_n \\
 a_s U_s' &= (P_P' - P_S') A_s \\
 a_f V_f' &= (P_F' - P_P') A_f \\
 a_b V_b' &= (P_P' - P_B') A_b \\
 a_e W_e' &= (P_E' - P_P') A_e \\
 a_w W_w' &= (P_P' - P_W') A_w
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Le système (3.81) exprime de façon claire que les corrections de vitesse sont directement liées aux corrections de pression. Les relations entre les vitesses et leurs corrections sont donc comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_n &= U_n^* + d_n (P_N' - P_P') \\
 U_s &= U_s^* + d_s (P_P' - P_S') \\
 V_f &= V_f^* + d_f (P_F' - P_P') \\
 V_b &= V_b^* + d_b (P_P' - P_B') \\
 W_e &= W_e^* + d_e (P_E' - P_P') \\
 W_w &= W_w^* + d_w (P_P' - P_W')
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Les vitesses du système (3.82) doivent satisfaire l'équation de continuité, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 &r_n^2 [U_n^* + d_n (P_N' - P_P')] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p - r_s^2 [U_s^* + d_s (P_P' - P_S')] \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \\
 &+ [V_f^* + d_f (P_F' - P_P')] \sin q_f r_p \Delta r_p \Delta j_p - [V_b^* + d_b (P_P' - P_B')] \sin q_b r_p \Delta r_p \Delta j_p \\
 &+ [W_w^* + d_w (P_P' - P_W')] r_p \Delta r_p \Delta q_p - [W_e^* + d_e (P_E' - P_P')] r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

On écrit cette équation sous la forme :

$$A_p P_P' = A_E P_E' + A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + A_F P_F' + A_B P_B' + S_p \tag{3.84}$$

Avec les coefficients :

$$\begin{aligned}
 A_E &= d_e r_p \Delta r_p \Delta q_p & A_W &= d_w r_p \Delta r_p \Delta q_p \\
 A_N &= r_n^2 d_n \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p & A_S &= r_s^2 d_s \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p \\
 A_F &= d_f \sin q_f r_p \Delta r_p \Delta j_p & A_B &= d_b \sin q_b r_p \Delta r_p \Delta j_p \\
 S'_p &= (r_s^2 U_s^* - r_n^2 U_n^*) \sin q_p \Delta q_p \Delta j_p + (V_b^* \sin q_b - V_f^* \sin q_f) r_p \Delta r_p \Delta j_p \\
 &\quad + (W_w^* - W_e^*) r_p \Delta r_p \Delta q_p
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Donc pour trouver les corrections de la pression on résout le système représenté par l'équation (3.81). Ensuite, on utilise ces corrections pour déterminer les corrections de la vitesse.

3.7 Résolution des équations discrétisées

Après la discrétisation des équations qui modélisent le problème, on obtient un système d'équations algébriques. Ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$[A]\{X\} = \{B\} \tag{3.86}$$

[A] C'est la matrice des coefficients connus.

{X} C'est le vecteur des inconnus.

{B} Vecteur de charge.

Pour résoudre ce système d'équation, on utilise la méthode de Balayage, avec l'algorithme de Thomas suivant les directions radiales et polaires et l'algorithme tri diagonal cyclique suivant la direction azimutale.

3.8 La méthode de balayage

La méthode de Balayage est une méthode de résolution semi itérative, elle consiste à déterminer les valeurs du paramètre Φ sur chaque ligne du maillage indépendamment des autres lignes, donc le système devient un système à matrice tri diagonale.

Le système d'équation algébrique s'écrit sous la forme :

$$[A]\{\Phi\} = \{b\} \tag{3.87}$$

Ou :

[A]: Matrice des coefficients.

$\{\Phi\}$: Vecteur des inconnus.

Et représenter par l'équation de discrétisation suivante :

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + S \quad (3.88)$$

3.8.1 Balayage suivant r

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S_r \quad (3.89)$$

Avec :

$$S_r = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_F \Phi_F + A_B \Phi_B \quad (3.90)$$

Ce système est tri diagonal et peut-être résolu par l'algorithme de Thomas. Et on obtient la solution $\Phi^{(r)}$.

3.8.2 Balayage suivant q

$$A_P \Phi_P = A_B \Phi_B + A_F \Phi_F + S_q \quad (3.91)$$

Avec :

$$S_q = A_E \Phi_E^{(r)} + A_W \Phi_W^{(r)} + A_N \Phi_N^{(r)} + A_S \Phi_S^{(r)} \quad (3.92)$$

Ce système est tri diagonal, et peut-être résolu par l'algorithme de Thomas et on obtient la solution $\Phi^{(q)}$.

3.8.3 Balayage suivant j

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S_j \quad (3.93)$$

Avec :

$$S_j = A_N \Phi_N^{(q)} + A_S \Phi_S^{(q)} + A_F \Phi_F^{(q)} + A_B \Phi_B^{(q)} \quad (3.94)$$

Ce système est tri diagonal, et peut-être résolu par l'algorithme de Thomas et on obtient la solution $\Phi^{(j)}$.

Donc le système global est tri diagonal cyclique. Et peut-être résolu par l'algorithme tri diagonal cyclique.

$\Phi^{(j)}$: représente la solution obtenue après les trios balayages suivant r, q et j .

3.9 Algorithme de Thomas

Cet algorithme est appelé aussi TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm).

Il est utilisé pour résoudre un système tri diagonal d'équations algébrique:

$$[A]\{\Phi\} = \{b\} \tag{3.95}$$

Avec :

$[A]$ Matrice des coefficients.

$\{\Phi\}$ Vecteur des inconnues.

$\{b\}$ Vecteur de charge.

La matrice $[A]$, doit être tri diagonale. On utilise l'algorithme de Thomas pour résoudre le système d'équations.

Soit le système tri diagonal d'équations algébriques :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i \Phi_{i-1} + d_i \tag{3.96}$$

a_i, b_i, c_i, d_i : sont des coefficients

Φ_{i+1} : est la valeur de la variable dépendante dans le point à droite du point i

Φ_{i-1} : est la valeur de la variable dépendante dans le point à gauche du point i .

Si le premier point est 1 et le nombre de point est N , on doit avoir :

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0. \tag{3.97}$$

On prend la relation de récurrence de la forme :

$$\Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + Q_i \tag{3.98}$$

Avec :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \tag{3.99}$$

Avec :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ Et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \tag{3.100}$$

Ces deux paramètres sont connus. Aussi il est facile de démontrer que :

$$P_N = 0 \text{ Et } T_N = Q_N. \tag{3.101}$$

Les étapes de calcul de l’algorithme de Thomas sont :

1. Calcul de P_1 et Q_1
2. calculer P_i et Q_i pour $i=1, \dots, N$
3. on pose $T_N = Q_N$
4. on utilise l’équation (3.98), $i= N - 1, N - 2, \dots, 1$ pour obtenir $\Phi_{N-1}, \Phi_{N-2}, \dots, \Phi_1$

Cet algorithme converge rapidement.

3.10 Algorithme tri diagonal cyclique :

Un système d’équation tri diagonal cyclique est représenté par l’équation indicielle suivante :

$$a_k \Phi_k = b_k \Phi_{kkk} + c_k \Phi_{kk} + d_k \tag{3.102}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, KL$$

Avec :

$$kkk = \begin{cases} k + 1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases} \tag{3.103}$$

Et :

$$kk = \begin{cases} k - 1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases} \tag{3.104}$$

Tous les éléments a_k, b_k, c_k et d_k sont supposés connus.

On introduit une relation de récurrence

$$\Phi_k = E_k \Phi_{kkk} + F_k \Phi_{kl} + G_k \tag{3.105}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, kL - 1$$

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1}, F_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ Et } G_1 = \frac{d_1}{a_1} \tag{3.106}$$

Cette relation est aussi vrai pour kk :

$$\Phi_{kk} = E_{kk} \Phi_k + F_{kk} \Phi_{kL} + G_{kk} \tag{3.107}$$

On remplace l’équation (3.105) dans (3.102) on obtint :

$$\Phi_k = \left[\frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}} \right] \Phi_{kkk} + \left[\frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \right] \Phi_{KL} + \left[\frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}} \right] \quad (3.108)$$

(3.44) et (3.46) sont identiques. On obtient

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}}, \quad F_k = \frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \quad \text{et} \quad G_k = \frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}}, \quad k = 2, 3, \dots, KL-1 \quad (3.109)$$

Connaissant E_1, F_1, G_1 , on calcule, avec les relations de récurrence précédentes, tous les $E_k, F_k, G_k, k = 2, 3, \dots, KL-1$

Pour calculer les $\Phi_k, k = KL-1, KL-2, \dots, 3, 2, 1$ avec la relation de récurrence (3.108), il nous faut la valeur de Φ_{kl} qui sera déterminée dans ce qui suit.

$$a_k \Phi_k = b_k \Phi_{kkk} + c_k \Phi_{kk} + d_k \quad (3.110)$$

Si $k = KL$

$$\begin{aligned} a_{KL} \Phi_{KL} &= b_{KL} \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + d_{KL} \\ P_1 \Phi_{KL} &= Q_1 \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_1 \end{aligned} \quad (3.111)$$

avec :

$$P_1 = a_{KL}, Q_1 = b_{KL}, R_1 = d_{KL}$$

P_1, Q_1, R_1 sont connus.

D'après (3.105) on trouve :

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_2 + F_1 \Phi_{KL} + G_1 \quad (3.112)$$

On utilise cette équation dans (3.111), et on obtient :

$$(P_1 - Q_1 F_1) \Phi_{KL} = (Q_1 E_1) \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + (Q_1 G_1 + R_1) \quad (3.113)$$

$$P_2 \Phi_{KL} = Q_2 \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_2$$

De l'équation (3.105) on a :

$$\Phi_2 = E_2 \Phi_3 + F_2 \Phi_{KL} + G_2 \quad (3.114)$$

On utilise cette équation dans l'équation précédente :

$$(P_2 - Q_2 F_2) \Phi_{KL} = (Q_2 E_2) \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + (Q_2 G_2 + R_2)$$

Qui est réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} P_3 \Phi_{KL} &= Q_3 \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_3 \\ P_3 &= P_2 - Q_2 F_2 \\ Q_3 &= Q_2 E_2 \\ R_3 &= Q_2 G_2 + R_2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Et on remplace Φ_3 dans $\Phi_4 \dots$ etc.

On continue les procédures jusqu'à l'obtention de l'équation :

$$P_{KL-1}\Phi_{KL} = Q_{KL-1}\Phi_{KL-1} + c_{KL}\Phi_{KL-1} + R_{KL-1} = (Q_{KL-1} + c_{KL})\Phi_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.116)$$

Et on obtient trois relations de récurrence :

$$\begin{aligned} P_K &= P_{K-1} - Q_{K-1}F_{K-1} \\ Q_K &= Q_{K-1}E_{K-1} \\ R_K &= Q_{K-1}G_{K-1} + R_{K-1} \end{aligned} \quad (3.117)$$

Connaissant P_1, Q_1, R_1 , on calcule tous les $P_K, Q_K, R_K, K = 2, 3, \dots, KL - 1$.

$$P_{KL-1}\Phi_{KL} = (Q_{KL-1} + c_{KL})\Phi_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.118)$$

avec :

$$\Phi_{KL-1} = (E_{KL-1} + F_{KL-1})\Phi_{KL} + G_{KL-1}$$

On remplace cette équation dans l'équation précédente, et on trouve :

$$P_{KL-1}\Phi_{KL} = (Q_{KL-1} + c_{KL})[(E_{KL-1} + F_{KL-1})\Phi_{KL} + G_{KL-1}] + R_{KL-1} \quad (3.119)$$

A partir de cette équation on trouve la relation de Φ_{KL}

$$\Phi_{KL} = \frac{(Q_{KL-1} + c_{KL})G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - (Q_{KL-1} + c_{KL})(E_{KL-1} + F_{KL-1})} \quad (3.120)$$

Finalement, le calcul de Φ_{KL} permet le calcul des $\Phi_K, K = KL - 1, KL - 2, \dots, 3, 2, 1$

3.11 L'algorithme SIMPLER

Les étapes de l'algorithme de SIMPLER sont résumés comme suit :

1. On commence les calculs par un champ de vitesse initial U, V, W .
2. On calcule les pseudo vitesse \hat{U}, \hat{V} et \hat{W} .
3. On utilise les pseudo vitesses pour calculer la source de l'équation de discrétisation de la pression.
4. Résoudre le système d'équation de discrétisation et obtenir un champ de pression considéré comme une estimation de la pression P^* .
5. On utilise P^* dans les sources des équations de U^* et V^* et W^* .
6. Résoudre les systèmes des équations de U^*, V^* et W^* et obtenir les estimations des vitesses U^*, V^* et W^*

7. Utiliser U^* , V^* et W^* dans les sources de l'équation de l'équation de P' .
8. Résoudre le système d'équation de P' et obtenir la correction de pression.
9. on corrige le champ de vitesse : $U = U^* + U'$, $V = V^* + V'$, $W = W^* + W'$
10. On vérifie la convergence. S'il y'a convergence on arrête les calculs. Sinon on retourne à l'étape 2 pour refaire les calculs.

3.12 Atteinte du régime permanent ou convergence

Dans notre travail, on a fixé plusieurs critères qui contrôlent la convergence du code de calcul.

(i)- Il y a d'abord le critère de convergence de type numérique. Il est défini par :

$$\text{dif } \phi = \sum_{\phi} |\phi^n - \phi^{n-1}|_{\max} \leq \varepsilon \quad (3.121)$$

où ϕ représente les variables U, V et W et n le nombre d'itérations. Dans cette étude, le critère de convergence ε est fixé à 10^{-4} .

(ii)- On vérifie aussi la physique du problème par la satisfaction des bilans globaux massiques et thermiques dans tout le domaine. Pour cela on contrôle l'égalité des débits massiques:

$$\sum Q_{\text{entrant}} = \sum Q_{\text{sortant}}.$$

(iii)- Enfin on vérifie, graphiquement, en des points du domaine aléatoirement choisis qu'il n'y a plus de variations temporelles de toute variable associée à ces points.

Chapitre 4 Résultats et discussions

Dans ce chapitre on expose les résultats concernant un écoulement entre deux sphères concentriques co-rotatives ayant les rayons $R_1 = 1$ et $R_2 = 1.5$. Ce qui donne un rapport des rayons $h = 1.5$, un rapport d'aspect $b = 0.5$, un rapport des vitesses $Ro = 0.5$. Les résultats ont été obtenus pour un domaine de variation du nombre de Reynolds: $1 \leq Re \leq 4000$.

On utilisera un maillage uniforme dans tous les directions qui correspond à 32 points dans la direction radiale (IL=32), 189 points dans la direction polaire (JL=189), et 32 points dans la direction azimutale (KL=32). Ce qui fait que le maillage contient au total 193 536 points. Pour effectuer les calculs itératifs, on utilise un PC Pentium4 équipé d'un processeur ayant une fréquence égale à 1.7 Mhz et une capacité mémoire RAM de 512 Mo. On a travaillé avec un pas du temps $\Delta t = 10^{-5}$ pour $Re = 1$ et un pas du temps $\Delta t = 10^{-3}$ pour $Re \in [500,4000]$.

4.1 Le problème de Stokes.

Dans le cas d'une faible rotation, on peut faire l'approximation d'un écoulement permanent, incompressible et axisymétrique. Cet écoulement rotatif est unidirectionnel (avec la seule composante azimutale de la vitesse) et bidimensionnel (la vitesse est en fonction de r et q). Avec les approximations citées, l'écoulement (que nous appelons écoulement de Stokes) est modélisé comme suit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\partial (W \sin q)}{\partial q} \right] = 0 \quad (4.1)$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$A \ r = 1, \ W = \sin q \quad (4.2)$$

$$A \ r = 1.5, \ W = 0.75 \sin q \quad (4.3)$$

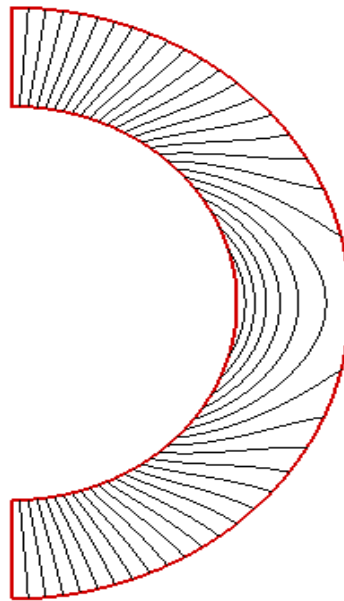
$$A \ q = 0, \ W = 0 \quad (4.4)$$

$$A \ q = p, \ W = 0 \quad (4.5)$$

L'utilisation de la méthode de séparation des variables permet l'obtention de la solution :

$$W(r, q) = \left[\frac{11}{38} r + \frac{27}{38} \frac{1}{r^2} \right] \sin q \tag{4.6}$$

Cette solution est graphiquement représentée sur la figure (4.1). Brièvement elle illustre la décroissance radiale monotone de la vitesse azimutale de la sphère intérieure à la sphère extérieure. Elle montre la décroissance polaire de la vitesse entre l'équateur et les pôles.



**Figure (4.1) : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re =1)
du problème de Stokes**

Les gradients de pression de cet écoulement de Stokes peuvent être approximativement déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &\approx \frac{W^2(r, q)}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} &\approx \frac{W^2(r, q)}{r} \cot(q) \end{aligned} \tag{4.7}$$

La valeur absolue du moment axial non dimensionnel de la force de cisaillement à la surface de chaque sphère est égale à 17.86.

4.2 Cas d'une faible corotation : $Re = 1$

Similaire à la solution analytique, le champ de l'écoulement obtenu numériquement est stationnaire et axisymétrique. Le mouvement principal est la corotation dans la direction j .

La vitesse azimutale est plus élevée à l'équateur et diminue vers les pôles ou elle s'annule.

Dans la direction radiale, elle diminue entre les sphères intérieure et extérieure. Sa distribution spatiale dans un plan méridien est illustrée dans la **figure (4.2)**.

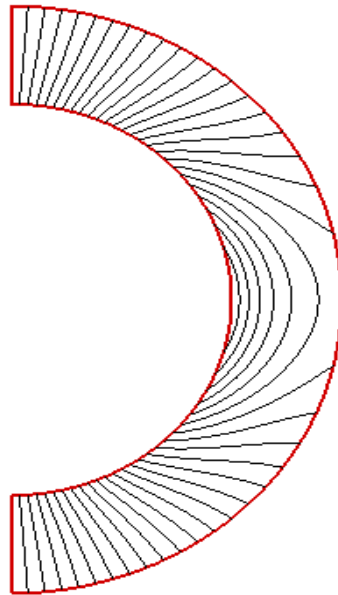


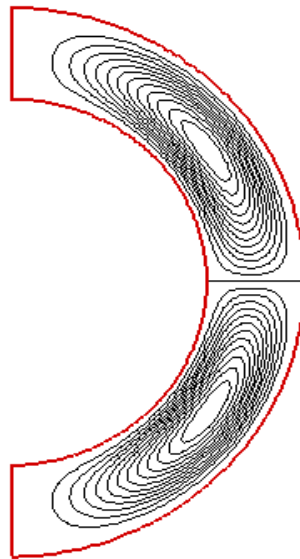
Figure (4.2): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=1$)

Elle est qualitativement et quantitativement similaire à celle obtenue par la solution de Stokes. Cependant, le mouvement principale du à la rotation des sphères induit un très faible mouvement secondaire dans un plan méridien : le maximum absolu de la vitesse radiale est

$U_{\max} = 3.91 \cdot 10^{-4}$ tandis que le maximum absolu de la vitesse polaire est $V_{\max} = 8.64 \cdot 10^{-4}$.

A l'équateur, un très faible déséquilibre entre le gradient de la force centrifuge génère un écoulement radial dont le courant prend naissance du voisinage de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Dès qu'il atteint la sphère extérieure, il se sépare en deux parties en suivant les hémisphères extérieurs vers les pôles.

Une fois aux pôles, l'écoulement suit les hémisphères vers la direction de l'équateur. Ce mouvement forme les enveloppes de deux cellules englobant l'écoulement secondaire. Donc, le mouvement secondaire (bien qu'infinésimal) dans le plan méridien est représenté par deux cellules contrarotatives (écoulement d'Ekman) séparés par l'équateur comme l'indique la **figure (4.3)**.



**Figure (4.3): Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien
($Re=1$)**

La distribution de pression dans le plan méridien est montrée dans la **figure (4.4)**. On voit clairement que la pression augmente dans la direction radiale, surtout à l'équateur. Dans la direction polaire, la pression est plus élevée à l'équateur et diminue rapidement en direction des pôles. La valeur absolue du Torque axial des forces de cisaillement aux surfaces des

sphères est égal à $T = 17.83$. Cette valeur est très proche de celle obtenue par la solution de Stokes.

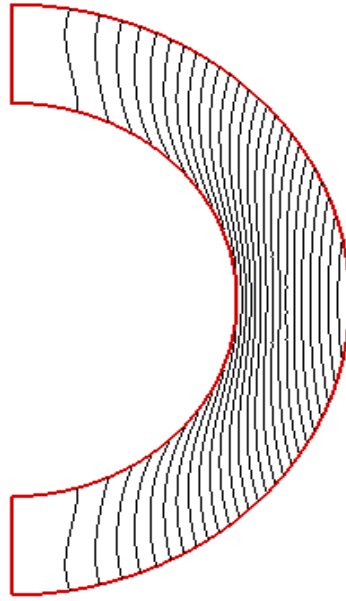


Figure (4.4): Isobares dans le plan méridien ($Re=1$)

Donc, pour un faible nombre de Reynolds (de l'ordre de 1), nous pouvons approximativement affirmer que l'écoulement est principalement dans la direction azimutale et que la solution exacte de Stokes est clairement satisfaisante.

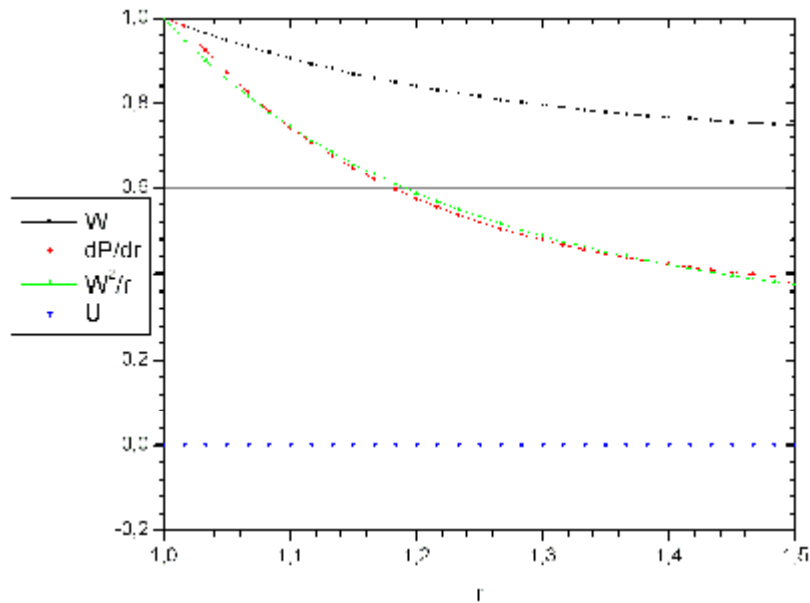


Figure (4.5): Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur ($Re=1$)

4.3 Le cas d'une rotation modérée ($Re = 500$).

C'est un cas d'un nombre de Reynolds modéré pour lequel les forces de cisaillement à la surface des sphères augmentent d'une manière significative et que l'écoulement secondaire s'intensifie. Le champ d'écoulement est aussi stationnaire et axisymétrique.

La distribution de la vitesse azimutale dans le plan méridien est indiquée dans la **figure (4.6)**.

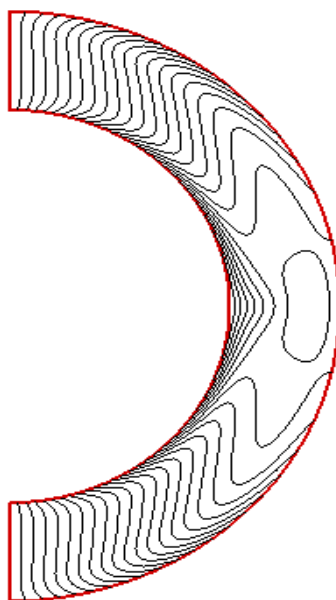


Figure (4.6): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=500$)

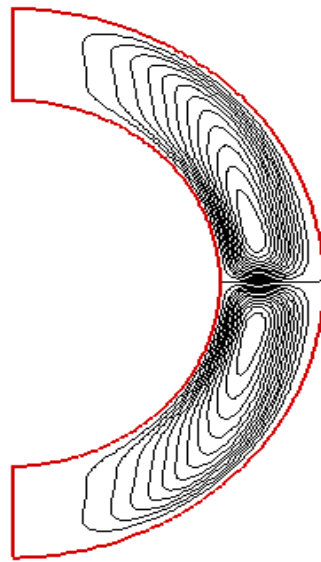
Au voisinage de l'équateur, nous notons qu'à partir de la sphère intérieure vers la sphère extérieure, la vitesse azimutale diminue radialement pour atteindre un minimum local puis augmente en direction de la sphère extérieure.

L'existence de ce minimum local est due à la forte diminution de la vitesse azimutale causée par l'augmentation de la force de cisaillement, lorsque le nombre de Reynolds est augmenté. Cette distribution est différente de celle du cas $Re = 1$ pour lequel la décroissance de la vitesse azimutale de la sphère intérieure vers la sphère extérieure est monotone. De plus, loin de l'équateur, nous notons que les isotachs de la vitesse azimutale sont courbés au voisinage des surfaces sphériques mais sans variation axiale loin de ces surfaces.

Le domaine d'écoulement peut être divisé en deux zones séparées par un cylindre vertical (virtuel) et tangent à la sphère intérieure. A l'intérieur de ce cylindre, la distribution de la vitesse azimutale est approximativement axialement invariante loin des surfaces sphériques ou l'effet visqueux est faible.

Cependant, proches des surfaces sphériques, nous avons des couches d'Eckman avec des variations axiales importantes. A l'extérieur du cylindre mentionné nous avons une variation radiale significative de la vitesse azimutale proche des sphères. L'épaisseur de la couche

d'Eckman à la surface de la sphère intérieure augmente en s'approchant de l'équateur. A l'équateur, le déséquilibre local du gradient de pression radial et l'accélération centrifuge cause un écoulement radial allant du voisinage de la sphère intérieure vers la sphère extérieure en générant deux cellules contrarotatives qui forment l'écoulement secondaire dans le plan méridien (aussi un écoulement d'Eckman). Cet écoulement secondaire, représenté dans la **figure (4.7)** possède des vitesses plus élevées que celles du cas $Re = 1$: le maximum absolu de la vitesse radiale a la valeur $U_{\max} = 7.99 \cdot 10^{-2}$ et celui de la vitesse polaire est $V_{\max} = 9.17 \cdot 10^{-2}$. Aussi, les centres des cellules sont situés proches de l'équateur.



**Figure (4.7): Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien
(Re=500)**

La distribution de pression dans le plan méridien est représentée dans la **figure (4.8)**.

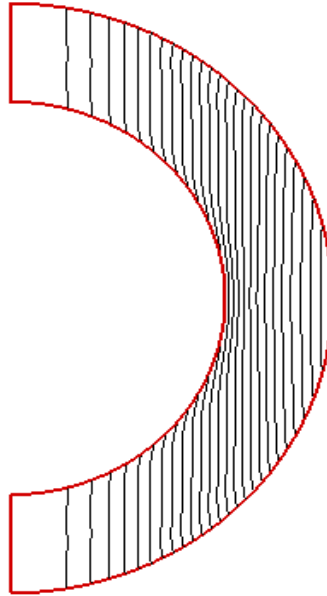


Figure (4.8): Isobares dans le plan méridien (Re=500)

Proche de l'équateur, la pression augmente de la sphère intérieure vers celle, extérieure. Et dans la direction polaire elle diminue de l'équateur vers les pôles. Les isobares méridienne sont presque des lignes droites et parallèles à l'axe de rotation avec une augmentation de la valeur de la pression en s'éloignant perpendiculairement de cet axe. Cette distribution de la pression peut être approximativement expliquée ci-après. La différentielle totale de la pression axisymétrique est définie par :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial q} dq \quad (4.8)$$

En effet, en supposant approximativement (à partir des équations de quantité de mouvement polaire et radiale) que les gradients méridiens de pression sont modélisés par :

$$\frac{\partial P}{\partial r} \approx \frac{W^2}{r} \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \approx \frac{W^2}{r} \cot(q)$$

Ces approximations mieux vérifiées loin des parois et de l'équateur. Donc :

$$dP = \frac{W^2}{r} dr + W^2 \cot(q) dq \tag{4.10}$$

Comme le long d'une isobare : $dP = 0$

$$0 = \frac{dr}{r} + \cot(q) dq \tag{4.11}$$

On obtient de cette équation la solution suivante :

$$r \sin(q) = \text{Constante (rayon cylindrique constant)}. \tag{4.12}$$

Donc les isobares méridiennes sont des cylindres verticaux parallèle à l'axe de rotation à une distance normale à l'axe égale à $r \sin(q)$.

L'effet visqueux près des surfaces sphériques a un faible effet sur la distribution citée. La valeur absolue du Torque axial non dimensionnel des forces de cisaillement aux surfaces des sphères est égale à 38.77, qui est très supérieure à celle obtenue pour $Re = 1$.

L'augmentation du Torque est causée par l'augmentation des forces de cisaillement aux surfaces des sphères.

A partir de la **figure (4.9)**, on voit qu'il y'a un déséquilibre entre le gradient de pression et l'accélération centrifuge à l'équateur. Et que la vitesse azimutale subit une décroissance, elle atteint un minimum local ensuite elle augmente vers la sphère extérieure. La décroissance radiale de la vitesse azimutale est principalement due à l'augmentation du nombre de Reynolds.

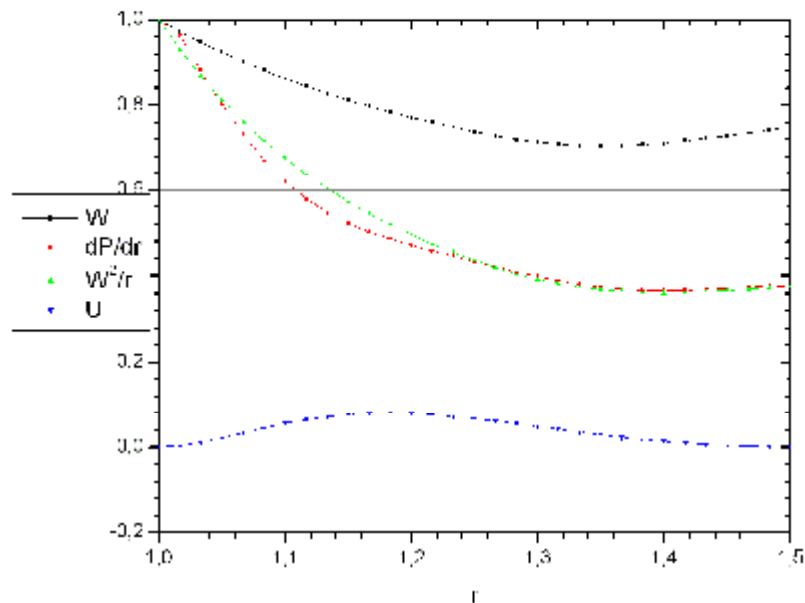


Figure (4.9): Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur ($Re=500$)

4.4 Cas avec $Re \geq 1000$

Lorsque le nombre de Reynolds est augmenté à des valeurs supérieures ou égales à 1000, on obtient un écoulement différent de celui obtenu avec $Re = 500$. Le mouvement principal (la rotation azimutale) est illustré dans les **figures (4.10), (4.15), (4.19), (4.23)**.

Les écoulements secondaires dans le plan méridien sont illustrés dans les **figures (4.11), (4.16), (4.20), (4.24)**, et les champs de pression sont présentés dans les **figures (4.12), (4.17), (4.21), (4.25)**.

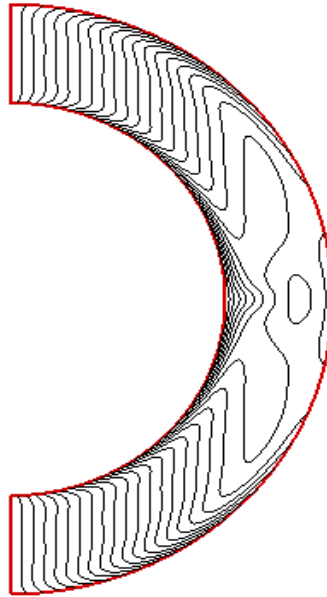
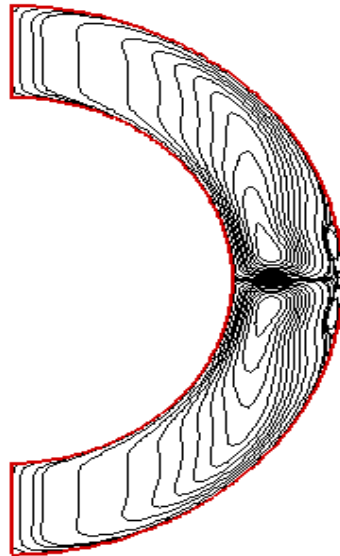


Figure (4.10): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=1000)

La distribution de la vitesse azimutale montre que l'épaisseur de la couche d'Eckman (près des surfaces sphériques) diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Loin de l'équateur et des surfaces sphériques (ou l'effet visqueux est important), l'écoulement n'a aucune variation axiale comme prévu par le théorème de Taylor-Proudman pour les écoulements rotatifs avec une grande rotation globale.

Les écoulements secondaires (dans le plan méridien) sont différents de ceux obtenus avec $Re = 500$.



**Figure (4.11) : Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien
(Re=1000)**

La différence principale est l'éclatement des cellules de l'écoulement secondaire (les cellules d'Eckman) dans le plan méridien : deux vortex sont générés de la sphère extérieure, proche de l'équateur. Chaque vortex est contrarotatif à la cellule dont il s'est séparé.

L'éclatement des cellules de l'écoulement secondaire représente une bifurcation de l'écoulement causée par l'augmentation du paramètre du contrôle (le nombre de Reynolds).

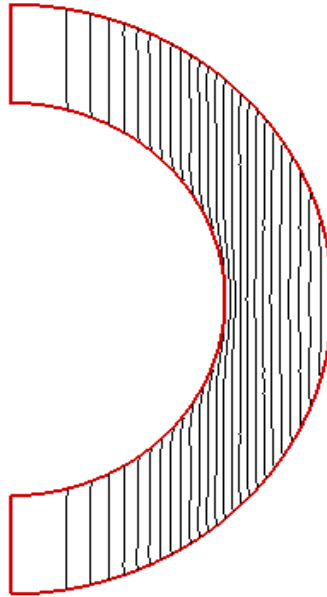


Figure (4.12): Isobares dans le plan méridien ($Re=1000$)

Dans ce qui suit, nous tentons une explication de la génération des vortex. Nous commençons par l'examen de la variation de la vitesse azimutale à l'équateur en fonction de l'augmentation du nombre de Reynolds.

Dans la **figure (4.13)**, on voit que pour un faible nombre de Reynolds ($Re = 1$), la vitesse azimutale subit une décroissance monotone de la sphère intérieure à la sphère extérieure.

Lorsque le nombre de Reynolds est supérieur ou égal à 500, on voit qu'à partir de la sphère intérieure, la vitesse azimutale décroît, elle atteint un minimum local et ensuite elle augmente en allant vers la sphère extérieure. La décroissance radiale de la vitesse azimutale est principalement due à l'augmentation du nombre de Reynolds.

Cet effet cause la réduction de la vitesse azimutale, à une certaine position radiale, à un niveau inférieur à celui atteint au niveau de la sphère extérieure.

On remarque que le minimum de la vitesse azimutale est relativement réduit par l'augmentation du nombre de Reynolds ; cependant, sa position radiale paraît invariante avec la variation du nombre de Reynolds.

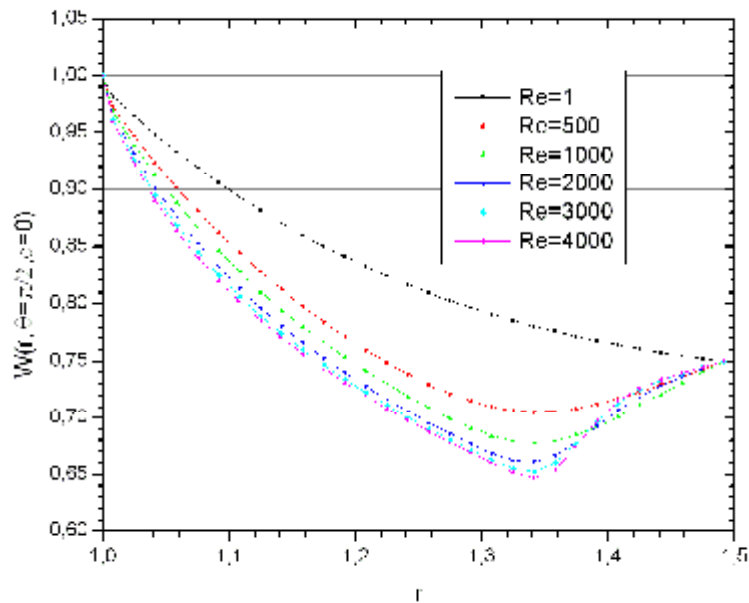


Figure (4.13) : La variation radiale de la vitesse azimutale pour les nombres de Reynolds 1, 500, 1000, 2000, 3000, 4000

On remarque aussi que pour $Re > 1000$, l'augmentation de la vitesse azimutale, de son minimum local à son niveau à la sphère extérieure, a un point d'inflexion. Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, c'est l'augmentation radiale de la vitesse azimutale, de son minimum local à son niveau à la sphère extérieure, qui induit le faible écoulement radial négatif de la sphère extérieure vers l'intérieur de l'entrefer.

De la **figure (4.14)**, on voit qu'à l'équateur, de la sphère intérieure, la vitesse radiale est positive et croissante (là où l'accélération centrifuge est supérieure au gradient radial de pression) ; elle est positive et décroissante (là où l'accélération centrifuge est inférieure au gradient radial de pression). Elle atteint une valeur nulle là où l'accélération centrifuge et le gradient radial de pression s'équilibrent près de la sphère extérieure. De cette position à la sphère extérieure, elle devient faiblement négative (à cause du déséquilibre de l'accélération centrifuge et du gradient radial de pression).

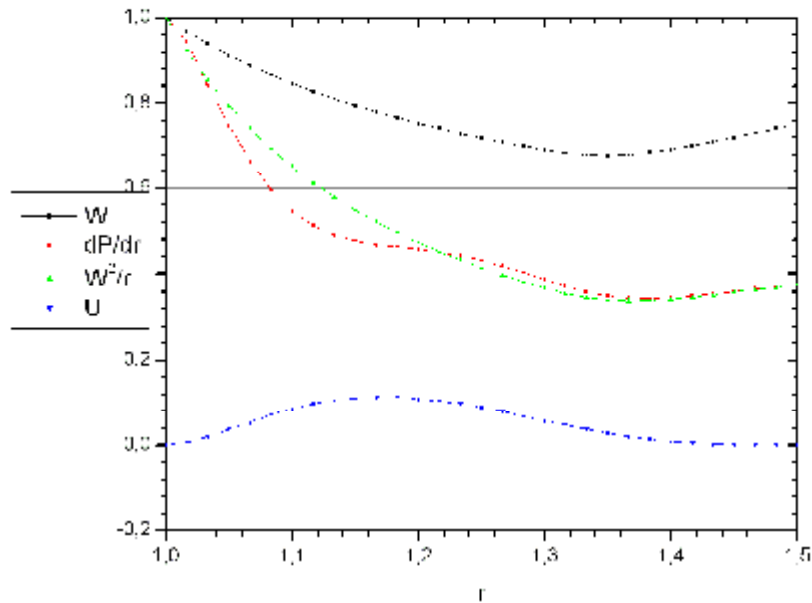


Figure (4.14): Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=1000)

Et donc, à l'équateur il y'a une position radiale (près de la sphère extérieure) ou la vitesse radiale est nulle. Aussi, la vitesse polaire est nulle à l'équateur. Donc, on a un point de stagnation ($U = 0$ et $V = 0$) de l'écoulement secondaire dans le plan méridien, à l'équateur.

On sait, qu'à un point de stagnation, une ligne de courant se divise. Elle se divise en trois branches : une branche suit l'équateur (vers la sphère extérieure). Deux autres branches quittent l'équateur et suivent l'écoulement méridien ; elles croisent la sphère extérieure (ayant la même valeur de la fonction de courant) à deux points où la vorticité azimutale est nulle. Ceci explique l'éclatement de la cellule d'Eckman et la formation d'un vortex dans chaque hémisphère.

On note, qu'une condition nécessaire mais pas suffisante de l'apparence des vortex est l'existence d'un minimum local de la vitesse azimutale à l'équateur. La condition n'est pas suffisante, par ce que ce minimum doit être suffisamment petit pour l'induction des vortex ; s'il n'est pas suffisamment petit, il n'y aura pas d'apparition de vortex comme témoigne le cas $Re = 500$. La taille des vortex augmente avec le nombre de Reynolds.

La distribution méridienne de la pression, présentée dans les **figures (4.12), (4.17), (4.21), (4.25)**, est qualitativement invariante avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Le Torque axial augmente avec le nombre de Reynolds : il est égal à 51.06, 68.75, 82.85 et 95.07, pour les nombres de Reynolds 1000,2000,3000, et 4000, respectivement.

Pour $Re=2000$ on obtient les résultats suivantes :

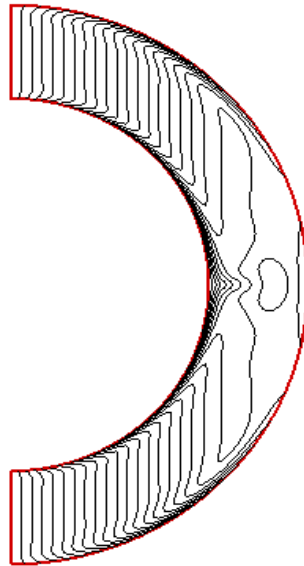


Figure (4.19): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=3000$)

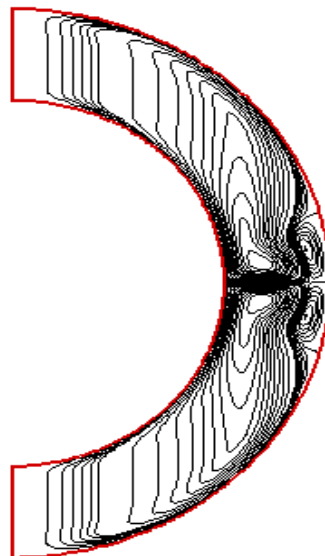


Figure (4.16): Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien ($Re=2000$)

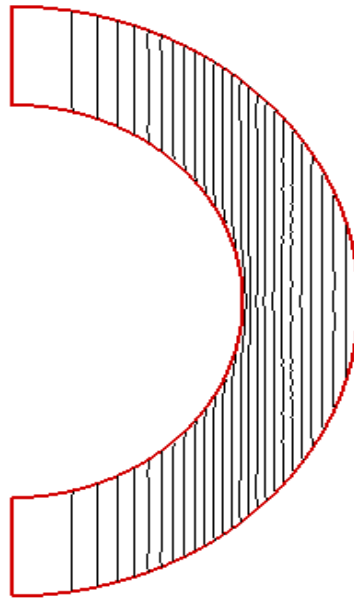


Figure (4.17): Isobares dans le plan méridien (Re=2000)

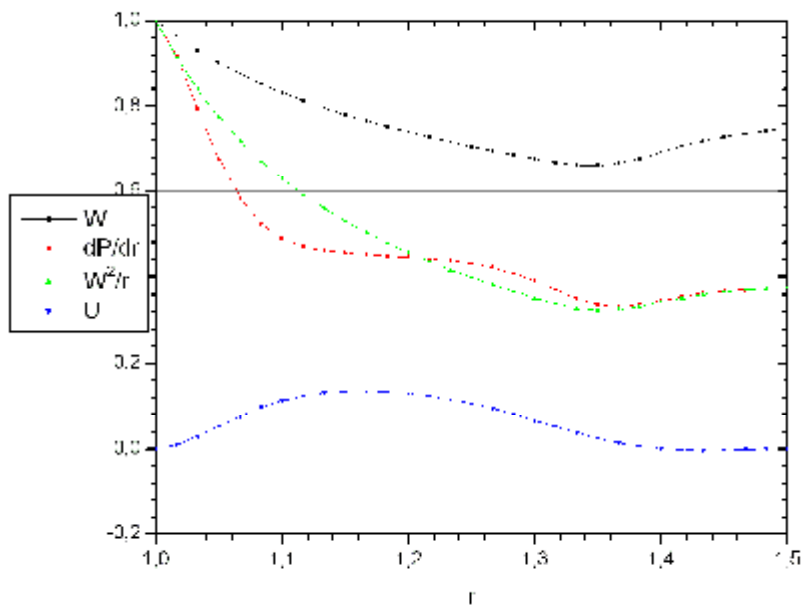


Figure (4.18): Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=2000)

Pour $Re=3000$ on obtient les figures suivantes:

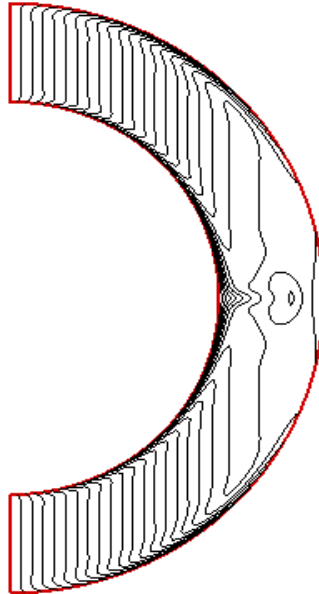


Figure (4.19): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=3000$)

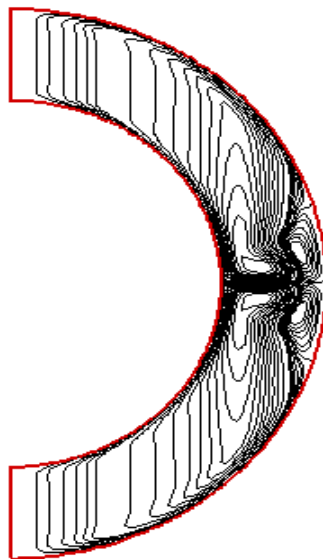


Figure (4.20): Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien ($Re=3000$)

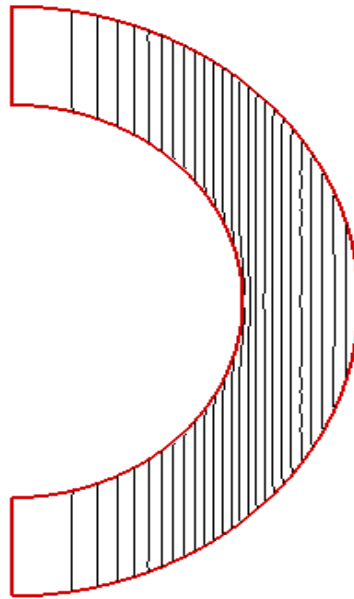


Figure (4.21): Isobares dans le plan méridien (Re=3000)

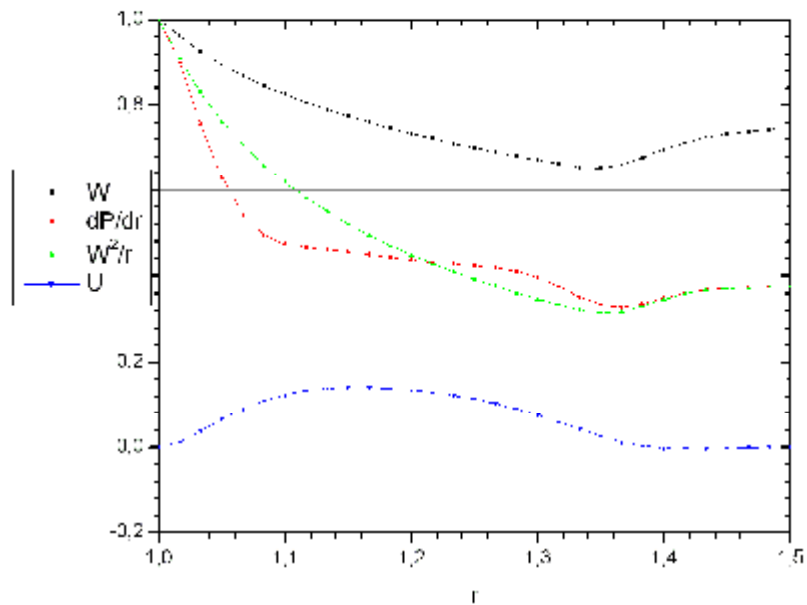


Figure (4.22): Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=3000)

Pour $Re=4000$, on obtient :

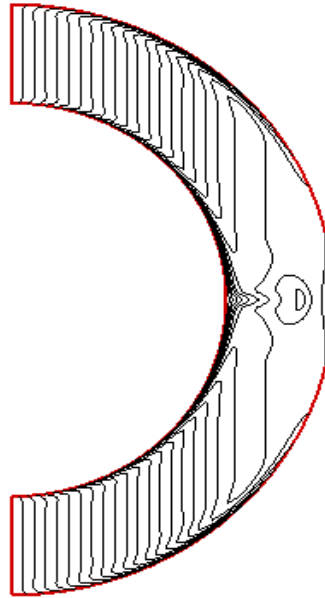


Figure (4.23): Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=4000$)

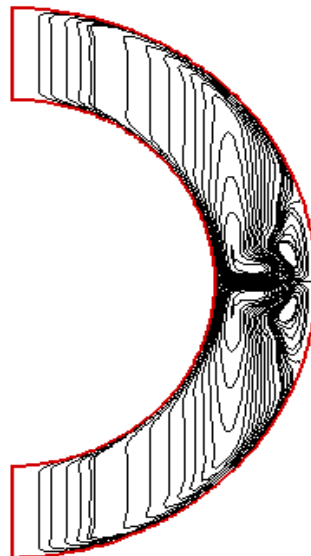


Figure (4.24): Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien ($Re=4000$)

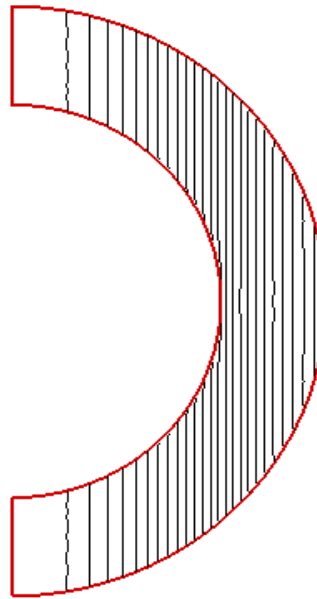


Figure (4.25): Isobares dans le plan méridien ($Re=4000$)

4.5 Conclusion

La simulation numérique de l'écoulement entre deux sphères concentriques et corotatives, séparées par un entrefer ayant une épaisseur égale à la moitié du rayon de la sphère intérieure, avec un nombre de Rossby égal à un demi, a donné deux régimes d'écoulement dépendant du nombre de Reynolds.

Pour un nombre de Reynolds faible ($Re = 1$), l'écoulement rotationnel et le Torque peuvent être obtenus de la solution du modèle de Stokes. Dans un tel cas, le mouvement secondaire dans le plan méridien est un écoulement infinitésimal dans des cellules d'Eckman.

Pour le nombre de Reynolds modéré considéré ($Re = 500$), l'écoulement azimuthal, dévie considérablement de la solution de Stokes. La rotation de l'écoulement principal induit un mouvement secondaire dans le plan méridien sous la forme de deux cellules d'Eckman considérables et contrarotatives ; une dans chaque hémisphère. Pour les nombre de Reynolds relativement élevés, considérés : $1000 \leq Re \leq 4000$, le régime d'écoulement est différent du premier. Dans la région autour de l'équateur, la force de cisaillement augmentée réduit le niveau de la vitesse azimuthale dans l'entrefer sphérique à un niveau inférieur à celui de la sphère extérieure. Un tel minimum local, si suffisamment petit, entraîne l'apparition de deux petits vortex détachés des cellules d'Eckman de l'écoulement secondaire dans le plan méridien. La taille de ces vortex augmente avec le nombre de Reynolds, comme prévu.

Chapitre 5 Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié numériquement l'écoulement incompressible, laminaire d'un fluide visqueux confiné entre deux sphères concentriques corotatives. On a considéré le cas avec un rapport d'aspect $b = 0.5$ et un nombre de Rossby égale à 0.5 tandis que le nombre de Reynolds prend six valeurs $Re = 1,500, 1000, 2000, 3000, 4000$.

On a modélisé mathématiquement ce problème par l'équation de conservation de la masse (équation de continuité), et l'équation de quantité de mouvement dans les trois directions radiale, polaire et azimutale. La discrétisation de chaque terme de ces équations est comme suit :

1. La discrétisation des termes temporels dans les équations de Navier-Stokes est du second ordre et suit le schéma d'Euler backward. La discrétisation des termes convectifs et non linéaires, est aussi du second ordre et suit le schéma d'Adams-Bashforth.
2. La discrétisation des dérivées spatiales est approchée par la méthode des différences centrées qui est du second ordre.
3. Les termes diffusifs et de pression ont été évalués au temps $t + \Delta t$.

Après la discrétisation des équations modélisant le problème, on obtient un système d'équations algébriques, qu'on peut résoudre par l'Algorithme **SIMPLER**. Le code numérique conçu est validé par une comparaison avec la solution analytique du problème de Stokes. Les résultats ont été obtenus pour un rapport d'aspect fixé à 0.5, un nombre de Rossby fixé à 0.5, et une augmentation du nombre de Reynolds à partir d'une faible valeur vers une valeur élevée. On a obtenu deux régimes d'écoulement différents dépendant du nombre de Reynolds. Ces régimes d'écoulement sont :

1. Pour $Re = 1$ et $Re = 500$ on obtient un écoulement de type écoulement avec 0-Vortex.
2. Pour $Re \geq 1000$, on obtient un écoulement de type écoulement avec 2-Vortex.

LISTE DES FIGURES

	Page
2.1 : Géométrie du problème.....	18
3.1 : Les projections du maillage dans le plan horizontal et un plan méridien	24
4.1 : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=1) du problème de Stokes.....	63
4.2 : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=1).....	64
4.3 : Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien (Re=1).....	65
4.4 : Isobares dans le plan méridien (Re=1).....	66
4.5 : Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=1).....	67
4.6 : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=500).....	68
4.7 : Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien (Re=500).....	69
4.8 : Isobares dans le plan méridien(Re=500).....	70
4.9 : Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=500).....	72
4.10 : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=1000).....	73
4.11 : Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien (Re=1000)...	74
4.12 : Isobares dans le plan méridien(Re=1000).....	75
4.13 : Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=1000).....	76
4.14 : La variation radiale de la vitesse azimutale pour les nombres de Reynolds 1,500 1000,2000,3000,4000.....	77
4.15 : Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien (Re=2000).....	79
4.16 : Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien (Re=2000)...	79
4.17 : Isobares dans le plan méridien(Re=2000).....	80
4.18 : Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur (Re=2000).....	80

4.19	: Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=3000$).....	81
4.20	: Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien ($Re=3000$)...	81
4.21	: Isobares dans le plan méridien ($Re=3000$).....	82
4.22	: Distribution radiale de la vitesse azimutale, du gradient radial de la pression, de l'accélération centrifuge et de la vitesse radiale à l'équateur ($Re=3000$).....	82
4.23	: Isotachs de la vitesse azimutale dans le plan méridien ($Re=4000$).....	83
4.24	: Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien ($Re=4000$)....	83
4.25	: Isobares dans le plan méridien ($Re=4000$).....	84

Nomenclature

B : Point située dans la direction polaire négative par rapport au point de référence **P**

B : Face se trouvant entre les deux points **P** et **B**

dr_n : Distance radiale entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face **n** qui sépare les deux points considérés (m).

dq_f : Distance polaire entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face **f** qui sépare les deux points considérés .

dj_e : Distance polaire entre deux points du maillage typique non décalé, en référence à la face **f** qui sépare les deux points considérés (m).

E : Point située dans la direction azimutale positive par rapport au point de référence **P**

E : Face se trouvant entre les deux points **E** et **P**

F : Point située dans la direction polaire positive par rapport au point de référence **P**

F : Force (N)

F : Face se trouvant entre les deux points **F** et **P**

N : Point située dans la direction radiale positive par rapport au point de référence **P**

N : Face se trouvant entre les deux points **N** et **P**

P : Pression non dimensionnelle

P : Point se trouvant au centre du volume de contrôle

P_0 : Pression de référence (Pa)

r : Coordonnée radiale non dimensionnelle

R_1 : Rayon de la sphère intérieure (m)

R_2 : Rayon de la sphère extérieure (m)

Re : Nombre de Reynolds défini par $\left(Re = \frac{R_1^2 \Omega_1}{\nu} \right)$

Ro : Nombre de Rossby défini par $\left(Ro = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$

Nomenclature

- S** : Point située dans la direction radiale négative par rapport au point de référence **P**
- s** : Face se trouvant entre les deux points **P** et **S**
- T** : Torque non dimensionnel
- t** : Temps non dimensionnel
- U** : Composante radiale de la vitesse $\left[\frac{m}{s}\right]$
- V** : Composante polaire de la vitesse $\left[\frac{m}{s}\right]$
- W** : Composante azimutale de la vitesse $\left[\frac{m}{s}\right]$
- w** : Face se trouvant entre les deux points **P** et **W**
- W** : Point située dans la direction azimutale négative par rapport au point de référence **P**
- Z** : Axe de rotation
- Δr_p : Distance radiale entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point **P** qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées
- Δq_p : Distance polaire entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point **P** qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées
- Δj_p : Distance azimutale entre deux faces du maillage typique non décalé, en référence au point **P** qui se trouve au centre entre ces deux faces considérées

Indices

- u** : Décalage du maillage suivant la direction radiale
- v** : Décalage du maillage suivant la direction polaire
- w** : Décalage du maillage suivant la direction azimutale
- b, e, f, n, s, w** : Fait références aux faces d'un volume typique respectivement bas, est, front, nord, sud, ouest
- P** : Fait référence au nœud **P** d'un volume fini typique

Symboles Grecs

- b** : Rapport d'aspect (épaisseur non dimensionnelle de l'entrefer = 0.5)
- ν** : Viscosité cinématique $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

r : Masse volumique $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$

m : Viscosité dynamique $\left[\frac{kg.m}{s} \right]$

q : Coordonnée polaire

j : Coordonnée azimutale

Δ : Intervalle fini

Ω_1 : Vitesse angulaire de la sphère intérieure $\left[\frac{rd}{s} \right]$

Ω_2 : Vitesse angulaire de la sphère extérieure $\left[\frac{rd}{s} \right]$

Exposants

t : Désigne l'instant t

$t - \Delta t$: Désigne l'instant $t - \Delta t$

$t + \Delta t$: Désigne l'instant $t + \Delta t$

Références bibliographiques

- [1] **Etienne** Guyon, **Hullin** Jean Pierre, **Luc** Petit, Hydrodynamique.Physique. EDP science/CNRS Edition (2001).
- [2] **Egbers C.**, Spherical Couette flow experiment, Earth science § Environment protection. Publication No:LDA 12.
- [3] **Markus J.**, **Egbers C.**, Isothermal spherical Couette flow , Journal of Physics and Astronomy, **vol** 549, **pp**:215-233, (2002).
- [4] **Wang H.**, **Li K.**, Numerical simulation of spherical Couette flow, Computers and Mathematics with Applications, **vol** 48,**pp**.109-116, (2004).
- [5] **Yaorskaya I.M.**, **Belyaev Y.N.**, **Monachov A.A.**, Stability of Spherical Couette flow in thick layers when the inner sphere revolves, Journal of fluid dynamics, **vol**.13, **No**.2, (1978).
- [6] **Lueptow R.M.**, **Boehm C.**, **Egbers C.**, Spherical Couette flow in a medium gap, Session FF. Taylor-Couette Flows (1998).
- [7] **Bar-Yoseph P.**, **Solana K.G.**, Vortex breakdown in the polar region between rotating spheres, Physics of fluids. A, fluid dynamics, **vol**. 4, **pp**.1677-1686, (1992).
- [8] **Bassom A.P.**, **Soward A.M.**, On finite amplitude subcritical instability in narrow gap spherical Couette flow, Journal of Fluid Mechanics, **vol**. 4, **pp**. 277-314, (2004).
- [9] **Harris D.**, **Bassom A P.**, **Soward A M.**, Global bifurcation to travelling waves with application to narrow gap spherical Couette flow, Physica D 177, **pp**. 122-174, (2003).
- [10] **Yang R.G.** and **Luo W.J.**, Flow bifurcations in a thin gap between two rotating spheres, Theoretical and computational fluid Dynamics, **vol**.16, **pp**.115-131, (2002).
- [11] **Dormy E.**, **Cardin P.**, **Jauld D.**, MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. Earth and Planetary Science, **vol**. 160, **pp**: 15-30, (1998).
- [12] **Philinder S.G.H.**, On the flow properties of a fluid between concentric spheres, Journal of Fluid Mechanics Digital Archive, vol.47, pp.799-809, (1971).

Références bibliographiques

- [13] **Proudman I.**, The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres, Journal of Fluid Mechanics Digital Archive, **vol.1**, **pp.505-516**, (1956).
- [14] **Hollerbach R., Futterer B., More T. and Egbers c.** Instabilities of the Stewartson layer. Part 2. Supercritical mode transitions. Theoretical and computational fluid Dynamics, **vol. 18**, **pp.197-204**, (2004).
- [15] Brito D., Cardin P., Jault D., Nataf H.-C, Dynamo expérimentale à vocation géophysique, L.G.I.T, Observation de Grenoble, Université Joseph Fourier, CNRS, UMR 5559, **pp.1-37**, (1999).
- [16] **Wimmer M.**, Experiments on the stability of viscous flow between two concentric rotating spheres, Journal of fluid Mechanic, **vol.103**, **pp.117-131**, (1981).
- [17] **Macaraeg Michele G.**, The effect of Power-Law Body Forces on a Thermally Driven Flow between concentric rotating spheres, Journal of the Atmospheric Sciences, **vol.43. No.3**, **pp. 302-304**, (1985).
- [18] **Miller T.L., Gall R.L.**, Thermally Driven flow in a Rotating spherical shell: axisymmetric States, Journal of The Atmospheric Sciences, **vol.40**, **pp.856-868**.
- [19] **Lesueur V., Mangeney A.**, Simulation numérique du mouvement d'un fluide en rotation dans une couche sphérique épaisse. Application à la dynamique atmosphérique des planètes géantes.
- [20] **Nakabayashi K., Tsuchida Y., Honda A.**, Flow between Two Independently Rotating concentric spheres, Research Paper and Patents, **vol.668**, **pp.1008-1015**, (2002).
- [21] **Nakabayashi K., Tsuchida Y.**, Transition phenomena in a spherical Couette flow between independently rotating spheres, American Institute of physics, Octobre (2005).
- [22] **Blockly E.W., Bassom A.P., Gilbert A.D et Soward A.M.**, Pulse-train solutions of a spatially heterogenous amplitude equation arising in the subcritical instability of narrow gap spherical Couette flow, Physica D 228, **pp.1-30**, (2007).

Références bibliographiques

- [23] **Patankar S.V.**, Numerical Heat Transfer and Fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1980).
- [24] **Medjroubi W.**, Régimes d'écoulements entre deux sphères concentriques en rotation, Thèse de Magistère en physique énergétique, Département de physique, Fac des sciences, université Mentouri Constantine, (2005).
- [25] **Panton R.L.**, Incompressible flow, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [26] **Bouarour K.**, étude de l'effet de la convection de chaleur sur l'écoulement entre deux cylindres concentriques tournants, Thèse de Magistère en physique énergétique, Département de physique, Fac des sciences, université Mentouri Constantine, (oct.2004).
- [27] **Djamil L.**, Etude des régimes hydrodynamiques de l'écoulement entre deux disques tournants, Thèse de Magistère en physique énergétique, Département de physique, Fac des sciences, université Mentouri Constantine, (oct.2004).

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié numériquement l'écoulement incompressible, visqueux et laminaire entre deux sphères concentriques corotatives. Le rapport de l'épaisseur de l'entrefer sphérique sur le rayon de la sphère intérieure $b = 0.5$. Le rapport des vitesses angulaires qui est le nombre de Rossby est égal à 0.5, alors que le nombre de Reynolds prend six valeurs $Re = 1, 500, 1000, 2000, 3000, 4000$. On a modélisé ce problème par les équations de conservation de la masse et de conservation des trois quantités de mouvement dans les directions radiale, polaire et azimutale. Les équations modélisantes sont résolues par la méthode des volumes finis. Pour un nombre de Reynolds faible ($Re=1$), l'écoulement rotationnel et le torque peuvent être obtenus de la solution du modèle de Stokes. Dans un tel cas, le mouvement secondaire dans le plan méridien est un écoulement infinitésimal dans des cellules d'Eckman. Pour le nombre de Reynolds modéré, considéré ($Re=500$), l'écoulement azimutal, dévie considérablement de la solution de Stokes. La rotation de l'écoulement principal induit un mouvement secondaire dans le plan méridien sous la forme de deux cellules d'Eckman considérables et contrarotatives; une dans chaque hémisphère. Pour les nombres de Reynolds relativement élevés, considérés: $1000 \leq Re \leq 4000$, le régime d'écoulement est différent des deux premiers. Dans la région autour de l'équateur, la force de cisaillement augmentée réduit le niveau de la vitesse azimutale dans l'entrefer sphérique à un niveau inférieur à celui de la sphère extérieure. Un tel minimum local, si suffisamment petit, entraîne l'apparition de deux petits vortex détachés des cellules d'Eckman de l'écoulement secondaire dans le plan méridien. La taille de ces vortex augmente avec le nombre de Reynolds, comme prévu.

Mots clés

Sphère co-rotatives écoulement de Couette

Écoulement de Couette sphérique

La méthode des volumes finis

ملخص

في هذه الأطروحة درسنا عدديا جريان غير قابل للانضغاط لزج و رقائقي بين كرتين متمركزتين تدوران في نفس الاتجاه. نسبة سمك الفجوة الكروية على نصف قطر الكرة الداخلية هي: $b = 0.5$. نسبة زاويتي الدوران هي عدد Rossby و تساوي 0.5 في حين عدد Reynolds يأخذ ست قيم $Re = 1, 500, 1000, 2000, 3000, 4000$. قمنا بتمثيل هذه المشكلة بمعادلات حفظ الكتلة و معادلات حفظ الكميات الثلاث لكمية الحركة في الاتجاهات: النصف قطرية القطبية و السمئية. المعادلات حلت بطريقة الحجم المنتهية. من أجل عدد ضعيف ل Reynolds ($Re=1$)، الجريان الدوراني و $le\ torque$ نستطيع الحصول عليهم إنطلاقا من حل نموذج Stokes. في مثل هذه الحالة الحركة الثانوية في مستوي خط التنصيب هو جريان متناهي في الصغر في خلايا Eckman. من اجل عدد Reynolds معتدل نعتبر ($Re=500$)، الجريان السمئي ينحرف مانلا باعتبار من حل Stokes. دوران الجريان الرئيسي ينتج عنه جريان ثانوي في مستوي خط التنصيب في شكل اثنين من خلايا Eckman الضخمة و تدوران باتجاهين متعاكسين كل واحدة في نصف كرة. من أجل أعداد Reynolds المرتفعة نسبيا ممثلة في $1000 \leq Re \leq 4000$ ، نظام الجريان يختلف عن الأولين. في المنطقة حول خط الاستواء فإن قوة القص المرتفعة تقلل من مستوى السرعة السمئية في الفجوة الكروية إلى مستوى اقل منه في الكرة الخارجية. في منطقة دنيا، إذا كانت صغيرة بما فيه الكفاية، ينشط ظهور دوامتين صغيرتين منفصلتين عن خلايا Eckman في الجريان الثانوي في مستوي خط التنصيب. حجم هذه الدوامات يرتفع مع عدد Reynolds. و كما كان متوقعا.

الكلمات المفتاحية

كرتين تدوران في نفس الاتجاه جريان Couette.

جريان Couette الكروي

طريقة الحجم المنتهية