

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**N° d'ordre :
Série**

MEMOIRE

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER
EN PHYSIQUE**

SPECIALITE : PHYSIQUE DES RAYONNEMENTS ET APPLICATIONS

**ETUDE DES CAVITES OPTIQUES LASER SIMPLE ET EN ANNEAU
AVEC ET SANS MILIEU AMPLIFICATEUR**

Par M^{elle}: GHANIA BOUHILA

Soutenu le : 26 / 04 / 2008

Devant le jury :

<u>Président :</u>	L. CHETOUANI	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
<u>Rapporteur :</u>	A. LECHEHEB	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
<u>Examineurs :</u>	N. BOUKHEIT	M.C	Univ. Mentouri Constantine
	A. NOURI	Prof	Univ. Mentouri Constantine
	K. MIROUH	Prof	Univ. Mentouri Constantine

Remerciements

Ce travail a été réalisé au département de Physique de l'Université Mentouri –Constantine, sous la direction de Monsieur A. LECHEHEB, Professeur au département de physique. Je veux lui exprimer mes sincères remerciements pour ses orientations et sa patience.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur L. CHETOUANI professeur à l'Université Mentouri-Constantine, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie Monsieur N. BOUKHEIT, maître de conférence à l'Université Mentouri- Constantine, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de participer à ce jury.

J'adresse également mes remerciement à Monsieur A. NOURI professeur à l'Université Mentouri-Constantine, qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à mon travail, qu'il trouve ici l'expression de mes plus vifs remerciements.

Je remercie vivement Monsieur K. MIROUH, professeur à l'Université Mentouri-Constantine, qui a bien voulu accepter de juger ce travail.

Je tiens à remercier aussi Monsieur A.H.BOUNSER et SIHEM pour leur aide précieuse.

Je n'oublie pas d'adresser mes remerciements à mes amis, D. LOUBNA, A. AMEL, pour toute l'aide morale q'elles m'ont accordée durant la préparation de ce travail.

Enfin, j'adresse mes remerciements les plus sincères à ma chère mère et à mes sœurs et mes frères.

INTRODUCTION	01
---------------------------	-----------

CHPITRE I: LES CAVITES LINEAIRES

I.1. QU'EST-CE QU'UN LASER ?	03
I.2. LES CAVITES RESONNANTES	04
I.3. LES MODES DE CAVITES	06
I.3.1. Modes d'une cavité parallélépipédique	07
I.3.2. Etude d'une cavité optique par l'équation d'Helmholtz	10
I.3.2.1. Mode fondamental.....	11
I.3.2.2. Mode d'ordre supérieur.....	15
I.3.2.2.1. Géométrie circulaire (mode de Laguerre -Gauss).....	15
I.3.2.2.2. Géométrie rectangulaire (mode de Hermite -Gauss).....	16
I.4. CONDITION DE RESONANCE	17
I.5. LES PERTES DE LA CAVITE.....	19
I.5.1. Paramètres caractérisant les pertes dans une cavité	20
I.5.1.1. Durée de vie des photons dans la cavité.....	20
I.5.1.2. Le facteur de qualité.....	20
I.5.1.3. Le coefficient de perte de la cavité.....	21
I.5.2. Les pertes par diffraction	21
I.5.3. Le nombre de Fresnel et les pertes par diffraction	22
I.6. LES MATRICES DE TRANSFERT DES CAVITES	22
I.6.1 Les matrices de transfert de quelques systèmes optiques	23
I.6.1.1. Propagation sur une distance d.....	23
I.6.1.2. Une lentille mince de distance focale et un miroir.....	24
I.6.1.3. Combinaison entre la distance d et la lentille f	26
I.6.1.4. La combinaison entre deux structures (I.6.1.3).....	26
I.6.1.5. Combinaison de systèmes optiques.....	27
I.6.1.6. Le milieu d'indice parabolique	27
I.6.1.7. Dioptre plan $\frac{n_1}{n_2}$ et sphérique.....	28
I.6.2. L'ordre périodique	29
I.6.3. La loi ABCD	30

I.6.4. Les matrices de transfert de quelque cavités optiques	30
I.7. LA STABILITE DES CAVITES.....	31
I.7.1. La stabilité d'ordre périodique.....	31
I.7.2. La condition de stabilité	32
I.7.3. Stabilité des cavités à deux miroirs	32
I.7.4. Diagramme de stabilité.....	33
I.5. L'INSTABILITE DES CAVITES	35
I.5.1. Les avantages des cavités instables	37
I.5.2. Les inconvénients des cavités instables.....	37

CHAPITRE II: L'AMPLIFICATION ET LA CAVITE RESONANTE

II.1. QU'EST CE QU'UN MILIEU AMPLIFICATEUR ?.....	38
II.2. INTERACTION RAYONNEMENT –MATERIE	38
II.2.1. Les processus d'interaction	38
II.2.1.1. L'absorption	39
II.2.1.2. L'émission spontanée	39
II.2.1.3. L'émission induite (stimulée).....	40
II.2.2. Les équations d'évolutions	41
II.2.3. La section efficace d'interaction	42
II.3. DIFFERENTS TYPES DE POMPAGE ET L'INVERSION DE POPULATION.....	42
II.3.1. Le pompage.....	43
II.3.2. L'inversion de population	44
II.3.2.1. Principe de l'inversion de population.....	44
II.3.2.2. Système à deux niveaux	45
II.3.2.3. Système à trois niveaux	45
II.3.2.4. Système à quatre niveaux	48
II.4. L'OSCILLATION LASER	50
II.4.1. Condition d'oscillation	51
II.4.2. Fréquence d'oscillation	52
II.5. L'EMISSION LASER	52
II.6. L'AMPLIFICATION ET LA SATURATION DU GAIN	53

II.7. LES DIFFERENTS TYPES DE MILIEU AMPLIFICATEUR.....	57
II.7.1. Laser à gaz.....	57
II.7.1.1. Laser à Hélium néon	57
II.7.1.2. Laser à gaz carbonique.....	58
II.7.2. Laser à Solide.....	59
II.7.2.1. Laser à Rubis	59
II.7.2.2. Laser à Nd^{3+} : YAG	59
II.7.2.3. Laser à Argon.....	60
II.7.4. Laser à colorant.....	60
II.7.5. Laser à électron libre	60
II.7.6. Laser à semi conducteur	61
II.7.6.1. Description du milieu.....	61
II.7.6.2. Le fonctionnement du laser à semi conducteur.....	62
II.7.6.3. Caractéristiques du laser à semi conducteur	63
II.7.6.4. Les principes et avantages du laser à semi conducteur	63
II.8. LA COULEUR DU LASER	64

CHAPITRE III : LES CAVITES EN ANNEAU

III.1.LES DIFFERENTS TYPES DES CAVITES EN ANNEAU	65
III.1.1. La cavité à trois miroirs	65
III.1.2. La cavité à quatre miroirs	66
III.2. LES PROPRIETES GENERALES DES CAVITES EN ANNEAU	67
III.2.1. Les modes de la cavité en anneau.....	67
III.2.2. La stabilité de la cavité en anneau	68
III.2.3. Les pertes de la cavité en anneau.....	71
III.3. LA CAVITE EN ANNEAU AVEC MILIEU AMPLIFICATEUR.....	72
III.4. LA CAVITE EN ANNEAU UNIDIRECTIONNELLE	73
III.4.1. Comment obtenir un fonctionnement monomode par une cavité en anneau.....	74
III.4.1.1. Diode optique.....	74
III.4.1.2. Un modulateur acousto-optique.....	75
III.4.1.3. Rétro injection par un miroir externe.....	75

III.5. L'APPLICATION DE CAVITE EN ANNEAU (LASER GYROSCOPE)	77
III.5.1. Effet Sagnac.....	77
III.5.2. L'utilisation d'une cavité en anneau bidirectionnelle.....	78
III.6. LA COMPARAISON ENTRE DEUX GENRES DE CAVITE	80

CHAPITRE IV: LA SIMULATION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES DE LA CAVITE A DEUX MIROIRS

IV.1. INTRODUCTION	84
IV.2. LE PRINCIPE DE HUYGENS-FRESNEL.....	84
IV.3. LA FORMULE MATHEMATIQUE GENERALE DES EQUATIONS INTEGRALES.....	85
IV.3.1. Les miroirs sphériques	86
IV.3.2. Les propriétés des miroirs sphériques	89
IV.3.2.1. Les propriétés d'équivalence	89
IV.3.2.2. La condition de stabilité	89
IV.4. LES EQUATIONS INTEGRALES DES MIROIRS SPHERIQUES.....	90
IV.5. LE PRINCIPE DE LA RESOLUTION NUMERIQUE	91
IV.6. LES MODES DE CAVITES	92
IV.6.1. Les résultats de Fox et Li	92
IV.6.2. Les pertes par diffraction et les déphasages	94
IV.7. RESULTATS ET DISCUSSION.....	95
CONCLUSION	98
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	100

Depuis longtemps les sources lumineuses sont utilisées parce qu'elles ne sont pas très coûteuses mais elles présentent pas mal d'inconvénients puisqu'elles ne sont pas très intenses même en utilisant une lentille ou n'importe quel autre système optique convergent. Elles ne sont pas monochromatiques et sont incohérentes.

Le rayon Laser (ce mot est un acronyme : Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) est différent des sources conventionnelles parce qu'il présente des propriétés de haute brillance caractérisant la monochromaticité, la cohérence aussi bien temporelle que spatiale, la directivité et même la puissance dans certains cas (impulsions ultracourtes).

Le Laser est un dispositif qui produit ou amplifie un rayonnement cohérent pour des fréquences qui s'étalent dans les domaines de l'infrarouge (100 μm -500 μm), le visible (400 μm , 780 μm) et l'ultraviolet (100nm) du spectre électromagnétique et on a même observé récemment de l'émission cohérente stimulée dans la région XUV ou X mous (10-15nm). Il est composé de deux éléments essentiels: d'une part, la cavité optique ou résonateur qui est capable de créer les conditions d'une oscillation résonnante et responsable de la mise en forme du faisceau laser et d'autre part, le milieu amplificateur (atomes, molécules ions, électrons dans les gaz, les liquides, les solides et le plasma) susceptible de donner naissance à ce rayonnement pur. Sans résonateur, l'émission due au milieu amplificateur pourrait être utilisée difficilement pour toutes sortes d'applications [5].

Afin de comprendre la base des propriétés du faisceau laser, il faut connaître la physique des cavités optiques (linéaire ou en anneau) à savoir comment interpréter la propagation d'un rayon lumineux entre les miroirs de la cavité. Un tel rayon, ne peut être ni une onde plane ni une onde sphérique. Il obéit aux lois de diffraction et se reproduit identiquement à lui-même à un facteur de phase près lors de ses allers et retours dans la cavité. Cette propagation sera considérée dans le contexte de l'optique matricielle, optique plus intéressante que l'optique géométrique par ce qu'elle présente comme intérêt pour l'étude de la propagation des faisceaux gaussiens, faisceaux qui ont un profil dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (profil transverse en intensité) et décrivent de manière exacte le champ électromagnétique dans la cavité.

Dans ce mémoire on se propose d'étudier en détail les propriétés physique de ces cavités optiques laser avec ou sans milieu amplificateur qui ont un très grand intérêt dans le confinement de l'énergie de l'onde électromagnétique issue de ce dispositif.

Cette thèse comprend quatre chapitres :

- Au premier chapitre, nous négligeons la présence de milieu amplificateur et nous étudions la propagation de l'onde électromagnétique dans la cavité optique linéaire.
- Dans le deuxième chapitre, nous ajoutons le milieu amplificateur entre les deux miroirs de la cavité linéaire, et nous étudions l'influence de ce milieu sur les propriétés du rayon laser.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude de propagation de l'onde électromagnétique dans une cavité optique en anneau sans milieu amplificateur, puis nous additionnons le milieu amplificateur pour connaître le fait de celui ci dans les caractéristiques du rayon laser qui sort de cette cavité, et finalement nous comparons entre les deux genres de cavités linéaires et en anneau.
- Dans le dernier chapitre, nous faisons un calcul numérique de l'équation intégrale des cavités linéaires à deux miroirs rectangulaires, pour connaître le mode qui reste après un certain nombre d'allers-retours, et nous donnons les résultats sous forme de courbe issue d'un calcul numérique de l'équation intégrale.

Nous terminons cette étude par une conclusion.

I.1. QU'EST-CE QU'UN LASER ?

Le mot laser est une acronyme qui signifie (*Light Amplification by Stimulated Emission Radiation*), c'est-à-dire l'amplification de la lumière par émission stimulée du rayonnement. Ce sont des oscillateurs optiques basés sur l'amplification d'un signal lumineux, réalisée par l'émission stimulée de l'atome du milieu actif. Le laser est capable de créer la lumière en micro onde, en infrarouge, dans l'ultraviolet et même dans les rayons X. C'est un dispositif composé de trois éléments (figure .I-1)[1] [2],[4] [6], [8]:

1. Un milieu amplificateur qui est formé d'électrons, d'atomes, molécules, ions ou cristaux de semi- conducteurs...
2. Le processus de pompage pour exciter ces atomes (molécules, etc....).
3. Une cavité optique ou résonateur qui permet le passage du faisceau lumineux plusieurs fois par le milieu amplificateur.

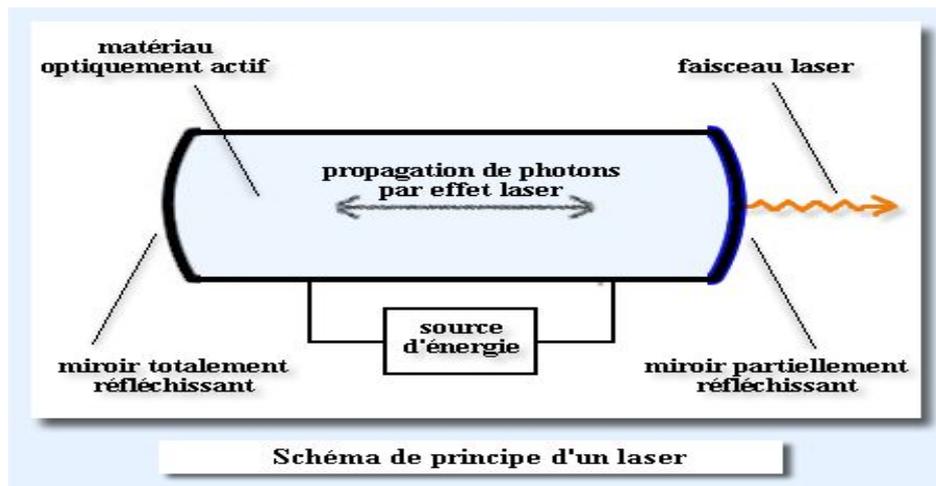
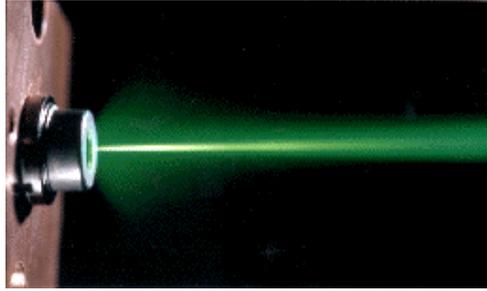


Figure I-1 : schéma de principe d'un laser

Le faisceau laser est différent d'une source classique par ce qu'il est :

- *monochromatique* : Contrairement à la lumière blanche, le laser n'émet qu'une seule longueur d'onde c'est -à -dire une seule couleur et cela est du à l'émission stimulée qui produit des photons identiques (même phase et fréquence) [2],[7].
- *directif* : Le faisceau laser apparaît souvent comme un fil lumineux très fin (figure.I-2),ce faisceau filiforme prend sa forme à partir de la géométrie des miroirs qui confinent le rayonnement lors des réflexions multiples, ce qui donne une effet de collimation élevée [2] ,[9].

Figure I-2: Ce Schéma indique que le faisceau laser est directif



- *cohérent* : la source laser est cohérente par ce qu'elle émet des fronts d'onde dont les amplitudes et les phases sont identiques, en raison du principe de l'émission stimulée associée à la présence de la cavité optique résonante. Il est naturel de définir la cohérence à partir des franges d'interférence observées par les instruments le plus souvent utilisés dans la mesure appelés les interféromètres. Ces franges d'interférences son caractérisées par leur visibilité [32], [9] :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (\text{I-1})$$

La cohérence est présente sous deux aspects :

- *cohérence temporelle* : la lumière est considérée cohérente temporellement, si la phase à un instant donné le long d'un front d'onde en mouvement est identique à celle que possède l'onde après avoir traversé une distance L en un temps L/c, quel que soit L [9].
- *cohérence spatiale* : Si, à chaque instant, la lumière possède la même phase aux différents points de son front d'onde [9].

I.2. LES CAVITES (OU RESONATEUR) RESONANTES)

Introduction

Depuis le début du XX^{ème} siècle, les électriciens ont développé des techniques élaborées qui leur ont permis de construire des amplificateurs d'une part, et des générateurs ou oscillateurs d'autre part. Une méthode fréquemment utilisée pour fabriquer un oscillateur est d'utiliser une boucle de réaction qui renvoie à l'entrée d'un amplificateur tout ou une partie de son signal de sortie et pour augmenter l'intensité, cette boucle de réaction est réalisée par la cavité optique [25].

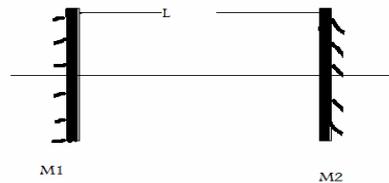
La cavité est un milieu dans lequel peut se propager l'onde électromagnétique. Ce système se compose, en général, des arrangements des miroirs permettant de réinjecter une partie du faisceau de sortie sur l'entrée du milieu amplificateur [10], donc les cavités optiques contribuent en grande partie à l'amplification de la lumière dans le laser. Les photons étant réfléchis par les miroirs de la cavité et peuvent traverser plusieurs fois le milieu amplificateur et provoquent ainsi l'émission stimulée d'un plus grand nombre de photons.

• LES DIFFRENTS TYPES DE RESONATEURS

La cavité optique est prise soit sous la forme d'une cavité linéaire (cavité à miroirs plans parallèles, cavité à miroirs sphériques, concentrique, confocale...) soit d'une cavité en anneau.

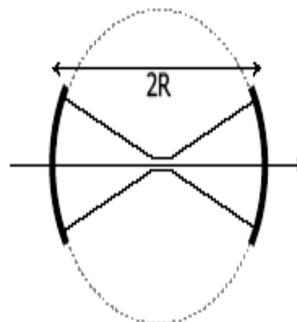
1. *La cavité (résonateur) plane parallèle* : constituée de deux miroirs plans parallèles en face séparés par une distance L , comme la cavité *Fabry-Perot* (figure.I-3).

Figure I-3: Schéma montrant la cavité linéaire de deux miroirs plans parallèles.



2. *La cavité (résonateur) concentrique* : se compose de deux miroirs sphériques de même rayon de courbure séparés par une distance $L=2R$, de sorte que les centres des deux miroirs coïncident [13](figure I-4).

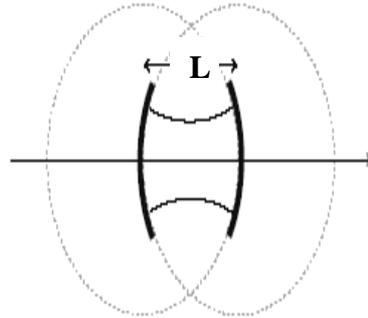
Figure I-4 : Schéma de la cavité concentrique où les rayons des deux miroirs sont les mêmes.



3. *La cavité (ou résonateur) confocale* : se compose de deux miroirs sphériques de même rayon de courbure R séparés par une distance L tels que leurs foyers $F1$ et $F2$ coïncident.

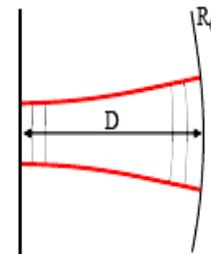
Dans ce cas (figure I-5), le centre de la courbure d'un miroir se trouve sur la surface de l'autre miroir, $R=L$ [13].

Figure I-5: Représentation de la cavité confocale où les deux rayons des miroirs vérifient la relation suivante
 $R_1 + R_2 = 2L$



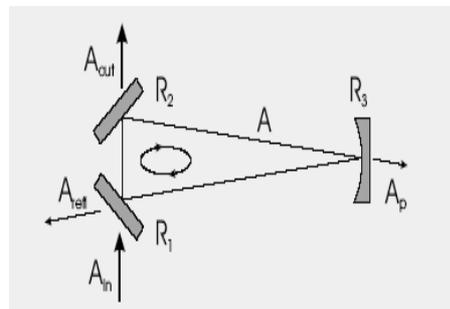
4. *La cavité hémisphérique* : La cavité hémisphérique est constituée de deux miroirs, l'un est sphérique de rayon $R_0=L$, et l'autre est plan ($R_1 \rightarrow \infty$) (figure I-6).
5. *La cavité semi confocale* : Elle est constituée de deux miroirs, l'un de ces miroirs est plan ($R \rightarrow \infty$) et l'autre est courbé $R=2L$ [13].

Figure I-6: Cavité hémisphérique de deux miroirs de rayon $R_0 = L$ et $R_1 \rightarrow \infty$, les deux miroirs séparés par une distance D .



6. *La cavité en anneau* : est un type particulièrement important de résonateurs utilisés dans quelques lasers, elle est constituée de plus de deux miroirs (figure I-7).

Figure I-7 : La cavité en anneau est constituée de trois miroirs, deux de ces miroirs sont plans et l'autre est courbé.



I.3.LES MODES DE LA CAVITE

La lumière peut être décrite par des photons mais aussi par des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire, un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} . Si ces ondes électromagnétiques se propagent au sein de la cavité, les ondes stationnaires peuvent s'établir avec des longueurs d'onde particulières formant les modes de résonances de la cavité [11], [12].

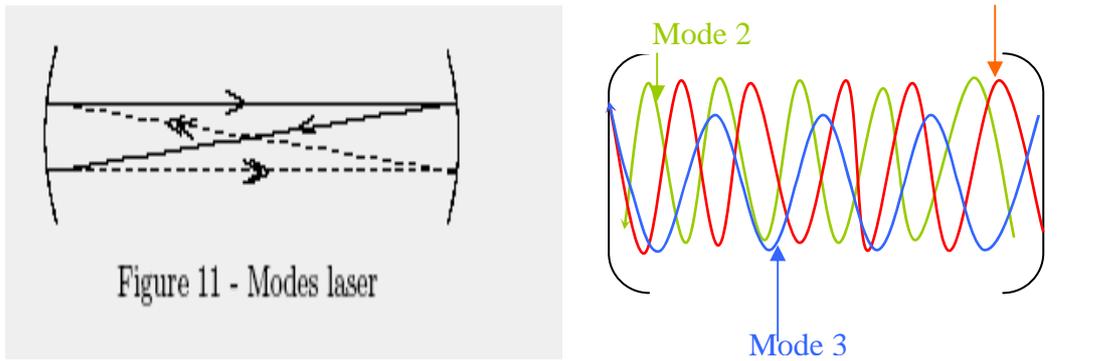


Figure I-8 : Schéma indiquant les modes qui s'établissent dans la cavité.

Ces modes sont de deux types :

- **Les modes longitudinaux**

Ce sont des ondes stationnaires créées à l'intérieur de la cavité après chaque aller et retour suivant l'axe de propagation. Ces ondes sont renforcées par l'interférence constructive après la réflexion sur les surfaces des miroirs, et les autres ondes subissent toutes entre elles des interférences destructives [2]. Les modes permis satisfont la condition $d = q \frac{\lambda}{2}$ où q est un nombre entier connu sous le nom d'ordre du mode. Les deux modes successifs sont séparés par $\Delta \nu = \frac{c}{2d}$.

- **Les modes transversaux**

Chaque mode longitudinal correspond à la variation du champ dans les deux directions perpendiculaires à l'axe de propagation. Les modes transversaux sont indiqués par les lettres (TEM) qui signifie transverse électromagnétique et les indices inférieurs m, n , et où $m=0$ et $n=0$ correspondent au mode fondamental.

Dans une première partie on étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans une cavité parallélépipédique, puis on adopte le raisonnement au cas qui nous intéresse.

[6], [12].

I.3.1. Mode d'une cavité parallélépipédique

On considère une cavité fermée de forme un parallélépipède $ABCD$ de même ordre de grandeur, avec les parois ayant un coefficient de réflexion R , supposons un point M à

l'intérieur de la cavité qui émet des ondes en permanence et voyagent parallèlement à AB , de fréquence ν et d'amplitude A [11]. Cette onde va se réfléchir sur BC et DA puis repasser un grand nombre de fois par M , après avoir parcouru la distance $2a$. L'onde dans ce cas subit un déphasage

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot 2an}{\lambda} \tag{I-2}$$

Où : n est l'indice de réfraction du milieu situé entre les deux miroirs.

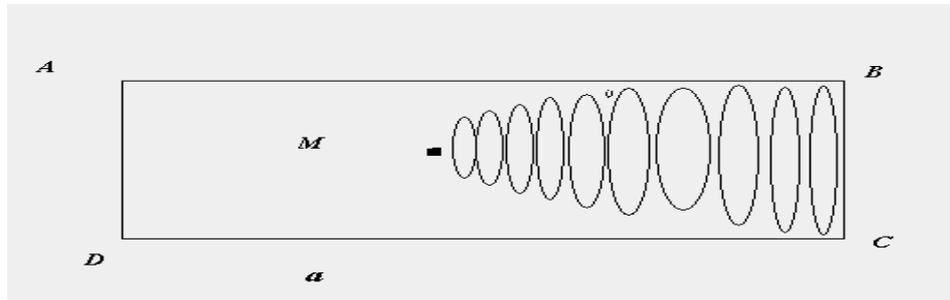


Figure I-9 : La propagation d'une onde électromagnétique dans une cavité de forme parallélépipède ABCD

C'est l'onde qui est réfléchiée par BC et DA durant le temps $\frac{2a}{c}$ s, l'amplitude est multipliée par R^2 (R coefficient de réflexion) le déphasage devient $(-\varphi)$, mais après un temps $\frac{4a}{c}$ s elle décrit deux allers et retours, l'amplitude est multipliée par R^4 et le déphasage devient double (-2φ) .

Après plusieurs allers et retours dans la cavité, l'amplitude est décrite par la somme des amplitudes :

$$E = Ae^{i\omega t} (1 + R^2 e^{-i\varphi} + R^4 e^{-i2\varphi} + \dots + R^{2n} e^{-in\varphi} + \dots) = Ae^{i\omega t} (1 - R^2 e^{-i\varphi})^{-1} \tag{I-3}$$

L'amplitude est :

$$|I|^2 = EE^* = |A|^2 [(1 - R^2)^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi / 2]^{-1/2} \tag{I-4}$$

Avec $|A| = |I_0|$ Donc la transmission est donnée par :

$$T = I/I_0 = \left[(1 - R^2)^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2 \right]^{-1/2} \quad \text{(I-5)}$$

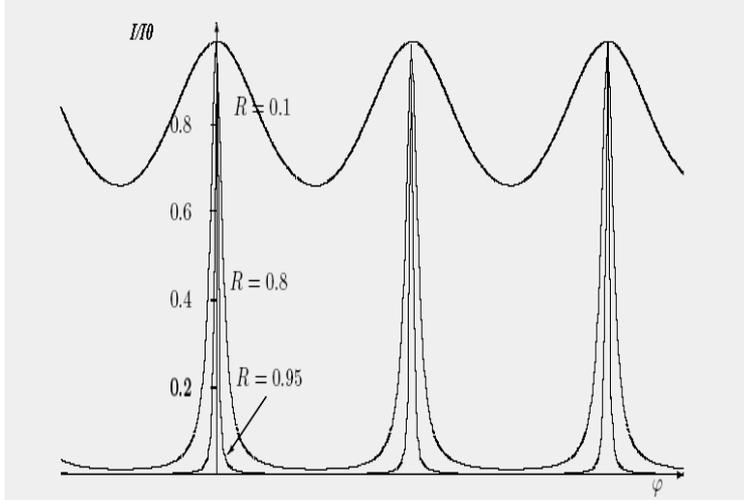


Figure I-9 : Schéma indiquant la transmission $T = I/I_0$ en fonction de φ pour plusieurs R (coefficient de réflexion) [7].

Le nombre de modes :

Le Vecteur d'onde est donné par:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{w^2}{c^2} \quad \text{(I-6)}$$

Où :

$$k_x 2a = m2\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{(I-7)}$$

$$k_y 2b = n2\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{(I-8)}$$

$$k_z 2d = q2\pi \Rightarrow k_z = \frac{q\pi}{d} \quad \text{(I-9)}$$

Où:

- $m, n, q \in \mathbb{N}$.
- a, b, d sont les dimensions de la cavité, donc (I-6) devient :

$$k_{mnq}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d} \right)^2 = \frac{w_{mnq}^2}{c^2} \quad \text{(I-10)}$$

Où : $w = 2\pi\nu$

À partir de cette relation on peut construire les fréquences de résonance qui sont données par l'équation :

$$v_{mnq} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{q}{d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I-11})$$

La longueur d'onde

$$\lambda_{mnq} = \frac{c}{v_{mnq}} \quad (\text{I-12})$$

Pour chaque ensemble de mode (m, n, q) il existe deux modes indépendants qui correspondent à deux polarisations possibles et les différents modes sont représentés par un réseau de trois dimensions dans le système de coordonnées k_x, k_y, k_z . Si la maille de ce réseau a pour cotés

$\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{d}$, le volume de cette maille est égal à $\frac{\pi^3}{abd}$, et le volume de la sphère de rayon k étant

$V = \frac{4}{3}\pi k^3$ donc, le volume compris entre k et $k + dk$ est $dV = 4\pi k^2 dk$, aussi comme $m, n, q > 0$,

$\frac{1}{8}$ seulement de ce volume est à considérer (Uniquement la partie positive de la sphère est

considérée), de plus chaque mode est caractérisé par deux polarisations indépendantes, le nombre de modes donc entre v et $v + dv$ est donné par la relation suivante :

$$dN = \frac{\frac{1}{8} \times 2 \times 4\pi k^2 dk}{\pi^3/abd} \Rightarrow dN = \frac{(abd)k^2 dk}{\pi^2}$$

$$dN = \frac{8\pi v^2}{c^3} (abd) dv \quad (\text{I-13})$$

• Le nombre des modes par unité de volume de la cavité et par hertz $n(v) = \frac{8\pi v^2}{c^3}$

• pour un volume de cavité V et un intervalle spectral $\Delta N = \frac{8\pi v^2}{c^2} V_c \Delta v$

Pour un cube : $a=b=d$

$$v_{mnq} = \frac{c}{2d} \sqrt{q^2 + m^2 + n^2} \quad (\text{I-14})$$

L'équation (I-14) représente les fréquences des modes TEM (m, n, q) [14].

I.3.2. Etude d'une cavité laser par l'équation d'Helmholtz

Pour connaître les modes propres de la cavité plusieurs méthodes sont possibles, la plus évidente est celle d'utiliser les solutions des équations de Maxwell, qui représentent les modes possibles dans une cavité optique [7], [13].

L'équation de Maxwell qui décrit la propagation d'une onde électrique dans le vide :

$$(\Delta + k^2)E = 0 \quad (\text{I-15})$$

Cette équation appelée l'équation d'Helmholtz, où Δ représente le laplacien, et E l'expression du champ électrique, k est le vecteur d'onde. L'équation (I-15) admet comme solution :

$$E(x, y, z) = E_0(x, y, z)e^{-ikz} \quad (\text{I-16})$$

Elle correspond à une onde plane se propageant dans la direction z , $E_0(x, y, z)$ représente l'amplitude du champ. En remplaçant la solution (I-16) dans l'équation (I-15) on trouve :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 z} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-17})$$

L'approximation paraxiale consiste à supposer que la variation de l'amplitude du champ est faible suivant la direction de propagation z par rapport aux directions transversales x, y .

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 z} \ll k \frac{\partial E_0}{\partial z} \ll k^2 E_0 \quad (\text{I-18})$$

Donc on néglige $\frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 z}$ et l'équation (I-17) devient :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial^2 y} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-19})$$

I.3.2.1. Mode fondamental

La solution de l'équation différentielle (I-17) est :

$$E_0 = \exp\left[-j\left(p(z) + \frac{k}{2q(z)} r^2\right)\right] \quad (\text{I-20})$$

Où :

- $r^2 = x^2 + y^2$,
- $p(z)$ représente le déphasage complexe du faisceau qui décrit la variation associée à la propagation du faisceau lumineux,
- $q(z)$ représente le paramètre complexe du faisceau qui décrit la variation gaussienne.

Si on remplace l'expression de E_0 dans l'équation (I-19) on obtient :

$$-\frac{i2k}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} - 2k \left[\frac{dp}{dz} - kr^2 \left(\frac{dq}{dz} \right) \right] / 2q^2 = 0 \quad (\text{I-21})$$

Cette équation peut être vérifiée c'est-à-dire :

$$\frac{dq}{dz} = 0 \quad (\text{I-22})$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{i}{p(z)} \quad (\text{I-23})$$

• **Le rayon de courbure complexe $q(z)$:**

L'équation (I-22) permet d'obtenir :

$$q(z) = z + C \quad (\text{I-24})$$

où : C est la constante d'intégration complexe, à l'origine $z = z_0$ on a $q(z_0) = q_0 = C$.

Nous introduisons la notation suivante :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \quad (\text{I-25})$$

Le rayon de courbure à l'origine $z = z_0$ est $R(z=0) \rightarrow \infty$ dans ce cas on obtient $q_0(z) = j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$, on

pose $\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} = z_R$ (longueur de Rayleigh, $b = 2z_R$ appelé paramètre confocal), pour la distance z , le

rayon de courbure :

$$q(z) = jz_R \quad (\text{I-26})$$

Pour la distance z à la taille, le rayon de courbure est :

$$q(z) = z + iz_R \quad (\text{I-27})$$

Après la combinaison entre (I-26),(I-27) et (I-25) on trouve :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + j \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)} = \frac{z - j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}}{z^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2} \quad (\text{I-28})$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{z}{z^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2} - j \frac{\pi \omega_0^2 / \lambda}{z^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

D'après (I-28) on a :

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{I-29})$$

D'après l'équation (I-29) on trouve : $R(z) \approx \begin{cases} \infty \rightarrow z \ll z_R \\ 2z_R \rightarrow z = z_R \\ z \rightarrow z \gg z_R \end{cases}$ (I-30)

La largeur du faisceau laser est donnée par :

$$w^2(z) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]$$
 (I-31)

Où : ω_0 la largeur minimum au $z = 0$.

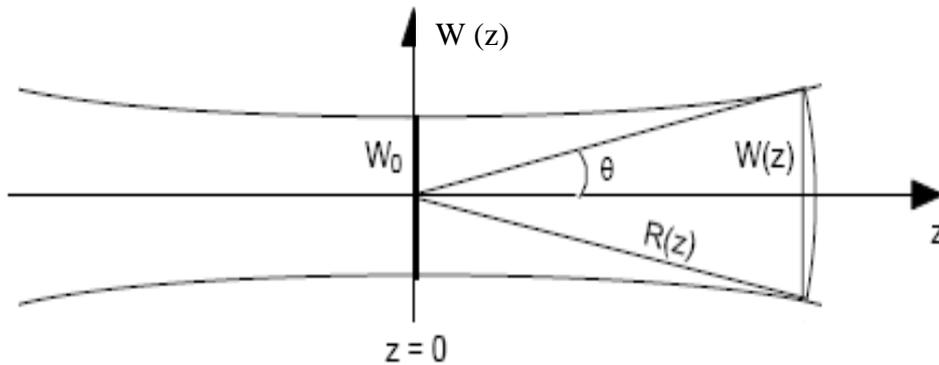


Figure.I-10 : Figure indiquant la largeur et le rayon de courbure du faisceau laser

Si on divise (I-31) par (I-29) on obtient la relation :

$$\frac{\pi w^2}{\lambda R} = \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}$$
 (I-32)

Cette relation est utilisée pour déterminer ω_0 et z :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = w^2 / \left[1 + \frac{\pi w^2}{\lambda R} \right] \\ z = R / \left[1 + \frac{\lambda R}{\pi w^2} \right] \end{cases}$$
 (I-33)

- **Le déphasage complexe**

A partir de l'équation (I-23) on obtient : $p(z) = -j \ln qc = -j \ln(q_0 + z)c$ (I-34)

On pose que pour $z=0, p(0) = 0 \Rightarrow \ln q_0 c = 0 \Rightarrow q_0 c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{q_0}$ on remplace dans l'équation (I-34) :

$$p(z) = -j \ln \frac{q_0 + z}{q_0} = -j \ln \left[\left(j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} + z \right) / j \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right] \Leftrightarrow p(z) = -j \ln \left(1 + j \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right) \tag{I-35}$$

$$jp(z) = \ln \left(1 + j \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right) = \ln \left(1 + j \frac{z}{z_R} \right)$$

Alors on peut écrire la solution (I-34) sous la forme :

$$E(x, y, z) = \frac{\omega_0}{w(z)} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \exp - j \left[k(z) - \phi(z) \right] + k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \tag{I-36}$$

Où $\phi(z)$ est le déphasage de Gouy qui est donné par la relation suivante :

$$\phi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \tag{I-37}$$

• Répartition d'intensité

Le calcul de la répartition d'intensité se fait simplement en prenant le carré de l'amplitude du champ électrique, ou plutôt en multipliant par son complexe conjugué :

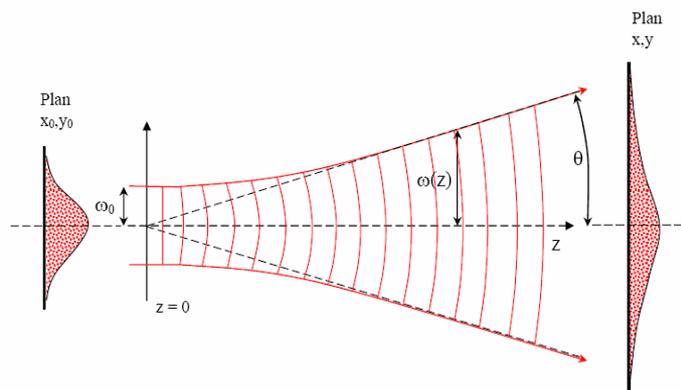
$$I = |E(x, y, z)E^*(x, y, z)| = \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left(-2 \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \tag{I-38}$$

• La divergence du faisceau

La cavité laser est déterminée par les paramètres fondamentaux de l'onde laser. Lors de sa propagation dans l'air, le faisceau diverge naturellement [15]. Réécrivons l'équation (I-31) en champ lointain :

$$w(z) = w_0 \frac{z}{z_R} \text{ pour } \frac{z}{z_R} \gg 1 \tag{I-39}$$

Figure I-11. Ce Schéma indique que le faisceau laser est divergeant par l'angle θ .



La divergence du faisceau se note $\theta = \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ (I-40)

I.3.2.2. Mode d'ordre supérieur

L'équation (I-17) admet d'autres solutions. On considère deux types de cavités différentes.

I.3.2.2.1. Géométrie circulaire (modes de Laguerre –Gauss) :

Pour ce système, la distribution transverse du champ, est écrite en fonction des coordonnées cylindriques (r, ϕ) dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation z de l'onde pour le mode TEM_{plq}.

Les solutions de l'équation (I-17) dans ce cas sont données sous la forme suivante :

$$E_0(x, y, z) = g\left(\frac{1}{w}\right) \exp\left[-j\left(p + \frac{k}{2q}r^2 + l\phi\right)\right] \tag{I-41}$$

Où : $g = \left(\sqrt{2} \frac{1}{w}\right)^l L_p^l\left(2 \frac{r^2}{w^2}\right)$.

- L_p^l : représente le polynôme de Laguerre,
- p, l sont les nombres de nœuds relatifs au Coordonnées r et ϕ tandis que (Figure I-12):

$$L_p^l(x) = e^x \cdot \frac{x-l}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+l}).$$

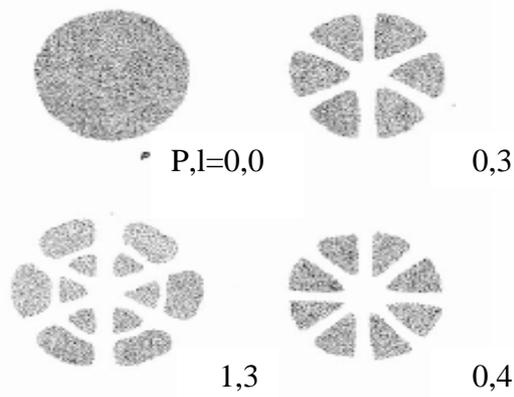
On peut donner quelques polynômes de bas ordre :

$$\begin{aligned} L_0^l(x) &= 1 \\ L_1^l(x) &= l+1-x \\ L_2^l(x) &= \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Si on remplace (I-41) dans l'équation (I-17) on trouve l'équation suivante :

$$x \frac{d^2 L_p^l}{dx^2} + (l+1-x) \frac{dL_p^l}{dx} + pL_p^l = 0 \tag{I-42}$$

Figure I-12: Schéma indiquant la répartition d'intensité du mode de Laguerre –Gauss TEM₀₀ et TEM₀₃, TEM₁₃, TEM₀₄.



Le champ devient :

$$E_{pl} = \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right) L_p^l \left(\frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \exp \left(-\frac{r}{w(z)^2} - i\phi_{pl}(r, z) \right) \quad (\text{I-43})$$

L'intensité est donnée par :

$$I = |E(x, y, z)E^*(x, y, z)| \quad (\text{I-44})$$

Les grandeurs $R(z)$ et $w(z)$ sont les mêmes pour tous les modes cylindriques, mais le déphasage est donnée par :

$$\phi_{p,l}(r, z) = kz - (2p + l + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (\text{I-45})$$

I.3.2.2.2. Géométrie rectangulaire (modes d'Hermite- Gauss) :

Pour un système de géométrie rectangulaire la solution de l'équation d'onde est écrite en coordonnées cylindriques (x, y, z) , la distribution transverse du champ, en fonction de ces coordonnées est donnée par la relation suivante :

$$E_0(x, y, z) = g \left(\frac{x}{w} \right) h \left(\frac{y}{w} \right) \exp \left[-j \left(p + \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right) \right] \quad (\text{I-46})$$

$$\text{Où : } g.h = H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{w} \right).$$

- m et n sont des nombres de modes (Figure I-13),
- H_m polynôme d'Hermite d'ordre m qui est donné par la relation suivante :

$$H_m(x) = (-1)^m e^x \frac{\delta^m}{\delta x^m} e^{-x^2} = m! \sum_{p=0}^{[m/2]} (-1)^p \frac{2x^{m-2p}}{p!(m-2p)!}.$$

Quelques polynômes d'Hermite de bas ordre sont :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

L'équation (I-17) devient dans ce cas :

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \quad (\text{I-47})$$

Le champ devient :

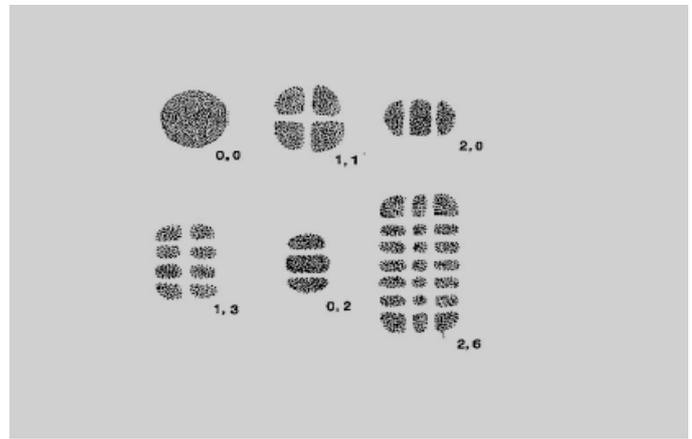
$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{\omega_0}{w(z)} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)} - i\phi_{mn}(r, z)\right)$$

L'intensité : $I = |E(x, y, z)E^*(x, y, z)|$

- Pour $m=0$ et $n=0$ on retrouve le mode fondamental
- Pour m et n quelconques, $w(z)$ et $R(z)$ sont les mêmes pour tous les modes mais le déphasage est donné par :

$$\phi(r, z) = kz - (m + n + 1) \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \tag{I-48}$$

Figure I-13: Schéma indiquant les mode Hermite Gauss, TEM₀₀, TEM₁₁, TEM₂₀, TEM₁₃, TEM₀₂ TEM₂₆.



I.4. CONDITION DE RESONANCE :

Les modes d'une cavité sont caractérisés par des fréquences appelées « les fréquences propres de résonance », ces fréquences sont obtenues à partir de la condition de résonance des modes.

Après un aller et retour complet dans la cavité les amplitudes sont les même et les phases sont égales à $q \cdot 2\pi$ (c'est-à-dire la différence de phase après chaque aller et retour doit être un multiple entier de 2π et pour un aller simple un multiple entier de π), donc la condition de résonance sur l'axe z ($r=0$) se traduit par [7],[14] :

$$\phi_{mn}(r = 0, z_1) - \phi_{mn}(r = 0, z_2) = q\pi \tag{I-49}$$

Où q est un entier quelconque, z_1, z_2 sont les positions des miroirs, qui sont données par :

$$z_1 = \frac{d(d + R_2)}{2d + R_2 + R_1} \tag{I-50}$$

$$z_2 = \frac{d(R_1 - d)}{2d + R_2 - R_1} \tag{I-51}$$

$$d = z_1 - z_2 \quad (\text{I-52})$$

La phase est donnée par l'expression :

$$\phi(r=0, z) = kz - (m+n+1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (\text{I-53})$$

z_R : la longueur de Rayleigh qui est définie par :

$$z_R = \sqrt{\frac{d(R_2 + d)(R_1 - d)(d + R_2 - R_1)}{(2d + R_2 - R_1)}} \quad (\text{I-54})$$

En reportant (I-54) dans (I-50), on obtient :

$$kz_1 - (m+n+1) \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) - kz_2 + (m+n+1) \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) = q \cdot 2\pi$$

$$k(z_1 - z_2) - (m+n+1) \left[\arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) \right] = q \cdot 2\pi$$

$$kd = (m+n+1) \left[\arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) \right] + q\pi \quad (\text{I-55})$$

Avec $z_1 - z_2 = d$ (un aller simple).

$$k \text{ dépend des entiers } q, m \text{ et } n : k = k_{mnq} = 2\pi\nu_{mnq}/c \quad (\text{I-56})$$

Les fréquences sont données par :

$$\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2d} \left[q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \left(\arctan \frac{z_1}{z_R} - \arctan \frac{z_2}{z_R} \right) \right] \quad (\text{I-57})$$

En utilisant l'identité : $\arctan a + \arctan b = \arccos \frac{a+b}{1-ab}$ [11].

On trouve :

$$\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2d} \left[\frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{R_1}{d}\right) \left(1 - \frac{R_2}{d}\right)} \right] \quad (\text{I-58})$$

Cette condition indique que les modes transverse de cavité TE $M_{m,n,q}$ correspondent à des valeurs différentes du paramètre de $(m+n)$ qui oscillent en général à des fréquences différentes, pour une même valeur du paramètre q . Les fréquences de résonance dépendent de l'intervalle spectral

$\Delta\nu_d = \frac{c}{2d}$ où les ondes interfèrent de manière constructive dans la cavité, et elle dépend aussi de la quantité [14].

$$\Delta \nu_T = \frac{1}{\pi} \Delta \nu_d \arccos\left(\pm \sqrt{\left(1 - \frac{R_1}{d}\right)\left(1 - \frac{R_2}{d}\right)}\right) \tag{I-59}$$

$\Delta \nu_T$: est l'intervalle « transverse » la fréquence qui sépare deux modes transverses successifs.

Donc l'expression (I-58) devient :

$$\nu_{m,n,q} = q\Delta \nu_d + (m+n+1)\Delta \nu_T \tag{I-60}$$

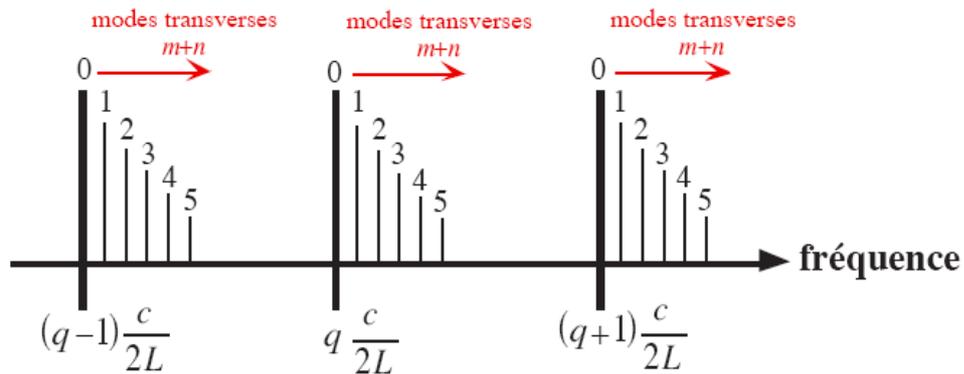


Figure I-14 : Les modes de résonance d'une cavité à miroirs sphériques. L'indice q correspond à la structure longitudinale du mode de résonance, tandis que les indices (m, n) caractérisent les modes transverses associés. En fonction de la valeur du

paramètre $\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}$, ces modes transverses sont situés soit du coté des

fréquences croissantes soit du cotés des fréquences décroissantes par rapport au mode fondamental TEM_{00} de même indice q [16].

I.5. LES PERTES DE LA CAVITE

Pour un résonateur ou cavité ouverte tous les modes souffrent des pertes qui résultent de nombreuses causes:

- Réflexion imparfaite des miroirs, d'autres part il est nécessaire d'extraire une partie de l'anergie de cavité et donc de permettre une certaine transmission des miroirs, d'autre part les miroirs de sortie ne sont pas réfléchissants à 100 % malgré le traitement par couches multiples [16].

- Le milieu amplificateur lui aussi peut absorber (les niveaux excités peuvent absorber une partie de l'énergie par exemple) ou diffuser la lumière, et de même les miroirs et les éléments intra cavité [16] [17].
- L'onde électromagnétique est diffractée par les bords de miroirs de la cavité, ces pertes donc dépendent de la dimension des miroirs, du rayon de courbure et de la distance entre les miroirs [16].

I.5.1 Paramètre caractérisant les pertes dans une cavité

Les pertes dans une cavité peuvent être décrites par certaines grandeurs :

I.5.1.1 Durée de vie des photons dans la cavité

Les pertes dans un résonateur passif occasionnent une décroissance de l'énergie ou de l'intensité donnée par $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}$ ou encore $\frac{dI}{dt} = -\frac{t}{\tau_c}$ avec τ_c appelé « la durée de vie de photon dans la cavité » autrement dit le temps de relaxation d'onde dans la cavité.

Pour une cavité de longueur d , dont le pourcentage de pertes à chaque passage est δ , le pourcentage de quantité d'énergie perdue par unité de temps est [16]:

$$\delta / (\text{le pourcentage de passage}) = \frac{\delta}{\frac{d}{c/n_0}} = \frac{\delta c}{n_0 d} \quad (\text{I-61})$$

Où $\frac{c}{n}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice n_0 . On peut écrire : $\frac{dI}{dt} = \frac{c\delta}{n_0 d} I$

$$\text{Donc : } \tau_c = \frac{n_0 d}{c\delta} \quad (\text{I-62})$$

I.5.1.2 Le facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un résonateur ou de la cavité est une mesure de la capacité du résonateur à stocker l'énergie. Ce facteur est défini par :

$Q = w_0 (\text{énergie stockée dans le résonateur}) / (\text{puissance dissipée})$

$$Q = w_0 \frac{I(t)}{dI(t)/dt} \quad (\text{I-63})$$

D'après (I-63) on trouve : $\frac{dI}{dt} = \frac{w_0}{Q} I(t) \Rightarrow I(t) = I(0) e^{-(w_0/Q)t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}$ c'est-à-dire $\tau_c = \frac{Q}{w_0}$

$$\text{Donc : } Q = w_0 \tau_c \quad (\text{I-64})$$

A partir de cette relation, on peut remarquer que la durée de vie du photon dans la cavité est longue si le facteur de qualité est haut et réciproquement.

I.5.1.3 Coefficient de pertes d'une cavité

Si une cavité de longueur d contient un milieu amplificateur de longueur $l \leq d$, les pertes d'intensité ΔI (ou d'énergie) pour un aller et retour sont définies par :

$$I - \Delta I = Ie^{-\alpha_p 2l} \quad (\text{I-65})$$

α_p est le coefficient d'absorption réduit tenant compte de toutes les pertes de la cavité (y compris les pertes à l'extérieur du milieu amplificateur). Pour une cavité linéaire à deux miroirs de pouvoir de réflexion R_1 et R_2 et dont les pertes relatives (autre que celle dues aux miroirs) sont $\frac{\Delta I}{I} = \eta$, pour un aller-retour on écrit :

$$I - \Delta I = IR_1 R_2 (1 - \eta) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{R_1 R_2 (1 - \eta)} \quad (\text{I-66})$$

La relation entre le coefficient de pertes et la durée de vie du photon dans la cavité se déduit de la réduction spatiale et temporelle de l'intensité en un aller et retour (ou un tour complet) :

$$I(2d) = Ie^{-\alpha_p 2l} \quad \text{donc } \tau_c = \frac{I}{\Delta I / \Delta t} = \frac{1}{c \alpha_p} \frac{d}{l} \quad (\text{I-67})$$

$$I\left(\frac{2d}{c}\right) = I_0 e^{-\frac{2d}{c} / \tau_c}$$

$$Q_c = w \tau_c \Rightarrow Q_c = \frac{w}{c \alpha_p} \frac{d}{l} \quad (\text{I-68})$$

I.5.2. Les pertes par diffraction

A cause de la dimension finie des miroirs, l'onde électromagnétique est diffractée par les bords de ceux-ci et engendre des pertes appelées pertes par diffraction. Aussi les éléments d'ouverture finie qui sont placés à l'intérieur de la cavité engendrent des pertes de même type.

Pour le mode fondamental, l'onde électromagnétique a perdu une fraction d'énergie d'où

$$\frac{\Delta I}{I} = e^{-\frac{2a^2}{w^2}} \quad \text{après chaque réflexion, mais les modes d'ordres plus élevés ont une extension spatiale}$$

qui va augmenter avec les indices m et n donc il y a plus de rayonnement qui peut s'échapper de la cavité alors les modes d'ordres plus élevés ont des pertes de diffraction plus grande.

I.5.3. Le nombre de Fresnel et les pertes par diffraction

Une onde incidente quasi- plane provenant du miroir M_2 est émise dans un angle $\theta_d = \frac{\lambda}{a_2}$, est vu par le miroir M_1 depuis le centre du miroirs M_2 par l'angle $\theta_u = \frac{a_1}{d}$ où a_1 et a_2 sont les demies largeurs de miroir M_1 et M_2 respectivement. Pour que les pertes de diffraction ne soient pas trop importantes, il faut que $\frac{a_1}{d} > \frac{\lambda}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1 a_2}{\lambda d} > 1$, en appelant le nombre $N = \frac{a_1 a_2}{\lambda d}$ « nombre de Fresnel », alors on peut caractériser les pertes de cavité par le nombre de Fresnel. Si le nombre de Fresnel est plus grand que 1 ($N \gg 1$) les pertes par diffraction de la cavité sont négligeables devant les autre pertes, et réciproquement, un petit nombre de Fresnel signifie que les pertes par diffraction peuvent être significatives, c'est le cas des modes d'ordre élevé. La plupart des cavités laser ont un nombre de Fresnel grand, mais les petits nombres de Fresnel se produisent dans les cavités instables qui sont appliquées au laser de puissance élevée.

I.6. LES MATRICES DE TRANSFERT

Définition

Lorsque on étudie la propagation d'un rayon lumineux paraxial à travers un système optique simple on peut utiliser le formalisme des matrices de Gauss (aussi appelés matrice de transfert ou matrice ABCD), cette matrice permet de traiter la propagation d'un rayon dans un système optique paraxial à une dimension le long de son parcours [18], [19].

Pour simplifier on considère un rayon paraxial qui est caractérisé dans un plan (p) perpendiculaire à (oz) par sa position $r(z)$ et par sa pente θ (par ce que pour le rayon paraxial, la pente est faible donc $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta = \frac{dr}{dz}$) qu'il fait avec l'axe (oz), le passage par un système optique paraxial linéaire donne dans le plan de sortie (p') un rayon caractérisé par sa position $r'(z)$ et sa pente θ' [13], [14] (Figure I-15).

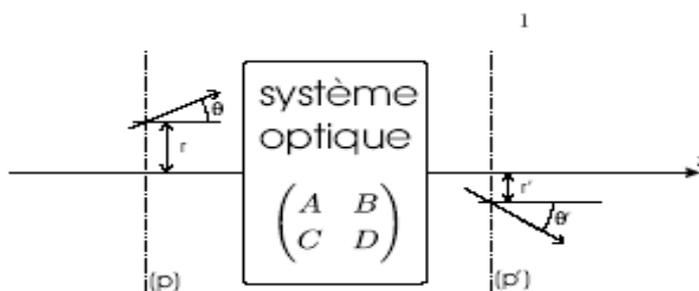


Figure I-15 :
Propagation d'un rayon lumineux à travers un système optique.

Dans les conditions de validité de Gauss de l'optique géométrique, les relations entre les rayons de sortie et d'entrée sont sous la forme :

$$\begin{cases} r'(z) = Ar(z) + B \frac{dr}{dz} \\ \frac{dr'}{dz} = Cr(z) + D \frac{dr}{dz} \end{cases} \quad \text{(I-69)}$$

$$\begin{pmatrix} r' \\ \frac{dr'}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \frac{dr}{dz} \end{pmatrix} \quad \text{(I-70)}$$

Où les pentes $\frac{dr}{dz}, \frac{dr'}{dz}$ sont positives.

A partir de l'équation (I-67) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est la matrice de transfert qui est utilisée pour décrire la propagation d'un rayon lumineux à travers les différents systèmes optiques et elle caractérise complètement le système optique.

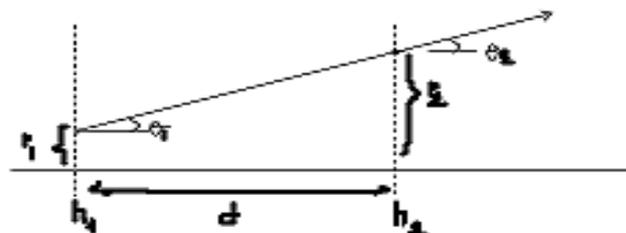
I.6.1. Les matrices de transfert pour quelques systèmes optiques

I.6.1.1. Propagation sur une distance d

Dans ce cas l'onde se propage dans un espace libre sur une distance d entre les plans d'entrée z_1 et de sortie z_2 ($d=z_2-z_1$) et d'indices quelconques [14]. Les vecteurs correspondants sont :

$$\begin{cases} r_1 = r(z_1) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \\ r_2 = r(z_2) = \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{(I-71)}$$

Figure I-16 : La propagation du rayon dans un espace vide. Le rayon d'entrée est caractérisé par sa pente θ_1 , et le rayon de sortie par sa pente θ_2 , où d est la distance entre les deux plans d'entrer et de sortie.



A partir de la figure (I-16) on remarque que la pente du rayon incident est égale à la pente du rayon sortant, c'est-à-dire $\theta_1 = \theta_2$, le rayon sortant est : $r_2 = r_1 + d \tan \theta_1$, sachant que $\theta_1 \ll 1$ donc $r_2 = r_1 + d\theta_1$, donc on peut écrire :

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + d\theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

La matrice M est donnée donc par (Figure I-17.a) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I-72}$$

Si l'indice du milieu est n , la matrice devient (Figure I-17. b) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I-73}$$

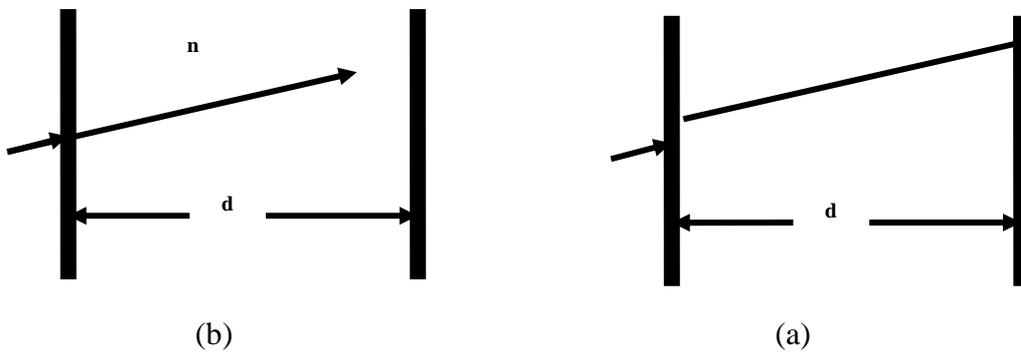


Figure I-17 : Ce schéma indique la propagation d'onde entre deux miroirs plans séparés par une distance d , (a) : milieu d'indice 1, (b) : milieu d'indice n .

I.6.1.2. Une lentille mince de distance focale et un miroir

Pour une lentille mince $r_1 \rightarrow r_2$, si on définit la pente du rayon incident $\frac{dr_1}{dz} \equiv r'_1 = \tan \theta \approx \theta$ et la pente du rayon de sortie $r'_2 \equiv \frac{dr_2}{dz} = \tan \gamma = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$.

D'après la Figure (I-17) la pente du rayon de sortie est donnée par : $r'_2 = -\frac{OM}{f} = -\frac{OO' - MO'}{f}$

c'est-à-dire $r'_2 = -\frac{r_2 - f \tan \theta}{f} = -\frac{r_2 - fr'_1}{f}$, $r_2 = r_1$ donc r'_2 devient : $r'_2 = \left(-\frac{1}{f}\right)r_1 + r'_1$.

Donc :
$$\begin{cases} r_2 = r_1 \\ r'_2 = -\left(\frac{1}{f}\right)r_1 + r'_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{I-74}$$

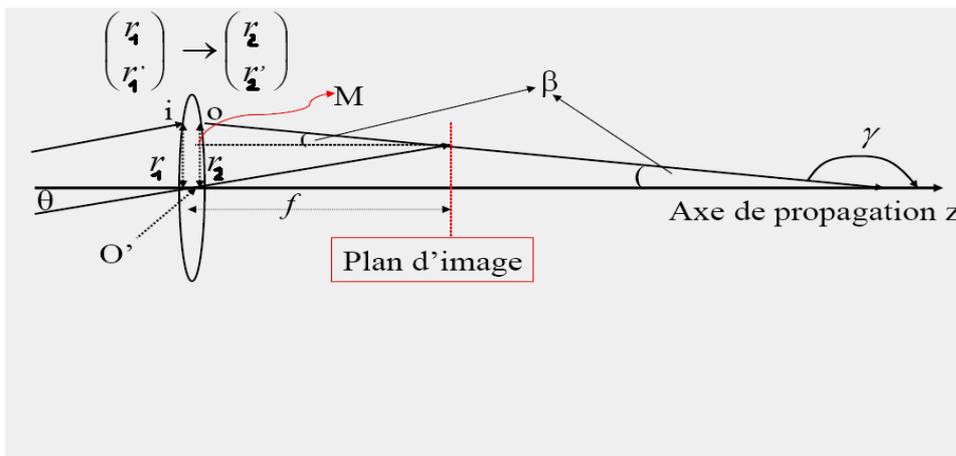


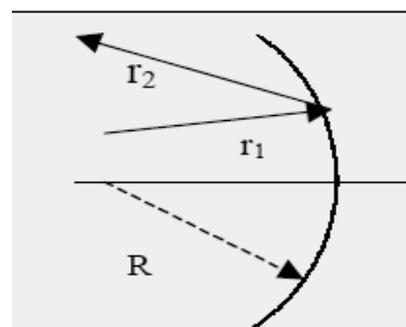
Figure I-17 : La propagation de l'onde à travers une lentille mince

Si l'onde se propage à travers un miroir de rayon R , où le foyer $f = \frac{R}{2}$ (Figure I-18), la matrice M

(I-74) devient :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \tag{I-75}$$

Figure I-18 : La propagation d'onde électromagnétique à travers un miroir de rayon R .



I.6.1.3. Combinaison entre la distance d et la lentille f

Si on considère une onde électromagnétique qui se propage à travers une distance d et puis à travers une lentille mince la matrice de transfert est calculée de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \tag{I-76}$$

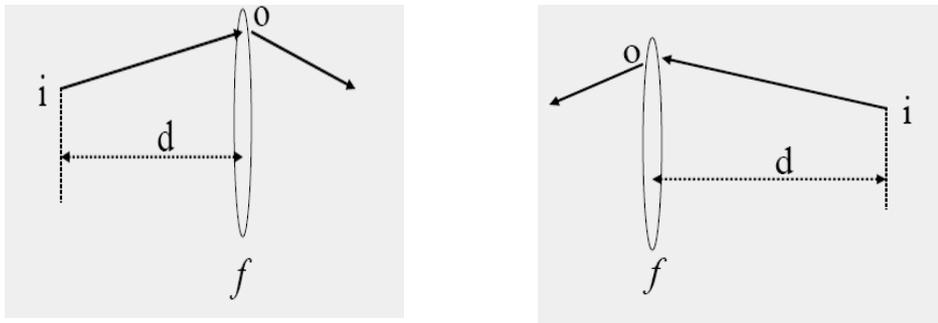


Figure I- 19: Ce schéma indique la propagation de l'onde électromagnétique à travers une distance d et une lentille de distance focale f

L'ordre est renversé, les éléments diagonaux sont changés.

I.6.1.4. La combinaison entre deux structures (I.6.1.2)

Si on combine entre les deux structures de la figure I-19, on peut calculer la matrice de transfert de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_2}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 + \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} - \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_2 d_1}{f_2 f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 + \frac{d_2 d_1}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_2 d_1}{f_2 f_1} \end{pmatrix} \quad (\text{I-77})$$

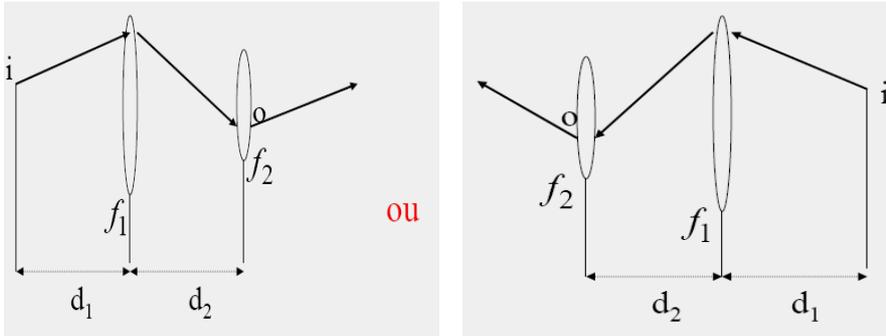


Figure I-20 : Ce Schéma indique la combinaison entre deux systèmes de (lentilles +espace vide)

I.6.1.5. Combinaison de systèmes optiques

De manière générale, pour des systèmes optiques successifs de matrice M_i ($i=1, n$), la matrice de l'ensemble est le produit des matrices dans l'ordre inverse :

$$M = M_n \dots M_i \dots M_2 M_1 \quad (\text{I-78})$$

En général, il n'y a pas de commutativité entre deux matrices consécutives, et l'ordre indiqué doit être strictement observé. La matrice de transfert est unitaire, sauf dans le cas où on a changé l'indice entre les plans de sortie et d'arrivée.

I.6.1.6. Le milieu d'indice parabolique

Dans un milieu diélectrique, à symétrie cylindrique, comme la fibre optique, l'indice de réfraction varie quadratiquement avec la distance de l'axe optique [22]:

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} r^2 \right) \quad (\text{I-79})$$

Où :

- $\gamma = \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$,
- $r^2 = x^2 + y^2$

Cet indice peut être décrit par un développement en série de Taylor [18] :

$$n(r) = n(r=0) + \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_{r=0} r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right) + \dots \quad (\text{I-80})$$

La propagation du rayon dans ce milieu obéit à l'équation suivante :

$$\frac{dr^2}{dz^2} + \gamma^2 r = 0 \tag{I-81}$$

La solution de l'équation différentielle (I-78) avec les conditions aux limites $r(0) = r_0$ et $\frac{dr}{dz} = \theta_0$

s'écrit simplement :

$$r = r_0 \cos \gamma z + \frac{\theta_0}{\gamma} \sin \gamma z = 0 \tag{I-82}$$

La pente de cette équation devient :

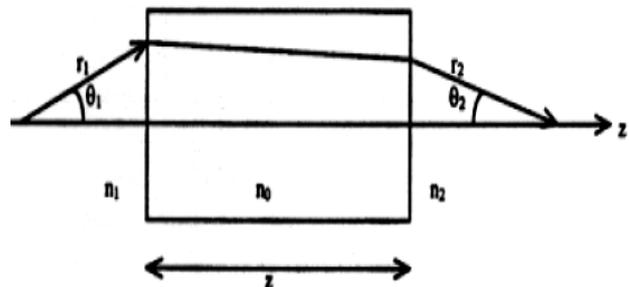
$$\theta = \frac{dr}{dz} = -\gamma r_0 \sin(\gamma z) + \theta_0 \cos(\gamma z) \tag{I-83}$$

Ces équations de propagation s'expriment comme le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma z) & \frac{1}{\gamma} \sin \gamma z \\ -\gamma r_0 \sin \gamma z & \cos \gamma z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{I-84}$$

Où r_0 et θ_0 sont le rayon et la pente en $z = 0$.

Figure I- 21 : La translation d'une onde d'un milieu n_1 , dans un milieu n_0 sur une distance z , et sortie dans un milieu n_2 .



Si la translation du faisceau de rayon r_1 se fait à partir d'un milieu d'indice n_1 , dans un milieu d'indice n_0 sur une distance z , et sortie avec un rayon r_2 dans un milieu d'indice n_2 , il faut appliquer la loi de SNELL sous sa forme paraxiale ($n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$), alors la matrice du milieu parabolique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} r \\ n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma z) & \frac{1}{n_0 \theta_0} \sin(\gamma z) \\ -\gamma n_0 \sin(\gamma z) & \cos(\gamma z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ n_0 \theta_0 \end{pmatrix} \tag{I-85}$$

Le milieu d'indice parabolique est le milieu le plus général en optique paraxiale.

I.6.1.7. Dioptré plan $\frac{n_1}{n_2}$ et sphérique

D'après la figure (I-21-a) on a : $r_1 = r_2$ et la loi de SNELL est donnée par : $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$

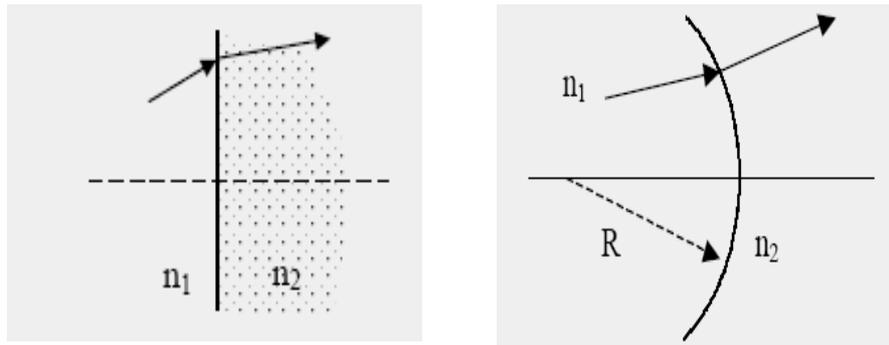


Figure I-21 : Schéma de dioptrics, (a) le dioptrics plan, (b) le dioptrics sphérique.

La matrice de transfert de dioptrics plan est diagonale non unitaire elle est écrite sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \tag{I-86}$$

Si le dioptrics est sphérique, la matrice devient :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \tag{I-87}$$

I.6.2 L'ordre périodique

Un rayon lumineux qui fait des allers et retour entre les miroirs sphériques d'un résonateur est équivalent à une séquence de lentilles. Quand le rayon traverse n éléments successifs la matrice de

transfert est décrite par $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$ ceci peut être évalué grâce au théorème de sylvestre :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \begin{vmatrix} A \sin \theta - \sin(n-1)\theta & B \sin \theta \\ C \sin \theta & D \sin \theta - \sin(n-1)\theta \end{vmatrix} \tag{I-88}$$

D'après la condition de stabilité $\cos \theta = \frac{A+D}{2}$ et par ce que $-1 < \cos \theta < 1$ donc $-1 \leq \frac{D+A}{2} \leq 1$

c'est la condition de stabilité d'une cavité.

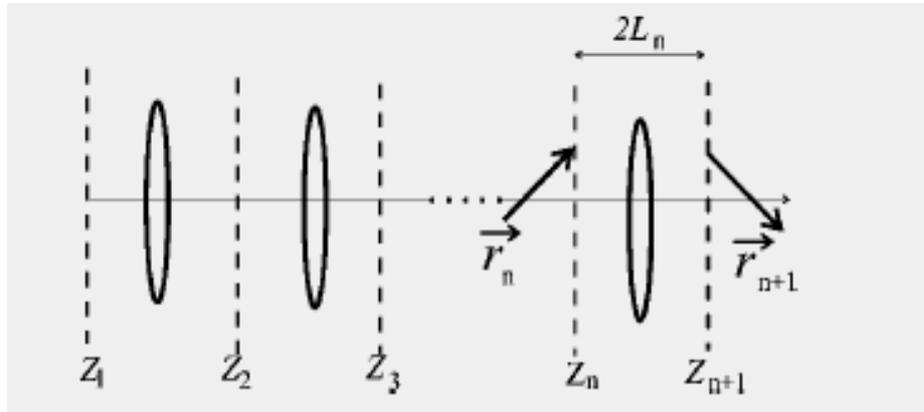


Figure I-22 : Séquence de lentille équivalente à une cavité optique.

I.6.3 La loi ABCD

Si un système optique est décrit par une matrice ABCD, la propagation d'un faisceau gaussien dans ce système peut être calculé très simplement en appliquant la formule suivante [23], [5]:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{I-89})$$

Où :

- q_1 est la courbure complexe d'un faisceau laser en z_1 ,
- q_2 le paramètre complexe en z_2 , la matrice de transfert ABCD décrit la propagation de z_1 et z_2 .

Le rayon de courbure est aussi décrit par cette matrice [23], [16]:

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \quad (\text{I-90})$$

Cette équation est très importante, d'autant qu'elle se généralisera aux rayons de courbure complexes introduits dans les faisceaux gaussiens [17].

I.6.4. Les matrices de transfert de quelque cavité optique

On peut résumer les matrices de transfert de quelques cavités optiques dans le tableau I-1:

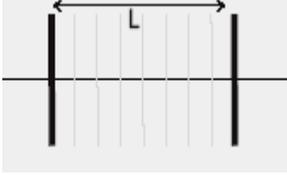
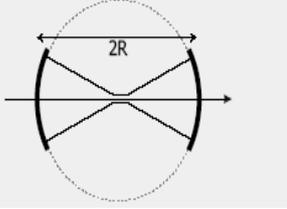
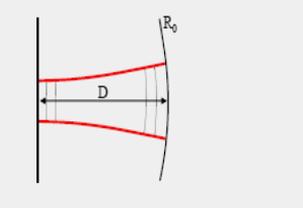
La cavité optique	La matrice de transfert d'un tour de cavité
<p>La cavité plane</p> 	$\begin{pmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
<p>La cavité concentrique</p> 	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{R} & 1 \end{pmatrix}$
<p>La cavité hémisphérique</p> 	$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R} & L \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$

Tableau I-1 : Les matrices de transferts de quelques cavités optiques

I.7. LA STABILITE DE LA CAVITE LASER

On vu précédemment que le rayon lumineux est caractérisé par la position $r(z)$ et la pente par rapport à l'axe optique z et le passage du rayon lumineux dans la cavité s'exprime à l'aide des matrices de transfert ABCD. C'est après un nombre d'aller et retour, les composantes de r restent finies, alors le rayon demeure près de l'axe optique on dit que la *cavité est stable*, dans le cas contraire les composantes de r divergent, donc le rayon finit par s'échapper de la cavité et c'est *la cavité instable*.

I.7.1. La stabilité d'ordre périodique

Pour étudier la stabilité d'un système périodique on étudie les valeurs propres λ de la matrice M

qui sont définies par l'équation $M - \lambda I = 0$, où $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de transfert du système.

$$\det \begin{pmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0$$

Par ce que les milieux extrêmes étant identiques, la matrice vérifie $\det M = 1 \Leftrightarrow AD - BC = 1$

Les solutions de cette équation sont $\lambda_{a,b} = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1}$, on distingue deux possibilités :

- $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 > 1$ alors les deux valeurs propres et les vecteurs propres sont réels.
- $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 < 1$ où les valeurs propres et les vecteurs propres deviennent complexes.

I.7.2 La condition de stabilité

Lorsque la géométrie de la cavité satisfait la condition $\left(\frac{A+D}{2}\right) < 1$, les valeurs propres $\lambda_{a,b}$ deviennent complexes, On pose $\lambda_a = |\lambda_a|e^{i\varphi}$. Les valeurs propres et les vecteurs propres obéissent aux relations :

$$\begin{pmatrix} \lambda_a \lambda_b = |T| = 1 \\ \lambda_a + \lambda_b = \text{trace}(T) = A + D \end{pmatrix}$$

A partir de $\lambda_a \lambda_b = 1$ on trouve $\lambda_b = |\lambda_a|^{-1} e^{-i\varphi}$.

La stabilité des rayons au voisinage de oz est obtenue quand r_n est borné supérieurement quelque soit n , ceci implique que $|\lambda_a| \leq 1$ et $|\lambda_b| \leq 1 \Rightarrow |\lambda_a| = |\lambda_b| = 1$ donc

$$\lambda_a + \lambda_b = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = i \sin \varphi + \cos \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi = 2 \cos \varphi = A + D \Rightarrow \cos \varphi = \frac{A+D}{2}$$
 et par ce

$$\text{que } -1 \leq \cos \varphi \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{A+D}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{A+D}{2} + 1 \leq 2$$

$$0 \leq \frac{A+D+2}{4} \leq 1 \tag{I-91}$$

Cette condition de stabilité est générale et peut s'appliquer à n'importe quelle cavité.

I.7.3 Stabilité des cavités à deux miroirs

On définit la période précédemment utilisée par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \left(2 - \frac{d}{f_1}\right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice conduit à la condition de stabilité de cavité à deux miroirs où $R=2f$.

A partir de la matrice de transfert T on obtient :

$$A = 1 - \frac{d}{f} \qquad C = -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$B = d \left(2 - \frac{d}{f} \right) \qquad D = \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) - \frac{d}{f_1}$$

donc la condition de stabilité pour la cavité de deux miroirs sphérique devient :

$$\frac{A+D+2}{4} = \left(1 - \frac{d}{2f_1} \right) \left(1 - \frac{d}{2f_2} \right), \text{ et par ce que } f = \frac{R}{2} \text{ la condition de stabilité devient :}$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1} \right) \left(1 - \frac{d}{R_2} \right) \leq 1 \tag{I-92}$$

C'est la cavité vérifiant cette condition qui est capable de confiner le rayonnement.

On pose :

$$\begin{cases} g_1 = 1 - \frac{d}{R_1} \\ g_2 = 1 - \frac{d}{R_2} \end{cases}$$

La condition de stabilité est donc:

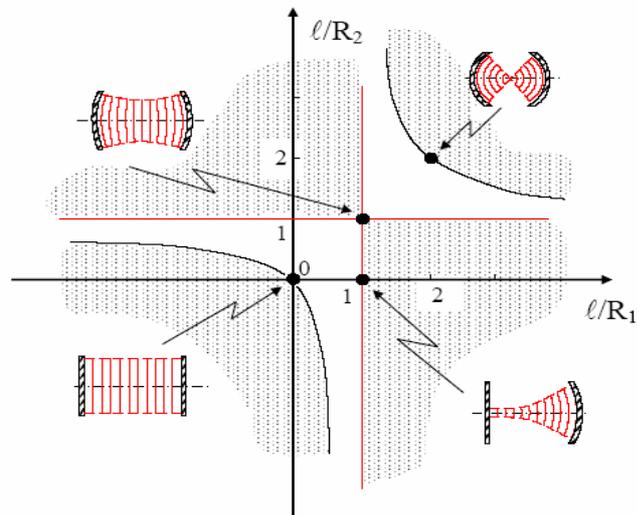
$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \tag{I-93}$$

I.7.4. Diagramme de stabilité

Pour préciser les régions stables on dessine g_2 en fonction de g_1 .

On met $g_1 g_2 = 1 \Rightarrow g_2 = 1/g_1$ l'intersection de cette courbe avec les axes $g_1 g_2 = 0$ donne les régions de stabilité (figure I-2)

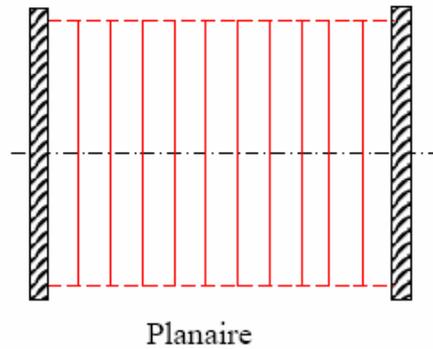
Figure I-23: Le diagramme de Stabilité du résonateur optique qui est indiqué par les régions non hachurées.



- Si $g_1g_2=1$ c'est-à-dire $\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)=1$, on a :

- $\left\{ \begin{array}{l} 1-\frac{d}{R_1}=1 \Rightarrow \frac{d}{R_1}=0 \Rightarrow R_1 \rightarrow \infty \\ 1-\frac{d}{R_2}=1 \Rightarrow \frac{d}{R_2}=0 \Rightarrow R_2 \rightarrow \infty \end{array} \right\}$ C'est le cas de cavité plane, donc la cavité de Fabry-Perot obtenue pour ce cas (figure I-24).

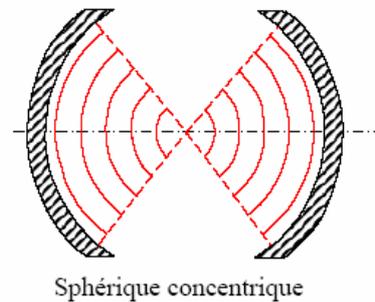
Figure I-24.
La cavité da Fabry-Perot constituée de deux miroirs plans.



- $\left\{ \begin{array}{l} 1-\frac{d}{R_1}=-1 \Rightarrow d=2R_1 \Rightarrow R_1=\frac{d}{2} \\ \text{ou} \\ 1-\frac{d}{R_2}=-1 \Rightarrow d=2R_2 \Rightarrow R_2=\frac{d}{2} \end{array} \right\}$, donc $R_1 + R_2 = d$.

Ce cas correspond aux cavités concentriques (Figure I-25).

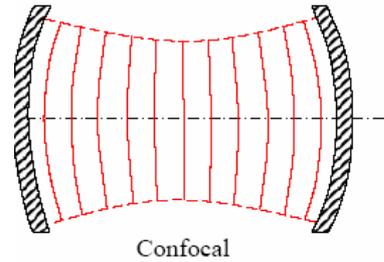
Figure I-25. La cavité concentrique de deux miroirs courbés, où $R_1 + R_2 = d$



- Pour $g_1g_2=0$

- ❖ $\left\{ \begin{array}{l} 1-\frac{d}{R_1}=0 \Rightarrow d=R_1 \\ 1-\frac{d}{R_2}=0 \Rightarrow d=R_2 \end{array} \right\}$ c'est le cas de cavité confocale (Figure I-26).

Figure I-26: Cavité confocale de deux miroirs vérifiant $R_1 = R_2 = d$.



$$1 - \frac{d}{R_1} = 1 \Rightarrow R_1 \rightarrow \infty \text{ Et } 1 - \frac{d}{R_2} = 0 \Rightarrow d = R_2$$

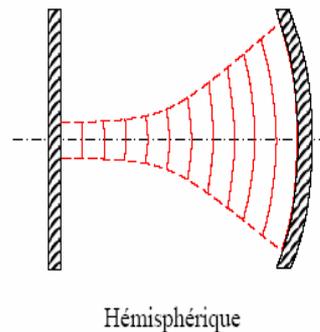
❖

ou :

$$1 - \frac{d}{R_1} = 0 \Rightarrow d = R_1 \text{ Et } 1 - \frac{d}{R_2} = 1 \Rightarrow R_2 \rightarrow \infty$$

C'est le cas de cavité hémisphérique (figure I-28).

Figure I-27 : la cavité hémisphérique de $R_1 \rightarrow \infty$ et $R_2 = d$, dans le cas inverse aussi on dit que la cavité est hémisphérique .

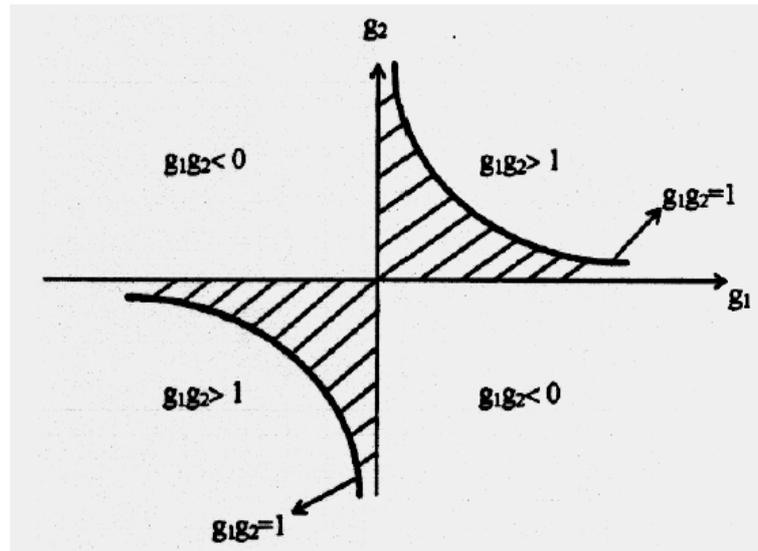


I-8. L'INSTABILITE DE LA CAVITE LASER

Contrairement à ce qui se passe dans les résonateurs stables, ici la lumière suit des parcours divergents et l'énergie quitte les résonateurs après seulement quelques réflexions sur les miroirs dont les coefficients de réflexion sont très élevés.

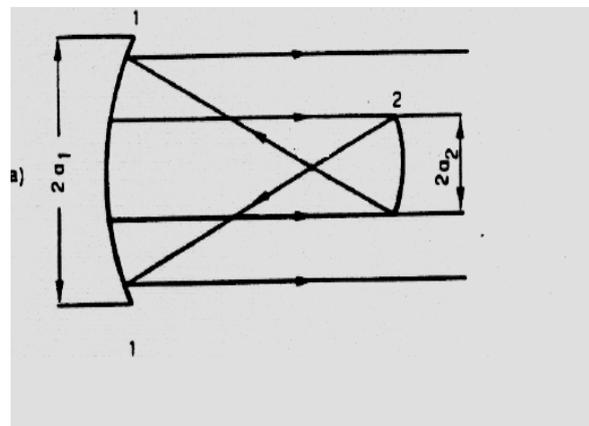
Cette géométrie définie par $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 > 1$, qui conduit à la condition de stabilité $g_1 g_2 > 1$ et $g_1 g_2 < 0$, la figure suivante permet de visualiser les diverses géométries où les résonateurs instables se retrouvent à l'extérieur de la partie hachurée.

Figure I-29 : Ce schéma indique les régions stables et instables .



Ce genre des cavités ou résonateurs a des avantages qui peuvent être utilisés pour les lasers de très grandes puissances. On peut assurer le couplage en utilisant un miroir de rayon de courbure R_2 de diamètre plus petit que celui du miroir R_1 , il est alors utile d'exiger que la sortie soit collimatée.

Figure I-30 : La cavité instable de dimensions, $2a_1$ du miroir 1 , $2a_2$ du miroir 2 où $a_1 > a_2$.



Les valeurs propres et les vecteurs propres deviennent réels ou les valeurs propres de la cavité instable sont : $\lambda_a = M$ et $\lambda_b = M^{-1}$

$$M = \left(\frac{A+D}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1} \quad \text{Et } |M| > 1.$$

M est appelé « le grandissement transversal par période du système », et les vecteurs propres r_a et r_b sont les vecteurs propres définis par :

$$Tr_a = \lambda_a r_a \quad \text{et} \quad Tr_b = \lambda_b r_b$$

Par ce que ces vecteurs propres forment une base on peut exprimer le rayon initial par:

$$r_0 = c_a r_a + c_b r_b \quad (\text{I-94})$$

Après n passages par le canal de lentille on obtient :

$$r_n = c_a \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \vec{r}_a + c_b \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \vec{r}_b \quad (\text{I-95})$$

De façon générale $\vec{r}_n = \lambda_a^n c_a \vec{r}_a + \lambda_b^n c_b \vec{r}_b$ lorsque le nombre de passages augmente de plus en plus, finalement pour $n \rightarrow \infty$ $r_n \rightarrow c_a M^n \vec{r}_a$.

- Pour $|M| > 1$ on pose $M = e^\psi$ où $\psi = \ln M$, on obtient $r_n = r_0 ch(n\psi) + s_0 sh(n\psi)$ où $s_0 = c_a r_a - c_b r_b$ et $r_0 = c_a r_a + c_b r_b$ sont les conditions aux limites au départ du système périodique on remarque que r_n diverge exponentiellement avec le grandissement M à chaque période.
- Pour $M < -1$ (cavité où $g_1 g_2 < 0$), la position du rayon oscille de part et d'autre de l'axe à chaque période tout en divergeant sur deux périodes consécutives.

I.8.1. Les avantages des cavités instables

1. utilisation des miroirs à pouvoirs de réflexion maximum.
2. utilisation des milieux amplificateurs à très fort gain.
3. luminance (intensité par sr) élevée.
4. cavités adaptées aux lasers à injection (asservissement de cavité par un autre laser extérieur injecté dans cette cavité).
5. établissement rapide des modes pour les lasers à impulsion courte (peu de trajets à effectuer [24]).
6. mode transverse unique, faisceau de sortie limité par la diffraction à des nombres de Fresnel élevés.
7. volume de mode dans la cavité pouvant être important et contrôlé.

I.8.1. Les inconvénients :

La structure des modes sortant de telles cavités est souvent compliquée, et éloignée des structures gaussiennes que nous rencontrerons pour les cavités stables.

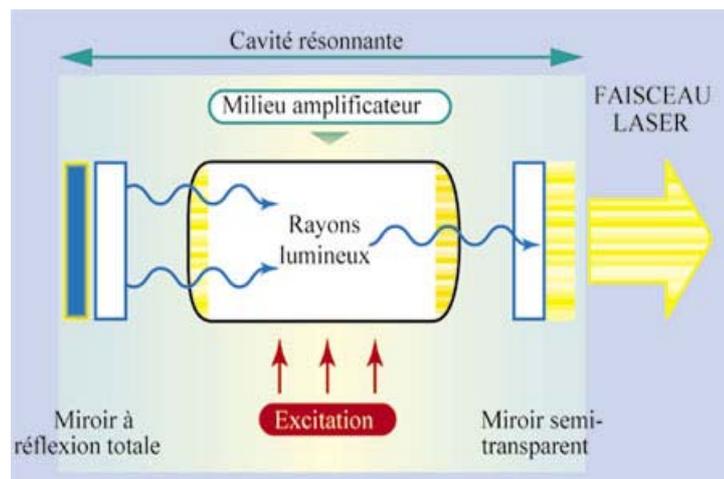
La théorie des lasers à cavité instables ne diffère pas fondamentalement de celle des lasers à cavités stables. Pour cette raison nous nous limitons aux cavités stables pour l'étude des modes caractéristiques [24].

II.1. Q'EST-CE QU'UN MILIEU AMPLIFICATEUR

Le milieu amplificateur est considéré comme le cœur du laser (figure II-1). C'est le second élément essentiel à la réalisation d'un système laser. Dans le premier chapitre nous avons négligé l'influence de ce milieu amplificateur sur les propriétés des cavités, et nous avons calculé la distribution du champ dans une cavité vide et nous avons supposé que les pertes de la cavité sont compensées par un milieu imaginaire, mais nous n'avons pas pris en considération l'interaction entre le champ électrique et les atomes du milieu amplificateur [25]. Le milieu amplificateur est un système actif qui est un siège du gain optique qui compense les pertes par absorption, diffusion, réflexion, diffraction, ..., il peut être constitué d'atomes, de molécules, d'ions et d'électrons. Ce milieu possède une structure appropriée de niveaux d'énergie discrets ayant la capacité de stocker l'énergie reçue de l'extérieur [3].

L'onde électromagnétique oscille dans la cavité suit différents chemins et elle est amplifiée après chaque passage dans le milieu amplificateur et l'intensité de la lumière est amplifiée aussi par un facteur de gain G [17].

Figure II-1:
Les composants essentiels
d'un laser



II.2. INTARACTION RAYONNEMENT-MATIÈRE

II.2.1. Les processus d'interaction

L'action d'une onde électromagnétique sur le système atomique présentant plusieurs niveaux d'énergie discrets peut être traitée par les processus d'émission spontanée, d'émission induite et d'absorption [27]. Einstein a caractérisé ces différents mécanismes par des coefficients traduisant les probabilités de chacun, on s'intéresse ici au processus d'interaction entre un atome à deux niveaux E_1 et E_2 et le rayonnement, ces processus contribuent à modifier les populations atomiques des niveaux d'énergie E_1 et E_2 [25].

II.2.1.1. L'absorption

Dans ce processus, les électrons peuvent absorber un photon et faire une transition dans un état excité (figure II-2), le nombre d'atomes qui absorbent par unité de temps est donné par [25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{N_1(t)} \frac{dN_1(t)}{dt} = \rho(\nu) B_{12} \\ dN_1(t) = -N_1 \rho(\nu) B_{12} dt \end{array} \right\} \quad (\text{II-1})$$

Où :

- $\rho(\nu)$ est la densité d'énergie,
- B_{12} constante de proportionnalité qui mesure la force d'absorption de la transition ($1 \rightarrow 2$) indique les états électroniques non dégénérés.

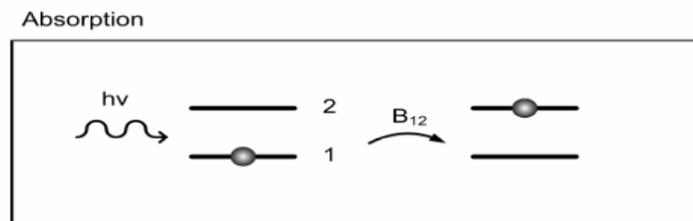


Figure II-2: L'absorption des photons par les électrons

II.2.1.2. L'émission spontanée

L'électron dans ce cas est dans un état excité où sa durée de vie est limitée, il passe spontanément d'un état excité E_2 vers un état de moindre énergie E_1 , en émettant un photon d'énergie $h\nu_{21} = E_2 - E_1$ [28]. Le nombre d'atomes qui émettent un photon est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{N_2(t)} \frac{dN_2(t)}{dt} = A_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \\ dN_2(t) = -N_2(t) A_{21} dt \end{array} \right\} \quad (\text{II-2})$$

Où :

- A_{21} est le coefficient d'Einstein d'émission spontanée,
- τ_{21} la durée de vie moyenne de l'état excité (s^{-1}).

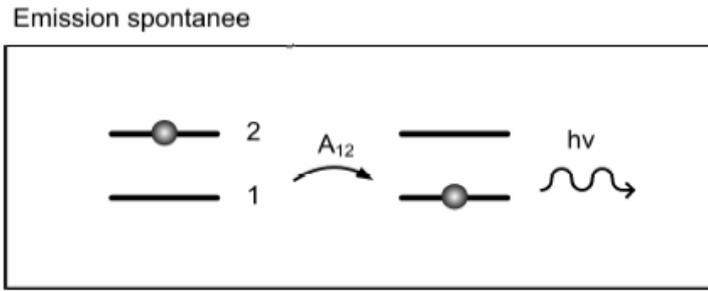


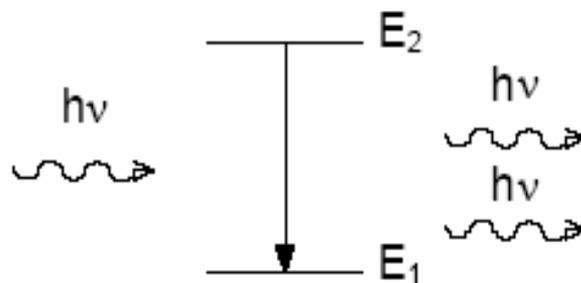
Figure II-3: L'émission spontanée

II.2.1.3. L'émission induite (stimulée)

Lorsqu'il y a interaction entre un atome initialement au niveau E_2 et un photon incident d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$, l'atome passe à un niveau inférieur E_1 tandis qu'est créé un second photon identique au premier, de même fréquence, même phase, même direction de propagation et même polarisation [28]. Le nombre d'électrons qui émettent un photon par ce processus est donné par [5] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N_2(t)} \frac{dN_2(t)}{dt} = -B_{21}\rho(\nu) \\ dN_2(t) = -N_2 B_{21}\rho(\nu)dt \end{array} \right\} \quad \text{(II-3)}$$

Figure II-4: L'émission induite



Où :

- B_{21} : Constant de proportionnalité, qui mesure la force d'absorption de la transition ($2 \rightarrow 1$) indique les états électroniques non dégénérés,
- $\rho(\nu)$ est la densité d'énergie présente.

Les processus d'absorption et d'émission stimulée sont liés par la relation suivante :

$$dN_1 = -dN_2 \quad \text{(II-4)}$$

Où : dN_1 , dN_2 sont les populations de niveau 1 et 2, respectivement.

- Les coefficients d'Einstein B_{12} et B_{21} (eq. II-3, II-1) sont liés par la relation classique suivante :

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_b}{g_a} \quad (\text{II-5})$$

Où : g_a et g_b sont les poids statistiques des niveaux d'énergie E_a et E_b , respectivement, c'est-à-dire les nombres d'états quantiques distincts correspondant à la même valeur d'énergie, qu'on appelle aussi degré de dégénérescence [25].

- La démonstration donnée par Einstein de la relation entre les coefficients A_{21} et B_{21} de l'émission spontanée et l'émission stimulée est [25] :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu}{\lambda^3} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad (\text{II-6})$$

La probabilité d'apparition des processus d'absorption, d'émission stimulée ou d'émission spontanée pour un système pompé en continu dépend de la proportion entre la quantité d'atomes à l'état fondamental et la quantité d'atomes à l'état excité. On comprend en effet aisément, que pour une proportion plus grande d'atomes à l'état fondamental, c'est le processus d'absorption qui prédomine [5].

II.2.2. Les équations d'évolutions

Dans l'interaction rayonnement-matière résulte un échange entre les atomes du milieu actif et les ondes, où les trois processus décrits précédemment se produisent simultanément. Dans ce cas, il ne faut pas oublier que les atomes qui quittent un état atomique dans une transition quantique arrivent automatiquement dans l'autre état, et la variation, pendant une seconde, de chaque population est obtenue en comptant à la fois tous les atomes qui quittent ces niveaux et tous ceux qui y arrivent par transition à partir de l'autre niveau [25], [29].

Considérons un système de n atomes représenté par deux niveaux d'énergie, le niveau fondamental E_1 de population n_1 et le niveau excité E_2 de population n_2 (figure II-5).

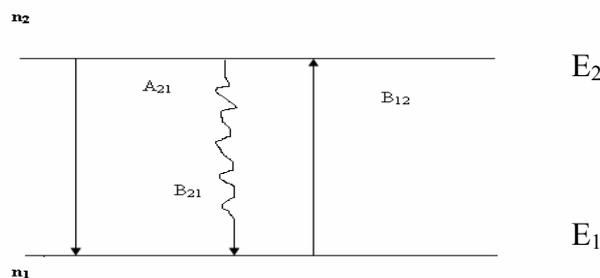


Figure II-5: Processus d'interaction rayonnement-atome.

L'évolution du nombre de photon est donnée donc par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -A_{21}n_2 - B_{21}\rho(\nu) + B_{12}\rho(\nu)n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} = A_{21}n_2 + B_{21}\rho(\nu)n_2 - B_{12}\rho(\nu)n_1 \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

- Ces équations (II-7) assurent la conservation de la population totale

$$n_1 + n_2 = n \quad (\text{II-8})$$

- On peut définir la différence de population par la relation suivante :

$$D = n_2 - n_1 \quad (\text{II-9})$$

- Dans le cas d'un régime stationnaire, on a :

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0 \quad (\text{II-10})$$

- Les équations d'évolution sont valides dans toute expérience limitée au seul processus d'interaction des atomes avec une onde lumineuse. Si d'autre processus interviennent, il faut ajouter aux équations (II-7) des termes supplémentaires qui les représentent [25].

II.2.3. La section efficace d'interaction

Si on utilise le flux de photons, il est approprié de remplacer les coefficients B_{12} et B_{21} d'Einstein par les section efficaces d'interaction entre les atomes et l'onde. La section efficace représente la probabilité d'interaction [25]. Pour remplacer les coefficients d'Einstein par la section efficace nous utilisons les relations suivantes] :

- la section efficace d'absorption des atomes du niveau E_1 :

$$\sigma_{12}(\nu) = \frac{h}{\lambda} B_{12}\rho(\nu) \quad (\text{II-11})$$

- la section efficace d'émission des atomes du niveau E_2 est donnée :

$$\sigma_{21}(\nu) = \frac{h}{\lambda} B_{21}\rho(\nu) \quad (\text{II-12})$$

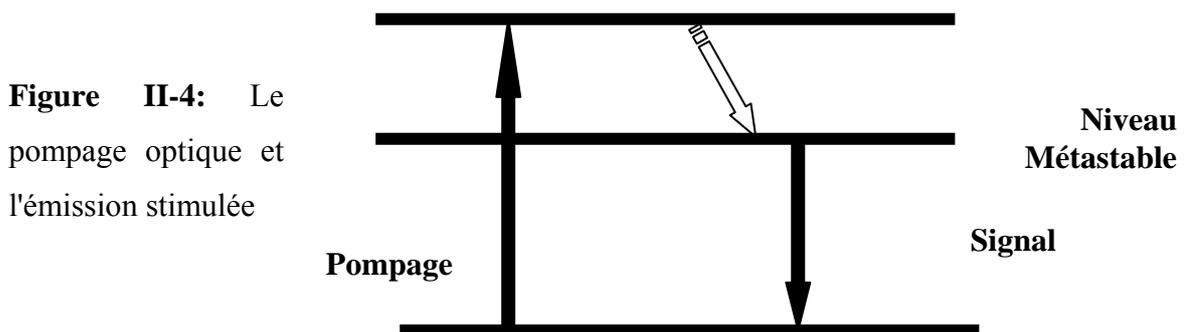
II.3. DIFFERENT TYPE DE POMPAGE ET L'INVERSION DE POPULATION

Pour obtenir un milieu amplificateur il faut que le gain doit supérieur à 1, c'est la première condition afin d'obtenir l'effet laser, mais le rayonnement émis par un milieu inversé ne possède pas encore les caractéristiques de la lumière laser, c'est là qu'intervient le rôle de cavité optique qui joue un double rôle de milieu amplificateur, par ce qu'elle confine l'émission de photon stimulé en une ou plusieurs sections de faibles dimensions.

Pour celui la le milieu actif est placé dans une cavité linéaire ou en anneau, où les photons stimulés effectuent plusieurs fois des allers et retours dans le milieu amplificateur, mais pour obtenir un effet d'émission stimulée sur un grand nombre d'atomes où molécules d'un milieu amplificateur, il faut fournir de l'énergie au milieu actif afin que ces atomes ou molécules soient pour la plupart dans un niveau supérieur et non dans un état fondamental, c'est ce qu'on appelle effectuer une *inversion de population*, car à l'équilibre thermodynamique la majorité des atomes se trouvent dans un état d'énergie le plus bas. L'inversion de population étant réalisée par excitation lumineuse qui s'appelle *le pompage*, c'est le troisième élément essentiel du laser.

II.3.1. Le pompage

Le pompage optique est utilisé pour exciter les ions ou les atomes du niveaux fondamental jusqu'à un niveau ayant un durée de vie relativement importante, qui est appelé le niveau métastable figure II-4, L'absorption de la pompe permet donc de stocker de l'énergie dans le milieu. Cette énergie est libérée lors de l'amplification d'un signal par émission stimulée à partir du niveau métastable [30].



L'excitation du milieu amplificateur est réalisé par décharge électrique, réaction chimique, courant électrique, lampe flash etc.... c'est la méthode la plus directe pour créer une inversion de population. Pendant le pompage, plusieurs niveaux supérieurs d'énergie électronique et vibrationnelle se peuplent [1], [31]. Le pompage peut se faire sous formes différentes :

- **Le pompage par décharge électrique**

Cette méthode de pompage est essentiellement utilisée pour les lasers à gaz, on applique une tension entre les électrodes du capillaire contenant le gaz, Les électrons sont accélérés et font des collisions avec le milieu actif et l'énergie cinétique est convertie en énergie interne dans les atomes du milieu [1].

- **Le pompage par courant électrique**

On l'utilise dans les lasers à semi-conducteurs où le milieu actif est une jonction As Ga ou In As (homo jonction) ou une hétérojonction lorsqu'on utilise plusieurs semi conducteurs. Le courant électrique traverse le milieu amplificateur en excitant les atomes de ce milieu [31].

• Le pompage par réactions chimiques

Dans cette technique de pompage, on utilise des réactions chimiques dont la propriété conduit à la formation des molécules directement dans leurs états excités [31].

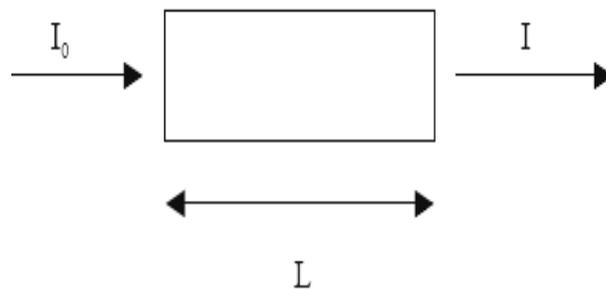
II.3.2. L'inversion de population

La réalisation d'un oscillateur suppose d'abord qu'on sache amplifier les ondes auxquelles on s'intéresse. Pour la lumière, la procédure que nous venons de décrire mène à l'inversion de population qui consiste à porter la majorité des atomes du niveau fondamental au niveau supérieur [25], [6].

II.3.2.1. Principe de l'inversion de population

Lorsqu'une onde d'intensité totale I_0 et de fréquence ν_{21} traverse un milieu amplificateur, dans la direction z où les densités atomiques sont respectivement N_1 et N_2 pour les niveaux E_1 et E_2 qui satisfait l'équation $E_2 - E_1 = h\nu_{21}$ (figure II-6).

Figure II-6: L'intensité traverse le milieu amplificateur de longueur L .



La variation d'intensité I se fait suivant la loi de BERR LAMBERT généralisée [29] :

$$I(z) = I_0 e^{-\gamma_0 z} \quad (\text{II-13})$$

Où :

- I_0 est l'intensité de faisceau incident,
- ν_{21} étant la fréquence de l'onde incidente,
- γ_0 est le gain optique, il est donné par la relation :

$$\gamma_0(\nu) = A_{21} \frac{\lambda_{21}}{8\pi} g(\nu) \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) \quad (\text{II-14})$$

Avec :

- λ_{21} est la longueur d'onde de l'émission,
- A_{21} est le coefficient d'Einstein correspondant à l'émission spontanée,

- ΔN est la différence effective des densités de population (nombre d'atome par unité de volume) entre les niveaux supérieurs et inférieurs, il est défini par :

$$\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 = D \quad (\text{II-15})$$

Où g_i ($i=1,2$) sont les degrés de dégénérescence.

- Dans le cas $N_1 > N_2$ on trouve la loi d'absorption de BERR LAMBERT [29]:

$$n(z) = n_0(z)e^{-\alpha z} \quad (\text{II-16})$$

Où α est le coefficient d'absorption. L'intensité lumineuse diminue au cours de sa propagation, le milieu est donc absorbant.

- $N_1 = N_2$ le nombre de photon reste constant avec la distance de parcours (le nombre de photons émis égale le nombre de photons absorbés). La probabilité d'absorption étant égale à la probabilité d'émission stimulée.

- Si $N_2 > N_1$ correspondant à l'inversion de population, le nombre de photons est donné par :

$$n(z) = n_0 e^{gz} \quad (\text{II-17})$$

Où g est un coefficient de gain à faible signal.

II.3.2.2. Système de deux niveaux

Dans un système fermé, la collection des atomes constitutifs d'un gaz, d'un liquide, ou d'un solide est en équilibre thermodynamique à une température constante T , ou le rapport des nombres respectifs d'atomes N_2 et N_1 occupant deux états d'énergie E_2 et E_1 est donné par le principe de Boltzmann d'origine statistique et exprimé dans la relation fondamentale [17], [29]:

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{g_1}{g_2} \right) e^{-(E_2 - E_1)/kT} \quad (\text{II-18})$$

A partir de cette relation la détermination des populations de chaque état E_i est possible.

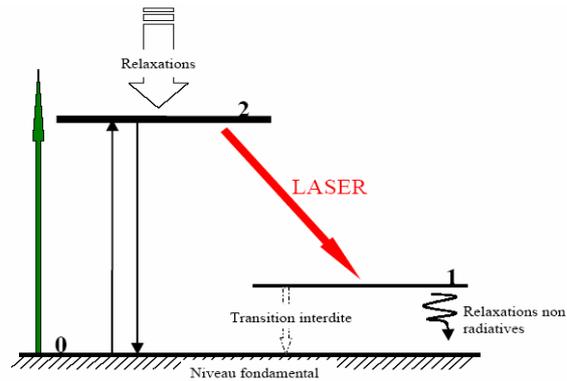
Si le milieu amplificateur d'un laser comprenait seulement deux niveaux (l'état fondamental et un état excité), il serait impossible de placer la majorité des atomes dans l'état excité. C'est pourquoi les systèmes atomiques ou moléculaires couramment utilisés fonctionnent, soit sur trois niveaux, soit sur quatre niveaux, car avec deux niveaux on ne peut obtenir que de la saturation [32].

II.3.2.3. Système à trois niveaux

Le laser à trois niveaux est un système où le niveau E_0 est le niveau fondamental de l'atome, on obtient l'inversion de population entre les niveaux E_2 et E_1 en peuplant par pompage externe le

niveau E_2 . Celui-ci désexcité de façon rapide par un processus non radiatif (collisions, vibrations cristallines, etc. .) vers le niveau métastable E_1 [32], [17].

Figure II-7: Schéma d'un laser à trois niveaux



Le laser à rubis est un exemple célèbre de système à trois niveaux. La difficulté de ce processus réside dans le pompage très intense qu'il faut fournir pour maintenir une population suffisante au niveau E_2 , ce dernier, en effet, a une forte tendance à se désexciter puisqu'il est en communication directe avec l'état fondamental, et pour que l'inversion de population ait lieu, il faut plus de la moitié des atomes du niveau fondamental qui y soit stockée [32].

• **L'équation d'évolution de trois niveaux :**

N_1, N_2 et N_3 sont les population respectives des trois niveaux, le système étant fermé.

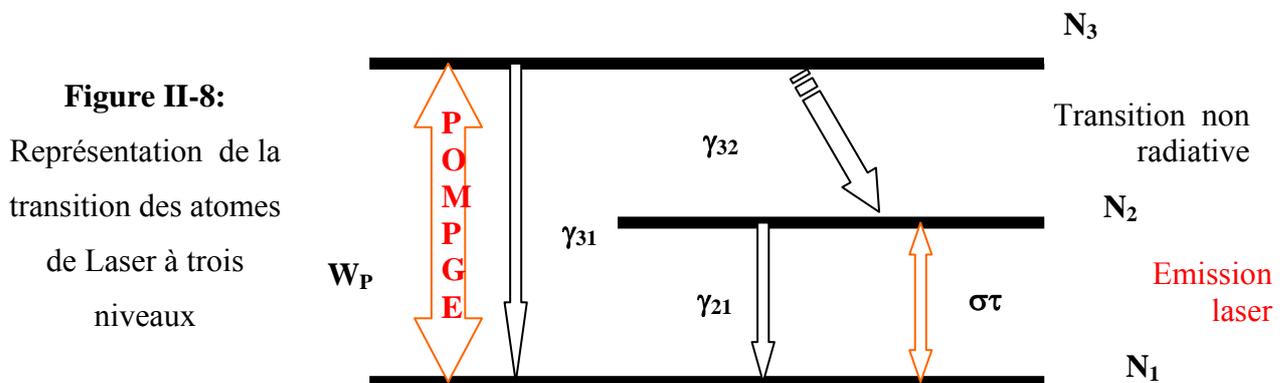


Figure II-8: Représentation de la transition des atomes de Laser à trois niveaux

La population totale est donnée par :

$$N_T = N_1 + N_2 + N_3 \tag{II-19}$$

- L'évolution de la population du troisième niveau est décrit par :

$$\frac{dN_3}{dt} = W_p N_1 - W_p N_3 - (\gamma_{32} + \gamma_{31}) N_3 \tag{II-20}$$

Où

- γ_{32} : le taux de relaxation de niveau 3 vers 2,

- γ_{31} : le taux de relaxation de niveau 3 vers 1.

La désexcitation du niveau 3 vers le niveau 2 étant rapide ($\gamma_{32} \gg W_p$) ; la population du niveau 3 tend donc vers zéro ($N_3 \rightarrow 0$).

- L'évolution du deuxième niveau est décrite par :

$$\frac{dN_2}{dt} = -\gamma_{21}N_2 + W_pN_1 - \sigma\mathfrak{I}(N_2 - N_1) \quad (\text{II-21})$$

Où γ_{21} est le taux de relaxation de niveau 2 vers 1.

- Si $N_3 \rightarrow 0$, l'équation (II-19) devient $N_T = N_1 + N_2$, en dérivant cette dernière, on obtient la relation suivante :

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0$$

Et l'évolution du niveau 1 est donc décrite par la relation suivante :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} \quad (\text{II-22})$$

Finalement, en introduisant l'inversion de population

$$D = \Delta N = N_2 - N_1 \quad (\text{II-23})$$

Si on dérive l'équation (II-23) on obtient :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dN_2}{dt} - \frac{dN_1}{dt} \quad (\text{II-24})$$

Si on remplace (II-21) et (II-22) à l'équation (II-24) on trouve :

$$\frac{dD}{dt} = -(W_p + \gamma_{21})D + (W_p - \gamma_{21})N_T - 2\sigma\mathfrak{I}D \quad (\text{II-25})$$

Où :

- \mathfrak{I} : Le flux de photon,
- σ : La section efficace d'interaction.

$$\text{A l'équilibre : } \frac{dD}{dt} = 0 \quad (\text{II-26})$$

Dans ce cas on a le seuil est donné par :

$$D_s = N_T \frac{W_p - \gamma_{21}}{W_p + \gamma_{21}} \quad (\text{II-27})$$

L'inversion de population dépend non seulement des caractéristiques de la cavité, mais aussi du milieu actif [32]. A partir de D_s on peut déduire le taux de pompage minimal W_p nécessaire au démarrage de l'oscillation laser qui est donné par :

$$W_{ps} = \gamma_{21} \frac{N_T + D_s}{N_T - D_s} = \gamma_{21} \frac{1 + D_s/N_T}{1 - D_s/N_T} \quad (\text{II-28})$$

Si $D_s \ll N_T$ on peut déduire que $W_{ps} \approx \gamma_{21}$

Le régime stationnaire du laser a trois niveaux dépend du paramètre de pompe :

- Si $W_p \ll W_{ps} \Rightarrow D = N_T \frac{W_p - \gamma_{21}}{W_p + \gamma_{21}}$ (II-29)

- Si $W_p \gg W_{ps} \Rightarrow D = D_s$ (II-30)

II.3.2.4. Système à quatre niveaux

Dans un système à quatre niveaux, le niveau terminal E_1 de la transition optique possède une énergie supérieure à celle du niveau fondamental E_0 . En effet, les transferts non radiatifs entre E_3 et E_2 d'une part, E_1 et E_0 d'autre part, sont en général très rapides (collision, vibration dans un cristal) (figure II-9). Le niveau E_1 reste donc essentiellement vide tandis que le niveau E_2 est continuellement repeuplé, même au pompage modéré, ainsi une faible population dans ce niveau est suffisante pour que l'inversion se maintienne [25].

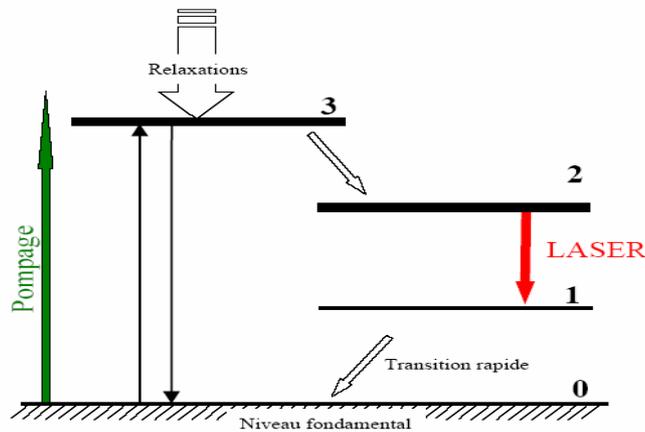
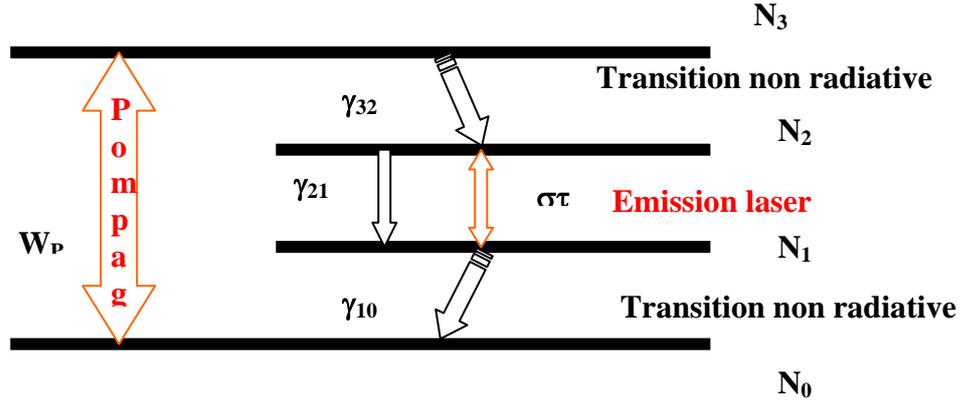


Figure II-9: Schéma indiquant le laser à quatre niveaux

L'équation d'évolution du système à quatre niveaux :

N_0, N_1, N_2 et N_3 sont les population respectives des quatre niveaux, comme indiqué la figure :

Figure II-10 :
Représentation des transitions dans un laser à quatre niveaux.



Dans ce cas γ_{32} beaucoup plus grand que tous les taux de relaxation et de pompage, comme le modèle à trois niveaux, il en résulte quand $N_3 \rightarrow 0$, les $W_p N_0$ atomes excités par unité de temps et de volumes dans l'état d'énergie E_3 à partir du niveau E_0 passent quasi instantanément, sur le niveau E_2 . Le terme $W_p N_0$ est donc la source qui alimente ce système [17], [26] :

$$\frac{dN_2}{dt} = W_p N_0 - \gamma_{21} N_2 - \sigma \tilde{\mathcal{I}} D \tag{II-31}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\gamma_{10} N_1 + \gamma_{21} N_2 + \sigma \tilde{\mathcal{I}} D \tag{II-32}$$

De plus, le système fermé :

$$N_T = N_0 + N_1 + N_2 \tag{II-33}$$

La densité totale N_T de molécule se conserve,

$$\left\{ \begin{array}{l} D = N_2 - N_1 \\ N_T = N_2 + N_1 \end{array} \right\} \tag{II-34}$$

L'inversion de population est donnée par :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dN_2}{dt} - \frac{dN_1}{dt} = w_p (N_T - N) - \gamma_{21} (N + D) + \gamma_{10} \left(\frac{N - D}{2} \right) - 2\sigma \tilde{\mathcal{I}} D \tag{II-35}$$

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = w_p (N_T - N) - \gamma_{10} \left(\frac{N_T - D}{2} \right) \tag{II-36}$$

A l'état stationnaire :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dN_T}{dt} = 0 \tag{II-37}$$

Donc l'inversion de population est donnée par la relation suivante:

$$D = \frac{w_p N_T (\gamma_{10} - \gamma_{21})}{\sigma \mathfrak{S} (2w_p + \gamma_{10}) + w_p (\gamma_{10} + \gamma_{21}) + \gamma_{10} \gamma_{21}} \quad (\text{II-38})$$

- Si $\gamma_{10} - \gamma_{21} > 0 \Rightarrow D > 0$. (II-39)
- Dans le cas contraire, les molécules ne peuvent descendre rapidement de $(1 \rightarrow 0)$ s'accumulent dans 1 et contribuent à détruire l'inversion de population par effet de d'engorgement du niveau 1.

A l'équilibre $\frac{dD}{dt} = 0$ on trouve :

$$D_s = \frac{w_{ps} N_T (\gamma_{10} - \gamma_{21})}{w_{ps} (\gamma_{10} + \gamma_{21}) + \gamma_{10} \gamma_{21}} \quad (\text{II-40})$$

W_{ps} est le taux de pompage au seuil d'oscillation et peut être calculé à partir de

$$w_{ps} = \frac{D_s}{N_T} \frac{\gamma_{10} \gamma_{21}}{(\gamma_{10} + \gamma_{21}) + \gamma_{10} \gamma_{21}} \quad (\text{II-41})$$

Quand le niveau de E_1 se vide rapidement ($\gamma_{10} \gg \gamma_{21}$) l'expression se simplifie :

$$w_{ps} = \frac{D_s}{N_T} \frac{\gamma_{10} \gamma_{21}}{\gamma_{10} (1 - D_s / N_T)} \quad (\text{II-42})$$

$$\text{Si } D_s \ll N_T \Rightarrow w_{ps} \approx \frac{D_s}{N_T} \gamma_{21} \quad (\text{II-43})$$

II.4. L'OSCILLATION LASER

On établit un champ électromagnétique entre les deux miroirs de la cavité optique dont l'un est supposé semi transparent. Sous l'influence du pompage les atomes sont portés dans leur état excité l'émission spontanée s'effectue dans toutes les directions et particulière suivant l'axe optique de résonateur. Ce rayonnement laser de son trajet effectue plusieurs réflexions entre les miroirs est s'amplifie par émission stimulée à chaque passage dans le milieu actif [26].

Au niveau du miroir semi transparent une certaine fraction du champ traverse le miroir de sortie pour constituer le faisceau laser, tandis que la fraction réfléchi effectue un trajet inverse le long de l'axe, résultant un accroissement de l'intensité dans la cavité, si ce processus est répété de nombreuses fois, il résulte une «*régénération de rayonnement* » dans laquelle l'énergie stockée dans le niveau supérieur de la transition est rapidement convertie en une onde électromagnétique très intense .

II.3. 1. Condition d'oscillation

Considérons un rayon lumineux d'intensité I_0 circulant dans une cavité linéaire composée d'un miroir partiellement transparent M_s de coefficient de réflexion $R_2=R$ et d'un miroir totalement réfléchissant M_1 de coefficient de réflexion $R_1=1$ (figure I-12), le rayon traverse le milieu amplificateur de coefficient de gain G pour la première fois de M_s vers M_1 et l'intensité devient [26] :

$$I = GRI_0 \quad (\text{II-44})$$

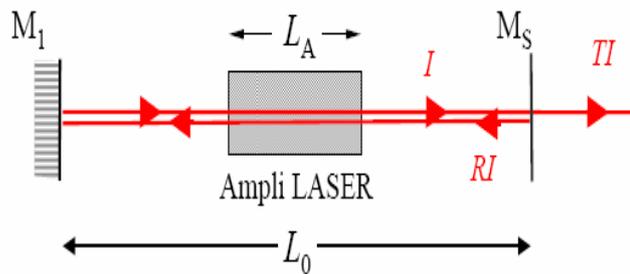


Figure I-12 1: La trajectoire de l'onde électromagnétique dans une cavité optique laser ,où le rayon lumineux traverse le milieu amplificateur de coefficient de gain G plusieurs fois.

Si le rayon lumineux traversé le milieu une autre fois de M_1 vers M_s et l'intensité devient :

$$RG_0^2 I_0 \quad (\text{II-45})$$

Soit encore :

$$G_0^2 (1-T) > 1 \quad (\text{II-46})$$

Si on considère G_0 le coefficient d'amplification pour une onde incidente de faible intensité.

En pratique il faut ajouter aux pertes de transmission (elles correspondents au faisceau disponible par l'utilisateur) des pertes dues à l'absorption ou à la diffusion a l'intérieur de cavité et sur les miroirs que nous représentons par un coefficient d'absorption A ,la condition est remplacée par [26] :

$$G_0^2 (1-T)(1-A)^2 > 1 \quad (\text{II-47})$$

Ou :

$$G_0^2 > \frac{1}{(1-T)(1-A)^2} \quad (\text{II-48})$$

Cette équation est écrite aussi dans la limite $A, T \gg 1$:

$$G_0^2 - 1 > T + A \quad (\text{II-49})$$

C'est la condition de démarrage du laser qui signifie simplement que le gain non saturé de l'amplificateur doit être supérieur aux pertes totales pour que l'oscillation laser démarre. Le seuil d'oscillation d'un laser est obtenu lorsque le gain non saturé est égal aux pertes.

Mais si le gain non saturé est inférieur aux pertes il n'y a pas d'oscillation [26], [34], [17].

II.3. 2. Fréquence d'oscillation

Le coefficient d'amplification non saturé est donné par la relation suivante :

$$G_0 = \exp(g_0 l) \quad (\text{II-50})$$

Le coefficient de gain est en fonction de la fréquence que l'on peut représenter par une courbe en cloche (figure II-12) présentant un maximum pour

$$\omega = \omega_m = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{II-51})$$

Si on suppose que G_0 qui est évalué à $\omega = \omega_0$, est plus grand que $1 + T + A$, il existe une bande de fréquence limitée $[\omega_1, \omega_2]$ pour laquelle la condition de démarrage est vérifiée.

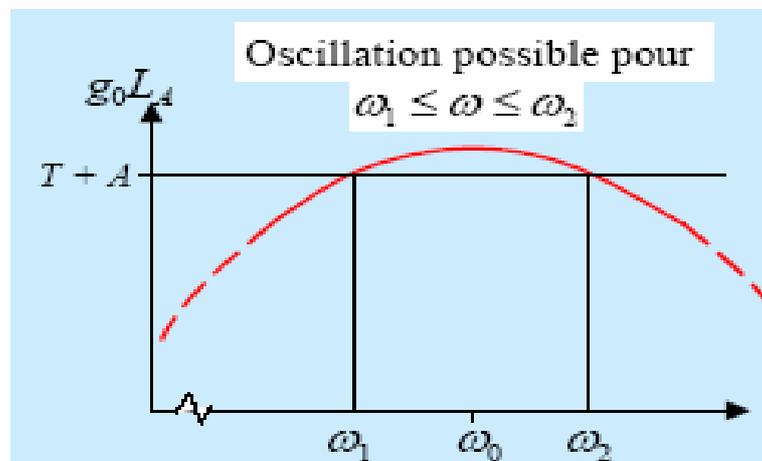


Figure II-12: La courbe de gain non saturé en fonction de fréquence où on remarque que l'oscillation est possible pour $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$.

II.5. L'EMISSION LASER

Il nous faut concilier les deux résultats précédents concernant le milieu amplificateur et la cavité optique pour décrire l'émission laser qui ne se produit que lorsque le gain non saturé est plus grand que les pertes, cette égalité permet d'identifier le domaine de fréquence à l'intérieur duquel se produira l'oscillation.

L'émission laser ne se produit que pour les modes de fréquence ν_q telle que :

$$\nu_{\min} \leq \nu_q \leq \nu_{\max} \tag{II-52}$$

Seuls quelques uns des modes de la cavité, respectant la condition peuvent donner lieu à une émission laser.

Ce fonctionnement de laser est dit *multimode longitudinal*, c'est le fonctionnement de base du laser.

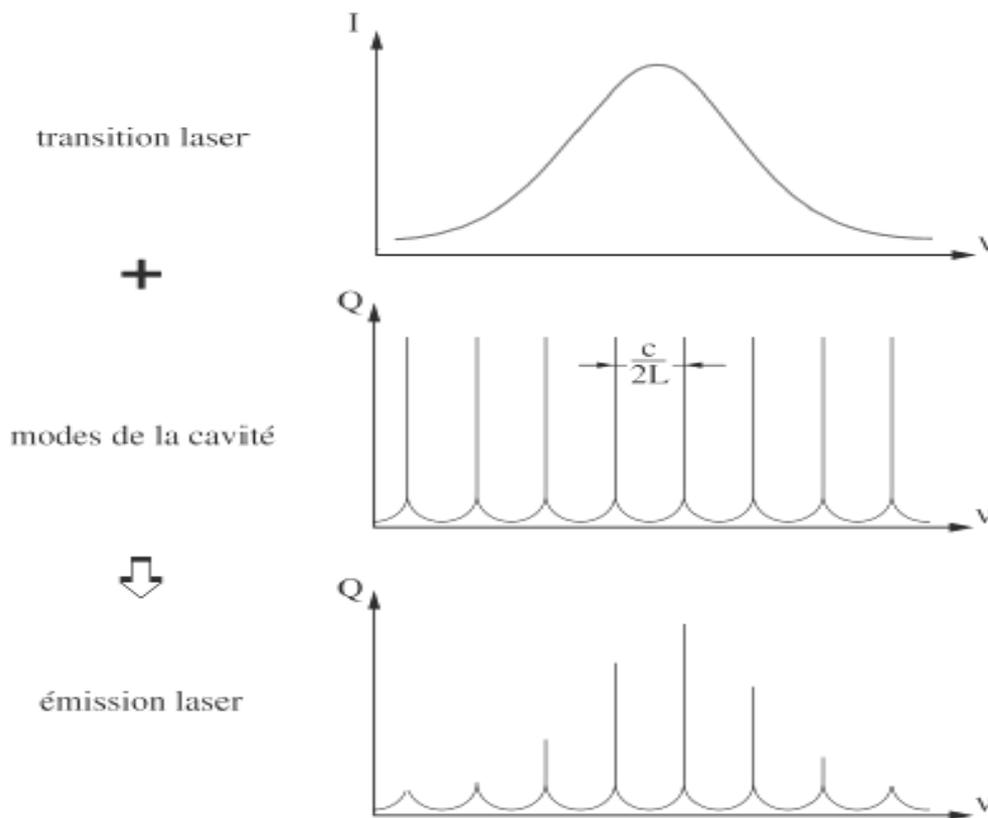


Figure II-12: Schéma indiquant que l'émission laser ne se produit que pour les fréquences $\nu_{\min} \leq \nu_q \leq \nu_{\max}$.

II-6. L'AMPLIFICATION ET LA SATURATION DE GAIN

Une fois obtenue l'inversion de population, il est possible d'y amplifier la lumière par émission stimulée. L'évolution de l'intensité optique lorsqu'elle traverse le milieu amplificateur est donnée par [26]:

$$\frac{dI}{dz} = -I(z)\Delta N\sigma_{21} \tag{II-53}$$

Dans le cas de l'amplificateur à quatre niveaux

$$D_s = \frac{\omega_p N_T (\gamma_{10} - \gamma_{21})}{\omega_{ps} (\gamma_{10} + \gamma_{21})} \text{ et par ce que } \gamma_{10} \gg \gamma_{21} \text{ (} D > 0 \text{)}$$

$$D_s = \frac{\omega_{ps} N_T \gamma_{10}}{\omega_{ps} (\gamma_{10} + \gamma_{21})} \Rightarrow D_s = \frac{N_T}{\left(1 + \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{10}}\right)}$$

En présence d'une onde électromagnétique provoquant l'émission stimulée, on écrit [26]:

$$\Delta N = N_T \left/ \left(1 + \frac{I(z)}{I_s}\right) \right. \quad \text{(II-54)}$$

Où I_s est une intensité caractéristique dite intensité de saturation, permettant d'identifier deux comportements limites, très différent de l'amplificateur soumis à l'onde d'intensité $I(z)$.

- Si $I(z) \ll I_s$ (faible signal), l'évolution de l'intensité lumineuse en fonction de la distance parcourue s'écrit [29] :

$$I(z) = I(0) \exp g_0 z \quad \text{(II-55)}$$

l'intensité de l'onde croit exponentiellement lorsqu'elle se propage dans le milieu du gain.

- Si $I(z) \gg I_s$ lorsque l'éclairement du milieu amplificateur devient fort, l'équation (II-53) se résout simplement en

$$I(z) = I(0) + I_s g_0 z \quad \text{(II-56)}$$

L'accroissement de l'intensité devient faible avec la distance parcourue dans le milieu amplificateur, c'est le cas du gain saturé.

Pour étudier la saturation de gain le facteur de gain hyperbolique est donné par [29]:

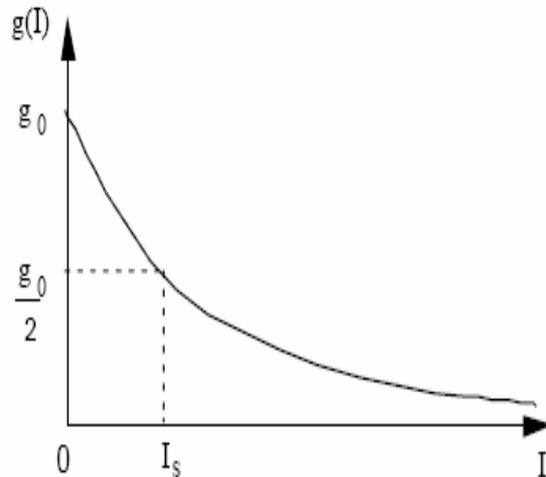
$$g(I) = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}} \quad \text{(II-57)}$$

L'équation de $I(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{dI(z)}{dz} = I(z) g(I) \quad \text{(II-58)}$$

Les formules (II-57) et (II-54) traduisent simplement que le gain saturé $g(I)$ et la différence de population décroissent lorsque l'intensité lumineuse augmente. Le gain saturé par l'onde est divisé par deux lorsque $I(z) = I_{sat}$ [29].

Figure II-13 : Le gain saturé décroît avec l'augmentation de l'intensité, et il est égal à $\frac{g_0}{2}$, pour $I = I_s$ [29].



- **Phénomène de saturation**

A partir d'une certaine puissance optique dans le milieu, la forte intensité de l'émission stimulée entraîne une réduction de l'inversion de population, ce qui réduit le gain optique g , c'est la saturation de gain. La saturation de gain est nécessaire par ce que l'intensité devient infinie si nous passons la lumière plusieurs fois dans le milieu actif [29]. Mais ce phénomène affecte l'émission laser de manière différente selon que l'élargissement de la raie est homogène ou inhomogène [29], comme indique la figure (II-14) :

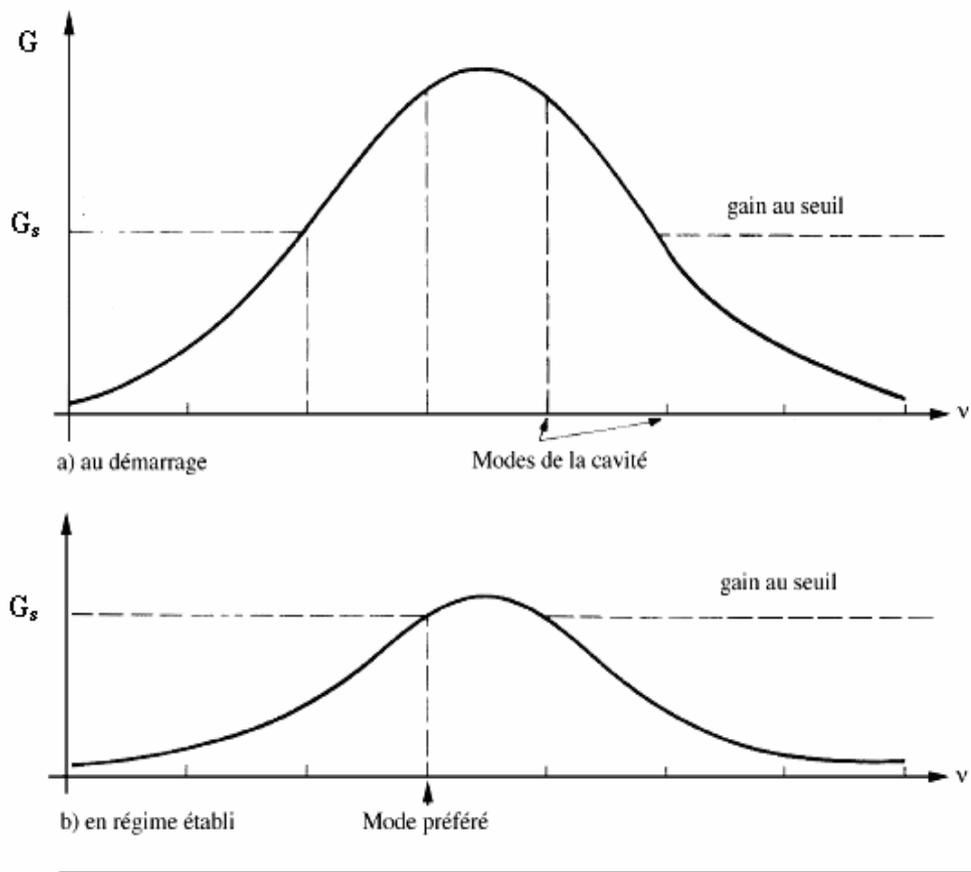
- Cas homogène :

Si la forme de la distribution spectrale est la même pour tous les atomes émetteurs [26].

- Cas inhomogène :

Si deux fréquences différentes dans le profil spectral proviennent de l'émission de deux atomes placés dans des conditions différentes [26].

a) cas homogène: régime stationnaire



b) cas inhomogène: régime stationnaire (hole burning)

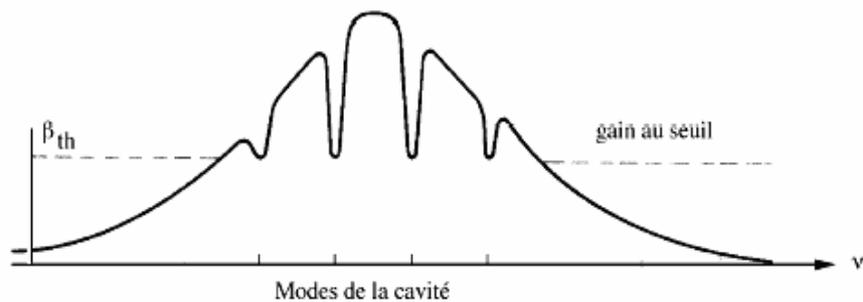


Figure II-14 : l'effet de saturation de gain pour un élargissement inhomogène : il y a creusement de trous dans la courbe de gain ("Hole Burning") seulement aux fréquences d'oscillation laser : plusieurs modes peuvent ainsi coexister simultanément.

II.7. LES DIFFERENTS TYPES DE MILIEUX AMPLIFICATEURS

Les lasers sont souvent désignés par le type de matériau du milieu amplificateur dans lequel l'effet laser est produit. Il existe plusieurs types de milieux utilisés à ce but :

- Les lasers à gaz.
- Les laser à solide de type rubis (Cr^{3+}) YAG (Nd^{3+}), semi conducteur ou isolant.
- Les lasers à liquide de type colorant.
- Les lasers à électrons libres nécessitant un accélérateur d'électrons.
- Les lasers à semi conducteur.

II.7.1. Laser à gaz

Les lasers à gaz présentent un nombre de caractéristiques qui leur donnent un intérêt particulier grâce à la nature de l'état gazeux, le gaz peuvent être atomiques (vapeur neutres, vapeurs métalliques, vapeurs ionisés) moléculaires, purs ou en mélange, basse pression (<1 torr) ou élevée ($<1\text{atm}$) . Le pompage le plus couramment utilisé est le pompage électrique, mais dans certains cas, le pompage optique ou le pompage chimique peuvent être plus efficace .Les gaz offrent une gamme de fréquences la plus étendue allant de l'UV ($0,2\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,4\mu\text{m}$), le visible ($0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$) jusqu'au proche IR ($0,6\mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,2$) la transition peut être électronique ($0,2\mu\text{m} \leq \lambda \leq 1\mu\text{m}$) vibrationnelle ($5\mu\text{m} \leq \lambda \leq 50\mu\text{m}$) ou rotation ($20\mu\text{m} \leq \lambda \leq 1000\mu\text{m}$) [35].

II.7.1.1. Laser à Hélium Néon

Ce type de laser est apparu en 1960, c'est le premier laser à opérer en mode continu, ce laser émet de nombreux rais en mode continue, situé dans le visible et le proche IR, sur des transitions électromagnétiques du néon excité par un transfert d'énergie à partir de l'hélium. Les deux transitions les plus intenses se situent l'une dans le rouge ($0,6328\mu\text{m}$) et l'autre dans l'IR ($3,39\mu\text{m}$).

Aujourd'hui les laser He-Ne peuvent opérer a d'autre fréquences dans le visible, jaune (594nm) ,orange (612nm) et vert (543nm) . La puissance disponible sur de tel laser varie de quelques milliwatts à environ 75 milliwatts [35].

• Les composants d'un laser He-Ne

Le laser Hélium –néon se représente se la forme d'un tube de verre rempli par un mélange gazeux et fermé à chaque extrémité par des fenêtres optiques, dont l'une peut être inclinée par un angle de Brewster.

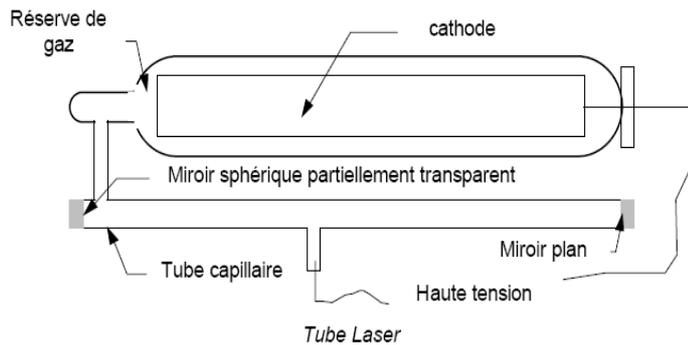


Figure II-15 :
Représentation des
composants de laser à
Hélium-Néon

ANGLE DE BREWSTER : Si on envoie une onde électromagnétique sur un plan limité par deux milieux d'indices ayant deux indices de réflexion différents, on observe généralement une réflexion partielle. Si l'onde est inclinée par un angle appelé « angle de Brewster » la réflexion partielle disparaît, à condition que la lumière soit polarisée dans le plan incident, cet angle calculé par la relation suivante [2] :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Où :

n_1, n_2 : Les indices de réfraction des milieux.

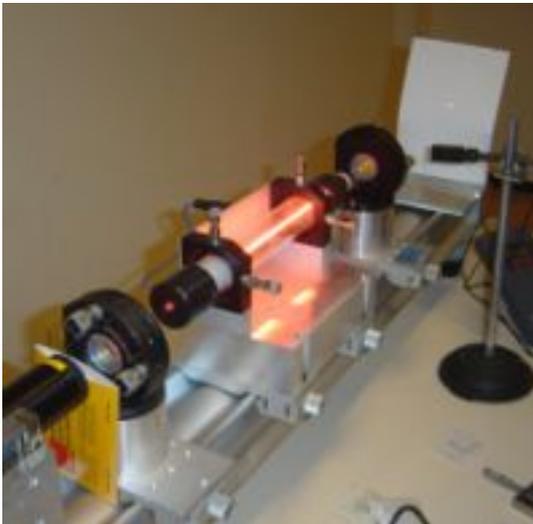


Figure II-16 : Démonstration de
laser hélium-néon (au laboratoire
Kastler-Brossel à l'Université
Pierre et Marie Curie)[2].

La cavité optique de laser He-Ne est constituée de deux miroirs M_1 et M_2 aux extrémités du tube. Le miroir M_1 d'entrée est totalement réfléchissant et l'autre c'est-à-dire M_2 transmet quelque pourcentage de la lumière incidente, ce qui permet d'extraire le faisceau laser produit dans la cavité.[2]

II.7.1.2.Laser à gaz carbonique

Le milieu actif est le plus souvent un mélange de gaz ($\cong 10\%$) , d'azote ($\cong 40\%$) et hélium($\cong 80\%$) , le pompage par décharge est une partie directe (par collision avec les électrons de

la décharge) et une partie indirecte (par le transfert de l'énergie d'excitation des molécules de l'azote au molécules de CO_2). De ce fait le laser émet dans l'infrarouge principalement à $9,6\mu\text{m}$ et $10,6\mu\text{m}$ le rendement énergétique est très bon (jusqu'à 30%) et il peut fournir des puissance moyennement élevées [35].

II.7.2. Laser à Solide

Généralement, le milieu actif des lasers à état solide est soit d'ions métalliques (Cr^{+3} , Ni^{2+}) soit d'ions de terres rares (Nd^{3+} , Er^{3+}). Ils sont pompés par voie optique et leurs longueurs d'onde d'émission vont du visible jusqu'à l'Infrarouge moyen ($0,55\mu\text{m} \leq \lambda \leq 2,613\mu\text{m}$). Le pompage optique est habituellement fait avec des lampes flash à gaz rares (Xe , Kr) dans le cas des régimes pulsés [35].

II.7.2.1 laser à Rubis

C'est le premier laser découvert par Maiman en 1960, le milieu actif ici est un cristal de Rubis cylindrique, dont la longueur de quelque centimètre et le diamètre de quelques millimètres. Le rubis est un cristal d'alumine Al_2O_3 dans lequel certains ions d'aluminium Al^{+3} (0.05%) sont remplacé par des ions de chrome Cr^{+3} (ce que lui donne une coloration rose). Le barreau de rubis est placé entre deux miroirs (la cavité optique), l'un des miroirs est complètement réfléchissant, l'autre ne l'est que partiellement. Le Rubis est éclairé sur ses faces par un tube flash comme indiqué sur (la figure II-17)[3],[60].

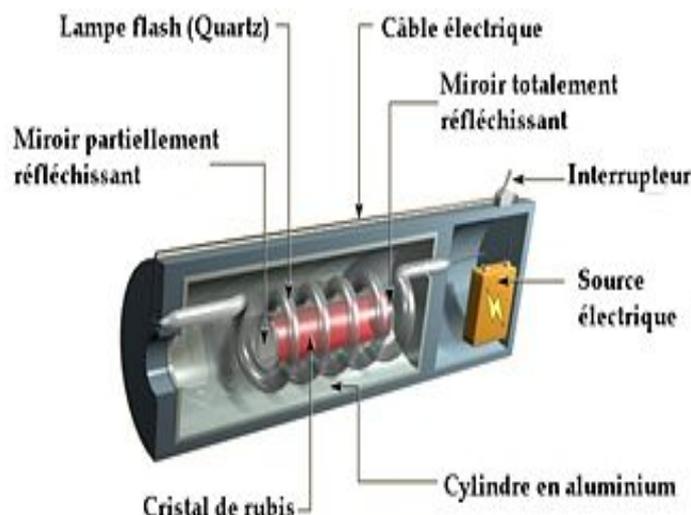


Figure II-17: Schéma indique une coupe d'un laser à rubis.

II.7.2.2. Laser à Nd^{3+} : YAG

L'ion de terre rare (Nd^{3+}) est introduit à l'état de dopant dans un cristal de grenat d'aluminium à l'yttrium ($\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ou YAG) avec une concentration de 0,75% (poids YAG). Le pompage se fait par une source extérieure de lumière, lampe à arc ou diode laser, qui permet d'exciter les ions des

bandes d'énergie élevées d'où ils retombent vers le niveau supérieur de la transition laser par un processus de relaxation rapide .La transition s'effectue entre les deux niveaux électroniques $^4F_{3/2}$ et $^4I_{11/2}$, et l'émission laser se produit essentiellement sur la transition à $1,0641\mu m$ dans l'infrarouge, avec une puissance qui peut atteindre quelque *kw* en fonctionnement continue .En fonctionnement impulsionnel , une puissance crête de l'ordre de gigawatt peut être extraite ,sur une durée de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-12} s . Les laser à néodyme sont très efficaces (le rendement est de l'ordre de 1% pour un pompage par une lampe et peut atteindre 50% pour un laser à semi conducteur)et ils ont une gamme très vaste d'applications [35] .

II.7.2.3. Laser à Argon

Son milieu actif est constitué d'atomes d'argon ionisés Ar^+ ,l'excitation se fait par décharge électrique qui produit des électrons libres éjectés d'une cathode chauffée ,qui excitent les ions dans des niveaux très énergétiques et provoque l'émission de deux raies laser $4S^2P$ et $4P^4D^0$ de longueur d'onde 488nm et 514,5nm dans le bleu et le vert du spectre visible . Il fonctionne soit en mode continu ou impulsionnel avec un rendement mauvais de l'ordre de 0,1% car une très grande partie de l'énergie utilisée est dissipée en chaleur avec une puissance de quelques watts [35].

II.7.4. Laser à colorant

Ce type de laser des colorants organique complexes en solution ou en suspension dans un liquide .le laser à colorants utilise habituellement un pompage optique obtenu d'une lampe à décharge ou un autre laser (continu : $Ar^+ - Kr^+$, vapeurs de cuivre ou pulsé : $Nd - YAG, N_2$) grâce au pompage optique on peut créer une inversion de population entre les niveaux d'excitation relativement faible ,autour de 10^{-9} s[35].

II.7.5. Laser à électron libre (LEL)

Le laser à électrons libres (LEL) est apparu en 1977, son milieu amplificateur est constitué d'un faisceau des électrons de haute énergie, différent de ceux des lasers habituels(atomique et moléculaire). Les composants essentiels de LEL sont (figure II-17) :

- Un accélérateur linéaire délivrant un faisceau d'électrons relativistes.
- Un onduleur est une structure magnétique engendrant un champ magnétique transverse alterné.
- Une cavité optique résonnante.

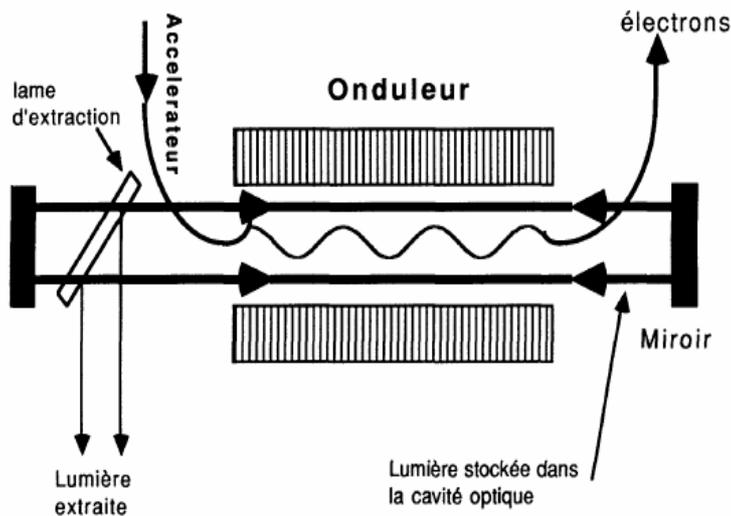


Figure II-17 : Schéma représentant les composants essentiels de laser à électron libre.

Le principe de LEL consiste à faire passer le faisceau des électrons relativistes qui provient d'accélérateur linéaire à travers l'onduleur dont le champ magnétique transverse périodique, où les électrons cèdent leur énergie sous forme de rayonnement "synchrotron". Si cela fait à l'intérieur d'une cavité résonnante, les photons réfléchis par les miroirs peuvent venir interagir avec les paquets des électrons produits avec l'accélérateur linéaire et par processus d'échange résonnant d'énergie qui permet d'amplifier les rayonnements. La fréquence d'onde à laquelle il peut y avoir amplification ne dépend que de l'énergie des électrons incidents et de la période de l'onduleur ce qui veut dire que l'on peut choisir la longueur d'onde désirée, cela allant des rayons X aux ondes millimétriques [59], [61].

II.7.6. Laser à semi conducteur (diode laser)

Définition

La diode, encore appelée laser à semi-conducteur, laser à jonction, laser à hétérojonction, laser à puit quantique ou même laser à diode (traduction de direct de l'anglais «laser diode») est une diode à semi-conducteur, plus précisément une diode électroluminescente, conçus et utilisé de façon à exploiter l'effet LASER, démontrée pour la première fois en 1962. Ce genre de laser est aujourd'hui d'une importance énorme [36], [26].

II.7.6.1. Description de milieu

A l'équilibre thermodynamique, il y a énormément plus d'électron en bande de valence qu'en bande de conduction et donc, globalement, le matériau absorbe les photons d'énergie supérieure à l'énergie de bande interdite, pour réaliser un laser, il faut maintenant amener suffisamment d'électron et de trous pour obtenir l'inversion de population. Les semi-conducteurs sont caractérisés par les états électroniques des électrons les composants, en effet les électrons peuvent occuper l'un ou l'autre des bandes d'énergie suivantes :

- La bande de valence (BV).
- La bande de conduction (BC).

Entre les deux se trouve la bande interdite (BI ou gap) au milieu de laquelle se trouve le niveau de **Fermi**, et il n'y a pas de niveau d'énergie permis pour les électrons (figure II-17). La probabilité p pour qu'un état d'énergie E de la bande de valence ou de conduction soit occupé par un électron est donnée par la distribution de Fermi Dirac $p = \left[1 + e^{(E-E_F)/kT} \right]^{-1}$ où E_F est l'énergie de Fermi, k la constante de Boltzmann, T la température [26], [37].

Les impuretés jouent un rôle important et peuvent se classer en trois catégories, les donneurs de type n (niveau d'énergie proche de la bande de conduction), les accepteurs, ce que l'on appelle les semi-conducteur de type p (niveau d'énergie proche de la bande de valence) et les impuretés dont les niveaux d'énergie sont la bande interdite, lorsque l'on met en contact un matériau de type n et un matériau de type p , on obtient une jonction $p-n$ l'épaisseur de la jonction est de quelque μm , la distribution des électrons dans une jonction $p-n$ (figure II-19) [37].

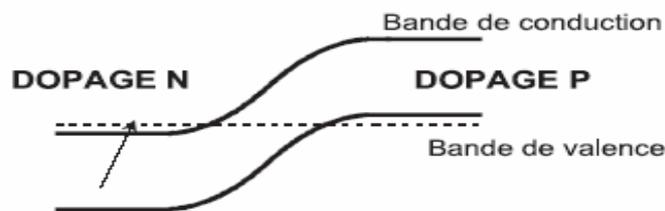
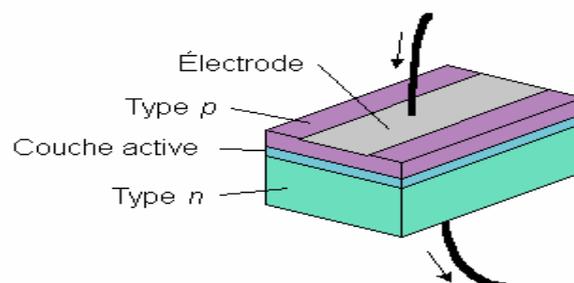


Figure II-19 : La distribution de jonction dans la jonction p-n

II.7.6.2. Le fonctionnement de laser à semi-conducteur

Lorsqu'un potentiel positif est appliqué au semi-conducteur de type p et un potentiel négatif au type n , un grand courant peut traverser la jonction. Des électrons sont injectés dans le semi-conducteur de type p et des trous dans celui de type n . Il peut alors y avoir des recombinaisons *trou-électron*, qui se font avec l'émission de lumière.

Figure II-18 : Les composants de laser à semi-conducteur



II.7.6.3. Caractéristiques de laser à semi conducteur

1. l'effet laser se produit entre deux bandes, la bande de conduction et la bande de valence – et non entre niveaux discrets comme dans les autres lasers.
2. La largeur E_g de la bande interdite fixe directement la largeur d'onde du rayonnement $E_g = \frac{hc}{\lambda}$. Elle est définie comme la distance qui sépare le haut de la bande de conduction. pour l'arséniure de gallium (GaAS) $E_g \approx 1,4\text{eV}$ ceci correspondant a une longueur d'onde d'émission voisine de $0,8\mu\text{m}$.
3. La densité d'inversion de population est beaucoup plus importante. Le grand gain qui en résulte, il peut atteindre 200 à 300 cm^{-1} . permet l'utilisation d'une cavité courte (1mm).
4. pour augmenter l'intensité de sortie de ses laser, il faut augmentée l'intensité de porteurs c'est-à-dire d'électron et de trous celle-ci est équivalent a l'inversion de population des autres laser, elle est réalisé dans la zone active ,par injection d'un courant qu'est l'équivalent du paramètre de pompe des autres laser[36],[26].

II.7.6.4. Les principaux avantages du laser à semi conducteur

1. La capacité et la facilité d'intégration dans les circuits électroniques.
2. Le laser à semi-conducteur est largement utilisé en raison de son faible encombrement dans l'infrarouge proche à $\lambda = 0,8\mu\text{m}$, dans les dispositifs de transition comportement des fibres et des circuit d'optique intégrée à $\lambda = 1,3\mu\text{m}$ ou la dispersion est nulle ou encore à $\lambda = 1,55\mu\text{m}$ où les pertes par transmission des fibres de silice sont minimales.
3. Le rendement élevé qui peut atteindre 50%.
4. La large gamme spectrale de fonctionnement possible, entre $0,3\text{ et }30\mu\text{m}$ suivant le type de matériau semi-conducteur retenu. on peut ajuster la largeur de la bande interdite en utilisant des alliages et ou des structures a puit quantiques [36], [26].
5. L'accordabilité en fréquence par le contrôle de la température et du courant (par effet joule) qui sert au pompage du milieu actif.
6. La puissance dans l'infrarouge proche, on obtient facilement plusieurs centaines de milliwatts avec un courant de l'ordre de grandeur de 1A.

II.8. LA COULEUR DE LASER

On a choisi la couleur du laser à partir du milieu actif qui est mit entre les deux miroirs de la cavité optique. Quelques exemples de laser sont indiqués dans le tableau 1.

Type de LASER	Milieu de LASER	Particules excusables	Couleur
Diodes laser	Semi-conducteur		Rouge infrarouge
Laser hélium - néon	Gaz hélium néon	Atomes de néon	Rouge
Laser à rubis	Rubis (solide)	Ions chrome	Rouge
Laser argon	Gaz d'argon	Ion d'argon	bleu, vert et invisible (ultraviolet)
Laser krypton	Gaz de krypton	Ion krypton	Rouge
Laser CO ₂	Mélange gazeux constitué d'azote, d'hélium et de l'oxyde de carbone* (CO ₂)	Atome de cuivre (deux niveaux d'excitation) Molécules de CO ₂	Invisible (infrarouge)
Laser Nd-YAG**	Granet d'aluminium et yttrium	Ions néodyme	Invisible (infrarouge)
Laser verre néodyme	Verre dopé au néodyme(solide)	Ions néodyme	Invisible (infrarouge)
Laser à colorant	Colorant dans un solvant	Molécule de colorant	Différent plages de couleurs en fonction du colorant

Tableau 1. Les différents types de laser et leurs caractéristiques [58].

Définition

La cavité en anneau est une autre forme de cavité laser, qui est constituée de plus de deux miroirs, elle peut fonctionner en onde progressive, contrairement à la cavité linéaire qui utilise des ondes stationnaires. Cette cavité est utilisée dans beaucoup de cas pour obtenir l'opération unidirectionnelle [38], [45], comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre.

III.1. LES DIFFERENTS TYPE DE CAVITE EN ANNEAU

Les cavités en anneau sont de plusieurs types:

II.1.1. La cavité à trois miroirs

Elle est formée de trois miroirs disposés aux sommets d'un triangle équilatéral, le rayon lumineux suit une trajectoire fermée. Elle est constituée de deux miroirs totalement réfléchissants et un miroir partiellement transparent qui est appelé le miroir de sortie, dit miroir de couplage [34]. On peut trouver plusieurs types de ce genre:

- Une cavité constituée de deux miroirs plans et le troisième courbé, de rayon de courbure R (figure III-1).

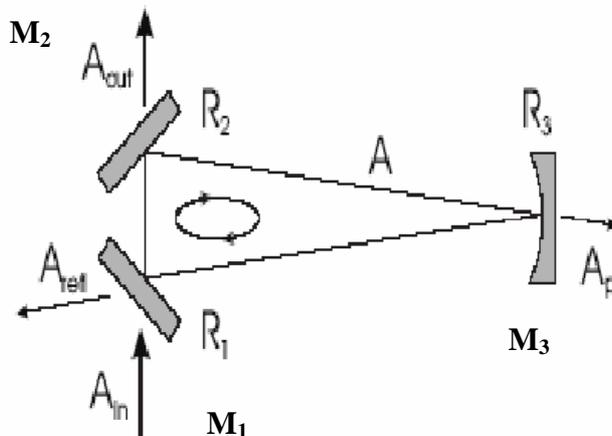
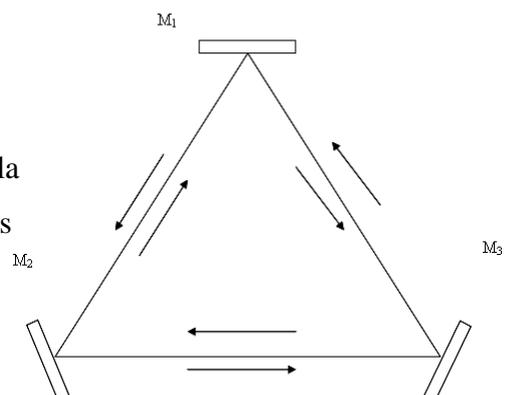


Figure III-1: Schéma indiquant la cavité en anneau à trois miroirs.

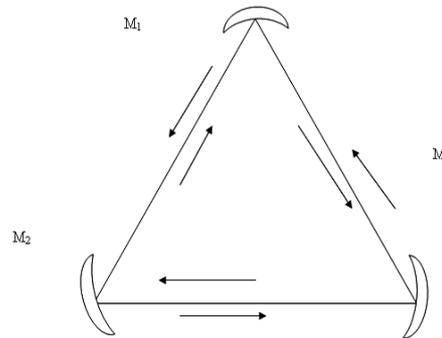
- Une cavité à trois miroirs plans (figure III-2).

Figure III-2 : schéma de la cavité à trois miroirs plans



- On peut aussi utiliser trois miroirs courbés comme indiquant sur la figure III-3.

Figure III-3: La cavité à trois miroirs courbés.

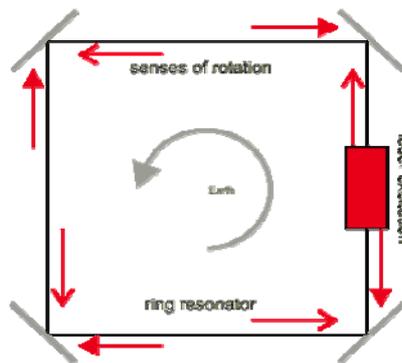


III.1.2. La cavité à quatre miroirs

La cavité est constituée de quatre miroirs, trois miroirs ont un coefficient de réflexion de 100%, tandis que le quatrième miroir est en dessous de 100%, appelé miroir de couplage ou miroir de sortie (figure III-4) [34]. Elle prend plusieurs formes, la plus simple est le carré.

- La cavité en anneau de forme carrée (figure III-4) :

Figure (III-4): La cavité en anneau à quatre miroirs

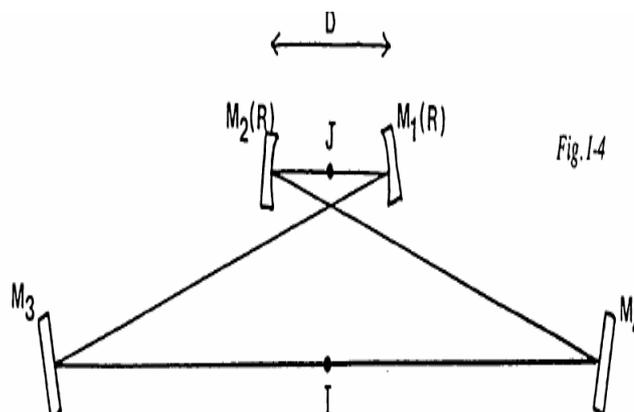


- La cavité en anneau de forme X

La cavité est un anneau en **X** composé de quatre miroirs, deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de rayons de courbures $R_1 = R_2 = R$ et deux miroirs plans (figure III-5) [40].

Figure(III-5):

Représentation de la cavité en forme de **X**, où deux miroirs sont courbés et les autres sont plans.



On peut trouver cette cavité avec quatre miroirs plans (figure III-6) ou sphériques (figure III-7):

Figure (III-6): Représentation d'une cavité en forme de X à quatre miroirs plans.

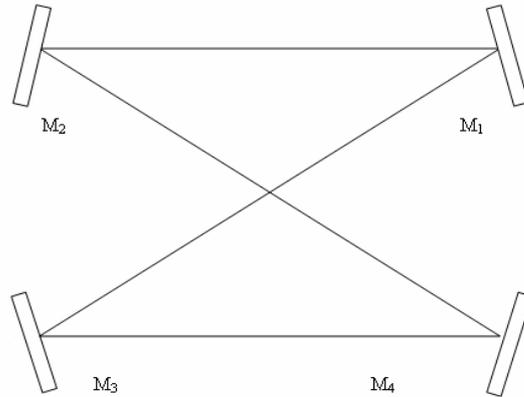
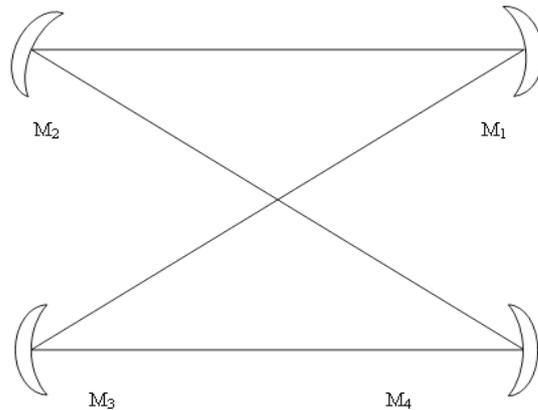


Figure (III-7): Représentation d'une cavité en anneau en forme de X à quatre miroirs courbés.



Cette forme en X a été choisie afin de réduire les angles d'incidence sur les miroirs. Le repli du résonateur en X est indispensable pour éviter que le faisceau ne se polarise par réflexion.

III.2. LES PROPRIETES GENERALES DES CAVITES EN ANNEAU

III.2.1. Les modes de la cavité en anneau

Contrairement à une cavité linéaire, les ondes qui sont suivent les deux directions de propagation dans la cavité sont des ondes progressives. On peut étudier les modes de ce genre de cavité comme dans la cavité linéaire. Les modes permis satisfont la condition $L = q \frac{\lambda}{2}$, la séparation spectrale entre deux modes adjacents de la cavité est donnée par [17]:

$$\Delta \nu = \frac{c}{L} \tag{III-1}$$

Ce qui signifie que le nombre de mode est deux fois plus petit que le nombre de modes dans la cavité simple de même longueur L.

Les fréquences propres des cavités sont obtenues lorsque la phase de l'onde est modifiée d'un multiple de 2π après un tour dans la cavité en anneau [17] :

$$\phi_{mn}(A') - \phi_{mn}(A) = 2q\pi \quad (\text{III-2})$$

où A et A' son les points de départ et d'arrivée (pour un tour de cavité), les fréquences propres sont de la forme [17].

$$v_{mnq} = \frac{c}{L} \left[2q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \text{erc} \cos(\sqrt{g_1 g_2}) \right]$$

Où : $g_1 = g_2 = 1 - L/R$

$$v_{mnq} = \frac{c}{L} \left[2q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \text{erc} \cos g_1 \right] \quad (\text{III-3})$$

III.2.2. La stabilité de la cavité en anneau

Pour étudier la stabilité de la cavité, on représente cette cavité par une matrice M traduisant la transformation des rayons paraxiaux après un tour. Pour cela on considère le cas particulier d'une cavité de périmètre L, formée de trois miroirs disposés aux sommets d'un triangle équilatéral, deux des miroirs sont plans et le troisième a pour rayon de courbure R (figure III-8) [34].

La matrice de transfert est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ R_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -2 & 1-2L/R_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III-4})$$

A partir de cette matrice on peut déduire la condition de stabilité qui est écrite sous la forme suivante :

$$-1 < \frac{A+D}{2} < +1 \quad \text{C'est-à-dire} \quad -1 < 2 - \frac{2L}{R_3} < +1$$

La condition de stabilité de la cavité via la matrice (III-4) est donnée par :

$$0 < L < 2R_3 \quad (\text{III-5})$$

D'après la condition de stabilité on remarque que la cavité est équivalente à une cavité symétrique, constituée par deux miroirs de rayon de courbure R_3 séparés par la distance L .

Les fréquences propres de la cavité sont obtenues lorsque la phase de l'onde est modifiée d'un multiple de 2π après un tour dans la cavité en anneau :

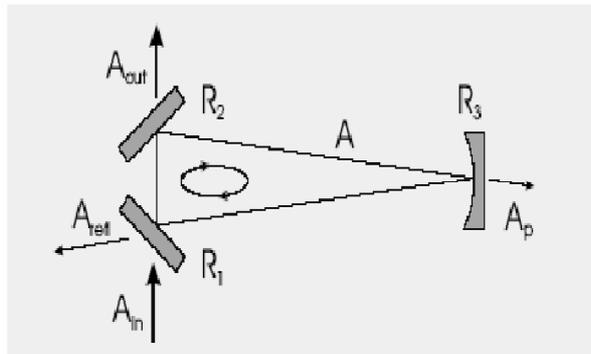
$$\phi(1) - \phi(2) = 2q\pi \tag{III-6}$$

Alors les fréquences propres sont de la forme suivante :

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[2q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos(\pm g_1 g_2) \right] \tag{III-7}$$

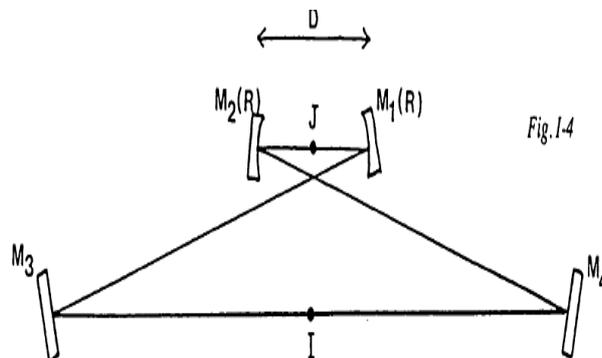
Où $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}, i = 1, 2$.

Figure III-8 Schéma de la cavité en anneau à trois miroirs.



On prend la cavité en anneau en forme de X, qui est constitué de deux miroirs courbés et deux miroirs plans, et pour simplifier on peut remplacer les miroirs M_1 et M_2 par des lentilles de distance focale $f_1 = \frac{R_1}{2}$ et $f_2 = \frac{R_2}{2}$, où la distance entre les miroirs M_1, M_2 et égale à D (figure III-9) [41].

Figure (III-9): Schéma de la cavité en forme de X, où la distance entre les deux miroirs courbés est D .



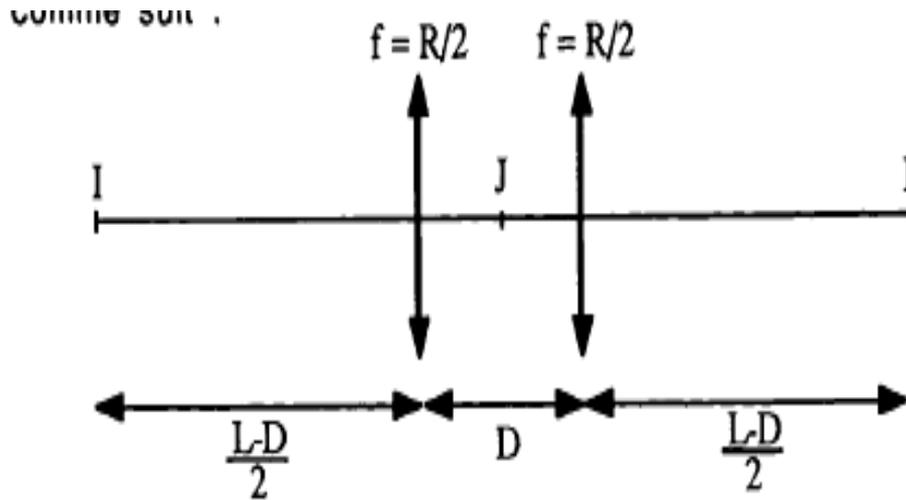


Figure (III-10): La séquence de lentille équivalente à une cavité en forme de x représentant La figure III-9.

La matrice de transfert dans ce cas est calculée de la façon suivante :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & L-D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L-D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 + 2 \frac{D-R}{R} \frac{L-D-R}{R} & (L-D-R) \left[\frac{L-D-R}{R} \frac{D}{R} - 1 \right] \\ 4 \frac{(D-R)}{R^2} & -1 + 2 \frac{D-R}{R} \frac{L-D-R}{R} \end{pmatrix} \quad \text{(III-8)}$$

Donc la condition de stabilité de la cavité en X est donnée par :

$$-1 < \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \frac{D-R}{R} \frac{L-D-R}{R} \right) + \left(-1 + 2 \frac{D-R}{R} \frac{L-D-R}{R} \right) < 1 \Rightarrow 0 < D+R < \frac{R^2}{L-D-R}$$

Ceci impose notamment la condition:

$$L > D - R \quad \text{(III-9)}$$

Les fréquences propres de cette cavité sont données par la relation (III-7).

III.2.3. Les pertes de la cavité en anneau

Pour une cavité en anneau, l'intensité de l'onde après un tour complet dans la cavité décroît par définition de façon exponentielle à cause des pertes

$$I = I_0 e^{-\alpha_p L}, (\alpha_p > 0) \quad (\text{III-10})$$

Où : α_p le coefficient de pertes totales.

Si on prend l'exemple d'une cavité en anneau à trois miroirs de pouvoir de réflexion $R_i (i = 1,2,3)$ avec d'autres pertes que celles dues aux miroirs provoquant une diminution relative d'intensité $\frac{\Delta I}{I} = \eta$ pour un tour complet, l'intensité est donnée par la relation suivante :

$$I(d) = I(0)R_1R_2R_3(1-\eta) = I(0)e^{-\alpha_p L} \Rightarrow (1-\eta)R_1R_2R_3 = e^{-\alpha_p L}$$

et le coefficient de pertes totales est donné par :

$$\alpha_p = \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R_1R_2R_3(1-\eta)} \quad (\text{III-11})$$

En l'absence d'absorption dans les miroirs, les pouvoirs de transmission sont donnés par:

$T_i = 1 - R_i (i = 1,2,3)$, si les pertes sont faibles ($T_i \ll 1, \eta \ll 1$), on trouve une formule approchée :

$$\alpha_p = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \eta}{L} \quad (\text{III-12})$$

Si la cavité contient un milieu amplificateur, le coefficient de pertes totales devient :

$$\alpha_p = \beta + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R_1R_2R_3(1-\eta)} \quad (\text{III-13})$$

Où β : est un coefficient d'absorption résiduel du milieu amplificateur.

En l'absence d'absorption dans les miroirs, la relation (III-13) devient :

$$\alpha_p = \beta + \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \eta}{L} \quad (\text{III-14})$$

La durée de vie des photons dans la cavité τ_c est définie à partir de la décroissance exponentielle de l'intensité moyenne de l'onde dans la cavité en fonction du temps lorsqu'on tient compte de l'ensemble des pertes :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau_c}; I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (\text{III-15})$$

On peut relier α_p et τ_c par la comparaison entre l'intensité après un tour complet obtenue par (III-10) et celle obtenue par la méthode temporelle :

$$I\left(\frac{d}{c_0}\right) = I_0 e^{-\frac{d}{c_0 \tau_c}} \tag{III-16}$$

En identifiant (III-10) et (III-16) on trouve la relation:

$$\tau_c = \frac{d}{c_0} \frac{1}{\alpha_p L} = \frac{d}{L c_0 \alpha_p} \tag{III-17}$$

Cette relation est la même que pour la cavité linéaire. Le facteur de qualité donc est défini par la relation suivante :

Le facteur de qualité = (énergie emmagasinée) / (puissance dissipée)

$$Q_c = \omega_0 \tau_c \tag{III-18}$$

III.3. LA CAVITE EN ANNEAU AVEC MILIEU AMPLIFICATEUR

Dans ce cas on a placé un milieu amplificateur dans une cavité en anneau, on considère le cas simple constitué de trois miroirs plans. Nous supposons que deux de ces miroirs sont totalement réfléchissants M_1 et M_2 et le troisième a des coefficients de réflexion et de transmission en intensité respectivement égaux à R et T , c'est le miroir de sortie M_s (avec $R + T = 1$, pour un miroir sans pertes), le miroir M_s renvoie une partie de la lumière vers le milieu amplificateur, à travers les miroirs M_1 et M_2 .

Considérons une onde lumineuse circulant dans une cavité en anneau à partir du point A situé juste après le miroir de sortie M_s , si l'intensité du champ est I_A au point A, elle est égale à $G I_A$ (G gain de milieu amplificateur), après un tour et juste avant la réflexion sur M_s . Après la réflexion sur M_s , l'intensité du faisceau est égale à $R G I_A$.

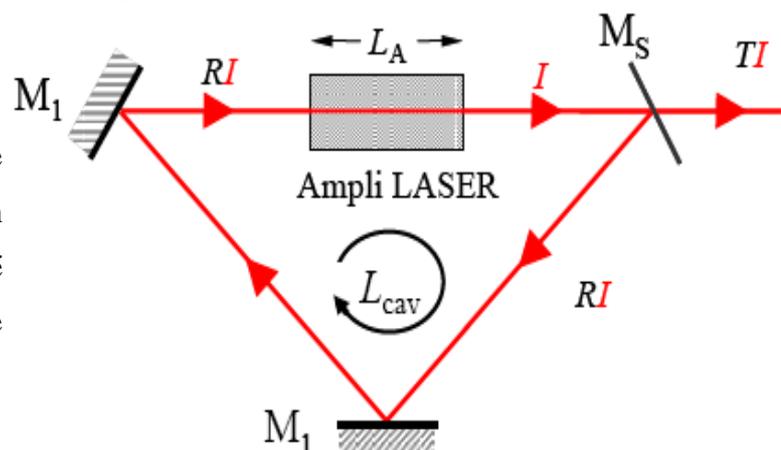


Figure III-11: L'onde électromagnétique fait un tour complet dans la cavité en anneau et traverse le milieu amplificateur.

Pour que l'oscillation s'établisse, il faut que le champ après un tour soit plus grand que le champ initial (cf.§ II.3.1), dans ce cas la condition de démarrage de l'oscillation est donnée par [26] :

$$RG_0 > 1 \quad \text{(III-19)}$$

Soit encore :

$$G_0(1-T) > 1 \quad \text{(III-20)}$$

Où G_0 est le coefficient d'amplification pour une onde incidente de faible intensité.

Si on ajoute les pertes supplémentaires dues à l'absorption que nous représentons par un coefficient d'absorption A [26], la condition (III-20) est remplacée par:

$$G_0(1-T)(1-A) > 1 \quad \text{(III-21)}$$

où encore:

$$G_0 > \frac{1}{(1-T)(1-A)} \quad \text{(III-22)}$$

Cette équation constitue la condition de démarrage au seuil, pour les cavités en anneau, elle s'écrit aussi dans la limite $A, T \ll 1$ (limite rencontrée dans la pratique) [26]:

$$G_0 - 1 > T + A \quad \text{(III-23)}$$

L'équation (III-21) signifie que le gain non saturé de l'amplificateur doit être supérieur aux pertes totales pour que l'oscillation laser démarre.

Comme pour la cavité linéaire, l'émission laser ne se produit que pour les modes de fréquences ν_q telle que :

$$\nu_{\min} \leq \nu_q \leq \nu_{\max} \quad \text{(III-24)}$$

Ce fonctionnement est appelé le fonctionnement *multi mode et* pour le fonctionnement monomode on utilise la cavité en anneau monomode ou la cavité unidirectionnelle.

III.4. LA CAVITE EN ANNEAU UNIDIRECTIONNELLE

La présence de deux ondes progressives se propageant dans deux directions opposées dans la cavité linéaire, produit une évolution d'onde stationnaire du champ qui provoque le phénomène de « Hole Burning » spatial [38], [43].

Chaque mode longitudinal de la cavité linéaire possède des nœuds et des ventres, ce mode aura un gain maximum aux nœuds d'intensité et plus faible où l'intensité est maximale (saturation de gain), d'autres modes vont ainsi avoir du gain à une position où le mode initial n'en a pas. Ceci va engendrer une compétition entre les modes pouvant osciller dans la cavité d'où une émission multimode longitudinale. Pour le rendre monomode, il faudra introduire dans la cavité des éléments très sélectifs, ce qui réduira la puissance de sortie. La solution la plus efficace pour l'effet de « *hole burning* », consiste à utiliser une cavité en anneau unidirectionnelle [38].

III.4.1. Comment obtenir un fonctionnement monomode par une cavité en anneau ?

L'architecture la plus largement utilisée pour obtenir une émission mono fréquence est la réalisation de cavité (résonateur) en anneau. La première caractéristique de ce type de cavité est qu'il existe deux ondes progressives contrapropagatives dans le résonateur. En imposant des pertes non réciproques pour les deux ondes, il est possible de ne sélectionner qu'un seul sens de propagation .

Ainsi on s'affranchit du phénomène de " *hole burning* ", puisque une unique onde se propage dans un seul sens, et la répartition d'intensité dans le milieu amplificateur est alors plus homogène.

De plus, comme l'onde progressive sature uniformément le milieu à gain, avec aucun nœud spatial le long de la direction longitudinale, ce mode peut extraire plus de puissance qu'il ne pourrait le faire autrement [38], [44] .

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir l'oscillation unidirectionnelle, la plus communément utilisée, de part sa simplicité d'utilisation et sa robustesse, consiste à placer une diode optique (isolateur optique) à l'intérieur de la cavité en anneau dans le but d'introduire des pertes non réciproques dans les deux directions.

III.4.1.1. Diode optique

Une diode optique est composée de deux éléments, un rotateur de Faraday et un élément optiquement actif qu'une lame demi onde.

Le rotateur de Faraday est l'élément principal utilisant un matériau de Faraday avec une constante de verdet non nulle, sous l'action de champ magnétique constant, impose une rotation de la direction de polarisation de l'onde incidente. Le sens de polarisation de l'onde optique imposé par le matériau de Faraday dépend de la direction du champ magnétique mais pas de la direction de propagation de l'onde [38], [44].

Le second élément est par exemple une lame demi onde, le sens de rotation de la polarisation dépend du sens de propagation de l'onde lumineuse. L'angle de polarisation de l'onde se propageant

selon le sens "+" est inchangé après la traversée de la diode optique, alors que l'angle de polarisation de l'onde se propageant selon le sens "-" est roté d'un angle 2θ (figure III-14) [38],[44]. Après la traversée de l'élément de polarisation, l'onde "+" ne voit aucune perte; alors que l'onde "-" subit des pertes à chaque tour de cavité. L'oscillation unidirectionnelle se produit alors dans le sens "+" et un angle de rotation d'un degré, fourni par le matériau de Faraday, suffit la plupart du temps à supprimer l'oscillation dans l'une des deux directions [44].

Figure III-12: diode optique utilisant un rotateur de Faraday dans une cavité en anneau [38].

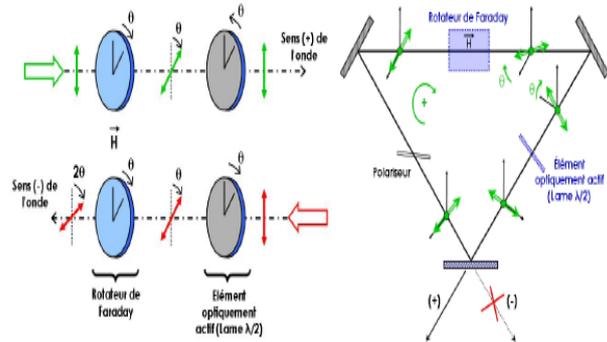
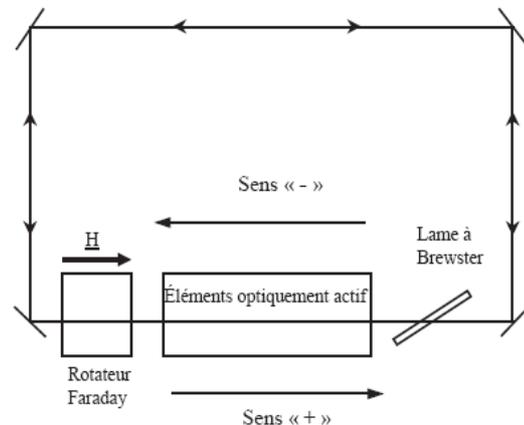


Figure III-13: L'utilisation de diode optique dans une cavité en anneau à quatre miroirs.



III.4.1.2. Un modulateur acousto-optique

Une autre méthode pour obtenir l'oscillation unidirectionnelle, dans une cavité en anneau, est d'insérer un modulateur acousto-optique qui présente un comportement non réciproque. La réflexion se fait sur une surface en mouvement, la condition de Bragg est réalisée à des angles de diffractions différentes pour les deux ondes contra-propagatives. Ceci conduit à une différence de pertes entre les deux ondes, ce qui est suffisant pour rendre l'oscillation unidirectionnelle possible mais cette technique reste peu utilisée puis que l'efficacité de diffraction est de l'ordre de 80% à 90% [44], [46].

III.4.1.3. Rétro injection par un miroir externe

Cette technique sert pour améliorer l'unidirectionnalité des lasers à cavité en anneau, par ce qu'on a utilisé un miroir auxiliaire externe pour réfléchir une partie de l'onde qui se propage dans le sens

contraire des aiguilles d'une montre que nous nommons (-) et dans la direction des aiguilles d'une montre (+) [38], [46].

Si cette cavité tente d'osciller dans la direction (-) (figure III-14), le signal réfléchi par le miroir externe servira comme un signal injecté dans la direction (+), où l'onde dans cette direction est amplifiée, alors que dans l'autre direction, l'oscillation est diminuée et non éliminée. Mais cette technique ne fonctionne que grossièrement dans certaines situations.

Par exemple, dans le cas des lasers à élargissement inhomogène, on ne peut pas utiliser cette méthode, par ce que si le mode longitudinal le plus proche du centre de la cavité en anneau peut osciller avec des intensités égales dans les deux directions, et peut osciller dans plusieurs modes longitudinaux. Par contre, si le milieu laser est à élargissement homogène, l'oscillation (+) désirée croit au dépend de l'oscillation (-) [38], [46].

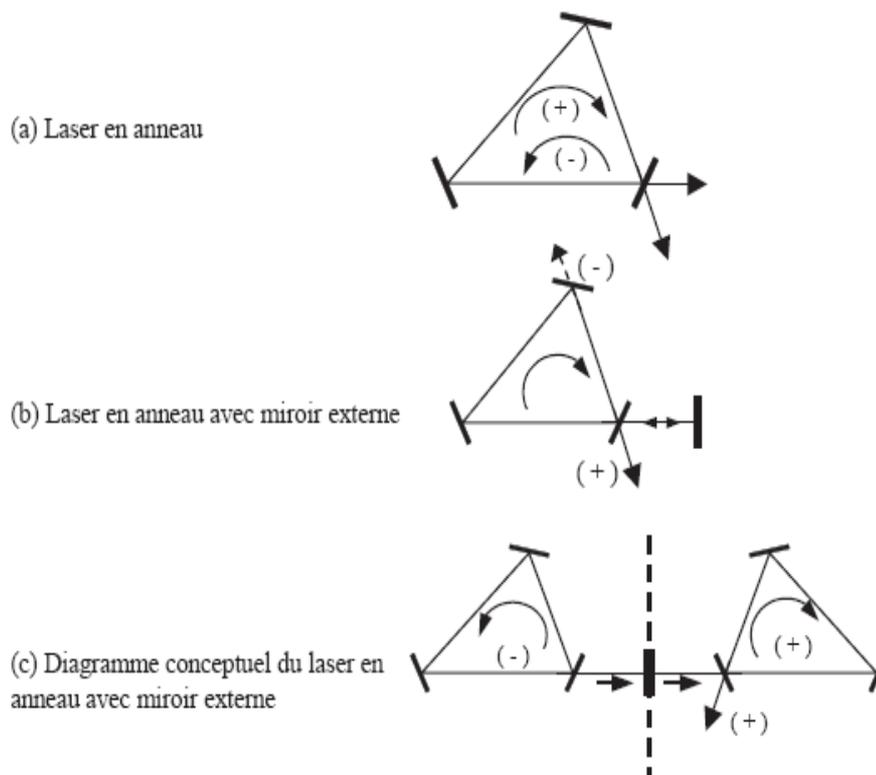


Figure III-14: (a)laser en anneau bidirectionnel, (b) cavité en anneau avec un miroir externe, (c) diagramme conceptuel de la cavité en anneau avec miroir de couplage unidirectionnel [46].

III.5. L'APPLICATION DE CAVITE EN ANNEAU : LASER GYROSCOPE

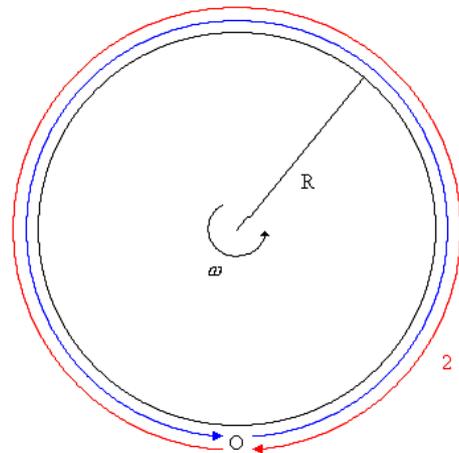
Une application importante du laser est son utilisation comme un détecteur dans un laser gyroscope, ces appareils sont utilisés pour mesurer les vitesses angulaires de la terre et la variation d'orientation des avions ou des fusées. Le gyroscope prend la forme d'un laser en anneau, le principe de son opération est basé sur l'effet Sagnac [2], [47], [48].

III.5.1. Effet Sagnac

L'effet Sagnac est un phénomène qui a été observé pour la première fois par Georges Sagnac en 1914, cet effet consiste à émettre, en même temps et en sens inverse, deux signaux lumineux à l'aide d'un émetteur-récepteur sur un disque tournant, puis à mesurer la différence du temps entre les deux signaux.

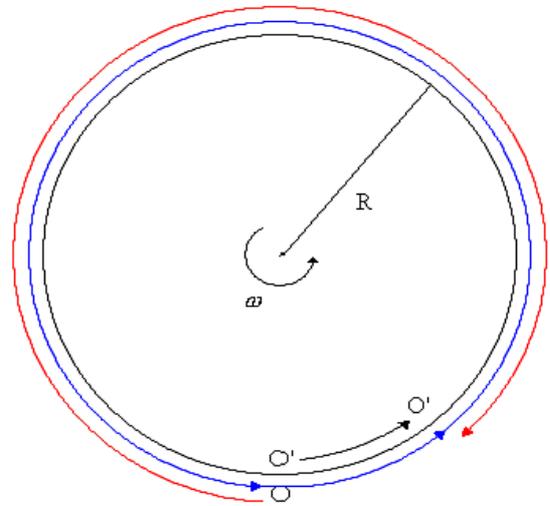
Pour bien comprendre, un observateur immobile O envoie et reçoit deux signaux dans deux directions opposées autour d'un disque de rayon R , l'un (1) tournant dans le sens direct, l'autre (2) dans le sens inverse, les deux signaux sont en rotation à la vitesse angulaire ω , comme indiqué sur la figure III-15. Si le disque est fixé, la différence de fréquence est nulle $\Delta f = 0$ [2].

Figure III- 15: Un observateur immobile O envoie et reçoit deux signaux dans deux directions opposées autour d'un disque de rayon R .



Si on considère maintenant un autre observateur O' situé en périphérie du disque et en rotation avec celui-ci comme indiqué sur la figure III-15. On a choisi l'observateur O' dans la région de l'observateur O au moment où les deux signaux sont émis. Comme O' se déplace, lorsque les deux signaux se rencontrent en O , l'observateur O' n'est plus au même endroit. L'observateur O' rencontre le signal (2) et puis le signal (1) par ce que le signal (1) est arrivé un peu plus tard, pour cela on trouve une différence de temps entre les deux signaux [2].

Figure III-16 : Un observateur immobile O , et un autre observateur O' situé en périphérie du disque et en rotation avec celui-ci. Si O' se déplace avec les deux signaux qui se rencontrent au point de l'observateur O . Le signal (2) rencontre l'observateur O' après le signal (1), ce qui conduit à une différence de temps entre les deux signaux.



Donc on constate que le signal (2) est plus rapide que le signal (1) et on peut mesurer la différence de fréquence entre eux qui est donnée par [47], [48]:

$$\Delta f = \frac{4S\omega}{\lambda P} \quad (\text{III-25})$$

- S : la surface du disque,
- ω : vitesse angulaire,
- P : périmètre,
- λ : la longueur d'onde.

III.5.2. L'utilisation d'une cavité en anneau bidirectionnelle

Dans les gyroscopes laser, on utilise les cavités en anneau bidirectionnelles qui sont généralement sous la forme d'un triangle équilatéral ou carré. Si un rayon lumineux entrant dans la cavité à l'instant $t = 0$ où il se sépare en deux parties, par une lame séparatrice, l'une (1) dans le sens direct et l'autre (2) dans le sens inverse (figure III-17) [2], [47].

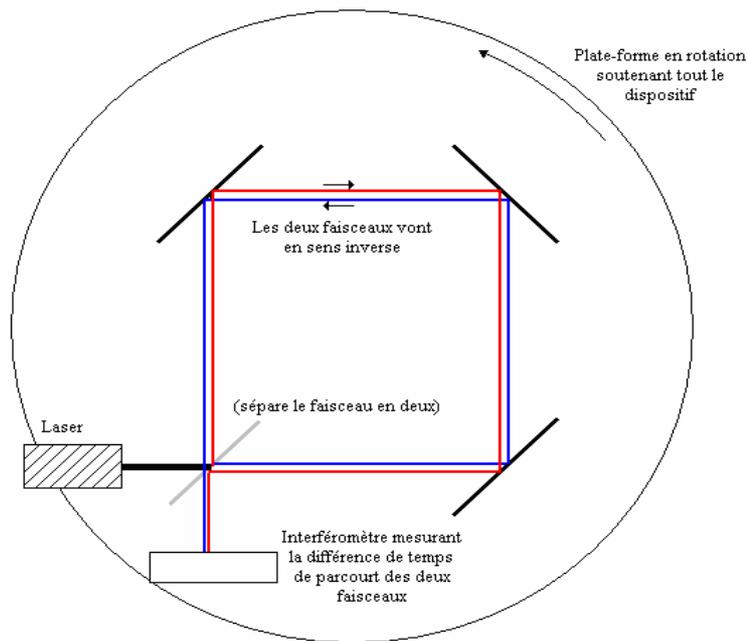


Figure III-17: Le faisceau d'une source se trouve sur une plate-forme en rotation est séparé en deux faisceaux par une lame séparatrice, ces deux faisceaux se propagent dans la cavité en anneau dans deux sens inverses, et à la sortie de la cavité, il y a un interféromètre pour mesurer la différence de temps de parcours des deux faisceaux qui sortent de la cavité.

Au bout d'un tour, ces faisceaux sortent en des points différents pour l'observateur immobile puisque la cavité et la lame séparatrice, ont tournés pendant le temps de propagation comme nous avons vus précédemment. Lorsque la cavité est tournée par une vitesse angulaire ω , il existe une différence de marche δx entre les deux faisceaux qui se propagent dans des sens inverses dans la cavité. Cette différence de marche est donnée par :

$$\delta x = c \delta t = \frac{4A\omega}{c} \quad \text{(III-26)}$$

- δt : la différence de temps entre les deux sens de propagation de l'onde,
- A : la surface de cavité,
- ω : la vitesse angulaire.

Si R est le rayon du cercle, on peut exprimer les temps de révolution t_1 et t_2 des deux faisceaux avant la sortie de cavité par :

$$t_1 \frac{c}{R} = t_1 \omega + 2\pi \quad (\text{III-27})$$

$$t_2 \frac{c}{R} = t_2 \omega + 2\pi$$

La différence des temps de propagation des deux faisceaux (1) et (2) est donnée par :

$$\delta t = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2 - (R\omega)^2} \quad (\text{III-28})$$

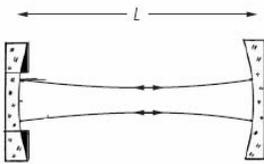
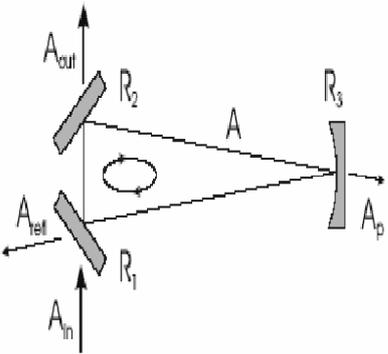
la vitesse angulaire du disque est plus faible que la vitesse angulaire de la lumière on obtient :

$$\delta t = \frac{4S\omega}{c^2} \quad (\text{III-29})$$

Puisque $A = \pi R^2$.

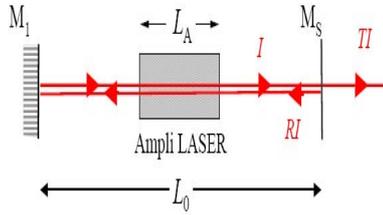
III.7. LA COMPARAISON ENTRE DEUX GENRES DE CAVITE

La cavité simple et la cavité en anneau sont les deux types des cavités optiques les plus utilisées dans le laser. Elles confinent la lumière entre ses miroirs et permettent d'envoyer les photons dans le milieu amplificateur. Les propriétés de ces cavités sont presque les mêmes (les modes, les pertes, le diagramme de stabilité), mais il y a quelque différences entre elles que nous résumons dans le tableau III-1 suivant :

La cavité linéaire	La cavité en anneau
<p>Constituée de deux miroirs en face, l'un est totalement réfléchissant, et l'autre semi transparent. Le faisceau fait plusieurs allers-retours entre les deux miroirs de cavité.</p> 	<p>Constituée de plus de deux miroirs, et le faisceau fait un seul tour dans la cavité. Le miroir de sortie est partiellement transparent et les autres miroirs sont totalement réfléchissants.</p> 
<p>La différence de phase après chaque aller - retour est un multiple entier de 2π et pour un aller simple un multiple entier de π :</p> $\phi_{mn}(A') - \phi(A) = q\pi$	<p>La phase de l'onde est modifiée après un tour et la différence multiple de 2π :</p> $\phi_{mn}(A') - \phi_{mn}(A) = 2q\pi$
<p>Où A et A' sont les point de départ et d'arrivée respectivement</p>	
<p>les fréquences propres sont données par :</p> $\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2L} \left[\frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right]$	<p>les fréquences propres sont données par :</p> $\nu_{mnq} = \frac{c}{L} \left[2q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos \left(\sqrt{g_1 g_2} \right) \right]$

<p>L'intervalle spectral libre (la séparation entre deux modes adjacents longitudinaux de la cavité) : $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$</p>	<p>Dans une cavité en anneau de longueur optique L, l'intervalle spectral est plus grand que la cavité linéaire $\Delta\nu = \frac{c}{L}$, ce qui signifie que le nombre de mode est deux fois plus petit que dans la cavité linéaire de même longueur .</p>
<p>Où : L est la longueur optique de la cavité et c est la vitesse de la lumière dans le vide.</p>	
<p>L'intensité de l'onde après un tour complet dans la cavité décroît de façon exponentielle à cause des pertes</p> $I = I_0 e^{-2\alpha L}$ <p>L : c'est la distance entre les deux miroirs de cavité.</p>	<p>L'intensité de l'onde après un aller-retour dans la cavité décroît de façon exponentielle à cause des pertes:</p> $I = I_0 e^{-\alpha L}$ <p>L : c'est le périmètre de la cavité en anneau.</p>
<p>α : la coefficient de perte dans la cavité linéaire, si cette cavité a deux miroirs de coefficient de réflexion R_1 et R_2, α est donné par :</p> $\alpha_p = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2 (1-\eta)}$ <p>Si la cavité linéaire contient le milieu amplificateur :</p> $\alpha_p = \beta + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2 (1-\eta)}$	<p>α : le coefficient de perte dans la cavité en anneau; si la cavité est constituée de trois miroirs de coefficient de réflexion R_1 et R_2 et R_3 qui est donné par:</p> $\alpha_p = \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R_1 R_2 R_3 (1-\eta)}$ <p>Si la cavité contient le milieu amplificateur :</p> $\alpha_p = \beta + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R_1 R_2 R_3 (1-\eta)}$
<p>Où β : est le coefficient d'absorption résiduel de milieu amplificateur, R_i est le coefficient de réflexion et $\eta = \frac{\Delta I}{I}$</p>	

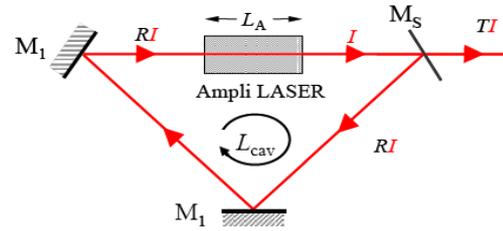
La lumière traverse le milieu amplificateur plusieurs fois.



La condition d'oscillation de la cavité est donnée par :

$$G(1-T)(1-A)^2 > 1$$

Dans ce cas la lumière traverse le milieu amplificateur une seule fois.



La condition d'oscillation de la cavité est donnée par :

$$G(1-T)(1-A) > 1$$

Où: G est le facteur de gain, T est la transmission ($T=1-R$) et A les différentes pertes dans la cavité.

La présence de deux ondes progressives se propageant dans deux directions opposées dans la cavité, produit une onde stationnaire qui provoque le phénomène de "hole burning" spatial et qui oblige le laser à osciller à plusieurs longueurs d'ondes, donc un laser à cavité linéaire sera à priori multimode.

Au contraire dans une cavité en anneau il existe deux ondes progressives contre propagatives. La solution la plus efficace pour éliminer l'effet de "Hole Burnige" spatial est l'utilisation d'une cavité en anneau unidirectionnelle par l'introduction de diode optique ou d'autre technique (cavités en anneau unidirectionnelle).

Le fonctionnement unidirectionnel dans une cavité en anneau produit des propriétés de faisceau différentes que celle du résonateur linéaire, et l'intensité du faisceau de sortie de cavité en anneau unidirectionnelle plus intense que celle obtenue par le résonateur linéaire.

Tableau III-1 : La comparaison entre les deux types de cavité optique du laser.

IV.1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons négligés les effets de diffraction, dus aux dimensions finies des miroirs de la cavité ouverte, maintenant nous tenons compte de ces effets ; pour cela nous utilisons l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff et l'approximation paraxiale, pour écrire les équations intégrales qui permettent de calculer les modes propres et les valeurs propres de la cavité optique. La théorie classique des résonateurs de dimension finie donne seulement la solution analytique approximative de ces équations pour les résonateurs plan-plan et confocal (circulaire ou rectangulaire). Dans le cas général, le calcul numérique est nécessaire pour donner les solutions exactes de ces équations [41].

IV.2. LE PRINCIPE DE HYGENS-FRESNEL

L'onde laser obéit aux lois de diffraction et doit être identique à elle même après un transit (ou demi transit dans la cavité qui est constitué de deux miroirs identiques) pour exprimer ces caractéristiques en utilisant le principe de Huygens Fresnel [10].

D'après ce principe, chaque point $m(x,y)$ d'une ouverture se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique (figure IV-1). L'amplitude de l'onde émise par cette source secondaire est proportionnelle à celle de l'onde incidente dans ce point. Les ondes émises par ces sources interfèrent entre elles pour donner l'onde diffractée [34].

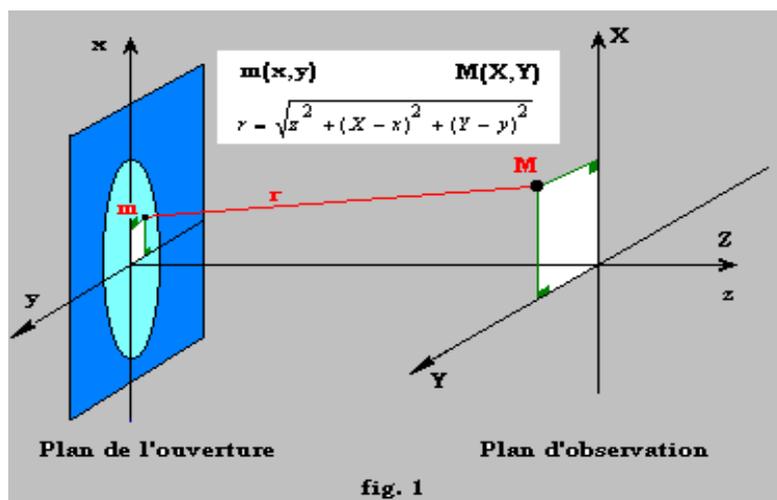


Figure IV-1: Principe de Fresnel –Hyugens

Si $E(x, y)$ désignant l'amplitude du champ en un point $m(x, y)$ de l'ouverture, l'amplitude du champ $E(X, Y)$ au point $M(X, Y)$ du plan d'observation est alors donnée par l'expression suivante:

$$E(X, Y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int h(X, Y; x, y) E(x, y) dx dy \quad \text{(IV-1)}$$

où :

$$h(X, Y; x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta = -\frac{i}{\lambda} \exp(ikr) \cos \theta$$

$$r = \sqrt{z^2 + (X - x)^2 + (Y - y)^2}$$

D'après l'approximation de Fresnel :

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{X - x}{z}\right)^2 + \left(\frac{Y - y}{z}\right)^2} \quad \text{(IV-2)}$$

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{X - x}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y - y}{z}\right)^2 \right]$$

On obtient pour cette approximation de Fresnel :

$$E(X, Y, z) \approx \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \iint E(x, y, z) \exp\left(\frac{-ik}{2z} ((X - x)^2 + (Y - y)^2)\right) \quad \text{(IV-3)}$$

Cette équation (IV-3) traduit l'approximation de Fresnel de l'intégrale de Huygens.

On peut aussi donner la formule de Fresnel-kirchhoff par l'expression suivante :

$$\gamma E(s_2) = \iint_s E(s_1) k(s_1, s_2) ds_1 \quad \text{(IV-4)}$$

IV.3. LA FORMULE MATHEMATIQUE GENERALE DES EQUATIONS INTEGRALES

A l'aide de la formule de Fresnel- Kirchhoff (IV-4) on peut obtenir une paire d'équations intégrales qui lient les deux champs de deux miroirs de la cavité M_1, M_2 [14], comme l'indiquent les équations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma^{(1)} E^{(1)} = \int K^{(2)}(s_1, s_2) E^{(2)} dS_2 \\ \gamma^{(2)} E^{(2)} = \int K^{(1)}(s_2, s_1) E^{(1)} dS_1 \end{cases} \quad \text{(IV-5)}$$

Où :

- S_1 et S_2 sont les surfaces des cavités M_1 , et M_2 , respectivement.
- Les indices (1) et (2) dénotent les miroirs M_1 et M_2 , respectivement.
- s_1 et s_2 sont les notations symboliques des coordonnées transversales sur la surface du miroir. Pour les miroirs rectangulaires $s_1 = (x_1, y_1)$ et $s_2 = (x_2, y_2)$ et pour les miroirs circulaires $s_1 = (r_1, \phi_1)$ et $s_2 = (r_2, \phi_2)$.
- $E^{(1)}, E^{(2)}$ sont les fonctions de distribution du champ sur les miroirs M_1 et M_2 .
- $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ sont les valeurs propres des équations intégrales.
- $K^{(1)}(s_1, s_2), K^{(2)}(s_2, s_1)$ sont des fonctions qui dépendent de la géométrie des miroirs.
 - ❖ Ils sont égaux : $K^{(1)}(s_2, s_1) = K^{(2)}(s_1, s_2)$
 - ❖ En général, ils ne sont pas symétriques

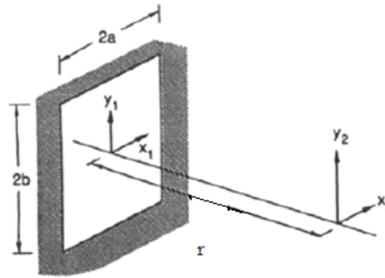
$$K^{(1)}(s_1, s_2) \neq K^{(1)}(s_2, s_1), K^{(2)}(s_1, s_2) \neq K^{(2)}(s_2, s_1) \quad \text{(IV-6)}$$

Les équations (IV-5) expliquent le champ de chaque miroir en terme de champ réfléchi à l'autre, c'est-à-dire, ce sont des équations d'un seul transit (aller-retour). Si on remplace l'un dans l'autre, on obtient les équations d'un double transit, qui signifie que le champ de chaque miroir doit se reproduire en lui-même après un aller-retour. [14].

IV- 3.1. Les miroirs sphériques

Quand les miroirs d'une cavité optique sont sphériques, d'ouverture rectangulaire où circulaire, on peut transformer les équations intégrales à deux dimensions en une seule dimension qui peuvent se résoudre par des méthodes analytiques ou numériques [14].

Pour les miroirs rectangulaires, les équations intégrales utilisent les coordonnées cartésiennes $s_1 = (x_1, y_1)$ et $s_2 = (x_2, y_2)$.



On considère un miroir rectangulaire de dimensions $2a$ et $2b$ suivant les axes (ox) et (oy) , respectivement (figure IV-2).

➤ Pour les coordonnées en x , les équations intégrales sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_x^{(1)} u^{(1)}(x_1) = \int_{-b}^b K(x_1, x_2) u^{(2)}(x_2) dx_2 \\ \gamma_x^{(2)} u^{(2)}(x_2) = \int_{-a_1}^{a_1} K(x_1, x_2) u^{(1)}(x_1) dx_1 \end{array} \right. \quad \text{(IV-7)}$$

Où

- a_1, a_2 sont les demies longueurs des miroirs M_1, M_2 , respectivement.
- Le noyau K qui est défini par :

$$K(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{i}{\lambda d}} \exp\left\{ \frac{-ik}{2d} (g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 - 2x_1 x_2) \right\} \quad \text{(IV-8)}$$

Où :

- d est la distance entre les deux miroirs,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,
- λ est la longueur d'onde,
- $g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$ et $g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$.

➤ Pour les coordonnées en y , les équations intégrales sont données sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_x^{(1)} u^{(1)}(y_1) = \int_{-b}^b K(y_1, y_2) u^{(2)}(y_2) dy_2 \\ \gamma_x^{(2)} u^{(2)}(y_2) = \int_{-a_1}^{a_1} K(y_1, y_2) u^{(1)}(y_1) dy_1 \end{array} \right. \quad \text{(IV-9)}$$

Les fonctions propres et les valeurs propres sont donc:

$$E(x, y) = u(x)v(y) \quad \text{(IV-10)}$$

$$\gamma = \gamma_x \gamma_y \quad \text{(IV-11)}$$

Pour les miroirs circulaires (figure IV-3), les équations sont réduites à une seule dimension par l'utilisation des coordonnées cylindriques, en assumant l'approximation azimutale du champ, c'est-à-dire : $E(r, \phi) = R_l(r)e^{-il\phi}$, les distributions des fonctions radiales $R_l^{(1)}, R_l^{(2)}$ satisfont donc les équations intégrales unidimensionnelles suivantes[1] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_l^{(1)} R_l^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} = \int_0^{a_2} K(r_1, r_2) R_l^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} dr_2 \\ \gamma_l^{(2)} R_l^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} = \int_0^{a_1} K(r_1, r_2) R_l^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \end{array} \right. \quad \text{(IV-12)}$$

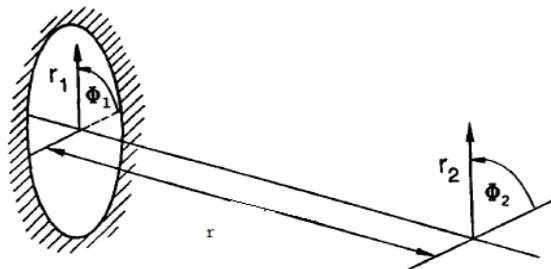
Où le noyau $K(r_1, r_2)$ est donné par la relation suivante :

$$K(r_1, r_2) = \frac{i^{l+1}}{d} J_l \left(k \frac{r_1 r_2}{d} \right) \sqrt{r_1 r_2} \exp \left\{ -\frac{ik}{2d} (g_1 r_1^2 + g_2 r_2^2) \right\} \quad \text{(IV-13)}$$

et où:

- J_l est la fonction de Bessel de premier type et d'ordre l .
- a_1, a_2 sont les rayons des miroirs M_1, M_2 , respectivement.

Figure IV-3 : Schéma d'un miroir circulaire.



IV.3.2. Les propriétés des miroirs sphériques

En général, les deux propriétés importantes qui sont appliquées aux résonateurs avec des miroirs sphériques sont les propriétés d'équivalence et de stabilité [14].

IV.3.2.1. Les propriétés d'équivalence

Ces propriétés sont obtenues par une manipulation algébrique simple des équations intégrales, elles réduisent le nombre de calculs nécessaire pour obtenir les solutions des différentes géométries des cavités [14].

La première propriété, les miroirs peuvent être changés sans modifier les résultats, mais les indices supérieur et inférieur (1) et (2) peuvent être changés [14].

La deuxième, les pertes par diffraction et la distribution d'intensité du mode restent invariantes, si g_1 et g_2 changent leurs signes. Les fonctions propres et les valeurs propres prennent des valeurs complexes conjuguées, par exemple: les cavités plane parallèle ($g_1=g_2=1$) et concentrique ($g_1=g_2=-1$) [14].

Et la troisième concerne le nombre de Fresnel et le facteur de stabilité [14]:

$$N = \frac{a_1 a_2}{\lambda d} \tag{IV-14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = g_1 \frac{a_1}{a_2} \\ G_2 = g_2 \frac{a_2}{a_1} \end{array} \right\} \tag{IV-15}$$

Si les trois paramètres sont les mêmes pour deux cavités, alors elles ont les mêmes pertes par diffractions, les mêmes fréquences de résonances et les mêmes structures de modes.

IV.3.2. 2. La condition de stabilité

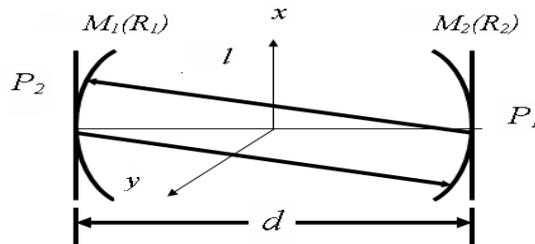
La condition de stabilité est donnée dans le premier chapitre par la relation $0 < g_1 g_2 < 1$ qui peut s'écrire aussi : $0 < G_1 G_2 < 1$.

IV.4. L'EXPRESSION DES EQUATIONS INTEGRALES D'UNE CAVITE A DEUX MIROIRS

Considérant une répartition d'amplitude $A(x, y)$ complexe sur le miroir M_1 , elle produit sur le miroir M_2 une répartition d'amplitude complexe $A'(x, y)$, qui peut se calculer en utilisant le principe de Hygens-Fresnel (cf. § IV-2). L'amplitude $A'(x, y)$ produit à son tour une répartition $A''(x, y)$ sur M_1 , les modes de résonateurs doivent donner pour A'' une répartition identique à A multipliée par une constante $\gamma = \eta e^{i\varphi}$, où η est le facteur réel d'atténuation de l'amplitude pour un aller-retour et φ est le déphasage réel correspondant [42].

Si $p_1(x_1, y_1, z)$ et $p_2(x_2, y_2, z)$ sont des points de M_1 et M_2 avec $p_1 p_2 = l$ (figure IV-4).

Figure IV-4: La représentation d'une cavité confocale



On peut écrire suivant le principe de Fresnel -Huygens:

$$A' = \frac{i}{\lambda d} \iint_M A e^{-ikl} dx_1 dy_1 \tag{IV-16}$$

A l'ordre le plus bas en $\frac{x}{R}$ et $\frac{y}{R}$, les coordonnées de p_1 et p_2 s'écrivent :

$$p_1 \left(x_1, y_1, \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} \right), \quad p_2 \left(x_2, y_2, d - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} \right)$$

L'expression approchée de l limitée au 2^{ème} ordre en x, y

$$l \approx d + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2d} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} \tag{IV-17}$$

Pour une cavité confocale symétrique :

$$l = d - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{d} \tag{IV-18}$$

Si on remplace l par l'expression (IV-4) dans l'expression (IV-3) on trouve :

$$A'(x_2, y_2) = \frac{ie^{-ikd}}{\lambda d} \iint_{M_1} A(x_1, y_1) e^{-ik \left[\frac{(x_2-y_1)^2 + (y_2-y_1)^2}{2d} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} \right]} dx_1 dy_1 \quad (\text{IV-19})$$

Pour simplifier, on introduit le noyau en posant :

$$A'(x_2, y_2) = \iint_{M_1} k(x_1, y_1, x, y) A(x, y) dx_1 dy_1 \quad (\text{IV-20})$$

Pour établir l'équation intégrale qui relie A'' et A , on utilise une seconde fois le principe de Hygens-Fresnel :

$$A''(x, y) = \iint_{M_2} k(x, y; x_2, y_2) A'(x_2, y_2) dx_2 dy_2 \quad (\text{IV-21})$$

En remplaçant et en réarrangeant les intégrales, on obtient :

$$A''(x, y) = \iint_{M_1} L(x, y; x_2, y_2) A(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (\text{IV-22})$$

$$L(x, y; x_2, y_2) = \iint_{M_2} k(x, y; x_2, y_2) k(x_2, y_2, x_1, y_1) dx_2 dy_2 \quad (\text{IV-23})$$

$$k(x_2, y_2; x_1, y_1) = \frac{ie^{-ikd}}{\lambda d} e^{-ik \left[\frac{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}{2d} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_1} \right]} \quad (\text{IV-24})$$

L'équation intégrale du résonateur s'écrit finalement :

$$A''(x, y) = \gamma A(x, y) = \iint_{M_1} L(x, y; x_1, y_1) A(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (\text{IV-25})$$

IV-5. LE PRINCIPE DE LA RESOLUTION NUMIRIQUE

On peut prouver mathématiquement (mais c'est difficile) que l'équation intégrale a des solutions. On ne connaît pas de solution analytique et on doit chercher des solutions numériques par ordinateur. Fox et Li ont proposé par exemple, une méthode par itérations partant d'une distribution initiale arbitraire A_0 sur un miroir, on calcule la distribution initiale arbitraire A_1 après un aller_retour en utilisant la longueur L (avec un ordinateur et avec une dimension fixe des miroirs).

A_1 sert alors de nouvelle répartition initiale pour l'itération suivante. Après un nombre suffisant d'itérations, on obtient :

$$A_{n+1} = \gamma A_n \quad (\text{IV-26})$$

Où γ est la valeur propre qui est la solution recherchée physiquement. Les itérations successives représentent les différents allers-retours du faisceau entre les miroirs. Si on injecte une fonction symétrique A_0 , on obtiendra le mode pair de plus faible perte, et si on injecte une fonction antisymétrique A_0 , c'est le mode impair de plus faible perte qu'on obtiendra [41].

IV.6. LES MODES DE CAVITES

Les distributions transversales du champ des modes de résonateur sont données par les fonctions et les valeurs propres des équations intégrales, comme nous l'avons mentionné précédemment. Jusqu'à maintenant il n'y a pas des solutions analytiques exactes qui sont obtenues, mais il y a des expressions analytiques approximatives utilisées pour décrire les champs de résonateur stable avec des miroirs sphériques, comme les distributions du champ approximatives qui sont données par les fonctions de Hermite-Gauss pour les miroirs rectangulaires (cf.§ I-3-2-2-1) et celles qui sont données par les fonctions de Laguerre-Gauss pour les miroirs circulaires (cf.§ I-3-2-2-2)[14].

IV.6.1. LES RESULTATS DE FOX ET LI

La distribution du champ dans le résonateur de dimension fini n'est pas constante, par ce que, après plusieurs allers-retours dans la cavité, la diffraction diminue progressivement l'intensité aux bords des deux miroirs ; mais elle prend sa valeur maximum au centre des miroirs [53](figure IV-5).

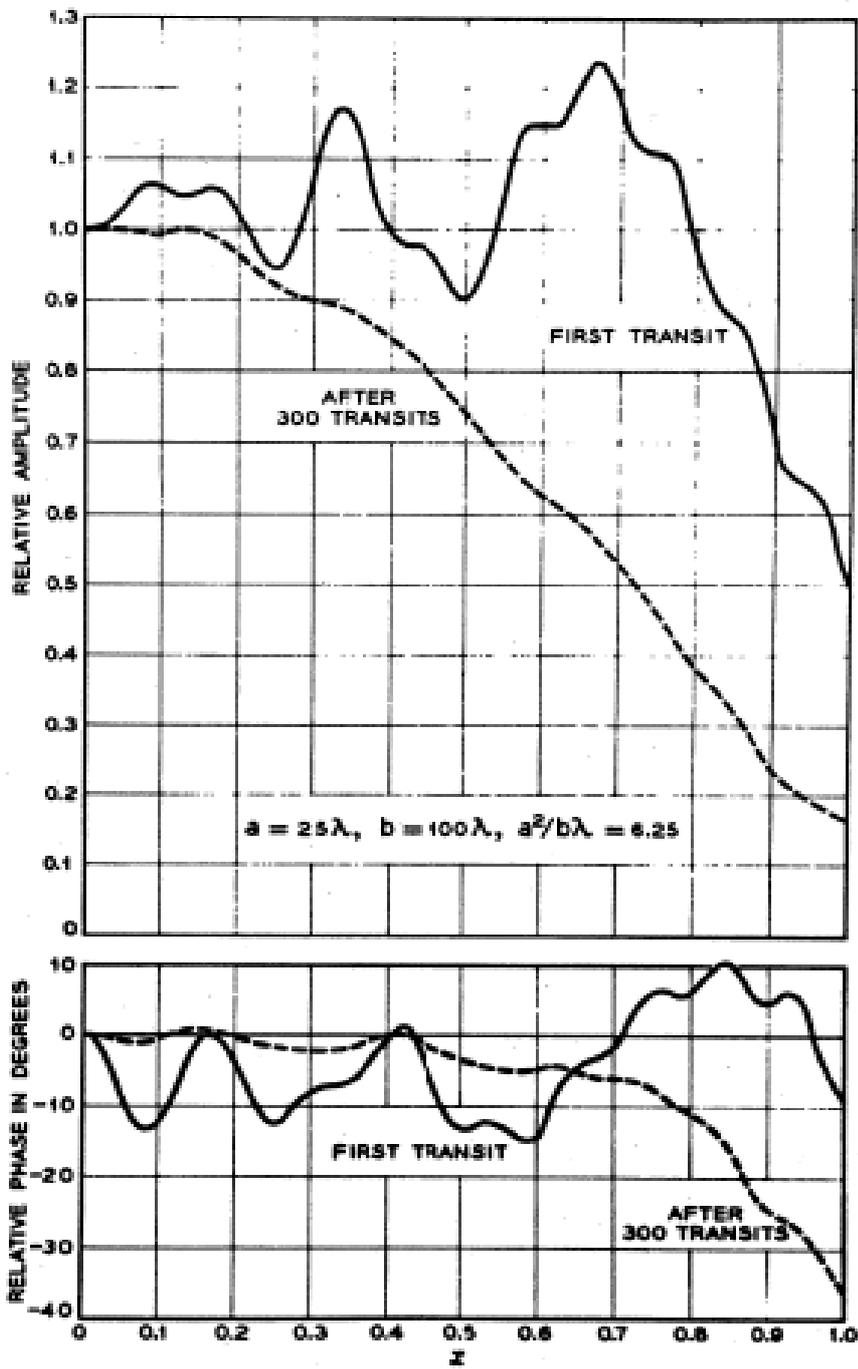
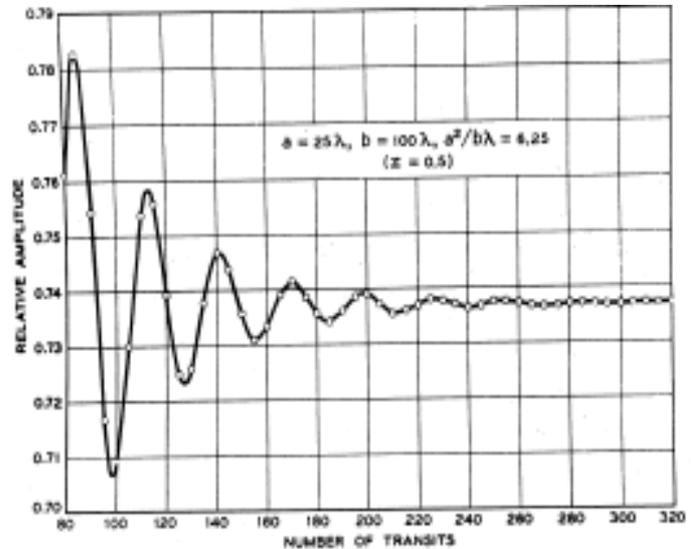


Figure (IV-6): La variation de l'amplitude du champ à $x=0.5$ en fonction de nombre de transit [53].



A partir de la courbe (figure IV-6), nous pouvons déterminer les pertes de diffractions et le déphasage du mode restant dans la cavité qui s'appelle le mode dominant.

IV.6.2. LES PERTES PAR DIFFRACTION ET LES DEPHASAGES

Si on trouve les solutions de l'équation intégrale (les fonctions propres $A(x, y)$), on peut calculer les valeurs propres de la cavité γ par:

$$\gamma = \frac{A_{q+1}}{A_{q+2}} \quad (\text{IV-27})$$

Et puis, nous pouvons calculer les pertes par diffraction et le déphasage, qui sont des quantités importantes pour déterminer le facteur de qualité Q et les fréquences de résonance des modes. Ces pertes sont la partie d'énergie perdue par un transit due par diffraction effectuée aux bords des miroirs. La relation qui permet de calculer les pertes par diffraction en fonction de la valeur propre est donnée par :

$$\alpha = 1 - |\gamma| \quad (\text{IV-28})$$

où γ sont les valeurs propres des équations intégrales.

Le déphasage est donné par la relation suivante :

$$\beta = \arg(\gamma) \quad (\text{IV-29})$$

IV.7. RESULTATS ET DISCUSSION

Pour simplifier les calculs, nous avons étudié un cas particulier, la cavité confocale symétrique. Cette cavité se compose de deux miroirs sphériques identiques ($a_1=a_2$) où d est la distance qui sépare les deux miroirs et elle est égale à leur rayon de courbure $R_1=R_2$. Pour la commodité des calculs nous avons supposé que ces miroirs sont rectangulaires. Nous avons déterminé les fonctions propres, qui sont les solutions de l'équation (IV-25). Après nous avons identifié les modes restant dans la cavité.

L'équation (IV-24) devient :

$$K(x_2, y_2; x_1, y_1) = \frac{ie^{-1kd}}{\lambda d} e^{ik(x_1x_2+y_1y_2)} \quad \text{(IV-30)}$$

Le noyau K est séparé en x et en y , ceci permet de chercher des solutions sous la forme suivante :

$$A(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{(IV-31)}$$

L'équation intégrale (IV-25) est séparée alors en deux équations :

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \int_{-a}^a e^{i\frac{k}{d}x_1x_2} A(x_1) dx_1 \\ g(y_2) &= \int_{-a}^a e^{i\frac{k}{d}y_1y_2} A(y_1) dy_1 \end{aligned} \quad \text{(IV-32)}$$

où l'amplitude de l'onde laser est donnée par la formule suivante :

$$A(x, y) = \frac{A0}{z} \exp(i\pi/2) \exp(-i2\pi v \left(\frac{z}{v} + \frac{1}{v} \frac{x^2 + y^2}{2z} \right)) \exp\left(\frac{-x^2 + y^2}{w(z)} \right) \quad \text{(IV-33)}$$

L'intensité dans ce cas est :

$$I(x, y) = |A(x, y)| = I0 \exp\left(\frac{-x^2 + y^2}{w(z)} \right) \quad \text{(IV-34)}$$

Appliquant la méthode de Fox et Li (cf. IV.5) pour résoudre les équations (IV-32), nous avons utilisé un programme de Fortran. Le calcul se fait sur une cavité confocale symétrique tel que :

- $a_1 = a_2 = 10cm$,
- $d = R_1 = R_2 = 15cm$,

- $x_1 = 0.1$.

Les résultats obtenus par cette méthode sont représentés dans la figure IV-7 :

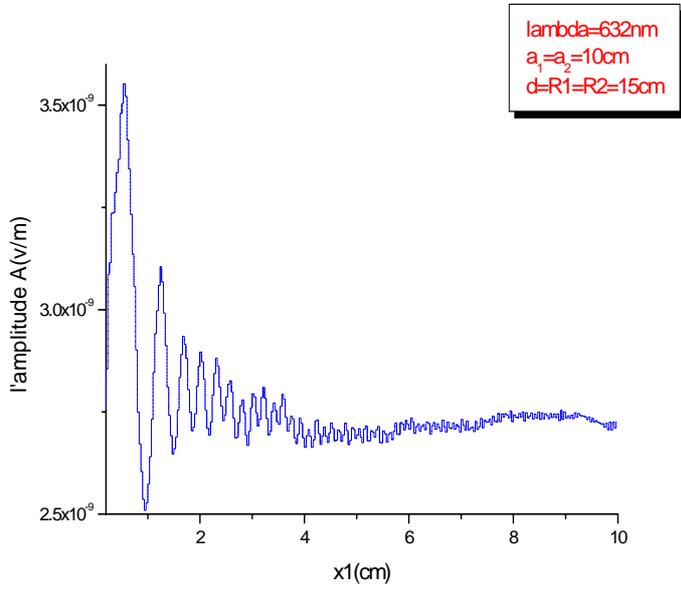


Figure IV-7 : La variation de l'amplitude dans une cavité confocale symétrique

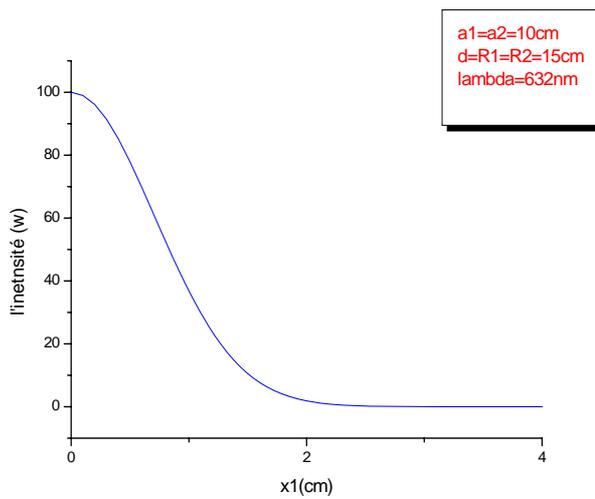


Figure IV-8 : La distribution de l'intensité après plusieurs allers-retours dans une cavité confocale.

La figure IV-7 représente la variation de l'amplitude de l'onde électromagnétique dans une cavité optique de deux miroirs M_1 et M_2 en fonction de la position x_1 du miroir M_1 , où l'amplitude du champ est considérée au début, c'est-à-dire au premier transit, et après plusieurs allers-retours, il décroît progressivement et converge vers une valeur constante ce qui exprime qu'il y a des pertes inévitables qui s'appellent les pertes de diffraction provoquées par les bords finis des miroirs. Donc les modes de la cavité souffrent de pertes qui sont plus élevées pour les modes d'ordre supérieur, ce qui explique l'atténuation rapide de ces modes après un grand nombre de transit, et ils sont plus faibles pour le mode fondamental qui exprime le mode restant dans la cavité.

La figure IV-8 représente la variation de l'intensité de l'onde en fonction de la position du miroir M_1 , on remarque la diminution de l'intensité avec l'augmentation du diamètre du miroir, elle est au maximum au centre du miroir et plus faible au bord de celle-ci, à cause des pertes par diffraction provoquées par les bords des deux miroirs comme il est mentionné précédemment.

On peut conclure que les résultats de la figure IV-7 et la figure IV-8 obtenus par notre calcul numérique sont similaires à ceux obtenus par Fox et Li [53] et par P.Muys, E.Vandamme [57].

Aujourd'hui, le laser ayant des usages multiples dans la plus part des domaines de la science et de la technologie, on le trouve dans l'industrie, la médecine, la recherche scientifique, les télécommunications, la technologie militaire et les arts, par ce que cette source couvre une grande partie du spectre électromagnétique, micro onde, infrarouge, visible, ultraviolet et aussi les rayons x. Le laser étant un oscillateur optique basé sur l'amplification d'un signal lumineux, il est composé de trois éléments essentiels, la cavité optique, le milieu amplificateur et les processus de pompage. La lumière laser diffère de celle issue d'autres sources classiques par ce qu'elle est, monochromatique, cohérente et directive. Ces propriétés sont des résultats de la cavité optique qui joue un rôle important dans l'amplification de la lumière. Elle prend deux formes, la cavité linéaire et la cavité en anneau. Dans notre travail nous avons basé une partie de notre étude sur les cavités en anneau entre autres, parce que cela manque dans la plupart des ouvrages et la comparaison avec les cavités simples était nécessaire.

Dans la première partie de notre travail nous nous sommes intéressés à l'étude de la cavité linéaire, constituée de deux miroirs en face, permettant de réinjecter une partie du faisceau laser sur l'entrée du milieu amplificateur, où les photons sont réfléchis par les miroirs de la cavité et peuvent traverser le milieu actif plusieurs fois et provoquent l'émission stimulée de plusieurs photons. Les ondes électromagnétiques se propageant à l'intérieur de la cavité linéaire interfèrent entre elles où elles peuvent établir les ondes stationnaires avec des longueurs d'ondes particulières et forment les modes de résonance de la cavité optique (TEM_{mnq}) qui sont de deux types : les modes longitudinaux et les modes transversaux qui sont la variation du champ dans les deux directions de propagation. Pour déterminer les modes propres de la cavité, on a utilisé plusieurs méthodes mais la plus évidente est celle qui utilise les solutions des équations de Maxwell, qui représentent les modes possibles dans la cavité. Dans les cavités ouvertes les modes souffrant de pertes qui résultent de la réflexion imparfaite des miroirs, de l'absorption ou de la diffusion de la lumière par le milieu amplificateur et aussi de la diffraction de l'onde électromagnétique aux bords des miroirs ont été considérés.

Pour décrire la propagation du rayon lumineux dans la cavité optique on a utilisé le formalisme des matrices de transfert appelé aussi matrice ABCD qui est utilisé pour calculer les paramètres du faisceau gaussien.

La stabilité de la cavité a été étudiée pour entretenir les ondes électromagnétiques, après plusieurs allers et retours entre les miroirs, surtout lorsque la propagation se fait près de l'axe de propagation.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié le milieu amplificateur avec son gain optique dans une cavité pour compenser les pertes de cette dernière. L'échange d'énergie entre la cavité et

les atomes du milieu amplificateur se traduit par les processus d'interaction l'absorption, l'émission spontanée et l'émission stimulée que nous avons étudiés en détail à travers les équations d'évolutions des populations. Dans le laser, l'émission stimulée est le processus le plus dominant pour amplifier la lumière, et pour obtenir cet effet il faut fournir au milieu amplificateur une énergie afin que les atomes ou les molécules soient dans un niveau excité et non dans un état fondamental; c'est l'inversion de population qui a été également étudiée suite à une excitation lumineuse due au pompage.

Le phénomène de "Holle Burning" spatial , phénomène qui apparaît dans une cavité linéaire où il y a deux ondes contrapropagatives qui interfèrent entre elles et créent des variations du gain dans le milieu amplificateur rendant l'émission laser multimode longitudinale a été étudié.

Pour s'affranchir du phénomène de "Holle Burning" et pour obtenir le fonctionnement monomode du laser, la méthode la plus largement utilisée est l'application de la cavité en anneau qui caractérise par la propagation de deux ondes progressives contrapropagatives dans celle-ci a fait l'objet d'une étude détaillée. On a introduit aussi des éléments sélectifs dans la cavité en anneau comme la diode optique qui composée de deux éléments, un rotateur de Faraday et une lame demi onde. D'autres méthodes comme le modulateur acousto-optique et le rétro injection par un miroir externe ou la diode optique à cause de son utilisation est simple ont été évoquées.

Dans le dernier chapitre, on a pris en considération les dimensions finies de la cavité optique que nous avons négligées dans les chapitres précédents, et nous avons fait le calcul numérique des équations intégrales de la cavité à deux miroirs. Dans notre calcul nous avons utilisé l'itération de Fox et Li, où nous avons retrouvé que la diffraction affaiblit progressivement l'intensité au bord des miroirs, et qu'elle est maximum au centre.

المخلص

إن الليزر له استعمالات متعددة في مجالات مختلفة لأنه يغطي قسما كبيرا من الطيف الكهرومغناطيسي .
و يتكون من ثلاث عناصر أساسية: الجوف البصري, الوسط المضخم, أساليب الضخ.
قي هذا العمل قمنا بدراسة:

1. الأجواف الرنانة الخطية ذات مرأتين متقابلتين تعمل بأموح مستقرة كالأنماط الطولية والعرضية. كما أن دراسة معادلة هالمولتز سمحت لنا بتحديد وسائط حزمة الليزر, وكذلك بدراسة استقرار الجوف. أيضا مكنتنا من دراسة طرق التفاعل بين المادة والإشعاع في الوسط المضخم.
- 2 . الأجواف الحلقية التي تتكون من أكثر من مرأتين التي تعمل بأموح تدرجية يستعمل في بعض أنواع الليزر بهدف حذف "Holle Burning". من أجل تخفيض الانقطة الخاص بانحناء المرأتين, والزوايا الساقطة وكذلك تخفيض استقطاب الشعاع بالانعكاس.
3. ان دراسة المعادلات التكاملية التابعة للجوف الخطي المتكون من مرأتين مستطيلتين حسب طريقة "Fox و Li" سمحت لنا بدراسة خسارة الشدة بالحيود في الجوف . ,اد سمح الحساب العددي بإيجاد الأنماط الغالبة

: الليزر, الجوف الخطي, الوسط المضخم, الجوف الحلقي, المعادلات التكاملية, الكلمات المفتاحية
معادلات الحيود.

Abstract

Laser has multiple uses in several fields because it covers large part of electromagnetic spectrum, it consists of three components: the optical cavity or resonators, the active medium and the pump process.

In this work we have studied:

1. The linear cavity with two functioning in standing wave such as the longitudinal and transversal modes. The study of Helmholtz equation has identified the parameters of laser beams, and the transfer matrix was used to study the stability of this cavity. Electromagnetic wave propagates in the cavity allows to study the mechanisms of interaction matter-radiation in the presence of the active medium. Rate equation describing pump systems have allows studying laser oscillation.

2. Ring cavity operating in travelling wave in some lasers in order to eliminate the “Hole Burning” effect, astigmatism characterizing the slope of the mirrors, to decrease the angle of incidence and to reduce the polarization of the beam by reflection.

3. The study of integral equation of the cavity of rectangular mirrors by the “Fox and Li” method for study the loss diffraction of intensity. This numerical calculation allows to find the prevailing mode.

Key word: Laser, Linear cavity, the active medium, Ring cavity, Integral equation, diffraction integral.

Résumé

Le laser a des usages multiples dans plusieurs domaines parce qu'il couvre une grande partie du spectre électromagnétique, il est constitué de trois éléments essentiels: la cavité optique ou résonateur, le milieu amplificateur et le processus de pompage.

Dans ce travail nous avons étudié :

1. Les cavités résonnantes linéaires à deux miroirs fonctionnant en onde stationnaire tel que les modes longitudinaux et transversaux. L'étude de l'équation d'Helmholtz a permis de déterminer les paramètres du faisceau laser et les matrices de transfert ont permis d'étudier surtout la stabilité de ces cavités. L'onde électromagnétique qui se propage dans la cavité permet d'étudier les mécanismes d'interaction rayonnement-matière en présence d'un milieu amplificateur. Les équations d'évolution des populations décrivant les systèmes pompés ont permis d'étudier l'oscillation laser.
2. Les cavités en anneau fonctionnant en ondes progressives sont utilisées dans certains lasers dans le but d'éliminer l'effet de « Hole Burning » pour diminuer l'astigmatisme caractérisant l'inclinaison des miroirs pour réduire les angles d'incidence et pour diminuer la polarisation du faisceau par réflexion.
3. L'étude de l'équation intégrale de la cavité à deux miroirs rectangulaires par la méthode de « Fox et Li » dans le but d'étudier les pertes d'intensité par diffraction dans la cavité. Ce calcul numérique permet de retrouver les modes prédominants.

Mots clés : Laser, cavité linéaire, le milieu actif, la cavité en anneau, équations intégrales, l'intégrale de diffraction.

REFERENCE

- [1] E.Gratton and M.J. Vandeven. *Handbook of Biological Confocal Microscopy* .chapter 5, New York (2006).
- [2] [http:// www.wikipedia.org/wiki/laser cavity](http://www.wikipedia.org/wiki/laser_cavity)
- [3] F. Hartmann, *Les lasers*, Université de France, (1977).
- [4] *Laser*. Université de Louis Pasteur .*Préparation de l'agrégation* ,(2003).
- [5] H. Norman. W. Horst, *Laser resonator and Beam propagation : Fundamentals advanced, concepts and applications*, (2005).
- [6] [http:// www.lkb.ens.fr/recherché/atfroids/tutorial /page/5/le laser](http://www.lkb.ens.fr/recherché/atfroids/tutorial/page/5/le_laser).
- [7] [http:// www.phytem.ens-cahan.fr](http://www.phytem.ens-cahan.fr).
- [8] [http:// www.mrl.colombia.edu](http://www.mrl.colombia.edu).
- [9] [http:// www.member.lycos.fr/ds /soudage](http://www.member.lycos.fr/ds/soudage).
- [10] M. Kuznetsov, M. Stern and J. Coppeta, *Single transverse mode optical resonators*, Optics Express, (2005).
- [11] [http:// www.espci.fr /laser en kit](http://www.espci.fr/laser_en_kit).
- [12] [http:// www.laser.physics.sunysb.edu](http://www.laser.physics.sunysb.edu) .
- [13] S. Gigan., Thèse de Doctorat, Université de Paris VI France (2004).
- [14] H. Kogelink and T. Li, *Laser Beams and Resonators*, Applied Optics (1966).
- [15] C. Mas, Thèse de Doctorat, Université de Paris 6 France (2003).
- [16] [http:// www.cours.polymt.ca](http://www.cours.polymt.ca) .
- [17] D. Dangoise, D. Equin et V. Zehlé, *Les Lasers : Cours et Exercices* (2^{ème} édition).
- [18] P. A. Bélanger, *Faisceau Gaussien et Résonateur*, JEEE journal of selected topic in quantum Electrics,vol 06,N°06 (2000).
- [19] P.A. Bélanger, *Beam propagation and the ABCD ray matrices*, Optics Letters, vol.16 N°.4 (1991).
- [20] G. Puentes, A. Aiello and J. P. Woerdman, *Ray Splitting in Paraxial Optical Cavities*, Physical Review (2004).
- [21] H. Aranda and al, *Theory of Unstable Bessel Resonator*, Optics Society of America, Vol. 22, N°. 9 (2005).
- [22] J. T. Verdeyen, *Laser Electronics* (1995) .
- [23] J. Alda, *Laser and Gaussien Beam Propagations and Transformation*, University Complutense of Madrid, Spain (2003).
- [24] A. E. Siegman , *Unstable Optical Resonators for Laser Applications*, JEEE (1965) .

- [25] B. Gagnac et j. P. Faroux, *Lasers*, (2002).
- [26] A. Aspect et C. Fabre, *Optique Quantique : lasers*, Tome I (2005).
- [27] T. Chartier, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, France (1997).
- [28] L. Petit, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, (2002).
- [29] C. Hirlimann, *Elément de Physique Laser*, Cours donnés à JIJEL, ALGERIE, dans le cadre de l'école de physique et de chimie (2004).
- [30] F. Brunet, *Laser à Fibre de Verre fluoré dopée à l'Erbium émettant à 1'66 Pm*, Faculté de Science et Génie, Université de Laval (2000).
- [31] M. Benguedoure (Diabaoui), Université Mentouri Constantine,(2003).
- [32] H. Maillat, *Les Lasers, Principes et Techniques d'Application*, (1989).
- [33] [http:// www.univ-st-etienne.fr](http://www.univ-st-etienne.fr) .
- [34] . J. R. Lalanne, A. Ducasse et S. Kielich, *Interaction Laser Moléculaire* (1994).
- [35] Z. Benguedoure, *Danger de Laser*, Université Mentouri Constantine.
- [36]. B. De Cremoux, *Les lasers et leurs applications scientifique et médicales*.
[http:// www.bibscience.org](http://www.bibscience.org) .
- [37] [http:// www.mi.laser.com](http://www.mi.laser.com) .
- [38] M. Jacquemet, Université de Paris-Sud XI France (2005).
- [40] M. Joffre, DEA de Physique Quantique *Optique non-linéaire*, Ecole Polytechnique France (2003).
- [41] D. F. Grevey, K. F. Badawi, T. P. Boquillon, B. Tasine et G. Jacrot , *Etude des Caractéristiques d'une Cavité Laser en X de forte puissance* , J. Phys.III France 2 (1992).
- [42] G. Krenz, S. salama, C. Zimmermann and P. W. courteille, *Controlling Mode locking in optical ring Cavities*, Appl. phys (2006).
- [43] Y. wang, N. Saito and H. Tashio, *Unidirectionnel Operation of ring laser by means of anisotropic acoustooptique Devic*, Optics Communication (2002).
- [44] N. Vansteenkiste, Thèse de Doctorat, Université de Paris sud (1989).
- [45] D. Grand-Clement, Université de Paris 6, France (1987).
- [46] Yann Louyer, Thèse de Doctorat en Physique de Science, Université de Paris, France (2003).
- [47] U. Schreiber, M. Schneider, C.H. Rowe, G.E. Stedman and W. Schuter , *"Aspects of ring laser as local earth rotation sensors"* , Kluwer Academic Publishers (2002).
- [48] T. V. Radina and A. F. Stankevich, *Non reciprocity and shift of the zero point in laser gyroscope*, Optics and spectroscopy (2003).

- [49] J. Chao, B. Yuanying and Y. Wang "Simulation of Optical field in Laser resonators cavity by Eigenvector Methode " ,Optics and Laser Technology (2004).
- [50] M. Guizar-Sicairos and J. Gutierrez-Vega, *Coupled mode competition in unstable resonators using the exact cavity equations of motion with dynamic gain*, Journal of Optics B : Quantum and semi classical optics (2005) .
- [51] . C. A. Dimarzio, *Moderns Optics*, Northeasten University (2002).
- [53] A. G. Fox and T. Li, *Resonant modes in maser interferometer*, Bell. Sys. Tech (1961).
- [54] A. G. Fox and T. Li, *Effect of Gain Saturation on the Oscillating modes of optical masers*, JEEE journal of Quantum Electronics (1966) .
- [55] J. Yoo, Y. U. Jeong, B. C. Lee and Y. J. Rhee “Numerical Simulation of Laser Resonators ” (2003).
- [56] A.E.Siegman. "*Laser Beams and Resonators* ": Beyond the 1960s, JEE.journal of special topics quantum electronics (1999).
- [57] P.Muys, E.Vandamme .*Resonators supporting Bessel Beams*. VDM Laser optics N.V.
- [58] *Différents Types de Lasers*, [http:// www.eurserveur.msa-lyon.fr/wwwEu/les cours/physique](http://www.eurserveur.msa-lyon.fr/wwwEu/les_cours/physique).
- [59] J. M. Ortega. *Développements récents des Lasers à Electrons Libres*, laboratoire pour l'utilisation du rayonnement électromagnétique,CNRS/Université Paris Sud.
- [60] B. A. Lengyel. *Introduction à La Physique de Laser*, (1968).
- [61] P. Chaix. *Théorie des lasers à électrons libres les impulsions courtes*.