

République Algérienne démocratique et populaire
Ministre de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

Université Mentouri Constantine
Faculté des sciences exactes
Département de physique

N° d'ordre.....

Série.....

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de MAGISTER en Physique
Spécialité : Physique énergétique
Option : Photo thermique

Thème

**La convection mixte dans un espace annulaire
entre deux cylindres concentriques**

Par

HARI Z ABDELKADER KHALED

Soutenu le : ... / ... / 2008

Devant le jury :

Président	L. BAH	Prof	Univ. Mentouri	Constantine
Rapporteur	T. BOUFENDI	M. C	Univ. Mentouri	Constantine
Examineurs	M. AFRID	Prof	Univ. Mentouri	Constantine
	N. ATTAF	M. C	Univ. Mentouri	Constantine

Sommaire

Sommaire

Remerciements

Nomenclature

Introduction

Chapitre 1 : La recherche bibliographique

Chapitre 2 : Modélisation mathématique

2.1 Description du système	14
2.2 Le modèle mathématique.....	15
2.2.1 Equations de conservation	15
2.2.1.1 Equation de continuité.....	15
2.2.1.2 L'équation de quantité de mouvement suivant r	15
2.2.1.3 L'équation de quantité de mouvement suivant θ	15
2.2.1.4 L'équation de quantité de mouvement suivant z	16
2.2.1.5 L'équation de l'énergie	16
2.2.2 Conditions aux limites	16
2.3 Adimensionnelle du problème	17
2.3.1 Forme adimensionnelle des équations de conservation	17
2.3.1.1 Equation de continuité.....	17
2.3.1.2 L'équation de quantité de mouvement radiale.....	17
2.3.1.3 L'équation de quantité de mouvement azimutale.....	17
2.3.1.4 L'équation de quantité de mouvement axiale.....	18
2.3.1.5 L'équation de l'énergie	18
2.3.2 Forme adimensionnelle des conditions aux limites.....	18
2.4 Le nombre de Nusselt	19

Chapitre 3 : Résolution numérique

3.1 Choix de la méthode de résolution.....	22
3.2 Le maillage	22
3.3 La discrétisation des équations	25
3.3.1 La discrétisation temporelle.....	25
3.3.1.1 Les termes non stationnaires	25
3.3.1.2 la discrétisation des termes convectifs et non linéaires	26
3.3.1.3 Les autres termes	26

3.3.2 La discrétisation spatiale	26
3.3.3 Stockage des variables	28
3.4 La discrétisation des équations	28
3.4.1 Equation de continuité	28
3.4.2 Equation de quantité de mouvement radiale	29
3.4.3 Equation de quantité de mouvement azimutale	33
3.4.4 Equation de quantité de mouvement axial	37
3.4.5 L'équation d'énergie	40
3.5 Discrétisation des conditions aux limites	42
3.5.1 A l'entrée du cylindre	42
3.5.2 A la sortie du cylindre	43
3.5.3 Sur la paroi du cylindre intérieur	45
3.5.4 Sur les parois du cylindre extérieur	46
3.6 Equation de pression	46
3.7 Séquence de l'algorithme SIMPLER de calcul	50
3.8 Solution des systèmes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage	50
3.8.1 L'algorithme de Thomas	51
3.8.2 L'algorithme de Thomas cyclique	52

Chapitre 4 : Résultats et discussion

4.1 Introduction	56
4.2 Le cas de référence : La convection forcée ($Gr^* = 0$)	56
4.2.1 Le champ de vitesse	56
4.2.2 La distribution des températures	57
4.2.3 La variation axiale de la température moyenne	59
4.2.4 La distribution de pression	59
4.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial	61
4.3 Les cas de la convection mixte	62
4.3.1 La convection mixte: le cas $Gr^* = 2500$	62
4.3.1.1 Le champ de vitesse	62
4.3.1.2 L'écoulement secondaire	63
4.3.1.3 Distribution de température	66
4.3.1.4 La distribution de pression	67

4.3.1.5 Variation du nombre de Nusselt axial	68
4.3.2 La convection mixte: le cas $Gr^* = 12500$	69
4.3.2.1 Le champ de vitesse	69
4.3.2.2 L'écoulement secondaire	70
4.3.2.3 Distribution des températures	73
4.3.2.4 La distribution de pression	74
4.3.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial	76
4.3.3 La convection mixte: le cas $Gr^* = 25000$	77
4.3.3.1 Le champ de vitesse	77
4.3.3.2 L'écoulement secondaire	78
4.3.3.3 Distribution des températures	80
4.3.3.4 La distribution de pression	81
4.3.3.6 La variation du nombre de Nusselt axial	83
4.3.3.7 Comparaison des nombres de Nusselt	84
4.4 La convection mixte avec ailettes.....	85
4.4.1 Caractéristiques géométriques et physiques des ailettes	85
4.4.2 Le cas de référence: La convection forcée ($Gr^* = 0$) avec quatre ailettes....	86
4.4.2.1 Le champ de vitesse	86
4.4.2.2 Distribution des températures	87
4.4.2.3 La variation axiale de la température moyenne	88
4.4.2.4 La distribution de pression	89
4.4.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial	91
4.4.3 La convection mixte avec ailettes.....	92
4.4.3.1 La convection mixte: le cas $Gr^* = 2500$	92
4.4.3.1.1 Le champ de vitesse	92
4.4.3.1.2 L'écoulement secondaire	94
4.4.3.1.3 Distribution des températures	102
4.4.3.1.4 La distribution de pression	105
4.4.3.1.5 La variation du nombre de Nusselt axial	107
4.4.3.2 La convection mixte: le cas $Gr^* = 10000$	108
4.4.3.2.1 Le champ de vitesse	108
4.4.3.2.2 L'écoulement secondaire	112
4.4.3.2.3 Distribution des températures	117
4.4.3.2.4 La distribution de pression	121

4.4.3.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial.....

122

Chapitre 5 : Conclusion générale

Bibliographie

Abstract

Résumé en arabe

Nomenclature

d	:	diamètre caractéristique (m)
e_i	:	épaisseur du cylindre intérieur (m)
e_e	:	épaisseur du cylindre extérieur (m)
$h(\theta, z)$:	coefficient de convection thermique local (W/m^2K)
$h(z)$:	coefficient de convection thermique axial (W/m^2K)
IL	:	nombre de nœuds total dans la direction radiale
JL	:	nombre de nœuds total dans la direction axiale
KL	:	nombre de nœuds total dans la direction azimutale
K	:	conductivité thermique du fluide (W/mK)
K_s	:	conductivité thermique du solide (W/mK)
L	:	longueur du conduit (m)
L^*	:	longueur adimensionnelle du conduit (m)
P	:	pression (Pa)
P^*	:	pression adimensionnelle $[(P - P_0)/\rho_0 V_0^2]$
q_w	:	densité de flux de chaleur (W/m^2)
R_{1i}	:	rayon intérieur du cylindre intérieur (m)
R_{1e}	:	rayon extérieur du cylindre intérieur (m)
R_{2i}	:	rayon intérieur du cylindre extérieur (m)
R_{2e}	:	rayon extérieur de cylindre extérieur (m)
r	:	coordonnée dans la direction radiale (m)
r^*	:	coordonnée radiale adimensionnelle (r/d)
t	:	temps (s)
t^*	:	temps adimensionnelle ($V_0 t/d$)
T	:	température (K)
T^*	:	température adimensionnelle $(\frac{T - T_0}{q_w d/K})$
U	:	composante radiale de la vitesse (m/s)
U^*	:	composante radiale de la vitesse adimensionnelle (U/V_0)

V	:	composante axiale de la vitesse (m/s)
V*	:	composante axiale adimensionnelle de la vitesse (V/V ₀)
V ₀	:	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit (m/s)
W	:	composante azimutale de la vitesse (m/s)
W*	:	composante azimutale adimensionnelle de la vitesse (W/V ₀)
z	:	coordonnée dans la direction axiale (m)
z*	:	coordonnée axiale adimensionnelle (z/d)

Symboles Grecs

α	:	diffusivité thermique (m ² /s)
β	:	coefficient d'expansion thermique (1/K)
Δ	:	intervalle fini
θ	:	coordonnée dans la direction azimutale (rad)
μ	:	viscosité dynamique (kg m/s)
ν	:	viscosité cinématique (m ² /s)
ρ	:	masse volumique (kg/m ³)

Indices

N, S	:	noeuds nord et sud respectivement
E, W	:	noeuds est et ouest respectivement
T, B	:	noeuds haut et bas respectivement
n, s	:	faces nord et sud du volume de contrôle typique respectivement
e, w	:	faces est et ouest du volume de contrôle typique respectivement
t, b	:	faces haut et bas du volume de contrôle typique respectivement
i, e	:	fait référence aux surfaces internes et externes des cylindres
m	:	moyen
P	:	fait référence au nœud P d'un volume fini typique
u	:	décalage de maillage suivant la direction radiale
w	:	décalage de maillage suivant la direction azimutale
v	:	décalage de maillage suivant la direction axiale
i	:	relatif au nœud considéré
i+1	:	relatif au nœud en amont du nœud considéré
i-1	:	relatif au nœud en aval du nœud considéré

Exposants

- * : variable adimensionnelle
- 1 : désigne l'instant t
- 0 : désigne l'instant t - Δt

Nombres sans dimension

- Re : nombre de Reynolds = $\frac{\rho_0 v_0 d}{\mu}$
- Pr : nombre de Prandtl = $\frac{\nu}{\alpha}$
- Ri : nombre de Richardson = $\frac{Gr}{Re^2}$
- Gr : nombre de Grashof = $\frac{g\beta q_w d^4}{K\nu^2}$
- Nu(θ, z) : nombre de Nusselt local = $\frac{h(\theta, z) d}{K}$
- Nu(z) : nombre de Nusselt local axial moyen circonférentiel = $\frac{h(z) d}{K}$
- Nu : nombre de Nusselt moyen

Introduction

Lorsqu'au sein d'un même fluide (liquide ou gaz) se produit une différence de température, la densité du fluide n'est plus égale partout. Du fait de la poussée d'Archimède : "*tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une poussée verticale dirigée du bas vers le haut, égale au poids du volume de fluide déplacé*", cette différence de densité produit un mouvement au sein du liquide. Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes et légères du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, s'appelle **convection**. Les mouvements dus uniquement à des différences de température du fluide constituent la **convection naturelle** comme les mouvements des grandes masses d'air autour de la terre, l'action des vents, la formation des nuages, les courants océaniques ou plus simplement le phénomène d'aspiration d'une cheminée.

La **convection forcée** est obtenue en soumettant le fluide à une augmentation de pression, qui favorisera le brassage du fluide (*) comme par exemple l'échange entre chaud et froid dans des échangeurs (convection forcée), refroidissement d'une tasse de liquide chaud en soufflant dessus (convection forcée) et l'action mécanique d'un ventilateur afin de refroidir l'ambiance dans une pièce ou un local chauffé. L'association de ces deux modes de convection, forcée et naturelle s'appelle **la convection mixte**. Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson Ri qui est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds: $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$ (**).

Si : $\frac{Gr}{Re^2} < 0.1$ c'est la convection forcée qui domine.

Si : $\frac{Gr}{Re^2} > 10$ c'est la convection naturelle qui domine.

Si : $0.1 < \frac{Gr}{Re^2} < 10$ c'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

*<http://www.x86-secret.com/articles/divers/stt/stt-3.htm>

**<http://www.rose-hulman.edu/~adams1/courses/me462/other/map/fluidprops.html>

Dans cette thèse nous étudions les écoulements de convection forcée et mixte, laminaire, dans l'espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux dont le cylindre extérieur est soumis à un flux de chaleur pariétal imposé constant alors que le conduit intérieur est adiabatique.

Le premier chapitre présente une recherche bibliographique sur les études menées sur les convection forcée, naturelle et mixte dans les conduits cylindriques annulaires sans ailettes et avec ailettes. Le deuxième chapitre contient une description du système physique et sa modélisation mathématique qui se traduit par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie régissant ce problème conducto-convectif tridimensionnel pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes. Les conditions initiales et aux limites dynamiques et thermiques relatives à ce problème seront explicitées. Le troisième chapitre présente la résolution numérique du problème physique considéré. Le maillage du domaine physique ainsi que les détails de la discrétisation des équations de conservation par la méthode numérique des volumes finis, basée sur des schémas du second ordre dans l'espace et le temps sont bien mis en évidence. La solution des systèmes d'équations discrétisées obtenus selon l'algorithme SIMPLER est aussi détaillée. Les algorithmes de Thomas et Thomas Cyclique qui permettent de résoudre chaque système d'équations algébriques sont aussi présentés. Quant au quatrième chapitre, ce dernier regroupe l'ensemble des résultats obtenus dans cette étude. Ils sont organisés en deux grandes parties. La première concerne ceux d'une convection forcée et mixte dans un conduit cylindrique annulaire sans ailettes tandis que la deuxième partie présente les résultats d'une convection forcée et mixte dans un conduit cylindrique annulaire muni d'ailettes transversales internes. Une conclusion générale se trouve dans le cinquième chapitre qui clôture ce travail.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Conformément au sujet de cette thèse, cette recherche bibliographique présente une revue synthétisée des études théoriques, analytiques et numériques, ainsi qu'expérimentale sur la convection forcée, naturelle et mixte, laminaire, dans des conduits cylindriques annulaires sans ailettes et ceux équipées d'ailettes. En suivant globalement un ordre chronologique on a résumé ces différentes études avec leurs auteurs.

Kumar [1], a étudié numériquement un modèle à deux dimensions de longueur infinie, pour deux cylindres annulaires horizontaux concentriques où le cylindre intérieur est soumis à un flux de chaleur constant et le cylindre externe est refroidi et isotherme. L'auteur trouve que le nombre de Rayleigh Ra critique est atteint pour des valeurs numériques égales à $3,1 \cdot 10^5$ et $3 \cdot 10^6$ et pour un rapport des diamètres $D_0/D_i = 1,5$ et $2,6$ respectivement. Il a aussi mentionner la difficulté de juger si le courant deviendrait oscillatoire ou tri dimensionnel au-delà de Ra critique, et un ratio donné de D_0/D_i .

L'écoulement et le transfert de chaleur à convection laminaire et turbulente à travers un tube, ont été étudiés par plusieurs auteurs. **Carmella et Christensen [2]**, ont étudié le comportement hydrodynamique et les caractéristiques des cannelés annulaires en formes spirales pour les régimes laminaires, de transition et turbulent, de façon expérimentale. Ils ont constaté que les tubes intérieurs cannelés ont induit un degré important de tourbillon dans l'écoulement, et la transition varie de Reynolds $310 \leq R_e \leq 10^3$. Pour $R_e \geq 310$, les nombres de Nusselt étant 4 à 20 fois celui correspondant à une géométrie lisse, et pour le nombre de Reynolds $R_e \leq 10^3$, les nombres de Nusselt ont augmenté de 1.1 et 4 fois.

Ball et al. [3], présentent les résultats d'une étude expérimentale des écoulements convectifs dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques. Le cylindre intérieur est tournant et chaud, tandis que l'autre est immobile et froid. Des plans horizontaux immobiles ferment la cavité. Le fluide est l'air ($Pr = 0.7$). On s'intéresse aux flux de chaleur qui sont intimement liés à la structure du champ des vitesses. Dans les systèmes tournants, l'existence d'instabilités hydrodynamiques peut conduire à une variété d'écoulements secondaires. A chaque transition dans l'écoulement, les mécanismes de transport sont altérés et il en résulte des changements dans les transferts de chaleur et de quantité de mouvement. Une étude paramétrique pour le flux moyen de chaleur est faite à travers l'espace annulaire, et aussi une étude qualitative des écoulements secondaires. Trois systèmes ont été utilisé,

caractérisés respectivement par des rapports des rayons $\eta = 0.437, 0.565$ et 0.656 , et par des rapports d'aspects $\Gamma = 31.44, 52.53$ et 77.20 .

Une simulation numérique a été faite par **Chung et al. [4]**, pour l'écoulement turbulent dans un tube annulaire et concentrique, pour deux rapports de rayon ($R_1/R_2 = 0,1$ et $0,5$). Leur objectif était d'élucider l'effet transversal de courbure sur les structures turbulentes à proximité de la paroi de l'écoulement d'un tube annulaire concentrique. Leurs résultats numériques ont démontré que les structures turbulentes à proximité de la paroi extérieure ont une activité plus intense que celle à proximité de la paroi intérieure.

En exprimant les équations de Navier-Stokes et de l'énergie en termes de vitesse-vorticité-température, **Thermina et al [5]**, procèdent à une résolution des équations complètes de conservation tridimensionnelles d'une convection mixte dans une géométrie annulaire avec une température et une vitesse constante à l'entrée du tube. Les cylindres intérieurs et extérieurs sont portés à des températures imposées. Le schéma des différences centrées est appliqué pour les équations de vorticité et d'énergie tandis que les équations de la vitesse sont exprimées selon un schéma du 4^{ème} ordre. La méthode des directions alternées (**ADI**) est utilisée pour leur résolution.

Renzoni et Parahsh [6], ont analysé numériquement l'écoulement laminaire et le transfert de chaleur dans la région d'entrée d'un conduit concentrique à ailette. Les ailettes sont continues, radiales et supposées être d'une épaisseur égale à zéro. De forts gradients de pression et des coefficients de transfert de chaleur élevée ont été obtenus dans la région d'entrée. Ils ont approché les valeurs entièrement développées asymptotiquement à la distance axiale.

Une étude numérique est menée par **Moukalled et al [7]**, dont l'objectif est l'étude la convection naturelle dans un espace annulaire d'une cavité rhombique sans ailette. Le fluide utilisé dans ce système est l'air avec un nombre de Prandtl $Pr = 0.7$. Le domaine de variation du nombre de Rayleigh est $10^3 \leq Ra \leq 10^7$, avec une paroi intérieure chaude et une paroi extérieure froide. Les équations de conservation sont résolues par la méthode des volumes finis et l'espace de calcul est représenté par un maillage curviligne. Les résultats obtenus montrent qu'à la paroi chaude une augmentation proportionnelle entre le nombre de Rayleigh

et le gradient de température, ainsi qu'une augmentation locale du gradient de température à la paroi froide. Aux faibles nombres de Ra, en partant de la paroi chaude vers la paroi froide pour $Ra \approx 10^3$, ils remarquent une présence d'un minimum et d'un maximum, local, entre les parois.

L'influence des ailettes internes sur la convection mixte dans la région complètement développée de tubes horizontaux est étudiée par **Farinas et al [8]**. Ils ont étudié analytiquement et numériquement la convection mixte laminaire dans un espace annulaire avec ailettes internes pour deux, quatre et seize ailettes. La paroi intérieure chaude et la paroi extérieure froide, et pour des nombres du Grashof variant de 10^2 à 10^4 . Le modèle mathématique, composé des équations de conservation est résolu par la méthode des différences finies. Les résultats sont présentés pour l'air ($Pr = 0.7$) avec des nombres de Rayleigh variant de 10^3 à 10^6 pour différentes configurations d'ailettes (fine, arrondie ou divergente) et différentes longueurs d'ailettes ($L = 0.25, 0.5$ et 0.75). Le transfert de chaleur est à peu près le même pour les trois géométries d'ailettes, mais on associe à l'ailette arrondie la meilleure efficacité.

Une étude numérique menée par **M.I. Farinas et al [9]**, concernant le transfert convectif laminaire dans une cavité horizontale rhombique avec ailette. Les équations de conservation sont résolues par une méthode d'éléments finis, et représentée par des largeurs de cavité variant de 0,25 à 0,875, la longueur d'ailettes varie de 0,3 à 0,7 et des nombres de Rayleigh s'échelonnant entre 10^3 et 10^7 . Les résultats montrent que le transfert de chaleur est maximal dans la cavité étroite de largeur $E_g = 0.52$ munie d'ailettes de longueur $L = 0.7$. Dans ce cas, la conduction domine la convection. Quand d'autre part, la convection domine, le transfert de chaleur est maximisé pour $E_g = 0.875$ et $L = 0.7$.

Habib et al. [10], ont étudié numériquement l'écoulement turbulent et le transfert de chaleur dans un canal convergent-divergent et sinusoidalement variable. Ils ont obtenu une corrélation pour un nombre moyen de Nusselt avec le nombre Reynolds. Ils ont constaté que pour un tube convergent-divergent les baisses de pression sont plus grandes que pour celles d'un tube droit. Ils ont également investi l'admission des effets de tourbillon. Ils ont trouvé

qu'une augmentation dans l'admission de tourbillon cause une réduction dans la séparation et une augmentation dans le transfert de chaleur.

Schneider et Wasel [11] ont étudié le problème de convection thermique mixte sur une plaque plane. La singularité qui apparaissait dans les résolutions précédentes est levée. En fait les équations ne sont pas paraboliques et doivent être résolues par une procédure globale. Suivant la condition de sortie une solution différente est calculée. Le résultat obtenu numériquement pour la paroi chaude montre des oscillations : le couplage $p = A$ est instable. Tandis que pour la paroi froide il y a apparition de la solution de "branchement" en exponentielle croissant (retrouvé par **Steinrück [12]**) associée au couplage $p = -A$. On observe un déplacement vers le haut des lignes de courant et la séparation de la couche limite. Certaines présentant une zone de circulation et la structure mise en évidence correspond à une sorte de ressaut hydrodynamique.

M.Avcı et O.Aydın [13], ont étudié analyse de manière analytique le transfert de chaleur par convection forcée avec dissipation visqueuse dans des écoulement pleinement établis à l'intérieur des conduits annulaires concentriques. On considère deux conditions aux limites: un flux de chaleur uniforme à travers la paroi extérieure avec une paroi intérieur adiabatique (cas A) ou bien un flux de chaleur uniforme à travers la paroi intérieur avec la paroi extérieure adiabatique (cas B). Les solutions pour les distributions de la vitesse et de la chaleur, ainsi que le nombre de Nusselt ont été trouvées, correspondant aux valeurs différentes de rapport d'aspect et du nombre de Brinkman (Br). Les résultats trouvés ici en l'absence d'effet de dissipation sont comparés avec ceux que l'on trouve dans la littérature, avec un excellent accord entre les deux.

T. Hung Nguyen et al [14], ont étudié la convection naturelle de l'eau froide entre deux cylindres horizontaux et concentriques avec des températures de surface constantes. Les équations de base sont résolues par la méthode de perturbation et les solutions sont exprimées en série puissance du nombre de Rayleigh non-linéaire. Les configurations de l'écoulement et les flux thermiques sont présentes en fonction du rapport des rayons R , du nombre de Rayleigh non-linéaire Ra , et le paramètre d'inversion γ , qui déterminent essentiellement la taille et les effets des cellules de convection qui apparaissent dans la cavité à partir de

L'inversion de densité de l'eau à 4°C. Un bon accord est obtenu avec les résultats numériques et expérimentaux existants.

G. Petrone et al [15], ont étudié concerne la simulation numérique des écoulements bidimensionnels de transfert thermique d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.2$) dans une cavité annulaire horizontale de grand rapport de rayons ($r_e/r_i = 5$) et dans laquelle le cylindre interne est plus chaud que le cylindre externe. Les nombres de Rayleigh utilisés sont compris entre 10^3 et 10^4 . Différents écoulements ont été obtenus en utilisant des méthodes d'intégration temporelle, d'abord stationnaires puis oscillatoires mono périodiques. L'objectif de leur travail est d'analyser, sous l'approximation de Boussinesq, les écoulements induits par le gradient thermique puis de conduire une analyse de stabilité linéaire de ces solutions permettant de mettre en évidence les bifurcations. En particulier, la symétrie par rapport à l'axe vertical passant par le centre des cylindres, qui permet de caractériser les écoulements à petits nombres de Rayleigh, est brisée par l'apparition d'une bifurcation de type fourche. Ce résultat original, obtenu dans le cadre des écoulements bidimensionnels, offre de nouvelles perspectives aux travaux de convection naturelle entre cylindres coaxiaux.

Metais et Eckert [16], ont examiné la littérature disponible, et ont présenté une cartographie des différents régimes pour des écoulements laminaires et turbulents dans des tubes verticaux et horizontaux avec l'un ou l'autre la température constante uniforme de paroi ou de flux de chaleur de paroi uniforme. Le paramètre sur l'abscisse de leurs cartes bidimensionnelles de régime est le produit du nombre de Grashof, Gr , basé sur la différence entre le tube-paroi et les températures en bloc liquides, le nombre de Prandtl, Pr , et le rapport de diamètre à longueur, D/L ; le paramètre sur l'ordonnée est nombre de Reynolds, Re . Leurs cartes de régime d'écoulement indiquent le mode de transfert thermique (forcé, mixte ou convection libre) qui est dominante pour une valeur donnée des Re et de $GrPr(D/L)$. Comme ils s'attendaient, la convection libre domine quand la valeur de $GrPr(D/L)$ est suffisamment grande, tandis que l'augmentation en valeur des Re augmente l'effet de la convection forcée.

Le travail théorique sur le transfert thermique de convection mixte dans des tubes verticaux circulaires de section transversale a été étudié la première fois par **Martinelli et Boelter [17]**. Ils ont analysé entièrement l'écoulement laminaire développé dans lequel ils ont admis la variation linéaire de la densité avec la température. Il ont supposé aussi que la

vitesse immédiatement à côté de l'interface de tube-fluide change linéairement avec la distance de la paroi. Ces suppositions ont rendu le problème favorable à l'analyse mathématique, et ils ont obtenu une équation explicite pour le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Grashof, du nombre de Prandtl, et du diamètre au rapport de tube-longueur. L'équation obtenue par [17], était remarquablement réussie et retrouvait les données expérimentales avec une exactitude de +.20%.

Jackson et al [18] ont étudié le transfert thermique de convection mixte dans un tube horizontal soumis à une température de paroi constante. Le fluide de fonctionnement était l'air et l'écoulement se développait hydrodynamiquement et thermiquement; Le produit du nombre de Grashof (basé sur la différence logarithmique de la température moyenne) et nombre de Prandtl, $GrPr$, étendu de $1.1 \cdot 10^6$ à 2.210^6 . Le nombre de Graetz, Gz , a été changé de 60 à 1300. Une corrélation pour le nombre de Nusselt d'écoulement laminaire en fonction de $GrPr$ et de Gz était développée. Leurs résultats ont indiqué que la transition laminaire à turbulente s'est produite à des produits Reynolds-Prandtl, $RePr$, approximativement de 2450. Une corrélation pour le turbulent le nombre de Nusselt d'écoulement en fonction des Re et du Pr a été également développé.

Les effets de la dissipation visqueuse sur la vitesse et le champ de température sont négligeables pour l'écoulement forcé entièrement développé. Cependant, le nombre de Nusselt diminue pendant l'augmentation de la dissipation visqueuse. Pour l'écoulement ascendant, **Kim [19]**, a étudié le problème de la convection naturelle, laminaire et entièrement développée dans un espace annulaire circulaire d'un tube. En utilisant une combinaison arbitraire des flux uniformes de chaleur imposés sur les surfaces intérieures et extérieures du conduit annulaire, l'auteur a cherché à obtenir la forme des solutions analytiques pour la vitesse et la température. Le nombre de Nusselt a été déterminé à l'aide de ces solutions. Il a montré que le problème a été caractérisé par rapport au diamètre, au rapport du nombre de Grashof et du Reynolds, et au flux de chaleur. Des solutions fondamentales qui sont indépendantes du flux de la chaleur ont été obtenues, dont les solutions générales pour n'importe quel rapport de flux de la chaleur peuvent être facilement obtenues, simplement en employant le principe de superposition. C'est possible aux conditions entièrement développées pour l'écoulement de fluides avec les propriétés constantes où la non-linéarité est absente. Les résultats ont montré que le transfert de chaleur augmente de manière significative avec l'augmentation de Gr/Re .

Plusieurs théoriciens ont analysé l'écoulement laminaire dans des tubes intérieurement ailetés (Soliman et al 1980 ; Renzoni et Prakash, 1987 ; Rustum et Soliman, 1988 et 1990) . **Soliman et al. [20]**, étudient la distribution de la température des ailettes, la température du liquide et le flux local de la chaleur avec la température extérieure uniforme de paroi a été numériquement obtenu pour des configurations à ailettes et sans ailettes. Les résultats ont montré que la distribution de la chaleur et le flux dépendait du nombre d'ailettes et de la taille des ailettes et que le tube à ailettes a eu un meilleur transfert thermique en surface par rapport au tube lisse.

Renzoni et Prakash [21], ont obtenus les caractéristiques d'écoulement et de transfert thermique pour un écoulement se développant dans la région d'entrée d'un échangeur de chaleur intérieurement à ailettes. Les résultats théoriques ont montré la chute de pression et le nombre de Nusselt pour la zone d'entrée aussi bien que des évaluations pour les longueurs hydrodynamiques et thermiques d'entrée.

D'autres articles concernant l'écoulement en convection mixte laminaire dans des tubes intérieurement à ailettes ont été faits par **Rustum et Soliman [22]**. Les résultats expérimentaux montrés pour la chute de pression et caractéristiques de transfert thermique pour écoulement laminaire. Les résultats ont prouvé que la convection libre a eu une influence forte sur le transfert thermique et approché les prévisions la convection forcée en tant que nombre de Rayleigh diminué. L'analyse numérique a été basée sur le Grashof modifié, le nombre de Prandtl, le nombre d'ailerons et la taille relative d'aileron. De l'analyse, de l'écoulement secondaire, la vitesse axiale et la distribution de la température, le flux de chaleur de la paroi, le facteur de frottement et le nombre moyen de Nusselt ont été dérivés. Ces résultats ont été comparés à des résultats expérimentaux et la bonne corrélation a été trouvée. D'autres conclusions étaient que le début des effets convecteurs libres a été retardé et cela pour le perfectionnement du frottement, le facteur de frottement et le nombre de Nusselt.

Dans un article par **Patankar et al [23]**, un modèle de mélange de longueur a été employé pour analyser un tube intérieurement à ailettes et annulaire intérieurement à ailettes. Pour l'analyse du nombre de Nusselt, le facteur et de frottement a été dérivé. Les résultats ont également prouvé que les ailerons aidaient à améliorer la surface de transfert que la paroi de tube.

Habib et A. Negm [24], ont étudié numériquement la convection mixte laminaire dans la région entièrement développée des anneaux concentriques horizontaux. Cette convection mixte a été étudiée numériquement pour le cas du chauffage circulaire non-uniforme. Deux conditions de chauffage ont été étudiées, une fois la moitié supérieure de la surface intérieure du cylindre intérieur, est uniformément chauffé tandis que la moitié inférieure est maintenue isolée, et l'autre dans lequel les surfaces chauffées et isolées ont été inversées. Les caractéristiques dynamique du fluide et de transfert thermique se sont avérées très affectées par les conditions de chauffage. Pour la gamme étudiée du paramètre régissant la flottabilité, le nombre modifié de Grashof (Gr^*), on a constaté que le dispositif de chauffage inférieur provoque un écoulement secondaire vigoureux, avec le résultat que les nombres de Nusselt moyens sont beaucoup plus importants que ceux pour la convection forcée pure. D'autre part, les nombres de Nusselt sont presque circonférentiellement uniformes. Dans le cas du dispositif de chauffage supérieur, un écoulement secondaire moins vigoureux est induit en raison de la stratification de la température, avec les nombres de Nusselt moyens qui sont sensiblement inférieurs à ceux obtenus avec un chauffage intérieur et avec une grande variation angulaire du nombre local de Nusselt.

Le transfert thermique dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques avec les ailettes radiales est étudié numériquement par **M Rahnama et al [25]**. Les équations de base de conservation sont discrétisées en utilisant l'approche de volume finie ainsi que l'algorithme SIMPLER. Des calculs sont exécutés pour l'écoulement laminaire avec des nombres de Rayleigh jusqu'à 10^6 . Les champs de vitesse et de température sont présentés pour différents nombres de Rayleigh et tailles d'ailette par les parcelles de terrain aérodynamiques et isothermes. Les calculs prédictifs du nombre de Nusselt moyen prouvent que la taille d'ailette a une valeur optimum pour laquelle le taux de transfert thermique est augmenté. Les longues ailettes ont un effet de blocage sur le recyclage d'écoulement.

Abid et al [26], ont étudié expérimentalement le transfert thermique de convection mixte laminaire dans un tube horizontal uniformément chauffé par voie électrique. Le fluide de travail était de l'eau distillée, et l'écoulement a été rendu entièrement développé à l'entrée de la section de chauffage. En utilisant le procédé de la thermographie infrarouge, ils ont mesuré la distribution de la température sur la surface extérieure de la paroi du tube. Ils ont rapportées des variations circulaires substantielles et une symétrie par rapport à la

perpendiculaire verticale à l'axe longitudinal du tube. Le maximum de la température était sur le sommet du tube avec une augmentation monotone le long du tube. Ce résultat est dû au fait qu'un fluide plus chaud se relève le long de la paroi, tandis que le fluide relativement plus froid descend pour le remplacer dans la partie inférieure du tube. Les résultats de leur analyse numérique ont confirmé leurs observations expérimentales et aussi ont confirmé l'existence d'écoulements secondaires, décrite plus tôt par **McComas et Eckert [27]** et photographié par **Mori et Futugami [28]**.

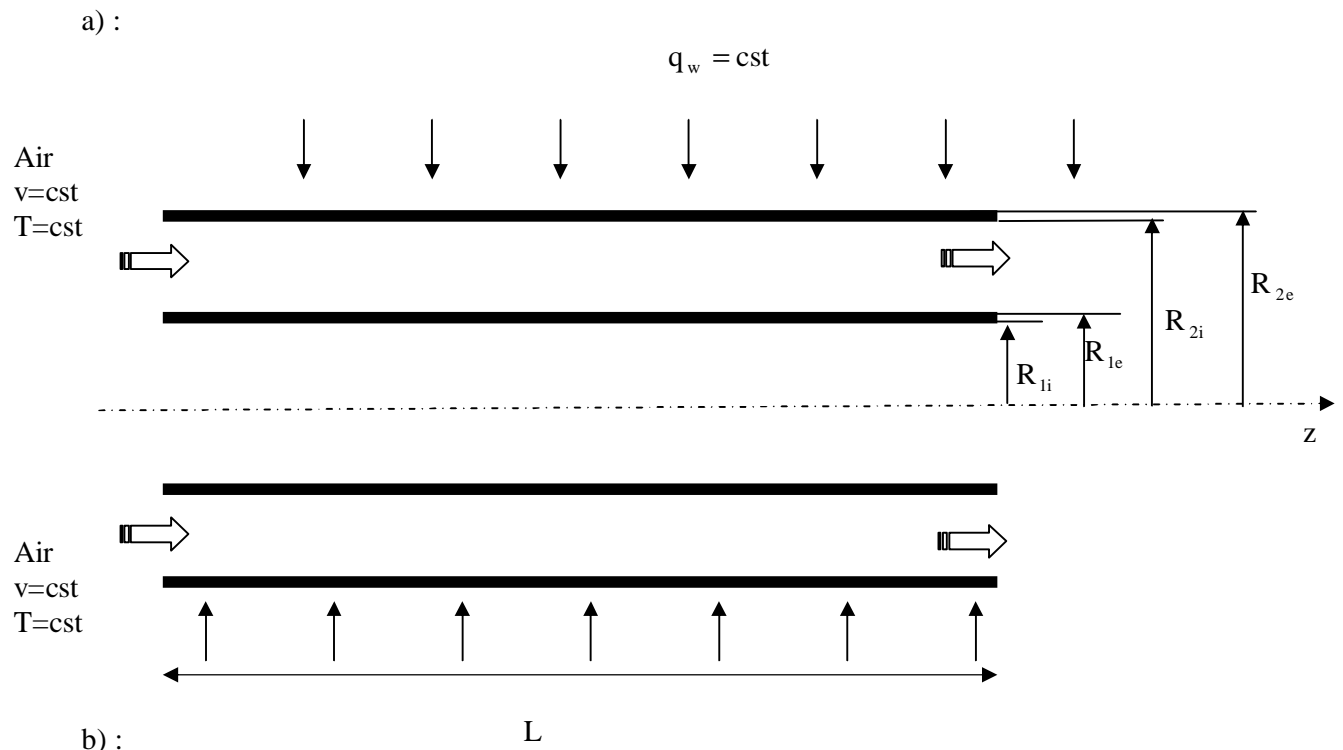
Enfin, concernant l'effet de la variation des propriétés physiques du fluide sur les écoulements de convection mixte dans les conduits soumis à un chauffage volumique, on peut citer les travaux numériques récents de **Boufendi et Afrid [29]** qui ont montré d'abord la non uniformité du flux thermique transmis au fluide ainsi l'effet non négligeable des propriétés physiques tout particulièrement celui de la viscosité. Dans ce cas le nombre de Nusselt moyen subit une augmentation de l'ordre de 58%.

Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Description du système

On considère un conduit annulaire constitué de deux cylindres concentriques horizontaux dans lequel s'écoule un fluide Newtonien et incompressible en écoulement laminaire. Le cylindre intérieur d'épaisseur finie e_i et de diamètres intérieur D_{1i} et extérieur D_{1e} est adiabatique sur sa paroi intérieure tandis que le cylindre extérieur d'épaisseur finie e_e et de diamètres intérieur D_{2i} et extérieur D_{2e} est soumis sur une longueur L à un flux de chaleur externe pariétal constant. A l'entrée du cylindre, le fluide se présente avec une vitesse et une température toutes deux constantes. Quant à la sortie, on considère que le conduit est assez long pour admettre un écoulement hydrodynamiquement développé et un flux thermique axial constant dans le fluide et dans le solide. Les propriétés thermophysiques du fluide, la conductivité thermique et la viscosité, sont supposées constantes excepté la masse volumique qui est une fonction linéaire de la température exprimée par l'approximation de Boussinesq. On considère aussi l'absence de toute source ou puit de chaleur dans l'entrefer cylindrique ainsi qu'une dissipation visqueuse négligeable. On admet aussi que le rayonnement à l'intérieur du passage annulaire est négligeable. La géométrie du système est représentée dans la figure 2.1 (a),(b).



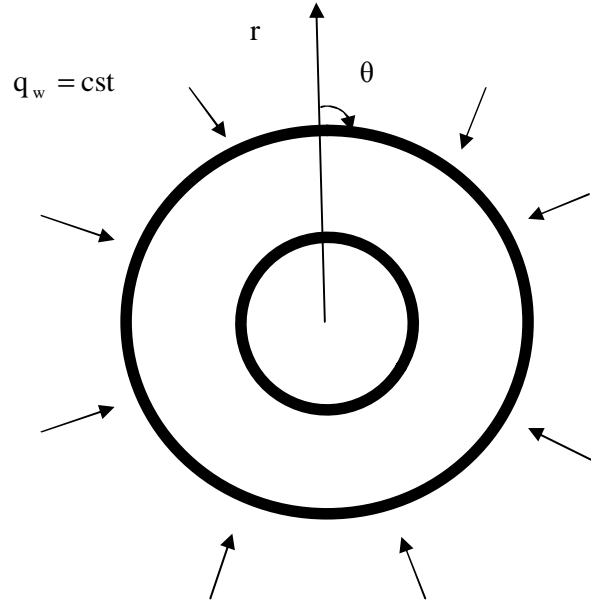


Figure 2.1 : Géométrie du système

2.2 Le modèle mathématique

Entre les deux cylindres, l'écoulement du fluide soumis à un chauffage pariétal est gouverné par les équations de conservation de la masse de la quantité de mouvement et de l'énergie.

$$\text{A } t=0, \quad u = w = v = T = 0 \quad (2.1)$$

2.2.1 Equations de conservation

A $t > 0$:

2.2.1.1 Équation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

2.2.1.2 Equation de quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wu) + \frac{\partial}{\partial z} (vu) - \frac{w^2}{r} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{m_0}{r_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q} (\frac{\partial u}{\partial q}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial u}{\partial z}) - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial q} \right] - \frac{r}{r_0} g \cos q \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2.1.3 Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruw) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (ww) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) + \frac{uw}{r} \right] = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$\frac{m_0}{r_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{r}{r_0} g \sin \alpha \quad (2.4)$$

2.2.1.4 Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wv) + \frac{\partial}{\partial z} (vv) \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2.5)$$

2.2.1.5 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruT) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wT) + \frac{\partial}{\partial z} (vT) \right] = \frac{K_0}{\rho_0 C_{p0}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K^* r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K^* \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\text{Où } K^* = \frac{K}{K_0} = \begin{cases} 1 & \text{dans le fluide} \\ K_s/K_0 & \text{dans le solide} \end{cases}$$

2.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites qui s'appliquent à ce problème sont les suivantes:

- A l'entrée du conduit : $z = 0$

*Domaine fluide :

$$R_{1e} \leq r \leq R_{2i} \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = 0, v = v_0 \text{ et } T = T_0 \quad (2.7)$$

*Domaine solide :

$$R_{1i} \leq r \leq R_{1e} \text{ et } R_{2i} \leq r \leq R_{2e} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = v = 0 \text{ et } T = T_0 \quad (2.8)$$

- A la sortie du conduit : $z = L$

*Domaine fluide :

$$R_{1e} \leq r \leq R_{2i} \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.9)$$

*Domaine solide :

$$R_{1i} \leq r \leq R_{1e} \text{ et } R_{2i} \leq r \leq R_{2e} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u = w = v = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

- Sur la paroi intérieure : $r = R_{1i}$

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq L \quad u = w = v = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{1i}} = 0 \quad (2.11)$$

- Sur la paroi extérieure : $r = R_{2e}$

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq L \quad u = w = v = 0 \text{ et } q_w = K_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_{2e}} \quad (2.12)$$

2.3 Adimensionnalisation du problème

Pour obtenir la forme adimensionnelle des équations modélisantes, on définit les grandeurs caractéristiques suivantes: le diamètre caractéristique : $d = D_{1e} - D_{2i}$, la vitesse caractéristique : v_0 , la pression caractéristique : $\rho_0 v_0^2$, le temps caractéristique : d/v_0 et la différence de température caractéristique : $\Delta T = q_w d / K_0$

Les variables dépendantes adimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} r^* &= r/d, \quad z^* = z/d \\ u^* &= u/v_0, \quad w^* = w/v_0, \quad v^* = v/v_0 \\ t^* &= v_0 t/d \\ p^* &= (p - p_0)/\rho_0 v_0^2 \quad \text{et} \quad T^* = (T - T_0)/\Delta T \end{aligned}$$

2.3.1 Forme adimensionnelle des équations de conservation

Sous la forme adimensionnelle le système d'équation (2.2)-(2.6) ainsi que les conditions initiale et aux limites s'écrivent :

$$\text{A } t^* = 0 : u^* = w^* = v^* = T^* = 0 \quad (2.13)$$

A $t^* > 0$:

2.3.1.1 Equation de continuité

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.14)$$

2.3.1.2 Equation de quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) - \frac{w^{*2}}{r^*} \right] &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* \\ + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial u^*}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial u^*}{\partial z^*}) - \frac{u^*}{r^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right] & \quad (2.15) \end{aligned}$$

2.3.1.3 Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* w^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* w^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* w^*) + \frac{u^* w^*}{r^*} \right] = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta T^*$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial w^*}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial w^*}{\partial z^*}) - \frac{w^*}{r^{*2}} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right] \quad (2.16)$$

2.3.1.4 Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial v^*}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial v^*}{\partial z^*}) \right] \quad (2.17)$$

2.3.1.5 Equation d'énergie

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) \right] = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (K^* r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (K^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z^*} (K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}) \right] \quad (2.18)$$

2.3.2 Forme adimensionnelle des conditions aux limites

Avec les conditions aux limites suivantes :

-A l'entrée du conduit : $z^* = 0$

*Domaine fluide :

$$R_{1e}^* \leq r^* \leq R_{2i}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = 0, v^* = 1 \text{ et } T^* = 0 \quad (2.19)$$

*Domaine solide :

$$R_{li}^* \leq r^* \leq R_{le}^* \text{ et } R_{2i}^* \leq r^* \leq R_{2e}^* \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = v^* = 0, T^* = 0 \quad (2.20)$$

-A la sortie du conduit: $z^* = L^*$

*Domaine fluide :

$$R_{1e}^* \leq r^* \leq R_{2i}^* \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial T^*}{\partial z^*}) = 0 \quad (2.21)$$

*Domaine solide :

$$R_{li}^* \leq r^* \leq R_{le}^* \text{ et } R_{2i}^* \leq r^* \leq R_{2e}^* \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 2\pi : u^* = w^* = v^* = \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial T^*}{\partial z^*}) = 0 \quad (2.22)$$

-Sur la paroi intérieure : $r^* = R_{li}^*$

$$\text{Pour : } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq L^* : u^* = w^* = v^* = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T^*}{\partial r} \right|_{r^*=R_{li}^*} = 0 \quad (2.23)$$

-Sur la paroi extérieure : $r^* = R_{2i}^*$

$$\text{Pour : } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq L^* : \quad u^* = w^* = v^* = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R_{2e}^*} = 1 \quad (2.24)$$

Le long de la direction angulaire, les conditions périodiques sont imposées :

$$\text{Pour } R_{li}^* \leq r^* \leq R_{2e}^* \text{ et } 0 \leq z^* \leq L^* : \quad \begin{cases} u^*(r^*, 0, z^*, t^*) = u^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ w^*(r^*, 0, z^*, t^*) = w^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ v^*(r^*, 0, z^*, t^*) = v^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \\ T^*(r^*, 0, z^*, t^*) = T^*(r^*, 2\pi, z^*, t^*) \end{cases}$$

2.4 Le nombre de Nusselt

Le cylindre intérieur étant isolé, le nombre de Nusselt qui traduit le rapport relatif des transferts convectif et conductif ne sera rapporté qu'au cylindre extérieur.

Le nombre de Nusselt local, dépendant simultanément des positions angulaire (θ) et axiale (z^*), s'exprime par la relation suivante :

$$\text{Nu}(\theta, z^*) = \frac{h(\theta, z^*)d}{k} = \left[\frac{1}{T^*(R_{2i}^*, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] \quad (2.25)$$

En une section droite la température moyenne de mélange adimensionnelle T_b^* est

$$\text{définie par : } T_b^*(z^*) = \frac{\int_{R_{1e}^*}^{R_{2i}^*} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_{R_{1e}^*}^{R_{2i}^*} \int_0^{2\pi} V(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta} \quad (2.26)$$

On en déduit le nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial par l'expression suivante :

$$\text{Nu}(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Nu}(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[T^*(R_{2i}^*, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)]} \quad (2.27)$$

Sur toute la longueur axiale le nombre de Nusselt moyen est déterminé par la relation:

$$\text{Nu} = \frac{1}{2\pi L^*} \int_0^{L^*} \int_0^{2\pi} \text{Nu}(\theta, z^*) d\theta dz^* \quad (2.28)$$

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Choix de la méthode de résolution

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre non linéaires fortement couplées qui ne peuvent être résolues analytiquement mais plutôt par des méthodes de type numérique.

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution. On peut citer entre autres: les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, la méthode de Galerkin. Parmi ces méthodes, nous avons choisi celle des volumes finis qui est très utilisée dans la solution numérique des problèmes de transferts. La méthode de volumes finis est une méthode de discrétisation pour les lois de conservation. Elle résulte d'un choix au sens physique, basé sur l'écriture des bilans. On peut citer certains avantages qu'elle présente :

- les équations aux différences ont une propriété de conservation. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume fini typique est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique.
- son côté pratique et sa maniabilité lors de la résolution de cette classe de problèmes convectifs-diffusifs.

Les étapes de cette méthode numérique sont :

- le maillage du domaine physique.
- la discrétisation des équations de conservation qui consiste en une intégration des équations aux dérivées partielles sur un volume de contrôle fini.
- la recherche de la solution du système d'équations algébrique linéaires sur l'ensemble du domaine de calcul.

3.2 Le maillage :

On découpe l'espace annulaire selon les directions r^* , θ et z^* en un ensemble de volumes élémentaires finis ou « volumes de contrôle » égaux à $(\Delta v^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*)$. Le centre d'un volume fini typique est un point P, et les centres de ses faces latérales est, ouest, nord, sud, front et arrière sont les points e, w, n, s, t et b, respectivement. Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de six autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N, S, T et B. Les variables scalaires (pression, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis, alors que les trois composantes des vitesses sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis. Une illustration d'un volume fini typique

est montrée dans la figure 3.1. tandis que le domaine de calcul est représenté dans les figures (3.2), (3.3) et (3.4) qui traduisent, respectivement, des projections suivant les trois plans : (r^*, θ) , (θ, z^*) , (r^*, z^*) . Les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées (discrétisées) dans le volume fini typique ; cependant, celles des composantes de la vitesse sont intégrées dans des volumes finis décalés. Celui de la composante de vitesse radiale est décalé vers la droite, celui de la composante azimutale est décalé vers le haut et celui de la composante axiale est décalé vers le front. Il est bien connu que ce décalage est nécessaire pour éviter certaines instabilités numériques.

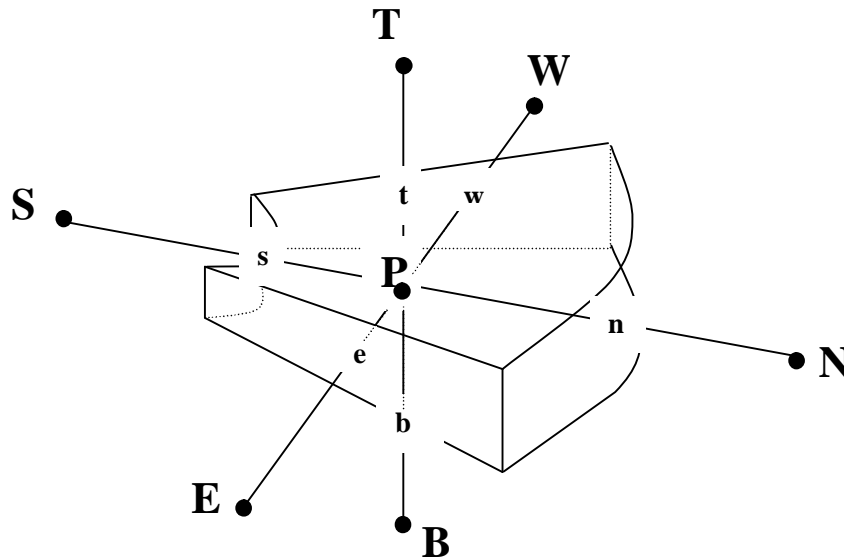


Figure 3.1 : Volume de contrôle typique

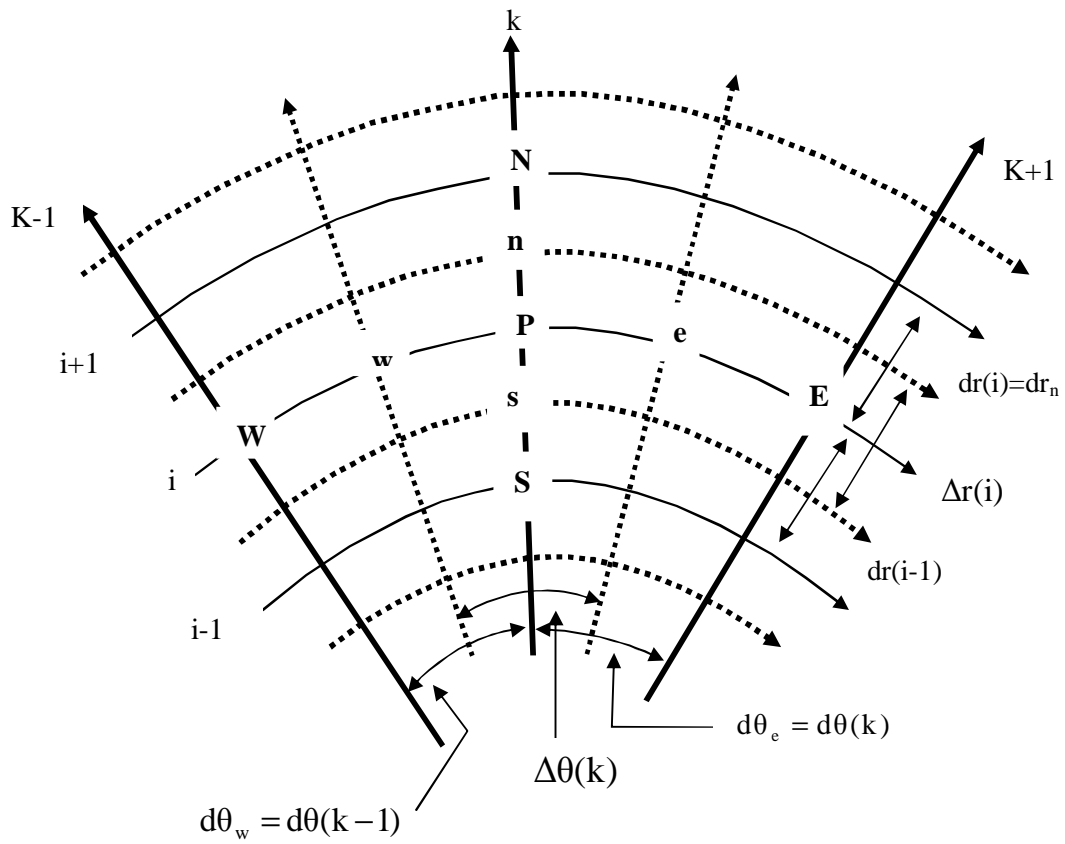


Figure 3.2: Projection du volume fini dans le plan (r, θ)

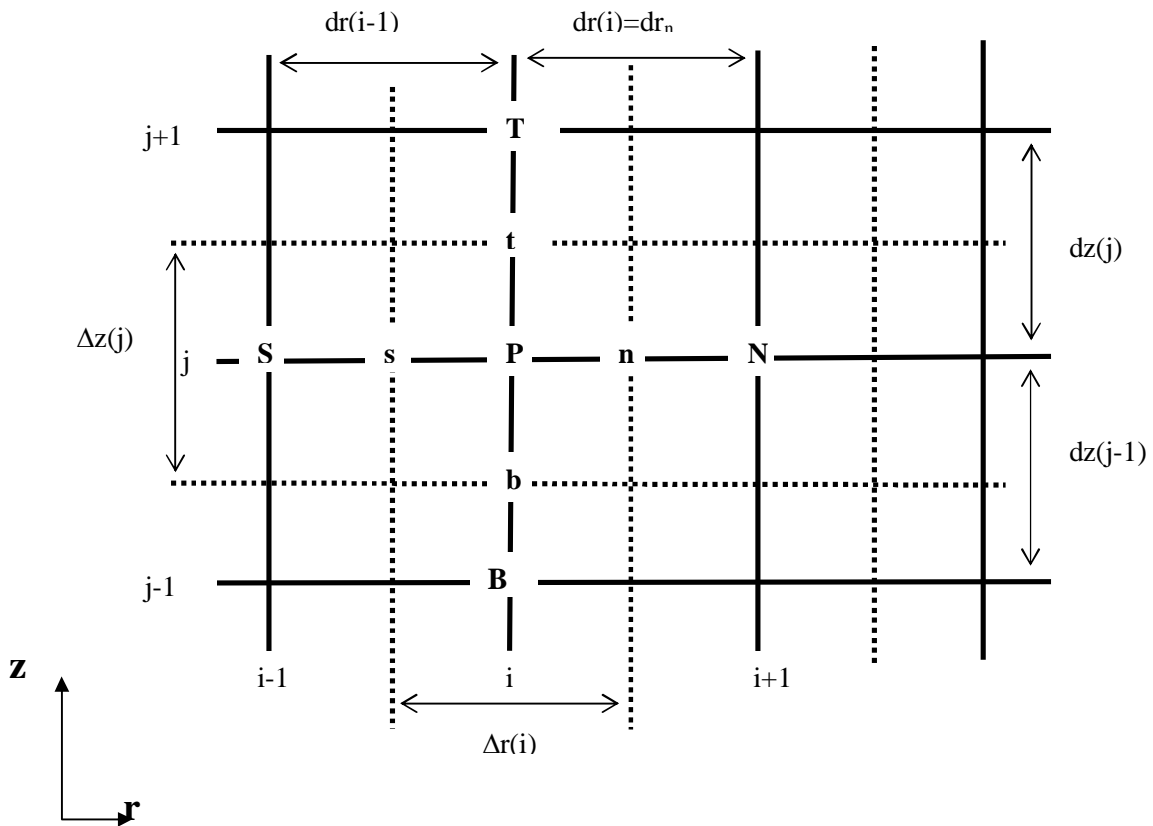


Figure 3.3: Projection du volume fini dans le plan (r, z)

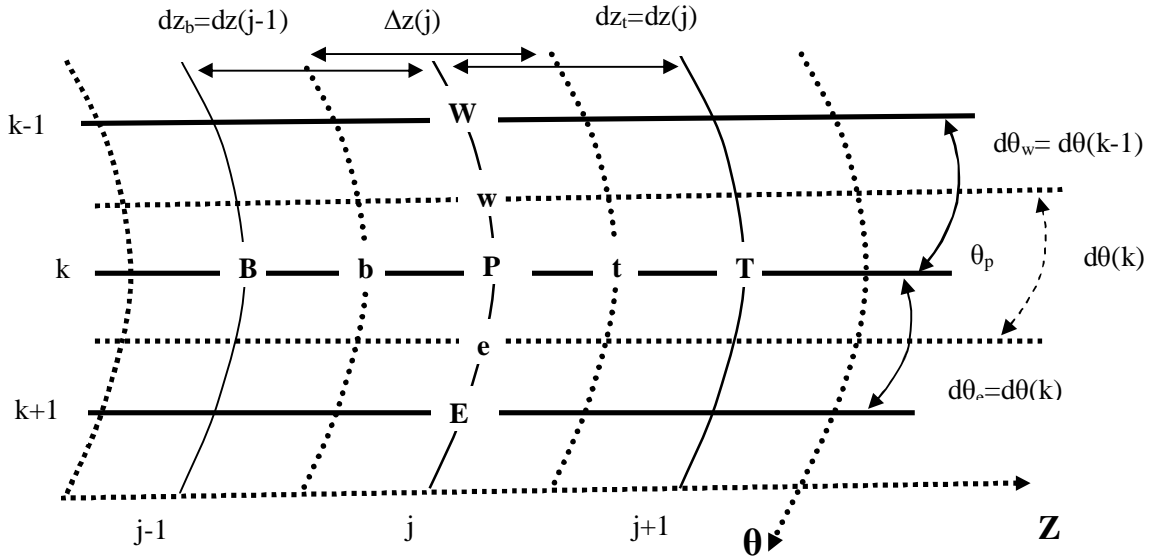


Figure 3.4 : Projection du volume fini dans la section (θ, z)

3.3 La discrétisation des équations

3.3.1 La discrétisation temporelle

3.3.1.1 Les termes non stationnaires

La discrétisation des termes non stationnaires dans les équations de mouvement et dans l'équation d'énergie suit un schéma temporel du second ordre. Si on considère Φ comme variable dépendante du temps un développement limité en série de Taylor au deuxième ordre des variables Φ^t et $\Phi^{t-\Delta t}$ est :

$$\Phi^t = \Phi^{t+\Delta t} - \Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + O(\Delta t)^2 \quad (3.1)$$

$$\Phi^{t-\Delta t} = \Phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + O(\Delta t)^2 \quad (3.2)$$

On multiplie la relation (3.1) par 4, et on fait la différence entre le produit et la relation (3.2) pour obtenir :

$$4\Phi^t - \Phi^{t+\Delta t} = 3\Phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + O(\Delta t)^2, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{3\Phi^{t+\Delta t} - 4\Phi^t + \Phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2$$

Il est clair que l'erreur de troncature est de l'ordre de $(\Delta t)^2$. Toutes les dérivées temporelles seront discrétisées comme suit :

$$\frac{\partial \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t} \approx \frac{3\Phi^{t+\Delta t} - 4\Phi^t + \Phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.3)$$

3.3.1.2 la discrétisation des termes convectifs et non linéaires

La discrétisation des termes convectifs et non linéaires dans l'ensemble des équations suit le schéma explicite d'Adams - Bashforth. Ce schéma est obtenu par une expansion en série de Taylor au deuxième ordre de la variable $\Phi^{t+\Delta t}$.

On multiplie la relation (3.1) par 2, puis on fait la différence entre le produit de la relation (3.2), et on obtient :

$$\Phi^{t+\Delta t} = 2\Phi^t - \Phi^{t-\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + O(\Delta t)^2$$

et donc tous les termes advectifs et non linéaires sont discrétisés comme suit :

$$\Phi^{t+\Delta t} = 2\Phi^t - \Phi^{t-\Delta t} \quad (3.4)$$

3.3.1.3 Les autres termes

La discrétisation temporelle des termes diffusifs et des termes des gradients de pression dans l'ensemble des équations modélisantes est implicite. La discrétisation temporelle de la poussée thermique radiale et azimutale, dans l'équation d'énergie, suit le schéma d'Adams Bashforth.

3.3.2 La discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma des différences centrées, dont l'erreur de troncature est d'ordre deux (avec une précision du second ordre). Ainsi, la valeur d'une variable sur une face commune à deux volumes finis adjacents est la moitié des deux valeurs nodales. Aussi, la dérivé spatiale d'une variable sur une face commune est la différence des valeurs de la variable des nœuds en amont et aval de l'interface divisée par la distance qui les sépare (voir les exemples ci-dessous et la figure (3.4)).

$$\Phi_n = \frac{\Phi_p + \Phi_n}{2} \quad \Phi_s = \frac{\Phi_p + \Phi_s}{2}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{dr_n} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{dr_s}$$

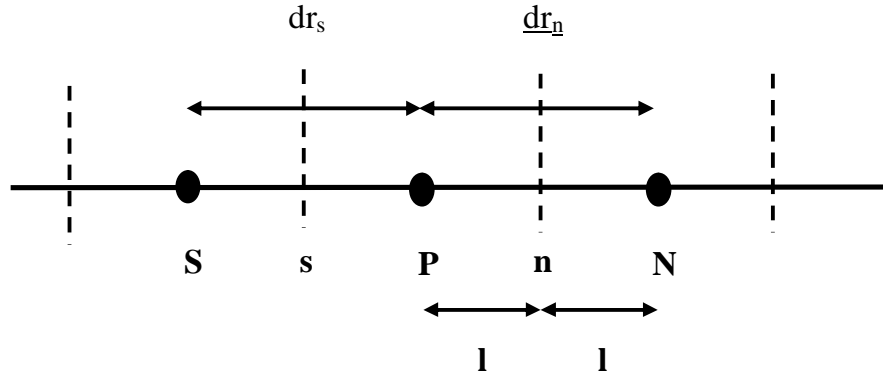


Figure 3.4 : Maillage dans la direction radiale

Ainsi, l'erreur de troncature de la discrétisation spatiale sera de l'ordre de $(\Delta r)^2$, $(\Delta \theta)^2$ et $(\Delta z)^2$ pour les directions radiales, azimutales et axiales respectivement. Mais, cet ordre n'est obtenu que pour un maillage numérique uniforme suivant les directions des coordonnées. Dans notre étude, et pour garantir la précision du second ordre, on a utilisé un maillage $(43 \times 44 \times 83)$ uniforme suivant toutes les directions. Ce qui suit est une démonstration de la précision d'ordre 2. Se referant à la figure (3.4), et en utilisant l'expansion en série de Taylor de la fonction Φ on montre facilement que :

$$\Phi_P = \Phi_n - l \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n + \frac{l^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_n - \frac{l^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right|_n + \dots \quad (3.5)$$

$$\Phi_N = \Phi_n + l \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n + \frac{l^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_n + \frac{l^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right|_n + \dots \quad (3.6)$$

Avec la différence de (3.5) et (3.6), on obtient :

$$\Phi_N - \Phi_P = 2l \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n + \frac{l^3}{3} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right|_n \quad (3.7)$$

Le maillage est uniforme est on à : $l = \frac{dr_n}{2}$, alors on obtient :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{dr_n} - \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right|_n (dr_n)^2 \quad (3.8)$$

On voit l'erreur de troncature est de l'ordre de $(\Delta r)^2$.

La même démonstration peut se faire dans les deux autres directions.

3.3.3 Stockage des variables

Les variables scalaires (la pression et la température) sont stockées dans les nœuds du maillage, cependant les composantes du champ de vitesse sont stockées aux centres des faces des volumes de contrôle. Ce type de maillage dit décalé permet une meilleure estimation du flux convectif, ainsi qu'une bonne estimation de la force de pression dans les équations de mouvement. Il offre aussi une grande stabilité numérique.

3.4 La discrétisation des équations

Dans l'ensemble des équations de mouvement, l'équation de continuité et l'équation d'énergie,

toutes les variables (u, w, v, T) dont l'exposant est 0, désignent celles évaluées au temps t-Δt,

toutes les variables (u, w, v, T) dont l'exposant est 1, désignent celles évaluées au temps t .

Toutes les variables (u, w, v, T) qui ne possèdent aucun exposant, désignent celles évaluées au temps t+Δt.

3.4.1 Equation de continuité

L'équation de continuité (2.6) est intégrée dans le volume de contrôle typique (figure 3.6) comme suit :

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^t \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = 0$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (r_n^* u_n^* - r_s^* u_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* = (w_e^* - w_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{\partial v^*}{\partial z^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (v_t^* - v_b^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

On peut mettre l'équation de discrétisation finale sous la forme :

$$(r_n^* u_n^* - r_s^* u_s^*) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (w_e^* - w_w^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (v_t^* - v_b^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = 0 \quad (3.9)$$

Dans cette équation (3.9) tous les termes sont évalués à l'instant $t + \Delta t$.

3.4.2 Equation de quantité de mouvement radiale

L'équation de quantité de mouvement radiale (2.7) est intégrée dans le volume de contrôle décalé suivant la direction radiale (figure 3.7).

$$\int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{\partial u^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_b^t \int_w^e \int_s^n \left[\frac{3u_{pu}^* - 4u_{pu}^{*1} + u_{pu}^{*0}}{2\Delta t} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3u_{pu}^* - 4u_{pu}^{*1} + u_{pu}^{*0}}{2\Delta t} r_n^* \Delta r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_b^t \int_w^e \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* u^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^1 - 2r_{su}^* (u_{su}^{*2})^1 - r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^0 - r_{su}^* (u_{su}^{*2})^0 \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_b^t \int_w^e \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* u^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(w_{eu}^{*1} u_{eu}^{*1} - w_{wu}^{*1} u_{wu}^{*1}) - (w_{en}^{*0} u_{eu}^{*0} - w_{wu}^{*0} u_{wu}^{*0}) \right] \Delta r_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_b^t \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_b^t \int_w^e \int_s^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) \Big|^1 - \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* u^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_{tu}^{*1} u_{tu}^{*1} - v_{bu}^{*1} u_{bu}^{*1}) - (v_{tn}^{*0} u_{tu}^{*0} - v_{bu}^{*0} u_{bu}^{*0}) \right] r_n^* \Delta r_n^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^* - P_E^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

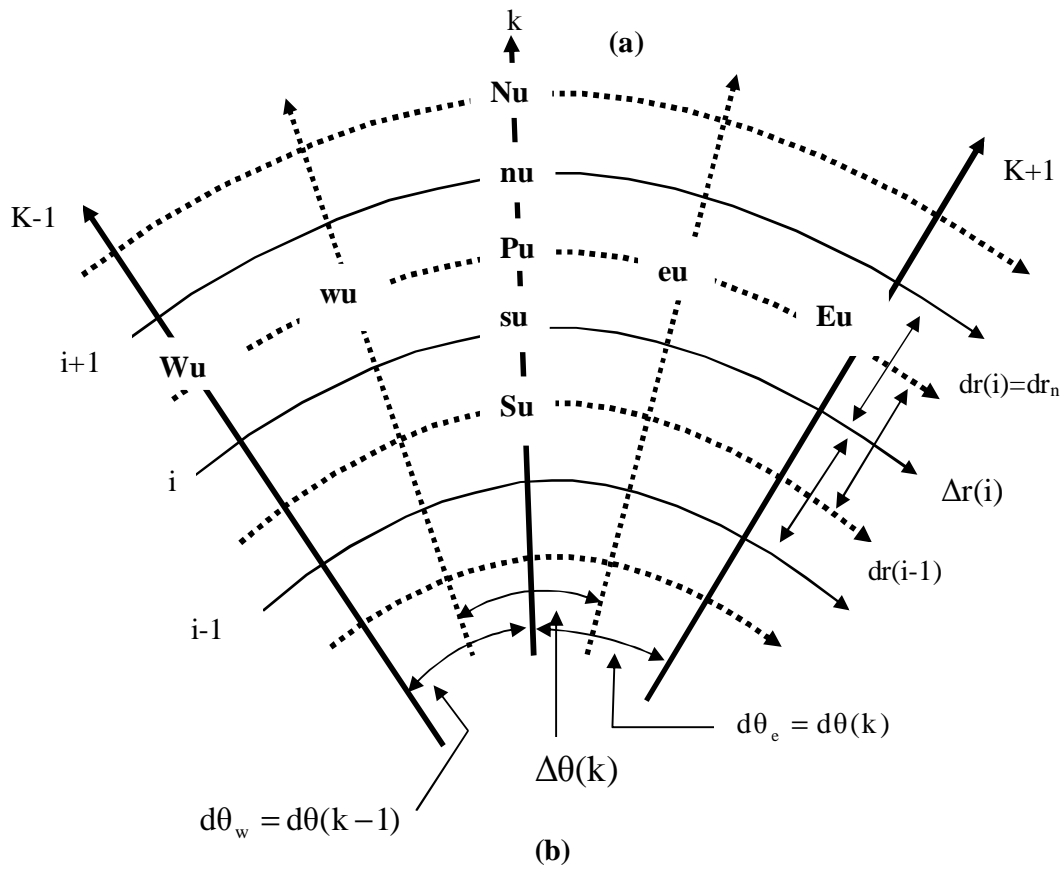
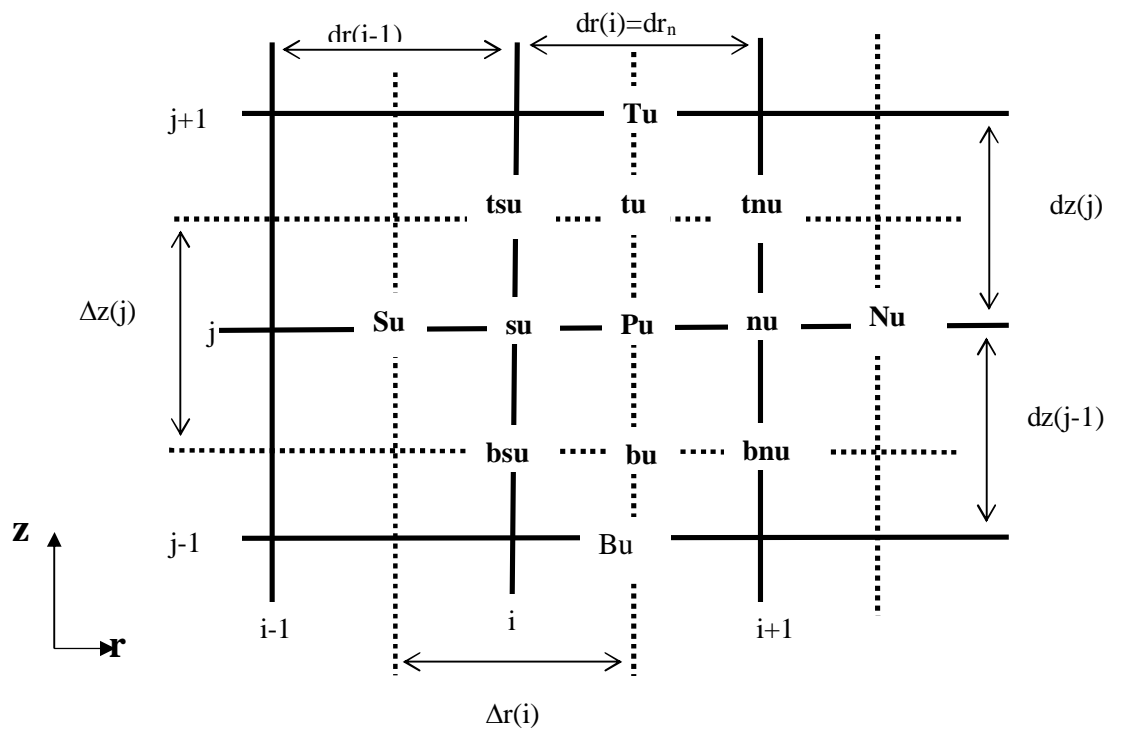


Figure 3.7 : Le maillage décalé suivant la direction radiale

(a) projection suivant les plans (r^*, z^*) (b) projection suivant les plans (r^*, θ)

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{Gr^*}{Re_0^2} \cos \theta \cdot T^* r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{Gr^*}{Re_0^2} \cos \theta (2T_p^{*1} - T_p^{*0}) r_n^* dr_n^* \Delta z_p^* \Delta \theta_p$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{nu}^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \Big|_{nu} - r_{su}^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \Big|_{su} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ &= \left(r_{nu}^* \frac{u_{Nu}^* - u_{Pu}^*}{dr_n^*} - r_{su}^* \frac{u_{Pu}^* - u_{Su}^*}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{1}{r_{eu}^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{eu} - \frac{1}{r_{wu}^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{wu} \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\ &= \left(\frac{1}{r_{eu}^*} \frac{u_{Eu}^* - u_{Pu}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{wu}^*} \frac{u_{Pu}^* - u_{Wu}^*}{d\theta_w} \right) dr_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{tu} - \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{bu} \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \\ &= \left(\frac{u_{Tu}^* - u_{Pu}^*}{dz_t^*} - \frac{u_{Pu}^* - u_{Bu}^*}{dz_b^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} -\frac{u^*}{r^{*2}} r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{u_{Pu}^*}{r_n^*} dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} -\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* &= -\int_w^e \int_b^t \int_{su}^{nu} \left[2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) \Big|_1 - \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) \Big|_0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[\frac{4}{r_n^*} \left(\frac{w_{wnu}^{*1} + w_{wsu}^{*1}}{2} - \frac{w_{enu}^{*1} + w_{esu}^{*1}}{2} \right) - \frac{2}{r_n^*} \left(\frac{w_{wnu}^{*0} + w_{wsu}^{*0}}{2} - \frac{w_{enu}^{*0} + w_{esu}^{*0}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

On regroupe tous les termes présents pour obtenus une équation de discrétisation finale sous la formes suivante :

$$A_p u_{Pu}^* = A_E u_{Eu}^* + A_W u_{Wu}^* + A_N u_{Nu}^* + A_S u_{Su}^* + A_T u_{Tu}^* + A_B u_{Bu}^* + S_u$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 A_E &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w} \\
 A_N &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_{nu}^* \Delta \theta_P \Delta z_p^*}{dr_n^*} & A_S &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_{su}^* \Delta \theta_P \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\
 A_T &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_P}{dr_t^*} & A_B &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_P}{dr_b^*}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{dr_n^* \Delta \theta_P \Delta z_p^*}{r_n^*} + \frac{3}{2} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta \theta_P \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 S_u &= \frac{4u_{Pu}^{*1} - u_{Pu}^{*0}}{2\Delta t} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_P \Delta z_p^* + (P_P^* - P_N^*) r_n^* \Delta \theta_P \Delta z_p^* + \\
 &\frac{\text{Gr}^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta_P (2T_P^{*1} - T_P^{*0}) r_n^* dr_n^* \Delta z_p^* + \left[(2w_{Pu}^{*2})^1 - (w_{Pu}^{*2})^0 \right] dr_n^* \Delta \theta_P \Delta z_p^* \\
 &- \left[\frac{4}{r_n^*} \left(\frac{w_{wnu}^{*1} + w_{wsu}^{*1}}{2} - \frac{w_{enu}^{*1} + w_{esu}^{*1}}{2} \right) - \frac{2}{r_n^*} \left(\frac{w_{wnu}^{*0} + w_{wsu}^{*0}}{2} - \frac{w_{enu}^{*0} + w_{esu}^{*0}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\
 &+ \left[-2r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^1 + 2r_{su}^* (u_{su}^{*2})^1 + r_{nu}^* (u_{nu}^{*2})^0 - r_{su}^* (u_{su}^{*2})^0 \right] \Delta \theta_P \Delta z_p^* \\
 &+ \left[-2(w_{eu}^{*1} u_{eu}^{*1} - w_{wu}^{*1} u_{wu}^{*1}) + (w_{en}^{*0} u_{eu}^{*0} - w_{wu}^{*0} u_{wu}^{*0}) \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\
 &+ \left[-2(v_{tu}^{*1} u_{tu}^{*1} - v_{bu}^{*1} u_{bu}^{*1}) + (v_{in}^{*0} u_{tu}^{*0} - v_{bu}^{*0} u_{bu}^{*0}) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_P
 \end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont tous positifs, relation (3.11), et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients, comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale. Citons que les composantes de vitesse aux faces des volumes finis décalés suivant la direction radiale sont discrétisées par des différences centrées (pour assurer la précision d'ordre deux):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{nu}^* &= \frac{\mathbf{u}_{Pu}^* + \mathbf{u}_{Nu}^*}{2} & \mathbf{u}_{su}^* &= \frac{\mathbf{u}_{Pu}^* + \mathbf{u}_{Su}^*}{2} \\ \mathbf{W}_{en}^* &= \frac{\mathbf{W}_{enu}^* + \mathbf{W}_{esu}^*}{2} & \mathbf{W}_{wu}^* &= \frac{\mathbf{W}_{wnu}^* + \mathbf{W}_{wsu}^*}{2} \\ \mathbf{V}_{tu}^* &= \frac{\mathbf{V}_{tnu}^* + \mathbf{V}_{tsu}^*}{2} & \mathbf{V}_{bu}^* &= \frac{\mathbf{V}_{bun}^* + \mathbf{V}_{bsu}^*}{2} \end{aligned}$$

3.4.3 Equation de quantité de mouvement azimutale

L'intégrale de l'équation de quantité de mouvement azimutale (2.8), se fait dans le mouvement de contrôle décalé suivant la direction azimutale (figure 3.8).

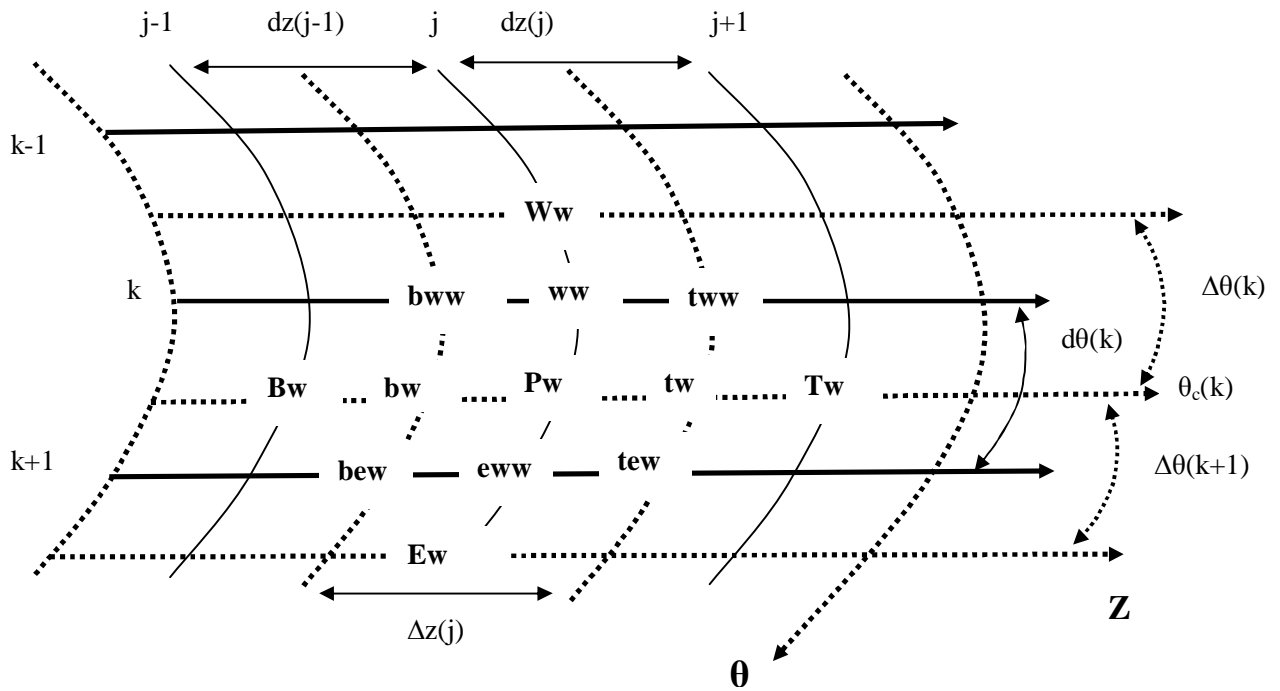
$$\int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3\mathbf{w}_{pw}^* - 4\mathbf{w}_{pw}^{*1} + \mathbf{w}_{pw}^{*0}}{2\Delta t^*} \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* d\theta_e \Delta \mathbf{z}_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\mathbf{r}^* \mathbf{u}^* \mathbf{w}^*) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\mathbf{r}^* \mathbf{u}^* \mathbf{w}^*) \Big|_1 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\mathbf{r}^* \mathbf{u}^* \mathbf{w}^*) \Big|_0 \right] \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(\mathbf{r}_{nw}^* \mathbf{u}_{nw}^{*1} \mathbf{w}_{nw}^{*1} - \mathbf{r}_{sw}^* \mathbf{u}_{sw}^{*1} \mathbf{w}_{sw}^{*1}) - (\mathbf{r}_{nw}^* \mathbf{u}_{nw}^{*0} \mathbf{w}_{nw}^{*0} - \mathbf{r}_{sw}^* \mathbf{u}_{sw}^{*0} \mathbf{w}_{sw}^{*0}) \right] d\theta_e \Delta \mathbf{z}_p^* \end{aligned}$$

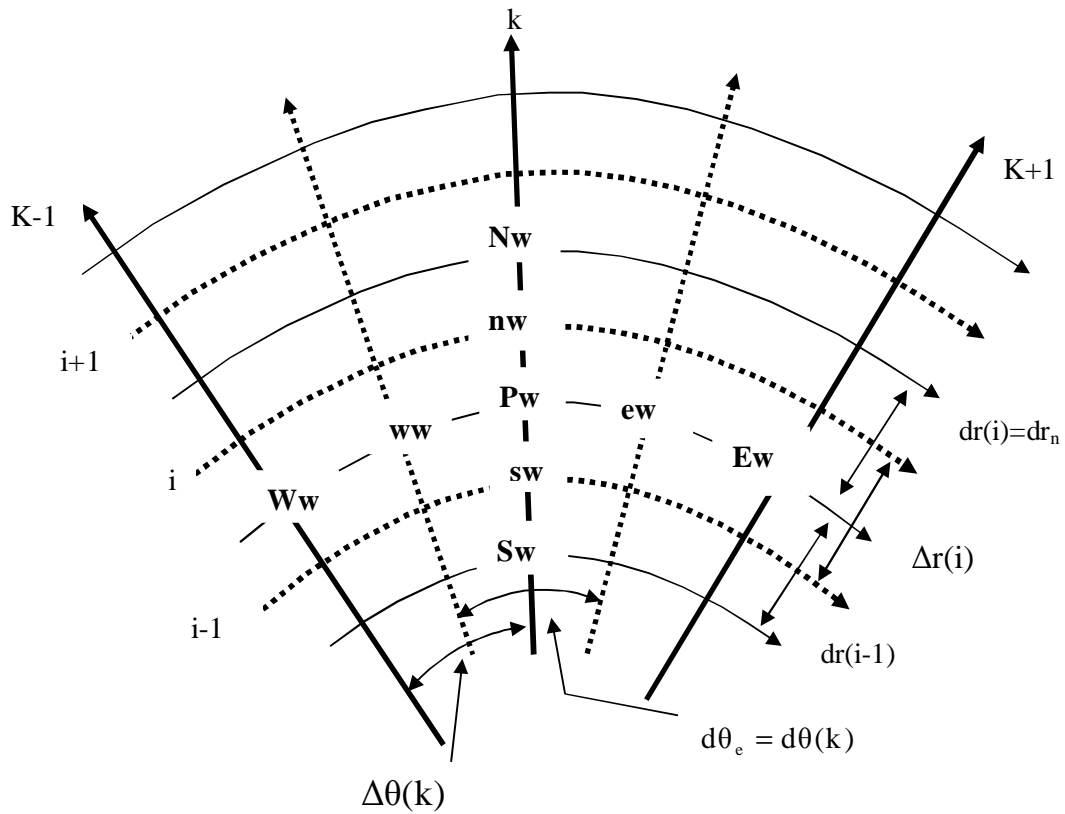
$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{w}^* \mathbf{w}^*) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{w}^* \mathbf{w}^*) \Big|_1 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{w}^* \mathbf{w}^*) \Big|_0 \right] \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(\mathbf{w}_{ew}^{*2} - \mathbf{w}_{ww}^{*2}) \Big|_1 - (\mathbf{w}_{ew}^{*2} - \mathbf{w}_{ww}^{*2}) \Big|_0 \right] \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{z}_p^* \end{aligned}$$

$$\int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \frac{\partial}{\partial z^*} (\mathbf{v}^* \mathbf{w}^*) \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^* = \int_{ww}^{ew} \int_{bs}^{tn} \int_s \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (\mathbf{v}^* \mathbf{w}^*) \Big|_1 - \frac{\partial}{\partial z^*} (\mathbf{v}^* \mathbf{w}^*) \Big|_0 \right] \mathbf{r}^* dr^* d\theta dz^*$$

$$= \left[2(\mathbf{v}_{tw}^{*1} \mathbf{w}_{tw}^{*1} - \mathbf{v}_{bw}^{*1} \mathbf{w}_{bw}^{*1}) - (\mathbf{v}_{tw}^{*0} \mathbf{w}_{tw}^{*0} - \mathbf{v}_{bw}^{*0} \mathbf{w}_{bw}^{*0}) \right] \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* d\theta_e$$



(a)



(b)

Figure 3.7 : Le maillage décalé suivant la direction azimutale

(a) projection suivant les plans (z^*, θ) (b) projection suivant les plans (r^*, θ)

$$\int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_P^* - P_E^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{Gr^*}{Re_0^2} \sin \theta T^* r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{Gr^*}{Re_0^2} \sin \theta_P (2T_P^{*1} - T_P^{*0}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^* d\theta_e$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*}) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \left[r_{nw}^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \Big|_{nw} - r_{sw}^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \Big|_{sw} \right] d\theta_e \Delta z_p^* \\ &= (r_{nw}^* \frac{w_{Nw}^* - w_{Pw}^*}{dr_n^*} - r_{sw}^* \frac{w_{Pw}^* - w_{Sw}^*}{dr_s^*}) d\theta_e \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta}) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{1}{r_{ew}^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \Big|_{ew} - \frac{1}{r_{ww}^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \Big|_{ww} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ &= (\frac{1}{r_{ew}^*} \frac{w_{Ew}^* - w_{Pw}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{ww}^*} \frac{w_{Pw}^* - w_{Ww}^*}{d\theta_w}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (\frac{\partial w^*}{\partial z^*}) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \Big|_{tw} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \Big|_{bw} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \\ &= (\frac{w_{Tw}^* - w_{Pw}^*}{dz_t^*} - \frac{w_{Pw}^* - w_{Bw}^*}{dz_b^*}) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \end{aligned}$$

$$\int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n -\frac{w^*}{r^{*2}} r^* dr^* d\theta dz^* = -\frac{w_{Pw}^*}{r_{Pw}^*} \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

$$\begin{aligned} \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{ww}^{ew} \int_b^t \int_s^n \left[2 \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) \Big|_1 - \left(\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) \Big|_0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \frac{2}{r_{Pw}^*} \left[2 \left(\frac{u_{new}^* + u_{sew}^{*1}}{2} - \frac{u_{nww}^{*1} + u_{sww}^{*1}}{2} \right) - \frac{1}{r_{Pw}^*} \left(\frac{u_{new}^{*0} + u_{sew}^{*0}}{2} - \frac{u_{nww}^{*0} + u_{sww}^{*0}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* dz_p^* \end{aligned}$$

On groupe tous les termes précédents, pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante:

$$A_P w_{Pw}^* = A_E w_{Ew}^* + A_w w_{Ww}^* + A_N w_{Nw}^* + A_s w_{Tw}^* + A_B w_{Bw}^* + S_w$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 A_E &= \frac{1}{Re_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_{ew}^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{Re_0} \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_{ww}^* d\theta_w} \\
 A_N &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_{nw}^* d\theta_e \Delta z_p^*}{dr_n^*} & A_S &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_{sw}^* d\theta_e \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\
 A_T &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_t^*} & A_B &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_b^*}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} + \frac{1}{Re_0} \frac{\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{r_{Pw}^*} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 S_w &= \frac{4w_{Pw}^{*1} - w_{Pw}^{*0}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_e dz_p^* + (P_P^* - P_E^*) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\
 &+ \frac{Gr^*}{Re_0^2} \sin \theta_P (2T_P^{*1} - T_P^{*0}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\
 &+ \left[-2(w_{ew}^{*2} - w_{ww}^{*2})^1 + (w_{ew}^{*2} - w_{ww}^{*2})^0 \right] \Delta r_p^* dz_p^* \\
 &+ \left[-2(r_{nw}^* u_{nw}^{*1} v_{nw}^{*1} - r_{sw}^* u_{sw}^{*1} v_{sw}^{*1}) + (r_{nw}^* u_{nw}^{*0} v_{nw}^{*0} - r_{sw}^* u_{sw}^{*0} v_{sw}^{*0}) \right] d\theta_e \Delta z_p^* \\
 &+ \left[-2(v_{tw}^{*1} w_{tw}^{*1} - v_{bw}^{*1} w_{bw}^{*1}) + (v_{tw}^{*0} w_{tw}^{*0} - v_{bw}^{*0} w_{bw}^{*0}) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \\
 &- (2u_{Pw}^{*1} w_{Pw}^{*1} - u_{Pw}^{*0} w_{Pw}^{*0}) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{w_{Pw}^*}{r_{Pw}^*} \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \\
 &+ \frac{2}{r_{Pw}^*} \left[2 \left(\frac{u_{new}^{*1} + u_{sew}^{*1}}{2} - \frac{u_{nww}^{*1} + u_{sww}^{*1}}{2} \right) - \left(\frac{u_{new}^{*0} + u_{sew}^{*0}}{2} - \frac{u_{nww}^{*0} + u_{sww}^{*0}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*
 \end{aligned}$$

On note que les coefficients de l'équation de discrétisation sont tous positifs, relation (3.13), et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients aussi, comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale. Les composantes de vitesse aux faces des volumes finis décalés suivant la direction azimutale sont interpolées suivant le schéma des différences centrées:

$$\mathbf{u}_{nw}^* = \frac{\mathbf{u}_{new}^* + \mathbf{u}_{nww}^*}{2} \quad \mathbf{u}_{sw}^* = \frac{\mathbf{u}_{sew}^* + \mathbf{u}_{sww}^*}{2}$$

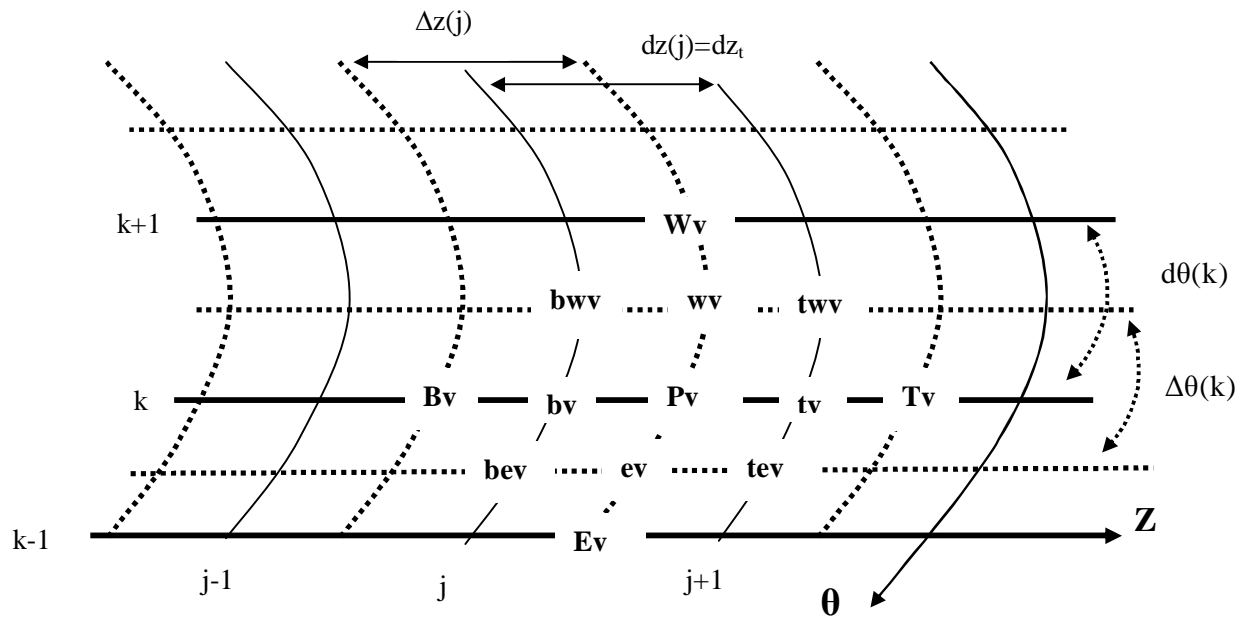
$$\mathbf{w}_{ew}^* = \frac{\mathbf{w}_{Pw}^* + \mathbf{w}_{Ew}^*}{2} \quad \mathbf{w}_{ww}^* = \frac{\mathbf{w}_{Pw}^* + \mathbf{w}_{Ww}^*}{2}$$

$$\mathbf{v}_{tw}^* = \frac{\mathbf{v}_{tew}^* + \mathbf{v}_{tww}^*}{2} \quad \mathbf{v}_{bw}^* = \frac{\mathbf{v}_{bew}^* + \mathbf{v}_{bww}^*}{2}$$

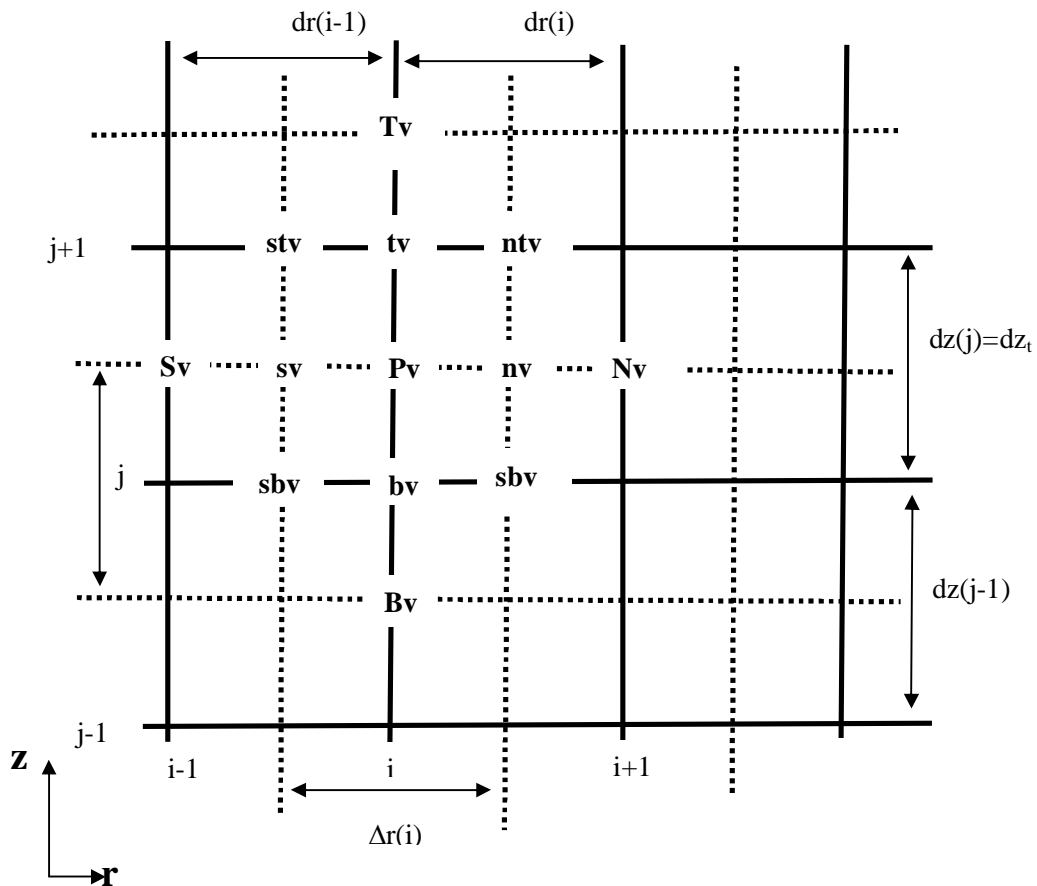
3.4.4 Equation de quantité de mouvement axial

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement axiale (2.9), se fait dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (figure 3.9)

$$\begin{aligned} \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \int_{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \frac{3v_{Pv}^* - 4v_{Pv}^{*1} + v_{Pv}^{*0}}{2\Delta t^*} r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P dz_t^* \\ \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \int_{r^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(r_{nv}^* u_{nv}^{*1} v_{nv}^{*1} - r_{sv}^* u_{sv}^{*1} v_{sv}^{*1}) - (r_{nv}^* u_{nv}^{*0} v_{nv}^{*0} - r_{sv}^* u_{sv}^{*0} v_{sv}^{*0}) \right] \Delta \theta_P dz_t^* \\ \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \int_{r^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) \Big| - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* v^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(w_{ev}^{*1} v_{ev}^{*1} - w_{wv}^{*1} v_{wv}^{*1}) - (w_{ev}^{*0} v_{ev}^{*0} - w_{wv}^{*0} v_{wv}^{*0}) \right] \Delta r_P^* dz_t^* \\ \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \int_{z^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_{bv s}}^e \int_{v_{bv s}}^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) \Big| - \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* v^*) \Big|^0 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(v_{tv}^{*1} v_{tv}^{*1} - v_{bv}^{*1} v_{bv}^{*1}) - (v_{tv}^{*0} v_{tv}^{*0} - v_{bv}^{*0} v_{bv}^{*0}) \right] r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figure 3.9: Le maillage décalé suivant la direction axial

(a) projection suivant les plans (z^*, θ) (b) projection suivant les plans (r^*, z^*)

$$\int_w^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^* - P_T^*) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[r_{nv}^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \Big|_{nv} - r_{sv}^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \Big|_{sv} \right] \Delta \theta_p dz_t^* \\ &= \left(r_{nu}^* \frac{v_{Nu}^* - v_{Pu}^*}{dr_n^*} - r_{sv}^* \frac{v_{Pv}^* - v_{Sv}^*}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p dz_t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{1}{r_{ev}^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \Big|_{ev} - \frac{1}{r_{wv}^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \Big|_{wv} \right] \Delta r_p^* dz_t^* \\ &= \left(\frac{1}{r_{ev}^*} \frac{v_{Ev}^* - v_{Pv}^*}{d\theta_e} - \frac{1}{r_{wv}^*} \frac{v_{Pv}^* - v_{Wv}^*}{d\theta_w} \right) \Delta r_p^* dz_t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_{bv}^{tv} \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* &= \left[\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{tv} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{bv} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_p \\ &= \left(\frac{v_{Tv}^* - v_{Pv}^*}{dz_t^*} - \frac{v_{Pv}^* - v_{Bv}^*}{dz_b^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

On regroupe tous les termes discrétisés pour l'obtention d'une équation de discrétisation finale sous la forme standard:

$$A_P v_{Pv}^* = A_E v_{Ev}^* + A_W v_{Wv}^* + A_N v_{Nv}^* + A_S v_{Sv}^* + A_T v_{Tv}^* + A_B v_{Bv}^* + S_v$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{1}{Re_0} \frac{\Delta r_p^* dz_t^*}{r_{ev}^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{Re_0} \frac{\Delta r_p^* dz_t^*}{r_{wv}^* d\theta_w} \\ A_N &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_{sv}^* \Delta \theta_p dz_t^*}{dr_s^*} & A_S &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_{nv}^* \Delta \theta_p dz_t^*}{dr_n^*} \\ A_T &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dr_t^*} & A_B &= \frac{1}{Re_0} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_b^*} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P dz_t^*}{\Delta t^*} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} S_V = & \frac{4}{2} \frac{v_{Pv}^{*1} - v_{Pv}^{*0}}{\Delta t^*} r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P dz_t^* + (P_P^* - P_T^*) r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P \\ & + \left[-2(r_{nv}^* u_{nv}^{*1} v_{nv}^{*1} - r_{sv}^* u_{sv}^{*1} v_{sv}^{*1}) + (r_{nv}^* u_{nv}^{*0} v_{nv}^{*0} - r_{sv}^* u_{sv}^{*0} v_{sv}^{*0}) \right] \Delta \theta_P dz_t^* \\ & + \left[-2(w_{ev}^* v_{ev}^{*1} - w_{wv}^* v_{wv}^{*1}) + (w_{ev}^* v_{ev}^{*0} - w_{wv}^* v_{wv}^{*0}) \right] \Delta r_P^* dz_t^* \\ & + \left[-2(v_{tv}^* v_{tv}^{*1} - v_{bv}^* v_{bv}^{*1}) + (v_{tv}^* v_{tv}^{*0} - v_{bv}^* v_{bv}^{*0}) \right] r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P \end{aligned}$$

Comme dans le cas des équations de discrétisation radiale et azimutale, les relations (3.14) et (3.15), indiquent respectivement que les coefficients de l'équation de discrétisation axiale sont tous positifs et que le A_P est supérieur à la somme des autres coefficients.

Aux faces des volumes finis décalés suivant la direction axiale, les composantes de vitesses sont:

$$\begin{aligned} u_{nv}^* &= \frac{u_{ntv}^* + u_{nbv}^*}{2} & u_{sv}^* &= \frac{u_{stv}^* + u_{stb}^*}{2} \\ w_{ev}^* &= \frac{w_{etv}^* + w_{ebv}^*}{2} & w_{wv}^* &= \frac{w_{wtv}^* + w_{wbv}^*}{2} \\ v_{tv}^* &= \frac{v_{Ttv}^* + v_{Ptv}^*}{2} & v_{bv}^* &= \frac{v_{Bbv}^* + v_{Pbv}^*}{2} \end{aligned}$$

3.4.5 L'équation d'énergie

L'équation d'énergie (2.10), est intégrée dans le volume fini typique (figure 3.4) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{w_b}^e \int_{r_s}^t \int_{\theta_s}^n \frac{\partial T^*}{\partial t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \frac{3T_P^* - 4T_P^{*1} + T_P^{*0}}{2\Delta t^*} r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P \Delta z_P^* \\ \int_{w_b}^e \int_{r_s}^t \int_{\theta_s}^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \int_{w_b}^e \int_{r_s}^t \int_{\theta_s}^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) \Big|_1^0 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* T^*) \Big|_0^1 \right] r^* dr^* d\theta dz^* \\ &= \left[2(r_n^* u_n^{*1} T_n^{*1} - r_s^* u_s^{*1} T_s^{*1}) - (r_n^* u_n^{*0} T_n^{*0} - r_s^* u_s^{*0} T_s^{*0}) \right] \Delta \theta_P dz_P^* \end{aligned}$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_b^t \int_s^n \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) \Big|_1 - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (w^* T^*) \Big|_0 \right] r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$= \left[2(w_e^{*1} T_e^{*1} - w_w^{*1} T_w^{*1}) - (w_e^{*0} T_e^{*0} - w_w^{*0} T_w^{*0}) \right] \Delta r_P^* \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_b^t \int_s^n \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) \Big|_1 - \frac{\partial}{\partial z^*} (v^* T^*) \Big|_0 \right] r^* dr^* d\theta dz^*$$

$$= \left[2(v_t^1 T_t^1 - v_b^1 T_b^1) - (v_t^0 T_t^0 - v_b^0 T_b^0) \right] r_P \Delta r_P d\theta_P$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \left(r_n^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_n - r_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_s \right) \Delta \theta_P^* \Delta z_P^*$$

$$= \left[\left(r_n^* \frac{T_N^* - T_P^*}{dr_n^*} \right) - \left(r_s^* \frac{T_P^* - T_S^*}{dr_s^*} \right) \right] \Delta \theta_P^* \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \left(\frac{1}{r_e^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_e - \frac{1}{r_w^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_w \right) \Delta r_P^* \Delta z_P^*$$

$$= \left[\left(\frac{T_E^* - T_P^*}{r_e^* d\theta_e} \right) - \left(\frac{T_P^* - T_W^*}{r_w^* d\theta_w} \right) \right] \Delta r_P^* \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_t - \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_b \right) r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P$$

$$= \left[\left(\frac{T_T^* - T_P^*}{dz_t^*} \right) - \left(\frac{T_P^* - T_B^*}{dz_b^*} \right) \right] r_P^* \Delta r_P^* \Delta \theta_P$$

Le regroupement des termes précédents conduit à l'équation de discrétisation de la température suivante:

$$A_P T_P^* = A_E T_E^* + A_W T_W^* + A_N T_N^* + A_S T_S^* + A_T T_T^* + A_B T_B^* + S_T$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation et la source sont:

$$\begin{aligned}
 A_E &= \frac{1}{Re_0 Pr_0} \frac{\Delta r_P^* \Delta z_P^*}{r_e^* d\theta_e} & A_W &= \frac{1}{Re_0 Pr_0} \frac{\Delta r_P^* \Delta z_P^*}{r_w^* d\theta_w} \\
 A_N &= \frac{1}{Re_0 Pr_0} \frac{r_n^* D\theta_P^* Dz_P^o}{dr_n^*} & A_S &= \frac{1}{Re_0 Pr} \frac{r_s^* \Delta\theta_P^* \Delta z_P^*}{dr_s^*} \\
 A_T &= \frac{1}{Re_0 Pr_0} \frac{r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P}{dz_t^*} & A_B &= \frac{1}{Re_0 Pr_0} \frac{r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P}{dz_b^*}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P \Delta z_P^*}{\Delta t^*} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 S_T &= \frac{4T_P^{*1} - T_P^{*0}}{2\Delta t^*} r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P \Delta z_P^* + \left[-2(r_n^* u_n^{*1} T_n^{*1} - r_s^* u_s^{*1} T_s^{*1}) + (r_n^* u_n^{*0} T_n^{*0} - r_s^* u_s^{*0} T_s^{*0}) \right] \Delta\theta_P \Delta z_P^* \\
 &+ \left[-2(w_e^{*1} T_e^{*1} - w_w^{*1} T_w^{*1}) + (w_e^{*0} T_e^{*0} - w_w^{*0} T_w^{*0}) \right] \Delta r_P^* \Delta z_P^* \\
 &+ \left[-2(v_t^{*1} T_t^{*1} - v_b^{*1} T_b^{*1}) + (v_t^{*0} T_t^{*0} - v_b^{*0} T_b^{*0}) \right] r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P
 \end{aligned}$$

3.5 Discrétisation des conditions aux limites

Toutes les conditions sur les champs de vitesses et de température et sur les flux seront chacune transformées en une forme discrète, conformément au maillage. Il s'agira toujours d'identifier pour chaque condition aux limites les coefficients des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants. Etant donné que la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques tandis que les autres conditions seront directement données.

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont aussi écrites selon la forme générale de l'équation de discrétisation. Le domaine numérique est défini par : $i = 1$ à IL ; $j = 1$ à JL et $k = 1$ à KL balayant les direction radiale, axiale et angulaire.

3.5.1 A l'entrée du cylindre

Le domaine numérique correspondant : $j=1, 1 \leq i \leq IL, 1 \leq k \leq KL$

- Pour le fluide domaine

La composante axiale, $v^*(r^*, \theta, 0, t^*) = 1$

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j, k)v^*(i, j, k) &= A_N(i, j, k)v^*(i+1, j, k) + A_S(i, j, k)v^*(i-1, j, k) + \\
 A_E(i, j, k)v^*(i, j, k+1) &+ A_W(i, j, k)v^*(i, j, k-1) + \\
 A_T(i, j, k)v^*(i, j+1, k) &+ A_B(i, j, k)v^*(i, j-1, k) + S_v(i, j, k)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Qui devra donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
 1.v^*(i,1,k) &= 0.v^*(i+1,1,k) + 0.v^*(i-1,1,k) + 0.v^*(i,1,k+1) + 0.v^*(i,1,k-1) + \\
 0.v^*(i,2,k) &+ 1
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les coefficients et les termes de source sont:

$$\begin{aligned}
 A_p(i,1,k) &= 1 \\
 A_N(i,1,k) &= A_S(i,1,k) = A_E(i,1,k) = A_W(i,1,k) = A_T(i,1,k) = A_b(i,1,k) = 0 \\
 S_v(i, j, k) &= 1
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Des même pour les composantes u^* , w^* à l'entrée sont nulles donc les coefficients et les termes de source seraient:

$$\begin{aligned}
 A_p(i,1,k) &= 1 \\
 A_N(i,1,k) &= A_S(i,1,k) = A_E(i,1,k) = A_W(i,1,k) = A_T(i,1,k) = A_b(i,1,k) = 0 \\
 S(i,1, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

- Pour le solide domaine

La condition sur la température : $T^* = 0$, de la même manière que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned}
 A_p(i,1,k) &= 1 \\
 A_N(i,1,k) &= A_S(i,1,k) = A_E(i,1,k) = A_W(i,1,k) = A_T(i,1,k) = A_b(i,1,k) = 0 \\
 S(i,1, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les composantes à l'entrée u^* , w^* et v^* sont nulles donc les coefficients et les termes de source seraient:

$$\begin{aligned}
 A_p(i,1,k) &= 1 \\
 A_N(i,1,k) &= A_S(i,1,k) = A_E(i,1,k) = A_W(i,1,k) = A_T(i,1,k) = A_b(i,1,k) = 0 \\
 S(i,1, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.5.2 A la sortie du cylindre :

($j=JL$, $1 \leq i \leq IL$, $1 \leq k \leq KL$)

- Pour le fluide domaine

La condition sur la vitesse radiale : $\left. \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = 0$, se discrétise selon les différences

régressives à l'ordre 2, soit :

$$\frac{u^*(i, JL, k) - u^*(i, JL - 1, k)}{dz^*(JL - 1)} = 0 \Rightarrow u^*(i, JL, k) = u^*(i, JL - 1, k)$$

Par rapport au nœud JL, cette équation permet d'identifier les coefficients correspondants:

$$1.u^*(i, JL, k) = 0.u^*(i + 1, JL, k) + 0.u^*(i - 1, JL, k) + 0.u^*(i, JL, k - 1) + 0.u^*(i, JL, k + 1) + 0.u^*(i, JL - 1, k) = 0 \quad (3.24)$$

D'où :

$$A_p(i, JL, k) = 1, \quad A_b(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_w(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.25)$$

$$S_v(i, JL, k) = 0$$

- La condition sur la w, v est : $\left. \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = \left. \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=10} = 0$, se discrétise selon les

différences régressives à l'ordre 2.

$$w^*(i, JL, k) = w^*(i, JL - 1, k)$$

$$v^*(i, JL, k) = v^*(i, JL - 1, k) = v^*(i, JL - 2, k)$$

Et les coefficients sont:

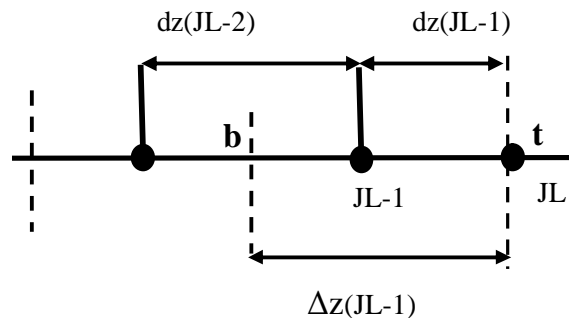
$$A_p(i, JL, k) = 1, \quad A_b(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_w(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.26)$$

$$S(i, JL, k) = 0$$

- La condition sur la température: $\left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right|_{z^*=10} = 0$, se caractérise autour de JL-1

selon Les différences centrées à l'ordre 2 :



$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_t - \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_b = 0 \Rightarrow \frac{T^*(i, JL, k) - T^*(i, JL-1, k)}{dz^*(JL-1)} - \frac{T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)}{dz^*(JL-2)} = 0$$

On peut écrire : $T^*(i, JL, k) = [2T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$

On en déduit les différents coefficients:

$$A_p(i, JL, k) = 1, \quad A_b(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_w(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.27)$$

$$S(i, JL, k) = [2T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

- Pour le solide domaine

Pour les vitesses u^* , w^* et v^* , seuls les coefficients A_p sont égaux à 1.

La condition sur la température : $\frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \Big|_{z^*=10} = 0$, de la même manière que

précédemment on obtient :

$$A_p(i, JL, k) = 1, \quad A_b(i, JL, k) = 1$$

$$A_N(i, JL, k) = A_S(i, JL, k) = A_E(i, JL, k) = A_w(i, JL, k) = A_T(i, JL, k) = 0 \quad (3.28)$$

$$S(i, JL, k) = [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

3.5.3 Sur la paroi du cylindre intérieur:

$$(i=1, 1 \leq j \leq JL, 1 \leq k \leq K)$$

Pour les vitesses u^* , w^* et v^* , seuls les coefficients A_p sont égaux à 1.

La condition sur le flux, $\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=R_{ii}^*} = 0$, se discrétise en utilisant un schéma du

premier ordre en différences finies dégressives, soit :

$$T^*(1, j, k) = 1 \quad (3.29)$$

On en déduit les différents coefficients:

$$A_p(1, j, k) = 1 \quad A_N(1, j, k) = 1$$

$$A_S(1, j, k) = A_E(i, JL, k) = A_w(1, j, k) = A_T(1, j, k) = A_b(1, j, k) = 0 \quad (3.30)$$

$$S(1, j, k) = 1$$

3.5.4 Sur les parois du cylindre extérieur :

($i=IL, 1 \leq j \leq JL, 1 \leq k \leq KL$)

Pour les vitesses u, w et v , seuls les coefficients A_p sont égaux à 1.

La condition sur le flux, $\left. \frac{\partial}{\partial r^*} T^*(r, \theta, z, t) \right|_{r^*=R_{2i}^*} = 1$, se discrétise selon les différences

finies régressives à l'ordre 2, soit :

$$\frac{T^*(IL, j, k) - T^*(IL-1, j, k)}{dr^*(IL-1)} = 1 \Rightarrow T^*(IL, j, k) = T^*(IL-1, j, k) + dr^*(IL-1) \quad (3.31)$$

Par rapport au nœuds IL , les coefficients seraient identifiés par :

$$\begin{aligned} A_S(IL, j, k) &= A_P(IL, j, k) = 1, & A_B(IL, j, k) &= 0 \\ A_E(IL, j, k) &= A_w(IL, j, k) = A_T(IL, j, k) = A_b(IL, j, k) = 0 \\ S(IL, j, k) &= dr^*(IL - 1) \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.6 Equation de pression:

Les équations discrétisée de mouvement pour les variables u^*, w^* et v^* sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_n u_n^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_n (P_N^* - P_P^*) \\ A_s u_s^* &= \sum A_i u_i^* + b_u^* + a_s (P_P^* - P_S^*) \\ A_e w_e^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_t (P_E^* - P_P^*) \\ A_w w_w^* &= \sum A_i w_i^* + b_w^* + a_w (P_P^* - P_W^*) \\ A_t v_t^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_t (P_T^* - P_P^*) \\ A_b v_b^* &= \sum A_i v_i^* + b_v^* + a_b (P_P^* - P_B^*) \end{aligned} \quad (3.33)$$

b_u^*, b_w^* et b_v^* , contiennent les termes des sources des équations discrétisé radiale, axiale et azimutale, autres que les termes de pression.

Le système (3.33) est réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_n^* &= \hat{u}_n^* + d_n (P_N^* - P_P^*) \\ u_s^* &= \hat{u}_s^* + d_s (P_P^* - P_S^*) \\ w_e^* &= \hat{w}_e^* + d_t (P_E^* - P_P^*) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$w_w^* = \hat{w}_w^* + d_w (P_P^* - P_W^*)$$

$$v_t^* = \hat{v}_t^* + d_t (P_T^* - P_P^*)$$

$$v_b^* = \hat{v}_b^* + d_b (P_P^* - P_B^*)$$

Où les pseudo vitesses \hat{u}_n^* , \hat{u}_s^* , \hat{w}_e^* , \hat{w}_w^* , \hat{v}_t^* et \hat{v}_b^* sont donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_u^*}{A_n} \\ \hat{u}_s^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_u^*}{A_s} \\ \hat{w}_e^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_w^*}{A_e} \\ \hat{w}_w^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_w^*}{A_w} \\ \hat{v}_t^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_v^*}{A_t} \\ \hat{v}_b^* &= \frac{\sum A_i u_i^* + b_v^*}{A_b} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour obtenir l'équation de pression, on utilise le champ de vitesse (3.34) dans l'équation de continuité discrétisée (3.9), on obtient alors une équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$a_p P_P^* = a_n P_N^* + a_s P_S^* + a_e P_E^* + a_w P_W^* + a_t P_T^* + a_b P_B^* + b \quad (3.36)$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned} a_n &= r_n^* d_n \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ a_s &= r_s^* d_s \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\ a_e &= d_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ a_w &= d_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \\ a_t &= d_t r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \\ a_b &= d_b r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_b$$

$$\mathbf{b} = -\left[(\mathbf{r}_n^* \hat{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{r}_s^* \hat{\mathbf{u}}_s^*) \Delta \theta_p \Delta \mathbf{z}_p^* + (\hat{\mathbf{w}}_e^* - \hat{\mathbf{w}}_w^*) \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{z}_p^* + (\hat{\mathbf{v}}_t^* - \hat{\mathbf{v}}_b^*) \mathbf{r}_p^* \Delta \mathbf{r}_p^* \Delta \theta_p \right] \quad (3.38)$$

Avec un champ de vitesse estimé, utilisé dans la source (3.38), la résolution de l'équation de pression (3.36), permet l'obtention de la pression en chaque nœud du domaine. Cependant cette pression n'est qu'une estimation, notée P^{**} . L'introduction de cette pression estimée P^{**} , dans les équations de Navier Stokes, nous donne une estimation du champ de vitesse noté (u^*, v^*, w^*) .

$$\begin{aligned} A_n u_n^{**} &= \sum A_i u_i^{**} + b_u^{**} + a_n (P_N^{**} - P_P^{**}) \\ A_s u_s^{**} &= \sum A_i u_i^{**} + b_u^{**} + a_s (P_P^{**} - P_S^{**}) \\ A_e w_e^{**} &= \sum A_i w_i^{**} + b_w^{**} + a_t (P_E^{**} - P_P^{**}) \\ A_w w_w^{**} &= \sum A_i w_i^{**} + b_w^{**} + a_w (P_P^{**} - P_W^{**}) \\ A_t v_t^{**} &= \sum A_i v_i^{**} + b_v^{**} + a_t (P_T^{**} - P_P^{**}) \\ A_b v_b^{**} &= \sum A_i v_i^{**} + b_v^{**} + a_b (P_P^{**} - P_B^{**}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les estimations, nécessitent des corrections :

$$\begin{aligned} u^* &= u^{**} + u' \\ w^* &= w^{**} + w' \\ v^* &= v^{**} + v' \\ P^* &= P^{**} + P' \end{aligned} \quad (3.40)$$

Où : u', v', w' et P' sont les corrections et aussi des solutions pour les équations algébrique, on obtient alors :

$$\begin{aligned} A_n u_n' &= \sum A_i u_i' + a_n (P_N' - P_P') \\ A_s u_s' &= \sum A_i u_i' + a_s (P_P' - P_S') \\ A_e w_e' &= \sum A_i w_i' + a_e (P_E' - P_P') \\ A_w w_w' &= \sum A_i w_i' + a_w (P_P' - P_W') \\ A_t v_t' &= \sum A_i v_i' + a_t (P_T' - P_P') \\ A_b v_b' &= \sum A_i v_i' + a_b (P_P' - P_B') \end{aligned} \quad (3.41)$$

Une approximation est fait, c'est de négliger les corrections de vitesses aux nœuds voisins, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
 u'_n &= d_n (P'_N - P'_P) \\
 u'_s &= d_s (P'_P - P'_S) \\
 w'_e &= d_t (P'_E - P'_P) \\
 w'_w &= d_w (P'_P - P'_W) \\
 v'_t &= d_t (P'_T - P'_P) \\
 v'_b &= d_b (P'_P - P'_B)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Et par conséquent le champ de vitesse corrigé s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u_n^* &= u_n^{**} + d_n (P'_N - P'_P) \\
 u_s^* &= u_s^{**} + d_s (P'_P - P'_S) \\
 w_e^* &= w_e^{**} + d_e (P'_E - P'_P) \\
 w_w^* &= w_w^{**} + d_w (P'_P - P'_W) \\
 v_t^* &= v_t^{**} + d_t (P'_T - P'_P) \\
 v_b^* &= v_b^{**} + d_b (P'_P - P'_B)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pour corriger la vitesse, il faut calculer le champs de correction de la pression, pour ça, on remplace les expressions de vitesses présentes dans l'équation de continuité, on obtient une équation algébrique pour P' :

$$a_p p'_P = a_n p'_N + a_s p'_S + a_e p'_E + a_w p'_W + a_t p'_T + a_b p'_B + b' \tag{3.44}$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned}
 a_n &= r_n d_n \Delta \theta_p \Delta z_p \\
 a_s &= r_s d_s \Delta \theta_p \Delta z_p \\
 a_e &= d_e \Delta r_p \Delta z_p \\
 a_w &= d_w \Delta r_p \Delta z_p \\
 a_t &= d_t r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
 a_b &= d_b r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
 a_p &= a_n + a_s + a_e + a_w + a_t + a_b
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$b' = \left[(r_n u_n^{*'} - r_s u_s^{*'}) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + (w_e^{*'} - w_w^{*'}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + (v_t^{*'} - v_b^{*'}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \right]$$

La correction de la pression est obtenue par la résolution de l'équation (3.44), qui permet par la suite de corriger le champ de vitesse.

3.7 Séquence de l'algorithme SIMPLER de calcul

1. Donner un champ initial comme première estimation pour la vitesse et la température au temps t et Δt .
2. Calcul des coefficients des équations discrétisées pour déterminer des pseudo vitesses.
3. On utilise les pseudo vitesses dans la source des équations de pression.
4. Résoudre l'équation discrétisée de la pression et trouver la pression estimée P^* .
5. Calculer le champ de vitesse estimé (u^*, v^*, w^*) , en utilisant la pression estimée.
6. Calculer la source pour l'équation de correction de pression.
7. Résoudre l'équation de correction de pression et corriger le champ de vitesse au temps $t^* + \Delta t^*$.
8. Résoudre l'équation de conservation de l'énergie discrétisée pour obtenir le champ de température.
9. Arrêter le calcul dans le cas d'atteinte d'un régime permanent ou d'un régime transitoire établi ou bien considérer les champs trouvés comme des estimations au temps t^* et ceux du temps t^* comme des champs au temps $t^* - \Delta t^*$ et retourner à l'étape 2....

3.8 Solution des systèmes d'équations de discrétisation par la méthode de balayage

La résolution directe de système d'équation algébrique est compliqué, pour y remédier, une méthode de résolution itérative de balayage : dans les directions radiale, axiale et azimutale respectivement. Il est clair que la matrice des coefficients de chacun des systèmes d'équations est heptadiagonale. Avant chaque balayage, cette matrice est transformée, momentanément, en une matrice tri-diagonal simple r^* et z^* et cyclique suivant θ . Les systèmes tri-diagonal suivant r^* et z^* sont résolus par l'algorithmes de Thomas classique alors que le système tri-diagonal cyclique est résolu par l'algorithmes de Thomas cyclique.

3.8.1 L'algorithme de Thomas

Dans sa forme générale l'équation discrétisée s'écrit :

$$A_P \phi_P = A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_T \phi_T + A_B \phi_B + S_P \quad (3.46)$$

Quant on procède à un balayage dans la direction r^* , l'équation est tout d'abord réécrite sous la forme:

$$A_P \phi_P = A_N \phi_N + A_S \phi_S + S'_P \quad (3.47)$$

En l'écrivant sous forme indicielle suivante:

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad \text{pour } i=1, IL \quad (3.48)$$

On introduit la relation de récurrence suivante:

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (3.49)$$

Cette équation est réécrite pour l'indice $i-1$:

$$\phi_{i-1} = P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1} \quad (3.50)$$

L'expression de ϕ_{i-1} , équation (3.47), et on obtient:

$$\phi_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad (3.51)$$

Par identification avec l'éq. (3.46) on en déduit deux nouvelles relations de récurrence :

$$P_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}} \quad (3.52)$$

$$\text{Avec les valeurs initiales } P_1 = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (3.53)$$

On peut facilement démontrer que $B_{IL} = 0$ et $C_1 = 0$

Avec l'utilisation de ces valeurs on peut calculer toutes les composantes P_i et $Q_i, i = 2, \dots, IL$.

Il est facile de démontrer que $\phi_{IL} = Q_{IL}$.

Remarque : pour le balayage suivant la direction z est effectuée de la même manière que le balayage suivant la direction z^* sauf en remplace i par j est A_N par A_T et A_S par A_B .

3.8.2 L'algorithme de Thomas cyclique

Un système d'équations tri diagonal cyclique est représenté par l'équation indicelle suivante:

$$a_k F_k = b_k F_{kkk} + c_k F_{kk} + d_k \quad (3.54)$$

$k = 1, 2, \dots, KL$

Avec:

$$kkk = \begin{cases} k+1, & \text{sik} \neq KL \\ 1, & \text{sik} = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k-1, & \text{sik} \neq 1 \\ KL, & \text{sik} = 1 \end{cases}$$

Tous les éléments a_k , b_k , c_k et d_k sont supposés connus.

On divise l'équation par a_k

$$F_k = \frac{b_k}{a_k} F_{kkk} + \frac{c_k}{a_k} F_{kk} + \frac{d_k}{a_k} \quad (3.55)$$

Dans le cas où $k = 1$

$$F_1 = \frac{b_1}{a_1} F_2 + \frac{c_1}{a_1} F_{KL} + \frac{d_1}{a_1} \quad (3.56)$$

On introduit la relation de récurrence suivante:

$$F_k = E_k F_{kkk} + F_k F_{KL} + G_k \quad (3.57)$$

$k = 1, 2, \dots, KL - 1$

Quant $k = 1$ on obtient:

$$F_1 = E_1 F_2 + F_1 F_{KL} + G_1 \quad (3.58)$$

Par identification avec l'équation (3.56) on trouve:

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad F_1 = \frac{c_1}{a_1}, \quad G_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Pour l'indice kk dans l'équation (3.57) on obtient la relation:

$$F_{kk} = E_{kk} F_k + F_{kk} F_{KL} + G_{kk} \quad (3.59)$$

En remplaçant (3.59) dans (3.54) on obtient:

$$F_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}} F_{kkk} + \frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} F_{KL} + \frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}} \quad (3.60)$$

Par identification avec l'équation (3.57) on trouve:

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{kk}}, \quad F_k = \frac{c_k F_{kk}}{a_k - c_k E_{kk}} \quad \text{et} \quad G_k = \frac{c_k G_{kk} + d_k}{a_k - c_k E_{kk}},$$

$k = 2, 3, \dots, KL - 1$

Donc on peut calculer de les valeurs de E_k, F_k, G_k à partir de connaître de valeurs E_1, F_1, G_1 .

Le terme qui n'est pas connu dans l'équation (3.57) c'est F_{KL} , donc il faut le définir.

De l'équation (3.54) on a:

$$a_{KL} F_{KL} = b_{KL} F_1 + c_{KL} F_{KL-1} + d_{KL} \quad (3.61)$$

Cette équation est réécrite sous la forme:

$$P_1 F_{KL} = Q_1 F_1 + c_{KL} F_{KL-1} + R_1 \quad (3.62)$$

avec:

$$P_1 = a_{KL}, Q_1 = b_{KL} \text{ et } R_1 = d_{KL}$$

On retour à l'équation (3.57) qui est :

$$F_k = E_k F_{kkk} + F_k F_{KL} + G_k$$

Pour $k=1$ on trouve:

$$F_1 = E_1 F_2 + F_1 F_{KL} + G_1 \quad (3.63)$$

On remplace la valeur de F_1 dans l'équation (3.61) on obtient:

$$[P_1 - Q_1 F_1] F_{KL} = [Q_1 E_1] F_2 + c_{KL} F_{KL-1} + [R_1 + Q_1 G_1] \quad (3.64)$$

On écrit cette équation sous la forme suivante:

$$P_2 F_{KL} = Q_2 F_2 + c_{KL} F_{KL-1} + R_2 \quad (3.65)$$

On retourne une dernière fois à l'équation (3.57) qui est:

$$F_k = E_k F_{kkk} + F_k F_{KL} + G_k$$

Pour $k=2$ on obtient:

$$F_2 = E_2 F_3 + F_2 F_{KL} + G_2$$

Cette équation est utilisée dans la précédente et il vient:

$$[P_2 - Q_2 F_2] F_{KL} = [Q_2 E_2] F_3 + c_{KL} F_{KL-1} + [R_2 + Q_2 G_2]$$

qui est réécrite:

$$P_3 F_{KL} = Q_3 F_3 + c_{KL} F_{KL-1} + R_3 \quad (3.66)$$

Sachant que:

$$P_3 = P_2 - Q_2 F_2, Q_3 = Q_2 E_2 \text{ et } R_3 = Q_2 G_2 + R_2$$

Cette procédure est en continuée jusqu'à l'obtention de l'équation:

$$P_{KL-1} F_{KL} = Q_{KL-1} F_{KL-1} + c_{KL} F_{KL-1} + R_{KL-1} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] F_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.67)$$

à ce moment est par récurrence on peut calculer P_k , Q_k et R_k par les relation suivantes:

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} - Q_{k-1} F_{k-1} \\ Q_k &= Q_{k-1} E_{k-1} \\ R_k &= Q_{k-1} G_{k-1} + R_{k-1} \end{aligned} \tag{3.68}$$

Reconsidérons l'équation (3.67):

$$P_{KL-1} F_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] F_{KL-1} + R_{KL-1}$$

Avec l'équation (3.57) on a:

$$F_{KL-1} = E_{KL-1} F_{KL} + F_{KL-1} F_{KL} + G_{KL-1} = [E_{KL-1} + F_{KL-1}] F_{KL} + G_{KL-1}$$

Cette équation est utilisée dans (3.67) et il vient:

$$P_{KL-1} F_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] [(E_{KL-1} + F_{KL-1}) F_{KL} + G_{KL-1}] + R_{KL-1} \tag{3.69}$$

On réarrange l'équation (3.69) on trouve:

$$F_{KL} = \frac{[Q_{KL-1} + c_{KL}] G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - [Q_{KL-1} + c_{KL}] [E_{KL-1} + F_{KL-1}]}$$

Après le calcul de F_{KL} on utilise l'équation (3.57) pour calculer toutes les F_k à partir de $k = KL - 1, KL - 2, \dots, 2, 1$.

Chapitre 4

Résultats et discussion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente les résultats relatifs à cette étude. Les premiers présentés seront les résultats relatifs à la géométrie non ailette. Ces derniers porteront sur la convection laminaire et forcée ($Gr^* = 0$) qui est considérée comme un cas de référence ainsi que sur les différents cas de convection mixte $Gr^* = 2500, 12500$ et 25000 correspondants successivement à des nombres de Richardson égaux à $Ri = 1, 5$ et 10 , respectivement. Ensuite les résultats propres à la convection mixte laminaire dans une géométrie annulaire ailetée seront présentés. Ils concerneront le cas de quatre ailettes en une station axiale fixée.

L'ensemble des résultats sont obtenus pour un rapport d'aspect géométrique fixé $A=10$ ($A = L/d A$), et les paramètres de contrôle suivants fixés : le nombre de Prandtl ($Pr = 0.7$, air) et le nombre de Reynolds ($Re = 50$).

4.2 Le cas de référence : La convection forcée ($Gr^* = 0$)

4.2.1 Le champ de vitesse axiale

A l'entrée du conduit annulaire le fluide se présente avec une vitesse constante. La seule composante axiale est constante ($V_z^*|_{z^*=0} = 1$) tandis que les composantes angulaire et radiale sont nulles. Ces dernières resteront nulles à travers l'ensemble du conduit car la condition de non glissement à la paroi ainsi qu'un nombre de Grashof nul sont appliqués.

On trace les contours avec le logiciel Tecplot.9.0 et la distribution de la vitesse est illustrée dans la figure (4.1). Dans cette figure on a représenté le profil de la vitesse axiale pour deux valeurs de la longueur axiale du conduit: à l'entrée du conduit $z^* = 1$ et à deux différentes coordonnées axiales correspondantes respectivement au quart et au trois quart de la longueur du conduit $z^* = 2.5$ et $z^* = 7.5$ ainsi qu'à la sortie du conduit. A part à l'entrée et une très courte zone avoisinante, au-delà de $z^* = 1.358$ les profils sont identiques et conservés sur tout le conduit. La convection forcée est hydrodynamiquement développée. Depuis sa valeur nulle aux deux parois conformément aux hypothèses d'adhérence (conditions aux limites aux parois fixes) la vitesse axiale atteint sa valeur maximum $V_{z_{\max}}^* = 1.503259$ au centre de l'espace annulaire ($r^* = 0.737$) en suivant un profil parabolique. Il est clair qu'en toute section axiale le profil de la vitesse est axisymétrique tandis que les isotacs de la vitesse axiale sont des cercles concentriques avec une variation dans la direction radiale. A part la très courte zone

proche de l'entrée, les composantes radiale et angulaire de la vitesse sont très faibles ($V_{r \max}^* = 0.24178$ et $V_{\theta \max}^* = 4.66510^{-4}$) dans la quasi-totalité du conduit.

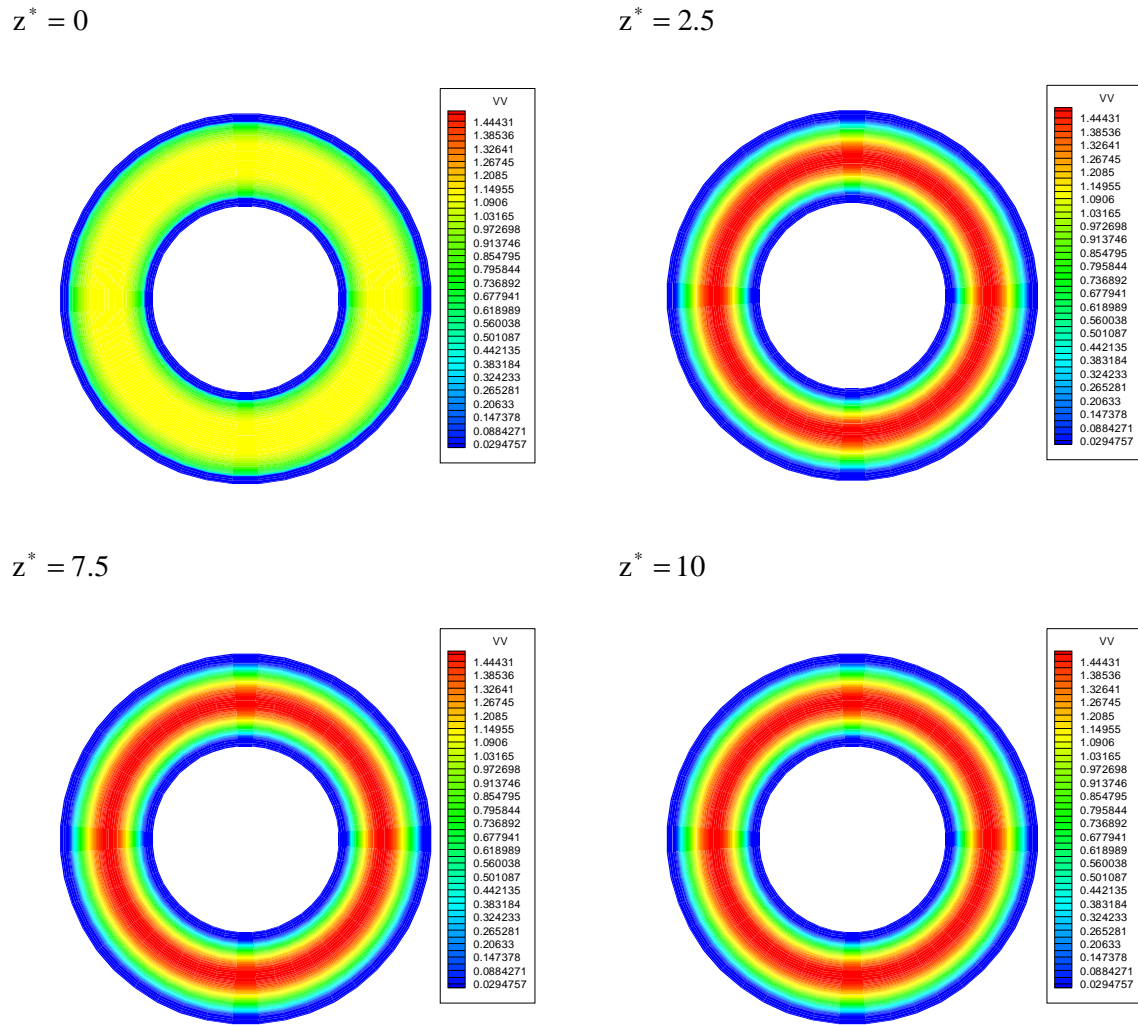


Figure 4.1 Les contours de vitesse axiale en convection forcée

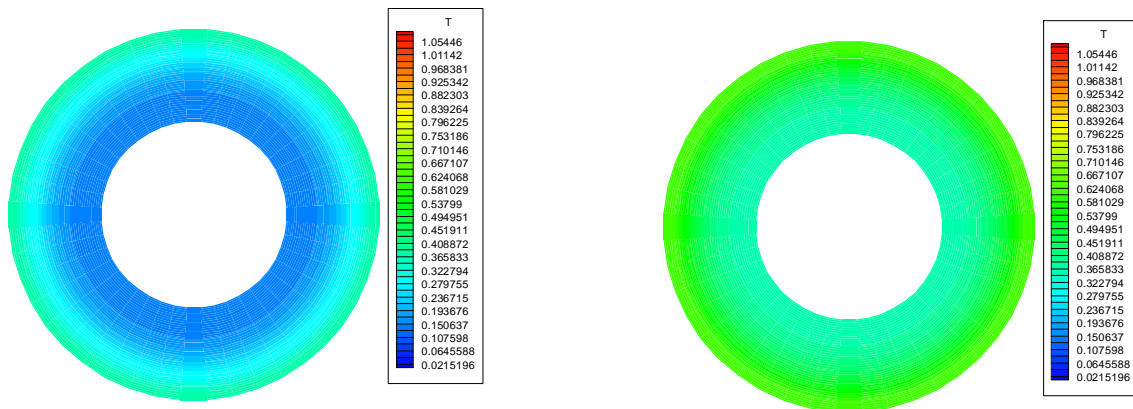
4.2.2 La distribution des températures

La variation est démontrée par la représentation graphique dans la figure 4.2 de la distribution des températures aux quatre stations axiales arbitrairement choisies : $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 , correspondantes successivement au quart, demi, trois quart et toute la longueur. On voit une variation bidirectionnelle constituée par une croissance axiale monotone de

l'entrée jusqu'à la sortie du conduit ainsi qu'une variation radiale en toute section axiale. A l'entrée la température est constante égale à $(T^*|_{z^*=0} = 0)$ tandis qu'à la sortie elle atteint son maximum absolu qui est égal à 1.0975. Les isothermes sont aussi des cercles concentriques. La comparaison des quatre distributions révèle que pour toute section le maximum des températures se situe au niveau du cylindre extérieur ($r^* = 1$ et $\theta = 0$) qui est le plus chaud et que la température décroît radialement vers le cylindre intérieur adiabatique. Le minimum des températures se situe au niveau de ce dernier. L'échange de chaleur se fait par convection forcée et à plus faible proportion par diffusion thermique (nombre de Reynolds faible).

$z^* = 2.5$

$z^* = 5$



$z^* = 7.5$

$z^* = 10$

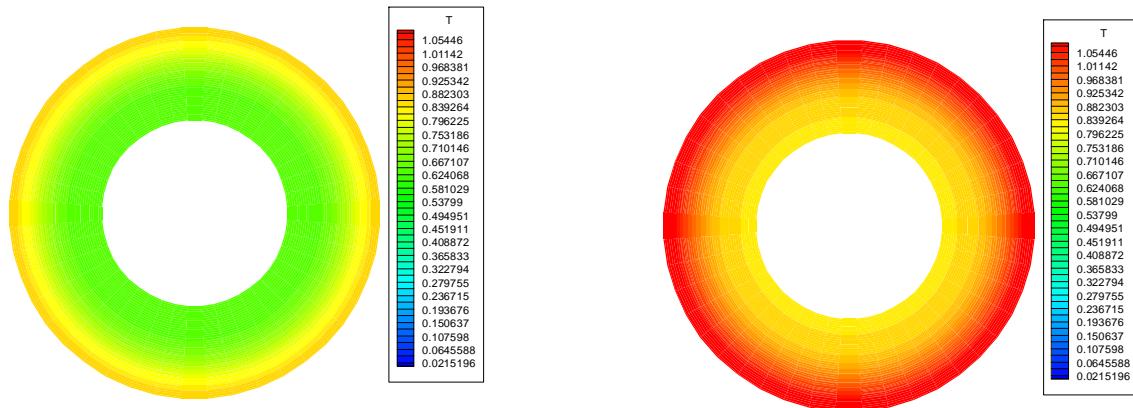


Figure 4.2 Champ de températures en des positions axiales du tube

4.2.3 La variation axiale de la température moyenne

La figure 4.3 représente la variation axiale de la température moyenne. Elle augmente linéairement depuis sa valeur nulle à l'entrée du conduit $T_m^* = 0$ jusqu'à sa valeur maximale à la sortie du conduit $T_m^* = 0.92637$. C'est le résultat d'un chauffage continu vers le fluide tout au long de son écoulement à travers le conduit.

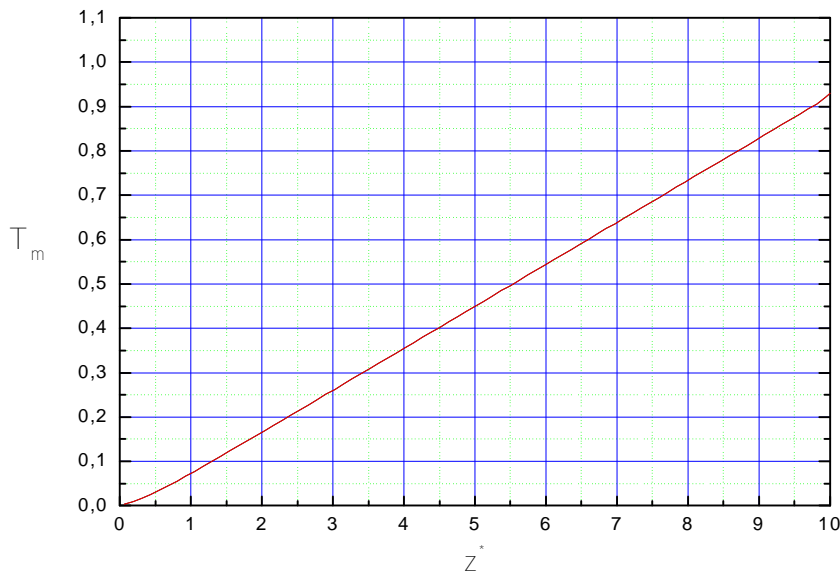


Figure 4.3 Evolution axiale de la température moyenne du fluide

4.2.4 La distribution de pression

Les figures 4.4 et 4.5 représentent la variation de pression pour tout le conduit. La figure 4.4 montre la variation axiale de la pression tandis que la figure 4.5 montre la variation à travers les quatre stations axiales choisies précédemment. Ces figures montrent qu'il y a une chute axiale de la pression entre l'entrée et la sortie de conduit. Cependant les variations, radiale sont négligeables.

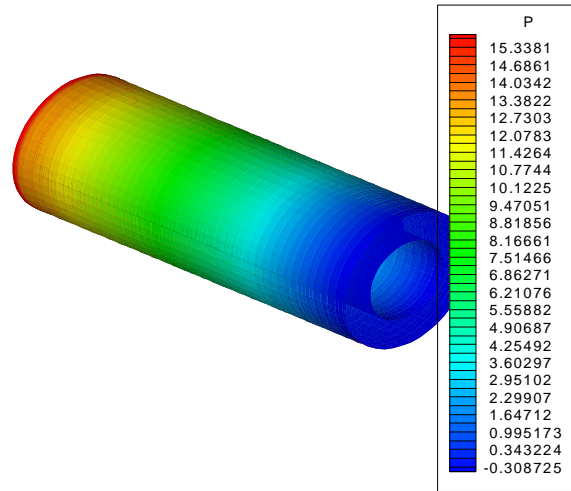
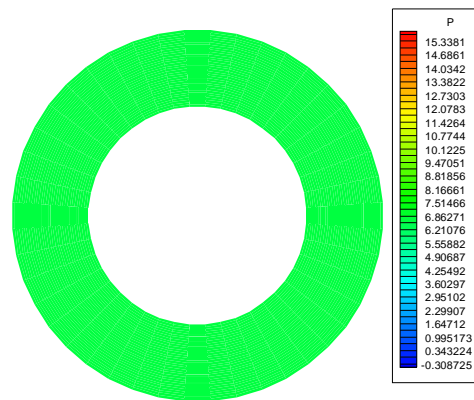
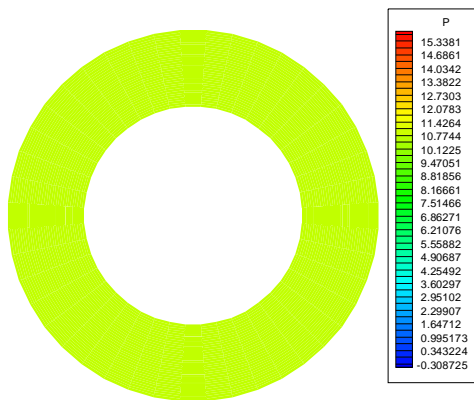


Figure 4.4 Le champ de pression le long du conduit

$z^* = 2.5$

$z^* = 5$



$z^* = 7.5$

$z^* = 10$

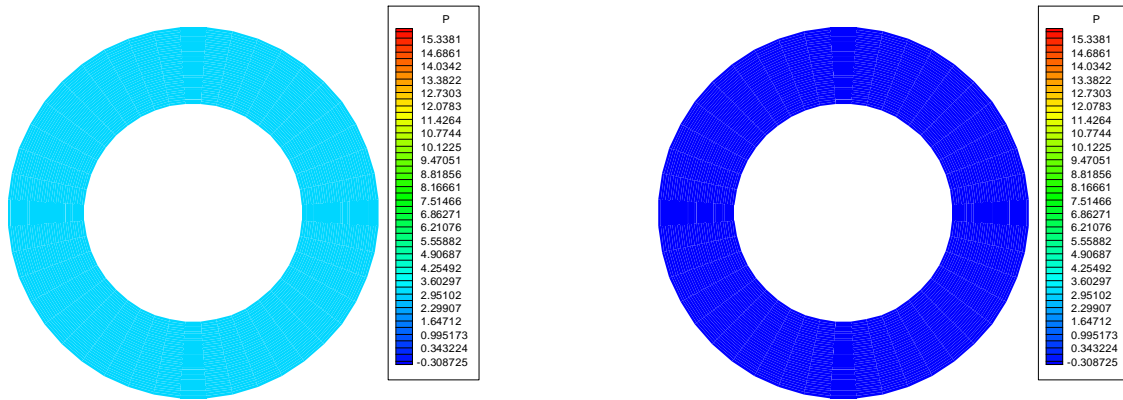


Figure 4.5 Variations radiale de la pression pour les différentes positions axiales

4.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial

La figure 4.6 représente la distribution du nombre de Nusselt moyen axial qui est

défini par
$$Nu(z^*) = \frac{1}{T_p^*(z^*) - T_m^*(z^*)}$$
. Il montre une diminution axiale continue expliquée par,

d'une part l'augmentation axiale de la différence des températures de la paroi $T_p^*(z)$ et moyenne du fluide $T_m^*(z^*)$, et d'autre part par la constance du gradient radial des températures à la paroi. D'une valeur très élevée à l'entrée ($z^* = 0$) égale à $Nu = 24$ le nombre de Nusselt subit sur une petite distance (de $z^* = 0$ à $z^* = 1$) une brutale diminution atteignant la valeur $Nu = 7$ suivie d'une lente diminution atteignant la valeur $Nu = 6.5$ en $z^* = 2$, pour enfin se fixer sur une valeur constante asymptotique égale à $Nu = 6.3$ de $z^* = 2$ jusqu'à la sortie $z^* = 10$. Nous pouvons donc dire qu'entre $z^* = 2$ et la sortie la convection forcée est complètement développée. Le nombre de Nusselt moyen pour tout le conduit est $Nu = 6.785$.

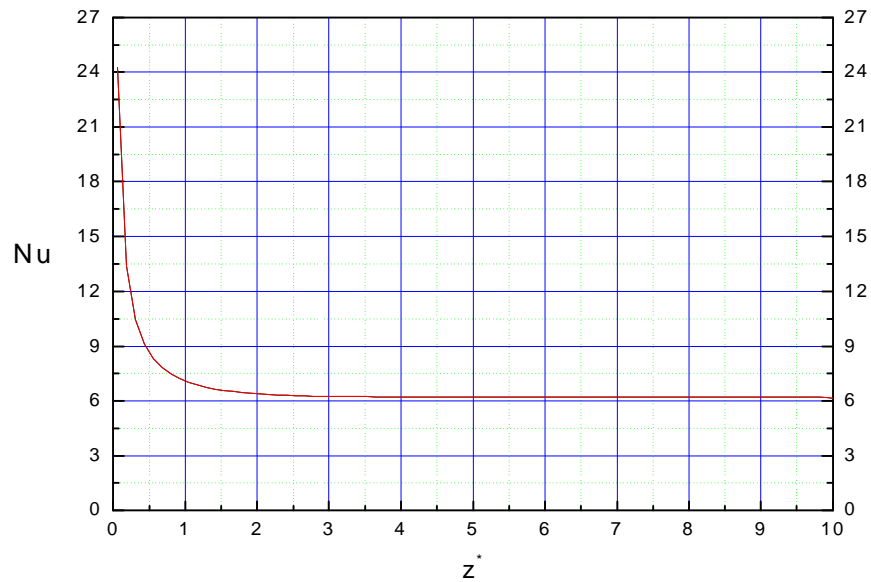


Figure 4.6 Variation axiale de nombre de Nusselt moyen pour la convection forcée

4.3 Les écoulements de convection mixte

4.3.1 La convection mixte modérée : le cas $Gr^* = 2500$ ($Ri = 1$)

4.3.1.1 Le champ de vitesse

L'évolution axiale de la vitesse axiale aux différentes positions choisies précédemment $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et $z^* = 10$ est représentée sur la figure 4.7. Cette figure illustre une symétrie par rapport à l'axe vertical. On remarque que les vitesses axiales élevées sont dans la zone centrale de l'espace annulaire tandis que les faibles vitesses sont situées au voisinage des parois des cylindres. La valeur maximale de la vitesse axiale sur tout le conduit est $V_{\max}^* = 1.57421$ et se situe près du centre de l'espace annulaire mais dans la partie inférieure du conduit ($r^* = 0.7378, \theta = 3.141593$). Par rapport à la convection forcée la vitesse axiale maximale en convection mixte ($Ri = 1$) a légèrement augmenté et changé de localisation. La composante radiale de la vitesse n'a quasiment pas varié $V_{r \max}^* = 0.24222$ tandis que la composante angulaire a subi une augmentation relative appréciable puisque son maximum a atteint la valeur $V_{\theta \max}^* = 3.179610^{-2}$. Mais ces variations restent assez faibles.

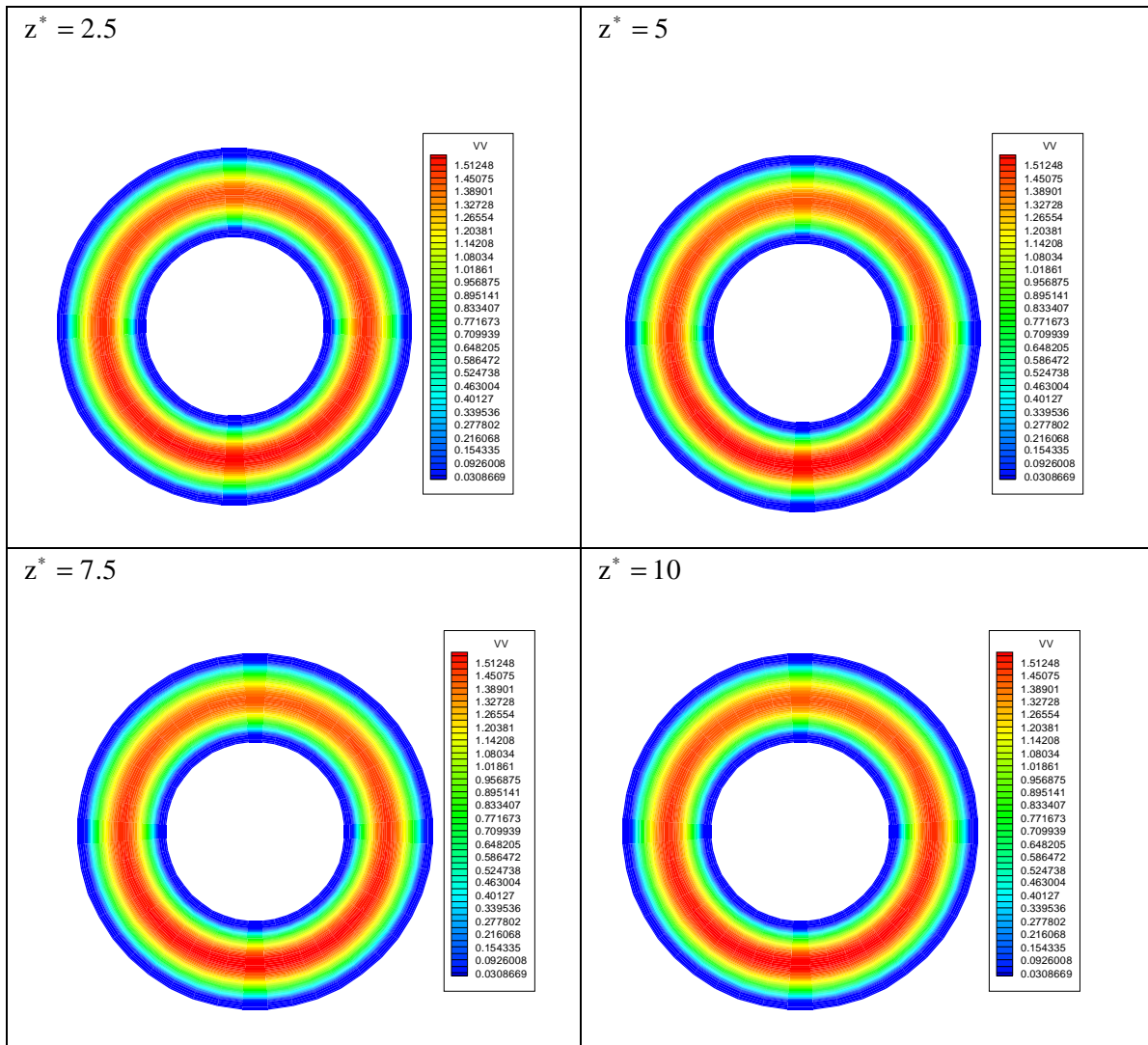
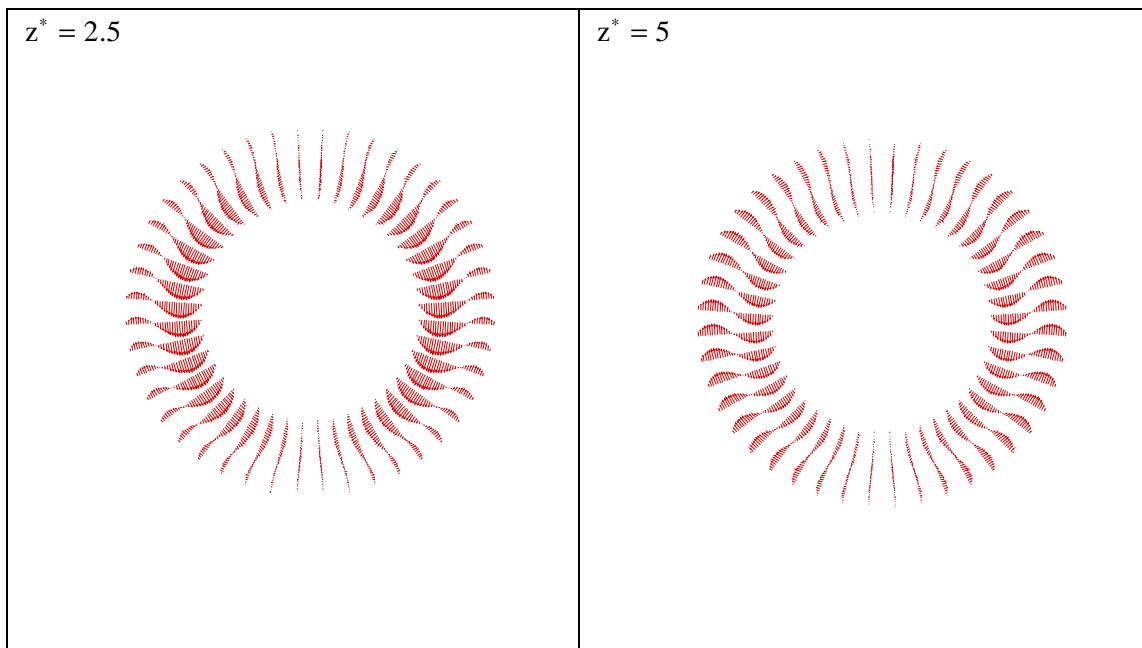


Figure 4.7 La variation de la vitesse axiale

4.3.1.2 L'écoulement secondaire

L'écoulement secondaire pour $Gr^* = 2500$ est rapporté dans les figures 4.8 et 4.9. Sur la figure 4.8 sont représentées les vecteurs de l'écoulement secondaire et sur la figure 4.9 sont représentées les lignes de courant dans le plan $r^* - \theta$ pour les mêmes sections choisies à $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10. L'écoulement transversal dans un plan vertical normal à l'axe du conduit est bien présent dans toutes les sections par la formation de deux rouleaux principaux, respectant une symétrie par rapport au plan diamétral vertical. Il faut signaler que l'écoulement à quatre cellules (deux à gauche et deux à droite) est d'abord précédé d'un écoulement bicellulaire (une à gauche et une autre à droite) existant sur une zone très courte

proche de l'entrée, comprise entre $z^* = 0$ et $z^* = 0.679$, et occupant tout l'espace annulaire. Le sens de cet écoulement se fait du haut du conduit ($\theta = 0$) vers le bas ($\theta = \pi$) dont le maximum atteint les composantes angulaire $V_\theta^* = 0.0273$ et radiale $V_r^* = 8 \cdot 10^{-4}$, et est situé dans la zone centrale à $r^* = 0.6514$ et $\theta = 1.3567$. Au-delà de cette position $z^* = 0.679$, il apparaît au voisinage de la surface intérieure du conduit extérieure une zone de recirculation dans un sens opposé à celui de la cellule précédente, c'est-à-dire orienté du bas vers le haut du conduit. Cette zone de recirculation forme une cellule qui a tendance à s'étaler dans l'espace annulaire de telle sorte à arriver à occuper la moitié de cet espace annulaire et contraindre ainsi la première cellule à se réduire spatialement. Ce "face à face" cellulaire est maintenu jusqu'à un certain $z^* = 5.9876$ où les deux cellules s'équilibrent en dimensions et partagent l'espace annulaire en deux. La séparation entre ces deux cellules se fait quasiment à la mi-distance radiale soit $r^* = 0.75$ et les vitesses angulaires sont dans les deux cellules quasi identiques en intensité mais de sens différents. Au point de séparation ou d'inflexion les composantes angulaire et radiale sont très petites ou presque nulles. Depuis ce $z^* = 5.9876$ jusqu'à la sortie l'écoulement secondaire est invariant axialement.



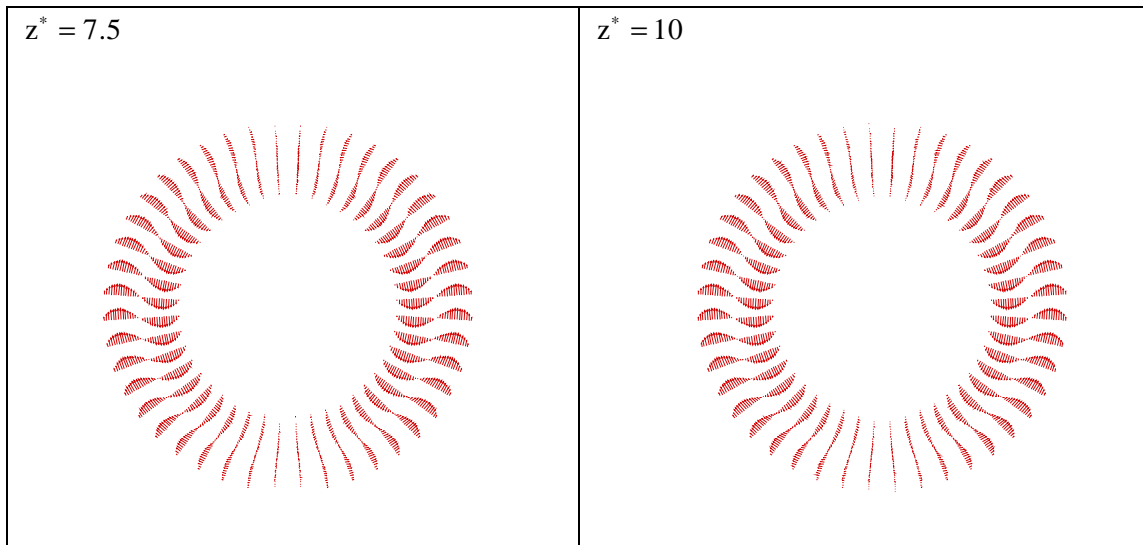
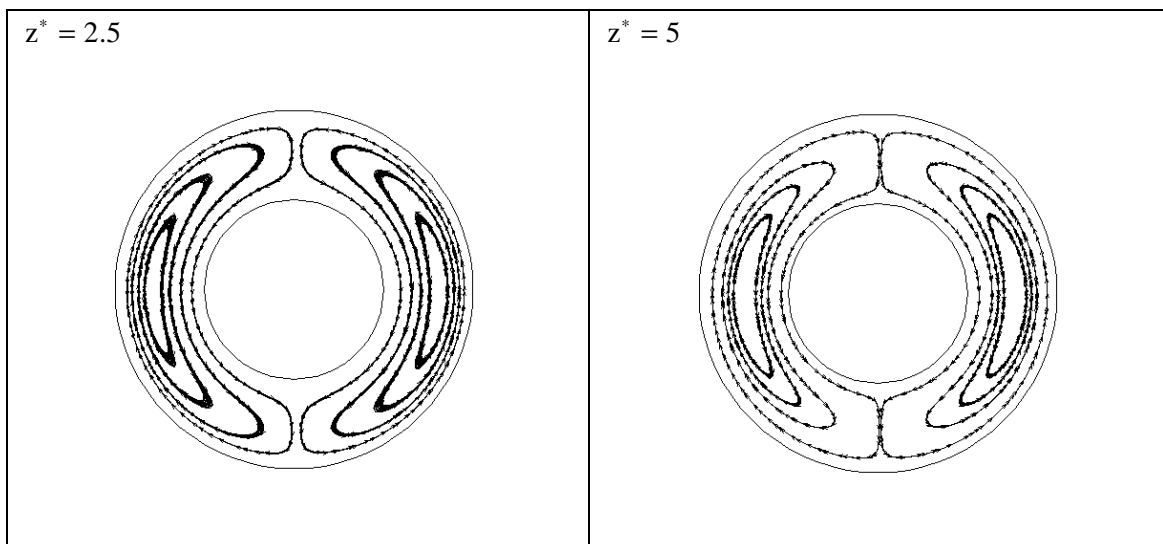


Figure 4.8 Variation de l'écoulement secondaire



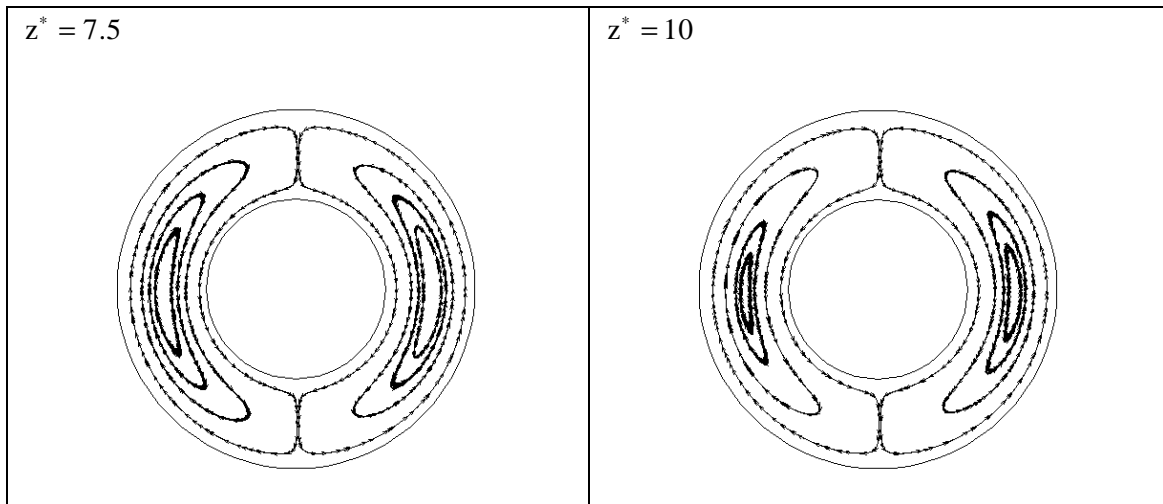
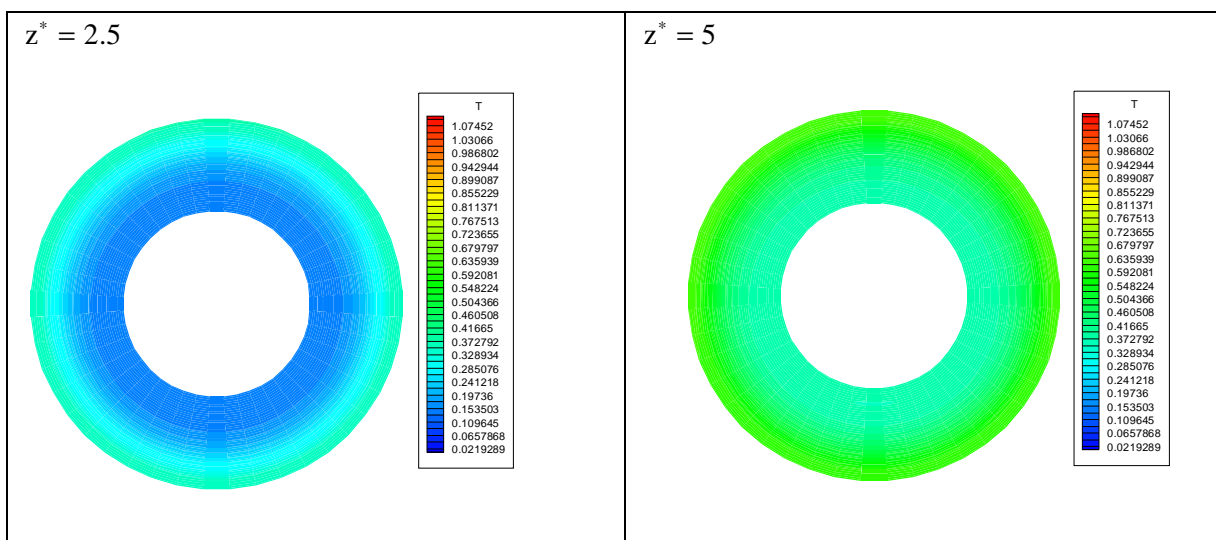


Figure 4.9 Evolution de l'écoulement secondaire pour $Gr^* = 2500$

4.3.1.3 Distribution de température

Sur la figure (4.10) on montre les champs thermiques en différentes stations axiales $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 , respectivement. En plus de la symétrie par rapport au diamètre vertical, ces figures montrent des variations radiales et angulaires en chaque section et axiales le long du conduit. Pour les positions choisies $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 les maximums de température sont respectivement $T_{max}^* = 0.38267, 0.62956, 0.8807$ et 1.11837 et se situent au sommet de la paroi extérieure du conduit ($\theta = 0, R_o^* = 1$), tandis que les minimums de température sont respectivement $T_{min}^* = 0.147577, 0.373418, 0.615741$ et 0.847558 et se situent à la surface du cylindre intérieure en $\theta = \pi$ et $R_i^* = 0.5$.



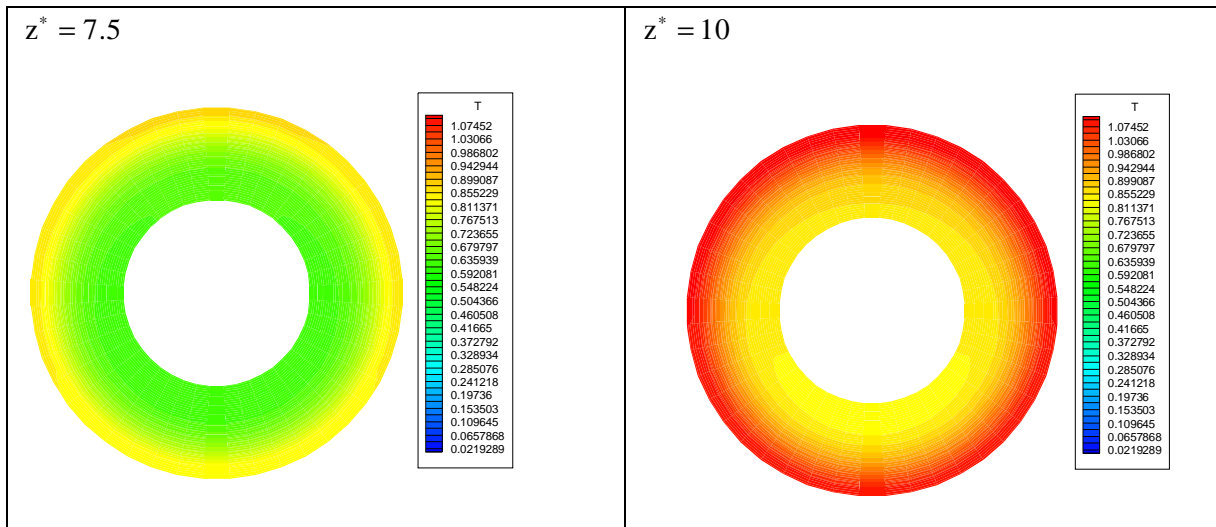


Figure 4.10 La distribution de température

4.3.1.4 La distribution de pression

La figure (4.11) illustre la variation axiale de la pression tandis que la figure (4.12) montre la variation radiale et azimutale aux quatre positions choisies précédemment. Ces figures montrent qu’il y a une chute axiale de la pression entre l’entrée et la sortie du conduit. La valeur maximale de la pression est située à l’entrée du conduit et la valeur minimale est située à la sortie du conduit.

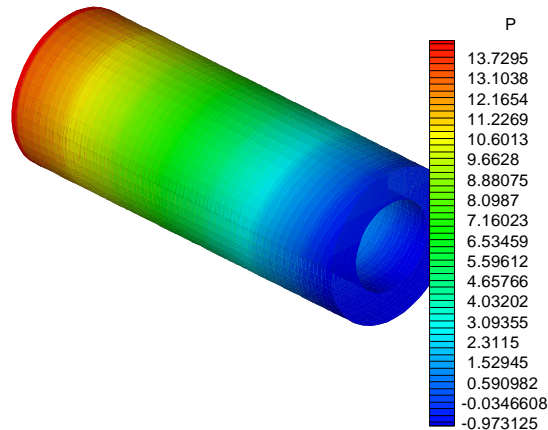


Figure 4.11 La distribution spatiale de la pression

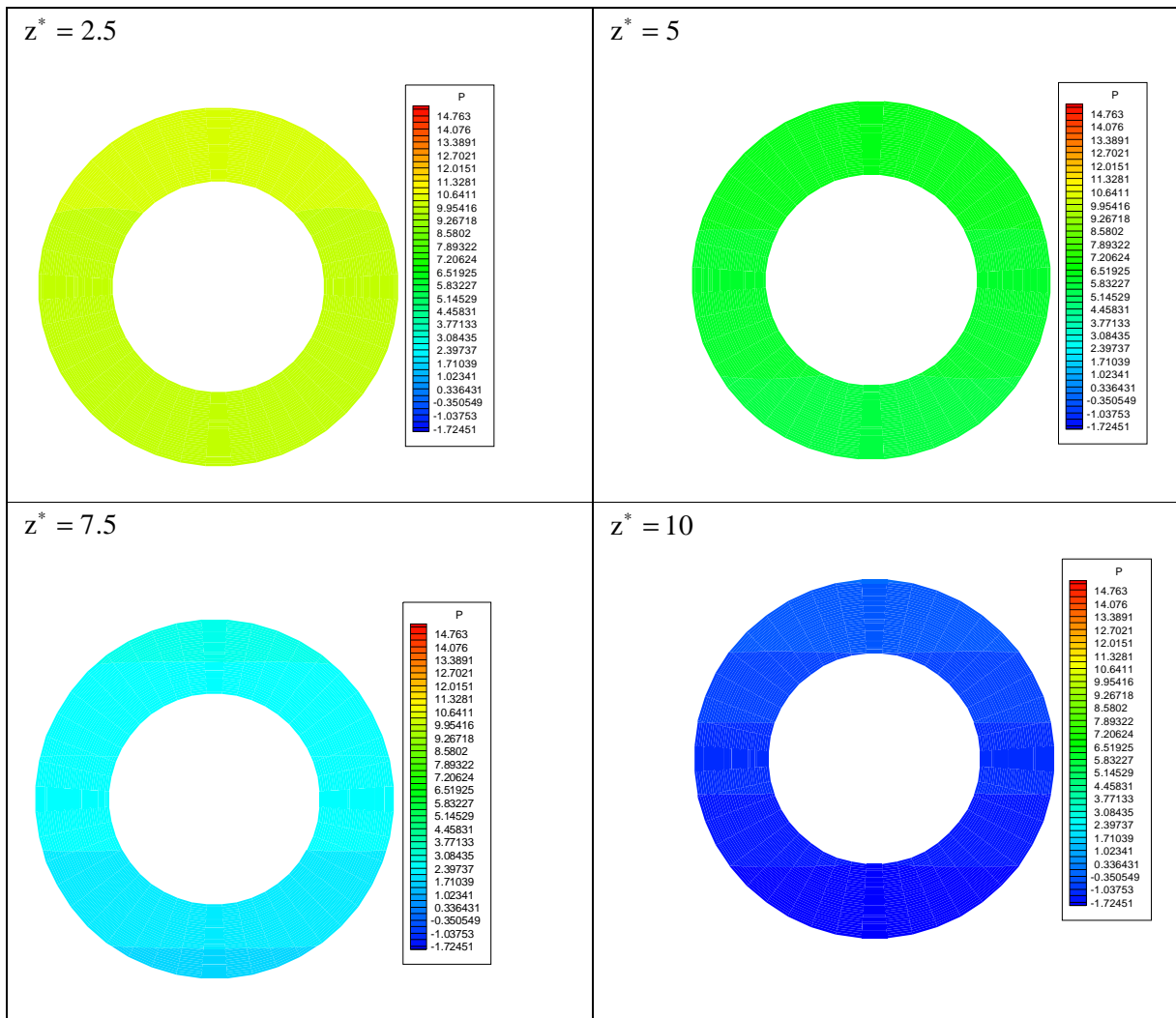


Figure 4.12 Variation, radiale et azimutale, de la pression

4.3.1.5 Variation du nombre de Nusselt axial

La figure (4.13) représente la variation du nombre de Nusselt moyen circonférentiel et local axial $Nu(z^*)$. Ses variations sont qualitativement et quantitativement semblables à celles du nombre de Nusselt axial $Nu(z^*)$ de la convection forcée ($Gr^* = 0$). Il chute de la valeur $Nu(z^*) = 24.27478$ à l'entrée jusqu'à la valeur $Nu(z^*) = 6.22134$ en $z^* = 4.87654$. Au-delà de ce z^* le nombre de Nusselt reste quasiment constant exhibant plutôt un comportement asymptotique analogue à celui de la convection forcée.

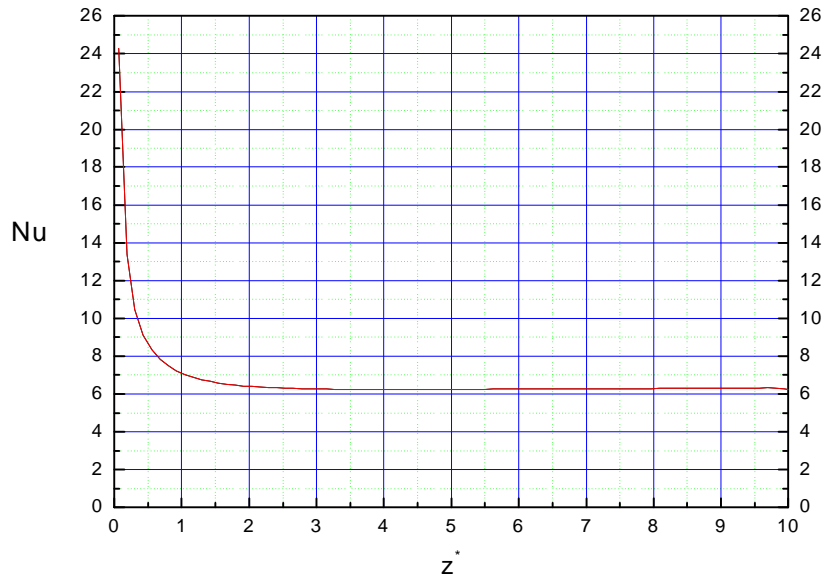


Figure 4.13 Evolution axiale du nombre de Nusselt

4.3.2 La convection mixte élevée: le cas $Gr^* = 12500$ ($Ri = 5$)

4.3.2.1 Le champ de vitesse

La figure (4.14) représente les variations de la vitesse axiale dans quatre positions. $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 . L'observation générale des quatre positions montre un net changement du profil de vitesse par rapport à ce qui a été vu précédemment (fig.4.1 et 4.7). La symétrie verticale passant par le centre de l'écoulement est conservée mais cette fois il y a de nettes variations tridimensionnelles de la vitesse axiale. On remarque nettement que le maximum de la vitesse axiale de l'écoulement s'installe rapidement ($z^* \geq 0.61728$) au niveau de la moitié de la partie inférieure du conduit. Il atteint la valeur $V_{\max}=1.85791$ en une position polaire $r^* = 0.750$ et $\theta = 3.21299$. Par contre, elle est diminuée partout ailleurs. Aussi cette structure de la vitesse axiale devient quasi développée au-delà de $z^* \geq 5.679$. Le maximum continuera à augmenter légèrement mais avec une invariance locale de sa position.

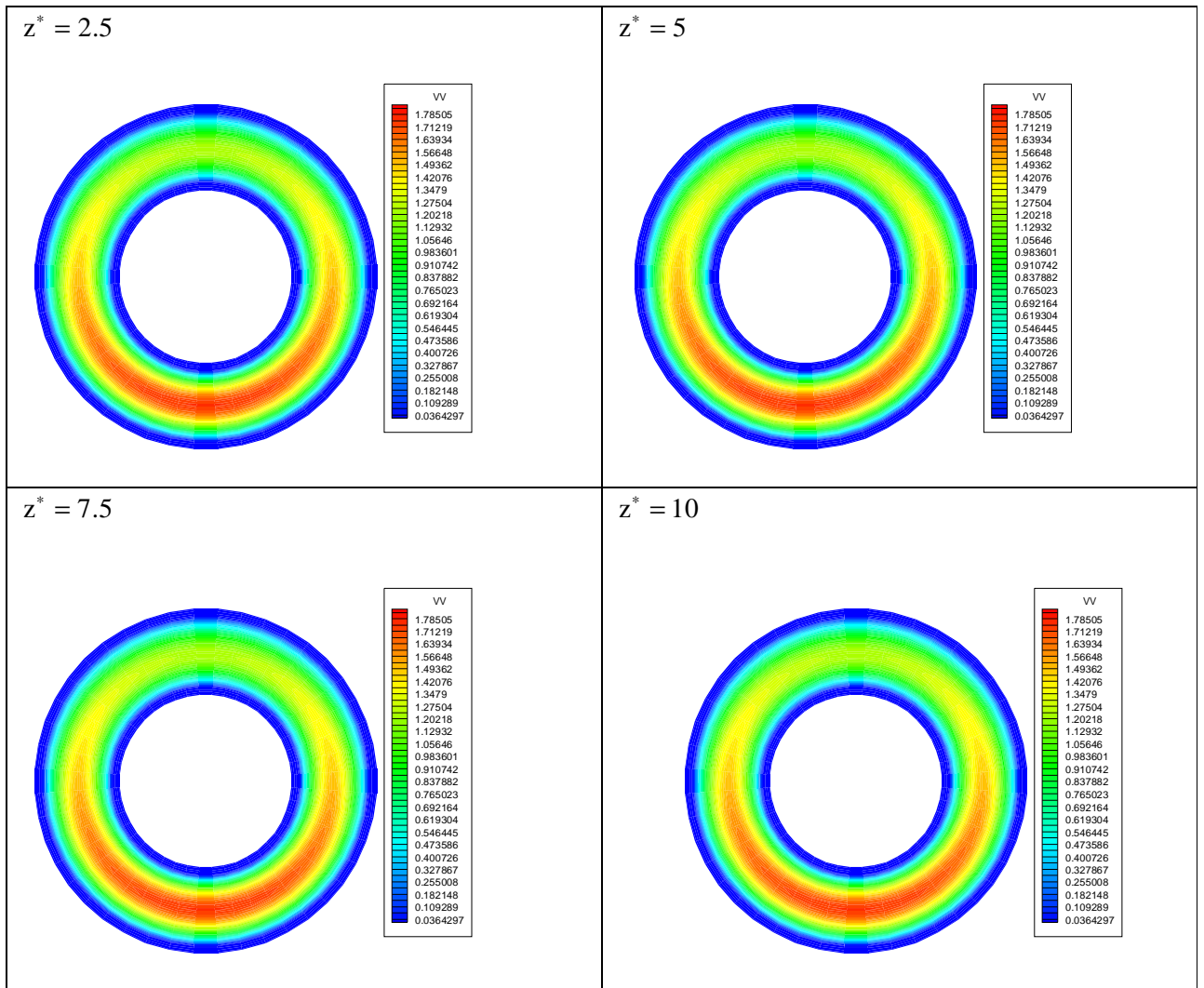
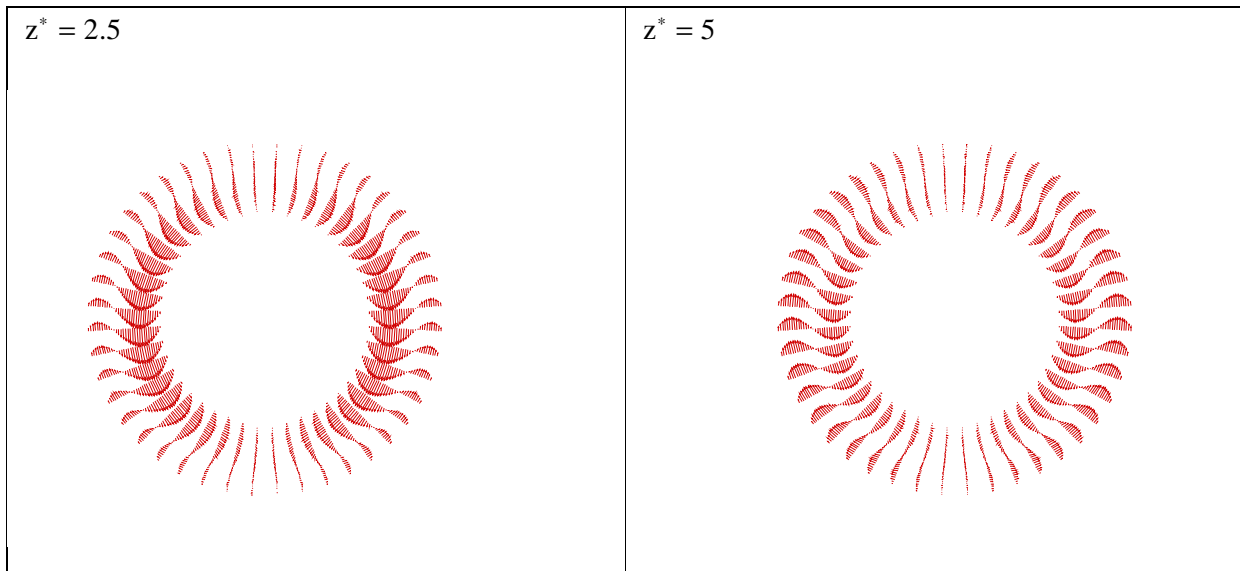


Figure 4.14 La variation de la vitesse axiale

4.3.2.2 L'écoulement secondaire

L'écoulement pour ce cas correspond à un nombre de Richardson ($R_i = 5$) et pour un tel cas l'écoulement ne peut être axisymétrique. La seule symétrie possible est celle par rapport à un plan vertical. Sur la figure (4.15) sont représentés les vecteurs de l'écoulement secondaire et la figure (4.16) représente les lignes de courant dans le plan (r^*, θ) . En toute section représentée, la formation de quatre rouleaux convectifs contrarotatifs principaux est observée mais avec plus d'intensité. Cette augmentation d'intensité de l'écoulement secondaire a eu un effet plus grand sur le profil axial de l'écoulement et sur le transfert thermique local. Cependant, il faut noter que l'écoulement bicellulaire orienté de haut en bas existe toujours dans une zone courte allant de l'entrée à $z^* = 0.7407$. Avec un maximum situé

à $r^* = 0.670732$ cet écoulement se concentre dans une zone proche du cylindre intérieur. A partir de $z^* = 0.7407$ il y a naissance de deux autres cellules au voisinage du cylindre extérieur et qui s'étalent dans l'espace annulaire au fur et à mesure que z^* augmente. Lorsque $z^* = 5.679012$ ces cellules s'équilibrent en taille et en module des composantes de vitesses. Il faut remarquer que ces cellules sont contrarotatives avec un sens de bas en haut pour la cellule proche du cylindre extérieur et un sens contraire pour la cellule proche du cylindre intérieur. Par exemple pour une position angulaire choisie: ($\theta = 1.499396$ qui correspond à $k=11$) les composantes des maximums de vitesse pour la cellule intérieure sont [$V_\theta^* = -0.0190328, V_r^* = 0.00122$] et situées à $r^* = 0.646341$ tandis que pour la cellule extérieure les composantes sont [$V_\theta^* = 0.0196, V_r^* = -0.00152$] et situées à $r^* = 0.865854$. Enfin au-delà de $z^* = 5.679012$ l'écoulement secondaire est hydrodynamiquement développé le long de la direction axiale.



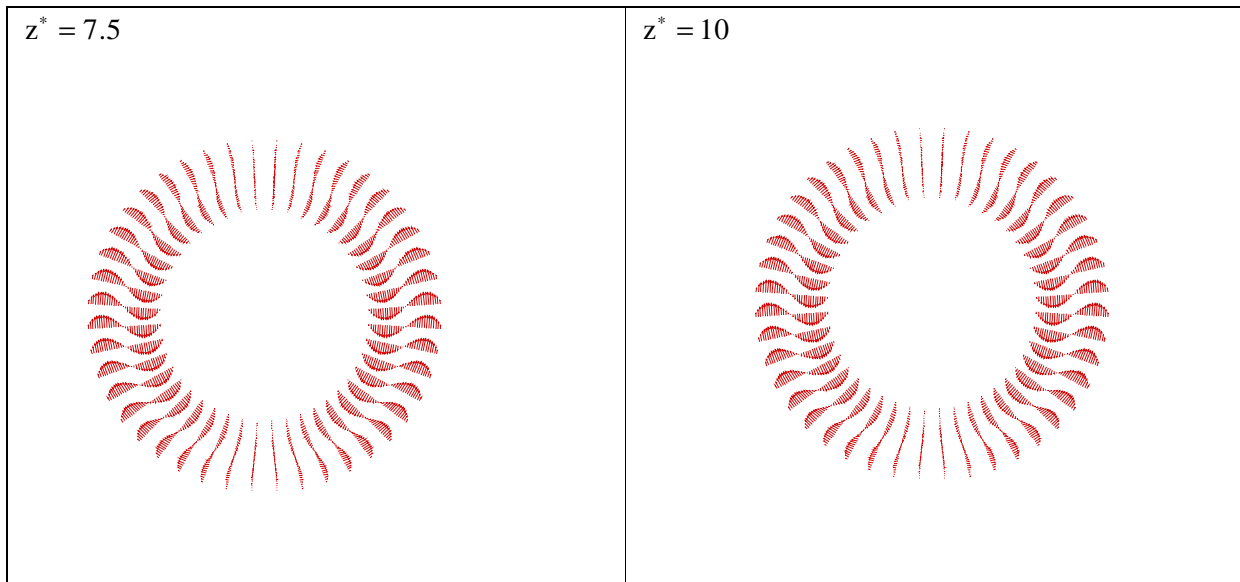
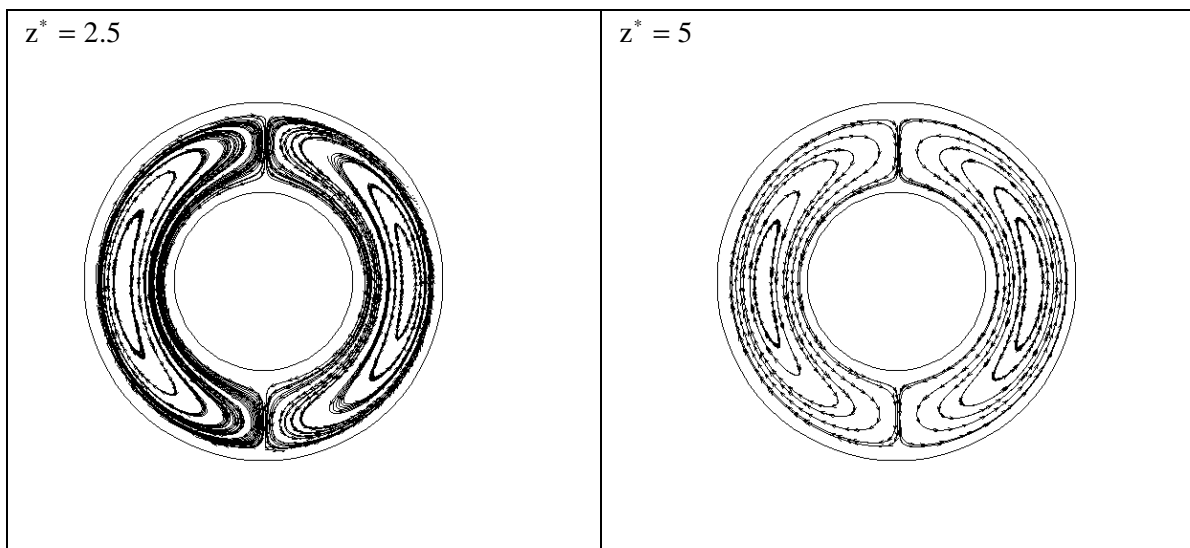


Figure 4.15 Variation de l'écoulement secondaire



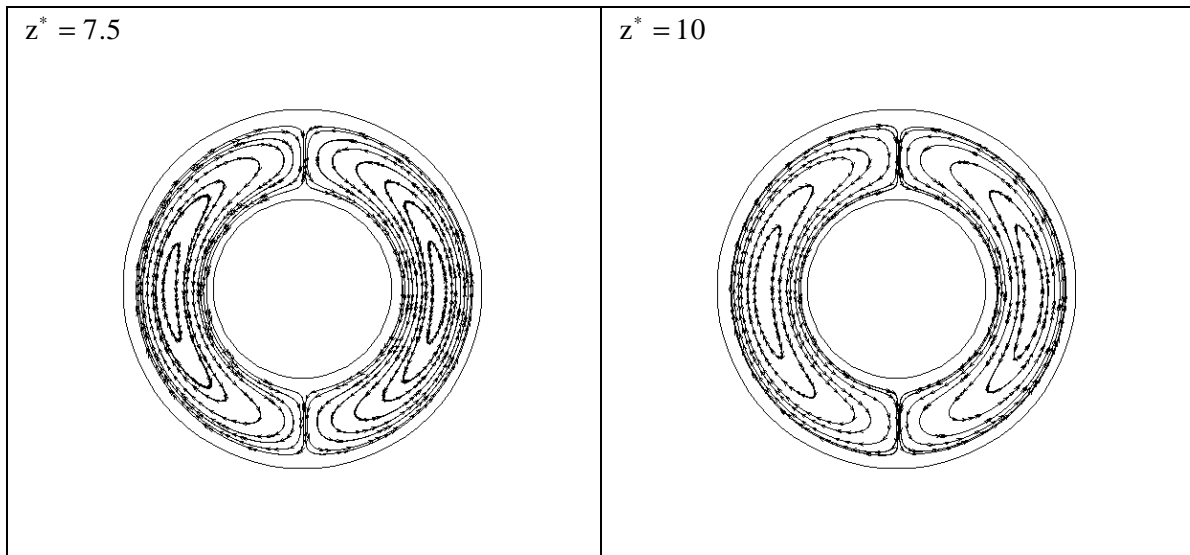


Figure 4.16 Evolution de l'écoulement secondaire pour $Gr^* = 12500$

4.3.2.3 Distribution des températures

La distribution de la température, au niveau des sections droites choisies, est illustrée dans la figure (4.17). Cette figure montre un champ tri dimensionnel de la température avec une symétrie par rapport à l'axe vertical. En toute section du conduit, la chaleur est diffusée à travers la paroi du conduit et convectée le long de la paroi. La température maximale doit être au point le plus haut de la section ($\theta = 0$). Une comparaison de ces profils révèle clairement l'augmentation axiale du chauffage du fluide et le déplacement du fluide froid en direction des parties inférieures des sections, sous l'effet d'un meilleur brassage dû à l'écoulement secondaire dans le plan $r^* - \theta$. Pour les positions choisies $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 les maximums de température sont successivement $T_{\max}^* = 0.409856, 0.679672, 0.942177$ et 1.18448 et se situent au sommet de la paroi extérieure du conduit ($\theta = 0, R_o^* = 1$), tandis que les minimums de température sont $T_{\min}^* = 0.135491, 0.343788, 0.575767$ et 0.803654 et se situent dans la partie basse de l'espace annulaire en des positions successives $\theta = \pi$ et $r^* = 0.609756, 0.634146, 0.646341, 0.646341$. Il est tout à fait évident que ce meilleur mélange doit certainement conduire à une augmentation du transfert thermique.

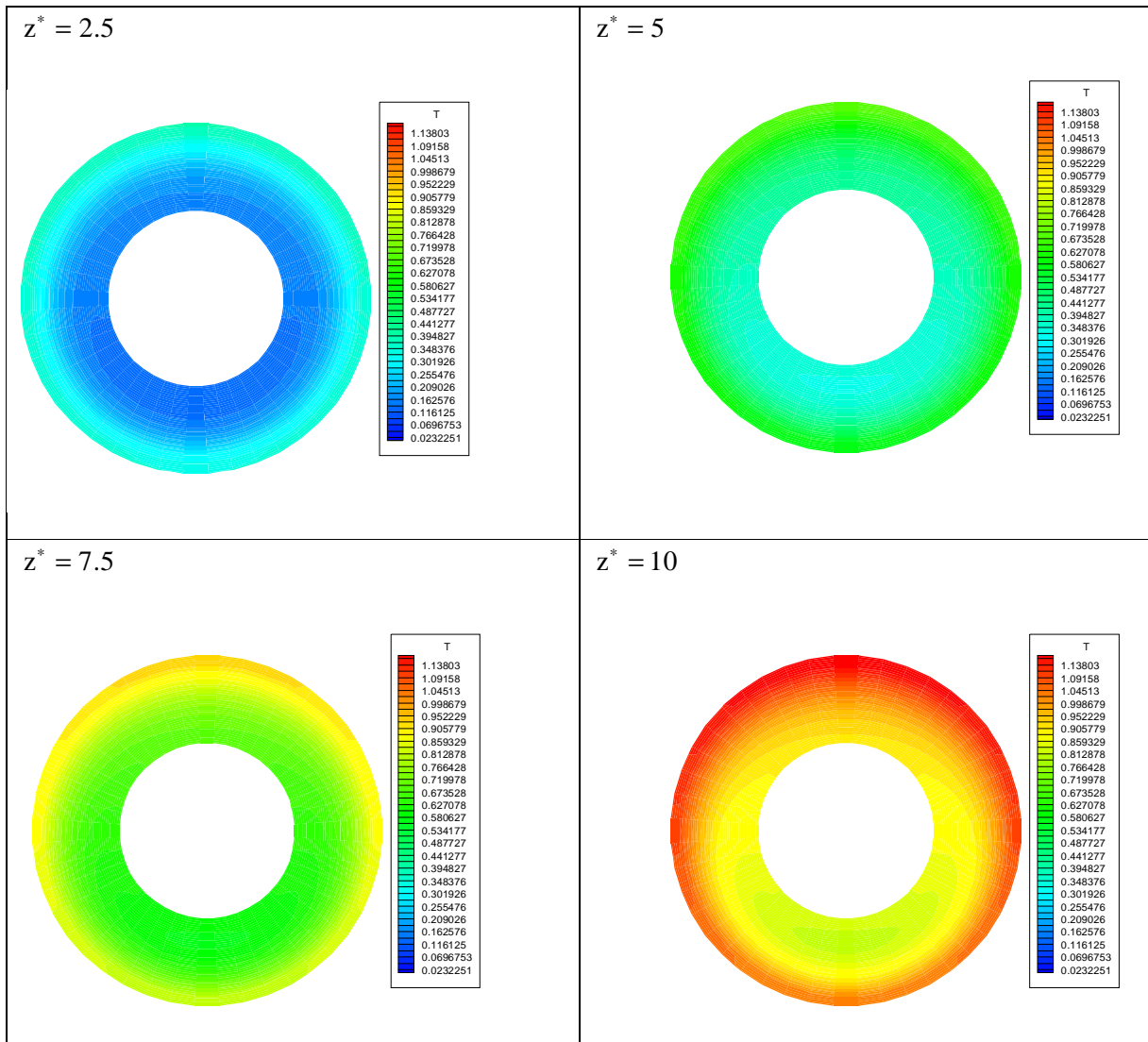


Figure 4.17 La distribution de la température

4.3.2.4 La distribution de pression

Les figures (4.18) et (4.19) illustrent la variation de pression entre les deux cylindres annulaires pour le cas de la convection mixte $Gr^* = 12500$. La chute axiale de la pression est due à l'écoulement visqueux dans le conduit. La valeur maximale de la pression est située à l'entrée du conduit et la valeur minimale est située à la sortie du conduit. A la sortie du conduit les variations radiale et azimutale sont présentes mais presque négligeables.

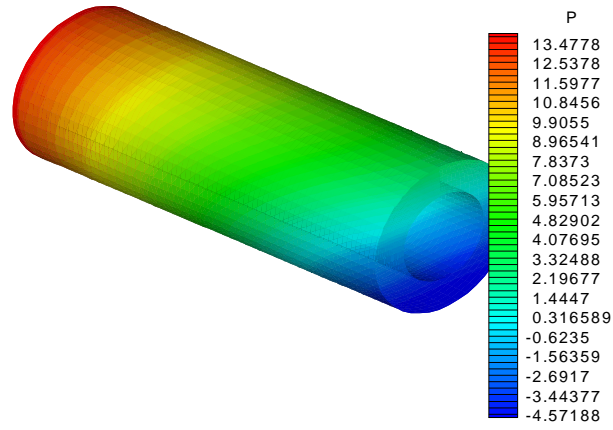
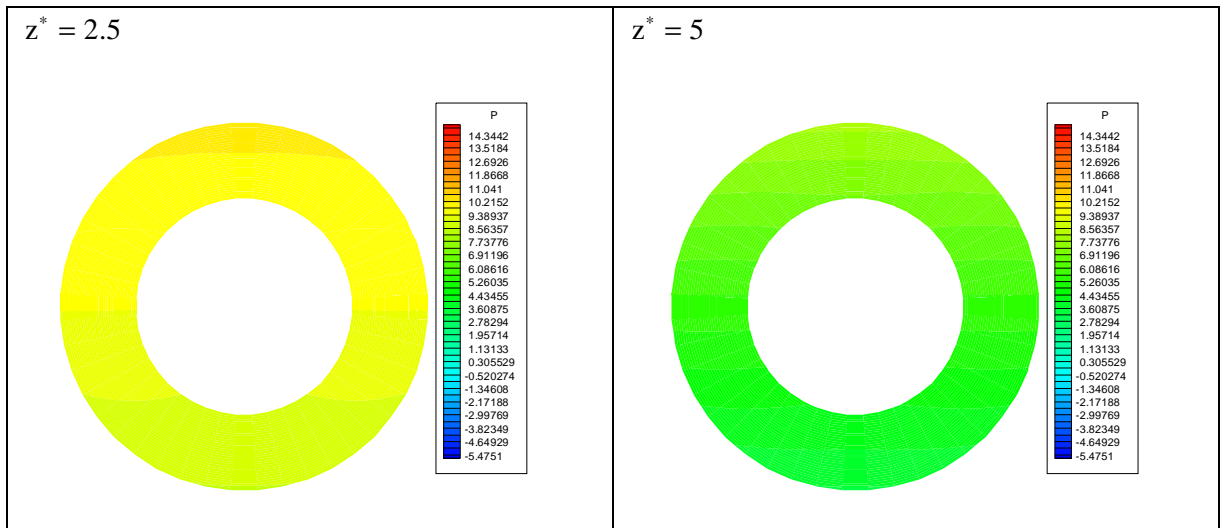


Figure 4.18 La distribution spatiale de la pression



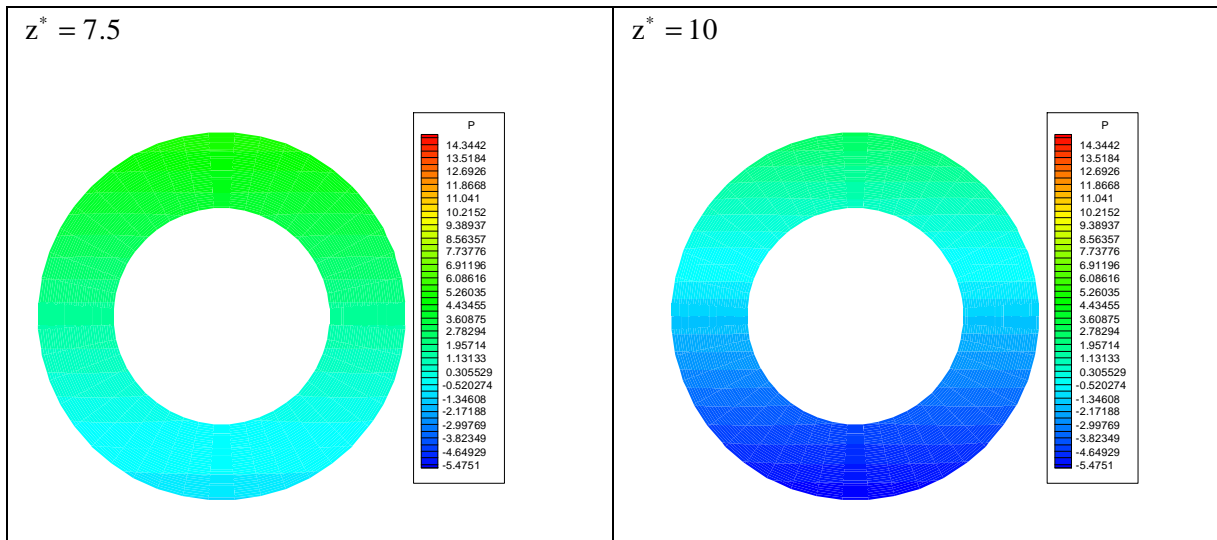


Figure 4.19 Variation, radiale et azimutale, de la pression

4.3.2.5 La variation du nombre de Nusselt axial

La figure (4.20) représente la variation du nombre de Nusselt axial. Ce nombre diminue rapidement entre l'entrée du conduit ($z^* = 0$) jusqu'à $z^* = 4.5$. Entre $z^* = 4.5$ et la sortie du conduit, il augmente légèrement puis se stabilise. L'allure de cette courbe fait ressortir l'influence de la convection mixte qui est apparente au-delà de $z^* \cong 4.5$. Elle fait augmenter le nombre de Nusselt. Le nombre de Nusselt moyen de l'écoulement dans tout le conduit est passé à $Nu = 6.995$.

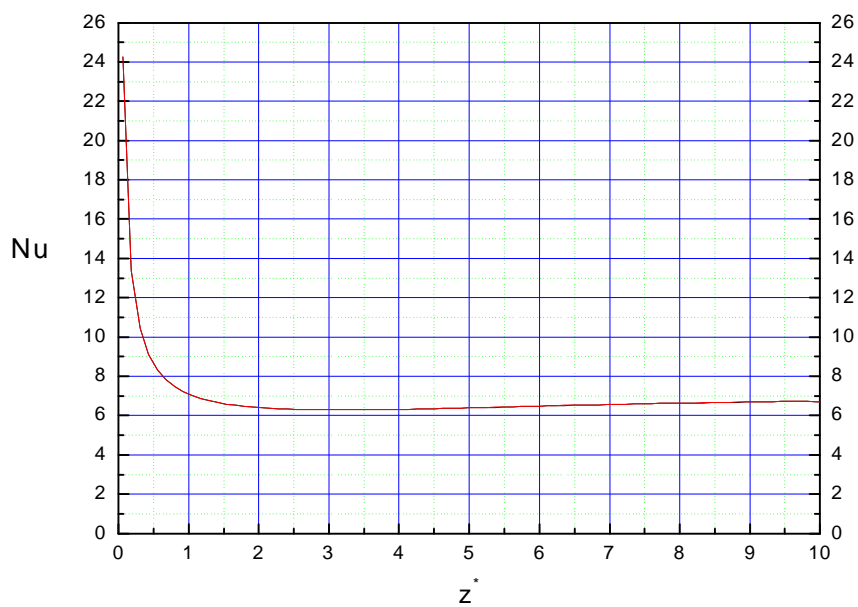


Figure 4.21 Evolution axiale du nombre de Nusselt

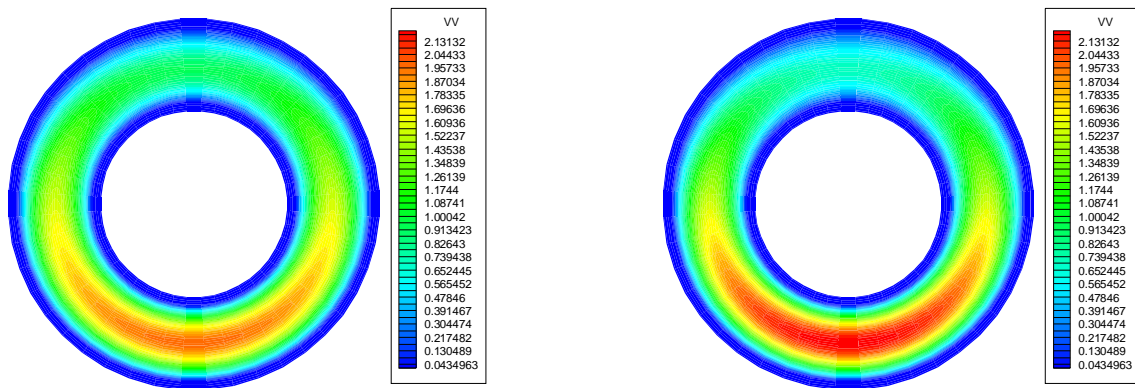
4.3.3 La convection mixte très élevée: le cas $Gr^* = 25000$ ($Ri = 10$)

4.3.3.1 Le champ de vitesse axiale

La distribution de la vitesse axiale est représentée sur la figure (4.22), pour les quatre distances axiales choisies. La première chose que l'on peut dire est que du point de vue qualitatif les cas $Gr = 12500$ et 25000 sont similaires. La variation tridimensionnelle de la vitesse ainsi que la symétrie par rapport à l'axe vertical sont bien nettes. A une position très voisine de l'entrée ($z^* = 0.246914$) le maximum des vitesses occupe la zone centrale de l'espace dans la partie inférieure du conduit et il y a la formation de la première cellule dont le vortex donne $V_{max}^* = 1.36633$ à $(r^* = 0.75, \theta = 3.070193)$ tandis que le minimum des vitesses $V_{min}^* = 1.35003$ se situe à la même position radiale à $(r^* = 0.75)$ mais en $(\theta = 0.0714)$. Au-delà de $z^* \geq 0.246914$ l'écoulement axial s'intensifie et les cellules controtatives augmentent progressivement jusqu'en $z^* = 8.518519$ où le maximum des vitesses atteint la valeur $V_{max}^* = 2.21183$ en $(r^* = 0.75, \theta = 3.070193)$. Le minimum des vitesses rétrograde vers $V_{min}^* = 0.78947$ en $(r^* = 0.75$ et $\theta = 0.0714)$ afin de conserver le débit axial constant tel exigé par la conservation de la masse (équation de continuité). Au-delà de cette position on peut dire que la convection mixte est hydrodynamiquement développée puisqu'on ne trouve pas de variation importante jusqu'à la sortie du conduit.

$z^* = 2.5$

$z^* = 5$



$z^* = 7.5$

$z^* = 10$

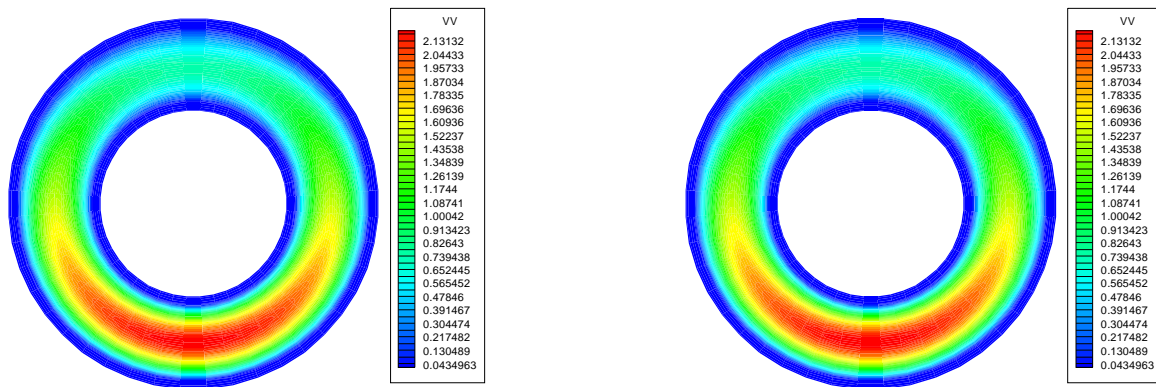


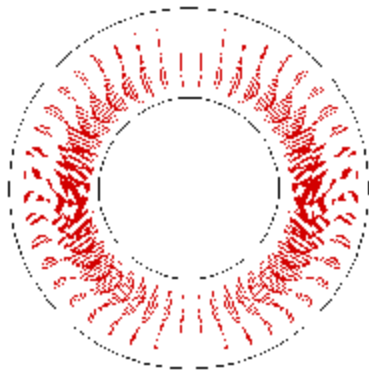
Figure 4.22 La variation de la vitesse axiale

4.3.3.2 L'écoulement secondaire

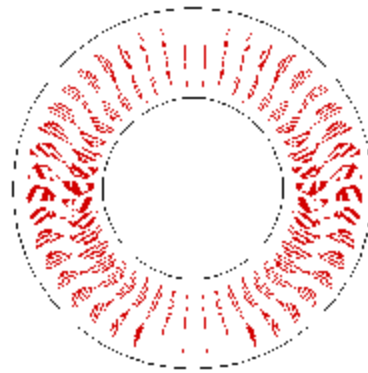
L'écoulement secondaire pour $Gr^* = 25000$ ($R_i = 10$) est rapporté dans la figure (4.23) où sont représentées les vecteurs de l'écoulement secondaire et la figure (4.24) représente les différentes cellules apparaissantes lors de l'écoulement secondaire au niveau des sections considérées. Toutes les sections présentent clairement la formation de quatre rouleaux principaux convectifs et on observe une symétrie par rapport au plan vertical. Chaque cellule contient un noyau (vortex) dont le premier est situé à la partie droite du conduit tandis que le second est situé à la partie gauche du conduit. Par rapport au cas précédent l'écoulement secondaire est évidemment plus intense entraînant un vigoureux brassage des couches de fluide chaud et froid, et par conséquent on s'attend à un meilleur transfert thermique. Depuis l'entrée $z^* = 0$ jusqu'à $z^* = 0.679012$ l'écoulement secondaire qui apparaît est unicellulaire se faisant dans un plan vertical du haut vers le bas du conduit. En ce z^* le maximum des vitesses se situent $r^* = 0.615854$ et $\theta = 1.499396$. Il faut remarquer que cette cellule n'occupe pas tout l'espace mais qu'elle s'étale jusqu'à $r^* = 0.896341$. En dehors, de ce $r^* = 0.896341$ jusqu'à $r^* = 0.957317$ la vitesse est quasiment nulle. Mais après cette position axiale, c'est-à-dire à partir de $z^* = 0.802469$ jusqu'à $z^* = 5.987654$ la configuration change et devient bicellulaire avec la naissance et l'extension d'une cellule proche de la surface intérieure du conduit extérieure, convective et contrarotative, qui réduit progressivement la grosse cellule jusqu'à l'atteinte d'un état d'équilibre entre les deux cellules. Ce comportement est similaire de part et d'autre du diamètre vertical. En cette position axiale ($z^* = 5.987654$) il existe un point

d'inflexion séparant les deux cellules. Ces coordonnées sont $r^* = 0.75$ (correspondant à $I=22$) et $\theta = 1.642193$ et les vitesses sont très faibles (de l'ordre de 10^{-4}). Aussi les maximums de vitesse pour les deux cellules ont la même position angulaire $\theta = 1.642196$ (correspondant à $K=12$) mais des positions radiales différentes, soient $r^* = 0.640244$ et $r^* = 0.859756$. Les composantes de vitesses angulaires et radiales correspondantes sont respectivement $[V_\theta^* = -0.155274, V_r^* = -0.0116]$ et $[V_\theta^* = 0.1809, V_r^* = 0.0111]$. Enfin au-delà de $z^* = 5.987654$ l'écoulement secondaire est hydrodynamiquement développé le long de la direction axiale.

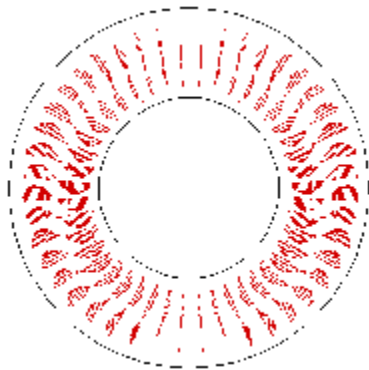
$z^* = 2.5$



$z^* = 5$



$z^* = 7.5$



$z^* = 10$

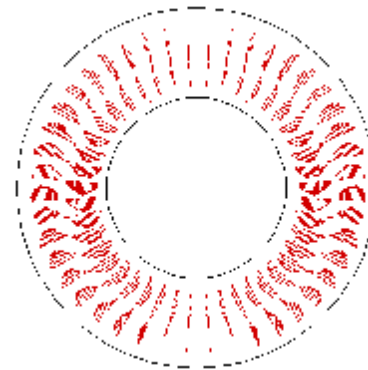


Figure 4.23 Variation de l'écoulement secondaire

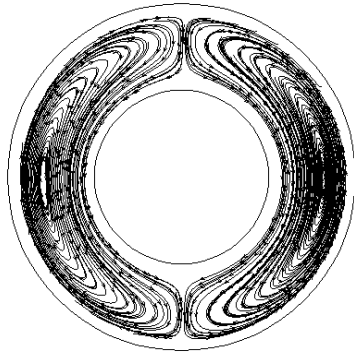
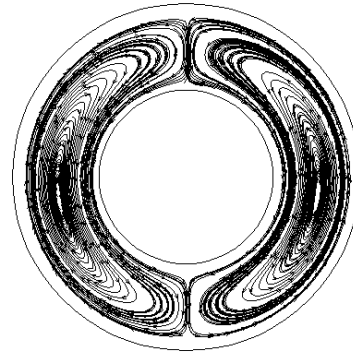
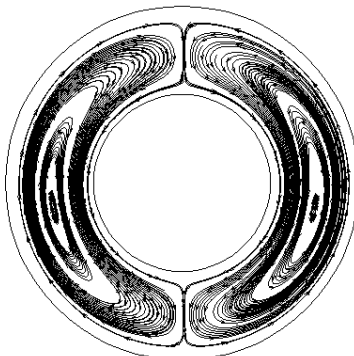
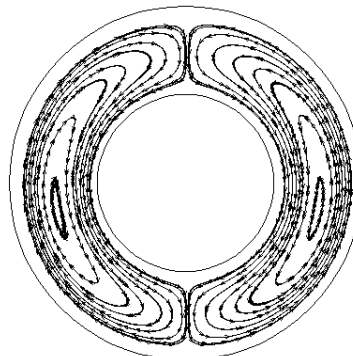
$z^* = 2.5$  $z^* = 5$  $z^* = 7.5$  $z^* = 10$ 

Figure 4.24 Evolution de l'écoulement secondaire pour $Gr^* = 25000$

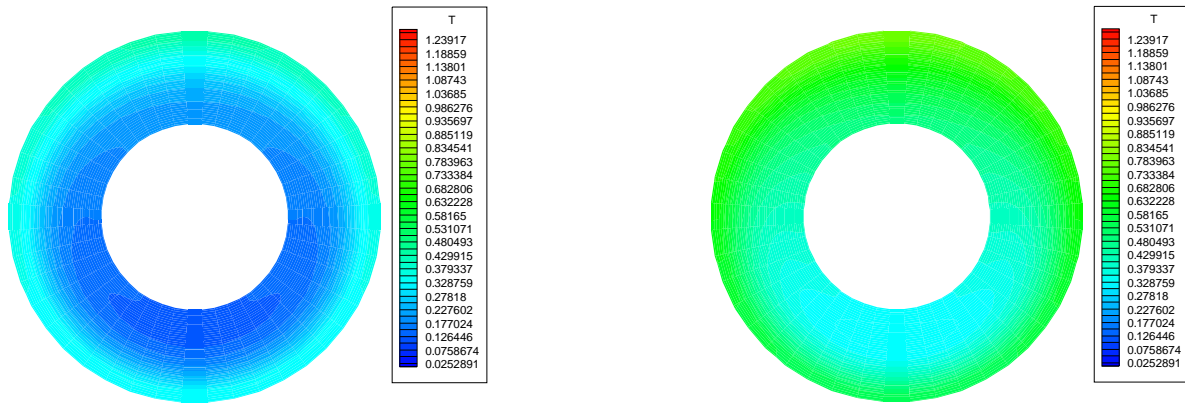
4.3.3.3 Distribution des températures

Sur la figure (4.25) on montre les champs thermiques en différentes stations axiales $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 , respectivement. Conformément à l'augmentation du nombre de Grashof la température dans l'ensemble du domaine physique augmente. Elle varie entre une température nulle à l'entrée et un maxima qui atteint 1.28974 à la sortie du conduit annulaire et au sommet de ce dernier. Par ailleurs par convection mixte la température par section varie radialement et angulairement. La température maximale est située au sommet du conduit tandis que la température minimale se situe dans la parie inférieure du conduit telle que le montre ces valeurs et ces coordonnées pour les positions choisies $z^* = 2.5, 5, 7.5$ et 10 , les maximums sont successivement $T_{\max}^* = 0.45402, 0.76966, 1.04276$ et 1.28974 et se situent au sommet de la

paroi extérieure du conduit ($\theta = 0, R_o^* = 1$), tandis que les minimums sont $T_{\min}^* = 0.124831, 0.315564, 0.53767$ et 0.76107 et se situent dans la partie basse de l'espace annulaire en des positions successives $r^* = 0.628049, 0.628049, 0.676829, 0.676829$ et $\theta = \pi$.

$z^* = 2.5$

$z^* = 5$



$z^* = 7.5$

$z^* = 10$

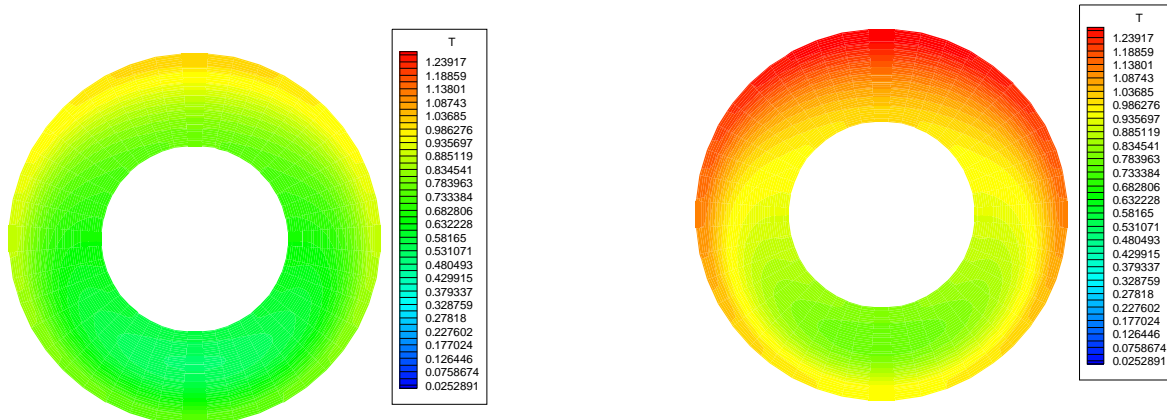


Figure 4.25 La distribution de la température

4.3.3.4 La distribution de pression

Les deux figures (4.26) et (4.27) représentent les variations de pression entre les deux cylindres annulaire. Dans ce cas ($Gr^* = 25000$) on a une variation de pression dans les trois directions, radiale, azimutale et axiale. La chute axiale de la pression est due à l'écoulement

visqueux dans le conduit. Cependant, la variation polaire de la pression est due à la convection mixte développée dans les sections droite du conduit. Cette convection mixte développe une stratification verticale de la pression tel qu'en une section droite donnée, le fluide à haute pression superpose le fluide à faible pression. Cette stratification est plus développée en s'éloignant de l'entrée du conduit et est plus visible entre le milieu et la sortie de ce dernier.

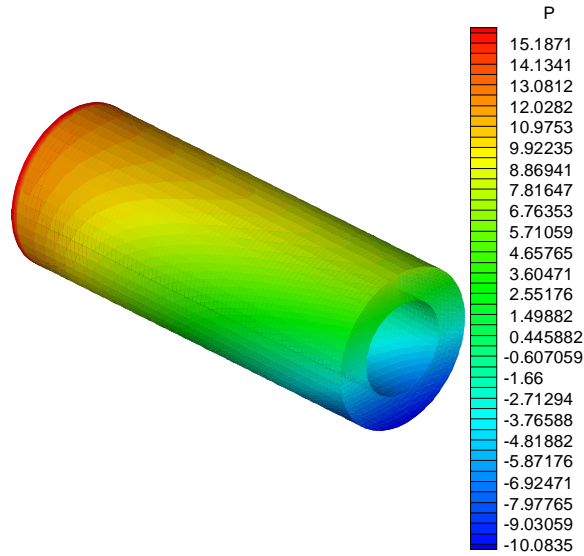
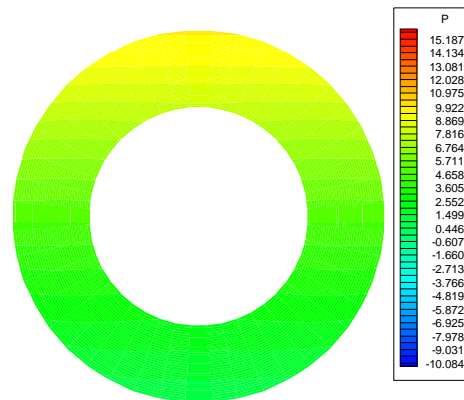
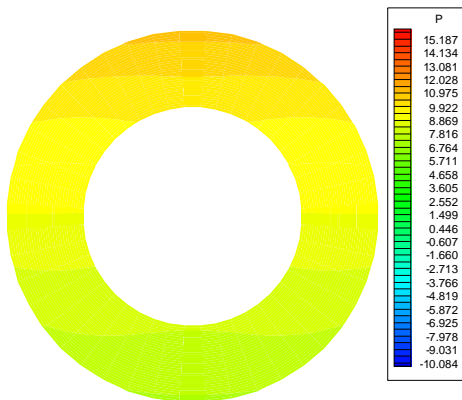


Figure 4.26 La distribution spatiale de la pression

$z^* = 2.5$

$z^* = 5$



$z^* = 7.5$

$z^* = 10$

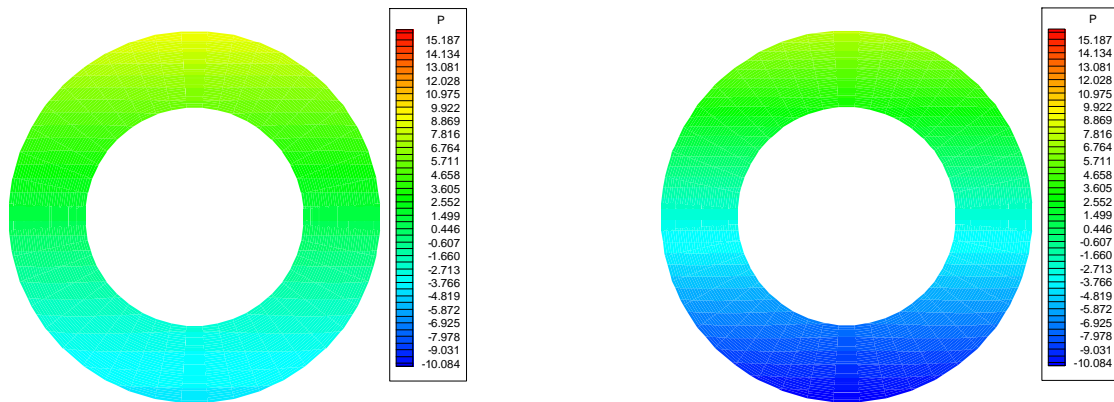


Figure 4.27 Variation, radiale et azimutale, de la pression

4.3.3.6 La variation du nombre de Nusselt axial

Dans la figure (4.28), on représente la variation du nombre de Nusselt axial. On voit que le Nu de cas ($Gr^* = 25000$) diminue de l'entrée ($Nu(z^*) = 24.24911$) jusqu'à une distance $z^* = 2.65432$ où il atteint la valeur $Nu(z^*) = 6.35115$. Ensuite il augmente continuellement mais doucement de cette position à la sortie pour atteindre $Nu(z^*) = 8.63581$. Une telle augmentation est caractéristique de l'augmentation du transfert thermique.

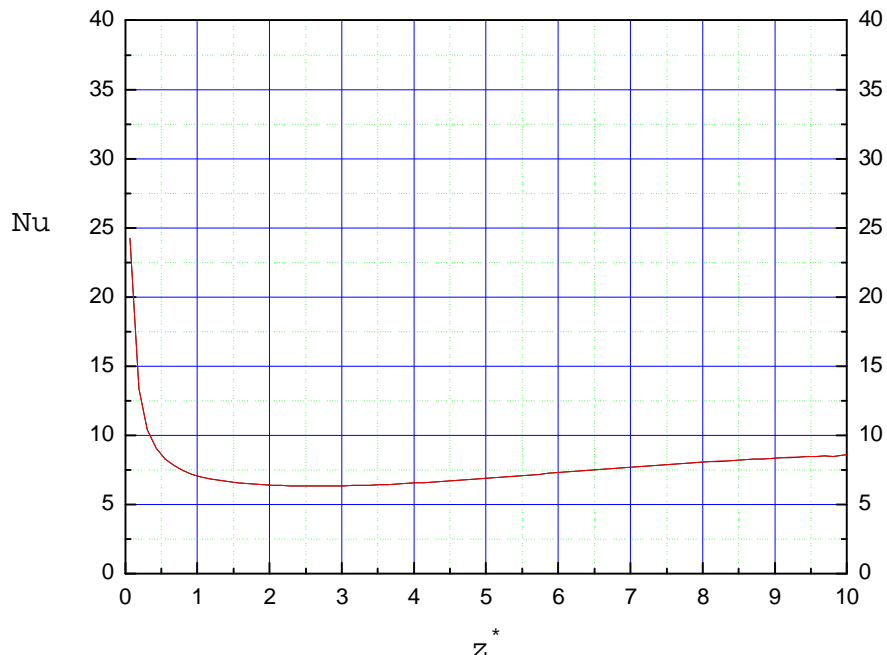


Figure 4.28 Evolution axiale du nombre de Nusselt

4.3.3.7 Comparaison des nombres de Nusselt

La figure (4.29) regroupe les nombres de Nusselt axiaux pour la convection forcée $Gr^* = 0$, et ceux de la convection mixte, modérée $Gr^* = 2500$, et importante $Gr^* = 12500$ et $Gr^* = 25000$. La comparaison montre bien l'augmentation des nombres de Nusselt avec celle du nombre de Grashof. Ils évoluent tous de la même manière (une décroissance rapide) sur une certaine distance d'entrée puis la séparation se fait à partir de $z^* = 4$. Le nombre de Nusselt relatif à une convection termine sa course par un comportement asymptotique tandis que les autres subissent l'effet de l'écoulement secondaire qui fait augmenter l'échange thermique et par conséquent le nombre de Nusselt. Mais le cas $Gr^* = 2500$ est qualitativement et quantitativement semblable à celui de la convection forcée ($Gr^* = 0$).

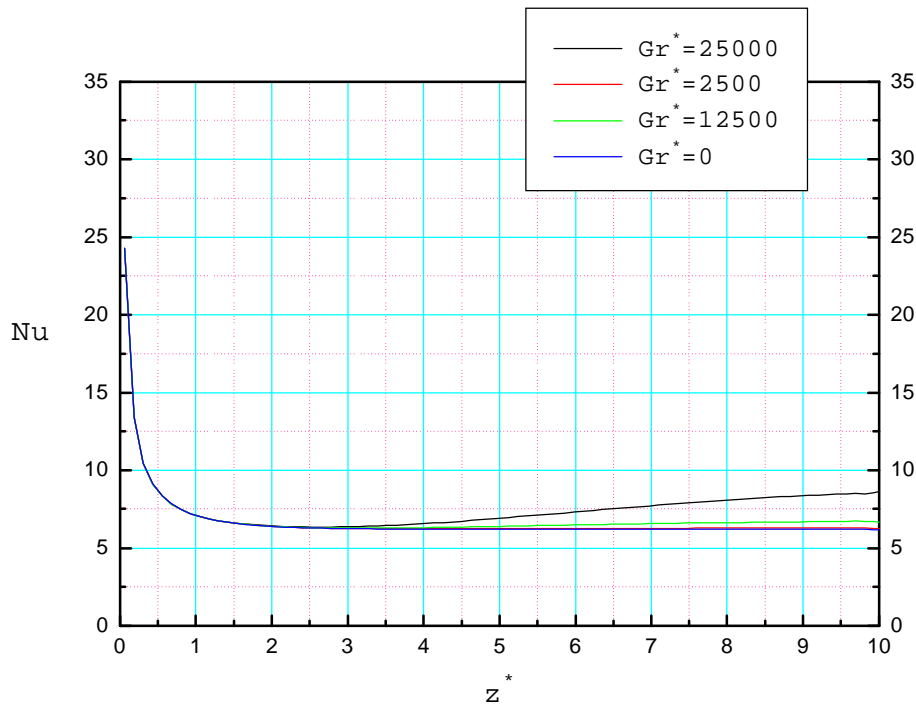


Figure 4.29 Profils axiaux des nombres de Nusselt moyen pour différents nombres de Grashof $Gr^* = 0, 2500, 12500$ et 25000

ملخص : الحمل المختلط في الفضاء الحلقي داخل اسطوانتين متمركزتين أفقياً

قمنا بدراسة ظاهرة الحمل المختلط في الفضاء الحلقي داخل اسطوانتين متمركزتين أفقياً، هذا الفضاء الحلقي مملوء بمائع نيوتوني غير ضغوط يتدفق بصفة رقائقية ودائمة. نأخذ القيمة 0.7 لعدد برندال ثابتة (حالة الهواء) ولكن عدد كراشوف يتغير. كتب نموذج هذا التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية: معادلات الاستمرارية وكميات الحركة صيغت في جملة الإحداثيات الاسطوانية. لحل هذه الجملة الغير خطية استعملنا طريقة الحجم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء والزمن استعملنا ثلاث شروط مختلفة لتحسين حاجزي هذا الفضاء الحلقي، حيث أخذنا بعين الاعتبار تأثير مختلف الوسائط، (عدد كراشوف.....).

وجدنا التغيرات الأفقية للعدد نيسالت بالنسبة للثلاث الأولى متماثلة وذلك بالنسبة للحمل المختلط بدون زعانف أما فيما يخص الحالة الرابعة وجدنا عدد نيسالت كبيراً نوعاً ما بالنسبة للحالات السابقة. واستخلصنا من هذه الدراسة أن الحمل المختلط بدون زعانف يظهر أثره عند العدد كراشوف يساوي 25000.

أما بالنسبة للحمل المختلط مع وجود الزعانف فإن وجدنا التغيرات الأفقية للعدد نيسالت بالنسبة لجميع الحالات تقريباً متماثلة.

الكلمات الدالة: الحمل القسري، الحمل المختلط الانسياب الرقائقي، اسطوانتين متمركزتين

أفقياً، الفضاء الحلقي، الزعانف، التحليل العددي لثلاثي الأبعاد.

Résumé

Ce travail consiste en une simulation numérique en 3D de la convection forcée et mixte, permanente et laminaire, en développement simultané, dans un espace annulaire entre deux tubes cylindriques horizontaux concentriques traversés par un fluide de Boussinesq. Le tube extérieur est soumis à un flux de chaleur pariétal constant tandis que l'intérieur est adiabatique. Deux configurations sont traitées dans cette étude: - le conduit est non-ailetté, et - le cylindre interne est muni d'ailettes identiques. Ce problème est modélisé par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie avec les conditions initiale et aux limites appropriées, et est résolu numériquement par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour une solution séquentielle des systèmes d'équations algébriques et chaque système est résolu par la méthode itérative de balayage par le biais des algorithmes de Thomas et Thomas cyclique. Les solutions ont été obtenues pour un écoulement d'air à Reynolds modéré dans un conduit en inconel d'une longueur égale à 10 fois le diamètre hydraulique. Le nombre total d'ailettes utilisé est de 12 dont 4 ailettes par palier. Pour chaque configuration les calculs ont été faits pour un intervalle du nombre de Grashof allant de 0 à $2.5 \cdot 10^4$. Pour la configuration sans ailettes, la convection forcée qui est un cas de référence exhibe un comportement qualitatif et quantitatif qui permet d'en déduire la bonne validation du code. La convection mixte est caractérisée par l'apparition d'écoulements secondaires formés par quatre cellules contrarotatives symétriques par rapport au diamètre vertical et une augmentation progressive du transfert thermique. Pour la configuration ailettée, en régime de convection forcée, la présence d'ailettes sépare l'écoulement en quatre cellules réparties de part et d'autre des ailettes mais sans effet remarquable sur le champ thermique dont les isothermes restent circulaires et un Nu quasi égal à celui sans ailettes. Lorsque le nombre de Grashof est augmenté l'intensité est plus importante pour les cellules situées dans la partie inférieure du tube avec une légère variation angulaire des températures. Le nombre de Nusselt ne subit quasiment pas de changement quantitatif sauf d'un point de vue qualitatif où l'emplacement des ailettes se traduit par de petits pics.

Mots Clés : Convection forcée / Convection mixte / Ecoulement laminaire / Espace annulaire / Cylindres concentriques / Ailettes / Simulation numérique 3D.

Abstract

This work consists in a 3D numerical simulation of steady, laminar forced and mixed convection, in simultaneously development, in an annular space between two cylindrical concentric horizontal tubes crossed by a Boussinesq' fluid. The outer tube is subjected to a peripheral constant heat flux while the interior is adiabatic. Two configurations are covered in this study: - the duct is without fins, and - the internal cylinder is fitted with identical fins. This problem is modeled by the mass, momenta and energy conservation equations with the appropriate initial and boundary conditions and is solved numerically by the finite volume method with a second order space-time discretization. The SIMPLER algorithm is used for a sequential solution of algebraic systems equations and each system is solved by the iterative sweeping method with the Thomas and Thomas cyclic algorithms. The solutions have been obtained for a air flow of moderate Reynolds in a inconel duct with a length equal to 10 times the hydraulic diameter. The total number of fins used is 12 with 4 fins per step. For each configuration, calculations have been made for a range of Grashof number from 0 to $2.5 \cdot 10^4$. For the configuration without fins, the forced convection which is a reference case exhibits a qualitative and quantitative behavior deducing the good validation of the code. The mixed convection is characterized by the appearance of secondary flows formed by four counter- rotating cells symmetrical about the vertical centerline and a gradual increase in the heat transfer. For finned configuration and the forced convection mode, the presence of fins separates the flow into four cells divided on both sides of the fins but without remarkable effect on the thermal field whose isotherms remain circulars and Nu almost equal to that without fins. When the Grashof number is increased, the intensity for the cells located in the lower part of the tube is more important with a slight angular variation in temperature. The Nusselt number is subject to almost no quantitative change except for a qualitative point of view where the fins location translates into small peaks.

Keywords: Forced convection / Mixed convection / Laminar flow / Annulus / Concentric cylinders / Fins / 3D numerical simulation.

Références bibliographiques

- [1]. **R. Kumar**, Study of natural convection in horizontal annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 31, pp. 1137-1148, (1988).
- [2]. **S. Garimella** et **R. N. Christensen**, Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics of Spirally Fluted Annuli: Part I-Hydrodynamics, *J. Heat Transfer*, vol.117, pp. 54-60, Part II-Heat Transfer, *J. Heat Transfer*, vol117, pp. 61-68, (1995).
- [3]. **K. S. Ball, B. Farouk, V. C. Dixit**, An Experimental Study Of The Heat Transfer In A Vertical Annulus With A Rotating Inner Cylinder, *Int. Journal Of Heat Mass Transfer*, vol 32, N^o = 08, pp; 1517-1527, (1989).
- [4]. **S. Y. Chung, G. H. Rhee, et H. J. Sung**, Direct Numerical Simulation of Concentric Annular Pipe Flow Part I: Flow Field, *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 23, pp. 426-440, 2002.
- [5]. **O. Terhmina, A. Mojtabi, B. Roux**, A numerical procedure for Three-dimensional mixed convection developing flow in axisymmetric geometry, *Eur. J. Mech.,B/Fluids*, 11 n^o1, pp.21-38, (1992).
- [6]. **P. Renzoni, C. Prakash**, Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of an Internally Finned Concentric Circular Annular Duct, *J. Heat Transfer*, vol. 109, pp. 532-538, 1987.
- [7]. **F. Moukalled, H. Diab, S. Acharya**, Laminar natural convection in a horizontal rhombic annulus, *Numer. Heat Transfer*, vol. 24, pp. 89-107, (1993).
- [8]. **M. I. Farinas, A. Garon, K. Saint-Lous**, Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins, *Rev Gén Therm*, vol. 36, pp. 398-410, (1997).
- [9]. **M. I. Farinas, A. Garon, K. Saint-Lous**, Study of heat transfer in horizontal bare and finned annuli, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 3905-3917, (1999).
- [10]. **M. A Habib, I. Ul-Haq, H. M. Badr, et S. A. M. Said**, Calculation of Turbulent Flow and Heat Transfer in Periodically Converging Diverging Channels, *Comput. Fluids*, vol. 27, pp. 95-120, (1998).
- [11]. **W. Schneider, M. G. Wasel**, Breakdown of the boundary layer approximation for mixed convection above a horizontal plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29 n^o12, pp.2307-2313, (1985).

- [12]. **H. Steinrück**, Mixed convection over a cooled horizontal plate: non-uniqueness and numerical instabilities of the boundary layer equation, *J. Fluid Mech.*, vol. 278, pp. 251-265, (1994).
- [13]. **M. Avci** , **O. Aydın**, Laminar forced convection with viscous dissipation in a concentric annular duct, *C. R. Mecanique*, vol. 334, pp.164–169, (2006).
- [14]. **T. Hung Nguyen**, **P. Vasseur** et **L. Robillard**, Natural convection between horizontal concentric cylinders with density inversion of water for low Rayleigh numbers, *Inc. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 25, No. 10, pp. 1559-1568, 1982.
- [15]. **G. Petrone**, **Eric Chénier**, **G. Lauriat** et **G. Desrayaud**, Brisure de symétrie des écoulements de convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux horizontaux, *J. Heat Transfer*, pp. 1-5, (2003).
- [16]. **Metais, B.** et **Eckert, E. R .G.**, Forced, Mixed, and Free Convection Regimes, *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 86, pp. 295-296, (1964).
- [17]. **Martinelli, R.C.** et **Boelter, L.M.K.**, The Analytical Prediction of Superposed Free and Forced Viscous Convection in a Vertical Pipe, *University of California, Publications in Engineering*, vol. 5, pp. 23-58, (1942).
- [18]. **Jackson, T.W.**, **Spurlock, J. M.** et **Purdy, K.R.**, Combined Free and Forced Convection in a Constant Temperature Horizontal Tube. *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 7, no. 1, pp. 38-41, (1961).
- [19]. **J. K. Kim**, “Analysis of laminar mixed convection in vertical tube annulus with upward flow”, *Fundamentals of forced and mixed convection, ASME, HTD*. 142 pp. 91-98. (1985).
- [20]. **Soliman, H.M.**, **Chau, T.S.** et **Trupp, A.C.**, “Analysis of laminar heat transfer in internally finned tubes with uniform outside wall temperature”, *Journal of Heat Transfer*, vol. 102, November, pp. 598-604. 1980.
- [21]. **Renzone, P.** et **Prakash, C.**, “Analysis of laminar flow and heat transfer in the entrance region of an internally finned concentric circular annular duct”, *Journal of Heat Transfer*, vol. 109, May, pp. 532-538. 1987.
- [22]. **Rustum, I.M.** et **Soliman, H.M.**, (1)“Experimental investigation of laminar mixed convection in tubes with longitudinal fins”, *Journal of Heat Transfer*, vol. 110, May, pp. 366-372. (1988).
- (2)“Numerical analysis of laminar mixed convection in horizontal internally finned tubes”, *Int. Journal of Mass and Heat Transfer*, vol. 33, no. 7, pp. 1485-1496. (1990).

- [23]. **Patankar, S.V., Ivanovic, M. et Sparrow, E.M.**, “Analysis of turbulent flow and heat transfer in internally finned tubes and annuli”, *Journal of Heat Transfer* vol.101, February, pp. 29-37. (1979).
- [24]. **M. A. Habib, A. A. A. Negm**, Laminar mixed convection in horizontal concentric annuli with non-uniform circumferential heating, *Journal Heat and Mass Transfer*, vol. 37, no. 4-5, pp. 427-435 / July, (2001).
- [25]. **M Rahnama, M A Mehrabian, S H Mansouri, A Sinaie, K Jafargholi**, Numerical simulation of laminar natural convection in horizontal annuli with radial fins, Part E: *Journal of Process Mechanical Engineering*, vol. 213, no.2, pp. 93-97 / (1999).
- [26]. **Abid, C., Papini, F., Ropke, A., et Veyret, D.**, Etude de la Convection Mixte dans un Conduit Cylindrique. Approches Analytique Numérique et détermination expérimentale de la Température de Paroi par Thermographie Infrarouge, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, no. 1, pp. 91-101, (1994).
- [27] **McComas, S.T. et Ecken, E.R.G.**, Combined Free and Forced Convection in a Horizontal Circular Tube, *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 88, pp. 147-153, (1966).
- [28] **Mori, Y. et Futugami, K.**, Forced Convective Heat Transfer in Uniformly Heated Horizontal Tubes (2" Report - Theoretical Study), *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.10, pp. 1801-1813. (1967).
- [29] **Boufendi T. et Afrid M.**, Three-Dimensional Conjugate Conduction-Mixed Convection With Variable Fluid Properties in a Heated Horizontal Pipe, *Rev. Energies Renouvelables*, 8, pp.1-18, (2005).
- [30] **Boufendi T.**, Transfert de Chaleur dans un Conduit Cylindrique Horizontal Soumis à un Phénomène de Convection Mixte, Thèse de Doctorat d'Etat, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mentouri Constantine, (2005).