

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:.....

Série:.....

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE
SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME

Quelques Problèmes Dans
La Géométrie Non Commutative

Par

Nabil BAUCHE

Soutenu le : / /2008

Devant le jury :

<u>Président :</u>	H. Aissaoui	M.C. Univ. Mentouri Constantine
<u>Rapporteur :</u>	N. Mebarki	Prof. Univ. Mentouri Constantine
<u>Examineurs :</u>	T. Boudjedaa	Prof. Univ. Jijel
	N. Tilbi	M.C. Univ. Jijel

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique (LPMPS) de Constantine.

Mes remerciements vont tout d'abord à Dieu tout puissant pour la volonté, la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur Dr. Noureddine Mebarki, professeur à l'université de Constantine, pour m'avoir confié ce sujet et pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je remercie également Dr. A. Benslama, professeur à l'université de Constantine, qui a collaboré dans les différentes étapes de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont à Dr. H. Aissaoui maître de conférence à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie, également et sincèrement Dr. A. Tilbi, maître de conférence à l'université de Jijel, et Dr. T. Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger, Dr. N. Boucerredj, maître de conférence à l'université de Annaba.

J'exprime ma gratitude à tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin dans la recherche bibliographique. Je remercie en particulier Dr. A. Benslama professeur à l'université de Constantine, et Dr. T. Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel, et Mr. B. Djamil, maître de conférence à l'université de Jijel, Dr. A. Boutago et Dr. A. Ahriche maîtres de conférence à l'université de Jijel, qui ont accepté de répondre à mes questions.

Je remercie également tous les enseignants de la post-graduation de physique théorique 2005/2006 ainsi que mes collègues étudiants de la promotion.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Quelques considérations élémentaires	6
2.1	Hypothèses d'étude	7
2.2	La diffusion d'onde plane et le paquet d'onde	7
2.2.1	L'amplitude de diffusion et la section efficace	9
2.2.2	La diffusion en ondes partielles	10
2.2.3	Les fonctions sphériques de Bessel	12
2.2.4	La relation entre les ondes sphériques libres et les ondes planes	13
3	Diffusion par un potentiel central et la section efficace	15
3.1	La méthode des ondes partielles	15
3.2	La méthode de déphasage	17
3.2.1	La relation entre déphasage δ_l et l'amplitude d'onde partielle C_l	19
3.2.2	Les quantités diffusées en termes de déphasage	20
3.2.3	Les quantités diffusées pour la sphère dure	20
3.2.4	Le théorème optique via le déphasage	22
3.2.5	L'approximation WKB et le déphasage δ_l	23
3.3	Représentation intégrale pour le problème de diffusion	24
3.3.1	La solution itérative pour l'équation intégrale	26
3.3.2	Représentation intégrale de l'amplitude de diffusion	27
3.3.3	L'approximation de <i>Born</i>	28
4	L'approximation de <i>Born</i>	30
4.1	Diffusion de <i>Rutherford</i>	32
4.1.1	Source de <i>Coulomb</i> ponctuelle et le potentiel de <i>Yukawa</i>	32

4.1.2	Le facteur de forme	34
4.2	L'expansion de <i>Born</i>	35
4.3	Validité de l'approximation de <i>Born</i>	37
5	La diffusion dans le cadre de la géométrie non commutatif	40
5.1	Décalage de <i>Bopp</i>	41
5.2	La méthode des ondes partielles dans un espace non commutatif . .	42
5.2.1	La dérivée logarithmique L_l et la conservation du nombre de particules	43
5.2.2	L'application pour la sphère dure	45
5.3	L'approximation de Born dans l'espace non commutatif	47
5.3.1	Première méthode	47
5.3.2	Deuxième méthode	52
5.4	Les applications	56
5.4.1	Les applications de la première méthode	56
5.4.2	Les applications de la deuxième méthode	57
5.5	L'onde désordonnée dans l'approximation de <i>Born</i>	58
5.6	la section efficace et dans l'approximation $W. K. B$ dans un espace non commutatif	60
6	Conclusion	65
	Annexe	67
	Bibliographie	70

Chapitre 1

Introduction générale

La géométrie de notre espace pose problème en physique car il n'en existe pas une description unique. Dans l'esprit de la relativité générale, l'espace et le temps forment un objet quadridimensionnel dont la courbure est donnée par la distribution de masse. Quand un objet massif se déplace, la courbure change ; la géométrie est un objet dynamique. Au contraire la mécanique quantique, et plus généralement la théorie quantique des champs, suppose la donnée a priori d'un espace dans lequel évoluent des champs. Pour reprendre une image de la théorie des champs prend l'espace pour scène, alors qu'en relativité la scène elle-même participe à l'action. La contradiction est d'autant plus flagrante que chacune de ces théories est validée et vérifiée avec précision dans son domaine d'application : la gravitation pour la relativité ; les interactions électromagnétiques, faibles et fortes pour la théorie quantique des champs. Cette double approche de la géométrie n'est pas forcément scandaleuse. Rien n'interdit à deux descriptions de cohabiter, tant que la cohabitation est harmonieuse. Mais les phénomènes qui relèvent à la fois de la mécanique quantique et de la gravitation, comme le tout d'ébut de l'univers dans la théorie du big-bang, ou l'effondrement gravitationnel d'une étoile passée une certaine échelle, brisent cette harmonie. L'hypothèse répandue au jour d'aujourd'hui est, qu'à tout petite échelle, aucune des descriptions géométriques classiques n'est valable. La structure géométrique intime de l'espace-temps n'est pas connue. Et la mécanique quantique suggère que l'hypothèse du continu n'est pas justifiée. On estime que cette structure intime devrait être visible à des échelles de l'ordre de 10^{-33} cm. C'est la longueur de *Planck*. La géométrie non commutative, en étendant les concepts géométriques

usuels de manière compatible à la fois avec la relativité générale et avec la mécanique quantique, propose des outils mathématiques pour appréhender la géométrie à cette échelle. Pour l'heure bien entendu, aucune théorie ne décrit l'univers à cet ordre de précision. Parmi les candidats au titre de théorie de la gravitation quantique, aucun n'a jusqu'à présent franchi avec succès le cap de la vérification expérimentale. Une approche naturelle consiste à quantifier le champ gravitationnel comme les autres champs, mais la théorie obtenue est non renormalisable, c'est à dire sans intérêt physique. Néanmoins cette optique, amener la relativité à la théorie des champs, reste valable et suscite des travaux considérables qui, dans les raffinements les plus récents, aboutissent à la théorie des cordes et la supersymétrie. L'unification est obtenue mais aux prix d'hypothèses physiques fortes : l'espace temps est à $D = 11$ dimensions et il existe deux fois plus de particules que celles connues jusqu'à présent (à chaque particule connue correspond un partenaire supersymétrique). Pour l'instant, aucune de ces hypothèses n'a été vérifiée. Cette approche de l'unification considère comme secondaire la nature proprement géométrique de la relativité générale. Pour d'autres au contraire le caractère dynamique de la géométrie constitue l'apport essentiel de la relativité générale et toute la question est, précisément, d'adapter cette dynamique géométrique au contexte quantique. En clair, il s'agit d'affranchir la théorie quantique des champs d'un espace donné a priori. On parle de théorie des champs telle la "loop quantum gravity". Malheureusement cette théorie pour l'instant ne propose pas de tests expérimentaux. La foi en "l'unification par la géométrie" se heurte à notre mauvaise compréhension de la théorie des champs. En effet, autant la relativité générale a une interprétation géométrique simple, autant ce que dit la mécanique quantique de la géométrie nécessite des éclaircissements. Comment définir un point de l'espace en mécanique quantique ? Ou plus exactement comment donner une signification physique à la notion de point ? Une manière simple consiste à appeler point l'endroit occupé par une particule à un instant donné. Mais à supposer que l'on connaisse avec précision un point, les relations d'incertitude de *Heisenberg* indiquent que l'on ne peut connaître avec précision la position de la particule à un autre instant. Autrement dit, si une particule permet de définir un point, elle ne permet pas d'en définir un autre. Bien sur, on peut considérer plusieurs particules au même instant dont on connaît les positions avec précision, et on définit ainsi plusieurs points. Mais pour savoir comment ces

points s'arrangent les uns par rapport aux autres, pour faire la géométrie, il faut pouvoir mesurer des distances. Pour ce faire, il faut qu'un même objet, par exemple l'une des particules, occupe à un instant donné le point a , et à un autre instant le point b . Connaissant sa vitesse, on mesure son temps de vol et l'on en déduit la distance. Mais plus on saura avec précision que la particule occupe le point a à l'instant t , moins on pourra être sûr qu'elle occupe le point b à l'instant suivant. La mécanique quantique suggère de raisonner sur des valeurs moyennes. Le point est alors défini comme la valeur moyenne à un instant donné de l'observable position appliquée sur l'état représentant la particule. On opère ainsi un changement de point de vue important : le point n'est plus défini en tant qu'objet abstrait de la géométrie (tel qu'on l'apprend à l'école : "un point n'a pas d'épaisseur, une ligne est un ensemble infini de points"), c'est un objet algébrique, la valeur moyenne d'un opérateur sur un état. Or les mathématiciens savent traduire en langage algébrique les propriétés géométriques d'un espace. Plus précisément, les propriétés géométriques (essentiellement la topologie, la mesure et la métrique) d'un espace ont une traduction algébrique dans l'ensemble des fonctions, à valeur complexe, définies sur cet espace. La géométrie non commutative est une adaptation du dictionnaire qui permet de passer "d'algèbre commutative" à "espace" en remplaçant, partout où il y a lieu, le mot commutatif par non commutatif. Évidemment les choses ne sont pas si simples. Abandonner la commutativité implique de profonds changements dans les définitions du dictionnaire, et requiert même la création de notions nouvelles. L'investissement mathématique est lourd mais le jeu en vaut la chandelle car on peut alors accéder à de nouveaux types "d'espaces non commutatifs" ou des phénomènes physiques trouvent une interprétation géométrique qu'ils n'avaient pas jusque là. Par exemple le champ de *Higgs* apparaît comme le coefficient d'une métrique dans une dimension supplémentaire, discrète, qui rend compte des degrés de liberté internes (spin ou isospin) d'une particule.

Le but de ce mémoire, et revoir la théorie des collisions dans un espace-temps non commutatif et dans le cadre de la géométrie non commutative. On montrera qu'il y'a plusieurs approches et que le formalisme des opérateurs non commutatifs peut se réduire au formalisme ordinaire avec un produit de *Moyal*. On considèrera aussi quelques applications pour illustrer ce phénomène de diffusion non commutatif.

Chapitre 2

Quelques considérations élémentaires

Expérimentalement, ils existent plusieurs phénomènes physiques des interactions entre deux systèmes quantiques. C'est le cas, en particulier, des expériences réalisées avec un faisceau de particules A envoyées sur une cible constituée de particules B . L'étude quantique consiste à déterminer les interactions entre les particules A et B lorsqu'elles s'approchent. Une expérience célèbre de ce type est celle effectuée par *Rutherford*, en 1911, qui a permis de mettre en évidence l'existence du noyau atomique et de mesurer sa charge. Le faisceau des particules A était constitué de noyaux d'hélium He^{++} , appelés particules α , et la cible formée d'une très mince feuille d'or. Passant au voisinage des noyaux d'or, les particules α sont plus en plus déviées de leur trajectoire initiale et un détecteur D permet de compter le nombre de particules α arrivant dans une direction θ donnée.

De manière générale, les interactions entre deux particules A et B sont appelées des collisions. Quand l'état des particules ne change pas après l'interaction et leur énergie cinétique totale reste la même avant et après la collision (seulement leurs trajectoires sont modifiées) et c'est le cas par exemple des particules α dans l'expérience de *Rutherford* ; on dit que les particules diffusent et l'interaction est élastique. Par contre, si la collision est inélastique, l'état interne des particules est modifié. C'est le cas, par exemple, de l'excitation et de l'ionisation des atomes, et la désintégration des noyaux.

L'état du système après la collision peut donc comporter de nouvelles particules [1].

2.1 Hypothèses d'étude

On se limite à l'étude de la diffusion élastique des particules A sur des particules immobiles B , on suppose que :

- Les interactions entre les particules A et B peuvent être décrites par une énergie potentielle $V(r)$ ne dépendant que de la position relative $r = r_A - r_B$ entre les deux particules, ainsi on ramène l'étude de la diffusion dans le référentiel du centre de masse, d'une particule unique de masse réduite par le potentiel $V(r)$.

- Les particules A et B seront supposées sans spin, ce qui permet de simplifier considérablement l'étude théorique (cela ne signifie pas que le spin ne joue pas un rôle lors des diffusions élastiques).

- La cible est supposée suffisamment mince, de telle sorte qu'une particule A n'interagit qu'avec une seule particule B lors de la traversée de la cible.

- L'extension des paquets d'ondes associés aux particules incidentes A , est petite vis-à-vis de la distance moyenne entre les particules B de la cible. Ceci conduit à négliger les effets de cohérence entre les ondes diffusées par les particules B [2].

2.2 La diffusion d'onde plane et le paquet d'onde

L'équation de *Schrödinger* décrivant l'évolution d'une particule sous l'action d'un potentiel $V(r)$ et ayant une énergie E bien définie (état stationnaire) est donnée par :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = E \Psi(r, t). \quad (2.1)$$

Pour calculer la fonction d'onde $\Psi(r, t)$, on utilise la méthode de séparation des variables. On pose $\Psi(r, t)$ sous la forme suivante :

$$\Psi(r, t) = \phi(r) \chi(t).$$

Après un simple calcul, on trouve :

$$\Psi(r, t) = \phi(r) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right),$$

où $\phi(r)$ est la solution de l'équation aux valeurs propres :

$$H \phi(r) = E \phi(r),$$

et H est l'Hamiltonien avec l'expression :

$$H = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(r) \right],$$

avec μ est la masse réduite. Il est à noter que l'équation aux valeurs propres peut prendre la forme :

$$\left[\Delta + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right] \phi(r) = 0, \quad (2.2)$$

où $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ et représente l'énergie cinétique de la particule incidente avant qu'elle aborde la zone d'action du potentiel $V(r)$. Considérant maintenant une onde plane de la forme $\exp(i k.r)$ qui traverse la région d'action du potentiel $V(r)$ dans un certain interval $[-a, a]$. Généralement, l'onde incidente en traversant le potentiel $V(r)$, sera diffusée. Elle n'est pas donc plane mais ressemble à une onde sphérique de la forme $\sim \frac{\exp(i k.r)}{r}$. En faisant une analogie avec l'optique ondulatoire, on comprend que l'onde diffusée doit avoir pour r grand, les caractéristiques suivantes :

- Dans une direction donnée (θ, φ) , sa dépendance radiale doit être de la forme $\sim \frac{\exp(i k.r)}{r}$. En réalité c'est une onde sortante de même énergie que l'onde incidente mais avec un facteur $\frac{1}{r}$ l'équation (2.2). L'équation aux valeurs propres pour r grand a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left[\Delta_{r\theta\varphi} + k^2 \right] \left(\frac{\exp(i k.r)}{r} \right) &= 0, \text{ pour } r \gg r_0 \\ \left[\Delta_r + k^2 + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \right] \left[\frac{\exp(i k.r)}{r} \right] &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \left[\frac{\exp(i k.r)}{r} \right] &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\Delta_{r\theta\varphi} = \left[\Delta_r + k^2 + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \right],$$

et

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

- La diffusion n'étant pas en général isotrope et l'amplitude d'onde diffusée doit contenir un facteur dépendant des variables angulaires et noté $f(\theta, \varphi)$. Finalement, l'état stationnaire de diffusion $\Psi(r)$ est par définition la solution de l'équation (2.2) dans le comportement asymptotique est de la forme suivante :

$$\Psi(r) = A \left[\exp(i k.r) + f(\hat{r}) \frac{\exp(i k.r)}{r} \right] (r \gg a). \quad (2.3)$$

La solution $\Psi(r)$ de la forme donnée par l'équation (2.3) représente une superposition d'une onde plane dans la direction \hat{k} , et d'une onde divergente centrée autour de $r = 0$. C'est une solution stationnaire de l'équation (2.2) de *Schrödinger*. Si on trouve une solution de l'équation (2.2) et qui satisfait la condition limite (2.3) quand r est grand, on peut en principe solutionner le problème de diffusion. On remarque que :

- La partie sphérique a le même k (nombre d'onde) que l'onde incidente, parce que le potentiel tend vers zéro quand r est grand ($r \gg a$), donc l'énergie des particules incidentes égale à l'énergie des particules diffusées.
- La fonction $f(\hat{r})$ qui est définie par l'équation (2.3) à une dimension de longueur.

2.2.1 L'amplitude de diffusion et la section efficace

Soit (oz) la direction le long de laquelle arrivent les particules incidentes, le potentiel $V(r)$ est localisé autour de l'origine 0 des coordonnées.

On note f_i le flux des particules du faisceau incident, c'est-à-dire le nombre de particules traversant par unité de temps une surface unité perpendiculaire à (oz) qui est supposée beaucoup plus large que la zone d'action du potentiel $V(r)$. Loin de cette zone d'action, on place un détecteur D mesurant le nombre dn de particules diffusées par unité de temps dans un élément d'angle solide $d\Omega$, centré autour de la direction d'angles (θ, φ) . Le nombre dn est proportionnel à f_i et à $d\Omega$; le coefficient de proportionnalité $\sigma(\theta, \varphi)$ est similaire à une surface et il est appelé section efficace différentielle de diffusion dans la direction (θ, φ) [2].

C'est la quantité qui doit être déterminée dans toutes les expériences de diffusion, et son importance est capitale. On définit également la section efficace totale de

diffusion, notée σ_{tot} , comme l'intégrale sur tout l'angle solide de la section efficace différentielle $\sigma(\theta, \varphi)$:

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (2.4)$$

Il est à noter que :

- On a $dn = f_i \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$ les dimensions de dn et f_i sont respectivement T^{-1} et $(L^2 T)^{-1}$.

- On exprime le plus souvent les sections efficaces en barns ($1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$).

- La section efficace différentielle $\sigma(\theta, \varphi)$ est égale au carré de l'amplitude de diffusion $f(\theta, \varphi)$ (voir l'annexe).

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (2.5)$$

Donc la section efficace totale prend la forme suivante :

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (2.6)$$

2.2.2 La diffusion en ondes partielles

La méthode de la diffusion en ondes partielles est une technique particulière pour simplifier les calculs de l'amplitude de diffusion surtout quand le potentiel est sphérique et symétrique $V(\vec{r}) = V(r)$. Elle est une décomposition de la fonction d'onde $\Psi(r)$ en harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$, qui sont orthogonales et fonctions propres du carré du moment cinétique total L^2 et la projection du moment cinétique suivant l'axe (oz) L_z . On peut écrire :

$$\Psi(r) = \sum_{l,m} \frac{U_{l,m}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (2.7)$$

$$L^2 Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (2.8)$$

$$L_z Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \hbar m_z Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (2.9)$$

$$\int Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{p,q}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{lp} \delta_{mq}, \quad (2.10)$$

(où l et m_z sont des nombres quantiques associés aux opérateurs L^2 et L_z respectivement et $U_{l,m}(r)$ est une fonction ne dépendant que de r). Avec cette décomposition,

l'équation de *Schrödinger* est très facile à solutionner par rapport à l'équation originale. Si la fonction d'onde diffusée est de la forme (2.7), l'équation de *Schrödinger* (2.2) se réduit à :

$$\frac{d^2}{dr^2}U_{l,m}(r) + \left[k^2 - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U_{l,m}(r) = 0. \quad (2.11)$$

On suppose quand $r \gg a$, le potentiel $V(r)$ tant vers zéro plus rapidement que r^{-2} . Donc la forme asymptotique de l'équation (2.11) est :

$$U_{l,m}''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}U_{l,m}(r) + k^2U_{l,m}(r) \simeq 0, \quad (2.12)$$

avec $U_{l,m}''(r) \equiv \frac{d^2}{dr^2}U_{l,m}(r)$.

La solution générale de l'équation (2.12) est une combinaison linéaire des fonctions sphériques de *Hankel* :

$$\frac{U_{l,m}(r)}{r} = A_{l,m}h_l^{(1)}(kr) + B_{l,m}h_l^{(2)}(kr). \quad (2.13)$$

On remarque qu'il y a deux régions asymptotiques :

- La première correspond à éliminer $V(r)$ par rapport au terme $l(l+1)r^{-2}$.
- La deuxième correspond à éliminer aussi le terme $l(l+1)r^{-2}$

Si le potentiel $V(r)$ ne tend pas très rapidement vers zéro par rapport au terme $l(l+1)r^{-2}$, on ne peut pas parler d'une forme asymptotique des fonctions de *Bessel*. Quand r est suffisamment grand l'équation (2.11) devient :

$$U_{l,m}'' + k^2U_{l,m} = 0. \quad (2.14)$$

La solution de cette équation est une combinaison linéaire de $\exp(\pm ik.r)$.

2.2.3 Les fonctions sphériques de Bessel

L'équation radiale pour les ondes libres ($V(r) = 0$) $\Psi(\vec{r}) = \Psi_{k,l,m}^{(0)}(r)$ à la forme suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l^{(0)}(r) = ER_l^{(0)}(r), \quad (2.15)$$

où $\Psi_{k,l,m}^{(0)}(r) = R_{k,l}^{(0)}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$. Les ondes sphériques libres $\Psi_{k,l,m}^{(0)}(r)$ sont des fonctions propres communes à H_0, L^2 et L_Z . Où H_0 est l'hamiltonien libre (H_0, L^2 et L_Z forment un E. C. O. C.) [2].

En faisant le changement de variable suivant :

$$Z = kr \Rightarrow \frac{d}{dz} = k \frac{d}{dr} \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} = k^2 \frac{d^2}{dr^2} / k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E,$$

et en remplaçant dans l'équation (2.15), on obtient :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] R_l^{(0)}(z) = 0. \quad (2.16)$$

C'est l'équation de *Bessel* sphérique d'ordre l et elle admet deux solutions linéairements indépendantes [3]:

- L'une est la fonction de *Bessel* sphérique $J_l(z)$, définie par [3], [4] :

$$J_l(z) = (-1)^l (z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \left(\frac{\sin z}{z} \right), \quad (2.17)$$

avec

$$J_0(z) = \frac{\sin z}{z}, J_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}, J_2(z) = \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin z - \frac{3 \cos z}{z^2},$$

et

$$J_l(z) \simeq \frac{z^l}{(2l+1)!!}, \quad J_l(z) \simeq \frac{1}{z} \sin \left(z - l \frac{\pi}{2} \right).$$

$$z \longrightarrow 0 \quad z \longrightarrow \infty$$

• La deuxième c'est la fonction de *Neumann* sphérique $N_l(z)$, définie par [3], [4] :

$$N_l(z) = (-1)^l (z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \left(-\frac{\cos z}{z} \right), \quad (2.18)$$

avec

$$N_0(z) = \left(-\frac{\cos z}{z} \right), N_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}, N_2(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z^3} \right) \cos z - \frac{3 \sin z}{z^3},$$

et

$$\begin{aligned} N_l(z) &\simeq \frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}}, & N_l(z) &\simeq \frac{1}{z} \cos\left(z - l \frac{\pi}{2}\right). \\ Z &\longrightarrow 0 & Z &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on utilise les fonctions sphériques de *Hankel* $h_l^{(1)}(z)$ définies par [3], [4] :

$$h_l^{(1)}(z) = J_l(z) + i N_l(z) = (-i) (-1)^l (z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \left(\frac{\exp z}{z} \right), \quad (2.19)$$

avec

$$h_0^{(1)}(z) = \frac{1}{i z} \exp iz, h_1^{(1)}(z) = \left(-\frac{1}{z} - \frac{i}{z^2} \right) \exp iz, h_2^{(1)}(z) = \left(\frac{i}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{3i}{z^3} \right) \exp iz.$$

Il est à noter que :

• La forme asymptotique des fonctions de *Hankel* quand z tant vers l'infinie est :

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(z) &\simeq \frac{\exp iz}{i^{l+1} z} \left(1 + o\left(z^{-1}\right) \right). \\ z &\longrightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.20)$$

• $h_l^{(2)}(z) = \left[h_l^{(1)}(z) \right]^*$ dénote le complexe conjugué de $h_l^{(1)}(z)$.

2.2.4 La relation entre les ondes sphériques libres et les ondes planes

On considère deux bases distinctes d'états propres de H_0 (l'Hamiltonien libre)

[2] :

• Les ondes planes $\exp(i k \cdot r)$ sont des fonctions propres des trois composantes de l'impulsion $\vec{P} = \hbar \vec{k}$.

- Les ondes sphériques libres $\Psi_{k,l,m}^{(0)}(r)$ sont des fonctions propres de L^2 et L_Z .

Ces deux bases sont différentes parce que \vec{P} ne commute pas avec L^2 et L_Z . On peut exprimer une onde plane $\exp(i k \cdot r)$ comme une superposition linéaire des ondes sphériques libres. Elle est la solution de l'équation de *Schrödinger* quand $V(r) = 0$ et on peut écrire :

$$\exp(i k \cdot r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} \Psi_{k,l,m}^{(0)}(r). \quad (2.21)$$

En utilisant les propriétés des harmoniques et fonctions de Bessel sphériques on aura :

$$\exp(i k \cdot r) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) [Y_l^m(\theta_k, \varphi_k)]^* Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (2.22)$$

où θ_k et φ_k sont les angles polaires qui représente la direction du vecteur k . Si k est dirigé suivant l'axe (oz) ($m = 0$), l'équation (2.22) est réduite à :

$$\exp(i k \cdot r) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (2.23)$$

Où on a utilisé les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Y_l^{m=0}(\theta) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ [Y_l^{m=0}(\theta_k)]^* &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta_k) \\ [Y_l^{m=0}(\theta_k = 0)]^* &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} / P_l(1) = 1, \end{aligned}$$

avec $P_l(x)$ les polynomes de *Legendre* (voir l'annexe).

Chapitre 3

Diffusion par un potentiel central et la section efficace

Dans le cas particulier où le potentiel $V(r)$ est central, le moment cinétique orbital L de la particule est une constante du mouvement. Il existe donc des états stationnaires de moment cinétique bien définis, c'est-à-dire des états propres communs à H , L^2 et L_z . On les appelle ondes partielles. Pour le calcul théorique de la section efficace on va se baser sur deux méthodes :

3.1 La méthode des ondes partielles

On suppose connaître la fonction d'onde $\Psi(r)$ de la particule diffusée dans un potentiel sphérique et symétrique. Donc on peut extraire l'expansion en ondes partielles pour la fonction de diffusion. La forme asymptotique pour la fonction d'onde quand $r \gg a$ est définie par l'équation (2.3), et l'expansion de l'onde plane $\exp(i k.r)$ est donnée par l'équation (2.22). La fonction d'onde diffusée contient le terme $\exp(i k.r)$ qui peut être exprimé sous la forme d'ondes partielles en utilisant les fonctions sphériques de Hankel $h_l^{(1)}$ [5].

$$f(\hat{r}) \frac{\exp(i k.r)}{r} = \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{l,m}(\hat{r}), \quad (3.1)$$

où les $C_{l,m}$ sont des coefficients complexes (l'amplitude des ondes partielles). Puisque le potentiel est sphérique et symétrique, l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$ dépend de

l'angle θ et non pas l'angle φ . Pour $m = 0$ et en notant $C_l \equiv C_{l,0}$, l'expansion en ondes partielles de Ψ quand r est grand devient :

$$\Psi(r) \simeq A \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) j_l(kr) + \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} C_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos\theta). \quad (3.2)$$

D'un autre coté, si on pose $U_l(r) = U_{l,0}(r)$ pour $m = 0$, on a :

$$\Psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_l(r)}{r} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta). \quad (3.3)$$

En comparant (3.2) et (3.3), on trouve :

$$\frac{U_l(r)}{r} \simeq i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) + C_l h_l^{(1)}(kr) \quad (kr \gg 1). \quad (3.4)$$

On appelle l'équation (3.4) la condition limite. Quand $kr \gg 1$, les fonctions de *Hankel* ont la forme asymptotique (2.20), et en remplaçant dans l'équation (3.1), on aura l'expression suivante :

$$f(\hat{r}) \frac{\exp(i k \cdot r)}{r} = \sum_{l,m} C_{l,m} \frac{\exp(ikr)}{i^{l+1} k r} Y_{l,m}(\hat{r}). \quad (3.5)$$

Donc l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$ prend la forme générale suivante :

$$f(\hat{r}) = \frac{1}{k} \sum_{l,m} \frac{C_{l,m}}{i^{l+1}} Y_{l,m}(\hat{r}). \quad (3.6)$$

Puisque l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$ ne dépend que de θ (l'angle de diffusion, pour $m = 0$), on la dénote par $f(\theta)$ et on écrit :

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{i^{l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta). \quad (3.7)$$

Par conséquent la section efficace totale à la forme suivante :

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \left| \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{i^{l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \right|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} |C_l|^2. \quad (3.8)$$

On obtient les coefficients C_l , en résolvant l'équation (2.11) sans négliger le potentiel $V(r)$. Les conditions limites pour cette équation de deuxième ordre sont : le

terme $\frac{U_l(r)}{r}$ devient fini quand r tend vers zéro et l'infinie (le comportement asymptotique est donné par l'équation (3.4)). Ces deux conditions sont suffisantes pour fixer une solution unique et de déterminer les coefficients C_l . En générale, les coefficients C_l sont de l'ordre $(ka)^l$, ils décroissent rapidement avec l quand $kr \ll 1$ (la limite de basses énergies), dans ce dernier cas, seulement quelques ondes partielles, où même juste le premier ($l = 0$ où l'onde s), donne une bonne approximation pour la section efficace totale. Dans la limite de hautes énergies, l'expansion en ondes partielles est moins efficace puisque on est obligé de tenir en compte de beaucoup de termes $C_l, l = 0, 1, 2, \dots$ pour obtenir une bonne approximation pour la section efficace totale [5].

3.2 La méthode de déphasage

Précédemment, on a utilisé les amplitudes d'ondes partielles C_l pour la description de la diffusion. Les coefficients C_l sont des nombres complexes, on les obtient en résolvant l'équation radiale (2.11) avec la condition limite (3.4). Cette méthode demande l'utilisation des fonctions sphériques de *Bessel*, par contre la méthode de déphasage est un procédé qui n'exige pas l'utilisation des fonctions sphériques de *Bessel*. On a l'équation radiale suivante :

$$\left[-\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] U_{l,k}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} U_{l,k}(r), \quad (3.9)$$

et le potentiel effectif $V(r)_{eff}$ qui est la somme du potentiel $V(r)$ et le terme centri-

fuge $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ et on écrit :

$$V(r)_{eff} = \begin{cases} V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} & \text{pour } r > 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases}. \quad (3.10)$$

La recherche du comportement asymptotique de $U_{l,k}$, lorsque r tend vers l'infini conduit à négliger le potentiel $V(r)$ qui est très localisé, ainsi que le terme

$\frac{l(l+1)}{r^2}$ lié au moment cinétique. Donc l'équation approximative à la forme suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right] U_{l,k}(r) \simeq 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

La solution de cette équation est une combinaison linéaire de $\exp(\pm i k r)$.

$$U_{l,k}(r) \simeq A \exp(i k r) + B \exp(-i k r), \quad (3.12)$$

avec la condition à l'origine :

$$U_{l,k}(0) = 0. \quad (3.13)$$

Donc la solution de l'équation radiale (3.9) prendra la forme :

$$U_{l,k}(r) \simeq D_l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

où $\alpha_l = \left(\frac{l\pi}{2} - \delta_l \right)$ est une phase réelle, qui est complètement déterminée lorsqu'on impose la continuité de la solution de l'équation radiale (3.9) s'annulant à l'origine. On trouve dans le cas d'un potentiel $V(r)$ identiquement nul, $\alpha_l = \frac{l\pi}{2}$. Si on prend cette valeur comme référence, le nombre δ_l ainsi défini est appelé déphasage de l'onde partielle $\Psi_{k,l,m}(r)$ et dépend évidemment de k (de l'énergie E) [2]. D'autre part, la constante de normalisation D_l peut être déterminée seulement si on utilise la condition limite (3.4), mais il s'avère que seulement le déphasage est nécessaire pour décrire la diffusion, parce que dans la méthode de déphasage la solution est simple et on trouve un vrai nombre δ_l . Par contre dans la méthode d'onde partielle, on cherche les coefficients complexes C_l et on utilise les fonctions sphériques de *Bessel*. C'est l'avantage de la méthode de déphasage.

3.2.1 La relation entre déphasage δ_l et l'amplitude d'onde partielle

C_l

On suppose que le déphasage δ_l est connu dans l'équation (3.14), par contre l'amplitude D_l est inconnue. En utilisant la limite :

$$j_l(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right),$$

et la forme asymptotique de la fonction deHankel de l'èquation (2.20), dans la condition limite (3.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{U_l(r)}{r} &\simeq i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{1}{kr} \frac{\exp i\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right) - \exp i\left(-kr + l \frac{\pi}{2}\right)}{2i} + C_l \frac{\exp ikr}{i kr} \left(\frac{1}{i}\right)^l \\ &\simeq i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{1}{kr} \frac{\exp i\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right) - \exp i\left(-kr + l \frac{\pi}{2}\right)}{2i} + C_l \frac{\exp i\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right)}{i kr} \\ &\simeq -i^l \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{2i} \frac{\exp i\left(-kr + l \frac{\pi}{2}\right)}{kr} + \left[-i^l \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{2i} + \frac{C_l}{i} \right] \frac{\exp i\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right)}{kr} \end{aligned} \quad (3.15)$$

On peut écrire aussi l'équation (3.14) sous une forme en exponentielle :

$$\frac{U_l(r)}{r} \simeq \frac{D_l}{r} \frac{\exp\left(ikr - il \frac{\pi}{2} + i \delta_l\right) - \exp\left(-ikr + il \frac{\pi}{2} - i \delta_l\right)}{2i}. \quad (3.16)$$

Les coefficients de $\exp(\pm ikr)$ sont équivalents dans les deux expressions(3.15) et (3.16), par identification, on trouve après un simple calcul que :

- Le déphasage δ_l est relié à l'amplitude d'onde partielle par la relation :

$$\frac{C_l}{i^{l+1} \sqrt{4\pi(2l+1)}} = \exp(i \delta_l) \sin \delta_l = \frac{\exp(2i \delta_l) - 1}{2i}. \quad (3.17)$$

- L'amplitude D_l est donnée par l'expression :

$$D_l = \frac{\exp(i \delta_l)}{k} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}. \quad (3.18)$$

3.2.2 Les quantités diffusées en termes de déphasage

En substituant l'expression de l'amplitude de diffusion C_l en fonction du déphasage δ_l l'équation (3.17) dans l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ l'équation (3.7), on trouve :

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp i \delta_l \sin \delta_l] P_l(\cos \theta). \quad (3.19)$$

On rappelle que le déphasage s'annule dans le cas d'une particule libre. L'expression de l'amplitude de diffusion en terme de déphasage est particulièrement utile lorsque seulement quelques termes dans la somme sont différents de zéro [2]. La section efficace différentielle est égale à $|f(\theta)|^2$ et pour obtenir la section efficace totale σ_{tot} , il suffit de l'intégrer sur tout l'angle solide. Utilisant l'équation (2.6) et les propriétés d'orthogonalités des polynômes de *Legendre*, on aura

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int \sin \theta d\theta |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (3.20)$$

C'est l'expression de la section efficace totale en fonction des déphasages. Il est à noter que les termes d'interférence entre ondes de moments cinétiques différents disparaissent quelque soit le potentiel $V(r)$. La contribution $\frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l$ associée à une valeur donnée de l est positive et bornée supérieurement par $\frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$ [2]. On remarque que lorsque le nombre de déphasage non nuls est assez petit avec une portée du potentiel ne s'étendant pas au-delà de quelques longueurs d'onde, la série (3.20) converge rapidement

3.2.3 Les quantités diffusées pour la sphère dure

Si le potentiel de rayon limité r_0 est une sphère dure, $V(x)$ est infiniment répulsif dans la région $r < r_0$, et nul dans la région $r > r_0$.

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}. \quad (3.21)$$

On suppose que l'énergie de la particule incidente est suffisamment faible pour que $kr_0 \ll 1$, on peut alors négliger tout les déphasages sauf celui de l'onde S ($l=0$). On a donc :

$$\begin{aligned}
f_k(\theta) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} \exp i \delta_l(k) \sin \delta_l(k) Y_l^0(\theta) \\
f_k(\theta) &= \frac{1}{k} \sqrt{4\pi} \exp i \delta_0(k) \sin \delta_0(k) Y_0^0(\theta) \\
f_k(\theta) &= \frac{\exp i \delta_0(k)}{k} \sin \delta_0(k).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

puisque $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, la section efficace différentielle est isotrope.

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta) &= |f_k(\theta)|^2 \\
\sigma(\theta) &= \frac{1}{k^2} (\sin \delta_0(k))^2.
\end{aligned}$$

Donc, la section efficace totale prend la forme :

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \int \sin \theta d\theta d\varphi |f_k(\theta)|^2 \\
\sigma_{tot} &= 2\pi \int \sin \theta d\theta \frac{1}{k^2} (\sin \delta_0(k))^2 \\
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} (\sin \delta_0(k))^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

On obtient $\delta_0(k)$ par résolution de l'équation radiale correspondant à ($l = 0$).

On a :

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right] U_k^0(r) = 0 \text{ pour } r \gg r_0. \\ U_k^0(r_0) = 0. \text{ (la condition à l'origine)} \end{cases} \tag{3.24}$$

La solution des deux équations est unique :

$$\begin{cases} U_k^0(r) = 0 \text{ pour } r \ll r_0. \\ U_k^0(r) = c \sin(k.r - k.r_0), \text{ pour } r \gg r_0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Le déphasage δ_0 est par définition donné par la forme asymptotique de $U_k^0(r)$:

$$\begin{aligned}
U_k^0(r) &= \sin(k.r + \delta_0). \\
r &\longrightarrow \infty
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Par comparaison on trouve que $\delta_0 = -k r_o$ où ($kr_o \ll 1$). Donc la section efficace a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} k^2 r_o^2 \\ \sigma_{tot} &= 4\pi r_o^2.\end{aligned}\tag{3.27}$$

On voit que σ_{tot} est indépendante de l'énergie, et égale à quatre fois la surface apparente de la sphère dure vue par les particules du faisceau incident.

En mécanique classique la section efficace apparente est πr_o^2 : seules seraient déviées les particules qui rebondissent élastiquement sur la sphère dure, cependant en mécanique quantique, on étudie l'évolution de l'onde associée aux particules incidentes, et la variation brusque de $V(r)$ en $r = r_o$ produit un phénomène analogue à la diffraction d'une onde lumineuse [2].

3.2.4 Le théorème optique via le déphasage

Le théorème optique relie la section efficace totale σ_{tot} avec la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion $\text{Im } f(\theta)|_{\theta=0}$ pour des particules diffusées dans la direction vers l'avant.

$$\begin{aligned}\text{Im } f(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im} [\exp i \delta_l \sin \delta_l] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.\end{aligned}\tag{3.28}$$

En faisant une comparaison avec l'équation (3.20), on trouve :

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(\theta) \Big|_{\theta=0}.\tag{3.29}$$

C'est la relation de *Bohr-Peierls-Placzek* où le théorème optique appliqué pour des potentiels sphériques et symétriques (le théorème est valable pour des potentiels arbitraires). Physiquement le théorème optique indique que le phénomène de diffusion diminue l'intensité vers l'avant du faisceau après qu'il croise la cible et que cette atténuation proportionnelle à la section efficace peut être expliquée en fonction de l'intensité de l'onde [6].

3.2.5 L'approximation WKB et le déphasage δ_l

On peut trouver δ_l par réduction de l'équation radiale (2.11), cette équation décrit une particule de masse μ se déplaçant au niveau d'énergie $E = 0$ entre $r = 0$ et $r = \infty$ dans le potentiel $U(r)$ qui à la forme suivante :

$$U(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right).$$

En général, il y aura un point tournant très petit r_0 où $U(r_0) = 0$, on suppose que le potentiel $V(r)$ ne tend pas vers $(-\infty)$ très rapidement que r^{-2} , pour bien imposer $U(r) > 0$ quand $r \rightarrow 0$, et l'unicité du point tournant.

La solution semi-classique (*Wentzel – Kamer – Brillouin*) de l'équation de *Schrödinger* dans un espace à trois dimensions pour un potentiel sphérique et symétrique est [6] :

$$U_l(r) \simeq A \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\hbar} \int_{r_0}^r P(r') dr' \right], \quad (3.30)$$

où P est l'impulsion de la particule avec :

$$P(r) = \sqrt{2\mu \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right)}.$$

La formule standard pour l'approximation WKB au voisinage du point tournant permet d'écrire la forme approximative de la fonction d'onde pour $r \gg r_0$ [5] :

$$U_l(r) \simeq A \sin \left[\frac{\pi}{4} + \int_{r_0}^r dr \sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}} \right], \quad (3.31)$$

il est clair que l'équation (3.31) à la forme d'équation (3.14) quand r tend vers l'infinie et le déphasage δ_l est défini comme suit :

$$\delta_l^{wkb} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{4} + \int_{r_0}^r dr \sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}} + \frac{l\pi}{2} - kr \right]. \quad (3.32)$$

L'équation (3.32) est la formule approximative exprimant le déphasage δ_l par le potentiel $V(r)$. En fait, le déphasage δ_l n'est pas égale à δ_l^{wkb} mais on peut accepter l'égalité si le potentiel $V(r)$ change suffisamment lent avec r .

Il y a toujours une certaine erreur dans l'approximation *WKB*. En effet, lorsque $V(r) = 0$, il n'est y a pas de diffusion et on doit avoir $\delta_l^{wkb} = \delta_l = 0$. Cependant, en procédant avec le calcul, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^r dr \sqrt{k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}} &= \int_{r_0}^r dr \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{k^2 r^2}}} \left[1 - \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \right] \\
&= \int_{r_0}^r dr \frac{k^2 r}{\sqrt{k^2 r^2 - l(l+1)}} + \sqrt{l(l+1)} \int_{r_0}^r dr \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{k^2 r^2}}} \left(-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{kr} \right) \\
&= \sqrt{k^2 r^2 - l(l+1)} + \sqrt{l(l+1)} \left[\arcsin \frac{\sqrt{l(l+1)}}{kr} - \frac{\pi}{2} \right],
\end{aligned}$$

où

$$r_0 = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}. \quad (3.33)$$

Donc le déphasage δ_l^{wkb} égal à :

$$\delta_l^{wkb} = -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{l(l+1)} - l - \frac{1}{2} \right). \quad (3.34)$$

On voit que δ_l^{wkb} n'est pas nul. On note aussi que :

- L'intégrale dans la relation (3.32) converge quand r tend vers l'infinie si est seulement l'intégrale de potentiel $V(r)$ converge :

$$\int_{r_0}^{\infty} V(r) dr < \infty.$$

- La formule (3.32) est applicable si la limite existe et l'approximation de *WKB* pour le potentiel $U(r)$ est valable c'est -a-dire le potentiel change lentement avec r .

3.3 Représentation intégrale pour le problème de diffusion

La représentation intégrale donne une expansion dans les puissances du potentiel $V(r)$, où l'approximation de *Born* est l'ordre le plus simple de cette expansion.

Dans ce cas, on ne suppose pas que le potentiel $V(r)$ doit être sphérique et symétrique. La fonction d'onde $\Psi(r)$ dans le cas de la diffusion est la solution d'équation de *Schrödinger* (2.2) qui a la forme asymptotique (2.3). On peut récrire l'équation (2.2) comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) \Psi(r) = -V(r)\Psi(r). \quad (3.35)$$

Si on connaît la fonction $F(r) = -V(r)\Psi(r)$, on peut déterminer la solution de l'équation de *Schrödinger* avec la condition asymptotique (2.3) sous la forme :

$$\Psi(r) = \exp ikr + \int G(r-r') F(r') dr'^3, \quad (3.36)$$

où $G(r-r')$ est appelée la fonction de *Green* sortante pour l'opérateur d'*Helmholtz* $(\Delta + k^2)$. Notons que la fonction de *Green* est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta_r + k^2) G(r) = \delta(r).$$

En utilisant les relations :

$$\Delta_r \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r)$$

et

$$\delta(r-r_0) H(r) = H(r_0) \delta(r-r_0).$$

On aura

$$G(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{\exp ikr}{r}$$

Toute fonction $\Psi(r)$ sous la forme (3.36), satisfait l'équation différentielle (3.35).

En effet, en appliquant l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2)$ aux deux membres de l'équation (3.36), on trouve :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) \Psi(r) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) \Psi_0(r) - \frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) \int G(r-r') F(r') dr'^3 \\ &= \int -\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) G(r-r') F(r') dr'^3 = -V(r)\Psi(r). \end{aligned}$$

Donc, il est préférable d'utiliser l'équation intégrale (3.36) au lieu de l'équation différentielle (3.35).

L'avantage vient du fait qu'en choisissant $\Psi_0(r)$ et $G(r)$ de façon adéquate, on peut incorporer dans l'équation le comportement asymptotique désiré. Ainsi l'équation intégrale de la diffusion :

$$\Psi(r) = \exp ikr - \int G(r-r') V(r') \Psi(r') dr'^3, \quad (3.37)$$

est l'équivalent de l'équation différentielle (3.35) et de la condition asymptotique(2.3)

[2].

On remarque que :

- L'équation différentielle $-\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) G(r) = \delta(r)$, implique que $-\frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta + k^2) G(r)$ doit être identiquement nul dans toute les régions excluant l'origine $(\Delta + k^2) \frac{\exp ikr}{r} = 0, r > r_0$, (où r_0 positif quelconque) [2].

- La fonction de Green $G(r-r')$ dans l'équation (3.36) est choisie de telle sorte que pour n'importe quelle soit $F(x)$, la fonction d'onde $\Psi(r)$ donnée par l'équation (3.36) satisfait la condition asymptotique(2.3).

- Le potentiel $V(r)$ décroît à l'infinie plus vite que r^{-1} .

3.3.1 La solution itérative pour l'équation intégrale

On peut obtenir la solution approximative de l'équation (3.37) si on suppose que le deuxième terme du potentiel est une petite correction par rapport au premier, on admet que cette approximation est justifiée pour les énergies élevées, c'est-à-dire $\hbar^2 k^2 \gg 2\mu V$, où l'énergie cinétique de la particule est beaucoup plus grande par rapport au potentiel $V(r)$ et la section efficace est petite. Dans ce cas, on applique dans l'équation (3.37) des approximations successives en commençant par l'onde

plane $\exp(ikr)$ qui n'est pas perturbée pour obtenir la solution itérative [5] :

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}(r) &= \exp(ikr) \\ \Psi^{(1)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \int G(r-r') V(r') \Psi^{(0)}(r') dr'^3 \\ \Psi^{(2)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \int G(r-r') V(r') \Psi^{(1)}(r') dr'^3, \\ &\text{etc....}\end{aligned}$$

Formellement, on peut remplacer l'intégrale de la fonction de Green par un opérateur, comme suit :

$$(\hat{G}F)(r) = \int G(r-r') F(r') dr'^3, F(r') = -V(r') \Psi(r').$$

Alors les itérations se réécrivent comme :

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}(r) &= \exp(ikr) \\ \Psi^{(1)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \hat{G}V\Psi^{(0)}(r) \\ \Psi^{(2)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \hat{G}V\Psi^{(1)}(r) \\ \Psi^{(2)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \hat{G}V\Psi^{(0)}(r) + \hat{G}V\hat{G}V\Psi^{(0)}(r) \\ \Psi^{(n)}(r) &= \Psi^{(0)}(r) - \hat{G}V\Psi^{(0)}(r) + \dots + (-\hat{G}V)^n \Psi^{(0)}(r).\end{aligned}$$

Cette expression formelle aide à visualiser la structure de la $n^{\text{ième}}$ approximation de la fonction de d'onde.

Cette forme s'appelle l'expansion de Born de la fonction d'onde stationnaire de la diffusion.

3.3.2 Représentation intégrale de l'amplitude de diffusion

Pour trouver la représentation intégrale de l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$, il faut trouver la forme asymptotique de la fonction de Green quand $r \rightarrow \infty$. On a le développement en série de Taylor suivant :

$$|r-r'| = \sqrt{(r-r')^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = r - \hat{r}.r' + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right).$$

En remplaçant dans la fonction de Green :

$$G(r - r') = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{\exp i k \cdot |r - r'|}{|r - r'|}.$$

On aura la forme asymptotique suivante :

$$G(r - r') = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{\exp(i k \cdot r - i k' \cdot r')}{r}, k' = k \hat{r}. \quad (3.38)$$

Portant l'équation (3.38) dans l'équation intégrale (3.37), on obtient :

$$\Psi(r) = \exp(ik \cdot r) - \int \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{\exp(i k \cdot r - i k' \cdot r')}{r} V(r') \Psi(r') dr'^3. \quad (3.39)$$

Par comparaison entre la condition asymptotique (2.3) et l'équation intégrale (3.39), on trouve la représentation intégrale de l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$:

$$f(\hat{r}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int dr'^3 V(r') \Psi(r') \exp(i k' \cdot r'). \quad (3.40)$$

On voit que cette représentation intégrale (3.40) contient la fonction d'onde $\Psi(r')$ exacte et n'est pas une équation intégrale pour l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$ comme l'équation (3.37).

3.3.3 L'approximation de Born

La formule (3.40) est exacte, mais on ne peut pas l'utiliser pour obtenir l'amplitude de diffusion $f(\hat{r})$ si on ne connaît pas la fonction d'onde $\Psi(r)$. Donc la solution est d'utiliser la solution itérative de $\Psi(r)$, et puisque le potentiel est faible, on peut utiliser l'approximation de Born avec la fonction d'onde stationnaire $\exp(ikr)$ comme une solution d'ordre minimale ($\Psi^{(0)}(r) = \exp(ikr) = \Psi(r')$). Donc l'amplitude de diffusion prend la forme suivante :

$$f(\hat{r}) \simeq -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int dr'^3 V(r') \exp i(k - k') \cdot r'. \quad (3.41)$$

On voit que l'amplitude de diffusion (3.40) c'est le transformé de *Fourier* du potentiel $V(r)$ dans la direction $(k - k')$. Puisque le potentiel $V(r)$ est sphérique et symétrique, l'expression de l'amplitude de diffusion devienne tres simple :

$$\begin{aligned} f(\hat{r}) &\simeq -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \int \int r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr' V(r') \exp(iq r' \cos\theta) \\ &\simeq \frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int r' V(r') \sin qr' dr', \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $q = k - k'$ est le vecteur d'onde transféré. Dans ce cas le comportement de la section efficace pour les énergies élevées est :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int d\Omega |f(\hat{r})|^2 \\ \sigma_{tot} &= 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left| -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dr V(r) \exp(iq.r) \right|^2. \end{aligned}$$

Si

$$\tilde{V}(q) = \int dr V(r) \exp(iq.r)$$

est le transformé de *Fourier* pour le potentiel $V(r)$, la section efficace total prendra la forme suivante :

$$\sigma_{tot} = \frac{\mu^2}{2\pi\hbar^4} \int_0^\pi \tilde{V}^2(q) \sin\theta d\theta.$$

On faisant le changement de variable :

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{\mu^2}{2\pi\hbar^4 k^2} \int_0^\pi \tilde{V}^2(q) 2k^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\mu^2}{2\pi\hbar^4 k^2} \int_0^{2k} \tilde{V}^2(q) q dq. \end{aligned} \quad (3.43)$$

On voit que la section efficace total σ_{tot} depend de k , i-e avec l'énergie E de faisceau incident ($\sigma_{tot} \sim k^{-2} \sim E^{-1}$).

Chapitre 4

L'approximation de Born

L'équation de *Lippman – Schwinger* (4.1) [7] :

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V |\Psi\rangle, \quad (4.1)$$

est une équation exacte pour le problème de diffusion. Pour la résoudre, on utilise le développement en perturbation de l'état $|\Psi\rangle$ en fonction du potentiel $V(r)$ et du propagateur en énergie $G = \frac{1}{E - H_0}$ [8]. Dans l'espace des coordonnées, pour trouver la forme asymptotique de la fonction d'onde $\Psi(\vec{x})$ loin de diffuseur on écrit :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}) &= \langle \vec{x} | |\Psi\rangle = \langle \vec{x} | |\phi\rangle + \langle \vec{x} | \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V |\Psi\rangle \\ &= \phi(\vec{x}) + \int d\vec{x}' \frac{-2m}{\hbar^2} \frac{\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \Psi(\vec{x}') \\ \Psi(\vec{x}) &\simeq \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) - \\ &\quad \frac{2m \exp(ikr)}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi r} \int d\vec{x}' \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{x}') V(\vec{x}') \Psi(\vec{x}'). \end{aligned} \quad (4.2)$$

La relation (4.2) est une équation intégrale pour l'onde inconnue $\Psi(\vec{x})$. Où $r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}'|$ et $\vec{k}' = \vec{k} \frac{\vec{x}'}{r}$ est le vecteur d'onde pour l'onde diffusée. On a utilisé le développement en série de *Taylor* suivant :

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r \sqrt{1 - 2\frac{x \cdot x'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = r \left(1 - \frac{x \cdot x'}{r^2} + 0\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right).$$

Pour résoudre l'équation de *Lippman – Schwinger* (4.1), on utilise la théorie de perturbation c'est-à-dire en développant le potentiel $V(r)$ sous forme d'une série. Si le potentiel $V(r)$ est nul, on a $|\Psi\rangle = |\phi\rangle$. Par conséquent l'approximation d'ordre le plus bas (première approximation) pour le potentiel $V(r)$ est :

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V |\phi\rangle + o(V^2), \quad (4.3)$$

où $o(V^2)$ est négligeable, c'est l'approximation de *Born* où la première approximation de *Born*. Évidemment cette approximation est bonne seulement quand la diffusion (le potentiel) est faible. Dans l'espace des coordonnées, on peut remplacer $\Psi(\vec{x})$ par l'onde plane $\phi(\vec{x})$ dans l'équation (4.1), et la fonction d'onde $\Psi(\vec{x})$ s'exprime sous cette forme :

$$\Psi(\vec{x}) \simeq \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \left[\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \int d\vec{x}' V(\vec{x}') \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}') \right], \quad (4.4)$$

où $q = k - k'$ est le vecteur d'onde transféré où diffusé.

Par comparaison entre la condition asymptotique (2.3) et l'équation (4.4), on trouve que l'amplitude de diffusion $f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k})$ a la forme suivante :

$$f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\vec{x} V(\vec{x}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}). \quad (4.5)$$

L'expression d'équation (4.5) est très intéressante, elle montre que l'amplitude de diffusion est le transformé de *Fourier* du potentiel $V(r)$. Elle est valide pour le premier ordre de V . Si le potentiel est sphérique et symétrique, l'amplitude de diffusion (4.5) prendra la forme :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi V(r) \exp(iqr \cos\theta) \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r dr V(r) \sin qr. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donc l'amplitude de diffusion dépend seulement du vecteur d'onde transféré où diffusé défini par la relation :

$$q = |\vec{q}| = |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}.$$

D'autre par, elle est une fonction de l'angle polaire θ ($f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = f^{(1)}(\theta)$).

4.1 Diffusion de *Rutherford*

4.1.1 Source de *Coulomb* ponctuelle et le potentiel de *Yukawa*

Une des plus importantes applications de l'approximation de *Born* est le potentiel de *Coulomb* parcequ'il est utilisé pour décrire l'expérience de diffusion de *Rutherford*. Il a la forme :

$$V(r) = \frac{Z Z' e^2}{r}, \quad (4.7)$$

($4\pi\epsilon_0 = 1$), Z et Z' sont la charge de la particule diffusée (noyau d'or) et la charge de la particule incidente (les particules α) respectivement. Cependant, l'expression de l'équation (4.6) ne converge pas. Dons, on commence par un potentiel de courte portée, appelé le potentiel de *Yukawa* :

$$V(r) = V_0 \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (4.8)$$

où $V_0 = Z Z' e^2$, et on prendra à la fin la limite $\mu \rightarrow 0$ pour récupérer le potentiel de *Coulomb*. Le potentiel de *Yukawa* est un exemple typique pour les potentiels de courte portée, par ce que il tend rapidement à zéro une fois $r \gtrsim \frac{1}{\mu}$. Le potentiel qui lie les protons et les nucléons (force nucléaire, où l'interaction forte) peut être rapproché par ce type de potentiel, parce que la portée de la force nucléaire est seulement environ de 10^{-12} centimètres au plus [7]. La formule (4.6) prendra donc la forme :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\theta) &= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r V_0 \frac{\exp(-\mu r)}{r} \sin qr dr \\ &= -\frac{2m V_0}{\hbar^2} \frac{1}{\mu^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Donc la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ à pour expression :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) &= \left| f^{(1)}(\theta) \right|^2 \\ &= \left(\frac{2m V_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[2k^2 (1 - \cos \theta) + \mu^2]^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

où on a utilisé les deux relations :

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2},$$

et

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

Donc la section efficace totale σ_{tot} pour le potentiel de *Yukawa* devient :

$$\sigma_{tot} = \iint \sin \theta d\theta d\varphi \left(\frac{2mV_o}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[2k^2(1 - \cos \theta) + \mu^2]^2}. \quad (4.11)$$

En faisant le changement de variable :

$$x(\theta) = [2k^2(1 - \cos \theta) + \mu^2],$$

on obtient :

$$\sigma_{tot} = \left(\frac{2mV_o}{\hbar^2} \right)^2 \frac{4\pi}{4k^2\mu^2 + \mu^4},$$

on prend la limite $\mu \rightarrow 0$ et $V_o = ZZ'e^2$ pour l'équation (4.10), on trouve la section efficace différentielle pour le potentiel de *Coulomb* :

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{2mZZ'e^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{[2k^2(1 - \cos \theta)]^2} \\ &= \frac{(2m)^2 (ZZ'e^2)^2}{16(\hbar k)^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ce résultat (4.12) (l'approximation de *Born*) pour la diffusion de *Coulomb* est exactement la même dans la théorie classique, où $\hbar k$ est le moment transféré de la particule incident. Il est à noter que :

- $\sigma(\theta)$ dépend de la valeur absolue du potentiel et non de son signe,
- Pour un angle θ donné, $\sigma(\theta)$ décroît comme $\frac{1}{E^2}$,
- La section efficace totale de diffusion est infinie car :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \iint \sin \theta d\theta d\varphi \frac{(2m)^2 (ZZ'e^2)^2}{16(\hbar k)^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= 2\pi \frac{(2m)^2 (ZZ'e^2)^2}{16(\hbar k)^4} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

diverge aux petits angles. Cela est dû au fait qu'il existe un effet d'écran aux petits angles, et que l'effet du cortège électronique coulombien devient nul à des distances suffisamment grandes par rapport au rayon de l'atome. Les diffusions de *Rutherford* des particules chargées, ont apporté la preuve que le noyau atomique était constitué de charges électriques portées par les particules (les protons) et non un fluide de la charge électrique des électrons.

4.1.2 Le facteur de forme

Dans la pratique, cependant, la section efficace totale ne peut pas être infinie. Le potentiel de *Coulomb* alors est modifié aux longues distances (distance au-delà du rayon de *Bohr*) comme :

$$V(x) = \frac{Z Z' e^2}{|\vec{x}'|} - \int d\vec{x}' \frac{Z' e^2}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \rho(\vec{x}'), \quad (4.14)$$

où $\rho(\vec{x}')$ est la densité de probabilité de l'électron satisfaisant la relation de normalisation :

$$\int d\vec{x}' \rho(\vec{x}') = Z,$$

$\rho(\vec{x}')$ est concentré dans la taille de l'atome $|\vec{x}'| \lesssim a$. Très loin de l'atome, le deuxième terme élimine le premier terme et il n'y a aucun potentiel [7]. En effet, après évaluation de l'intégrale dans l'équation (4.6), on trouve :

$$f(\theta) = -\frac{2m Z Z' e^2}{\hbar^2 q^2} \left[1 - \frac{1}{Z} \int d\vec{x}' \rho(\vec{x}') \exp(i \vec{q} \cdot \vec{x}') \right]. \quad (4.15)$$

Donc la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ égale à :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{4m^2 Z^2 Z'^2 e^4}{\hbar^4 q^4} \left| \left[1 - \frac{1}{Z} \int d\vec{x}' \rho(\vec{x}') \exp(i \vec{q} \cdot \vec{x}') \right] \right|^2. \quad (4.16)$$

Dans le cas relativiste et en tenant compte du recul du noyau, on aura l'expression :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} |F(q)|^2, \quad (4.17)$$

où la section efficace de *Mott* $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}$ est une généralisation relativiste de la for-

mule de *Rutherford*, et $F(q)$ est le facteur de forme qui représente le transformé de *Fourier* de la densité de charge du noyau $\rho_n(\vec{x})$ et tel que :

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{1}{z} \int d\vec{x} \exp(i \vec{k}' \cdot \vec{x}) \rho_n(\vec{x}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= \frac{1}{z} \int d\vec{x} \rho_n(\vec{x}) \exp(i \vec{q} \cdot \vec{x}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'expérience de *Rutherford* a déjà montré la déviation des particules α par la cible (potentiel *Coulombien*) et quand l'énergie est élevée ou diffusion avec grand angle, on peut estimer la taille du noyau [7]. Le comportement oscillant peut être compris qualitativement de la manière suivante : le facteur de forme $F(q)$ de la sphère dure de rayon a et avec une densité de charge uniforme ρ_o s'écrira :

$$\begin{aligned} F(q) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 dr \rho_o \int_{-1}^1 d \cos \theta \exp(i q r \cos \theta) \\ &= 4\pi \rho_o \frac{\sin aq - aq \cos aq}{q^3}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Cette fonction tend vers $\frac{1}{q^2}$ à grand q , alors qu'elle oscille dans le numérateur. Les expériences de la diffusion de électron-proton ont montré que le facteur de forme à une forme approximatif d'un dipôle.

$$F(q) \simeq \frac{1}{(1 + q^2 a_n^2)^2}, \quad (4.20)$$

où $a_n \simeq 0.26 \text{ fm}$.

4.2 L'expansion de Born

On sait que la première approximation de *Born* dépend de l'ordre du potentiel V , mais on peut extraire des ordres supérieurs partant de l'équation 4.3. Où on a introduit d'une manière itérative l'opérateur $\frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V$ à la droite de l'équation 4.3 :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V |\phi\rangle + 0 \left(V^2 \right) \\ &= |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V |\phi\rangle + \\ &\quad V \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V \frac{1}{E - H_o + i \varepsilon} V |\phi\rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Donc le résultat 4.21 est une série infinie qui s'appelle l'expansion de *Born* où :

- Le premier terme représente l'onde qui n'est pas diffusée.
- Le deuxième terme est l'onde qui est diffusée à partir d'un point de potentiel et puis elle est propagée par l'opérateur $\frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon}$ vers l'extérieur.
- Le troisième terme c'est l'onde qui est diffusée à partir d'un point de potentiel dans un laps de temps puis elle est diffusée à partir d'un autre point de potentiel puis elle est propagée à l'extérieur.

Pour le terme $(n + 1)$, l'onde à (n) temps de diffuser avant de se propager à l'extérieur. On peut définir l'opérateur T appelé la matrice T où l'opérateur de transition par la relation [7] :

$$V | \Psi \rangle = T | \phi \rangle. \quad (4.22)$$

Donc, si on dénote $| \phi \rangle$ par $|\hbar \vec{k} \rangle$, l'amplitude de diffusion 3.40 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(\hat{r}) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \exp(i\vec{k}' \cdot \vec{r}') V(r') \Psi(r') dr'^3 \\ &= -\frac{\mu (2\pi)^3}{2\pi\hbar^2} \langle \hbar \vec{k}' | V | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

En utilisant la définition de la matrice T de l'équation 4.22, on trouve :

$$f(\hat{r}) = -\frac{\mu (2\pi)^3}{2\pi\hbar^2} \langle \hbar \vec{k}' | T | \hbar \vec{k} \rangle. \quad (4.24)$$

L'opérateur T décrit la transition de moment initial $\hbar \vec{k}$ vers le moment final $\hbar \vec{k}'$. En utilisant l'équation de *Lippmann -Schwinger* 4.1, on trouve :

$$T | \phi \rangle = V | \phi \rangle + V \frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon} T | \phi \rangle, \quad (4.25)$$

ce qui donne :

$$T = \frac{V}{1 - \frac{V}{E - H_0 + i \varepsilon}}. \quad (4.26)$$

et en utilisant un développement en série de *Taylor*, on peut mettre l'opérateur de transition T sous la forme :

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon} V + V \frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i \varepsilon} V + \dots \quad (4.27)$$

4.3 Validité de l'approximation de *Born*

Dans l'approximation de *Born*, on remplace Ψ par ϕ dans l'équation de *Lippmann-Schwinger*. Par conséquent, pour que cette approximation soit bonne, il faut que la différence entre Ψ et ϕ est très petite en présence du potentiel [7] :

$$|\Psi(\vec{x}) - \phi(\vec{x})| \ll 1. \quad (4.28)$$

En utilisant l'équation de *Lippmann-Schwinger* (avant de faire la limite quand r tend vers ∞ et prendra $\Psi(\vec{x}')$ est une onde plane), la condition de validité 4.21 devient :

$$\left| \frac{-2m}{\hbar^2} \int d\vec{x}' \frac{\exp(i\vec{k} \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}') \right| \ll 1. \quad (4.29)$$

En particulier, on a besoin de cette condition au $\vec{x} = 0$ où le potentiel prend des valeurs plus grandes [7]. Pour que l'approximation de *Born* reste valable, il faut que la substitution de $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ à $\Psi(\vec{x})$ soit légitime autour de $\vec{x} = 0$ [4]. Par exemple, l'amplitude de diffusion $f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k})$ dans l'approximation de *Born* et pour le potentiel de la forme fonction-delta $V = \gamma \delta(\vec{x})$ aura comme expression :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\vec{x} V(\vec{x}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) \\ f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \gamma. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour ce genre de potentiel, la condition de validité est violée parce que :

$$\left| \frac{2m}{\hbar^2} \int d\vec{x}' \frac{\exp(i\vec{k} \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}') \right| = \frac{2m |\gamma|}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi |\vec{x}'|}. \quad (4.31)$$

La relation 4.31 est infinie quand $|\vec{x}'| \rightarrow 0$. L'amplitude de *Born* du deuxième ordre diverge aussi pour le potentiel de la fonction-delta quel que soit γ petit :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}' | \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V | \phi \rangle &= \int d\vec{x}'' d\vec{x}''' \left(\frac{-2m}{\hbar^2 4\pi} \right)^2 \frac{\exp\left(ik|\vec{x}' - \vec{x}''|\right)}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} \\
&\quad \gamma^2 \delta(\vec{x}') \frac{\exp\left(ik|\vec{x}'' - \vec{x}'''|\right)}{|\vec{x}'' - \vec{x}'''|} \delta(\vec{x}''') \phi(\vec{x}''') \\
&= \left(\frac{-2m}{\hbar^2 4\pi} \right)^2 \gamma^2 \frac{\exp(ik|\vec{x}'|)}{|\vec{x}'|} \frac{\exp(ik|0|)}{|0|} \\
&= \infty.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Clairement, l'expansion de *Born* n'est pas appropriée pour ce genre de potentiel. Pour un potentiel central, avec une valeur V_0 et une portée d'ordre a , on peut qualitativement établir la contrainte de validité.

On prend \vec{k} le long de l'axe z et $\vec{x}' \simeq 0$, la condition de validité 4.21 est :

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int d\vec{x} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} V(\vec{x}) \exp(ikz) \right| \lll 1. \tag{4.33}$$

Quand $k \ll a^{-1}$, on peut négliger les phases dans l'intégrale, et on trouve donc :

$$\begin{aligned}
\frac{2m}{\hbar^2} \left| \int r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \frac{V_0}{4\pi r} \right| &= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2\pi}{4\pi} 2V_0 \left| \int_0^a r dr \right| \\
&= \frac{2m}{\hbar^2} |V_0| \frac{a^2}{2} \lll 1 (k \ll a^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

D'autre part, si $(k \gg a^{-1})$, le facteur de phase oscille rapidement et on peut utiliser l'approximation des phases stationnaires. L'exponentielle est $(ikr + ikz)$, et cette phase est stationnaire seulement le long de l'axe z négatif ($z = -r$). En utilisant la relation :

$$\begin{aligned}
(ikr + ikz) &= ik \frac{r^2}{r} + ikz = ik \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + z \right) \\
&= ik \left(\frac{x^2 + y^2}{r} + 0(x^3 + y^3) \right).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

L'intégrale de Gauss sur x, y donne le facteur $\frac{\pi r}{k}$, z est intégré le long de la phase stationnaire de $-a$ à 0 . Donc la condition de validité est :

$$\begin{aligned} \frac{2m}{\hbar^2} \left| \int d\vec{x} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} V(\vec{x}) \exp(ikz) \right| &= \left| \int dx dy dz \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \frac{\exp(ikr + ikz)}{r \cdot 4\pi} \right| \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{|V_0|}{4\pi} \left| \int_{-a}^0 dz \frac{\pi \cdot r}{k \cdot r} \right| \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \frac{|V_0|}{4 \cdot k} \cdot a \ll 1 \quad (k \gg a^{-1}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

L'amplitude de diffusion $f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k})$ dans l'approximation de Born 4.5 devient :

$$f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} V_0 \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (q \ll a^{-1}), \quad (4.37)$$

pour un moment transféré très grand sur l'axe x , l'intégrale oscille rapidement et donne un facteur $\frac{1}{q}$.

L'intégrale sur y et z donne le facteur a par ce que il n'est y a pas une variation pour la phase [7].

Donc, l'amplitude de diffusion est donnée par l'expression :

$$f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} V_0 \frac{\pi}{q} a^2 \quad (q \gg a^{-1}). \quad (4.38)$$

Puisque le moment transféré q est d'ordre k , la section efficace totale σ_{tot} aura la forme :

$$\sigma_{tot} \simeq \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} V_0 \frac{4\pi}{3} a^3 \right)^2 & \text{pour } (k \ll a^{-1}) \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} V_0 \frac{\pi}{q} a^2 \right)^2 & \text{pour } (k \gg a^{-1}) \end{cases}. \quad (4.39)$$

La section efficace totale étant toujours inférieure à la section efficace géométrique ($4\pi a^2$) quand la condition de validité l'équation 4.34 et l'équation 4.36 sont satisfaites [7] :

$$\sigma_{tot} \ll \begin{cases} \frac{16}{9} \pi a^2 \quad (k \ll a^{-1}) \\ 4\pi a^2 \quad (k \gg a^{-1}). \end{cases}. \quad (4.40)$$

Donc, une condition nécessaire se fessant pour l'applicabilité de l'approximation de Born est $\sigma_{tot} \ll 4\pi a^2$ ($k \gg a^{-1}$) et $\sigma_{tot} \ll \frac{16}{9} \pi a^2$ ($k \ll a^{-1}$) [9].

Chapitre 5

La diffusion dans le cadre de la géométrie non commutatif

Durant ces dernières années une importance considérable a été donnée à la recherche sur les espaces non commutatifs. L'étude de la théorie des cordes dans la limite des faibles énergies avec le scénario du monde de *Brane*, a donnée une très grande importance aux espaces non commutatifs. La recherche intensive postérieure sur la théorie des champs sur les espaces non commutatifs était incitée par la théorie de *Moyal* et la formulation de matrice de l'effet quantique de *Hall* [10]. Récemment, il y a des études notables sur la formation et les conséquences expérimentales possibles pour des prolongements de la mécanique quantique ordinaire dans les espaces non commutatif. L'étude sur les espaces non commutatifs est beaucoup important pour la compréhension des phénomènes au distances courtes [11]. Dans la théorie des champs la non commutativité de l'épace-temps est manifestée en remplaçant le produit normal par le produit star, où la mécanique quantique non commutative est formée de la même manière que la mécanique ordinaire avec des variables dynamiques \hat{X}_i et \hat{P}_j représentées par des opérateurs dans un espace de *Hilbert* et vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i \hbar \theta_{ij}, [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = 0, [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.1)$$

où $\theta_{ij} = \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \theta^k$ est un paramètre constant qui décrit la non commutativité de l'éspace-temps. Il est real, anti-symétrique et à la dimension $\left(\frac{\text{longueur}^2}{\hbar}\right)$, et joue

un rôle analogue à \hbar dans la mécanique quantique ordinaire. La fonction d'onde $\Psi(x)$ évolue selon l'équation de *Schrödinger* non commutative suivante :

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) &= H_\theta * \Psi(x), \\ &= \left[\frac{p^2}{2m} + V(x) \right] * \Psi(x), \end{aligned} \quad (5.2)$$

où H_θ est l'hamiltonien dans l'espace non commutatif. Le produit star "*" (Weyl - Moyal) est tel que [12] :

$$(A * B)(x) = \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x'^j}\right) A(x) B(x') \Big|_{x=x'}, \quad (5.3)$$

où A et B sont des fonctions différentiables.

5.1 Décalage de Bopp

Dans un espace non commutatif on peut utiliser l'équation de *Schrödinger* avec la multiplication et les coordonnées de l'espace-temps ordinaires à condition de décaler l'argument de potentiel d'une quantité égale à $\frac{\tilde{P}}{2}$.

$$\begin{aligned} V(x) * \Psi(x) &= V(x) \Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \Psi(x) \\ &= V(x) \Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(x) \tilde{P}^{i_1} \dots \tilde{P}^{i_n} \Psi(x) \\ &= V(x) \Psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int dk \tilde{V}(k) (ik_{i_1}) \dots (ik_{i_n}) \tilde{P}^{i_1} \dots \tilde{P}^{i_n} \Psi(x) \exp(ik \cdot x). \end{aligned}$$

Danc, on trove le resultat suivant :

$$\begin{aligned} V(x) * \Psi(x) &= V(x) \Psi(x) + \int dk \tilde{V}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (k \cdot \tilde{P}) \Psi(x) \exp(ik \cdot x) \\ &= V(x) \Psi(x) + \int dk \tilde{V}(k) \exp ik \left(x - \frac{\tilde{P}}{2}\right) \Psi(x) - \int dk \tilde{V}(k) \exp ikx \Psi(x) \\ &= \int dk \tilde{V}(k) \exp ik \left(x - \frac{\tilde{P}}{2}\right) \Psi(x) \\ &= V\left(x - \frac{\tilde{P}}{2}\right) \Psi(x), \end{aligned} \quad (5.4)$$

où on a utilisé les relations suivantes [12] :

$$\partial_i = \frac{i}{\hbar} P_i \text{ (le principe de correspondance).}$$

$$\tilde{P}^i = \frac{\theta^{ij}}{\hbar} P_j,$$

et

$$V(x) = \int dk \tilde{V}(k) \exp(ik \cdot x).$$

Puisque \tilde{p} et k commute, on peut démontrer la relation suivante :

$$\Psi(x) * V(x) = \Psi(x) V\left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right). \quad (5.5)$$

5.2 La méthode des ondes partielles dans un espace non commutatif

On considère une sphère de rayon $r = R$ où le potentiel $V(\vec{r})$ est nul à l'extérieur de la sphère. Un faisceau de particules d'énergie E est diffusé par ce champ de potentiel. On calcule l'amplitude de diffusion en utilisant l'expansion en série d'ondes partielles. Dans le domaine $r < R$ la fonction d'onde peut être écrite sous la forme :

$$\Psi(r, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (i)^l (2l+1) \left[\frac{1}{kr} \chi_l(kr) \right] * P_l(\cos \phi). \quad (5.6)$$

La condition limite $\chi_l(0) = 0$, garantit que $R_l(r) = \frac{\chi_l(r)}{r}$ est fini à $r = 0$. En dehors de la sphère $r = R$, on a :

$$\Psi(r, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (i)^l (2l+1) \left[\frac{1}{kr} \left\{ J_l(kr) + \frac{1}{2} \alpha_l h_l^{(1)}(kr) \right\} \right] * P_l(\cos \phi). \quad (5.7)$$

Jusqu'au premier ordre par rapport au paramètre de la non commutativité θ , les relations 5.6 et 5.7 deviennent :

$$\Psi(r, \phi) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[\frac{1}{r} \chi_l(kr) P_l(\cos \phi) + \frac{i\hbar}{2} \theta^{jk} \partial_j \left(\frac{1}{r} \chi_l(kr) \right) \partial_k (P_l(\cos \phi)) \right] + O(\theta^2), \quad (5.8)$$

et

$$\begin{aligned} \Psi(r, \phi) = & \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[\frac{1}{r} \left[J_l(kr) + \frac{1}{2} \alpha_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \phi) \right] + \\ & \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left[\frac{i \hbar}{2} \theta^{jk} \partial_j \left[\frac{1}{r} \left\{ J_l(kr) + \frac{1}{2} \alpha_l h_l^{(1)}(kr) \right\} \right] \partial_k (P_l(\cos \phi)) \right] \\ & + 0(\theta^2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2.1 La dérivée logarithmique L_l et la conservation du nombre de particules

On peut exprimer les coefficients α_l par la dérivée logarithmique L_l telle que :

$$L_l = \left(\frac{d \log \chi_l}{d \log r} \right)_{r=R}. \quad (5.10)$$

Pour le faire, on utilise la condition de continuité de χ_l et $\frac{d \chi_l}{d r}$ en passant par la surface de la sphère $r = R$ et on trouve :

$$L_l = x \frac{A + \frac{\theta}{2} B}{C + \frac{\theta}{2} D}, \quad (5.11)$$

ou

$$A = \frac{1}{x} \left[J_l'(x) + \frac{1}{2} \alpha_l h_l^{(1)'}(x) \right], \quad (5.12)$$

$$B = \frac{1}{x^2} J_l'(x) + \frac{1}{2x^2} \alpha_l h_l^{(1)'}(x) - \frac{1}{x} J_l''(x) - \frac{1}{2x} \alpha_l h_l^{(1)''}(x), \quad (5.13)$$

$$C = \frac{1}{x} \left[J_l(x) + \frac{1}{2} \alpha_l h_l^{(1)}(x) \right], \quad (5.14)$$

$$D = -\frac{1}{x^2} J_l(x) - \frac{1}{2x^2} \alpha_l h_l^{(1)}(x) + \frac{1}{x} J_l'(x) + \frac{1}{2x} \alpha_l h_l^{(1)'}(x), \quad (5.15)$$

avec $x = kR$, et :

$$\alpha_l = 2 \frac{E + \frac{\theta}{2} F}{G + \frac{\theta}{2} H}, \quad (5.16)$$

ou

$$E = -\frac{1}{x}L_l J_l(x) + J_l'(x), \quad (5.17)$$

$$F = \frac{1}{x}J_l'(x) + \frac{1}{x^2}L_l J_l(x) - \frac{1}{x}L_l J_l'(x) - J_l''(x), \quad (5.18)$$

$$G = \frac{1}{x}L_l h_l^{(1)}(x) - h_l^{(1)}(x), \quad (5.19)$$

$$H = -\frac{1}{x}h_l^{(1)}(x) - \frac{1}{x^2}L_l h_l^{(1)}(x) + \frac{1}{x}L_l h_l^{(1)}(x) + h_l^{(1)''}(x), \quad (5.20)$$

avec les fonctions $h_l^{(1)}(x)$ définies telles que la fonction de *Bessel* sphérique $J_l(z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$J_l(x) = \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x) \right], \quad (5.21)$$

ici $h_l^{(2)}(x)$ est le complexe conjugué de $h_l^{(1)}(x)$:

$$h_l^{(2)}(x) = \left[h_l^{(1)}(x) \right]^*. \quad (5.22)$$

En remplaçant l'équation 5.21 et ses dérivées premières et deuxièmes dans l'équation 5.16, on trouve :

$$\alpha_l = 2 \frac{E' + \frac{\theta}{2} F'}{G + \frac{\theta}{2} H}, \quad (5.23)$$

ou

$$E' = -\frac{1}{x}L_l \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x) \right] + \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)'}(x) + h_l^{(2)'}(x) \right], \quad (5.24)$$

$$F' = \frac{1}{x} \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)'}(x) + h_l^{(2)'}(x) \right] + \frac{1}{x^2}L_l \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x) \right] - \frac{1}{x}L_l \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)'}(x) + h_l^{(2)'}(x) \right] - \frac{1}{2} \left[h_l^{(1)''}(x) + h_l^{(2)''}(x) \right]. \quad (5.25)$$

Après un calcul simple, on peut montrer que :

$$1 + \alpha_l = -\frac{I + \frac{\theta}{2} K}{G + \frac{\theta}{2} H}, \quad (5.26)$$

ou

$$I = \frac{1}{x}L_l h_l^{(2)}(x) - h_l^{(2)'}(x), \quad (5.27)$$

et

$$K = -\frac{1}{x^2} L_l h_l^{(2)}(x) + \frac{1}{x} L_l h_l^{(2)}(x) - \frac{1}{x} h_l^{(2)}(x) + h_l^{(2)}(x). \quad (5.28)$$

Le numérateur dans l'expression de $(1 + \alpha_l)$ est le complexe conjugué du dénominateur, donc :

$$|1 + \alpha_l| = 1. \quad (5.29)$$

L'équation 5.29 est un résultat important qui montre la conservation du nombre de particules dans la diffusion élastique dans les espaces non commutatifs par ce que la valeur absolue de l'amplitude des ondes entrantes et sortantes doivent être égales. C'est la relation d'unimodularité de l'onde des particules dans l'espace non commutatif [11]. Dans la limite $\theta \rightarrow 0$, on retrouve le cas commutatif et l'expression de α_l se réduit à

$$\alpha_l = 2\frac{E}{G} = -2\frac{L_l J_l(x) - x J_l'(x)}{L_l h_l^{(1)}(x) - x h_l^{(1)}(x)}, \quad (5.30)$$

et l'équation 5.26 devient :

$$1 + \alpha_l = -\frac{I}{G} = -\frac{L_l h_l^{(2)}(x) - x h_l^{(2)}(x)}{L_l h_l^{(1)}(x) - x h_l^{(1)}(x)}, \quad (5.31)$$

ainsi que la relation 5.29 est satisfaite. Il est à noter qu'on peut montrer l'unimodularité à tous les ordres du paramètre θ . En fait, on peut montrer que :

$$1 + \alpha_l = -\frac{L_l \exp\left(\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{1}{x} h_l^{(2)}(x) \right] - x \exp\left(-\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{1}{x} h_l^{(2)}(x) \right]}{L_l \exp\left(\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{1}{x} h_l^{(1)}(x) \right] - x \exp\left(-\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\frac{1}{x} h_l^{(1)}(x) \right]}, \quad (5.32)$$

et on voit bien que la relation 5.29 est satisfaite [11].

5.2.2 L'application pour la sphère dure

On peut montré facilement que la non commutativité de l'espace n'a aucun effet sur le théorème optique puis que on a :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} = |f_k(\phi)|^2 = f_k(\phi)^* * f_k(\phi), \quad (5.33)$$

ou

$$\begin{cases} f_k(\phi) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(i\delta_l(k))] \sin \delta_l(k) P_l(\cos \phi) \\ P_l(\cos \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}} Y_l^0(\phi) \end{cases}, \quad (5.34)$$

l'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\begin{aligned} f_k(\phi) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(i\delta_l(k))] \sin \delta_l(k) \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}} Y_l^0(\phi) \\ f_k(\phi) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} [\exp(i\delta_l(k))] \sin \delta_l(k) Y_l^0(\phi). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Mais ϕ est l'angle entre le moment de particule entrante et sortante, cette angle na rien à faire avec le paramètre de la non commutativité θ introduit dans l'équation 5.1 et donc le produit star dans l'équation 5.33 réduite au produit ordinaire et d'autre part on portant l'équation 5.35 dans l'équation 5.33 donc la section efficace différentielle non commutative prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= |f_k(\phi)|^2 \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} [\exp(i\delta_l(k))] \sin \delta_l(k) Y_l^0(\phi) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

On déduit la section efficace total de la diffusion en intégrant sur les angles :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int d\Omega \sigma(\theta) \\ \sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l,n} \sqrt{(2l+1)(2n+1)} \exp i(\delta_l - \delta_n) \sin \delta_l(k) \sin \delta_n(k) \int d\Omega [Y_n^0(\phi)]^* Y_l^0(\phi). \end{aligned}$$

Comme les harmoniques sphériques sont orthonormées, on a donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l,n} \sqrt{(2l+1)(2n+1)} \exp i(\delta_l - \delta_n) \sin \delta_l(k) \sin \delta_n(k) \delta_{l,n} \\ \sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{(2l+1)(2l+1)} \exp i(\delta_l - \delta_l) \sin \delta_l(k) \sin \delta_l(k) \\ \sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\sin \delta_l(k)]^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

On a calculé la section efficace totale pour les ondes S ($l = 0$) parce que on considère que l'énergie de la particule incidente est suffisamment faible pour que kr_o soit petit devant 1, ($kr_o \ll 1$).

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\sin \delta_l(k)]^2 \\
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} [\sin \delta_0(k)]^2 \\
\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k^2} k^2 r_o^2 \\
\sigma_{tot} &= 4\pi r_o^2.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Donc la section efficace différentiel pour la sphère dur calculer par la méthode d'onde partiel dans un espace non commutative reste inchangeable par ce que l'angle de la diffusion ϕ na rien à faire avec le paramètre de la non commutativité θ et donc le produit star réduite au produit ordinaire.

5.3 L'approximation de Born dans l'espace non commutatif

Si le paramètre de la non commutativité est différent de zéro, devrait être très petite par rapport au longueurs de système, on peut considérer les effets au premier ordre de la non commutativité, alors on a :

$$(A * B)(x) = A(x) B(x) + \frac{i}{2} \theta^j \partial_j A(x) \partial_j B(x) + o(\theta^2). \tag{5.39}$$

Dans ce qui suit, on utilise l'équation 5.39 pour étudier le phénomène de la diffusion dans la mécanique quantique non commutative (la correction sera au premier ordre par rapport au paramètre de noncommutativité seulement). En outre, l'approximation de *Born* est employée seulement quand le potentiel est assez faible ($V \ll E$) pour avoir une convergence très rapide.

5.3.1 Première méthode

Les éléments M_{fi}^{nc} de la matrice de transition sont définis comme suit [11] :

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} \\
M_{fi}^{nc} &= \int d^3r \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) * V(\vec{r}) * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right) \\
M_{fi}^{nc} &= \int d^3r \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) V(\vec{r}) + \frac{i}{2} \theta^{kj} \nabla \left\{ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) \right\}_k \nabla V_j \right] * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right) \\
M_{fi}^{nc} &= \int d^3r \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) V(\vec{r}) \right] * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right) + \\
&\quad \int d^3r \left[\frac{i}{2} \theta^{kj} \nabla \left\{ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) \right\}_k \nabla (V)_j \right] * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right)
\end{aligned}$$

Danc, on trouve :

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r} \right) V(\vec{r}) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r} \right) \right] + \\
&\int dr^3 \left[\frac{i}{2} \theta^{kj} \left(-\frac{i}{\hbar} P_k^f \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r} \right) V(\vec{r}) \left(\frac{i}{\hbar} P_j^i \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r} \right) \right] + \\
&\int dr^3 \left[\frac{i}{2} \theta^{kj} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_j^i \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r} \right) \nabla(V)_k \right] + \\
&\int dr^3 \left[\frac{i}{2} \theta^{kj} \left(-\frac{i}{\hbar} P_k^f \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r} \right) \nabla(V)_j \right] + 0(\theta^2). \\
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] + \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} P_k^f P_j^i V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{-1}{2\hbar} \theta^{kj} P_j^i \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_k \right] + \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} P_k^f \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + 0(\theta^2) \right. \\
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] + \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} P_k^f P_j^i V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{-1}{2\hbar} \theta^{kj} P_k^i \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} P_k^f \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + 0(\theta^2) \right. \\
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] + \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} P_k^f P_j^i V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} P_k^i \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} P_k^f \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + 0(\theta^2) \right. \\
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] + \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} P_k^f P_j^i V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right. \\
&\left. \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} (P_k^i + P_k^f) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_f - \vec{P}_i) \cdot \vec{r} \right] \nabla(V)_j \right] + 0(\theta^2). \right.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} (P_k^i + P_k^f) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \nabla V_j \right] + \\
&\int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} P_k^f P_j^i V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] + 0(\theta^2). \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Le premier terme dans l'équation 5.40 est l'approximation de *Born* dans l'espace commutatif (ordinaire), le seconde et le troisième terme montrent les effets de la non commutativité de l'espace-temps [12]. On utilise la notation :

$$\frac{i}{2\hbar}\theta^{kj}P_k^f P_j^i = \frac{i}{4\hbar}\epsilon^{kjm}P_k^f P_j^i \theta_m = \frac{i}{4\hbar}\left(\vec{P}^f \times \vec{P}^i\right) \cdot \vec{\theta}. \quad (5.41)$$

Si on choisi les composantes de $\vec{\theta}$ dans une direction perpendiculaire au plan généré par les deux vecteurs \vec{P}^f et \vec{P}^i (l'axe Z), donc $\theta_3 = \theta$ et les autres composantes sont nuls, alors on aura :

$$\frac{i}{4\hbar}\left(\vec{P}^f \times \vec{P}^i\right) \cdot \vec{\theta} = \frac{i\theta}{4\hbar}P^2 \sin\phi, \quad (5.42)$$

où ϕ c'est l'angle entre \vec{P}^f et \vec{P}^i . En portant l'équation 5.42 dans le troisième terme

de l'équation 5.40.

Danc les éléments M_{fi}^{nc} de la matrice de diffusion seront donnés par l'expression :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar}\theta^{kj} \left(P_k^i + P_k^f \right) \nabla V_j \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\vec{P}_i - \vec{P}_f \right) \cdot \vec{r} \right] \right] + \\ &\int dr^3 \frac{i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin\phi V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\vec{P}_i - \vec{P}_f \right) \cdot \vec{r} \right] + 0 \left(\theta^2 \right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

En évaluant l'intégral I_1 , tel que :

$$I_1 = \int dr^3 \left[\frac{1}{2\hbar}\theta^{kj} \left(P_k^i + P_k^f \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\vec{P}_i - \vec{P}_f \right) \cdot \vec{r} \right] \nabla (V)_j \right],$$

et après un calcul direct on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int dr^3 \frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} (P_k^i + P_k^f) \nabla \left(V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \right)_j - \\
&\quad \int dr^3 \frac{1}{2\hbar} \theta^{kj} (P_k^i + P_k^f) V(\vec{r}) \nabla \left(\exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \right)_j \\
&= - \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} (P_k^i + P_k^f) (P_k^i - P_k^f) V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \\
&= - \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} (P_k^i P_j^f - P_k^f P_j^i - P_k^i P_j^i + P_k^f P_j^f) V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \\
&= - \int dr^3 \frac{i}{2\hbar^2} \theta^{kj} (P_k^i P_j^f - P_k^f P_j^i) V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \\
&= - \int dr^3 \frac{i}{4\hbar^2} \left[(\vec{P}_k^i \times \vec{P}_j^f) \cdot \vec{\theta} - (\vec{P}_k^f \times \vec{P}_j^i) \cdot \vec{\theta} \right] V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \\
&= - \int dr^3 \frac{-i2}{4\hbar^2} (\vec{P}_k^f \times \vec{P}_j^i) \cdot \vec{\theta} V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] \\
&= \int dr^3 \frac{i2\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right]
\end{aligned}$$

En remplace I_1 dans l'équation 5.43, on trouve :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \int dr^3 \frac{2i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] + \\
&\quad \int dr^3 \frac{i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] + 0(\theta^2) \\
\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \int dr^3 \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] + 0(\theta^2) \\
\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi \int dr^3 V(\vec{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{P}_i - \vec{P}_f) \cdot \vec{r} \right] + 0(\theta^2) \\
\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} &= \left(1 + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi \right) \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

L'amplitude de diffusion dans un espace non commutatif à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
f(\phi)_{nc} &= \frac{-12m}{4\pi \hbar^2} \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} \cdot \\
&= \left(1 + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi \right) \left[\left(\frac{-12m}{4\pi \hbar^2} \right) \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c \right] \\
&= \left(1 + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin \phi \right) f(\phi)_c. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Donc la section efficace différentielle dans un espace-temps non commutatif prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= |f(\phi)_{nc}|^2 = \left| \left(1 + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin\phi\right) f(\phi)_c \right|^2 \\
&= |f(\phi)_c|^2 \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 \sin^2\phi\right) \\
&= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_c \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 \sin^2\phi\right). \tag{5.46}
\end{aligned}$$

On voit que la section efficace différentielle noncommutative obtenue dans l'équation 5.46 dépend de l'angle de diffusion ϕ et égale à la section efficace différentielle dans un espace-temps commutatif plus une correction de deuxième ordre par rapport au paramètre constant θ de la non commutativité. Si $\theta \rightarrow 0$ on trouve la section efficace différentielle ordinaire. Il est à noter qu'on peut calculer le facteur de forme $F(q)$ dans le cadre de la géométrie non commutative par la méthode précédente. Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}
F(q)_{nc} &= \int d^3r \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) * \rho_n(r) * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right) \\
&= \left(1 + \frac{3i\theta}{4\hbar^2} P^2 \sin\phi\right) F(q)_c, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

où $F(q)_c$ est défini par la relation 4.18.

5.3.2 Deuxième méthode

Les éléments M_{fi}^{nc} de la matrice de diffusion sont donnés par [11] :

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{nc} &= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_{nc} \\
&= \int d^3r \Psi_f(r) * V(r) * \Psi_i(r),
\end{aligned}$$

après des simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}
M_{fi}^{nc} &= \int dr^3 \Psi_f(r) * V \left(\sqrt{x_i \cdot x^i} \right) * \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) * V \left(\sqrt{\left(x^i - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar} P_j \right) \cdot \left(x_i - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} P^j \right)} \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) * V \left(r \left(1 - \frac{\theta^{ij}}{\hbar r^2} x_i P_j + 0(\theta^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) * V \left(r - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j + 0(\theta^2) \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) * V \left(\sqrt{r^2} - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar \sqrt{r^2}} x_i P_j + 0(\theta^2) \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) V \left(r - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j \left(1 - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j \right) + 0(\theta^2) \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) V \left(r - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar r} x_i P_j + 0(\theta^2) \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) V \left(r - \frac{\theta_k}{4\hbar r} \varepsilon^{ijk} x_i P_j + 0(\theta^2) \right) \Psi_i(r) \\
&= \int dr^3 \Psi_f(r) V(r) \Psi_i(r) - \int dr^3 \Psi_f(r) \frac{\theta_k}{4\hbar r} \left(\vec{x} \times \vec{P} \right)_k \frac{dV(r)}{dr} \Psi_i(r) \\
&= \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c - \langle \Psi_f | \frac{1}{4\hbar r} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right) \frac{dV(r)}{dr} | \Psi_i \rangle, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

ou \vec{L} est le moment angulaire $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$. Donc l'amplitude de diffusion dans un espace non commutatif est égale à :

$$f(\phi)_{nc} = \frac{-1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c + \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | \frac{1}{4\hbar r} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right) \frac{dV(r)}{dr} | \Psi_i \rangle. \tag{5.49}$$

Comme on le voit dans la formule 5.49, l'amplitude de diffusion se compose de deux parties :

- La première qui dépend seulement de l'angle de diffusion (ϕ), est une amplitude un espace commutatif.

$$f(\phi)_c = \frac{-1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle_c. \tag{5.50}$$

• La deuxième considérée comme une correction de la non commutativité de l'espace-temps.

$$f(\phi)_{cor} = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | \frac{1}{4\hbar r} (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV(r)}{dr} | \Psi_i \rangle. \quad (5.51)$$

On peut mettre l'amplitude de diffusion de l'équation 5.49 sous la forme [10] :

$$\begin{aligned} f(\phi)_{nc} &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V \frac{\sin qr}{qr} dr + \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{1}{4\hbar r} (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV(r)}{dr} r^2 dr \sin \phi d\phi d\varphi \exp(iqr \cos \phi) \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V \frac{\sin qr}{qr} dr + \frac{m}{2\hbar^3} \int_0^\infty (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV(r)}{dr} \frac{\sin qr}{qr} r dr \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V J_0(qr) r^2 dr + \frac{m}{2\hbar^3} \int_0^\infty (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV(r)}{dr} J_0(qr) r dr \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V J_0(qr) r^2 dr - \frac{m}{2\hbar^3} \frac{i\hbar k^2}{q} (\theta \cdot n) \sin \phi \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} J_1(qr) r^2 dr \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V J_0(qr) r^2 dr - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{i k^2}{4q} (\theta \cdot n) \sin \phi \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} J_1(qr) r^2 dr \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ici n est un vecteur unité qui est défini par l'équation suivante :

$$k_i \times k_f = nk^2 \sin \phi. \quad (5.53)$$

Ses composantes peuvent être exprimées par l'angle azimutal φ tel que [10] :

$$n = -\sin \varphi i + \cos \varphi j, \quad (5.54)$$

ou les vecteurs i et j sont des vecteurs de base cartésiens. A l'aide de la relation :

$$x^2 J_0(x) = \frac{d}{dx} [x^2 J_1(x)], \quad (5.55)$$

et l'intégration par partie, on trouve :

$$f(\phi)_{nc} = \frac{2m}{q \hbar^2} \left[1 - \frac{ik^2}{4} (\theta \cdot n) \sin \phi \right] \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} J_1(qr) r^2 dr. \quad (5.56)$$

Donc la section efficace différentielle non commutative prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= \left| \frac{2m}{q\hbar^2} \left[1 - \frac{ik^2}{4} (\theta \cdot n) \sin\phi \right] \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} J_1(qr) r^2 dr \right|^2 \\
&= \left(\frac{2m}{q\hbar^2} \right)^2 \left| \int_0^\infty \frac{dV(r)}{dr} J_1(qr) r^2 dr \right|^2 \left[1 + \frac{k^4 \theta^2}{16} \sin^2\phi \right] \\
&= |f(\phi)_c|^2 \left[1 + \frac{k^4 \theta^2}{16} \sin^2\phi \right] \\
&= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_c \left[1 + \frac{P^4 \theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi \right]. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

On voit que la section efficace différentielle dans un espace non commutatif l'équation 5.57 dépend de l'angle de diffusion ϕ et égale à la section efficace différentielle dans un espace commutatif plus une correction due à la non commutativité de l'espace-temps. Si $\theta \rightarrow 0$ on trouve la section efficace différentielle ordinaire. Finalement, la section efficace totale σ_{tot} dans un espace non commutatif et pour un potentiel centrale sera donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^\pi \sin\phi d\phi |f(\phi)_c|^2 \left[1 + \frac{p^4 \theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi \right]. \tag{5.58}$$

Il est très important de mentionner que dans ce cas, en plus de l'énergie, on a deux quantités conservées qui sont le moment angulaire et sa projection dans la direction θ . En effet, après un calcul simple, on aura

$$\hat{H}_{nc} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(r) - \frac{1}{4\hbar r} (\theta \cdot \hat{L}) \frac{dV(r)}{dr}, \tag{5.59}$$

et

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{L}, \hat{H}_{nc}] = 0 \Rightarrow \hat{L} = \text{cet}. \tag{5.60}$$

En plus, on peut aussi calculer le facteur de forme $F(q)$ dans le cadre de la géométrie non commutative par la méthode précédente. Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} F(q)_{nc} &= \int dr^3 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{P}_f \cdot \vec{r}\right) * \rho_n(r) * \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P}_i \cdot \vec{r}\right) \\ &= \left(1 + \frac{i P^2}{4\hbar^2} (\theta \cdot n) \sin \phi\right) F(q)_c, \end{aligned} \quad (5.61)$$

où $F(q)_c$ est défini par la relation 4.18.

5.4 Les applications

5.4.1 Les applications de la première méthode

- **Potentiel de Yukawa et de Coulomb**

Pour le potentiel de Yukawa $V(\vec{r})$ tel que :

$$V(\vec{r}) = ZZ' e^2 \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (5.62)$$

et en substituant l'équation 4.10 dans l'équation 5.46, on trouve que la section efficace différentiel $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc}$ dans l'espace non commutatif est égale a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{[2k^2(1 - \cos\phi) + \mu^2]^2} \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 \sin^2\phi\right) \\ &= \left(\frac{2mZZ'e^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{\left[4k^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mu^2\right]^2} \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 \sin^2\phi\right) \\ &= \left(\frac{ZZ'e^2}{4\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mu^2 \frac{\hbar^2}{2m}}\right)^2 \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 (\sin\phi)^2\right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Si on prend $\theta \rightarrow 0$ dans l'équation 5.63, on trouve la section efficace différentielle ordinaire pour le potentiel de Yukawa l'équation 4.10. Si $\mu \rightarrow 0$ dans l'équation

5.63, on trouve la section efficace différentielle dans un espace non commutative pour le potentiel de *Coulomb* :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{nc} = \frac{(2m)^2 (ZZ'e^2)^2}{16(\hbar k)^4 \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)} \left(1 + \frac{9\theta^2}{16\hbar^4} P^4 \sin^2\phi \right), \quad (5.64)$$

et si $\theta \rightarrow 0$ dans l'équation 5.64, on trouve la section efficace différentielle ordinaire pour le potentiel de *Coulomb* l'équation 5.66.

5.4.2 Les applications de la deuxième méthode

• La sphère dure

On a trouvé que la section efficace totale σ_{tot} dans un espace commutatif pour la sphère dure égale à quatre fois la surface apparente de la sphère dure vue par les particules du faisceau incident ($\sigma_{tot} = 4\pi r_o^2$). Donc la section efficace totale dans un espace non commutatif à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= 2\pi \int_0^\pi \sin\phi d\phi |f(\phi)_c|^2 \left[1 + \frac{p^4 \theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi \right] \\ &= 2\pi |f_c|^2 \int_0^\pi \sin\phi d\phi + 2\pi \frac{p^4 \theta^2}{16\hbar^4} |f_c|^2 \int_0^\pi \sin^3\phi d\phi \\ &= 4\pi r_o^2 + 4\pi r_o^2 \frac{p^4 \theta^2}{32\hbar^4} \int_0^\pi \sin^3\phi d\phi \\ &= 4\pi r_o^2 \left(1 + \frac{p^4 \theta^2}{32\hbar^4} \int_0^\pi \sin^3\phi d\phi \right) \\ \sigma_{tot} &= 4\pi r_o^2 \left(1 + \frac{p^4 \theta^2}{24\hbar^4} \right). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Si $\theta \rightarrow 0$ dans l'équation 5.65, on trouve la section efficace totale ordinaire.

• Potentiel de *Yukawa* et de *Coulomb*

Pour le potentiel de *Yukawa*, et en portant l'équation 4.10 dans l'équation 5.57, on trouve que la section efficace différentielle $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{nc}$ dans l'espace non commutatif est égale à :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} &= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{[2k^2(1-\cos\phi) + \mu^2]^2} \left(1 + \frac{P^4\theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi\right) \\
&= \left(\frac{2mZZ'e^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{\left[4k^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mu^2\right]^2} \left(1 + \frac{P^4\theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi\right) \\
&= \left(\frac{ZZ'e^2}{4\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mu^2 \frac{\hbar^2}{2m}}\right)^2 \left(1 + \frac{P^4\theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi\right). \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Si on pose $\theta \rightarrow 0$ dans l'équation 5.66, on trouve la section efficace différentielle ordinaire pour le potentiel de *Yukawa* l'équation 4.10. Si on prend $\mu \rightarrow 0$ dans l'équation 5.66, on trouve la section efficace différentielle $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc}$ dans un espace-temps non commutatif pour le potentiel de *Coulomb* :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nc} = \frac{(2m)^2 (ZZ'e^2)^2}{16(\hbar k)^4 \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)} \left(1 + \frac{P^4\theta^2}{16\hbar^4} \sin^2\phi\right), \quad (5.67)$$

et si $\theta \rightarrow 0$ dans l'équation 5.67, on trouve la section efficace différentielle ordinaire pour le potentiel de *Coulomb* l'équation 4.12.

5.5 L'onde désordonnée dans l'approximation de *Born*

L'approximation de *Born* est utilisée seulement quand le potentiel est assez faible pour donner une convergence très rapide. Dans cette étude le potentiel $V(r)$ n'est pas petit, et pour cela on a besoin d'une autre approche alternative. C'est la méthode de l'onde désordonnée dans l'approximation de *Born*. Puisque notre potentiel se décompose naturellement en deux parties :

$$V(r) = V_0(r) + W(r), \quad (5.68)$$

ou

$$W(r) = -\frac{(\vec{\theta} \cdot \vec{L})}{4\hbar r} \frac{dV_0(r)}{dr}. \quad (5.69)$$

Le premier terme $V_o(r)$ est le potentiel ordinaire et le deuxième est une correction où une petite perturbation.

Il est important de mentionner que cette décomposition est particulièrement utile si la fonction d'onde de diffusion sous l'action du potentiel ordinaire est obtenue exactement (voir par exemple le potentiel de *Yukawa* et *Coulomb* [10]). Donc l'amplitude de diffusion $f(\phi)$ aura la forme exacte suivante :

$$f(\phi)_{nc} = \frac{-1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | V_o | \Psi_i \rangle_c + \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f' | \frac{1}{4\hbar r} (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV_o(r)}{dr} | \Psi_i' \rangle, \quad (5.70)$$

où Ψ_i' et Ψ_f' sont les ondes sortante et entrante perturbés. Le premier terme est l'amplitude de diffusion en l'absence du potentiel de perturbation et le deuxième terme est une correction de $W(r)$. Supposant maintenant que $W(r)$ est assez petit, pour qu'on puisse changer Ψ_i' et Ψ_f' par Ψ_i et Ψ_f dans le relation 5.70. Donc l'amplitude de diffusion sera remplacer par la forme :

$$f(\phi)_{nc} = \frac{-1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | V_o | \Psi_i \rangle_c + \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | \frac{1}{4\hbar r} (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV_o(r)}{dr} | \Psi_i \rangle. \quad (5.71)$$

Pour calculer le deuxième terme, on doit utiliser les harmoniques sphériques et le polynomes de Legendre $Y_{l,m}(\phi, \varphi)$, $P_l(x)$ telles que :

$$\begin{aligned} \exp(\pm i k.r) &= \frac{4\pi}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} i^l \exp(\pm i \delta_l) A(k, r) Y_{l,m}^*(\phi, \varphi) Y_{l,m}(\phi, \varphi) \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \exp(\pm i \delta_l) A(k, r) P_l^2(\cos \phi). \end{aligned} \quad (5.72)$$

La différence entre cette relation et la relation (2.23) est la solution régulière (correspondante à la diffusion) de l'équation radiale de *Schrödinger* non perturbée $A(k, r)$ et le déphasage δ_l de l'onde l . Après un simple calcul, la correction $f(\phi)_{corr}$ pour l'amplitude de diffusion à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
f(\phi)_{corr} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int r^2 dr \sin \phi d\phi d\varphi \frac{4\pi}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} i^l \exp(i\delta_l) A^*(k,r) Y_{l,m}^*(\phi, \varphi) Y_{l,m}(\phi, \varphi) \cdot \\
&\quad \frac{1}{4\hbar r} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right) \frac{dV_o(r)}{dr} \frac{4\pi}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=-n}^{m'=n} i^n \exp(i\delta_n) A(k,r) Y_{n,m'}^*(\phi, \varphi) Y_{n,m'}(\phi, \varphi) \\
&= \frac{4\pi^2 m}{k^2 \hbar^3} \int dr \sin \phi d\phi \sum_{l=0}^{\infty} i^l \exp(i\delta_l) A^*(k,r) Y_{l,0}^*(\phi, \varphi) Y_{l,0}(\phi, \varphi) \\
&\quad \frac{\left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right)}{r} \frac{dV_o(r)}{dr} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \exp(i\delta_n) A(k,r) Y_{n,0}^*(\theta, \phi) Y_{n,0}(\theta, \phi) \\
&= \frac{4\pi^2 m}{k^2 \hbar^3} \int dr \sin \phi d\phi \sum_{l=0}^{\infty} \exp(i2\delta_l) |A(k,r)|^2 \frac{\left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right)}{r} \frac{dV_o(r)}{dr} \frac{(2l+1)^2}{4\pi \cdot 4\pi} P_l^4(\cos \phi) \\
&= \frac{m}{4k^2 \hbar^3} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 \exp(i2\delta_l) \int_0^\pi \sin \phi d\phi P_l^4(\cos \phi) \int_0^\infty |A(k,r)|^2 \frac{\left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right)}{r} \frac{dV_o(r)}{dr} dr \\
&= -i(\theta \cdot n) \frac{m}{4k^2 \hbar^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \exp(2i\delta_l) \int \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} |A(k,r)|^2 dr. \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Comme on a vu d'après cette formule, la correction non commutative considère la diffusion de chaque onde partielle séparément. Cette correction n'est pas présente pour l'onde S ($l = 0$) dans le cas de l'approximation de *Born*. La dépendance de cette correction de l'angle de diffusion est la même pour toutes les ondes partielles.

5.6 la section efficace et dans l'approximation *W. K. B* dans un espace non commutatif

La théorie de *WKB* est un outil puissant pour obtenir une approximation globale à la solution d'une équation linéaire. On suppose qu'on a une particule avec énergie E se déplaçant dans un potentiel $V(x)$ dans un espace à une seule dimension. La fonction d'onde aura la forme suivante :

$$\Psi(x) = \Psi(0) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} P(x) \cdot x\right), \tag{5.74}$$

où P est l'impulsion de la particule et $\Psi(0)$ la constante de normalisation. On suppose que le potentiel $V(x)$ change suffisamment lent en fonction de x dans une zone

très petite et donc la fonction d'onde $\Psi(x)$ aura une forme d'une d'onde plane avec une longueur d'onde $\lambda(x)$ telle que :

$$\lambda(x) = \frac{2\pi\hbar}{P(x)} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E - V(x))}}. \quad (5.75)$$

La fonction d'onde entre x_0 et x quelconque aura la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \prod_{x_i=x_0}^x \Psi(x_i) = \prod_{x_i=x_0}^x \Psi(0) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} P_i \cdot x_i\right) \\ &= \Psi(0) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \sum_{x_i=x_0}^x P_i \cdot x_i\right) \\ &= \Psi(0) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x P_i \cdot dx_i\right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Cette relation est valable si on a :

$$\left| \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda}{dx} \delta x \right| \ll 1, \quad (5.77)$$

c'est la condition de la validité de l'approximation de *W. K. B.* La solution de l'équation de *Schrödinger* :

$$\Psi''(x) + \frac{P^2}{\hbar^2} \Psi(x) = 0, \quad (5.78)$$

à la forme suivante :

$$\Psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \phi(x)\right), \quad (5.79)$$

où $\phi(x)$ est donnée sous forme d'une série :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \phi_n(x). \quad (5.80)$$

Si $\phi(x)$ est écrite sous la forme [8] :

$$\phi(x) \approx \hbar^0 \phi_0(x) + \hbar^1 \phi_1(x). \quad (5.81)$$

Puisque $\Psi(x)$ est une solution de l'équation de *Schrödinger*, on aura :

$$\frac{i}{\hbar}\phi''(x) - \left(\frac{\phi'(x)}{\hbar}\right)^2 + \frac{P^2}{\hbar^2} = 0.$$

En utilisant le développement de $\phi(x)$, on trouve :

$$\begin{aligned} P^2 - (\phi'_0)^2 &= 0 & (5.82) \\ \phi''_0 - 2\phi'_0\phi'_1 &= 0 \\ i\phi''_1 - (\phi'_1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

ou les solutions sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \pm \int_0^x P(x') dx' & (5.83) \\ \phi_1(x) &= \frac{i}{2} \int_0^x \frac{P'(x)}{P(x)} dx = i \ln \sqrt{P(x)} + c^{te}. \end{aligned}$$

Donc, la fonction d'onde $\Psi(x)$ pour $E > V(x)$ aura la forme suivante [8] :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x P(x') dx' - \ln \sqrt{P(x)} - ic^{te}\right) \\ &= \frac{\exp(-ic^{te})}{\exp(\ln \sqrt{P(x)})} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x P(x') dx'\right) \\ &= \frac{A}{\sqrt{P(x)}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x P(x') dx'\right) \\ &= \frac{A}{|2m(E - V(x))|^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx'\right), \quad (5.84) \end{aligned}$$

avec

$$A = \exp(-ic^{te}).$$

L'intérêt de la méthode *W. K. B* réside uniquement dans la définition du comportement des solutions loin des points tournants. Elle est beaucoup utilisée pour

les systemes simples, mais aussi dans le domaine de la cosmologie quantique [8]. L'approximation de *Born* est employée seulement quand le potentiel est assez faible pour donner la convergence très rapide. Si le potentiel $V(r)$ n'est pas faible, on utilise l'approximation semi-classique *W. K. B.*, où notre potentiel $V(r)$ se décompose naturellement en deux parties. Dans le cas de l'espace-temps d'une géométrie non commutative on a :

$$V(r) = V_o(r) - \frac{(\vec{\theta} \cdot \vec{L})}{4\hbar r} \frac{dV_o(r)}{dr}. \quad (5.85)$$

Le premier terme $V_o(r)$ est le potentiel ordinaire et le deuxième est une petite perturbation. Donc, l'amplitude de diffusion dans un espace-temps non commutative aura la forme suivante :

$$f(\phi)_{nc} = \frac{-1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f | V_o | \Psi_i \rangle_c + \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \Psi_f^{W.K.B} | \frac{1}{4\hbar r} (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \frac{dV_o(r)}{dr} | \Psi_i^{W.K.B} \rangle. \quad (5.86)$$

On voit que l'amplitude de diffusion $f(\phi)_{nc}$ se compose de deux parties. Le premier terme est l'amplitude de diffusion ordinaire qui dépend seulement de l'angle de diffusion ϕ et le deuxième terme est une correction de l'espace-temps non commutative. Ici Ψ_i et Ψ_f sont des ondes planes entrantes et sortantes (espace-temps ordinaire) mais $\Psi_i^{W.K.B}$ et $\Psi_f^{W.K.B}$ sont des ondes entrantes et sortantes calculées par la méthode *W. K. B.* et qui ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_i^{W.K.B}(r) &= \frac{A}{\sqrt{P_i(r)}} \left(\exp \frac{i}{\hbar} \int^r P_i(r') dr' \right) \\ \Psi_f^{W.K.B}(r) &= \frac{A}{\sqrt{P_f(r)}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^r \sqrt{P_f(r')} dr' \right). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Donc l'expression de l'amplitude de diffusion non commutative $f(\phi)_{nc}$ devient :

$$f(\phi)_{nc} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) J_0(qr) r^2 dr + \frac{m |A|^2}{4\hbar^3} \int_0^\infty r dr \frac{(\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \sin \phi}{P \sqrt{\cos \phi}} \frac{dV(r)}{dr} \exp \frac{i}{\hbar} \int^r (P_i - P_f) r' dr' \quad (5.88)$$

Il est clair que l'amplitude de diffusion $f(\phi)_{nc}$ se compose de deux parties ; le premier terme est l'amplitude de diffusion ordinaire et qui dépend seulement de

l'angle de diffusion ϕ et le deuxième terme est une correction de l'espace-temps non commutative qui depend en plus de l'angle de diffusion ϕ , du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps θ .

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce travail de recherche, après une description générale de la théorie des collisions dans un espace-temps commutatif, on a étudié ce phénomène de la diffusion dans le cadre de la géométrie non commutative. En particulier, on a considéré l'espace-temps non commutatif. Le formalisme général a été développé et quelques applications ont été discutées. En fait, on a considéré plusieurs méthodes différentes : la première consiste à remplacer le produit ordinaire par un produit star de Moyal (équivalence entre l'espace commutatif et non commutatif) et calculer l'amplitude de transition à l'ordre θ et par conséquent la section efficace. Il s'est avéré que la section efficace non commutative est le produit de celle obtenue dans un espace-temps commutatif et un facteur correctif qui dépend de l'angle de diffusion et du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps. Comme applications, on a considéré le potentiel de *Yukawa* et de *coulomb* ainsi que le calcul du facteur de forme. la deuxième consiste à utiliser l'approche du décalage de *Bopp*. La forme du résultat obtenu est la même que celle de la première méthode avec un facteur de différence dans le terme correctif du à la non commutativité de l'espace-temps. Comme applications, l'exemple de la sphère dure, le potentiel de *Yukawa* et *Coulomb* ainsi que le calcul du facteur de forme ont été considérés. La troisième méthode consiste à utiliser l'approche de l'onde désordonnée dans l'approximation de *Born*. La forme générale de l'amplitude de diffusion a été obtenue dans le cadre du formalisme des ondes partielles. Enfin, pour des potentiel qui ne sont pas faible et ou on ne peut pas utiliser la théorie de perturbation, la version non commutative de la méthode *WKB* a été développée et la forme générale de l'amplitude de transition

a été aussi déduite. Comme perspectives, on n'aimerai bien faire d'autres applications physiques plus compliquées en utilisant les méthodes précédentes meme si elles nécessitent un calcul numérique.

Annexe

Expression théorique de la section efficace

Le calcul de la section efficace va être effectué en utilisant le courant de probabilité $J(r)$. L'onde diffusée s'interprète comme un faisceau de particules émises radialement à partir du centre diffuseur. On calcule les composantes du courant de probabilité J_d dans les coordonnées sphériques. On a

$$J_d(r) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left[\Psi_d^*(r) \frac{\hbar}{i} \Psi_d(r) \right],$$

où $\Psi_d(r)$ est l'onde diffusée. Après un simple calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} (J_d)_r &= \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2 \\ (J_d)_\theta &= \frac{\hbar}{\mu} \frac{1}{r^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) \right] \\ (J_d)_\varphi &= \frac{\hbar}{\mu} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Comme r est grand, $(J_d)_\theta$ et $(J_d)_\varphi$ sont négligeables devant $(J_d)_r$, et le courant diffusé est pratiquement radial. Le nombre dn de particules qui frappent par seconde la surface unité ds est proportionnel au flux de vecteur J_d , soit :

$$dn = C J_d \cdot ds = C (J_d)_r \cdot r^2 d\Omega = C \frac{\hbar k}{\mu} |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega.$$

Le flux incident F_i est proportionnel au flux du vecteur J_i de l'onde incidente $\exp(ik.r)$, soit :

$$F_i = C |J_i| = C \frac{\hbar k}{\mu},$$

où la constante de proportionnalité C est identique dans les deux équations. Donc la section efficace différentielle a la forme suivante :

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{dn}{F_i d\Omega} F_i = |f(\theta, \varphi)|^2.$$

La section efficace différentielle égale au carré de l'amplitude de diffusion.

Les Polynômes de Legendre et leurs propriétés

La fonction génératrice

En peut obtenir le polynôme de *Legendre* de la fonction génératrice suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

L'équation différentielle de Legendre :

L'équation de *Legendre* c'est une équation différentielle de deuxième ordre :

$$\left(1-x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0, n \geq 0.$$

La formule de Rodrigues :

La solution de l'équation différentielle de *Legendre*, est le polynôme de *Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, n \geq 0$$

pour $n \geq 1$

$$P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Relations de récurrence :

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x), n \geq 1.$$

$$P'_n(x) = x P'_{n-1}(x) + n P_{n-1}(x), n \geq 1.$$

$$P_n(x) = x P_{n-1}(x) + \frac{x^2-1}{n} P'_{n-1}(x), n \geq 1.$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x), \text{ où } \int P_n(x) dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

Les harmoniques sphériques et les polynômes de Legendre :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)}{4\pi(l+m)}} P_l^m(\cos \theta) \exp(i m \varphi),$$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

La relation d'orthogonalité :

Le polynôme de *Legendre* vérifie la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

Décalage de Bopp :

On a :

$$\begin{aligned} \Psi(x) * V(x) &= \Psi(x) V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \Psi(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} V(x) \\ &= \Psi(x) V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} P_{i_1} \dots P_{i_n} \Psi(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} V(x) \\ &= \Psi(x) V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \tilde{P}^{i_1} \dots \tilde{P}^{i_n} \Psi(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} V(x) \\ \Psi(x) * V(x) &= \Psi(x) V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \tilde{P}^{i_1} \dots \tilde{P}^{i_n} \Psi(x) \int dk \tilde{V}(k) (ik_{j_1}) \dots (ik_{j_n}) \exp(ik.x). \end{aligned}$$

Danc, on trouve :

$$\begin{aligned} \Psi(x) * V(x) &= \Psi(x) V(x) + \int dk \tilde{V}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (\tilde{p}.k) \Psi(x) \exp(ik.x) \\ &= \Psi(x) V(x) + \Psi(x) \int dk \tilde{V}(k) \exp ik \left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right) - \Psi(x) \int dk \tilde{V}(k) \exp ikx \\ &= \Psi(x) \int dk \tilde{V}(k) \exp ik \left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right) \\ \Psi(x) * V(x) &= \Psi(x) V \left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Jean Hladik, Mécanique quantique, Atomes et molécules, Masson paris 1997.
- [2] Claude Cohen-Tannoudji, Mécanique quantique tome 2, Hermann.
- [3] Matthew N. O. Sadiku, Ph. D. Numerical Technique in Electromagnetics, Second Edition, CRC PRESS.
- [4] Marchildon, Mécanique quantique, De Boek Université, 1^{er} édition.
- [5] Sergei Winitzki, Scattering theory, lecture notes(1).
- [6] A. Galindo, P. Pascual, Quantum Mechanics (2), Testes and Monographs in physics, Springer-verlag.
- [7] Sergei Winitzki, Scattering theory, lecture notes(2).
- [8] Edgard Elbaz, Quantique, ellipses / édition marketing S. A. , 1995.
- [9] Albert messiah, Mécanique quantique tome 2, dunod nouvelle édition.
- [10] Stefano Bellucci, Armen Yeranyan, Noncommutative Quantum Scattering in a Central Field, ArXiv :hep-th/0412305.
- [11] S. A. Alavi, Scattering in noncommutative quantum mechanics, ArXiv :hep-th/0412292.
- [12] L. Mezincescu, Star operation in Quantum Mechanics, ArXiv :hep-th/0007046.

Summary

In this research work, and after a general description of the collision theory in a non commutative space time, we have studied this diffusion phenomenon in the framework of non commutative geometry. In particular, we have considered a non commutative space-time. The general formalism was developed and some applications were discussed. In fact, we have considered various methods: the first one consists to replace the ordinary product by a Moyal star product (equivalence between the commutative and non commutative approaches) and calculate the transition amplitude at the order q and consequently the cross section. It turns out that the non commutative cross section is a product of that obtained in an ordinary commutative space-time and a correction which depends on the diffusion angle and the space-time non commutativity parameter. As applications, we have considered the Yukawa and Coulomb potentials as well as the form factor. The second method consists on using the Bopp shifting. The form of the obtained result is the same as the first method except for a multiplicative factor in the correction due to the space-time non commutativity. As applications, the example of the hard sphere, Yukawa and Coulomb potentials as well as the calculation of the form factor were considered.

The third method consists to use the disordered wave approach within the Born approximation. The general form of the diffusion amplitude was obtained in the context of the partial wave formalism. Finally, for non weak potentials where we cannot apply the perturbation theory, the non commutative version of the WKB was developed and the general form of the transition amplitude was deduced.

Key Words: Collision theory, Noncommutative Geometry, Quantum Field Theory.

Résumé

Dans ce travail de recherche, après une description générale de la théorie de collision dans un espace-temps commutatif, on a étudié ce phénomène de la diffusion dans le cadre de la géométrie non commutative. En particulier, on a considéré l'espace-temps non commutatif. Le formalisme général a été développé et quelques applications ont été discutées. En effet, on a considéré plusieurs méthodes différentes: la première consiste à remplacer le produit ordinaire par un produit star de Moyal (équivalence entre l'approche de l'espace commutatif et non commutatif) et calculer l'amplitude de transition à l'ordre q et par conséquent la section efficace. Il s'est avéré que la section efficace non commutative est le produit de celle obtenue dans un espace-temps commutatif et un facteur correctif qui dépend de l'angle de diffusion et du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps. Comme applications, on a considéré le potentiel de Yukawa et de Coulomb ainsi que le calcul du facteur de forme. La deuxième consiste à utiliser l'approche du décalage de Bopp.

La forme du résultat obtenu est la même que celle de la première méthode avec un facteur de différence dans le terme correctif dû à la non commutativité de l'espace-temps.

Comme applications, l'exemple de la sphère dure, le potentiel de Yukawa et Coulomb ainsi que le calcul du facteur de forme ont été considérés. La troisième méthode consiste à utiliser l'approche de l'onde désordonnée dans l'approximation de Born. La forme générale de l'amplitude de diffusion a été obtenue dans le cadre du formalisme des ondes partielles. Enfin, pour des potentiels qui ne sont pas faibles et où on ne peut pas utiliser la théorie de perturbation, la version non commutative de la méthode WKB a été développée et la forme générale de l'amplitude de transition a été aussi déduite.

Mots clés : Théorie des Collision, Géométrie Noncommutative, Théorie des champs

ملخص

تناولنا في هذا البحث، بعد وصف عام لنظرية التصادمات في فضاء-زمني تبديلي ظاهرة الإنتشار في إطار الهندسة غير التبديلية.

في الحالة الخاصة اعتبرنا الفضاء-الزمني غير تبديلي، حيث طورنا النموذج العام وناقشنا بعض التطبيقات:

الأولى عوضنا فيها الجداء العادي بالجداء النجمي الذي يعرف بجداء "Moyal" (التكافؤ بين الفضاء التبديلي وغير التبديلي) حيث حسبنا سعة الإنتشار برتبة θ ومنه حسبنا مقطع التفاعل.

فوجدنا أن مقطع التفاعل في فضاء-زمني غير تبديلي ما هو إلا مجموع حدين، أولهما هو مقطع التفاعل في فضاء-زمني تبديلي و ثانيهما هو التصحيح الناتج عن كون الفضاء-الزمني غير تبديلي حيث أن هذا التصحيح يتعلق بزاوية الإنتشار ووسيط الهندسة اللاتبديلية θ .

وكتطبيقات لهذه الطريقة، أخذنا مثال كمون " Yukaw " وكمون " Coulomb " وكذلك حسبنا معامل الشكل.

أما الطريقة الثانية فاستعملنا فيها إزاحة " Bopp "، إذ وجدنا أن شكل النتيجة المحصل عليها هو نفسه المتحصل عليه باستعمال الطريقة الأولى ما عدا اختلاف معامل في الحد التصحيحي الناتج عن كون الفضاء-الزمني غير تبديلي.

وكتطبيقات لهذه الطريقة، أخذنا مثال كمون الكرة الصلبة وكمون " Yukaw " وكمون " Coulomb " وكذلك حسبنا معامل الشكل.

الطريقة الثالثة تعتمد في استعمالها على الموجة المبعثرة في تقريبات " Born ". الشكل العام لسعة الإنتشار المحصل عليه كان في إطار نموذج الأمواج الجزئية. وفي الأخير، من أجل الكمونات غير الضعيفة و التي لا نستطيع أن نطبق عليها نظرية الاضطرابات، طورنا طريقة W.K.B. في فضاء-زمني غير تبديلي وتم تقليص الشكل العام لسعة الإنتشار.

الكلمات المفتاحية: نظرية التصادم، الهندسة غير التبديلية، نظرية الحقول المكممة.