

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER EN PHYSIQUE

Option : PHOTOVOLAIQUE

Thème :

**COMPARAISON DES SCHEMAS NUMERIQUES DE DISCRETISATION DES
PREMIERS ET SECOND ORDRE : APPLICATION A LA CONVECTION
MIXTE DANS UN CONDUIT CYLINDRIQUE**

Par

FERAHTA FATIMA ZOHRA

La date de soutenance : le 03 novembre 2008

Toute personne intéressée est cordialement invitée

Devant le jury :

Président	:	Mr	L. BAH	Professeur	Univ. Mentouri Cne
Rapporteur	:	Mr	M. AFRID	Professeur	Univ. Mentouri Cne
Examineurs	:	Mme	A. CHAKER	Professeur	Univ. Mentouri Cne
		Mr	T. BOUFENDI	M. de Conférence	Univ. Mentouri Cne
		Mr	S. BENISAAD	M. de Conférence	Univ. Mentouri Cne

SOMMAIRE

REMERCIEMENT

NOMENCLATURE

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 Etude bibliographique.....10

CHAPITRE 2 Modélisation mathématique

2.1 Introduction.....20

2.2 Géométrie du modèle.....20

2.3 Equation de conservation.....21

2.4 Les conditions aux limites.....23

2.5 Le nombre de Nusselt.....26

CHAPITRE 3 Résolution numérique

3.1 Introduction.....27

3.2 Le maillage.....28

3.3 Discrétisation des équations du modèle.....30

3.4 Définition

3.4.1 La discrétisation temporelle du second ordre.....30

3.4.2 La discrétisation spatiale du second ordre.....31

3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale32

3.6 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement azimutale.....42

3.7 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement axiale.....50

3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie.....56

3.9 Discrétisation de l'équation de la continuité.....60

3.10 Discrétisation des conditions aux limites.....61

3.10.1 A l'entrée du tube.....61

3.10.2 A la sortie du tube.....62

3.10.3 A la paroi.....63

3.10.4 sur l'axe du conduit.....63

3.11 Equation de la pression et de correction de pression66

3.12	Algorithme de calcul SIMPLER.....	68
3.13	Technique numérique de résolution d'un système d'équation de discrétisation.....	69

CHAPITRE 4 Résultats et discussion

4.1	Introduction.....	70
4.2	L'écoulement secondaire	
4.2.1	Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$).....	71
4.2.2	Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000.0$).....	74
4.3	L'écoulement axial	
4.3.1	Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$).....	77
4.3.2	Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000$).....	80
4.4	Le champ des températures	
4.4.1	Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$).....	83
4.4.2	Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000$).....	88
4.5	Les nombres de Nusselt.....	92

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

ABSTRACT

RESUME EN ARABE

RESUME EN FRANCAIS

Remerciements

Je remercie tout particulièrement monsieur M.AFRID Professeur à l'université Mentouri Constantine pour avoir assuré la direction de ce travail. J'ai eu la chance de bénéficier de son encadrement enrichissant de ses compétences.

Le point de départ de cette thèse a été le travail de monsieur T. BOUFENDI, Maitre de conférence à l'université Mentouri Constantine, je le remercie pour ses encouragements, ses suggestions et sa disponibilité contribuant ainsi à la réalisation de ce travail

Je remercie également monsieur L.BAHI Professeur à l'université Mentouri Constantine qui m'a fait l'honneur de présider ce jury

Je suis très reconnaissante envers Mme A.CHAKER Professeur à l'université Mentouri Constantine et monsieur S.BENISSAAD Maitre de conférence à l'université Mentouri Constantine, qui ont bien volontiers accepté d'examiner ce travail

Je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont aidé par leur présence et leurs soutiens à l'achèvement de ce travail.

Enfin, je remercie du plus profond de mon cœur aux deux êtres que j'ai de plus chers au monde : mes parents, mes chers frère SAAD et CHARAF, mes chères sœurs et chères tantes pour m'avoir soutenu tout au long de mes études

Sans oublier de dédier ce travail à ma chère grande mère et mes chers neveux et nièces : Amin, Wassim, Nihel, Orane, Nour et enfin à mon cher mirou (Rostum Amir)

NOMENCLATURE

A	coefficient de l'équation de discrétisation
b^*	terme de source adimensionnelle
D	diamètre du conduit [m]
g	accélération de la pesanteur [m/s^2]
G	source de chaleur volumique [w/m^3]
Gr	nombre de Grashof défini par ($g\beta GD^5/K_S v^2$)
h_{co}	coefficient de transfert convectif (conduit-air ambiant) [w/m^2k]
h_{ra}	coefficient de transfert radiatif (conduit-air ambiant) [w/m^2k]
k	conductivité thermique du fluide [w/mk]
k^*	conductivité thermique du fluide adimensionnelle (k/k_0)
k_s^*	conductivité thermique du solide adimensionnelle (k_s/k_0)
L	longueur du conduit [m]
$Nu(\Theta, z^*)$	nombre de Nusselt local [$h(\Theta, z)D/k_0$]
$Nu(z^*)$	nombre de Nusselt local axial [$h(z)D/k_0$]
P	pression [Pa]
P^*	pression adimensionnelle [$(p-p_0/\rho_0 V_0^2)$]
Pr	nombre de Prandtl (v/α)
q	densité de flux de chaleur [w/m^2]
r	coordonnée radiale [m]
r^*	coordonnée radiale adimensionnelle (r/D_i)
R	rayon du conduit [m]
Ra	nombre de Rayleigh [$g\beta(T(R_0, \theta, z) - T_\infty)/\alpha_{air} v_{air}$]
Re	nombre de Reynolds

S	terme de source
t	temps [s]
t^*	temps adimensionnel ($V_0 t / D_i$)
T	température [°k]
T^*	température adimensionnel $(T - T_0) / (GD_i^2 / k_s)$
T_b	température moyenne de mélange [°k]
T_b^*	température moyenne adimensionnelle $(T_b - T_0) / (GD_i^2 / k_s)$
V_0	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit [m/s]
U	composante radiale de la vitesse [m/s]
U^*	composante radiale de la vitesse adimensionnelle $[U / V_0]$
W	composante azimutale de la vitesse [m/s]
W^*	composante azimutale de la vitesse adimensionnelle $[W / V_0]$
V	composante axiale de la vitesse [m/s]
V^*	composante axiale de la vitesse adimensionnelle $[V / V_0]$
Z	coordonnée axiale [m]
Z^*	coordonnée axiale adimensionnelle (z / D_i)

Symboles grecs

α	diffusivité thermique [m ² /s]
β	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. (K ⁻¹)
Γ	coefficient de diffusion
ν	viscosité cinématique. (m ² . s ⁻¹)
ρ	masse volumique du fluide. (kg. m ⁻³)
\boldsymbol{t}	tenseur des contraintes visqueuses [N/m]
\boldsymbol{t}^*	tenseur des contraintes visqueuses adimensionnelle

μ	viscosité dynamique [kg.m/s]
μ^*	viscosité dynamique adimensionnelle (μ/μ_0)
θ	coordonnée angulaire [rad]
φ	variable dépendante généralisée

Indices

C	relatif à la position de la face d'un volume fini typique
d	désigne la paroi du conduit
i,0	fait références aux surfaces interne et externe du conduit respectivement
m	moyen
p	fait référence au nœud P d'un volume fini typique
n, s, e, w, t,b	fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E,W,T,B	fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
nb	désigne les nœuds voisins à P
r, θ ,z	référence aux directions radiale, tangentielle et axiale respectivement
∞	fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	entrée du conduit

Exposants

*	variable adimensionnelle
t	désigne l'instant t
t+ Δt	désigne l'instant t+ Δt
t- Δt	désigne l'instant t- Δt

Introduction

Ce travail s'inscrit dans la continuité d'une étude menée par Boufendi et al. [1, 2] au laboratoire de physique énergétique de l'université Mentouri Constantine. Cette étude concerne une simulation numérique tridimensionnelle et transitoire d'une convection mixte au sein d'un fluide newtonien, en écoulement laminaire, dans un conduit cylindrique dont l'épaisseur de sa paroi est le siège d'un chauffage uniforme par effet joule. La convection mixte dans le fluide est caractérisée par des propriétés physiques du fluide variables, une épaisseur solide finie et des pertes thermiques de nature radiatives et convectives vers le milieu ambiant. Les codes développés, basés sur une discrétisation spatiotemporelle du premier ordre, ont été parfaitement validés [3] par comparaison avec les résultats analytiques (Petukhov et al. [4]), numériques (Ouzzane et al. [5]) et expérimentaux (Abid et al. [21]). Leurs résultats montrent que les champs thermiques et dynamiques sont tridimensionnels, que la non-uniformité angulaire du flux thermique à l'interface paroi-fluide est significative et que le nombre de Nusselt axial dans le tube est augmenté par la convection naturelle.

Ainsi, dans un souci d'amélioration et de perfectionnement des codes numériques développés d'une part, et d'autre part, pour une ample compréhension des phénomènes physiques mis en jeu, ce travail consiste en une simulation numérique du modèle conjugué, mais cette fois, **avec une discrétisation du second ordre dans l'espace et dans le temps** ainsi qu'une étude comparative des résultats fournis par les premier et second ordre avec ceux fournis par l'étude expérimentale d'Abid et al. [21]. Le but de notre étude est la comparaison

des résultats numériques obtenus avec les discrétisations spatiotemporelles du premier et second ordre avec ceux de l'expérience. Notre mémoire est scindé en quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré à la compréhension du mécanisme de la convection mixte dans une conduite cylindrique et à la présentation d'une bibliographie succincte et récente apportée sur ce sujet.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du modèle physique considéré. Ensuite, écrites sous leurs formes adimensionnelles, les équations modélisantes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans ces équations, la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide sont thermodépendantes.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode numérique utilisée qui est celle des volumes finis, le maillage dans sa globalité ainsi que dans des espaces de projection sera présenté. Puis, tous les termes obtenus dans les équations modélisantes seront discrétisés un par un jusqu'à l'obtention finale des équations algébriques linéarisées pour toutes les variables dépendantes de ce problème. Enfin, les algorithmes de calcul utilisés seront présentés.

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude. Les comparaisons et les interprétations des divers résultats seront présentées à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

Mécanisme de la convection mixte

D'une manière générale, on appelle convection les mouvements de circulation présents au sein d'un fluide. Lorsque ces mouvements sont occasionnés par des forces internes aux fluides on parle de convection naturelle. Ces forces sont les plus souvent les forces de la poussée d'Archimède associée à la gravité. Les sources dominantes des mouvements convectifs sont alors issues de la thermo dépendance de certaines propriétés physique du fluide (la masse volumique, la tension superficielle, la concentration des espèces....). Souvent, la convection naturelle coexiste avec la convection forcée. Dans le cas de la convection forcée, le mouvement du fluide est induit par une source externe : une pompe ou le

déplacement d'un objet dans le fluide par exemple. Quand les mouvements ont pour origine à la fois des sources internes et externes, on parle de convection mixte. Nous pouvons citer comme exemples les écoulements lents dans les canalisations (comme dans les radiateurs à eau), les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumées), les écoulements atmosphériques et les courants marins. Un autre aspect apparaît, c'est à dire les deux mécanismes peuvent aller dans le même sens comme ils peuvent s'opposer selon la direction relative du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire. Le transfert peut être fortement influencé par cet aspect. Ainsi, si l'effet de la pesanteur s'oppose au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique est diminué et dans ce cas la convection mixte est dite contrariée. Pour le cas contraire, on parlerait de convection mixte aidée. Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur et dans ce cas les échanges de chaleur sont améliorés. La convection mixte dans un canal horizontal correspond à la superposition d'un écoulement forcé (écoulement principale associé à une vitesse axiale du fluide) et à la convection naturelle transverse (appelée écoulement secondaire associé à des composantes transverses de la vitesse dans une section droite de la conduite). Ainsi, dans l'étude de cette convection mixte, des termes moteurs vont être apparus tel que le terme $g\beta\Delta T$ qui traduit la mise en mouvement du fluide sous l'action de la gravité.

Dans notre étude, l'écoulement considéré à l'entrée de la conduite sera de type laminaire et hydrodynamiquement développé. Pour cela, nous rappelons que dans un conduit cylindrique, le régime laminaire est régi par les forces de cisaillement entre filets fluides induisant, selon une section droite, un profil de vitesse de forme parabolique. L'écoulement est caractérisé ainsi par le nombre adimensionnel de Reynolds (Re). Ce profil de vitesse peut être modifié dès que des gradients de température sont imposés selon une section. La convection à l'intérieur des conduites intervient dans plusieurs applications pratiques telles que les capteurs solaires, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des composantes électroniques et des procédés chimiques et nucléaires.

Chapitre 1

Etude bibliographique

La convection mixte en milieu fluide dans les conduites cylindriques a fait l'objet de très nombreuses investigations théorique, numérique et expérimentale. Les différentes études de la convection mixte se résument dans les problèmes aux diverses conditions aux limites en particulier celle relatives au flux de chaleur ou de température imposé sur la paroi, ainsi qu'à la disposition de la conduite. Pour la convection mixte en conduite horizontale, un grand nombre de travaux ont été réalisés :

Boufendi et al.[2] ont fait une simulation numérique tridimensionnelle d'un transfert de chaleur en convection thermique conjugué, les propriétés du fluide sont thermodépendantes et les pertes thermiques entre la surface extérieure du conduit et le milieu ambiant sont considérées, les équations sont résolues par la méthode des volumes finis. Les résultats numériques montrent que les champs thermiques et dynamiques sont tridimensionnels, que la non-uniformité du flux thermique à l'interface paroi-fluide est significative et que le nombre de Nusselt moyen dans le tube est augmenté par la convection naturelle. Les résultats numériques étaient en bon accord avec ceux d'une étude expérimentale avec les mêmes paramètres géométriques, dynamiques et thermiques

Boufendi T.[3] a fait une étude numérique de la convection mixte tridimensionnelle sur un conduit cylindrique horizontale chauffé uniformément. Il a considéré deux modèles: un modèle de base définie par un conduit à épaisseur nulle et des propriétés du fluide constantes excepté la densité, et un modèle conjugué où on tient compte de l'épaisseur du conduit et la variation des propriétés du fluide avec la température. Les résultats numériques ont été obtenus avec un code à 3-D basé sur le schéma numérique d'ordre un et l'algorithme de SIMPLER.

Petukhove et al.[4] ont présenté des résultats d'étude expérimentale sur la convection mixte à l'intérieur d'un conduit horizontal et vertical soumis à un flux de chaleur uniforme. Les tubes utilisés sont en acier inoxydable, pour le tube horizontal le diamètre intérieur est de 8.84 mm, l'épaisseur est de 0.36 mm et la longueur du conduit est 99 fois le diamètre interne. Les résultats obtenus permis d'établir des corrélations empiriques donnant le nombre de Nusselt moyen en fonction de la distance axiale

$$\frac{Nu_z}{Nu_{as}} \left[1 + \left(\frac{Ra}{B} \right)^4 \right]^{0.045} \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} B = 5.10^3 Z^{-1} \text{ pour } Z < 1.710^{-3} \\ B = 1.8.10^4 Z^{-1} + 55Z^{-1.5} \text{ pour } Z > 1.710^{-3} \end{cases}$$

Nu_{as} :est le nombre de Nusselt moyen asymptotique (pour un écoulement développé).

La précision de l'approximation de la correction est de 5%.

OUZZANE et al. [5] ont étudié l'effet de la conduction pariétale et la répartition du flux thermique sur quatre configurations différentes : un flux thermique uniforme sur toute la circonférence ou seulement sur la moitié supérieure de celle-ci et un flux thermique appliqué sur l'interface ou sur sa moitié supérieure, l'autre moitié est isolé. Leurs objectif est de démontrer l'existence des limites et la possibilité de négliger la conduction thermique dans la paroi de la conduite notamment quand une condition de flux non uniforme est appliquée. Ils ont utilisé un maillage non uniforme dont la direction radiale et axiale plus serré dans les régions où les variations de température et des vitesses sont relativement importantes à l'entrée du tube et à l'interface fluide-solide. Ils aboutissent a une conclusion, est que la modélisation des écoulements dans une conduite chauffée doit être réalisée avec beaucoup de soin en ce qui concerne la condition du flux thermique. Bien qu'il soit facile de négliger la conduction dans la paroi en appliquant le flux thermique directement à l'interface fluide-

solide, ceci peut conduire à des résultats erronés notamment quand le nombre de Grashof est élevé. Ces erreurs se produisent tant au niveau des paramètres moyen (Nu) qu'à celui des valeurs locales (distribution circumférentielle de la température à l'interface fluide-solide, profil de vitesse axiale et intensité de l'écoulement secondaire).

Pantankar et al. [6] ont effectué une étude numérique de la convection mixte dans une conduite horizontale pour un écoulement développé avec chauffage non uniforme sur une moitié supérieure/inferieure et l'autre moitié adiabatique. Des mouvements secondaires avec d'importantes augmentations du nombre de Nusselt par rapport à celui correspondant à la convection forcé pure. Par contre dans le cas du chauffage appliqué par le haut, les mouvements convectifs sont relativement faibles et la stratification de la température est dominante.

Bergles et al. [7] ont fait une étude concernant les effets de la convection naturelle sur l'écoulement laminaire d'eau, dans des tubes horizontaux à section circulaire ayant un flux thermique pariétal constant. Ils ont fait une étude quantitative par visualisation à l'aide de tube en verre chauffé électriquement. Ces mesures combinées avec d'autre résultats et corrélations ont montré l'influence de la convection naturelle sur le nombre de Nusselt.

Choi et al. [8] ont étudié numériquement la convection mixte pour un écoulement en développement dans un conduit horizontal soumis à un flux de chaleur uniforme sur la moitié inferieure de l'interface et isolé sur l'autre moitié. Les calculs ont été effectués pour un nombre de Prandtl $Pr = 0,7$ et 5 , un nombre de Reynolds $Re=250$ et un nombre de Grashof Gr entre 10^6 et 10^7 . Ils sont principalement intéressés aux phénomènes de bifurcation pour des nombres de Grashof élevés.

J. Orfi et al. [9]: ont étudié numériquement l'écoulement en convection mixte dans un tube circulaire incliné pour des valeurs de Grashof $Gr = (10^4, 10^5, 10^6)$ et d'angle d'inclinaison ($0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Une méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations paraboliques de la convection mixte. Les auteurs notent que l'écoulement en régime de convection mixte suit trois régions : dans la première région, l'écoulement est essentiellement forcé; dans la deuxième zone, les courants naturels engendrent un brassage important du fluide favorisant d'avantage l'échange thermique et finalement loin de l'entrée et même à des

taux de chauffage relativement élevé, l'écoulement s'établit entièrement, la convection naturelle arrive à maintenir dans la section un état asymptotique caractérisé par des valeurs constantes du nombre de Nusselt. Ces valeurs du nombre Nusselt augmentent avec le nombre de Grashof et dépendent de l'inclinaison du tuyau.

Kholai [10] dans le même ordre de travail a effectué une étude numérique de convection mixte laminaire dans un tube incliné. Les équations elliptiques de Navier Stokes et d'énergie sont résolues simultanément afin de mettre en évidence l'effet de l'angle et du Grashof sur les champs thermiques et hydrodynamique. La méthode utilisée dans ce travail est celle des volumes finis dans un maillage de $30 \times 70 \times 80$ uniforme suivant θ et z et non uniforme dans la direction radial r . Les résultats sont obtenus pour un nombre de $Re = 500$ et différentes combinaisons du nombre de Grashof ($10^4, 10^5, 10^6$) et d'angle d'inclinaison ($0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation du nombre de Grashof et de la diminution de l'angle d'inclinaison.

Le travail **d'OUZZANE. [11]** se rapporte sur le transfert thermique dans les écoulements en développements à l'intérieur des conduits avec et sans ailette. L'auteur a étudié l'effet de la conduction pariétale sur les évolutions des champs thermique et hydrodynamique. Il ressort de cette étude, que dans le cas où les matériaux présentent une bonne conductivité thermique, la température de l'interface solide-fluide a tendance à s'uniformiser. Cependant un écart de température relativement important a été observé entre les deux positions extrêmes (le haut et le bas), dans le cas d'un matériau à faible conductivité thermique. Dans le cas d'un conduit horizontal ou incliné, pour l'amélioration de l'échange thermique, l'auteur recommande de placer plus d'ailettes sur la partie supérieure de la section dans le cas de refroidissement et sur la partie inférieure dans le cas du chauffage.

Benmansour et al. [12] ont étudié numériquement la convection mixte laminaire conjuguée d'un nano fluide Eau-Al dans un tube horizontal. Ils présentent une analyse sur le comportement de l'écoulement du nano fluide à l'intérieur d'une conduite pour deux valeurs de Grashof ($10^3, 10^4$). La méthode de résolution utilisée est la méthode des volumes finis sur un maillage de $34 \times 40 \times 700$ respectivement suivant r, θ, z . Ils ont trouvé que pour un nombre de Grashof relativement élevé (10^4), l'écoulement secondaire devient plus important lorsqu'il y a une déformation importante du profil de température.

Dogan et al. [13] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection mixte dans un canal contenant des sources de chaleurs en bas et en haut. La température de la surface, la distribution du nombre de Nusselt moyen et des sources de chaleurs discrètes ont été obtenus pour différents nombres de Grashof. En outre leurs résultats montrent que le début d'instabilité et l'amélioration du transfert de chaleur, notamment dans les derniers rangés des sources sont directement liées aux nombres de Grashof et de Reynolds.

Mori et al. [14] ont travaillé sur un conduit horizontal en bronze de 14 m de longueur, de 35,6 mm de diamètre et de 1,2 mm d'épaisseur. Une zone de chauffage de 7m est assurée par un enroulement de fils de nichromes parcouru par un courant électrique. La première zone est utilisée pour l'obtention d'un profil de poiseuille. Leurs résultats montrent que pour des grandes valeurs $ReRa > 10^4$ l'écoulement secondaire devient intense. Pour $ReRa = 4 \cdot 10^5$, ils obtiennent un nombre de Nusselt égale 2 à 3 fois le Nu_{cp} où Nu_{cp} désigne la valeur asymptotique dans le cas d'un conduit horizontale soumis à un flux de chaleur pour une convection forcé et est égale à $Nu_{cp} = 4.369$.

Nguyen et al. [15] on étudié la convection mixte en développement simultané pour des valeurs de Ra ($5 \cdot 10^5$ à $10^6, 3 \cdot 10^6$). La méthode de résolution utilisée est la méthode des volumes finis dans un maillage de $15 \times 18 \times 100$ suivant r, θ, z . Les auteurs montrent que l'écoulement secondaire s'intensifie de plus en plus, la stratification est plus importante, la zone de développement est plus courte et le nombre de Nusselt augmente avec un comportement asymptotique à la sortie du conduit.

Morcos [16] a étudié expérimentalement l'effet de la conduction circonférentielle de chaleur dans la paroi de la conduite sur le transfert thermique en convection mixte. Il a considéré deux tubes horizontaux de matériaux différents, l'un en verre et l'autre en acier inoxydable. Le chauffage du fluide est assuré par un fil électrique enroulé sur la paroi extérieure et parcourue par un courant alternatif, l'ensemble tube-fils électrique est isolé thermiquement avec la fibre de verre permettant ainsi d'approximer la condition du flux uniforme. L'eau et le glycol d'éthylène ont été utilisés comme fluides caloporteurs. Il a été constaté que le nombre de Nusselt moyen ne dépend pas uniquement des nombres de Grashof et Prandtl mais aussi des

matériaux et de l'épaisseur du conduit. Les effets de la paroi et du nombre de Prandtl deviennent importants pour des taux de chauffage élevés.

J. Orfi et al. [17] ont étudié le champ d'écoulement d'un mélange binaire près de l'entrée d'un tuyau horizontal avec flux thermique et concentration uniforme à l'interface fluide-paroi, tenant compte des effets de la température et de la concentration dans l'expression des forces volumiques. Les résultats obtenus avec $Re=400$, $Pr=0.7$ $Gr_T=Gr_C=1.01 \times 10^5$ pour trois valeurs du nombre de Lewis sont analysés et comparés pour déterminer l'effet de ce paramètre sur la distribution de la concentration dans le fluide, sur le nombre de Sherwood ainsi que sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement. La méthode de résolution utilisée est celle des volumes finis pour un écoulement parabolique à trois dimensions, l'algorithme utilisé est l'algorithme de Simplex.

Shome et al. [18] ont fait une étude numérique sur un conduit horizontal soumis à une condition de premier type, une convection mixte thermiquement développée et une viscosité variable, cette dernière est exprimée suivant une loi log-polynomial $\nu(T) = \ln[\ln(\nu/10^{-6}) - c] - a \ln T + b$ pour les liquides, les constantes a , b et c sont calculés pour l'eau, le glycol et de parathème-NF. Les auteurs trouvent que pour $Gr=10^5, 10^6$ et 10^7 , les effets de la viscosités sont significatifs et qu'il sont d'autant plus prononcés sur le coefficient de frottement que sur le nombre de Nusselt.

Pascal et al. [19] ont étudié à la fois expérimentalement et numériquement l'écoulement laminaire et le transfert thermique dans un tube horizontal entouré par un liquide. Ils ont porté l'attention sur les régimes d'écoulement où un effet d'Archimède s'ajoute à l'écoulement forcé dans le tube. La surface externe du tube est soumise à la convection naturelle résultant de la différence de température entre la paroi et le fluide environnant. Des analyses détaillées sont conduites pour un groupe de cas: avec différents fluides, température d'entrée et débits. On montre que la température variable de la paroi a un effet marqué sur la configuration de l'écoulement secondaire dans le tube aussi bien que le transfert de chaleur.

Hussein et al. [20] ont fait une étude expérimentale sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un conduit cylindrique horizontal chauffé uniformément. Le dispositif expérimental est constitué d'un cylindre en aluminium de 30mm de diamètre et de 900mm de

longueur soumis à un flux qui varie entre 60 w/m^2 à 400 w/m^2 et un nombre de Reynolds allant de 400 à 1600. La température à la paroi, le nombre de Nusselt moyen et local ont été présenté, les auteures ont trouvé que pour le même flux, la température à la paroi est plus élevée pour les faibles nombre de Re que pour les nombres de Re élevés, l'effet de la convection naturelle tend à augmenter le transfert thermique pour des valeurs de Re élevé et à le diminuer pour les faibles valeurs de Re.

Les expériences d'**Abid [21]** concernent un écoulement d'eau dans un conduit métallique cylindrique horizontal de 1cm de diamètre extérieur et de 0.2 mm d'épaisseur, le conduit est chauffé par effet joule sur une longueur de 1m, les conditions d'entrée sont : une température constante et un profile parabolique de la vitesse. Le dispositif est présenté sur la figure (1.1). Les mesures de la température sur la face externe du conduit ont été effectuées à l'aide d'un appareillage de thermographie infrarouge. Cependant dans le cas de mesures simultanées en différente côte, des thermocouples de type k sont utilisés sur la paroi externe. Les résultats expérimentaux obtenus en régime laminaire montrent l'établissement d'un gradient de température entre le haut et le bas d'une section droite. Ce gradient de température provoquant des écoulements secondaires transverses dans une section droite qui se superposent à l'écoulement principal axial : ceci se traduit par l'existence de deux rouleaux convectifs contrarotatifs.

Ce travail expérimental a été complété par une modélisation numérique utilisant la méthode des éléments finis aux équations de Navier-stokes couplées à l'équation de l'énergie. Ces résultats sont présentés sur la figure (1.2) [22]. Elle montre la présence de deux rouleaux convectifs dans une section droite. Le comportement dominant est caractérisé par une diminution de la taille des rouleaux convectifs le long de la conduite (soit à un entassement vers le bas, alors que dans le haut se construit une zone thermiquement stratifiée).

Le problème de la convection mixte a également été traité dans d'autres géométries notamment pour les conduits rectangulaires et horizontaux, citons les travaux de:

Pour mieux comprendre l'influence des gradients de températures horizontaux et verticaux dans une géométrie cylindrique sur les phénomènes de la convection mixte, **F. Bonnefois**

[23], a étudié séparément ces gradients, en utilisant un canal rectangulaire dont le chauffage a été assuré soit par une paroi vertical soit par une paroi horizontale en partie basse.

Pour un chauffage en bas de la paroi horizontale (gradient vertical), le travail de **Abid et al. [24]** montrent l'existence des mouvements transverses du fluide qui se manifestent par des rouleaux contrarotatifs. La configuration de ces rouleaux ainsi que leur stabilité dépendent de certains nombres de contrôle tels que le nombre de Reynolds, de Rayleigh ou de Richardson et Prandtl. La visualisation de ces rouleaux a été faite par la technique de vélocimétrie Laser (PIV), et aussi la détermination du champ de vitesse. Parallèlement, le champ de température a été mesuré par thermocouples. Ces deux techniques expérimentales permettent de mieux comprendre les mécanismes physiques intervenant dans un phénomène de convection mixte.

En vu de comprendre l'effet de la distribution uniforme du chauffage pariétale sur le comportement d'un écoulement en régime de convection mixte dans les conduites horizontales à section rectangulaire **Incropera et Shutt [25]** **Mahaney et al. [26]** ont simplifié les équations des mouvements et ont utilisé la forme parabolique des équations différentielles.

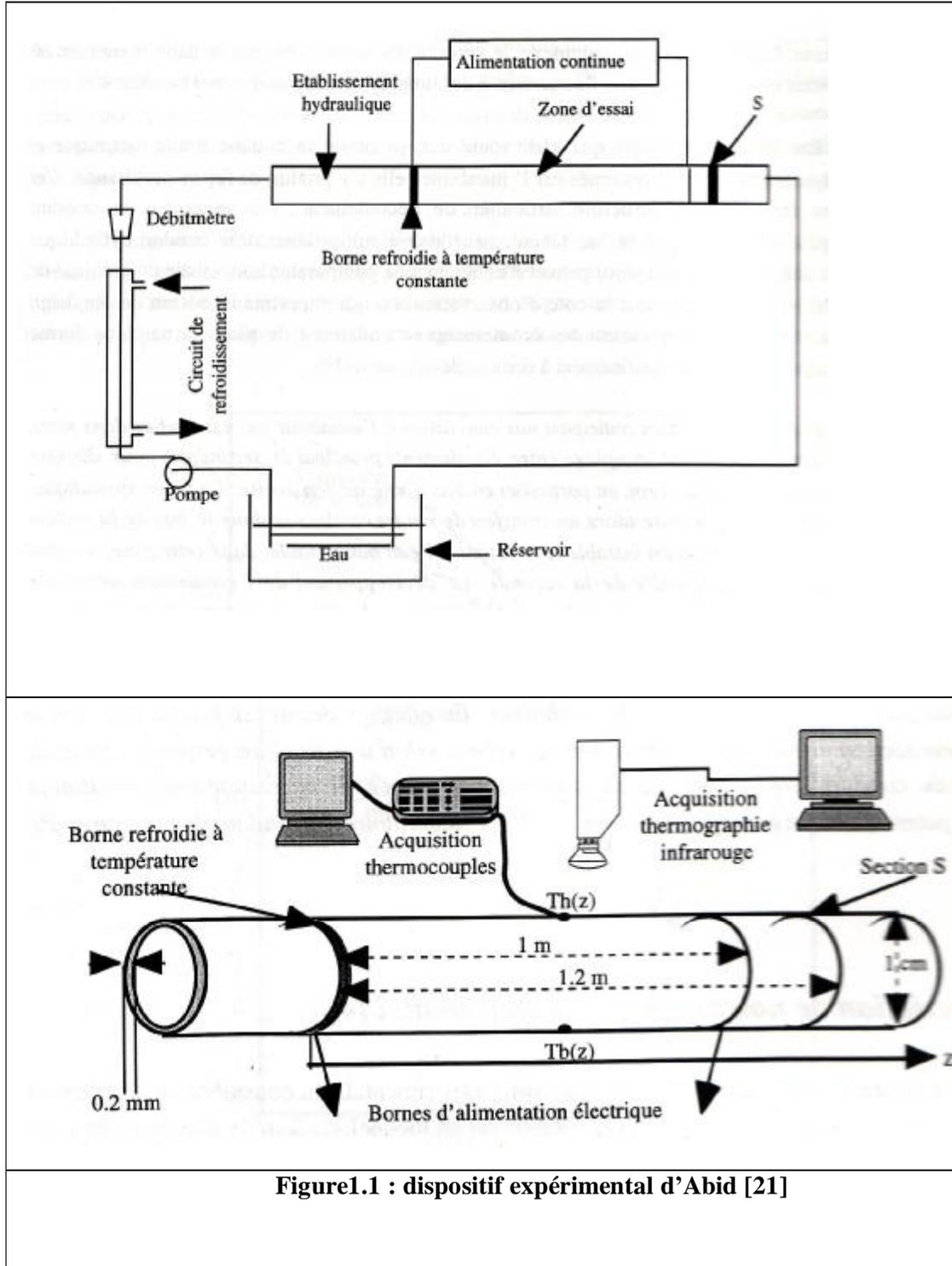
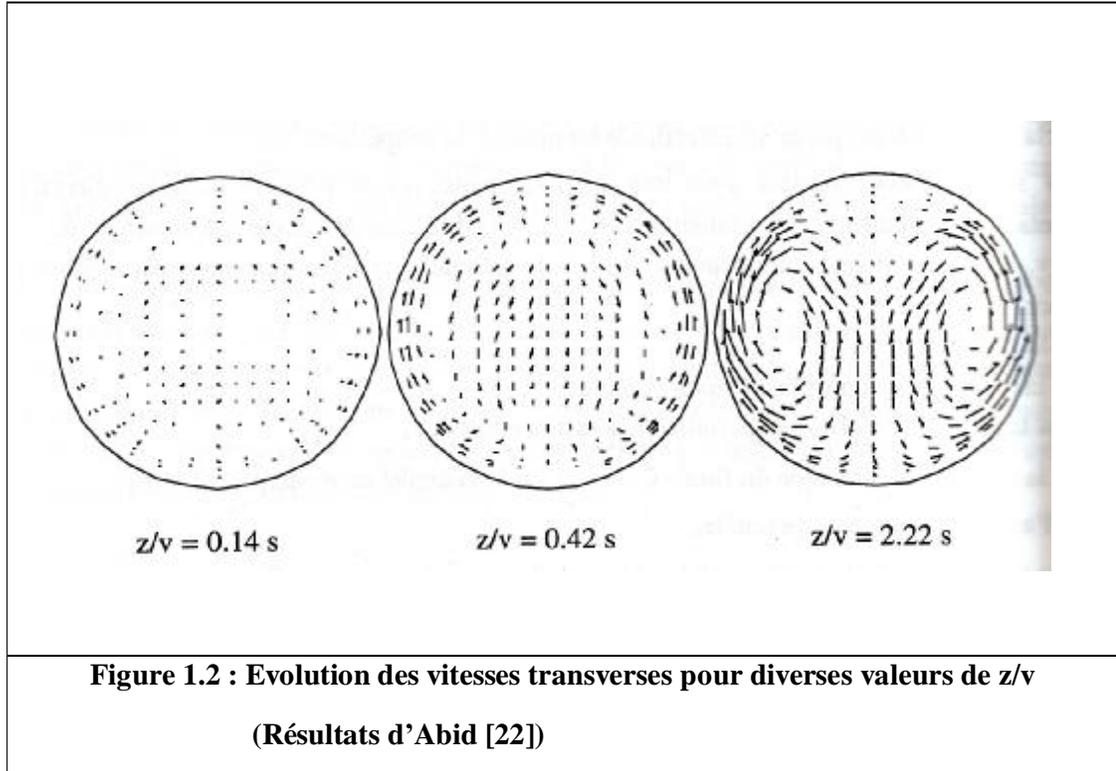


Figure1.1 : dispositif expérimental d'Abid [21]



Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la géométrie et le système d'équations de conservation du problème, sous leur forme adimensionnelle régissant les transferts thermoconvectifs au sein d'un fluide dans un conduit cylindrique horizontal à section circulaire constante. Ces équations seront accompagnés par les conditions initiales et aux limites dynamiques et thermiques appropriées. La particularité de cette modélisation réside dans la thermo dépendance des propriétés physiques du fluide ainsi que la prise en compte simultanée de deux milieux (solide et fluide) d'un point de vue transfert thermique et écoulement de fluide permettant de classer ce problème dans celle des problèmes de transfert conjugué. Ainsi, ce sont les mêmes équations qui seront appliquées simultanément aux domaines fluide et solide. Par ailleurs le milieu solide sera le siège d'une source de chaleur volumétrique uniforme à travers toute l'épaisseur de la paroi du conduit.

2.2 La géométrie du modèle

La figure 2.1 illustre la géométrie du problème étudié. Il s'agit d'un long conduit horizontal de longueur $L=1\text{m}$, de diamètres intérieur $D_i=0.96\text{cm}$ et extérieur $D_o=1\text{cm}$ (l'épaisseur est de 0.02 cm). Ce conduit est en Inconel de conductivité thermique $K_s=20\text{W/m}^\circ\text{K}$. Une génération de chaleur interne uniforme est produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi. La résistance électrique du conduit est égale à 0.16 Ohms ,

l'intensité du courant électrique est égale à 45 et 65 Ampères. Le conduit est utilisé pour le chauffage d'un écoulement laminaire, incompressible, d'eau distillée dont l'écoulement à l'entrée est de type Poiseuille, avec une vitesse moyenne égale à $7.2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ et une température constante de 15°C . La surface externe du tube est non isolée, les pertes convective et radiative avec l'air environnant sont prises en compte. Ces valeurs sont délibérément prises de l'étude d'Abid et al. [21]. La viscosité et la conductivité thermique du fluide sont fonctions de la température, la masse volumique est une fonction linéaire de la température et l'approximation de Boussinesq est adoptée. Il s'agit donc d'un problème de transfert conjugué modélisé par les équations de conservation adimensionnelles avec leurs conditions aux limites :

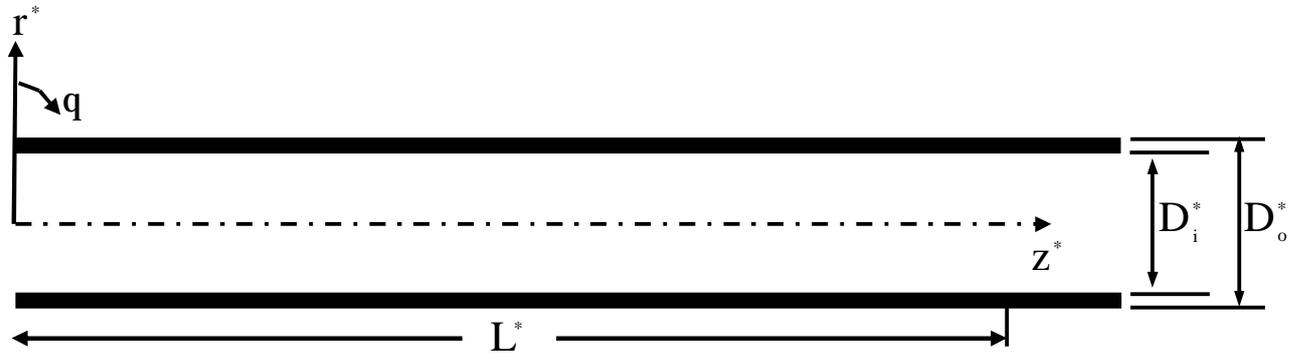


Figure 2.1 Géométrie et dimensions : $D_i^* = 1$, $D_o^* = 1.04$, $L^* = 104.17$,

2.3 Equations de conservation

Ecrites en termes de contraintes et de flux, les équations de conservation adimensionnelles modélisantes traduisant les principes physiques qui régissent ce problème sont:

$$\text{A } t^* = 0, \quad U^* = W^* = V^* = T^* = 0 \quad (2.1)$$

Pour $t^* > 0$:

Equation de conservation de la masse:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial q} + \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement radiale:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}U^*}{\mathcal{I}t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (W^* U^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (V^* U^*) - \frac{V_q^{*2}}{r^*} = - \frac{\mathcal{I}P^*}{\mathcal{I}r^*} \\ + \frac{\mathbf{Gr}_0^*}{\mathbf{Re}_0^2} \cos q \ T^* + \frac{1}{\mathbf{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* t_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (t_{rq}^*) - \frac{t_{qq}^*}{r^*} + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (t_{rz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}W^*}{\mathcal{I}t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (W^* W^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (V^* W^*) + \frac{U^* W^*}{r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}P^*}{\mathcal{I}q} - \frac{\mathbf{Gr}_0^*}{\mathbf{Re}_0^2} \sin q \ T^* + \\ \frac{1}{\mathbf{Re}_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^{*2} t_{qr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (t_{qq}^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (t_{qz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement axiale:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}V^*}{\mathcal{I}t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (W^* V^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (V^* V^*) = - \frac{\mathcal{I}P^*}{\mathcal{I}z^*} + \\ \frac{1}{\mathbf{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* t_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (t_{qz}^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (t_{zz}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Equation de conservation de l'énergie:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}T^*}{\mathcal{I}t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (W^* T^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (V^* T^*) = G^* - \\ \frac{1}{\mathbf{Re}_0 \mathbf{Pr}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (q_q^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (q_z^*) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{avec } G^* = \begin{cases} \mathbf{K}_s^*/(\mathbf{Re}_0 \mathbf{Pr}_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses sont:

$$\begin{aligned} t_{rr}^* = 2 m^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \qquad t_{rq}^* = t_{qr}^* = m^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial q} \right] \\ t_{qq}^* = 2 m^* \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial q} + \frac{U^*}{r^*} \right) \right] \qquad t_{qz}^* = t_{zq}^* = m^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

$$t_{zr}^* = t_{rz}^* = m^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] \quad t_{zz}^* = 2m^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*}$$

(2.7)

et les densités de flux thermiques sont:

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (2.8)$$

Les nombres adimensionnels qui caractérisent ce problème de convection mixte sont évalués à la température du fluide à l'entrée. Cette dernière est la température de référence utilisée dans l'évaluation des propriétés physiques du fluide servant à calculer les groupements adimensionnels du problème :

Le nombre de **Prandtl** : $Pr_0 = \frac{V_0}{a_0}$

Le nombre de **Reynolds** basé sur le diamètre interne de la conduite $Re_0 = \frac{V_0 D_i}{\nu_0}$

Le nombre de **Grashof** basé sur le flux pariétal (ΔT) $Gr_0^* = \frac{g b_0 D_i^3 \Delta T}{n_0^2} = \frac{g b D_i^3 (G D_i^2 / k_s)}{n_0^2}$

Le nombre de **Richardson** : $Ri_0 = \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}$ qui mesure, relativement, les deux modes de convection, forcée et naturelle.

2.4 Les conditions aux limites

A l'entrée du tube: $z^* = 0$

Domaine fluide:

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi: \quad U^* = W^* = T^* = 0, V^* = 2(1 - 4r^{*2}) \quad (2.9)$$

Domaine solide:

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi: \quad U^* = W^* = V^* = T^* = 0 \quad (2.10)$$

A la sortie du tube: $z^* = 104.17$

Domaine fluide:

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi: \quad \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Domaine solide:

$$0.5 \leq r^* \leq 0.5208 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi: \quad U^* = W^* = V^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

Les conditions dynamiques sont considérées et les variables dépendantes sont correctement interpolées au voisinage de l'axe. Cette interpolation permet de lever la singularité en ce point:

$$\text{Pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 100 \quad \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\mathcal{I}U^*}{\mathcal{I}r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\mathcal{I}W^*}{\mathcal{I}r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\mathcal{I}V^*}{\mathcal{I}r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\mathcal{I}T^*}{\mathcal{I}r^*} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Sur la paroi extérieure, la condition de non-glissement est imposée tandis que la condition aux limites thermiques est de troisième type (condition de Fourier).

$$r^* = 0.5208 \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 104.17 \quad \begin{cases} U^* = W^* = V^* = 0 \\ -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{(h_r + h_c)}{K_0} D_i T^* \end{cases} \quad (2.14)$$

avec:

$$h_r = \varepsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty) \quad (2.15)$$

L'émissivité de la surface extérieure est $\varepsilon = 0.9$ et $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ est la constante de Stéphan-Boltzman. h_c est donnée par la corrélation de Churchill et Chu [27] valable pour tous les nombres de Pr et de Rayleigh dans l'intervalle $10^{-6} \leq Ra \leq 10^9$:

$$Nu = \left[h_c D_i / K_{\text{air}} \right] = \left[0.6 + \left(0.387 Ra^{1/6} / (1 + (0.559 / Pr_{\text{air}})^{9/16})^{8/27} \right)^2 \right]^2 \quad (2.16)$$

Bien que cette corrélation exprime un Nu moyen, elle peut être approximativement utilisée pour déterminer localement le nombre de Nusselt.

Les nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl sont définis par:

$$Ra = \frac{g \beta [T(R_o, \theta, z) - T_\infty] D_o^3}{\alpha_{air} v_{air}}, \quad Pr_{air} = v_{air} / \alpha_{air} \quad (2.17)$$

Les propriétés thermophysiques de l'air sont évaluées à la température locale du film :

$$T_{film} = [T(R_o, \theta, z) + T_\infty] / 2 \quad (2.18)$$

Suivant la direction angulaire les conditions périodiques sont imposées pour l'ensemble du domaine radial et axial.

$$\text{Pour } 0 \leq r^* \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq z^* \leq 100 \quad \begin{cases} U^*(r^*, \mathbf{0}, z^*, t^*) = U^*(r^*, 2p, z^*, t^*) \\ W^*(r^*, \mathbf{0}, z^*, t^*) = W^*(r^*, 2p, z^*, t^*) \\ V^*(r^*, \mathbf{0}, z^*, t^*) = V^*(r^*, 2p, z^*, t^*) \\ T(r^*, \mathbf{0}, z^*, t^*) = T(r^*, 2p, z^*, t^*) \end{cases} \quad (2.19)$$

Les nombres de Reynolds $Re_0 = 606.85$ et Prandtl $Pr_0 = 8.082$ sont calculés avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température de référence ($T_0 = 288^\circ \text{K}$, à l'entrée du tube).

Les fonctions $\mu^*(T^*)$ et $K^*(T^*)$ ont été obtenues par un ajustement ("fitting") précis des valeurs tabulées citées dans Baehr and Stephan [28]. Ces fonctions sont :

$$\mu^*(T^*) = 0.23087 + 0.78727 \exp(-T^*/0.11386) \quad (2.20)$$

$$K^*(T^*) = 1.00111 + 0.80477 T^* - 1.06002 T^{*2} \quad (2.21)$$

Ces ajustements représentent de bonnes approximations dans le domaine des températures relatif à cette étude. La conductivité thermique adimensionnelle du solide est finie et constante dans l'intervalle des températures de cette étude:

$$K_s^*(T^*) = K_s / K_0 = 20 / 0.5893 = 33.94 \quad (2.22)$$

La viscosité dynamique adimensionnelle du solide est infinie, égale à :

$$\mu_s^*(T^*) = 10^{30} \quad (2.23)$$

Cette très grande valeur attribuée à la viscosité permet d'assurer des vitesses nulles représentatives du domaine solide. Le transfert thermique dans cette partie ne s'effectuera donc que par conduction. Cette procédure alliant les mêmes équations pour le domaine entier (fluide+solide) est discutée dans Patankar [29].

2.5 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par:

$$\text{Nu}(\theta, z^*) = \frac{h(\theta, z) D_i}{K_0} = \left[\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_b^*(z^*)} \right] \quad (2.24)$$

La température moyenne de mélange adimensionnelle dans une section $T_m^*(z^*)$ étant définie par :

$$T_m^*(z^*) = \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{2p} V^*(r^*, q, z^*) T^*(r^*, q, z^*) r^* dr^* dq}{\int_0^{1/2} \int_0^{2p} V(r^*, q, z^*) r^* dr^* dq} \quad (2.25)$$

Le nombre de Nusselt local axial et moyen circonférentiel est:

$$\text{Nu}(z^*) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \text{Nu}(q, z^*) dq = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \left[\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, q, z^*) - T_m^*(z^*)} \right] dq \quad (2.26)$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide-fluide:

$$\text{Nu} = \frac{1}{(2\pi)(104.17)} \int_0^{2\pi} \int_0^{104.17} \text{Nu}(\theta, z^*) dz^* d\theta \quad (2.27)$$

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Introduction

Une fois le problème physique modélisé mathématiquement, Eq. (2.1) jusqu'à (2.6) avec les conditions aux limites spatio-temporelles appropriées Eq. (2.9) jusqu'à (2.14) et (2.19), nous présentons dans ce chapitre la méthode numérique de résolution de ces équations modélisant de conservation de la masse, des quantités de mouvement radiale, azimutale et axiale et de l'énergie dans un système de coordonnées cylindriques. Il est évident qu'au vu de la complexité des systèmes d'équations, causée par la non-linéarité des termes, par la tridimensionnalité du problème ainsi que par le fort couplage inter-équations, leur solution ne peut être que de type numérique. Nous utilisons à cet effet la méthode numérique des volumes finis dont l'intérêt dans le domaine des CFD (Computational Fluid Dynamic) n'est plus à prouver. Globalement la démarche numérique s'initie par le maillage, puis la discrétisation des équations modélisantes et enfin la résolution des systèmes d'équations discrétisées.

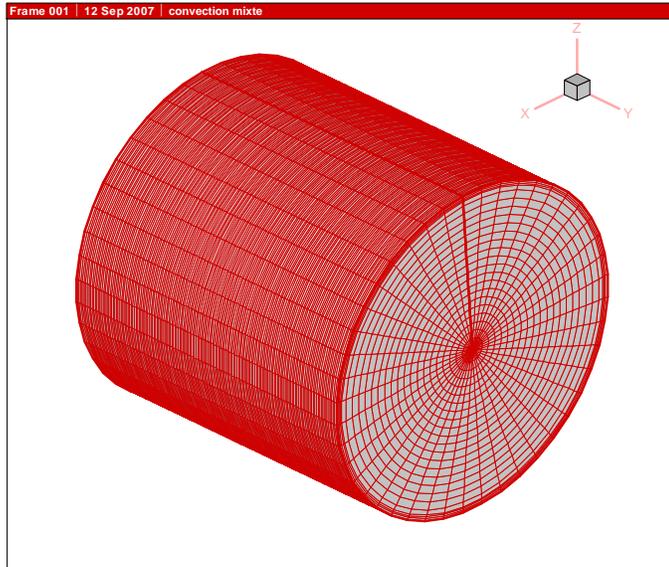
Aussi, il est nécessaire de faire rappeler que la discrétisation qui sera développée dans ce chapitre et rentrant dans le cadre de ce travail est du second ordre dans le temps et dans l'espace. Celle du premier ordre ayant déjà fait l'objet d'une étude antérieure, Boufendi [3] et Boufendi et Afrid [2].

3.2 Le maillage

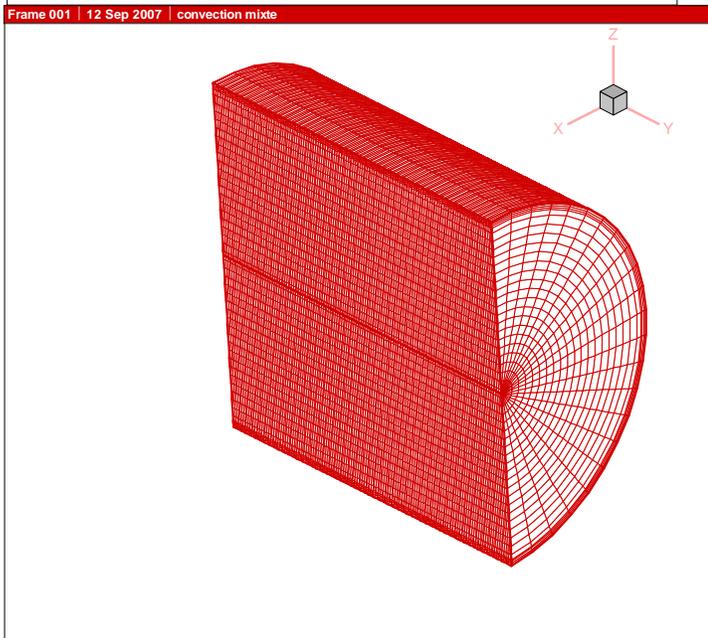
Le domaine physique compris entre $0 \leq r^* \leq R_o/D_i$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq L/D_i$ est transformé en un domaine discret constitué d'un nombre fini de volumes de contrôle élémentaires cylindriques, contigus et sans discontinuité d'interface, de dimensions Δr^* , $r^* \Delta \theta$ et Δz^* suivant les directions respectives r^* , θ et z^* . A l'intérieur et au centre de chaque volume sera défini un point (ou un nœud) représentatif de l'ensemble du volume. Les figures 3.1 (a-c) schématisent successivement le domaine numérique et un volume de contrôle typique ($\Delta v^* = r^* \Delta r^* \Delta \theta \Delta z^*$) dont le centre géométrique est associé au nœud **P** et limité par ses six faces: les faces Nord et Sud dans la direction radiale dont leurs centres sont (**n**) et (**s**), Est et Ouest dans la direction angulaire dont leurs centres sont (**e**) et (**w**) et Frontale et Dorsale dans la direction axiale dont leurs centres sont (**t**) et (**b**). Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes: dans la direction radiale deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction angulaire deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et enfin dans la direction axiale les deux volumes adjacents aux faces frontale et dorsale contenant en leurs centres les nœuds **T** et **B**.

Dans le maillage les différentes dimensions sont importantes à connaître et elles seront bien explicitées dans les figures qui suivent et qui présentent différents plans de vue du volume considéré. Les angles et les distances entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **T** et **B** sont $d\theta_e$, $d\theta_w$, dr_n , dr_s , dz_t et dz_b , respectivement tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement Δr_N , Δr_S , $\Delta \theta_E$, $\Delta \theta_W$, Δz_T et Δz_B . Les fonctions scalaires, température et pression, sont stockées dans le nœud **P** du volume typique tandis que les fonctions vectorielles telles les composantes de vitesse, sont situées au centre et perpendiculairement à travers les six faces de chaque volume entourant **P**. Ainsi, les équations de Navier- Stokes sont intégrées dans des volumes finis décalés [Patankar] tandis que les équations de continuité et de l'énergie seront discrétisées dans un volume typique. Cette localisation faciale des composantes de vitesses entraînera un décalage de leur volume correspondant par rapport au volume de contrôle principal. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour l'obtention de solutions physiquement acceptables [Patankar]. Ainsi, c'est à travers la totalité de ce domaine numérique maillé que seront

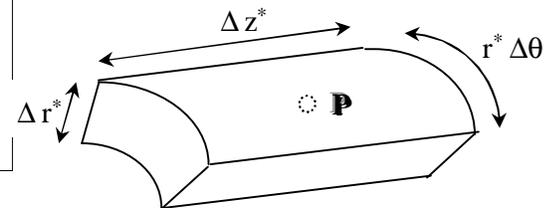
intégrées sur chaque volume de contrôle les équations modélisantes écrites sous la forme conservative.



(a) Vue externe du maillage



(b) Coupe verticale médiane du conduit



(c) : Un volume fini typique

Figure 3.1 : (a, b) Le maillage du conduit, (c) un volume de contrôle typique

3.3 Discrétisation des équations du modèle

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques. C'est dans cette voie que nous avons fait le choix d'une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. On rappelle que les équations de conservation peuvent être écrites sous sa forme générale suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* \phi) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (W^* \phi) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V^* \phi) = \\ \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\Gamma_\phi r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma_\phi \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) \right] + S_\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Où ϕ est la variable généralisée, S_ϕ est le terme de source, Γ_ϕ est le coefficient de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur dans notre cas).

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans son volume fini typique ou décalé selon le cas. Pour simplifier l'écriture, on élimine les étoiles dans les exposants des variables non dimensionnelles.

3.4 Définitions

3.4.1 La discrétisation temporelle au second ordre:

Elle est obtenue à partir de manipulations mathématiques dans les développements en séries de Taylor d'une variable f par rapport au temps:

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.3)$$

Si l'équation (3.3) est diminuée de l'équation (3.2) multipliée par 4, on peut montrer que:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$, est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.5)$$

Aussi, si on multiplie l'équation (3.2) par 2 et on retranche du produit l'équation (3.3), on peut montrer que:

$$\phi^{t+\Delta t} \approx 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} + (\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

Et donc, une approximation, avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$, d'une variable $\phi^{t+\Delta t}$ est :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} \quad (3.7)$$

Cette discrétisation est celle d'**Adam-Bashforth**.

3.4.2 La discrétisation spatiale au second ordre

Les discrétisations spatiales se feront selon le schéma des différences centrées qui est un schéma d'une précision du second ordre.

Considérons, dans la direction axiale, les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_P = \phi_t - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \mathbf{L} \quad (3.8)$$

$$\phi_T = \phi_t + \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_t + \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t + \mathbf{L} \quad (3.9)$$

En soustrayant l'équation (3.9) de (3.8), on trouve:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t \approx \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \Big|_t (dz_t)^2 \quad (3.10)$$

Et donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t = \frac{\phi_T - \phi_P}{dz_t}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dz_t)^2 \quad (3.11)$$

Dans tous les cas on utilise des discrétisations du second ordre: une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre Δt^2 et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta r)^2, (\Delta \theta)^2$ et $(\Delta z)^2$.

La forme d'Euler retardée du second ordre donnée par l'équation (3.5) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation d'Adam-Bashforth, équation (3.7) sera appliquée d'une part à tous les termes non linéaires tels les termes advectifs et d'autre part à tous les termes hybrides et les termes de force de poussée thermique qui se retrouvent dans les différentes sources. Enfin la discrétisation selon un schéma totalement

implicite au temps ($t + \Delta t$) sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression. Quant à la discrétisation dans l'espace, il lui sera appliquée le schéma des différences centrées qui est d'ordre deux (comme on l'a vu précédemment).

3.5 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale :

On rappelle que cette équation est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses:

$$\frac{\mathcal{I}U^*}{\mathcal{I}t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* U^* U^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (W^* U^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (V^* V^*) - \frac{W^{*2}}{r^*} = - \frac{\mathcal{I}P^*}{\mathcal{I}r^*} + \frac{\mathbf{Gr}_0^*}{\mathbf{Re}_0^2} \cos q T^* + \frac{1}{\mathbf{Re}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}r^*} (r^* t_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (t_{rq}^*) - \frac{t_{qq}^*}{r^*} + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}z^*} (t_{rz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont:

$$t_{rr}^* = 2m^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \quad , \quad t_{rq}^* = t_{qr}^* = m^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial q} \right] \quad \text{et}$$

$$t_{zr}^* = t_{rz}^* = m^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] \quad t_{qq}^* = 2m^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial q} + \frac{U^*}{r^*} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé $r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$ suivant la direction radiale (voir les figures (3.2.a) et (3.2.b)).

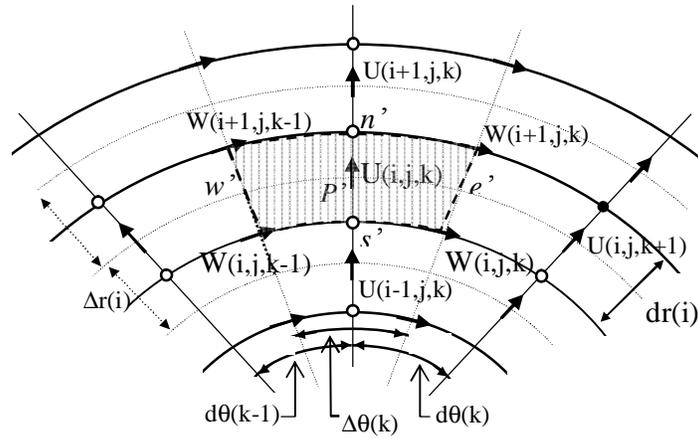


Figure 3.2(a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale \vec{e}_r

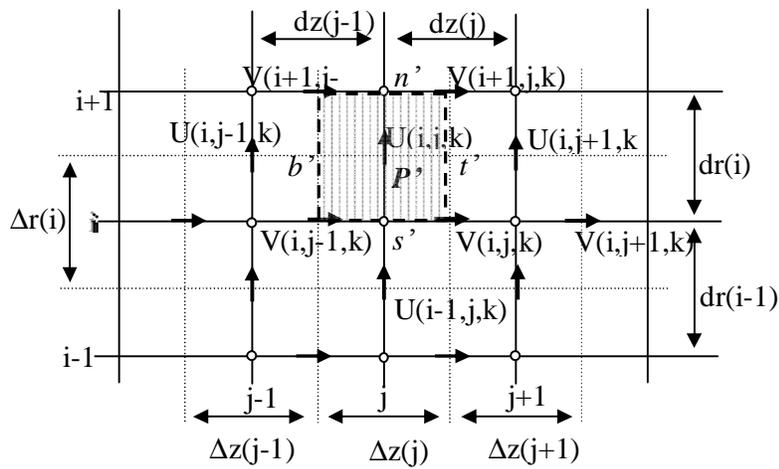


Figure 3.2(b) Identification et représentation des vitesses dans la direction radiale dans le plan (r,z) .

- **Terme transitoire:**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial U}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p$$

- **Termes advectifs:**

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\ & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t+\Delta t} - \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t-\Delta t} \right]_{s_u}^{n_u} dr dq dz = \\ & \left[2(r_{n_u} U_{n_u}^t U_{n_u}^t - r_{s_u} U_{s_u}^t U_{s_u}^t) - (r_{n_u} U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - r_{s_u} U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t}) \right] \Delta q_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WU) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\ & \left[2(W_{e_u}^t U_{e_u}^t - W_{w_u}^t U_{w_u}^t) - (W_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - W_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} (VU) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\ & \left[2(V_{t_u}^t U_{t_u}^t - V_{b_u}^t U_{b_u}^t) - (V_{t_u}^{t-\Delta t} U_{t_u}^{t-\Delta t} - V_{b_u}^{t-\Delta t} U_{b_u}^{t-\Delta t}) \right] r_n dr_n \Delta q_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{W^2}{r} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \left(2 [W_{P_u}^t]^2 - [W_{P_u}^{t-\Delta t}]^2 \right) dr_n \Delta q_p \Delta z_p = \\ & 2 \left[\frac{W_{n_u}^t e_u + W_{n_u}^t w_u + W_{s_u}^t e_u + W_{s_u}^t w_u}{4} \right]^2 dr_n \Delta q_p \Delta z_p - \\ & \left[\frac{W_{n_u}^{t-\Delta t} e_u + W_{n_u}^{t-\Delta t} w_u + W_{s_u}^{t-\Delta t} e_u + W_{s_u}^{t-\Delta t} w_u}{4} \right]^2 dr_n \Delta q_p \Delta z_p \end{aligned}$$

- **Terme de pression:**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} -\frac{\partial P}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta q_p \Delta z_p$$

- Termes diffusifs:

* le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r t_{rr})$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r t_{rr}) r dr dq dz = \\ & 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r m^t \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r m^{t-\Delta t} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz = \\ & \left(4r m^t \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{s_u}^{t+\Delta t} \right)^{n_u} \Delta q_p \Delta z_p - \left(2r m^{t-\Delta t} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{s_u}^{t+\Delta t} \right)^{n_u} \Delta q_p \Delta z_p = \\ & 2 \left(2m_{n_u}^t - m_{n_u}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{n_u} \frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dr_{n_u}} \right) \Delta q_p \Delta z_p - 2 \left(2m_{s_u}^t - m_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \left(r_{s_u} \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{dr_{s_u}} \right) \Delta q_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} m_{n_u} &= m_N = m(i+1, j, k) & , & & m_{s_u} &= m_p = m(i, j, k) \\ r_{n_u} &= r_p(i+1) & , & & r_{s_u} &= r_p(i) \\ dr_{n_u} &= \Delta r_N = \Delta r(i+1) & , & & dr_{s_u} &= \Delta r_p = \Delta r(i) \\ U_{N_u} &= U(i+1, j, k) & , & & U_{P_u} &= U(i, j, k) \quad \text{et} \quad U_{S_u} = U(i-1, j, k) \end{aligned}$$

* le terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{rq})$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{rq}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial q} (t_{rq}) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz = \\ & 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ m^t \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right] \right\} dr dq dz - \\ & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ m^{t-\Delta t} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right] \right\} dr dq dz = \\ & \left[2m^t \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_u}^{e_u} dr_n \Delta z_p - \left[m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_u}^{e_u} dr_n \Delta z_p = \\ & \left[\left(2m^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^t - m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \right) \right]_{w_u}^{e_u} dr_n \Delta z_p + \left[\left(2m^t - m^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right]_{w_u}^{e_u} dr_n \Delta z_p = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\begin{array}{l} 2m^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \Big|_{e_u} - 2m^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \Big|_{w_u} + \\ m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \Big|_{w_u} - m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \Big|_{e_u} \end{array} \right) dr_n \Delta z_p + \right. \\
& \left. \left(2m^t - m^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right) \Big|_{w_u}^{t+\Delta t} \right]^{e_u} dr_n \Delta z_p = \\
& \left[\begin{array}{l} 2 \left(m_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - m_{w_u}^t \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{dr_{n_u}} \right) + \\ \left(m_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - m_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} \right) \end{array} \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \left[\begin{array}{l} 2 \left(m_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} - m_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{2} \right) + \\ \left(m_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} - m_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] dr_n \Delta z_p - \\
& \left(2m_{e_u}^t - m_{e_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}} \frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dq_{e_u}} \right) dr_n \Delta z_p - \left(2m_{w_u}^t - m_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_{n_u}} \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{dq_{w_u}} \right) dr_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$m_{e_u} = \frac{dq_e}{\frac{\Delta q_N}{m_N} + \frac{\Delta q_{NE}}{m_{NE}}} + \frac{dq_e}{\frac{\Delta q_P}{m_P} + \frac{\Delta q_E}{m_E}}, \quad m_{w_u} = \frac{dq_w}{\frac{\Delta q_N}{m_N} + \frac{\Delta q_{NW}}{m_{NW}}} + \frac{dq_w}{\frac{\Delta q_P}{m_P} + \frac{\Delta q_W}{m_W}}$$

$$\mu_N = \mu(i+1, j, k), \quad \mu_P = \mu(i, j, k), \quad \mu_E = \mu(i, j, k+1), \quad \mu_W = \mu(i, j, k-1)$$

$$\mu_{NE} = \mu(i+1, j, k+1), \quad \mu_{NW} = \mu(i+1, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k), \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k), \quad \Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1), \quad \Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$r_{n_u} = r_P(i+1), \quad dr_{n_u} = \Delta r_N = \Delta r(i+1)$$

$$W_{n_u e_u} = W(i+1, j, k), \quad W_{n_u w_u} = W(i+1, j, k-1), \quad W_{s_u e_u} = W(i, j, k), \quad W_{s_u w_u} = W(i, j, k-1)$$

$$U_{E_u} = U(i, j, k+1), \quad U_{P_u} = U(i, j, k), \quad U_{W_u} = U(i, j, k-1)$$

* le terme $\frac{t_{qq}}{r}$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{u_u} \left. \frac{t_{qq}}{r} \right|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{u_u} t_{qq} |^{t+\Delta t} dr dq dz = \\
& 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{u_u} \left[2m^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^t + \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr dq dz - \\
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{u_u} \left[2m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr dq dz = \\
& \left\{ 2 \left[2m^t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^t - m^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^{t-\Delta t} \right]_{P_u} + \left[2(2m^t - m^{t-\Delta t}) \left(\frac{U}{r} \right)^{t+\Delta t} \right]_{P_u} \right\} dr_n \Delta q_p \Delta z_p = \\
& 2 \left[\left(2m_{P_u}^t \right) \frac{1}{2r_n} \left(\frac{W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t}{\Delta q_{P_u}} + \frac{W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{\Delta q_{P_u}} \right) - \right. \\
& \left. \left(m_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \frac{1}{2r_n} \left(\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t}}{\Delta q_{P_u}} + \frac{W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{\Delta q_{P_u}} \right) \right] dr_n \Delta q_p \Delta z_p + \\
& 2 \left(2m_{P_u}^t - m_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t}}{r_n} \right] dr_n \Delta q_p \Delta z_p = \\
& 2 \left[\frac{\left(m_{P_u}^t \right)}{r_n} \left(W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t \right) - \frac{\left(m_{P_u}^{t-\Delta t} \right)}{2r_n} \left(W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& 2 \left(2m_{P_u}^t - m_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t}}{r_n} \right] dr_n \Delta q_p \Delta z_p =
\end{aligned}$$

Avec :

$$m_{P_u} = \frac{2 dr_n}{\frac{\Delta r_P}{m_P} + \frac{\Delta r_N}{m_N}}$$

$$\Delta q_{P_u} = dq_e = dq(k) \quad , \quad r_n = r_c(i)$$

$$W_{n_u e_u} = W(i+1, j, k) \quad , \quad W_{n_u w_u} = W(i+1, j, k-1) \quad , \quad W_{s_u e_u} = W(i, j, k) \quad , \quad W_{s_u w_u} = W(i, j, k-1)$$

$$U_{P_u} = U(i, j, k)$$

$$m_N = m(i+1, j, k) \quad , \quad m_P = m(i, j, k)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial Z}(t_{rZ})$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} (t_{rZ}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} \left(m^t \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right)^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\
& 2 \left[m^t \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^t + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta q_p - \left[m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta q_p = \\
& \left[2m^t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^t - m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t-\Delta t} \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta q_p + \left[2m^t - m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right]_{b_u}^{t_u} r_n dr_n \Delta q_p = \\
& \left[2 \left(m_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - m_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \right. \\
& \left. m_{b_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - m_{t_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right] r_n dr_n \Delta q_p + \\
& \left(2m_{t_u}^t - m_{t_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{U_{T_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) r_n dr_n \Delta q_p - \left(2m_{b_u}^t - m_{b_u}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) r_n dr_n \Delta q_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$m_{t_u} = \frac{dz_{t_u}}{\frac{\Delta z_N}{m_N} + \frac{\Delta z_{NT}}{m_{NT}}} + \frac{dz_{t_u}}{\frac{\Delta z_P}{m_P} + \frac{\Delta z_T}{m_T}}, \quad m_{b_u} = \frac{dz_{b_u}}{\frac{\Delta z_N}{m_N} + \frac{\Delta z_{NB}}{m_{NB}}} + \frac{dz_{b_u}}{\frac{\Delta z_P}{m_P} + \frac{\Delta z_B}{m_B}}$$

$$\mu_{n_u} = \mu_N = \mu(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_{s_u} = \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$\mu_{NT} = \mu(i+1, j+1, k) \quad , \quad \mu_T = \mu(i, j+1, k)$$

$$\mu_{NB} = \mu(i+1, j-1, k) \quad , \quad \mu_B = \mu(i, j-1, k)$$

$$dr_n = dr(i) \quad , \quad dz_t = dz(j) \quad , \quad r_n = rc(i)$$

$$V_{n_u t_u} = V(i+1, j, k) \quad , \quad V_{s_u t_u} = V(i, j, k), \quad V_{n_u b_u} = V(i+1, j-1, k), \quad V_{s_u b_u} = V(i, j-1, k)$$

$$U_{T_u} = U(i, j+1, k) \quad , \quad U_{P_u} = U(i, j, k), \quad U_{B_u} = U(i, j-1, k)$$

* **le terme** $\left(\frac{Gr}{Re^2} \cos q\right) T$

$$\begin{aligned} & \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos q\right) T \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\ & 2 \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos q\right) T \Big|^t r dr dq dz - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left(\frac{Gr}{Re^2} \cos q\right) T \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz = \\ & \frac{Gr}{Re^2} \cos q \left\{ \left[2(T)_{P_u} \Big|^t - (T)_{P_u} \Big|^{t-\Delta t} \right] \right\} r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p = \\ & \frac{Gr}{Re^2} \cos q (T_N^t + T_P^t) r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p - \frac{Gr}{Re^2} \cos q \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + S_u^{t+\Delta t} \quad (3.12)$$

Avec:

$$\begin{aligned} A_N = dn &= \frac{2}{Re_0} (2m_{n_u}^t - m_{n_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_{n_u} \Delta q_p \Delta z_p}{dr_{n_u}} & A_S = ds &= \frac{2}{Re_0} (2m_{s_u}^t - m_{s_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_{s_u} \Delta q_p \Delta z_p}{dr_{s_u}} \\ A_E = de &= \frac{1}{Re_0} (2m_{e_u}^t - m_{e_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta z_p}{r_n dq_e} & A_W = dw &= \frac{1}{Re_0} (2m_{w_u}^t - m_{w_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta z_p}{r_n dq_w} \\ A_T = dt &= \frac{1}{Re_0} (2m_{t_u}^t - m_{t_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_n dr_n \Delta q_p}{dz_t} \\ A_B = db &= \frac{1}{Re_0} (2m_{b_u}^t - m_{b_u}^{t-\Delta t}) \frac{r_n dr_n \Delta q_p}{dz_b} \\ A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \\ & \frac{3}{2} \frac{r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p}{\Delta t} + \frac{1}{Re_0} (2m_{P_u}^t - m_{P_u}^{t-\Delta t}) \frac{dr_n \Delta q_p \Delta z_p}{r_n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
S_u^{t+\Delta t} &= \frac{4U^{p_u t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p - \frac{U^{p_u t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p + \\
&\left[(U_{n_u}^{t-\Delta t})^2 - 2(U_{n_u}^t)^2 \right] r_{n_u} \Delta q_p \Delta z_p + \left[2(U_{s_u}^t)^2 - (U_{s_u}^{t-\Delta t})^2 \right] r_{s_u} \Delta q_p \Delta z_p + \\
&\left[(W_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t}) - 2(W_{e_u}^t U_{e_u}^t) \right] dr_n \Delta z_p + \left[2(W_{w_u}^t U_{w_u}^t) - (W_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p + \\
&\left[(V_{t_u}^{t-\Delta t} U_{t_u}^{t-\Delta t}) - 2(V_{t_u}^t U_{t_u}^t) \right] r_n dr_n \Delta q_p + \left[2(V_{b_u}^t U_{b_u}^t) - (V_{b_u}^{t-\Delta t} U_{b_u}^{t-\Delta t}) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p + \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(m_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - m_{w_u}^t \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{dr_{n_u}} \right) + \right] dr_n \Delta z_p + \\
&\left[m_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - m_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} \right] \\
&\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(m_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} - m_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{2} \right) + \right] dr_n \Delta z_p - \\
&\left[m_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} - m_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \frac{(\mathbf{m}_{P_u}^t)}{r_n} (W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t) - \right. \\
& \left. \frac{(\mathbf{m}_{P_u}^{t-\Delta t})}{r_n} (W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mathbf{m}_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - \mathbf{m}_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \right. \\
& \left. \frac{(\mathbf{m}_{b_u}^{t-\Delta t})}{dr_n} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - \mathbf{m}_{t_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right] r_n dr_n \Delta q_p + \\
& 2 \left[\frac{W_{n_u e_u}^t + W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t + W_{s_u w_u}^t}{4} \right]^2 dr_n \Delta q_p \Delta z_p - \left[\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n \Delta q_p \Delta z_p \\
& \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cos q (T_N^t + T_P^t) r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cos q \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta q_p \Delta z_p + \\
& + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta q_p \Delta z_p \\
& S_u^{t+\Delta t} = \frac{4U_{p_u}^t}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \frac{U_{p_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\
& [fn_u^{t-\Delta t} - fn_u^t] + [fs_u^t - fs_u^{t-\Delta t}] + [fe_u^{t-\Delta t} - fe_u^t] + [fw_u^t - fw_u^{t-\Delta t}] + [ft_u^{t-\Delta t} - ft_u^t] + [fb_u^t - fb_u^{t-\Delta t}] + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{e_u}^t \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{dr_{n_u}} - \mu_{w_u}^t \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{dr_{n_u}} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} - \mu_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{dr_{n_u}} \right) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{w_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^t - W_{s_u w_u}^t}{2} - \mu_{e_u}^t \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^t - W_{s_u e_u}^t}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_{e_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u e_u}^{t-\Delta t}}{2} - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{r_{n_u}} \frac{W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] dr_n \Delta z_p - \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \frac{(\mu_{P_u}^t)}{r_n} (W_{n_u e_u}^t - W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t - W_{s_u w_u}^t) - \frac{(\mu_{P_u}^{t-\Delta t})}{r_n} (W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} - W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}) \right] dr_n \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_{t_u}^t \frac{V_{n_u t_u}^t - V_{s_u t_u}^t}{dr_n} - \mu_{b_u}^t \frac{V_{n_u b_u}^t - V_{s_u b_u}^t}{dr_n} \right) + \mu_{b_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u b_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u b_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} - \mu_{t_u}^{t-\Delta t} \frac{V_{n_u t_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u t_u}^{t-\Delta t}}{dr_n} \right] r_n dr_n \Delta \theta_p + \\
& 2 \left[\frac{W_{n_u e_u}^t + W_{n_u w_u}^t + W_{s_u e_u}^t + W_{s_u w_u}^t}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \left[\frac{W_{n_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{n_u w_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u e_u}^{t-\Delta t} + W_{s_u w_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p + \\
& \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cos \theta (T_N^t + T_P^t) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \\
& + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_u^{t+\Delta t} = b_u + (P_p^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

Et l'équation de discrétisation serait:

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + b_u + (P_p^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta q_p \Delta z_p \quad (3.14)$$

Comme $U_{P_u}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse U à l'interface n du volume typique ($U_n^{t+\Delta t}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $U_n^{t+\Delta t}$:

$$A_P U_n^{t+\Delta t} = A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_T U_{T_u}^{t+\Delta t} + A_B U_{B_u}^{t+\Delta t} + b_u + (P_p^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) r_n \Delta q_p \Delta z_p \quad (3.15)$$

3.6. Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit:

$$\frac{\mathcal{I} W^*}{\mathcal{I} t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} r^*} (r^* U^* W^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} q} (W^* W^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} z^*} (V^* W^*) + \frac{U^* W^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I} P^*}{\mathcal{I} q} - \frac{\mathbf{Gr}_0^*}{\mathbf{Re}_0^2} \sin q T^* + \frac{1}{\mathbf{Re}_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} r^*} (r^{*2} t_{qr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} q} (t_{qq}^*) + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} z^*} (t_{qc}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont:

$$t_{qq}^* = 2 m^* \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial q} + \frac{U^*}{r^*} \right) \right] \quad t_{rq}^* = t_{qr}^* = m^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial q} \right]$$

$$t_{qc}^* = t_{cq}^* = m^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial q} \right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (voir les figures (3.3.a) et (3.3.b)).

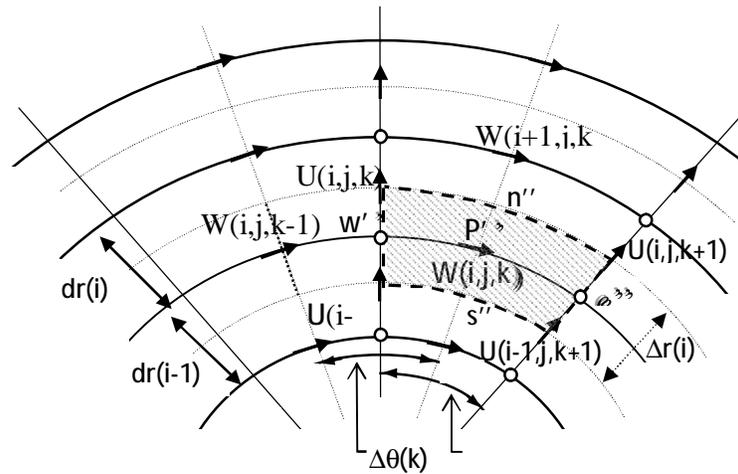


Figure 3.3.a Identification et positionnement des vitesses dans la direction angulaire \hat{e}_θ .

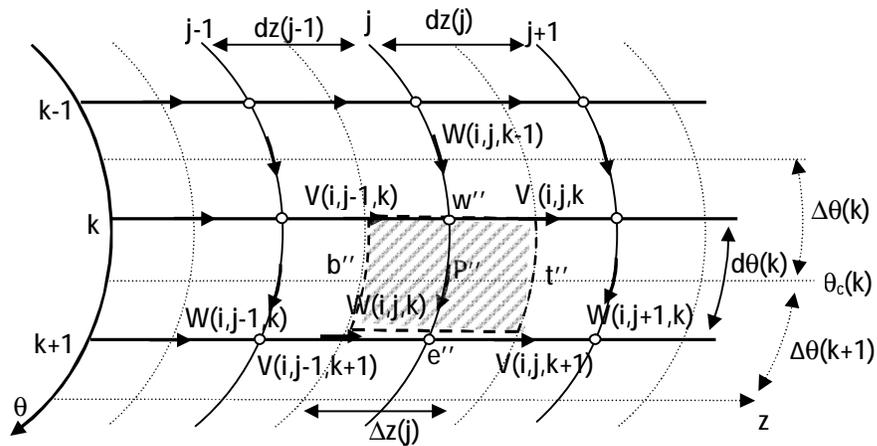


Figure 3.3.b : Les faces, dans le plan $q-z$, des volumes finis décalés suivant la direction

- Terme transitoire:

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial W}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \left[\frac{3W_{p_w}^{t+\Delta t} - 4W_{p_w}^t + W_{p_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p$$

- Termes advectifs:

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^t - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr dq dz =$$

$$\left[2 \left(r_{n_w}^t U_{n_w}^t W_{n_w}^t - r_{s_w}^t U_{s_w}^t W_{s_w}^t \right) - \left(r_{n_w}^{t-\Delta t} U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t} - r_{s_w}^{t-\Delta t} U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \right] dq_e \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WW) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WW) \Big|^t - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WW) \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr dq dz$$

$$= \left[2 \left(W_{e_w}^t W_{e_w}^t - W_{w_w}^t W_{w_w}^t \right) - \left(W_{e_w}^{t-\Delta t} W_{e_w}^{t-\Delta t} - W_{w_w}^{t-\Delta t} W_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z} (VW) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[2 \frac{\partial}{\partial z} (VW) \Big|^t - \frac{\partial}{\partial z} (VW) \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr dq dz$$

$$= \left[2 \left(V_{t_w}^t W_{t_w}^t - V_{b_w}^t W_{b_w}^t \right) - \left(V_{t_w}^{t-\Delta t} W_{t_w}^{t-\Delta t} - V_{b_w}^{t-\Delta t} W_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p dq_e$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{UW}{r} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left[2 \frac{UW}{r} \Big|^t - \frac{UW}{r} \Big|^{t-\Delta t} \right] r dr dq dz$$

$$= \left(2 U_{p_w}^t W_{p_w}^t - U_{p_w}^{t-\Delta t} W_{p_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p dq_e \Delta z_p = \left(\frac{U_{n_w}^t + U_{n_w w_w}^t + U_{s_w e_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{2} W_{p_w}^t - \frac{U_{n_w}^{t-\Delta t} + U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{4} W_{p_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p dq_e \Delta z_p$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \left(P_p^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta z_p$$

Termes diffusifs:

* **Terme** $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 t_{qr})$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 t_{qr}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 t_{qr}) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz =$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 m \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} \right) \right] \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz =$$

$$\frac{2}{r_P} \left[r^2 m^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{W}{r} \right)^t + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_w}^{n_w} dq_e \Delta z_p -$$

$$\frac{1}{r_P} \left[r^2 m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_w}^{n_w} dq_e \Delta z_p =$$

$$\frac{1}{r_P} \left[2r^2 m^t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{W}{r} \right)^t - r^2 m^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{W}{r} \right)^{t-\Delta t} \right]_{s_w}^{n_w} dq_e \Delta z_p +$$

$$\frac{1}{r_P} \left[2r^2 m^t \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} - r^2 m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right]_{s_w}^{n_w} dq_e \Delta z_p =$$

$$\left[\begin{aligned} & 2m_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_P} \frac{U_{n_w e_w}^t - U_{n_w w_w}^t}{dq_e} - 2m_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_P} \frac{U_{s_w e_w}^t - U_{s_w w_w}^t}{dq_e} - \\ & m_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_P} (W_{N_w}^t + W_{P_w}^t) + m_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_P} (W_{S_w}^t + W_{P_w}^t) + \\ & + m_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_P} \frac{U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} - m_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_P} \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{n_w w_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} + \\ & + m_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_P} \frac{W_{N_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} - m_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_P} \frac{W_{S_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \end{aligned} \right] dq_e \Delta z_p +$$

$$\left(2m_{n_w}^t - m_{n_w}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{r_{n_w}^2}{r_P} \left(\frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) \right] dq_e \Delta z_p - \left(2m_{s_w}^t - m_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \left[\frac{r_{s_w}^2}{r_P} \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] dq_e \Delta z_p$$

avec:

$$m_{n_w} = \frac{1}{\frac{1}{m_{e_w}} + \frac{1}{m_{NE}}} + \frac{1}{\frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_N}}, \quad m_{s_w} = \frac{1}{\frac{1}{m_{e_w}} + \frac{1}{m_{SE}}} + \frac{1}{\frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_S}}$$

$$\begin{aligned}
m_{e_w} &= m_E = m(i, j, k+1) & , & & \mu_p &= \mu(i, j, k) \\
\mu_{NE} &= \mu(i+1, j, k+1) & , & & \mu_N &= \mu(i+1, j, k) \\
\mu_{SE} &= \mu(i-1, j, k+1) & , & & \mu_S &= \mu(i-1, j, k) \\
r_{n_w} &= r_c(i) & , & & r_{s_w} &= r_c(i-1) \\
dr_s &= dr(i-1) & \text{et} & & dr_n &= dr(i)
\end{aligned}$$

$$* \text{ Terme } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qq})$$

$$\begin{aligned}
\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qq}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz &= \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qq}) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz \\
\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial q} \left(2m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{U}{r} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz &= \left[2m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{U}{r} \right) \Big|^{t+\Delta t} \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p = \\
2 \left[2m^t \left(\left(\frac{U}{r} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p &- \left[2m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{U}{r} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_w}^{e_w} \Delta r_p \Delta z_p = \\
2m_{e_w}^t \left(\frac{U_{n_w e_w}^t + U_{s_w e_w}^t}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p &- 2m_{w_w}^t \left(\frac{U_{n_w w_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p - \\
m_{e_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p &+ m_{w_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \Delta r_p \Delta z_p + \\
2 \left[\left(2m_{e_w}^t - m_{e_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_p} \frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dq_{e_w}} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p &- \left[\left(2m_{w_w}^t - m_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{1}{r_p} \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{dq_{w_w}} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
m_{e_w} &= m_E = m(i, j, k+1) & , & & m_{w_w} &= m_P = m(i, j, k) \\
dq_{e_w} &= \Delta q(k+1) & , & & dq_{w_w} &= \Delta q(k) & , & & r_p &= r_p(i) \\
U_{n_w e_w} &= U(i, j, k+1) & , & & U_{s_w e_w} &= U(i-1, j, k+1) & , & & U_{n_w w_w} &= U(i, j, k) & , & & U_{s_w w_w} &= U(i-1, j, k) \\
W_{E_w} &= W(i, j, k+1) & , & & W_{P_w} &= W(i, j, k) & , & & W_{W_w} &= W(i, j, k-1)
\end{aligned}$$

* **Terme** $\frac{\partial}{\partial Z}(t_{qZ})$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{t_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z}(t_{qZ}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{t_w} \int_{b_w}^{t_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(m \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz =$$

$$\left\{ 2 \left[m^t \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_w}^{t_w} - \left[m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{b_w}^{t_w} \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p =$$

$$\left[2m_{t_w}^t \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w t_w}^t - V_{w_w t_w}^t}{dq_e} \right) - 2m_{b_w}^t \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w b_w}^t - V_{w_w b_w}^t}{dq_e} \right) \right] r_p \Delta r_p dq_e -$$

$$\left[m_{t_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w t_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w t_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} \right) - m_{b_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{1}{r_p} \frac{V_{e_w b_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w b_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} \right) \right] r_p \Delta r_p dq_e +$$

$$\left[\left(2m_{t_w}^t - m_{t_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{W_{T_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) \right] r_p \Delta r_p dq_e - \left[\left(2m_{b_w}^t - m_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] r_p \Delta r_p dq_e$$

avec:

$$m_{t_w} = \frac{dz_t}{\frac{\Delta z_E}{m_{e_w}} + \frac{\Delta z_T}{m_{TE}}} + \frac{dz_t}{\frac{\Delta z_P}{m_P} + \frac{\Delta z_T}{m_T}}, \quad m_{b_w} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_E}{m_{e_w}} + \frac{\Delta z_T}{m_{BE}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{m_P} + \frac{\Delta z_B}{m_B}}$$

$$\mu_{e_w} = \mu_E = \mu(i, j, k+1) \quad , \quad \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$\mu_{TE} = \mu(i, j+1, k+1) \quad , \quad \mu_T = \mu(i, j+1, k)$$

$$\mu_{BE} = \mu(i, j-1, k+1) \quad , \quad \mu_B = \mu(i, j-1, k)$$

$$dz_t = dz(j) \quad , \quad dz_b = dz(j-1) \quad \text{et} \quad d\theta_e = d\theta(k)$$

$$V_{e_w t_w} = V(i, j, k+1) \quad , \quad V_{e_w b_w} = V(i, j-1, k+1) \quad , \quad V_{w_w t_w} = V(i, j, k) \quad , \quad V_{w_w b_w} = V(i, j-1, k)$$

$$W_{T_w} = W(i, j+1, k) \quad , \quad W_{P_w} = W(i, j, k) \quad , \quad W_{B_w} = W(i, j-1, k)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin q \right) T \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\
& 2 \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin q \right) T \Big|^t r dr dq dz - \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{t_w} \left(\frac{Gr}{Re^2} \sin q \right) T \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz = \\
& \frac{Gr}{Re^2} \sin q \left\{ \left[2(T)_{P_w} \Big|^t - (T)_{P_w} \Big|^{t-\Delta t} \right] \right\} r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p = \\
& \frac{Gr}{Re^2} \sin q (T_E^t + T_P^t) r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p - \frac{Gr}{Re^2} \sin q \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

L'ensemble des termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P W_{P_w}^{t+\Delta t} = A_N W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W W_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T W_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B W_{B_w}^{t+\Delta t} + S_w^{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

Avec:

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0} \left(2m_{n_w}^t - m_{n_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{n_w}^2 dq_e \Delta z_p}{r_p dr_n}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0} \left(2m_{s_w}^t - m_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_{s_w}^2 dq_e \Delta z_p}{r_p dr_n}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0} \left(2m_{e_w}^t - m_{e_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p dq_{e_w}}$$

$$A_W = dw = \frac{2}{Re_0} \left(2m_{w_w}^t - m_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p dq_{w_w}}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0} \left(2m_{t_w}^t - m_{t_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p dq_e}{dz_t}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0} \left(2m_{b_w}^t - m_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \frac{r_p \Delta r_p dq_e}{dz_b}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p d\theta_e \Delta z_p}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
S_w^{t+\Delta t} &= \frac{4W_{P_w}^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p + \\
& \left[fn_w^{t-\Delta t} - fn_w^t \right] + \left[fs_w^t - fs_w^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_w^{t-\Delta t} - fe_w^t \right] + \left[fw_w^t - fw_w^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_w^{t-\Delta t} - ft_w^t \right] + \left[fb_w^t - fb_w^{t-\Delta t} \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2m_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^t - U_{n_w w_w}^t}{dq_e} - 2m_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^t - U_{s_w w_w}^t}{dq_e} \right. \\
& \left. + m_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} - m_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} - U_{n_w w_w}^{t-\Delta t}}{dq_e} \right] dq_e \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[m_{n_w}^t \frac{r_{n_w}}{r_p} (W_{N_w}^t + W_{P_w}^t) + m_{s_w}^t \frac{r_{s_w}}{r_p} (W_{S_w}^t + W_{P_w}^t) + \right. \\
& \left. + m_{n_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{n_w}}{r_p} \frac{W_{N_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} - m_{s_w}^{t-\Delta t} \frac{r_{s_w}}{r_p} \frac{W_{S_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right] dq_e \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2m_{e_w}^t \left(\frac{U_{n_w e_w}^t + U_{s_w e_w}^t}{r_p} \right) - 2m_{w_w}^t \left(\frac{U_{n_w w_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{r_p} \right) \right. \\
& \left. m_{e_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) + m_{w_w}^{t-\Delta t} \left(\frac{U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{r_p} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(m_{t_w}^t \frac{V_{e_w t_w}^t - V_{w_w t_w}^t}{r_p dq_e} - m_{b_w}^t \frac{V_{e_w b_w}^t - V_{w_w b_w}^t}{r_p dq_e} \right) \right. \\
& \left. m_{t_w}^{t-\Delta t} \frac{V_{e_w t_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w t_w}^{t-\Delta t}}{r_p dq_e} + m_{b_w}^{t-\Delta t} \frac{V_{e_w b_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w b_w}^{t-\Delta t}}{r_p dq_e} \right] r_p \Delta r_p dq_e + \\
& \left(\frac{U_{n_w e_w}^t + U_{n_w w_w}^t + U_{s_w e_w}^t + U_{s_w w_w}^t}{2} W_{P_w}^t - \frac{U_{n_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{n_w w_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w e_w}^{t-\Delta t} + U_{s_w w_w}^{t-\Delta t}}{4} W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) \Delta r_p dq_e \Delta z_p + \\
& - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \sin q (T_E^t + T_P^t) r_p \Delta r_p dq_e \Delta z + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \sin q \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \Delta r_p dq_e \Delta z_p + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La source peut s'écrire :

$$S_w^{t+\Delta t} = b_w + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

Et l'équation de discrétisation serait:

$$\begin{aligned}
A_P W_{P_w}^{t+\Delta t} &= A_N W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W W_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T W_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B W_{B_w}^{t+\Delta t} + b_w + \\
& + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme $W_{P_w}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse W à l'interface e du volume typique ($W_e^{t+\Delta t}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $W_e^{t+\Delta t}$:

$$A_P W_e^{t+\Delta t} = A_N W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_S W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_E W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_W W_{W_w}^{t+\Delta t} + A_T W_{T_w}^{t+\Delta t} + A_B W_{B_w}^{t+\Delta t} + b_w + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.19)$$

3.7 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale

Cette équation exprimée en termes de contraintes visqueuses s'écrit:

$$\frac{\int U^*}{\int t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int r^*} (r^* U^* V^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int q} (W^* V^*) + \frac{\int}{\int z^*} (V^* V^*) = - \frac{\int P^*}{\int z^*} + \mathbf{Re}_0 \left[\frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int r^*} (r^* t_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int q} (t_{qz}^*) + \frac{\int}{\int z^*} (t_{zz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont:

$$t_{zr}^* = t_{rz}^* = m^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial r^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right], \quad t_{qz}^* = t_{zq}^* = m^* \left[\frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V^*}{\partial q} \right], \quad t_{zz}^* = 2 m^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*}$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (voir les figures (3.4.a) et (3.4.b)).

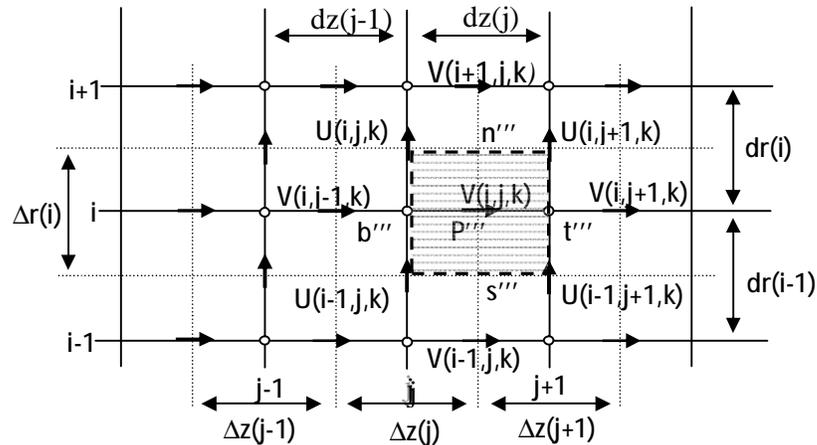


Figure 3.4.a : Les faces, dans le plan r-z, des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

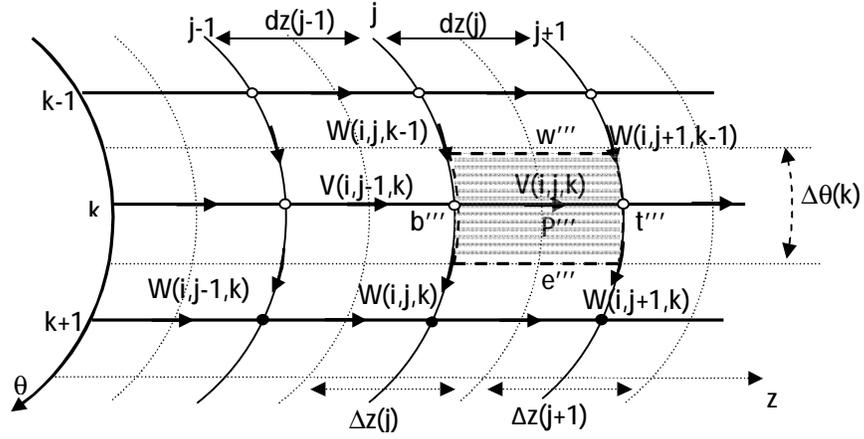


Figure 3.4.b : Les faces, dans le plan q - z , des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

- Terme transitoire:

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial V}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \left[\frac{3V_{p_v}^{t+\Delta t} - 4V_{p_v}^t + V_{p_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p dz$$

- Termes advectifs:

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz =$$

$$2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^t r dr dq dz - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz =$$

$$\left[2 \left(r_{n_v} U_{n_v}^t V_{n_v}^t - r_{s_v} U_{s_v}^t V_{s_v}^t \right) - \left(r_{n_v} U_{n_v}^{t-\Delta t} V_{n_v}^{t-\Delta t} - r_{s_v} U_{s_v}^{t-\Delta t} V_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta q_p dz_t$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WV) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WV) \Big|^t r dr dq dz -$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WV) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz = \left[2 \left(W_{e_v}^t V_{e_v}^t - W_{w_v}^t V_{w_v}^t \right) - \left(W_{e_v}^{t-\Delta t} V_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} V_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p dz_t$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (VV) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (VV) \Big|^t r dr dq dz - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (VV) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz$$

$$= \left[2 \left(V_{t_v}^t V_{t_v}^t - V_{b_v}^t V_{b_v}^t \right) - \left(V_{t_v}^{t-\Delta t} V_{t_v}^{t-\Delta t} - V_{b_v}^{t-\Delta t} V_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} r dr dq dz = (P_p^{t+\Delta t} - P_r^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

Termes diffusifs :

*Terme $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r t_{rz})$

$$\begin{aligned} & \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r t_{rz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} (r t_{rz}) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz = \\ & 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[r m^t \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr dq dz - \\ & \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial r} \left[r m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right] dr dq dz = \\ & \left\{ 2 \left[r m^t \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_v}^{n_v} - \left[r m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{s_v}^{n_v} \right\} \Delta q_p dz_t = \\ & \left[2 m_{n_v}^t r_{n_v} \left(\frac{U_{n_v t_v}^t - U_{n_v b_v}^t}{dz_t} \right) - 2 m_{s_v}^t r_{s_v} \left(\frac{U_{s_v t_v}^t - U_{s_v b_v}^t}{dz_t} \right) \right] \Delta q_p dz_t - \\ & \left[m_{n_v}^{t-\Delta t} r_{n_v} \left(\frac{U_{n_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{n_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) - m_{s_v}^{t-\Delta t} r_{s_v} \left(\frac{U_{s_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{s_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) \right] \Delta q_p dz_t + \\ & \left(2 m_{n_v}^t - m_{n_v}^{t-\Delta t} \right) \left[r_{n_v} \left(\frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) \right] \Delta q_p dz_t - \left(2 m_{s_v}^{t-\Delta t} - m_{s_v}^{t-\Delta t} \right) \left[r_{s_v} \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \Delta q_p dz_t \end{aligned}$$

Avec:

$$\mu_{n_v} = \frac{dr_n}{\frac{\Delta r_p}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta r_n}{\mu_{NT}}} + \frac{1}{\frac{\Delta r_p}{\mu_p} + \frac{\Delta r_n}{\mu_N}}, \quad \mu_{s_v} = \frac{dr_s}{\frac{\Delta r_p}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta r_s}{\mu_{ST}}} + \frac{dr_s}{\frac{\Delta r_p}{\mu_p} + \frac{\Delta r_s}{\mu_S}}$$

$$\mu_{t_v} = \mu_T = \mu(i, j+1, k), \quad \mu_p = \mu(i, j, k)$$

$$\mu_{NT} = \mu(i+1, j+1, k), \quad \mu_N = \mu(i+1, j, k)$$

$$\mu_{ST} = \mu(i-1, j+1, k), \quad \mu_S = \mu(i-1, j, k)$$

$$U_{n_v t_v} = U(i, j+1, k), \quad U_{s_v t_v} = U(i-1, j+1, k), \quad U_{n_v b_v} = U(i, j, k), \quad U_{s_v b_v} = U(i-1, j, k)$$

$$V_{N_v} = V(i+1, j, k) \quad , \quad V_{P_v} = V(i, j, k), \quad V_{S_v} = V(i-1, j, k)$$

$$r_{n_v} = r_c(i) \quad , \quad r_{s_v} = r_c(i-1), \quad dr_s = dr(i-1), \quad dr_n = dr(i)$$

$$\Delta r_N = \Delta r(i+1) \quad , \quad \Delta r_P = \Delta r(i) \quad , \quad \Delta r_S = \Delta r(i-1)$$

$$\text{*Terme } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qz})$$

$$\begin{aligned} & \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial q} (t_{qz}) \Big|^{t+\Delta t} dr dq dz = \\ & 2 \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial q} \left(m^t \left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right) dr dq dz - \\ & \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial q} \left(m^{t-\Delta t} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right) dr dq dz = \\ & \left\{ 2m^t \left[\left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^t + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_v}^{e_v} - m^{t-\Delta t} \left[\left(\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial q} \right)^{t+\Delta t} \right) \right]_{w_v}^{e_v} \right\} \Delta r_P dz_t = \\ & \left[2m_{e_v}^t \left(\frac{W_{e_v t_v}^t - W_{P_v}^t}{dz_t} \right) - 2m_{w_v}^t \left(\frac{W_{w_v t_v}^t - W_{w_v b_v}^t}{dz_t} \right) \right] \Delta r_P dz_t - \\ & \left[m_{e_v}^{t-\Delta t} \left(\frac{W_{e_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{P_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) - m_{w_v}^{t-\Delta t} \left(\frac{W_{w_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \right) \right] \Delta r_P dz_t \\ & \left(2m_{e_v}^t - m_{e_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{r_P dq_e} \right) \Delta r_P dz_t \Delta t - \left(2m_{w_v}^{t-\Delta t} - m_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{W_v}^{t+\Delta t}}{r_P dq_w} \right) \Delta r_P dz_t \end{aligned}$$

Avec:

$$\mu_{e_v} = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_{ET}}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E}} \quad \text{et} \quad \mu_{w_v} = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_{t_v}} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_{WT}}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W}}$$

$$\mu_{t_v} = \mu_T = \mu(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_P = \mu(i, j, k)$$

$$\mu_{ET} = \mu(i, j+1, k+1) \quad , \quad \mu_E = \mu(i, j, k+1)$$

$$\mu_{WT} = \mu(i, j+1, k-1) \quad , \quad \mu_W = \mu(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \quad , \quad r_P = r_P(i)$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad \text{et} \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$W_{e,t_v} = W(i, j+1, k) , \quad W_{w,t_v} = W(i, j+1, k-1) , \quad W_{w,b_v} = W(i, j, k-1) , \quad W_{P_v} = W(i, j, k)$$

$$V_{E_v} = V(i, j, k+1) \quad , \quad V_{P_v} = V(i, j, k) , \quad V_{W_v} = V(i, j, k-1)$$

$$\text{*Terme } \frac{\partial}{\partial Z} (t_{ZZ})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} (t_{zz}) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz &= \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(2m \frac{\partial V}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} dr dq dz = \\ & \left\{ 2 \left[2m^t \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right]_{b_v}^{t_v} - \left[2m^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} \right]_{b_v}^{t_v} \right\} r_P \Delta r_P \Delta q_P = \\ & \left[2(2m_{t_v}^t - m_{t_v}^{t-\Delta t}) \left(\frac{V_{T_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta z_T} \right) \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P - \left[2(2m_{b_v}^t - m_{b_v}^{t-\Delta t}) \left(\frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta z_P} \right) \right] r_P \Delta r_P \Delta q_P \end{aligned}$$

avec:

$$\mu_{t_v} = \mu_T = \mu(i, j+1, k) \quad , \quad m_{b_v} = m_P = m(i, j, k)$$

$$\Delta z_T = \Delta z(j+1) \quad \text{et} \quad \Delta z_P = \Delta z(j)$$

$$V_{T_v} = V(i, j+1, k) \quad , \quad V_{P_v} = V(i, j, k) \quad , \quad V_{B_v} = V(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t} + S_v^{t+\Delta t}$$

Avec:

$$\begin{aligned} A_N = dn &= \frac{1}{\text{Re}_0} (2m_{n_v}^t - m_{n_v}^{t-\Delta t}) \frac{r_{n_v} \Delta q_p dz_t}{dr_n} & A_S = ds &= \frac{1}{\text{Re}_0} (2m_{s_v}^{t-\Delta t} - m_{s_v}^{t-\Delta t}) \frac{r_{s_v} \Delta q_p dz_t}{dr_s} \\ A_E = de &= \frac{1}{\text{Re}_0} (2m_{e_v}^t - m_{e_v}^{t-\Delta t}) \frac{\Delta r_p dz_t}{r_p dq_e} & A_W = dw &= \frac{1}{\text{Re}_0} (2m_{w_v}^{t-\Delta t} - m_{w_v}^{t-\Delta t}) \frac{\Delta r_p dz_t}{r_p dq_w} \\ A_T = dt &= \frac{2}{\text{Re}_0} (2m_{t_v}^t - m_{t_v}^{t-\Delta t}) \frac{r_p \Delta r_p \Delta q_p}{\Delta z_T} & A_B = db &= \frac{2}{\text{Re}_0} (2m_{b_v}^t - m_{b_v}^{t-\Delta t}) \frac{r_p \Delta r_p \Delta q_p}{\Delta z_P} \\ A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
S_w^{t+\Delta t} &= \frac{4V_{P_v}^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p dz_t - \frac{V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p dz_t + \\
& \left[fn_v^{t-\Delta t} - fn_v^t \right] + \left[fs_v^t - fs_v^{t-\Delta t} \right] + \left[fe_v^{t-\Delta t} - fe_v^t \right] + \left[fw_v^t - fw_v^{t-\Delta t} \right] + \left[ft_v^{t-\Delta t} - ft_v^t \right] + \left[fb_v^t - fb_v^{t-\Delta t} \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2m_{n_v}^t r_{n_v} \frac{U_{n_v t_v}^t - U_{n_v b_v}^t}{dz_t} - 2m_{s_v}^t r_{s_v} \frac{U_{s_v t_v}^t - U_{s_v b_v}^t}{dz_t} - \\ & m_{n_v}^{t-\Delta t} r_{n_v} \frac{U_{n_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{n_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} + m_{s_v}^t r_{s_v} \frac{U_{s_v t_v}^{t-\Delta t} - U_{s_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \end{aligned} \right] \Delta q_p dz_t + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2m_{e_v}^t \frac{W_{e_v t_v}^t - W_{P_v}^t}{dz_t} - 2m_{w_v}^t \frac{W_{w_v t_v}^t - W_{w_v b_v}^t}{dz_t} - \\ & m_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{W_{w_v t_v}^t - W_{w_v b_v}^t}{dz_t} + m_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{W_{w_v t_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v b_v}^{t-\Delta t}}{dz_t} \end{aligned} \right] \Delta r_p dz_t + \\
& + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}$$

On peut regrouper la source sous la forme :

$$S_v^{t+\Delta t} = b_v + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait:

$$\begin{aligned}
A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} &= A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t} + b_v + \\
& + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Comme $V_{P_v}^{t+\Delta t}$ correspond à la vitesse V à l'interface t du volume typique ($V_t^{t+\Delta t}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_t^{t+\Delta t}$:

$$\begin{aligned}
A_P V_t^{t+\Delta t} &= A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_T V_{T_v}^{t+\Delta t} + A_B V_{B_v}^{t+\Delta t} + b_v + \\
& + \left(P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.8 Discrétisation de l'équation de l'énergie

Cette équation exprimée en termes de flux thermiques s'écrit:

$$\frac{\int T^*}{\int t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int q} (W^* T^*) + \frac{\int}{\int z^*} (V^* T^*) = G^* - \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\int}{\int q} (q_q^*) + \frac{\int}{\int z^*} (q_z^*) \right]$$

avec $G^* = \begin{cases} K_s^*/(\text{Re}_0 \text{Pr}_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$

et les densités de flux thermiques sont:

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation de l'énergie est discrétisée dans un volume de contrôle typique, donc :

- Terme transitoire:

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial T}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \left[\frac{3T_P^{t+\Delta t} - 4T_P^t + T_P^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p$$

- Termes advectifs:

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz &= 2 \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^t r dr dq dz - \\ \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz &= \left\{ 2 \left[(rUT) \Big|_n^t - (rUT) \Big|_s^t \right] - \left[(rUT) \Big|_n^{t-\Delta t} - (rUT) \Big|_s^{t-\Delta t} \right] \right\} \Delta q_p \Delta z_p = \\ \left\{ 2 \left[\left(r_n U_n \frac{T_N + T_P}{2} \right) - \left(r_s U_s \frac{T_P + T_S}{2} \right) \right]^t - \left[\left(r_n U_n \frac{T_N + T_P}{2} \right) - \left(r_s U_s \frac{T_P + T_S}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} \Delta q_p \Delta z_p &= \\ \left\{ r_n U_n^t (T_N^t + T_P^t) \right\} - \left\{ r_s U_s^t (T_P^t + T_S^t) \right\} \Delta q_p \Delta z_p - & \\ \left[\left(r_n U_n^{t-\Delta t} \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(r_s U_s^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta q_p \Delta z_p & \end{aligned}$$

Avec:

$$T_N = T(i+1, j, k) \quad \text{et} \quad T_P = T(i, j, k) \quad \text{et} \quad T_S = T(i-1, j, k)$$

$$U_n = U(i, j, k) \quad \text{et} \quad U_s = U(i-1, j, k)$$

$$r_n = r_c(i) \quad \text{et} \quad r_s = r_c(i-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WT) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = 2 \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WT) \Big|^t r dr dq dz - \\
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (WT) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz = \left\{ 2 \left[(WT) \Big|_e^t - (WT) \Big|_w^t \right] - \left[(WT) \Big|_e^{t-\Delta t} - (WT) \Big|_w^{t-\Delta t} \right] \right\} \Delta r_p \Delta z_p = \\
& \left\{ 2 \left[\left(W_e \frac{T_E + T_P}{2} \right) - \left(W_w \frac{T_P + T_W}{2} \right) \right]^t - \left[\left(W_e \frac{T_E + T_P}{2} \right) - \left(W_w \frac{T_P + T_W}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} \Delta r_p \Delta z_p = \\
& = \left\{ W_e^t (T_E^t + T_P^t) \right\} - \left\{ W_w^t (T_P^t + T_W^t) \right\} \Delta r_p \Delta z_p - \\
& \left[\left(W_e^{t-\Delta t} \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(W_w^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec:

$$T_E = T(i, j, k+1) \quad , \quad T_P = T(i, j, k) \quad \text{et} \quad T_W = T(i, j, k-1)$$

$$W_e = W(i, j, k) \quad \text{et} \quad W_w = W(i, j, k-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = \\
& 2 \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|^t r dr dq dz - \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|^{t-\Delta t} r dr dq dz = \\
& \left\{ 2 \left[(VT) \Big|_t^t - (VT) \Big|_b^t \right] - \left[(VT) \Big|_t^{t-\Delta t} - (VT) \Big|_b^{t-\Delta t} \right] \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p = \\
& \left\{ 2 \left[\left(V_t \frac{T_T + T_P}{2} \right) - \left(V_b \frac{T_P + T_B}{2} \right) \right]^t - \left[\left(V_t \frac{T_T + T_P}{2} \right) - \left(V_b \frac{T_P + T_B}{2} \right) \right]^{t-\Delta t} \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p = \\
& \left\{ V_t^t (T_T^t + T_P^t) \right\} - \left\{ V_b^t (T_P^t + T_B^t) \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p - \\
& \left[\left(V_t^{t-\Delta t} \frac{T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(V_b^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p
\end{aligned}$$

Avec:

$$T_T = T(i, j+1, k) \quad , \quad T_P = T(i, j, k) \quad , \quad T_B = T(i, j-1, k)$$

$$V_t = V(i, j, k) \quad \text{et} \quad V_b = V(i, j-1, k)$$

Termes diffusifs:

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) r dr dq dz = \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) dr dq dz = \\
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} \left(2r K^t \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz - \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} \left(r K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz = \\
& \left(2r K^t \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right)_s \Delta q \Delta z - \left(r K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right)_s \Delta q \Delta z = \left[(2K^t - K^{t-\Delta t}) \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|^{t+\Delta t} \right) \right]_s \Delta q \Delta z = \\
& \left\{ (2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}) \left(r_n \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - (2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}) \left(r_s \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right\} \Delta q_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec:

$$K_n = \frac{2dr_n}{\frac{\Delta r_p}{K_p} + \frac{\Delta r_N}{K_N}} \quad , \quad K_s = \frac{2dr_s}{\frac{\Delta r_p}{K_p} + \frac{\Delta r_S}{K_S}}$$

$$K_N = K(i+1, j, k) \quad , \quad K_p = K(i, j, k) \quad , \quad K_S = K(i-1, j, k)$$

$$dr_n = dr(i) \quad , \quad dr_s = dr(i-1)$$

$$\Delta r_N = \Delta r(i+1) \quad , \quad \Delta r_p = \Delta r(i) \quad , \quad \Delta r_S = \Delta r(i-1)$$

$$r_n = r_c(i) \quad \text{et} \quad r_s = r_c(i-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} (q_r) r dr dq dz = \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial q} (q_r) dr dq dz = \\
& \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial q} \left(2K^t \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz - \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial q} \left(K^{t-\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz = \\
& \left(2K^t \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} \right)_w \Delta r_p \Delta z_p - \left(K^{t-\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} \right)_w \Delta r_p \Delta z_p = \left[(2K^t - K^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} \right) \right]_w \Delta r_p \Delta z_p = \\
& \left\{ (2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r_p} \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dq_e} \right) - (2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}) \left(\frac{1}{r_p} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{dq_w} \right) \right\} \Delta r_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Avec:

$$K_e = \frac{2d\theta_e}{\frac{\Delta \theta_p}{K_p} + \frac{\Delta \theta_E}{K_E}} \quad , \quad K_w = \frac{2d\theta_w}{\frac{\Delta \theta_p}{K_p} + \frac{\Delta \theta_W}{K_W}}$$

$$\begin{aligned} K_E &= K(i, j, k+1), & K_w &= K(i, j, k-1), & \Delta\theta_E &= \Delta\theta(k+1), & \Delta\theta_p &= \Delta\theta(k), \\ \Delta\theta_w &= \Delta\theta(k-1), & d\theta_e &= d\theta(k) & \text{et} & & d\theta_w &= d\theta(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_w \int_s \int_b \frac{\partial}{\partial z} (q_z) r dr dq dz = \\ &\int_w \int_s \int_b \frac{\partial}{\partial z} \left(2K^t \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) dr dq dz - \int_w \int_s \int_b \frac{\partial}{\partial z} \left(K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) r dr dq dz = \\ &\left(2K^t \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right)_b^t r_p \Delta r_p \Delta q_p - \left(K^{t-\Delta t} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right)_b^t r_p \Delta r_p \Delta q_p = \left[2K^t - K^{t-\Delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} \right) \right]_b^t r_p \Delta r_p \Delta q_p = \\ &\left\{ \left(2K_t^t - K_t^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{T_T^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dz_t} \right) - \left(2K_b^t - K_b^{t-\Delta t} \right) \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right\} r_p \Delta r_p \Delta q_p \end{aligned}$$

Avec:

$$K_t = \frac{2 dz_t}{\frac{\Delta z_p}{K_p} + \frac{\Delta z_T}{K_T}}, \quad K_b = \frac{2 dz_b}{\frac{\Delta z_p}{K_p} + \frac{\Delta z_B}{K_B}}$$

$$K_T = K(i, j+1, k), \quad K_p = K(i, j, k), \quad K_B = K(i, j-1, k)$$

$$\Delta z_T = \Delta z(j+1), \quad \Delta z_p = \Delta z(j), \quad \Delta z_B = \Delta z(j-1)$$

$$dz_t = dz(j) \quad \text{et} \quad dz_b = dz(j-1)$$

Terme de production d'énergie :

$$\int_s \int_w \int_b G^* r dr dq dz = G^* \int_s \int_w \int_b r dr dq dz = G^* r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p$$

La production G^* est une constante ($G^* = \frac{K_s^*}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0}$).

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_T T_T^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S^{t+\Delta t} \quad (3.23)$$

Avec:

$$A_N = dn = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}) \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_n} \quad A_s = ds = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}) \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{dr_s}$$

$$A_E = de = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_e} \quad A_w = dw = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}) \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{r_p d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_t^t - K_t^{t-\Delta t}) \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_t} \quad A_B = db = \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} (2K_b^t - K_b^{t-\Delta t}) \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{dz_b}$$

$$A_p = A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t}{\Delta t} \quad (3.24)$$

$$S^{t+\Delta t} = \frac{4T_p^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p - \frac{T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p + G^* r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p$$

$$\left[\left(U_n^{t-\Delta t} \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - U_n^t (T_N^t + T_P^t) \right] r_n \Delta q_p \Delta z_p + \left[U_s^t (T_P^t + T_S^t) - \left(U_s^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_s \Delta q_p \Delta z_p +$$

$$\left[\left(W_e^{t-\Delta t} \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - W_e^t (T_E^t + T_P^t) \right] \Delta r_p \Delta z_p + \left[W_w^t (T_P^t + T_W^t) - \left(W_w^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \Delta z_p +$$

$$\left[\left(V_t^{t-\Delta t} \frac{T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - V_t^t (T_T^t + T_P^t) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p + \left[V_b^t (T_P^t + T_B^t) - \left(V_b^{t-\Delta t} \frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

$$S^{t+\Delta t} = \frac{4T_p^t}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p - \frac{T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p + G^* r_p \Delta r_p \Delta q_p \Delta z_p$$

$$(f_n^{t-\Delta t} - f_n^t) + (f_s^t - f_s^{t-\Delta t}) + (f_e^{t-\Delta t} - f_e^t) + (f_w^t - f_w^{t-\Delta t}) + (f_t^{t-\Delta t} - f_t^t) + (f_b^t - f_b^{t-\Delta t})$$

Où:

$$f_n^t = U_n^t (T_N^t + T_P^t) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p, \quad f_n^{t-\Delta t} = \frac{U_n^{t-\Delta t}}{2} (T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_n \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$f_s^t = U_s^t (T_S^t + T_P^t) r_s \Delta \theta_p \Delta z_p, \quad f_s^{t-\Delta t} = \frac{U_s^{t-\Delta t}}{2} (T_S^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_s \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$f_e^t = W_e^t (T_E^t + T_P^t) \Delta r_p \Delta z_p, \quad f_e^{t-\Delta t} = \frac{W_e^{t-\Delta t}}{2} (T_S^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$f_w^t = W_w^t (T_W^t + T_P^t) \Delta r_p \Delta z_p, \quad f_w^{t-\Delta t} = \frac{W_w^{t-\Delta t}}{2} (T_W^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$f_t^t = V_t^t (T_T^t + T_P^t) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p, \quad f_t^{t-\Delta t} = \frac{V_t^{t-\Delta t}}{2} (T_T^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_p \Delta \theta_p \Delta z_p$$

$$f_b^t = V_b^t (T_B^t + T_P^t) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad \text{et} \quad f_b^{t-\Delta t} = \frac{V_b^{t-\Delta t}}{2} (T_B^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}) r_p \Delta \theta_p \Delta z_p$$

3.9 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité est discrétisée dans un volume fini typique, donc :

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial z} \right] r dr dq dz = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = (r_n U_n^{t+\Delta t} - r_s U_s^{t+\Delta t}) \Delta q_p \Delta z_p$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial q} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial V}{\partial z} \Big|^{t+\Delta t} r dr dq dz = (V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p$$

Et on obtient l'équation de continuité discrétisée:

$$\begin{aligned} & (r_n U_n^{t+\Delta t} - r_s U_s^{t+\Delta t}) \Delta q_p \Delta z_p + (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p + \\ & (V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta q_p = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.10 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites sous la même forme générale de l'équation de discrétisation et les coefficients (A_I tel que $I=P,N,S,E,W,T,B$) des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants seront identifiés. Il y a lieu de signaler que puisque la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques, tandis que les autres conditions seront directement données.

3.10.1 A l'entrée du tube: $z=0$

Le domaine numérique correspondant est : $j=1$, $1 \leq i \leq IL$, $1 \leq k \leq KL$

Domaine fluide:

a) Pour la composante axiale, par exemple, $V(r^*, \theta, 0, t^*) = 2(1-4r^{*2})$ elle doit vérifier l'équation suivante

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t}(i, j, k) V_p^{t+\Delta t}(i, j, k) &= A_N^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i+1, j, k) + A_S^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i-1, j, k) + \\ & A_E^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i, j, k+1) + A_W^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i, j, k-1) + \\ & A_T^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i, j+1, k) + A_B^{t+\Delta t}(i, j, k) V^{t+\Delta t}(i, j-1, k) + \\ & S_v^{t+\Delta t}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Qui devra donc s'écrire:

$$1 \cdot V_p^{t+\Delta t} = 0 \cdot V_N^{t+\Delta t} + 0 \cdot V_S^{t+\Delta t} + 0 \cdot V_E^{t+\Delta t} + 0 \cdot V_W^{t+\Delta t} + 0 \cdot V_T^{t+\Delta t} + 2[1-4r_p^2(i)]$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont:

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t} &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t} &= A_S^{t+\Delta t} = A_E^{t+\Delta t} = A_T^{t+\Delta t} = A_B^{t+\Delta t} = 0 \\ S_v^{t+\Delta t} &= 2[1-4 * r_p^2(i)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

b) De même pour les autres variables U , W et la température T , qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned} A_p^{t+\Delta t} &= 1 \\ A_N^{t+\Delta t} &= A_S^{t+\Delta t} = A_E^{t+\Delta t} = A_T^{t+\Delta t} = A_B^{t+\Delta t} = 0 \\ S_u^{t+\Delta t} &= 0 \text{ (pour } U), \quad S_w^{t+\Delta t} = 0 \text{ (pour } W), \quad S^{t+\Delta t} = 0 \text{ (pour } T) \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.10.2 A la sortie du tube: $z=104.17$

Domaine fluide:

$$0 \leq r^* \leq 0.5 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

Ces conditions sont discrétisées par des différences régressives. On présente cette discrétisation pour la vitesse radiale qui est similaire à celles des autres composantes de la vitesse:

$$\frac{(U(i, JL, k) - U(i, JL-1, k))}{dz(JL-1)} = 0$$

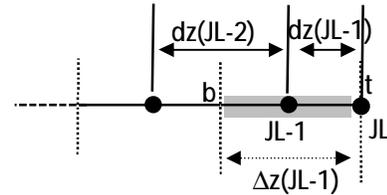
$$U(i, JL, k) = U(i, JL-1, k)$$

Si la dernière équation est identifiée à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

$$\begin{aligned} A_{p_u}^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 1, \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \\ A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0 \\ S_u^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

La condition sur la température: $\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=L/D_1} = 0$ se discrétise autour de $JL-1$ selon les différences centrées à l'ordre 2:

$$K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_t - K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b = 0 \quad \text{P}$$



$$K_t \frac{T(i, JL, k) - T(i, JL-1, k)}{dz(JL-1)} - K_b \frac{T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)}{dz(JL-2)} = 0$$

$$T(i, JL, k) = T(i, JL-1, k) + \frac{K_b}{K_t} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)]$$

Sachant que dans la partie solide la conductivité est constante $K = K_s = K_t = K_b$ donc

$$T(i, JL, k) = T(i, JL-1, k) + \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} [T(i, JL-1, k) - T(i, JL-2, k)]$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approché par l'approximation d'Adam-Bashforth et on en déduit les différents coefficients:

$$\begin{aligned}
 A_P^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 1, \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \\
 A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0 \\
 S^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 2 \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} \left[T^t(i, JL-1, k) - T^t(i, JL-2, k) \right] \\
 &\quad - \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} \left[T^{t-\Delta t}(i, JL-1, k) - T^{t-\Delta t}(i, JL-2, k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dans la partie fluide la conductivité en t est directement celle du nœud JL alors que celle à l'interface b elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds JL-1 et JL-2.

$$\begin{aligned}
 A_P^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= 1, \quad A_B^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 1 \\
 A_N^{t+\Delta t}(i, JL, k) &= A_S^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_E^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_W^{t+\Delta t}(i, JL, k) = A_T^{t+\Delta t}(i, JL, k) = 0 \\
 S^t(i, jL, k) &= 2 \frac{K_b^t}{K_t^t} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} \left[T^t(i, JL-1, k) - T^t(i, JL-2, k) \right] - \\
 &\quad \frac{K_b^{t-\Delta t}}{K_t^{t-\Delta t}} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} \left[T^{t-\Delta t}(i, JL-1, k) - T^{t-\Delta t}(i, JL-2, k) \right]
 \end{aligned}$$

3.10.3 A la paroi

La condition thermique à la paroi est:

$$-K_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r^*=R_o/D_i} = \frac{(h_r + h_c) D_i}{K_0} T \Big|_{r^*=R_o/D_i}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$\begin{aligned}
 A_P^{t+\Delta t}(IL, j, k) &= 1 + \frac{(h_r + h_c) D_i}{K_0} \frac{dr(IL-1)}{cof} \\
 cof &= 2K(IL-1, j, k)^t - K(IL-1, j, k)^{t-\Delta t} \\
 A_S^{t+\Delta t}(IL, j, k) &= 1 \\
 A_N^{t+\Delta t}(IL, j, k) &= A_E^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_W^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(IL, j, k) = A_B^{t+\Delta t}(IL, j, k) = 0 \\
 S^{t+\Delta t}(IL, j, k) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.10.4 Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

($i=1$, $1 \leq j \leq JL$, $1 \leq k \leq KL$)

Le problème traité n'est pas axisymétrique, les gradients des variables ne sont pas nuls, ils sont supposés constants à l'axe:

Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 104.17$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

La discrétisation spatiale est celle des différences progressives.

a) La condition sur la température est: $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$

Une intégration autour du noeud 2 donne:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_n - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s = 0$$

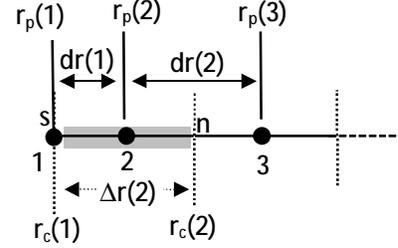
$$\frac{T(3, j, k) - T(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{T(2, j, k) - T(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$

Où $dr(2) = r_p(3) - r_p(2)$ et $dr(1) = r_p(2) - r_p(1)$

On peut donc en déduire la température au noeud 1 (sur l'axe) sous la forme:

$$T(1, j, k) = (1+F)T(2, j, k) - FT(3, j, k)$$

$$F = \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)} \tag{3.32}$$



Cette approximation est utilisée pour l'interpolation des températures à l'axe. Les températures interpolées seront imposées comme conditions aux limites à l'axe, mais avec la discrétisation d'Adam-Bashforth pour les termes à droite de l'équation (3.32). Les coefficients de l'équation de discrétisation de la condition à l'axe sont:

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = \tag{3.33}$$

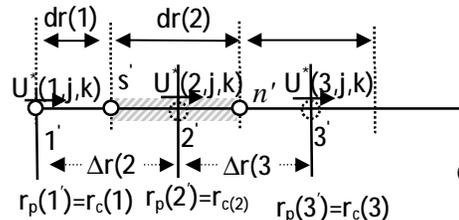
$$A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t} = 0$$

$$S^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)T'(2, j, k) - FT'(3, j, k) \right] - \left[(1+F)T^{t-\Delta t}(2, j, k) - FT^{t-\Delta t}(3, j, k) \right] \tag{3.34}$$

b) La condition à l'axe de la composante U est: $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$

Le maillage étant décalé suivant la direction radiale, l'intégration se fait entre les faces $s \equiv s_u$ et $n \equiv n_u$ du le volume de contrôle décalé :

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{n_u} - \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{s_u} = 0$$



$$\frac{U(3, j, k) - U(2, j, k)}{\Delta r(3)} - \frac{U(2, j, k) - U(1, j, k)}{\Delta r(2)} = 0$$

où $\Delta r(3) = r_c(3) - r_c(2)$ et $\Delta r(2) = r_c(2) - r_c(1)$

On obtient :

$$U(1, j, k) = (1+F)U(2, j, k) - FU(3, j, k) \quad \text{avec } F = \frac{r_c(2) - r_c(1)}{r_c(3) - r_c(2)} \quad (3.35)$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont:

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.36)$$

$$S_u^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)U'(2, j, k) - F U'(3, j, k) \right] - \left[(1+F)U'^{-\Delta t}(2, j, k) - F U'^{-\Delta t}(3, j, k) \right]$$

c) La condition à l'axe de la composante W est: $\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \right|_{r=0} = 0$

L'intégration de cette équation nous donne:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_n - \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_s = 0 \quad \text{P} \quad \frac{W(3, j, k) - W(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{W(2, j, k) - W(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$

On déduit, donc :

$$W(1, j, k) = (1+F)W(2, j, k) - F W(3, j, k) \quad (3.37)$$

$$F = \frac{r_p(2) - r_p(1)}{r_p(3) - r_p(2)}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont:

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.38)$$

$$S_w^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)W'(2, j, k) - F W'(3, j, k) \right] - \left[(1+F)W'^{-\Delta t}(2, j, k) - F W'^{-\Delta t}(3, j, k) \right]$$

d) La condition à l'axe de la composante V est: $\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \right|_{r=0} = 0$

L'équation de discrétisation est similaire à celle de la composante W, et ses coefficients sont:

$$A_p^{t+\Delta t}(1, j, k) = 1$$

$$A_N^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_S^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_E^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_W^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_T^{t+\Delta t}(1, j, k) = A_B^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.39)$$

$$S_v^{t+\Delta t}(1, j, k) = 2 \left[(1+F)V'(2, j, k) - F V'(3, j, k) \right] - \left[(1+F)V'^{-\Delta t}(2, j, k) - F V'^{-\Delta t}(3, j, k) \right]$$

3.11 Equations de la pression et de correction de la pression

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.14), (3.16) et (3.18) nécessite la connaissance du champ de pression qui apparaît dans les termes sources. Malheureusement, ce champ est généralement inconnu. Une équation de discrétisation de la pression, à chaque point du calcul, est nécessaire pour une estimation de la pression. Cette estimation doit être corrigée. L'utilisation des équations de discrétisation des vitesses (3.14), (3.16) et (3.18) dans l'équation de discrétisation de continuité permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la pression. On réécrit les équations de discrétisation des quantités de mouvement sous la forme suivante:

$$U_n^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{t+\Delta t} + b_u(i, j, k)}{A_p} + d_n [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] \quad \text{avec } d_n = \frac{r_n \Delta \theta_p \Delta z_p}{A_p} \quad (3.40)$$

$$W_e^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{t+\Delta t} + b_w}{A_p} + d_e [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] \quad \text{avec } d_e = \frac{\Delta r_p \Delta z_p}{A_p} \quad (3.41)$$

$$V_t^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{t+\Delta t} + b_v}{A_p} + d_t [P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}] \quad \text{avec } d_t = \frac{r_p \Delta r_p \Delta \theta_p}{A_p} \quad (3.42)$$

On définit à ce niveau des *pseudo vitesses* $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$, sans les termes de pression, telles que:

$$\hat{U}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} U_{nb}^{t+\Delta t} + b_u(i, j, k)}{A_p} \quad (3.43)$$

$$\hat{W}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} W_{nb}^{t+\Delta t} + b_w}{A_p} \quad (3.44)$$

$$\hat{V}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{nb}^{t+\Delta t} + b_v}{A_p} \quad (3.45)$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudo vitesses sous la forme suivante :

$$U^{t+\Delta t} = \hat{U}^{t+\Delta t} + d_n [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] \quad (3.46)$$

$$W^{t+\Delta t} = \hat{W}^{t+\Delta t} + d_e [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] \quad (3.47)$$

$$V^{t+\Delta t} = \hat{V}^{t+\Delta t} + d_t [P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}] \quad (3.48)$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que:

$$\begin{aligned} U_n^{t+\Delta t} &= \hat{U}_n^{t+\Delta t} + d_n (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) \\ U_s^{t+\Delta t} &= \hat{U}_s^{t+\Delta t} + d_s (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \\ W_e^{t+\Delta t} &= \hat{W}_e^{t+\Delta t} + d_e (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) \\ W_w^{t+\Delta t} &= \hat{W}_w^{t+\Delta t} + d_w (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \\ V_t^{t+\Delta t} &= \hat{V}_t^{t+\Delta t} + d_t (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) \\ V_b^{t+\Delta t} &= \hat{V}_b^{t+\Delta t} + d_b (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est:

$$(U_n^{t+\Delta t} r_n - U_s^{t+\Delta t} r_s) \Delta \theta_p \Delta z_p + (W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t}) \Delta r_p \Delta z_p + (V_t^{t+\Delta t} - V_b^{t+\Delta t}) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0 \quad (3.49)$$

et en remplaçant les vitesses par leurs expressions précédentes qui introduisent le champ de pression entre les faces du volume de contrôle, on obtient l'équation de pression discrétisée au noeud typique P, qui s'écrit dans sa forme finale:

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_T P_T^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S_p \quad (3.50)$$

$$A_p = A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B$$

$$A_N = r_n dr_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad A_S = r_s dr_s \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.51)$$

$$A_E = d \theta_e \Delta r_p \Delta z_p \quad A_W = d \theta_w \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.52)$$

$$A_T = r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_t \quad A_B = r_p \Delta r_p \Delta \theta_p dz_b \quad (3.53)$$

$$S_p^{t+\Delta t} = \left[r_s \hat{U}_s^{t+\Delta t} - r_n \hat{U}_n^{t+\Delta t} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p + \left[\hat{W}_w^{t+\Delta t} - \hat{W}_e^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta z_p + \left[\hat{V}_b^{t+\Delta t} - \hat{V}_t^{t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.54)$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. On peut comprendre qu'il faudrait des séquences successives d'estimation et de correction de la vitesse et de la pression pour aboutir à un champ de pression et un champ de vitesses corrects.

Supposons que:

$$P = P^* + P' \quad \text{et} \quad U = U^* + U', \quad V = V^* + V', \quad W = W^* + W'$$

U^* , V^* , W^* sont les vitesses estimées associées à la pression estimée P^*

U' , V' , W' sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression corrigée P' .

Les estimations des vitesses sont corrigées comme suit:

$$\begin{aligned} U_n^{t+\Delta t} &= U_n^{*t+\Delta t} + d_n (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) & U_s^{t+\Delta t} &= U_s^{*t+\Delta t} + d_s (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \\ W_e^{t+\Delta t} &= W_e^{*t+\Delta t} + d_e (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) & W_w^{t+\Delta t} &= W_w^{*t+\Delta t} + d_w (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

$$V_t^{t+\Delta t} = V_t^{*t+\Delta t} + d_t (P_P^{t+\Delta t} - P_T^{t+\Delta t}) \quad V_b^{t+\Delta t} = V_b^{*t+\Delta t} + d_b (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t})$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront l'obtention d'une équation de discrétisation de la correction de pression P' avec des vitesses estimées : U^* , V^* , W^* .

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_T P_T^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + S_p,$$

$$A_p = A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B$$

$$A_N = d_n r_n \Delta \theta_p \Delta z_p \quad A_S = d_s r_s \Delta \theta_p \Delta z_p \quad (3.55)$$

$$A_E = d_e \Delta r_p \Delta z_p \quad A_W = d_w \Delta r_p \Delta z_p \quad (3.56)$$

$$A_T = d_t r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad A_B = d_b r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.57)$$

$$S_p^{t+\Delta t} = [r_s U_s^{*t+\Delta t} - r_n U_n^{*t+\Delta t}] \Delta \theta_p \Delta z_p + [W_w^{*t+\Delta t} - W_e^{*t+\Delta t}] \Delta r_p \Delta z_p + [V_b^{*t+\Delta t} - V_t^{*t+\Delta t}] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \quad (3.58)$$

3.12 Algorithme de calcul SIMPLER

La résolution des systèmes d'équations de discrétisation des champs de vitesse, de pression et de la température suit l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) [patankar] qui est la forme révisée de la version SIMPLE [patankar]. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

1/ Initialisation (estimation) d'un champ de vitesse.

2/ -Calcul des coefficients des équations de discrétisation des équations des quantités de mouvement et des pseudovitesse \hat{U} , \hat{V} , \hat{W} .

3/ -Utilisation des pseudo-vitesse calculées pour calculer la source de l'équation de la pression .

- Calcul des coefficients de discrétisation de cette équation de pression.

- Résolution de l'équation de pression pour tirer la pression P .

4/ - Considérer cette solution P comme étant une pression estimée P^* et calculer les vitesses estimées U^* , V^* et W^* .

5/ - Utilisation de ces vitesses estimées U^* , V^* et W^* pour calculer la source de l'équation de correction de la pression.

- Résolution de l'équation de correction de la pression pour tirer la correction de pression P' .

6/ A l'aide de la pression corrigée P' corriger les vitesses par le biais des équations de correction des vitesses.

7/ Résolution de l'équation de discrétisation de l'énergie pour déterminer le champ des températures.

8/ Vérification de la convergence des calculs (l'atteinte du régime permanent). On arrête les calculs si ce régime est atteint et on stocke les résultats. Sinon, on revient à l'étape 2/ pour effectuer un autre cycle en démarrant avec les vitesses calculées (corrigées) comme une nouvelle estimation (ou initialisation). On continue cette procédure jusqu'à la convergence des calculs.

3.13 Techniques numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative.

Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$A_p(i, j, k)f_{i,j,k} = A_N(i, j, k)f_{i+1,j,k} + A_S(i, j, k)f_{i-1,j,k} + A_T(i, j, k)f_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)f_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)\Phi_{i,j,k+1} + A_W f_{i,j,k-1} + S_f(i, j, k) \quad (3.59)$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable f le long des deux autres directions z et q sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.59) est réécrite:

$$a_i f_i = b_i f_{i+1} + c_i f_{i-1} + d_i \quad (3.60)$$

$$a_i = A_p(i, j, k)$$

$$b_i = A_N(i, j, k)$$

$$c_i = A_S(i, j, k)$$

$$d_i = A_T(i, j, k)f_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)f_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)f_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)f_{i,j,k-1} + S_f(i, j, k) \quad (3.61)$$

Le système d'équation (3.60) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA.

Le balayage suivant la direction z est similaire à celui du balayage suivant la direction radiale; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique.

Chapitre 4

Résultats et discussion

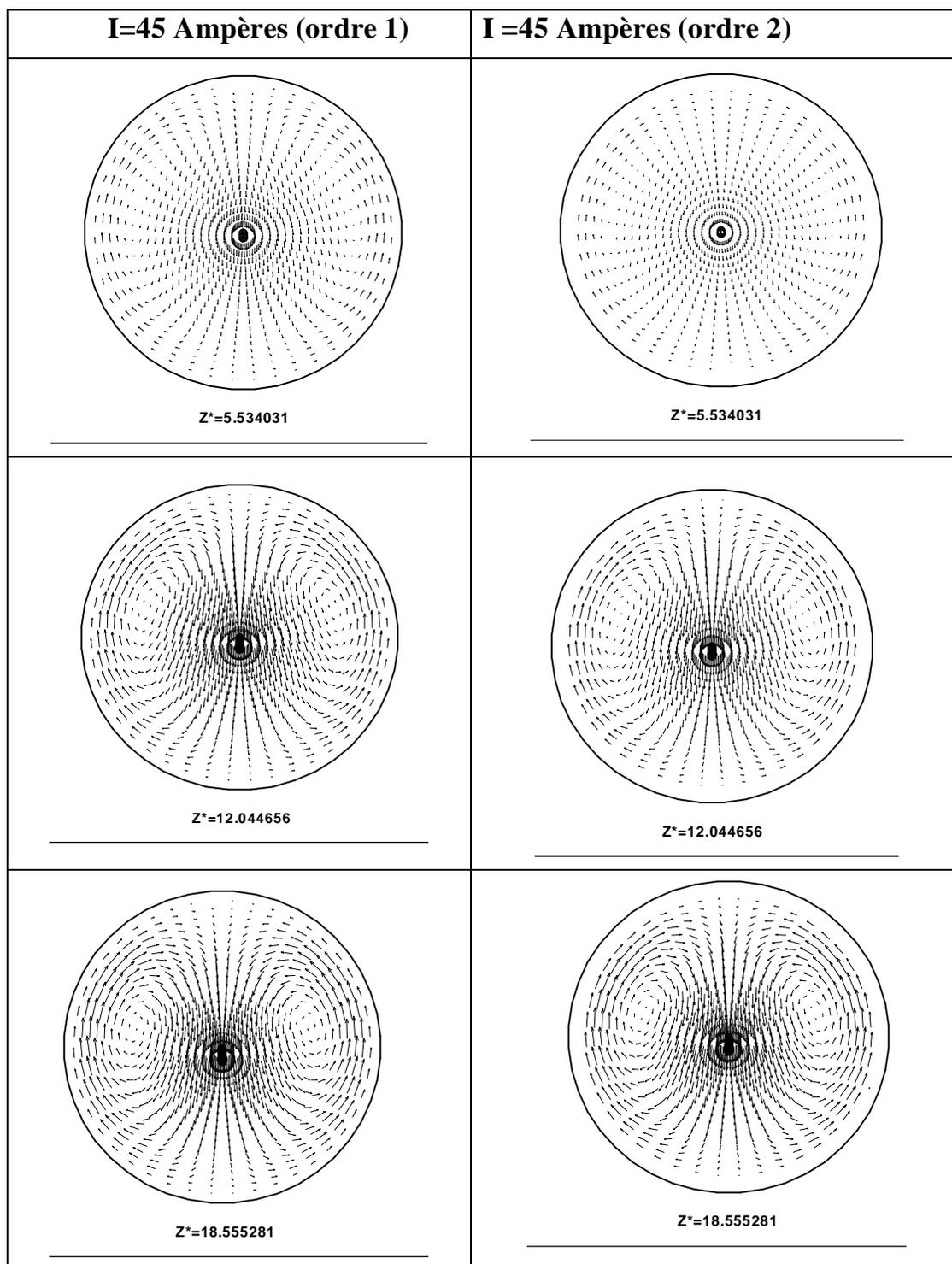
4.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter et discuter les résultats du transfert thermique par convection mixte, dans un conduit cylindrique horizontal en inconel de conductivité thermique $K_S = 20 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, la paroi de ce dernier est chauffée par une génération de chaleur interne produite par l'effet de Joule égale à $5.26 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ (pour une intensité du courant électrique égale à 45 Ampères), et $1.098 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3$ (pour une intensité du courant électrique égale à 65 Ampères). Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds $Re_0 = 606.85$ (pour une vitesse moyenne égale à $7.2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$), un nombre de Prandtl $Pr_0 = 8.082$ (celui de l'eau distillée a une température égale à 15°C), un nombre de Grashof $Gr = 2.44492 \cdot 10^5$ pour $I=45$ Ampères et $5.1 \cdot 10^5$ pour $I=65$ Ampères et un rapport de conductivité thermique (Solide/Fluide) $K_S^* = K_S / K_0 = 20/0.5893 = 33.94$.

4.2 L'écoulement secondaire

4.2.1 Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$)

Ce cas correspond à un nombre de Richardson égale à 0.6639. A l'entrée du conduit, le mouvement transversal du fluide dans le plan (r^*, q) est nul. Après, ce mouvement devient de plus en plus important à cause de l'effet de la convection naturelle. L'écoulement transversal sera expliqué comme suit: en une section donnée, le fluide chaud se déplace le long de la paroi chaude du bas du tube ($q = p$) vers le haut ($q = 0$) et redescend ensuite du haut vers le bas loin de la paroi du conduit. Deux cellules contrarotatives identiques sont créées par ce mouvement. Le plan verticale passant par les angles $(q = 0)$ et $(q = p)$ est un plan de symétrie. La figure 4.1 représente une comparaison des écoulements secondaires des résultats obtenus par les discrétisations spatiotemporelles d'ordre un et deux, à des positions axiales arbitrairement choisies. On note la similarité qualitative des résultats d'ordre un et deux. Quantitativement, il y'a des petites différences : par exemple pour l'ordre un, la vitesse azimutal atteint une valeur maximale $W^* = 3.57122 \cdot 10^{-2}$ à $Z^* = 20.50846$, $r^* = 0.43750$ et $q = 4.92659$, alors que celle obtenue avec l'ordre deux est $W^* = 3.5279 \cdot 10^{-2}$ à $Z^* = 23.11271$, $r^* = 0.43750$ et $q = 4.783789$.



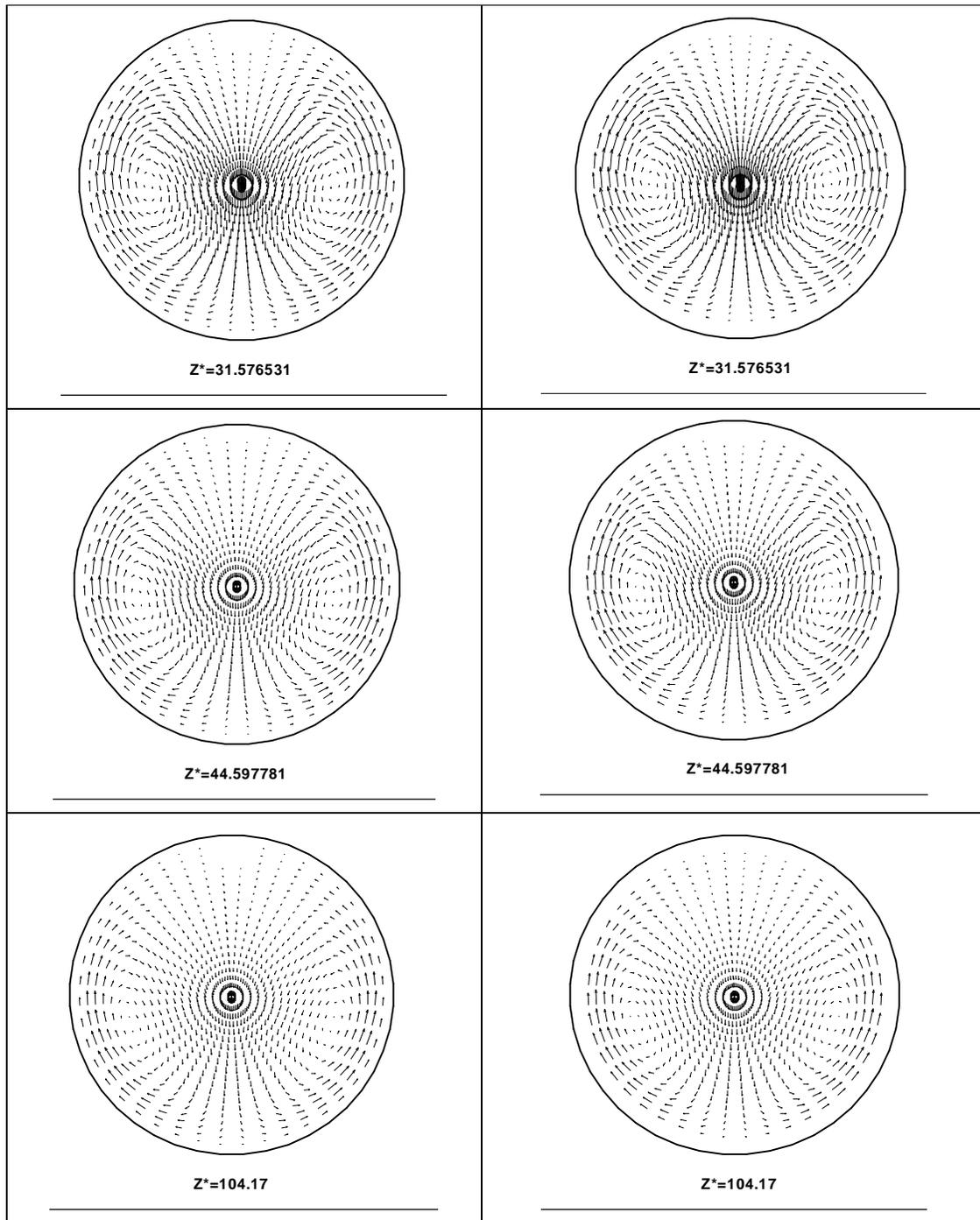
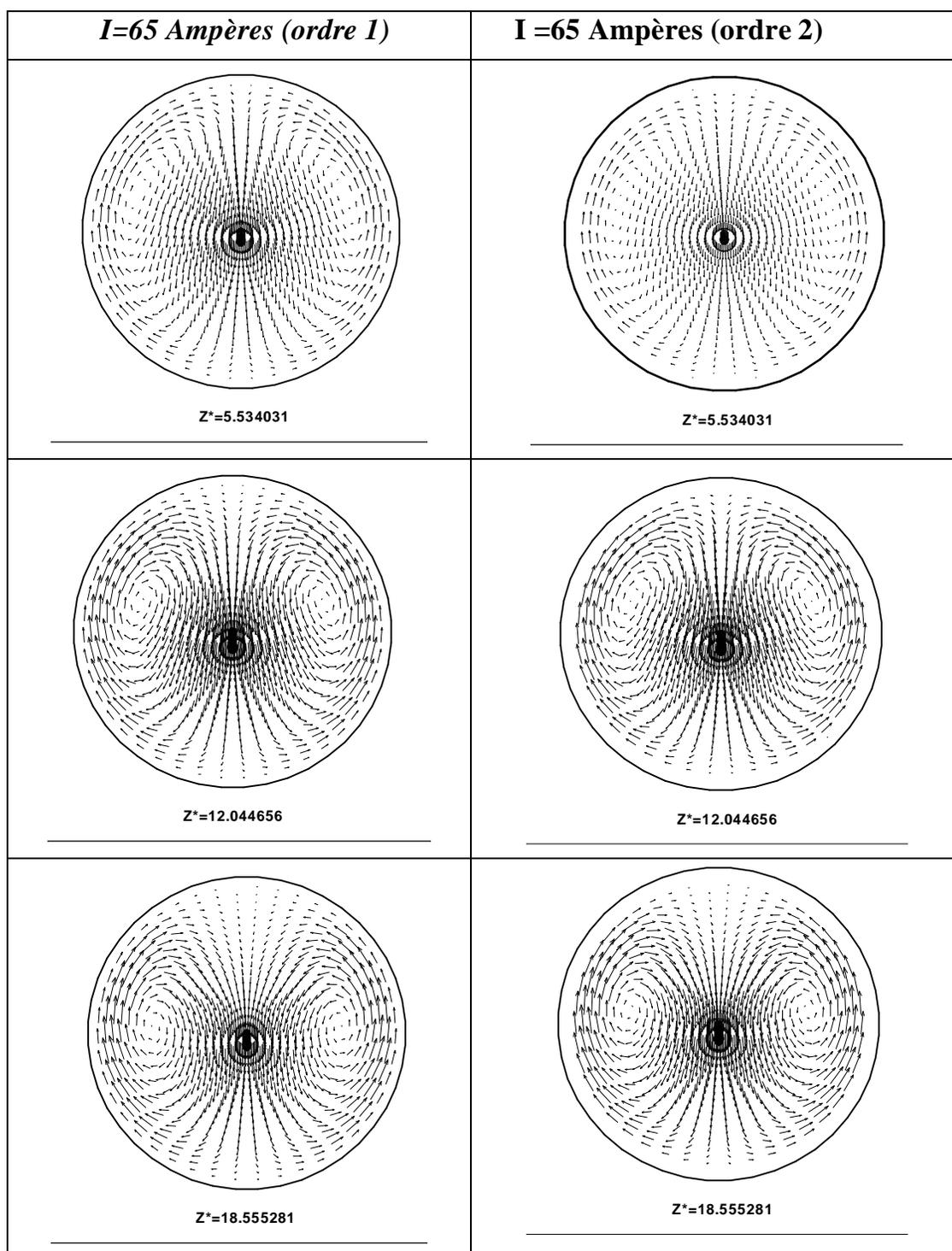


Figure 4.1: Evolution axiale de l'écoulement secondaire.

4.2.2 Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000.0$)

Ce cas correspond à un nombre de Richardson égale à 1.38487. L'écoulement secondaire (transversal) de ce cas est plus important que celui du cas précédent, cela est due à l'augmentation de la poussée thermique qui induit ce mouvement. Comme le cas précédent, le fluide chaud se déplace le long de la paroi chaude du bas du tube ($q = p$) vers le haut ($q = 0$) et redescend ensuite du haut vers le bas loin de la paroi du conduit, mais avec une vitesse relativement plus grande. Le plan verticale passant par les angles ($q = 0$) et ($q = p$) est toujours un plan de symétrie. La figure 4.2 représente une comparaison des écoulements secondaires des résultats obtenus par les discrétisations spatiotemporelles d'ordre un et deux, à des positions axiales arbitrairement choisies. Qualitativement on note la similarité des résultats d'ordre un et deux. Quantitativement, il y'a des petites différences : par exemple à $Z^* = 13.997840$, $r^* = 0.43750$ et $q = 4.92659$, la vitesse azimuthal maximale, obtenue avec l'ordre un est : $W^* = 4.8657 \cdot 10^{-2}$, alors que celle obtenue avec l'ordre deux est : $W^* = 4.9529 \cdot 10^{-2}$ à $Z^* = 17.253150$, $r^* = 0.43750$ et $q = 4.783789$.



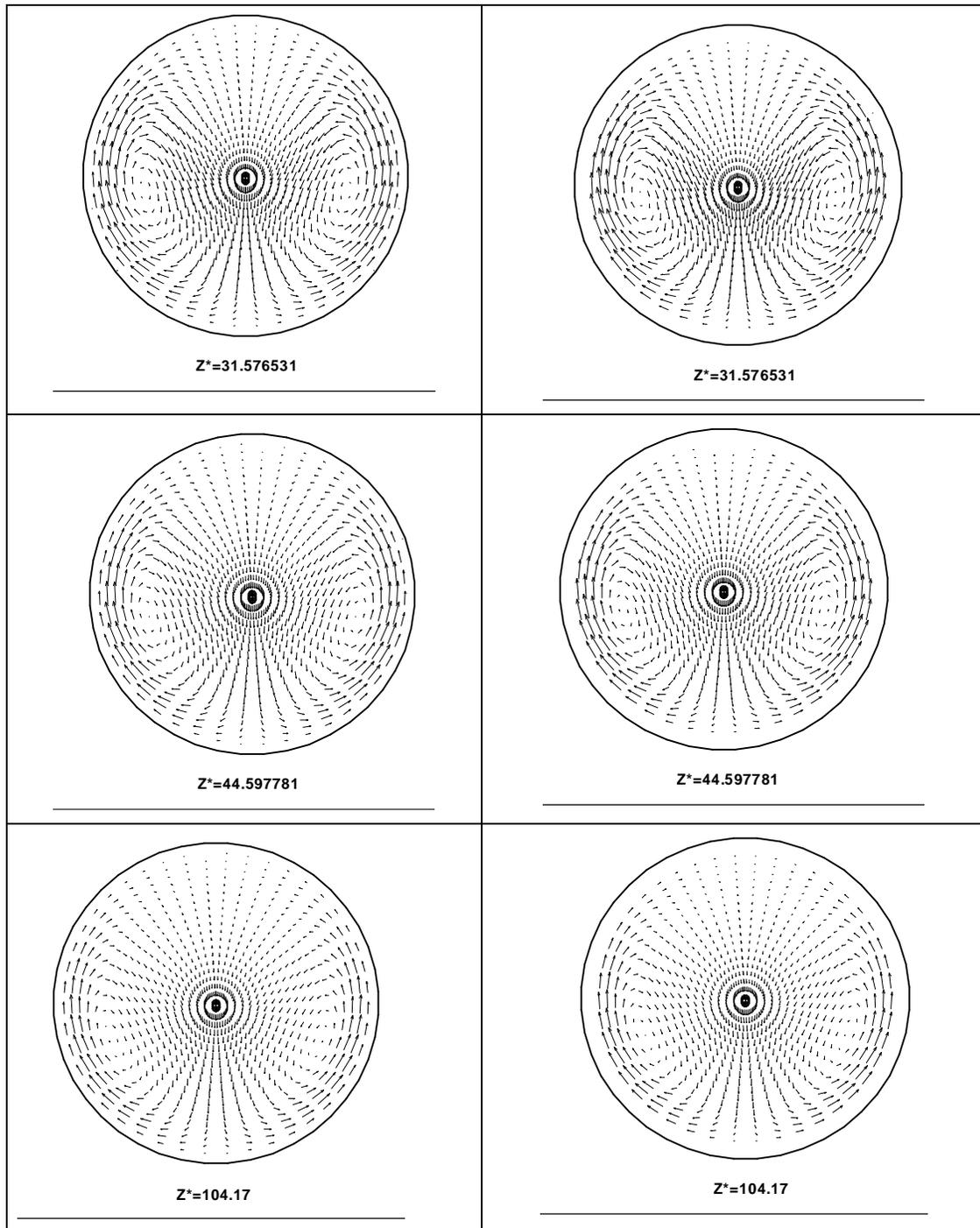


Figure 4.2: Evolution axiale de l'écoulement secondaire.

4.3 L'écoulement axial

4.3.1 Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$)

A l'entrée $Z^* = 0$, l'écoulement est de type Poiseuille, la vitesse axiale maximale dans cette section est au centre du conduit : $V^* = 2$ à $r^* = 0$. En s'éloignant de l'entrée, l'écoulement axial est influencé par l'écoulement secondaire du fluide dans les plans (r^*, q) et par la variation de la viscosité en fonction de la température. En une section droite donnée, la vitesse axiale maximale se localise sur le plan vertical qui passe par les angles $(q = 0)$ et $(q = p)$; mais elle est déplacée vers le bas du conduit par l'effet de l'écoulement secondaire descendant. Autrement dit, le maximum de la vitesse axiale ne se localise pas à l'axe comme dans le cas de la convection forcée. Un autre effet qui contrôle la distribution de la vitesse axiale est la viscosité variable. Dans notre étude, la viscosité de l'eau est une fonction de la température: elle décroît avec l'augmentation de la température. En s'éloignant de l'entrée, en une section droite donnée, en haut de la section droite, la température est relativement plus élevée et donc le fluide est moins visqueux permettant l'augmentation du niveau de la vitesse axiale, dans cette zone. En bas de la même section, la température est relativement moins élevée et le fluide est relativement plus visqueux (que celui en haut de la section), et ceci a tendance à réduire le niveau de la vitesse axiale. Notant, qu'en une section droite donnée, l'augmentation du niveau de la vitesse axiale dans une partie nécessite la diminution de ce niveau dans une partie, pour assurer la constance du débit axial exigée par l'équation de continuité. Donc, en une section droite donnée, l'écoulement secondaire a tendance à déplacer le niveau élevé de la vitesse axiale vers le bas de la section; mais la viscosité variable a tendance à déplacer ce niveau vers le haut de la même section. Cette description est confirmée par nos résultats et dans ce qui suit nous donnons des exemples.

La figure 4.3 illustre la comparaison des distributions de la vitesse axiale obtenues avec les discrétisations numériques d'ordre un et d'ordre deux, à des positions axiales arbitrairement choisies. Entre l'entrée et $Z^* = 25.0659$, la position radiale de la vitesse axiale maximale se déplace rapidement vers le bas, car l'écoulement secondaire est très important dans cet intervalle: à $Z^* = 25.0659$, le maximum $V^* = 1.8625$ est situé à $r^* = 0.1625$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8553$ à $r^* = 0.1625$ et $q = p$ pour l'ordre deux. Dans cette zone axiale

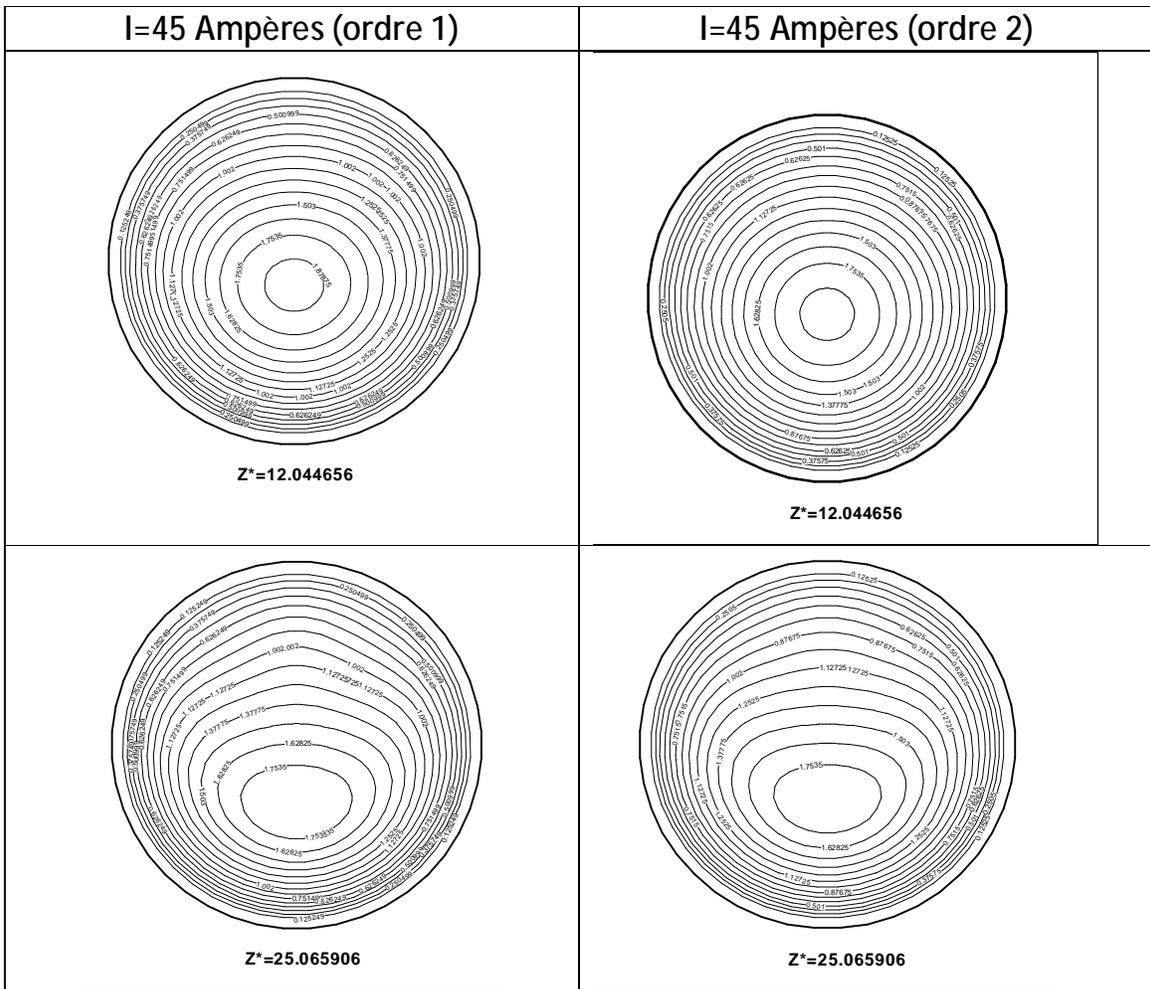
(entre l'entrée et $Z^* = 25.0659$) l'effet de l'écoulement secondaire domine celui de la viscosité variable.

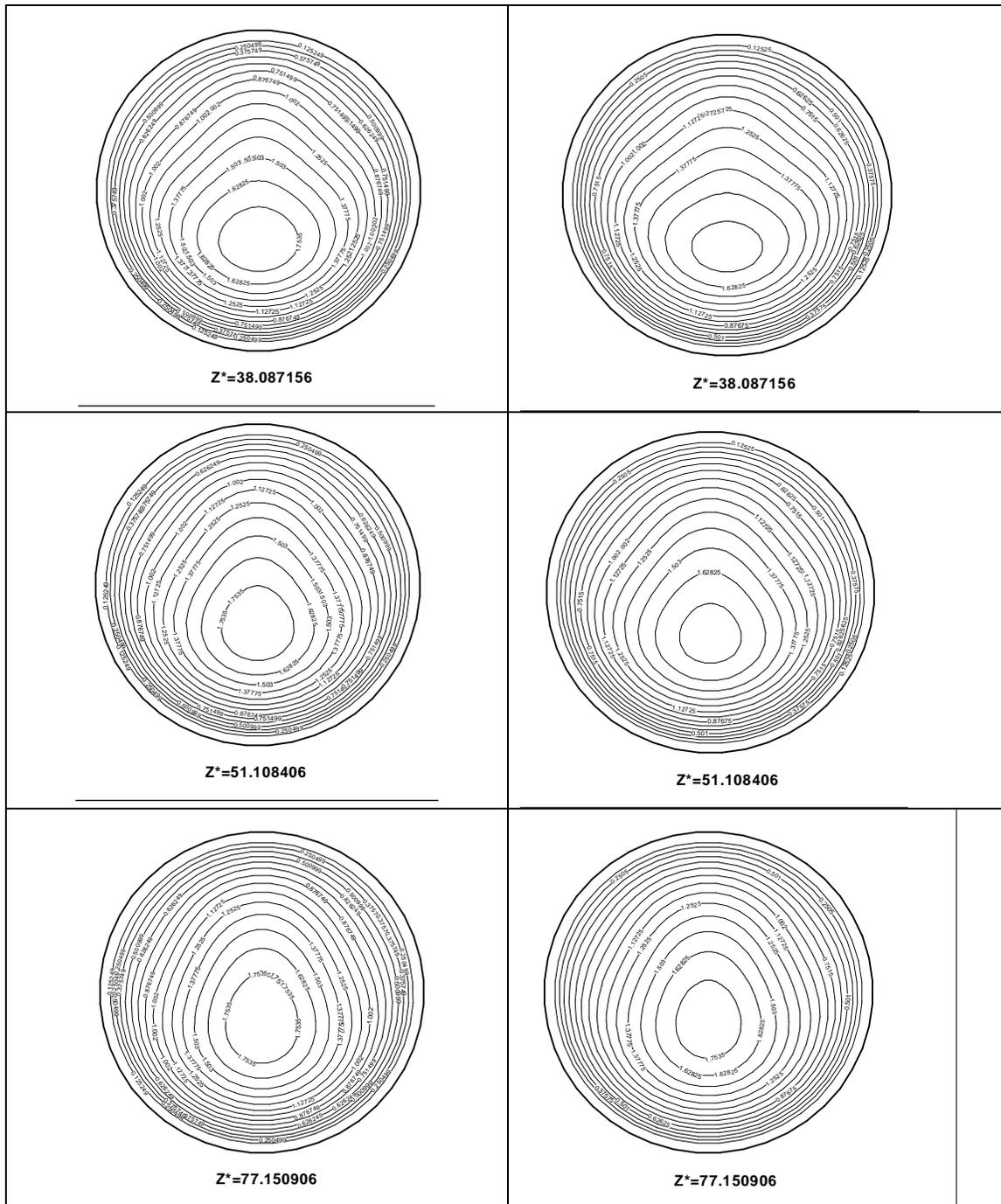
Entre $Z^* = 25.0659$ et la sortie ($Z^* = 104.17$), l'écoulement secondaire est relativement moins intense et l'effet de la viscosité variable prend de l'ampleur, ce qui explique le déplacement graduel axial du maximum de la vitesse axiale vers le haut:

A $Z^* = 51.1084$, le maximum $V^* = 1.8424$ est situé à $r^* = 0.1375$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8141$ à $r^* = 0.1375$ et $q = p$ pour l'ordre deux.

A $Z^* = 104.17$, le maximum $V^* = 1.8787$ est situé à $r^* = 0.0875$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8539$ à $r^* = 0.0875$ et $q = p$ pour l'ordre deux.

On note que le long du conduit, la vitesse axiale maximale obtenue avec l'ordre un est relativement plus élevée que celle obtenue avec l'ordre deux.





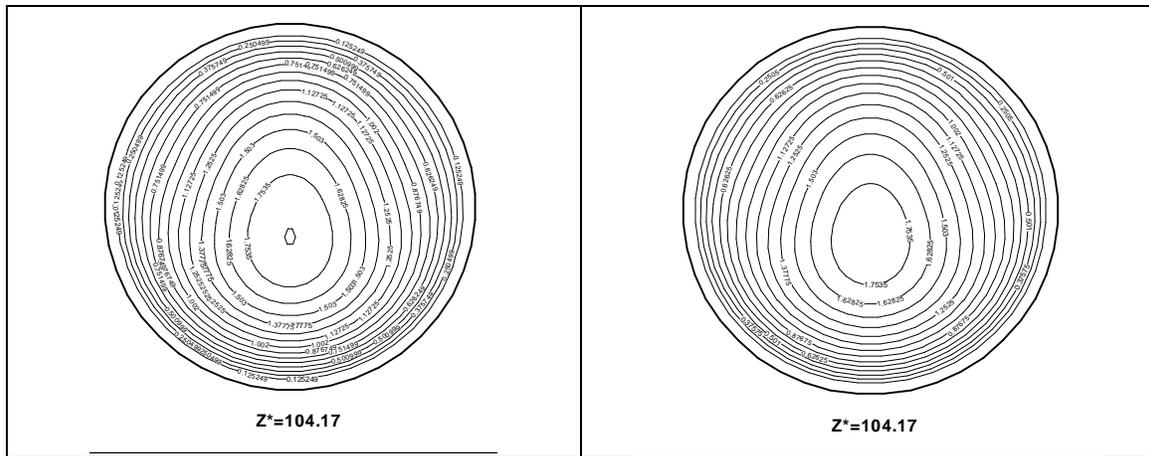


Figure 4.3: Comparaison des vitesses axiales.

4.3.2 Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000$)

La description faite pour la distribution de la vitesse axiale, du cas avec l'intensité $I=45$ Ampères, est (qualitativement) valable pour le cas avec l'intensité $I=65$ Ampères. La figure 4.4 représente une comparaison des distributions de la vitesse axiale obtenues avec les discrétisations spatiotemporelles d'ordre un et deux, à des positions axiale arbitrairement choisies.

Entre l'entrée et $Z^* = 25.0659$, la position radiale de la vitesse axiale maximale se déplace rapidement vers le bas, sous l'effet dominant de l'écoulement secondaire axialement plus intense.

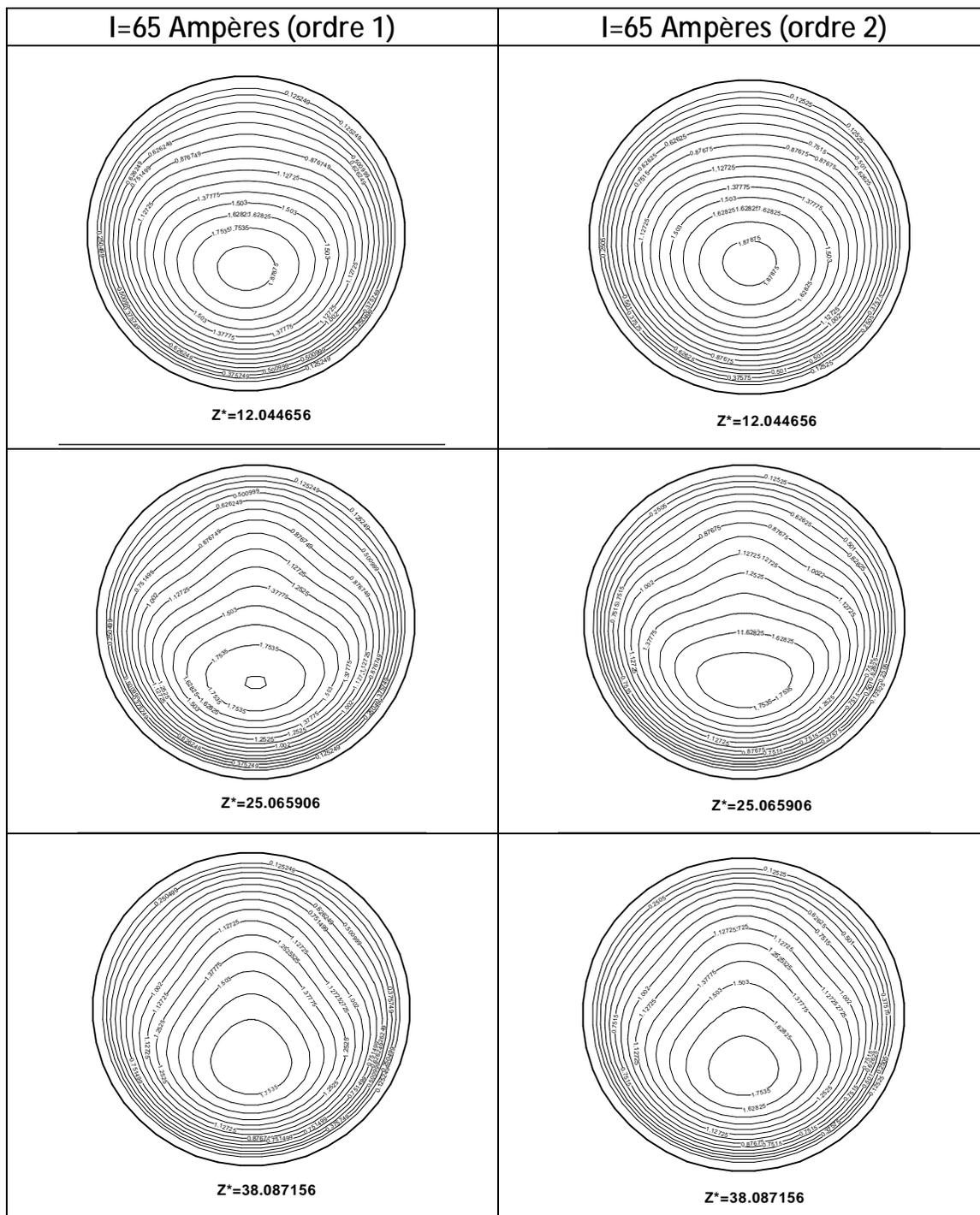
A $Z^* = 25.0659$, le maximum $V^* = 1.8832$ est situé à $r^* = 0.2125$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8534$ à $r^* = 0.2125$ et $q = p$ pour l'ordre deux.

Entre $Z^* = 25.0659$ et la sortie ($Z^* = 104.17$), l'écoulement secondaire est moins intense et l'effet visqueux devient apparent.

A $Z^* = 51.1084$, le maximum $V^* = 1.8774$ est situé à $r^* = 0.1625$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8379$ à $r^* = 0.1625$ et $q = p$ pour l'ordre deux.

A $Z^* = 104.17$, le maximum $V^* = 1.8991$ est situé à $r^* = 0.1125$ et $q = p$ pour l'ordre un, et $V^* = 1.8698$ à $r^* = 0.0875$ et $q = p$ pour l'ordre deux.

On note aussi, que le long du conduit, la vitesse axiale maximale obtenue avec l'ordre un est toujours relativement plus élevée que celle obtenue avec l'ordre deux.



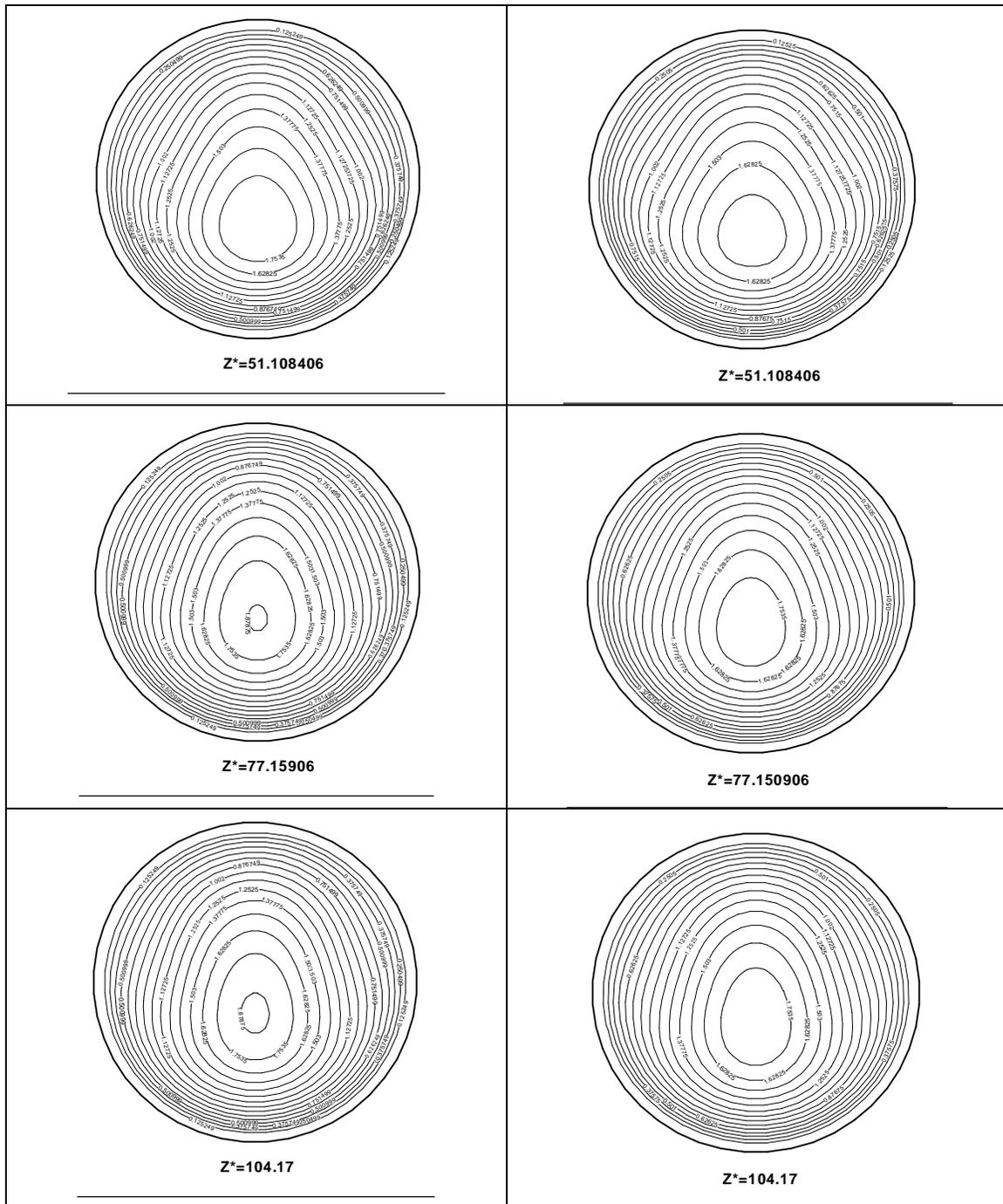


Figure 4.4: Comparaison des vitesses axiales.

4.4 Le champ des températures

4.4.1 Le cas de l'intensité $I = 45$ Ampères ($Gr = 244492.5$)

La distribution de la température du fluide en l'absence de l'écoulement transversal, (cas de la convection forcée) est axisymétrique. Pour une section donnée, les isothermes sont des cercles concentriques avec une température maximale sur la paroi et un minimale sur l'axe du cylindre. La température de la paroi du conduit est uniforme pour chaque section. Dans notre étude (cas de la convection mixte), l'écoulement secondaire, induit par la poussée thermique, affecte la distribution polaire de la température du fluide et de la paroi du conduit, en lui donnant une variation angulaire considérable. Cette variation est expliquée comme suit: le fluide chaud près de la paroi du conduit se déplace vers le haut sous l'effet de l'écoulement transversal, le fluide relativement froid redescend vers le bas au milieu du conduit, parallèlement à l'axe vertical de symétrie. Ce mouvement de l'écoulement secondaire est la cause de variation azimutale de la température, en une section droite donnée. Cette variation azimutale de la température affecte la distribution de la conductivité thermique variable dans notre étude (la conductivité thermique croît avec la température). Aussi, comme décrit précédemment, l'écoulement secondaire (combiné à l'effet de la viscosité variable) modifie l'écoulement principal qui contrôle la distribution axiale de la température. Ces effets combinés nous donne une distribution spatiale complexe de la température. Dans la figure 4.5, on compare les températures moyennes, des sections droites du conduit, obtenues avec l'ordre un et deux. Il est clair que les résultats des deux ordres sont difficiles à distinguer graphiquement (ils sont confondus). La température axiale moyenne du fluide augmente d'une façon linéaire monotone depuis l'entrée jusqu'à la sortie, comme l'exige le chauffage continu du fluide le long du tube.

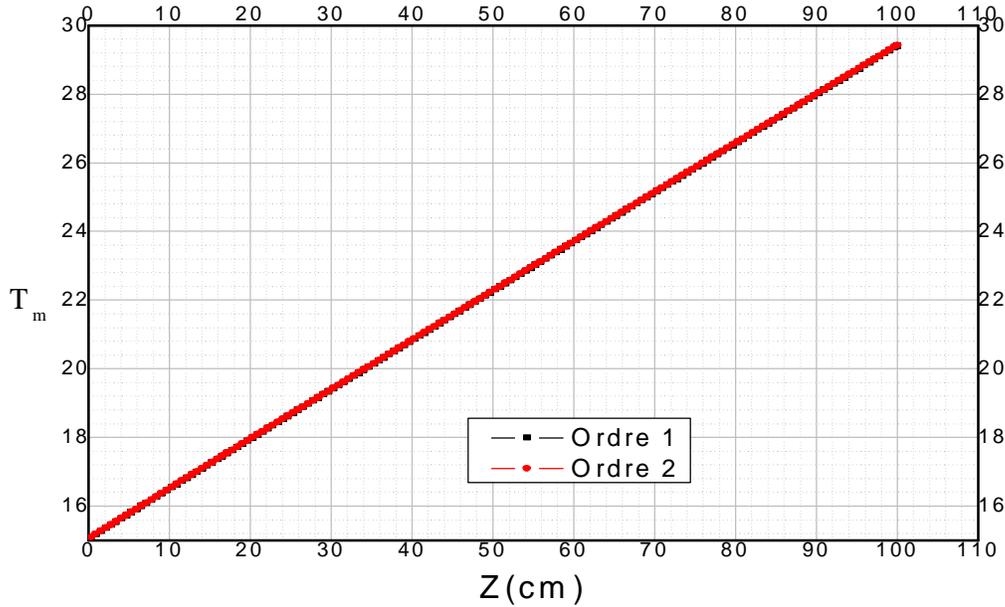


Figure 4.5: Evolution axiale de la température moyenne dimensionnelle du fluide (Cas de l'intensité $I=45$ Ampères).

Dans la figure 4.6, nous présentons les variations axiales de la température de la paroi, en haut et en bas du conduit (à $r^* = 0.5208$ et $q = 0$ et p), obtenues avec l'ordre un et l'ordre deux. La température et la position axiale sont présentées sous formes dimensionnelles. On note que pour $q = 0$, les résultats obtenus avec l'ordre un sont proches de ceux obtenus avec l'ordre deux. Ce pendant pour $q = p$, les températures obtenues avec l'ordre deux sont plus élevées que celles obtenues avec l'ordre un; cependant l'écart maximal de température ne dépasse pas 3°C .

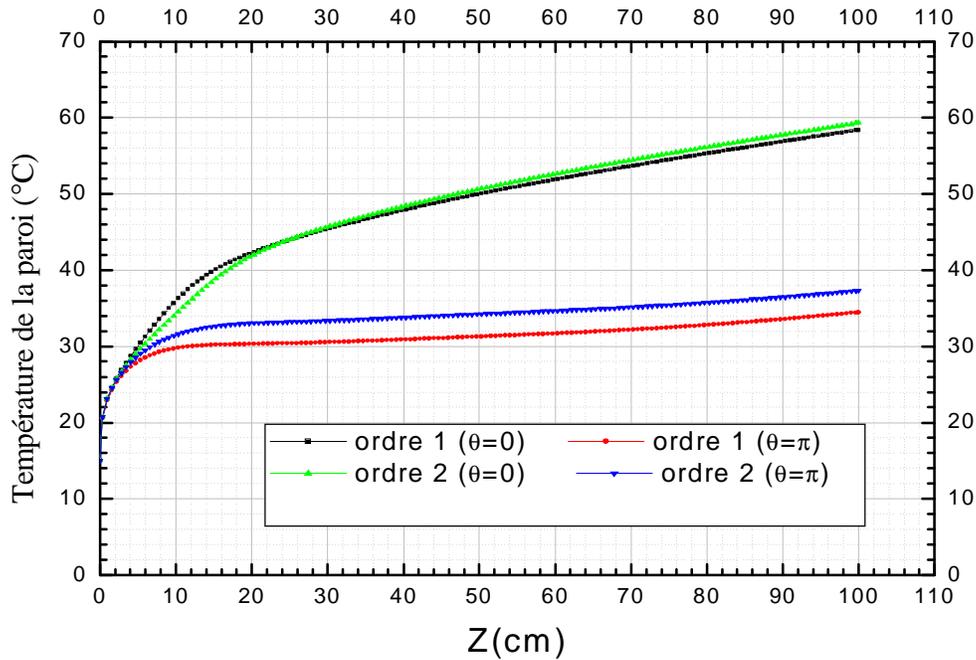
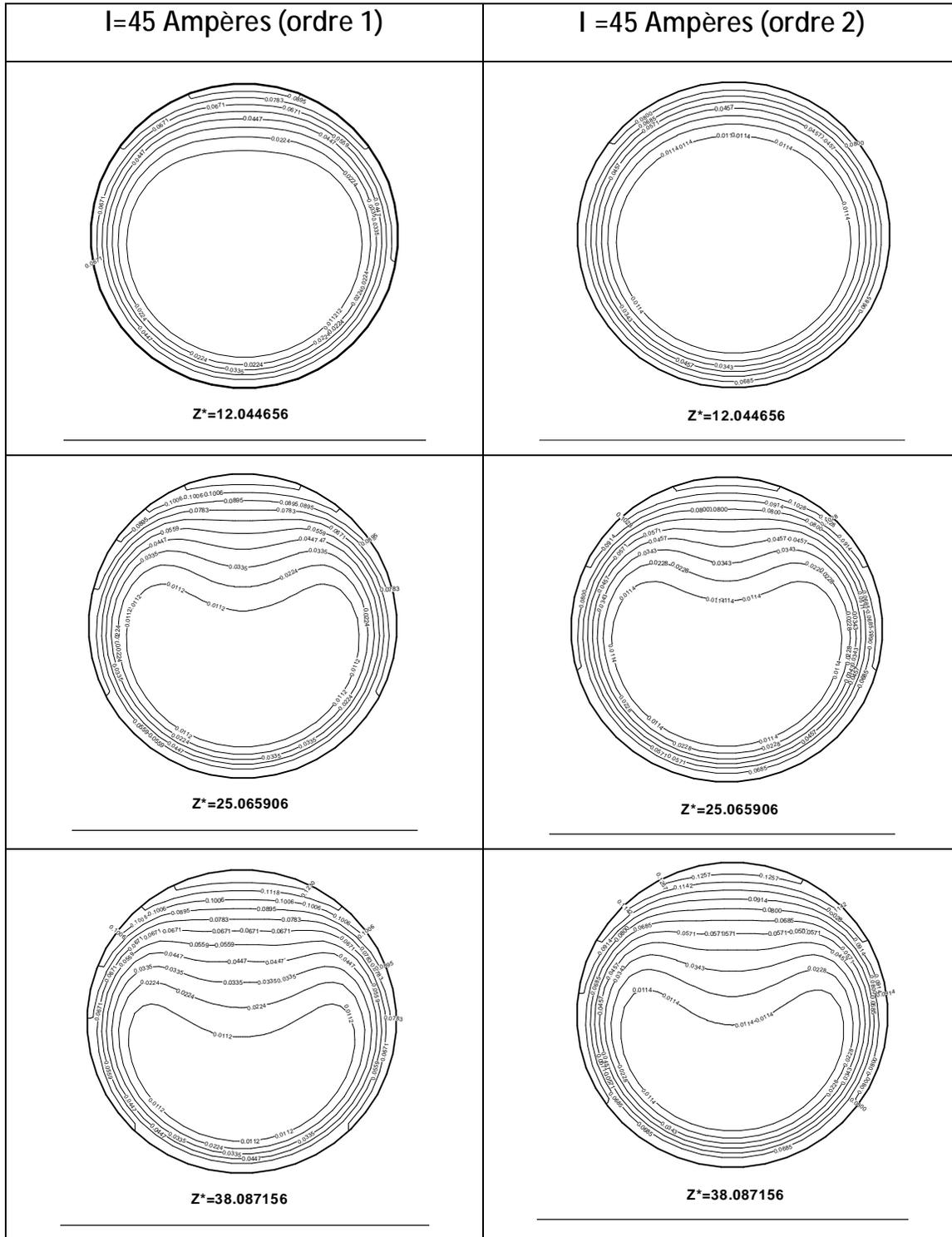


Figure 4.6: Variation axiale de la température de la paroi du conduit.

La figure 4.7 illustre la comparaison des isothermes obtenues avec les discrétisations d'ordre un et d'ordre deux, à des positions axiale arbitrairement choisies. La température maximale est en haut du conduit, à $q = 0$, $r^* = 0.5$, la température minimale est dans la partie inférieure du conduit à $q = p$. A $Z^* = 12.04465$, la température minimale est située à $r^* = 0.1375$. Le minimum se déplace, pour l'ordre un, à $r^* = 0.2625$, $r^* = 0.3125$, $r^* = 0.3125$, $r^* = 0.3375$ et $r^* = 0.3625$, pour les positions axiales $Z^* = 25.0659$, $Z^* = 38.0871$, $Z^* = 51.1084$, $Z^* = 77.1509$ et $Z^* = 104.17$, respectivement. Pour l'ordre deux, à $Z^* = 12.04465$, la température minimale est située à $r^* = 0.1125$. Le minimum se déplace à $r^* = 0.2125$, $r^* = 0.2625$, $r^* = 0.3125$, $r^* = 0.3375$ et $r^* = 0.3375$, pour les positions axiales $Z^* = 25.0659$, $Z^* = 38.0871$, $Z^* = 51.1084$, $Z^* = 77.1509$ et $Z^* = 104.17$, respectivement. Cette distribution de la température est expliquée par le fait que l'écoulement secondaire déplace le fluide chaud vers le haut du conduit; aussi le niveau de la vitesse axiale en bas du conduit est relativement plus grand ce qui augmente le brassage axial en bas du conduit. Ceci

explique le fait qu'en une section droite donnée, le niveau de la température en bas du conduit est relativement inférieur à celui en haut du conduit.



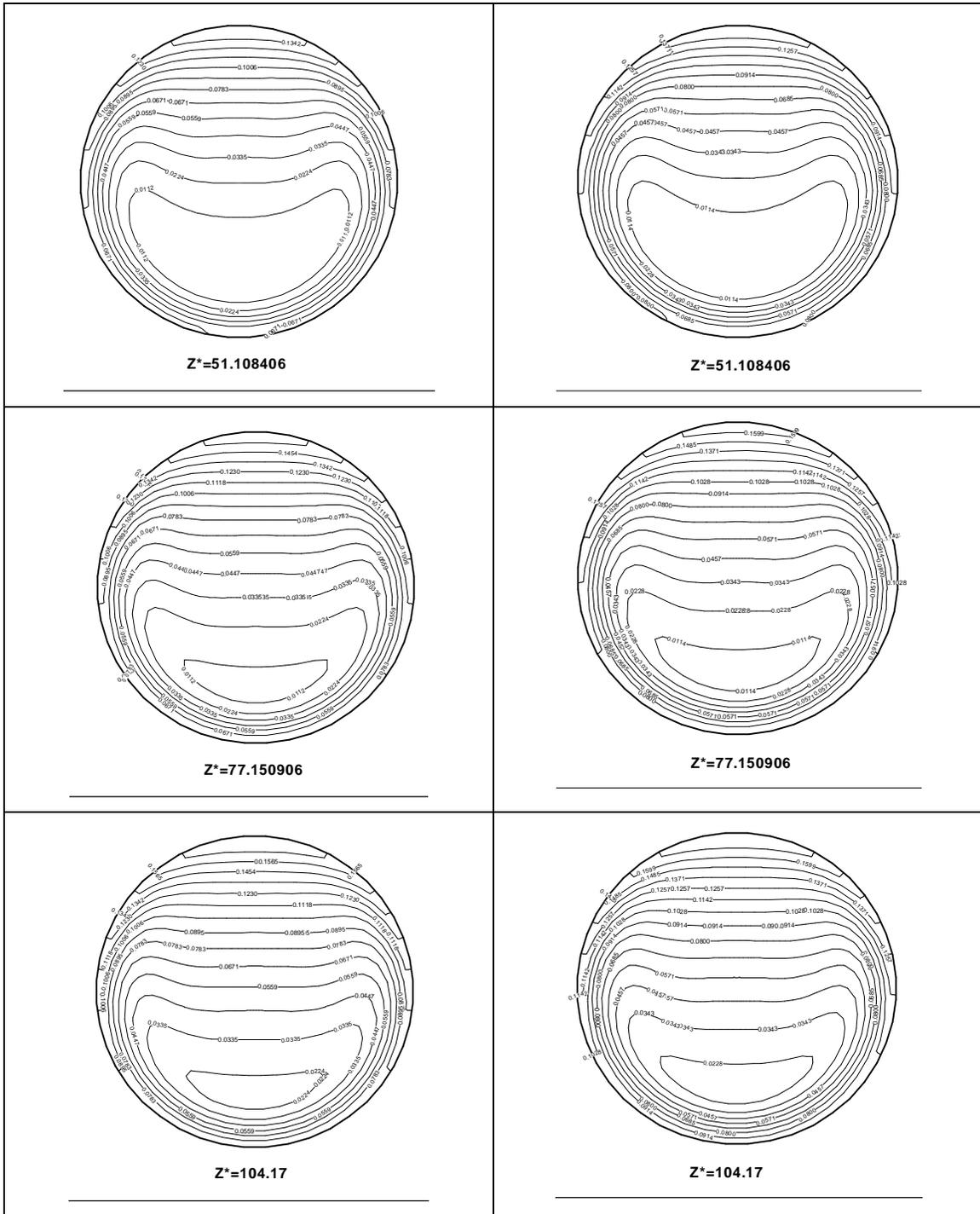


Figure 4.7: Comparaison des isothermes des sections droites à des positions axiales arbitrairement choisies.

4.4.2 Le cas de l'intensité $I = 65$ Ampères ($Gr = 510000$)

L'augmentation de l'intensité du courant électrique de 45 à 65 Ampères augmente la génération de chaleur de $5.26 \cdot 10^7 W/m^3$ à $1.098 \cdot 10^8 W/m^3$. Le niveau des températures dimensionnelles est plus élevé avec la génération de chaleur $1.098 \cdot 10^8 W/m^3$. Dans la figure 4.8, on compare les températures moyennes, des sections droites du conduit, obtenues avec l'ordre un et deux. On note que les résultats des deux discrétisations sont confondus. L'augmentation de la température axiale moyenne du fluide est toujours linéaire depuis l'entrée jusqu'à la sortie à cause du chauffage continu du fluide le long du conduit. Dans la figure 4.9 nous comparons les variations axiales de la température de la paroi (en haut et en bas du conduit) de l'ordre un et l'ordre deux avec ceux de l'expérience [21]. En haut du conduit, $r^* = 0.5208$ et $q = 0$; en bas du conduit, $r^* = 0.5208$ et $q = p$. La température et la position axiale sont présentées sous formes dimensionnelles conformément à la référence expérimentale. On voit que les résultats numériques sont légèrement supérieurs à ceux de l'expérience. Ceci invite à revoir la condition thermique à la paroi extérieure du conduit. Il est possible que les pertes thermiques vers le milieu ambiant sont sous estimées dans l'étude numérique; surtout celles de la convection naturelle. Avec des pertes thermiques plus importantes, la température de la paroi se rapprochera de celle mesurée dans l'expérience. Aussi, il est remarquable que les résultats, obtenus avec l'ordre un, sont plus proches de ceux de l'expérience, surtout en bas du conduit. Mais peut être qu'avec des pertes thermiques estimées avec plus de précision, les résultats du second ordre seront un peu supérieurs et ceux du premier ordre un peu inférieurs à ceux de l'expérience. Une autre cause des différences des résultats peut être la résolution du maillage numérique qui nécessite un affinage important suivant les trois directions; mais cet affinage n'est pas possible avec nos moyens de calcul. Finalement, les différences des résultats, numériques et expérimentaux, peuvent être réduites si on tiendra compte des incertitudes des mesures expérimentales (si disponibles).

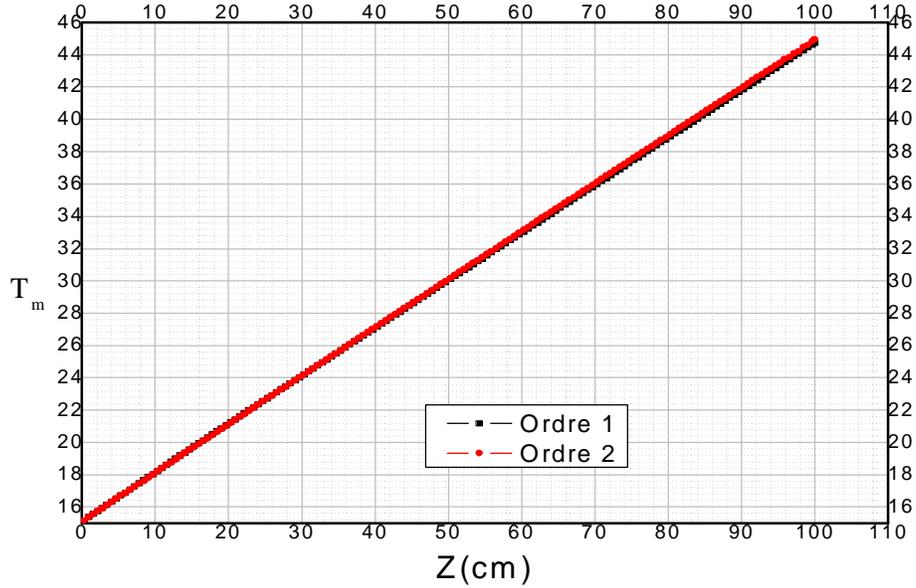


Figure 4.8: Evolution axiale de la température moyenne dimensionnelle du fluide (cas de l'intensité $I=65$ Ampères).

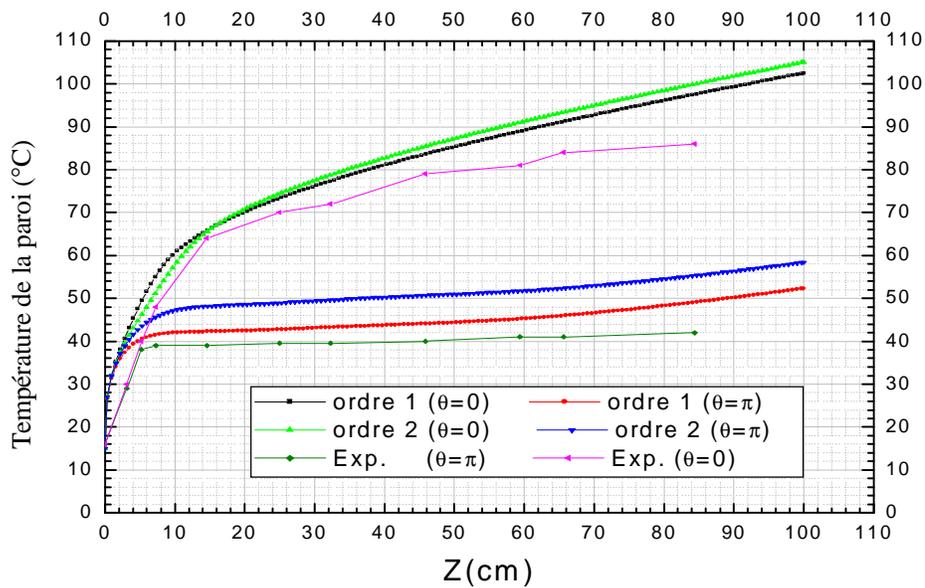
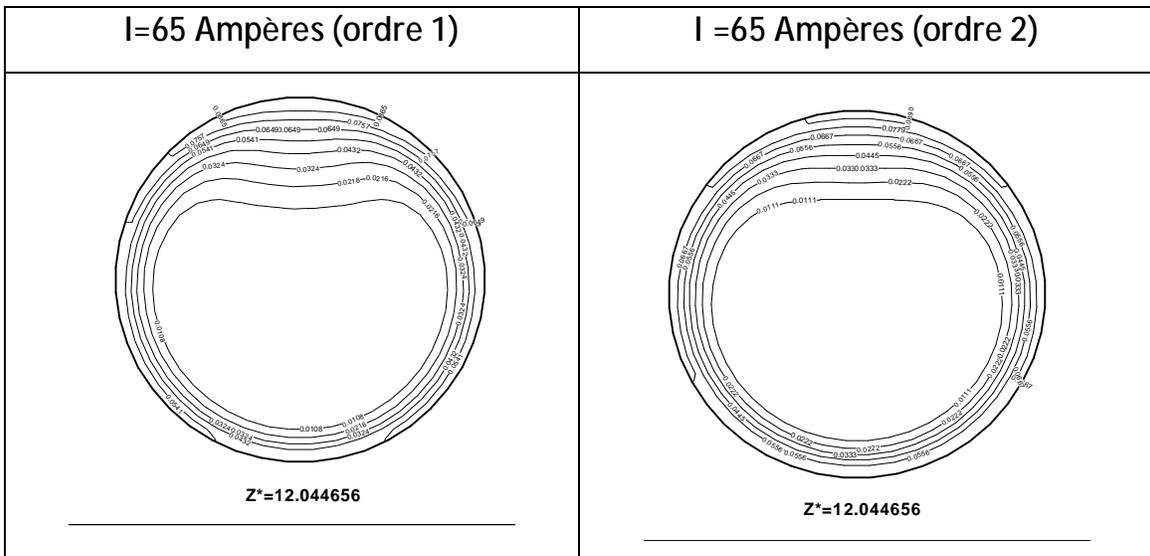
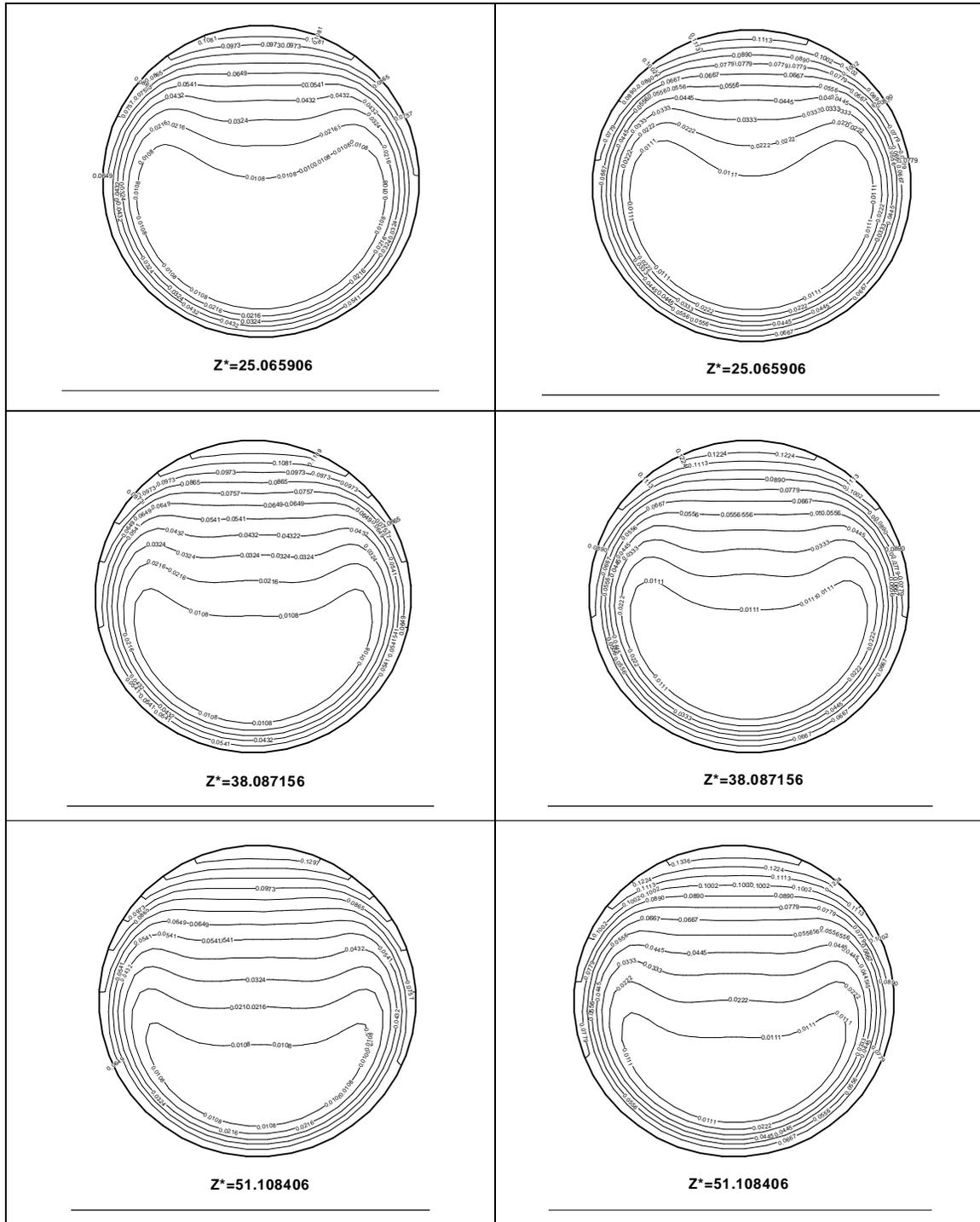


Figure 4.9: Variation axiale de la température de la paroi du conduit. Comparaison avec les résultats expérimentaux d'Abid ($I=65$ Ampère).

La figure 4.10 représente une comparaison des isothermes (des sections droites) obtenues par les discrétisations d'ordre un et deux, à des positions axiale arbitrairement choisies. La température maximale est localisée en haut du conduit, à $q = 0, r^* = 0.5$, le minimum est dans la partie inférieure du conduit, à $q = p$. A $Z^* = 12.04465$, la température minimale est située à $r^* = 0.2125$. Le minimum de la température se déplace (pour l'ordre un) à $r^* = 0.3125, r^* = 0.3375, r^* = 0.3375, r^* = 0.3625$ et $r^* = 0.3625$, pour les positions axiales $Z^* = 25.0659, Z^* = 38.0871, Z^* = 51.1084, Z^* = 77.1509$ et $Z^* = 104.17$, respectivement. Pour l'ordre deux, à $Z^* = 12.04465$, la température minimale est située à $r^* = 0.0625$. Le minimum de la température se déplace à $r^* = 0.1875, r^* = 0.3125, r^* = 0.3375, r^* = 0.3625$ et $r^* = 0.3625$, pour les positions axiales $Z^* = 25.0659, Z^* = 38.0871, Z^* = 51.1084, Z^* = 77.1509$ et $Z^* = 104.17$, respectivement.





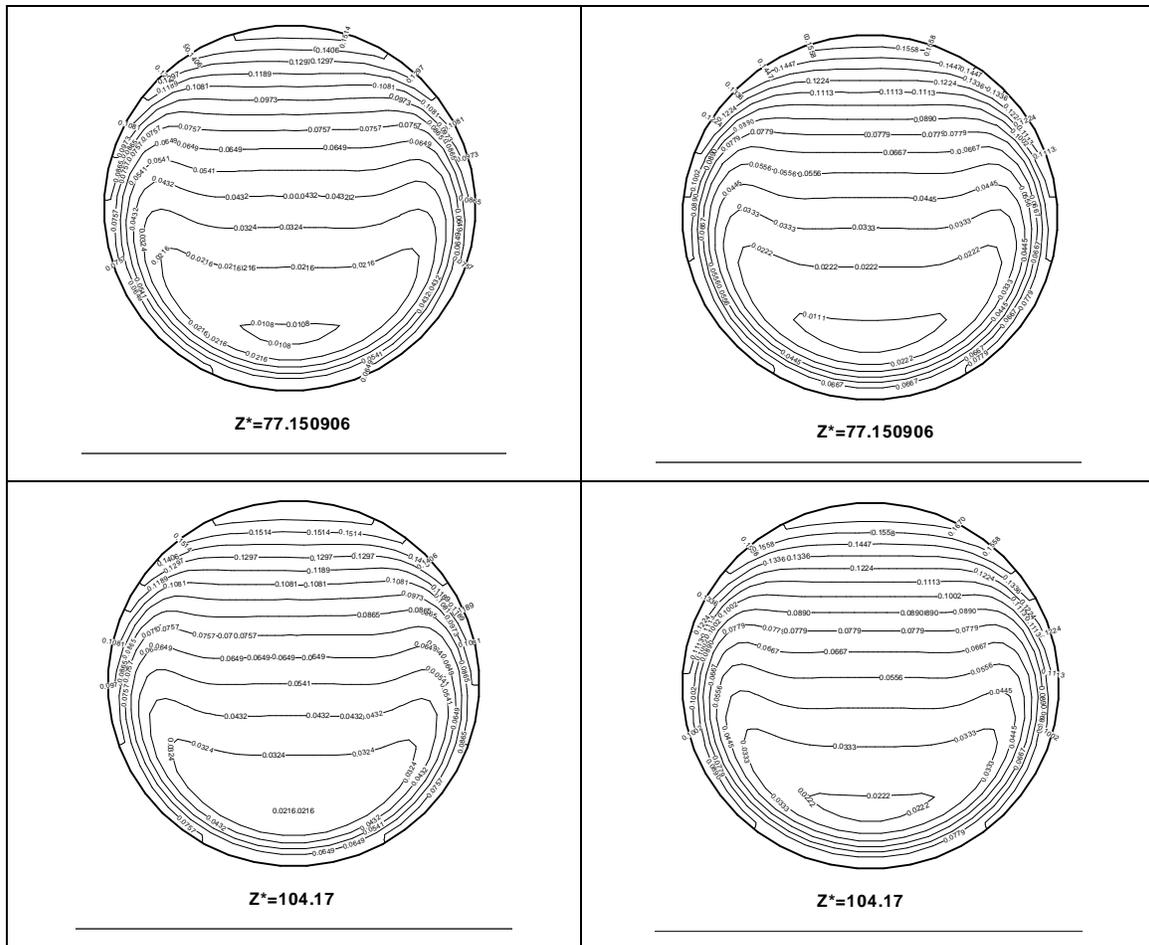


Figure 4.10: Les isothermes des sections droites à des positions axiales arbitrairement choisies.

4.5 Les nombres de Nussel

Pour chaque point à l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par la relation : (2.24). Comme il est présenté dans les figures 4.11, 4.12, 4.14 et 4.15, juste après l'entrée, la variation angulaire du nombre de Nusselt local $Nu(q, Z^*)$ se manifeste de la manière suivant: le maximum se localise en bas du conduit (à $q = p$) et le minimum se localise en haut du conduit (à $q = 0$). Axialement, après une chute considérable près de l'entrée (convection naturelle encore faible), le nombre de Nusselt local augmente considérablement jusqu'à la sortie (convection naturelle importante). Le niveau du nombre de Nusselt local obtenu avec l'ordre un est supérieur à celui obtenu avec l'ordre deux;

conformément aux niveaux des températures des parois. Ce constat est mieux illustré par la variation du nombre de Nusselt axial illustrée dans les figures 4.13 et 4.16

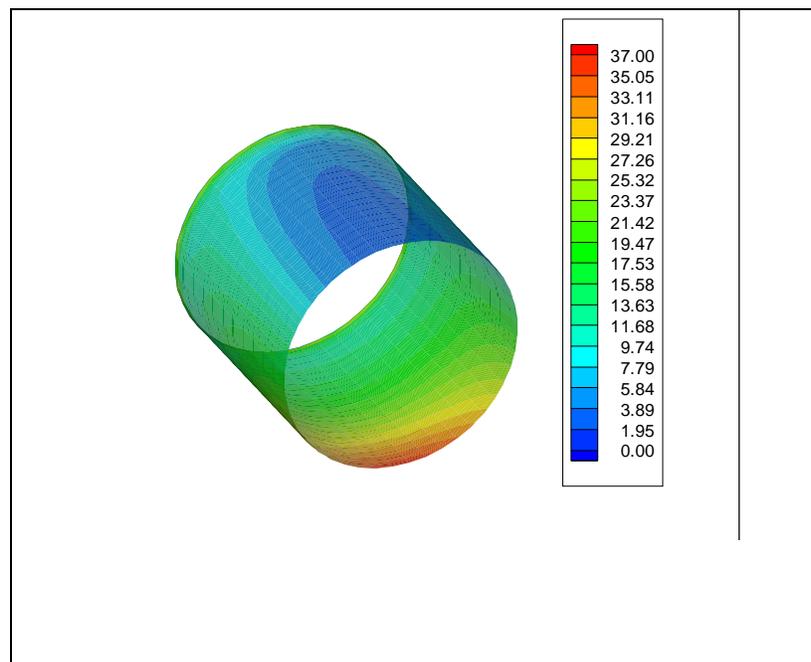


Figure 4.11: Nombre de Nusselt local à l'interface. Ordre 1. I=45 Ampères

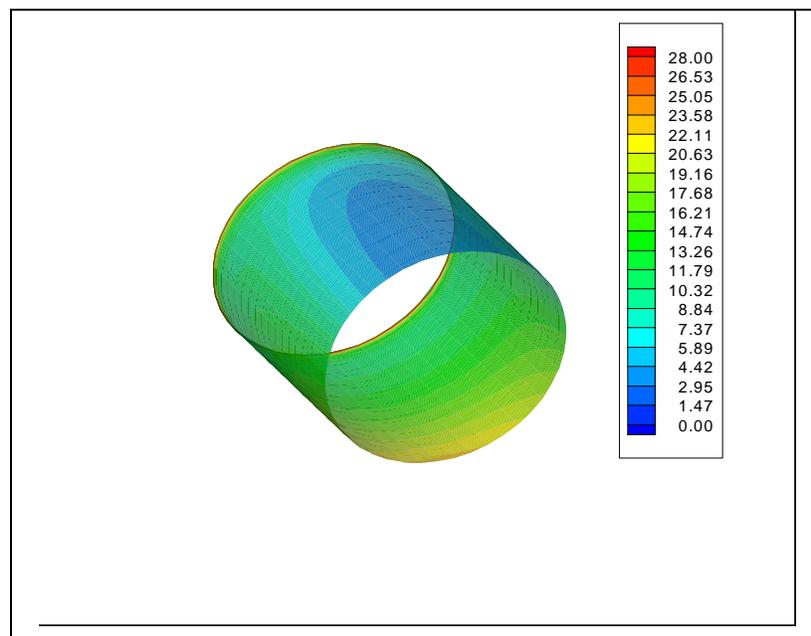


Figure 4.12: Nombre de Nusselt local à l'interface. Ordre 2. I=45 Ampères.

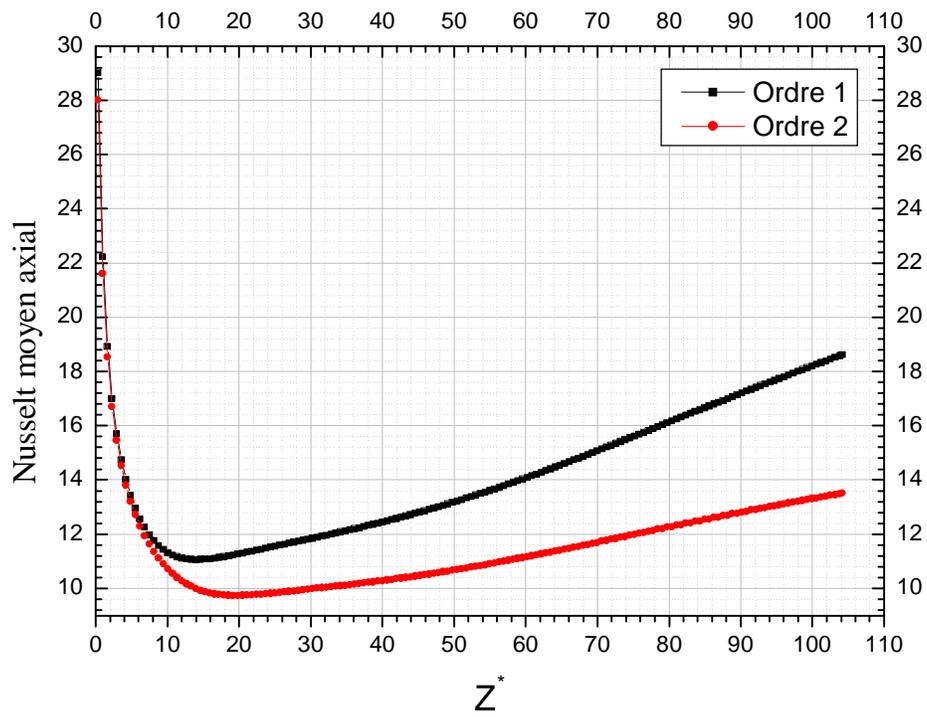


Figure 4.13 Les nombres de Nusselt axiaux. $I=45$ Ampères.

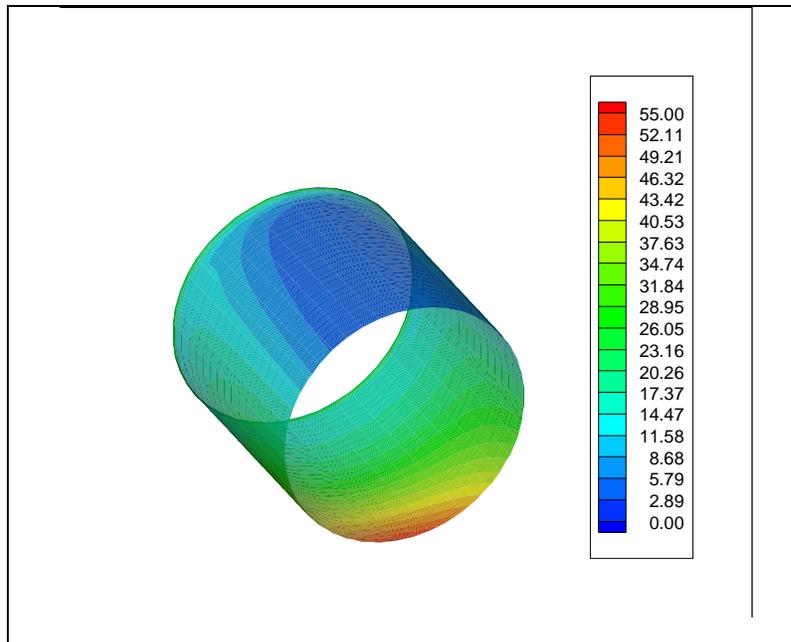


Figure 4.14: Nombre de Nusselt local à l'interface. Ordre 1. I=65 Ampères.

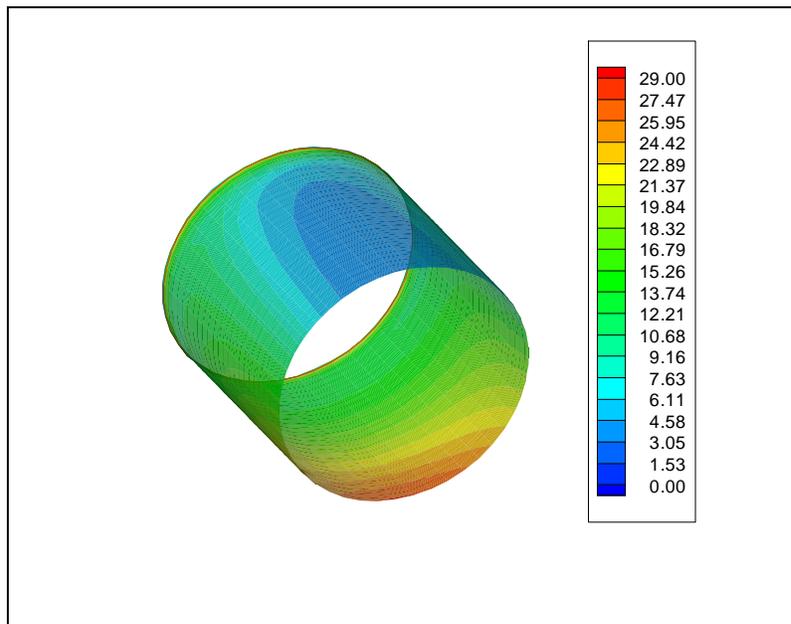


Figure 4.15 Nombre de Nusselt local à l'interface. Ordre 2. I=65 Ampères

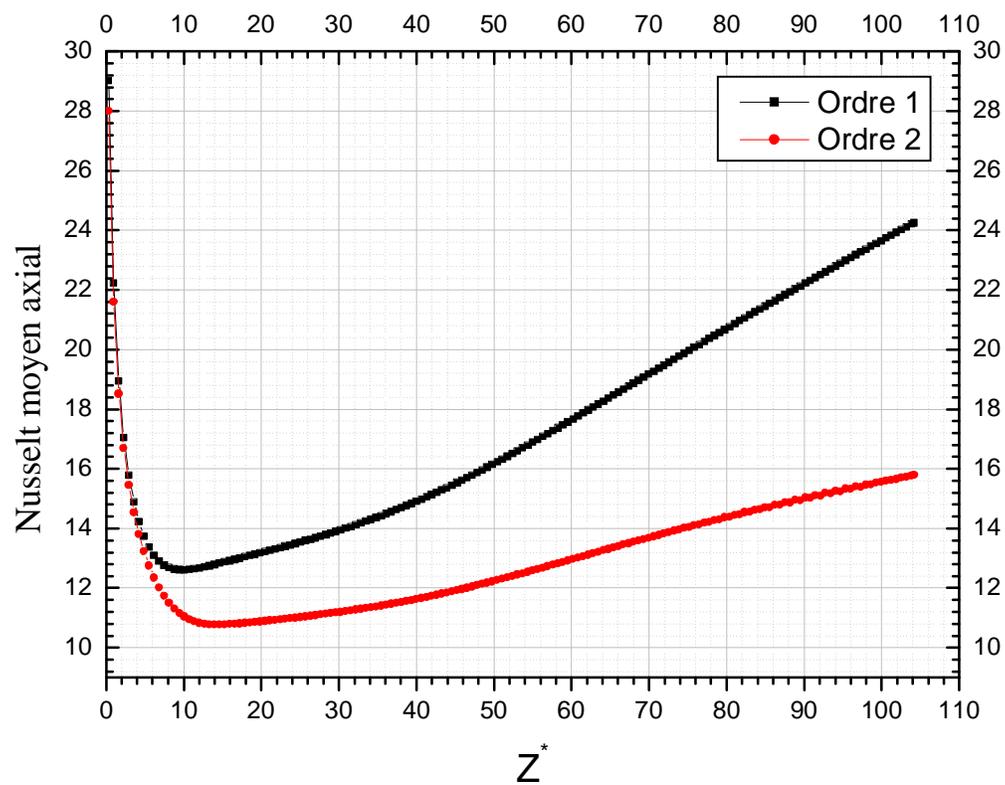


Figure 4.16: Les nombres de Nusselt axiaux. $I=65$ Ampères.

Conclusion Générale

Ce travail de recherche est basé sur une simulation numérique de la convection mixte d'un écoulement laminaire, tridimensionnelle dans un conduit cylindrique horizontal, chauffé par une génération de chaleur interne produite par l'effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi du conduit, les pertes thermiques radiatives et convectives avec le milieu ambiant sont prises en compte. Nous avons considéré deux intensités électriques de chauffage: 45 et 65 Ampères, qui correspondent aux deux nombres de Grashofs : $Gr = 244492.5$ et 510000.0 . Les autres paramètres de contrôle sont fixés: $Re=606.85$, $Pr = 8.082$. L'objectif de notre étude est la comparaison des résultats obtenus par les discrétisations numériques spatiotemporelles d'ordre un et d'ordre deux.

L'écoulement transversal secondaire (dans les sections droites) est induit par la poussée thermique (convection naturelle) le long du conduit. En chaque section droite, il est représenté par deux cellules contrarotatives identiques, séparées par le plan vertical de symétrie. Les centres de ces cellules se déplacent vers le bas le long de la direction axial. Qualitativement, les écoulements secondaires des discrétisations, du premier et second ordre, sont similaires; mais quantitativement les résultats sont un peu différents.

Les distributions spatiales tridimensionnelles de la température, obtenues avec les discrétisations numérique du premier et second ordre, sont qualitativement similaires; mais quantitativement leurs différences sont visibles, surtout en bas du conduit. Ces différences quantitatives entraînent des différences plus considérables des nombres de Nusselt axiaux.

- [1] T. Boufendi, M. Afrid, Three Dimensional conjugate conduction-mixed convection with variable Fluid properties in a heated horizontal pipe. *Revue des Energies Renouvelables*. Volume 8. N°1. pp. 1-18. Juin 2005.
- [2] T. Boufendi, M. Afrid, The physical aspect of three-dimensional mixed Convection in a uniformly heated horizontal pipe. *Science et Technologie A*. Revue semestrielle de l'université Mentouri-Constantine. N°22. pp.39-52. Décembre 2004.
- [3] T. Boufendi, Contribution à l'étude théorique des transferts de chaleur dans les conduits cylindriques horizontaux soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat en Physique Energétique, Départ. De Physique, Fac. Sciences Exactes, Université Mentouri, Septembre 2005.
- [4] B. S. Petukhov, A. F. Polyakov, Experimental investigation of viscogravitational fluid flow in a horizontal tube, *Scientific Research Inst. of High Temperatures*, traduit du teplofísica visokhych temperature, vol. 5, n°1, pp. 87-95, Jan. Feb. 1967.
- [5] M. Ouzzane, N. Galanis, Effets de la conduction pariétale et de la répartition du flux thermique sur la convection mixte près de l'entrée d'une conduite inclinée, *Int. J. Thermal Sc.*, Vol. 38, pp. 622-633, 1999.
- [6] Patankar.SV, Ramadhyani.Sparrow.E.M: Effect of circumferentially non uniform heating on laminar combined convection in a horizontal tube *ASME J.Heat Transfer*, Vol.100, pp 63-70, (1978)
- [7] Bergles.A.E, Simonds.R; R: Combined and free convection for laminar flow in horizontal tubes with uniform heat flux *Int.J.Heat Transfer*. Vol.14, pp 1989-2000,(1971)
- [8] Choi.D.K, Choi.D.H: Developing mixed convection flow in a horizontal tube under Circumferentially non-uniform heating *Int.J.Heat Transfer*. Vol.37, pp 1899-1913,(1994)
- [9] Orfi.J, Nicolas, Nguyen .C.T: Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans un tube incliné en régime de convection mixte *Rev Gen Therm* 36 pp 83-92 (1997)
- [10] Kholai.O, Bellaouar.A, Kadja.M: Etude numérique de la convection mixte dans un tube incliné *13èmes journées internationales de thermique*, albi, France (2007)
- [11] Ouzzane.M : Développement simultané en convection mixte laminaire dans une conduite avec un flux de chaleur non uniforme sur sa surface externe : cas avec et sans ailettes *Thèse de doctorats*, Sherbrook (2000)
- [12] Ouzzane.M, Nicolas .G : Effet de la conduction pariétale et de la répartition du flux thermique sur la convection mixte près de l'entrée d'une conduite inclinée *Int.J.Therm.Sci.*38,pp 622-633 (1999)

- [13] Ben Mansour, Nicolas, Nguyen .C.T : Effet du nombre de Grashof sur la convection mixte des nano fluides dans un tube chauffé uniformément.
Congrès français de thermique, Ile de Ré ;(2006)
- [14] Dogan.A, Sivrioglu M, Baskaya S: Investigation of mixed convection heat transfer in a horizontal channel with discrete heat sources at the top and the bottom.
Int.J.Heat Transfer. Vol.46, pp 2652-2662, (2006)
- [15]Mori.Y, Futagami.k, Nakamura.N: Forced convective heat transfer in uniformly heated. Horizontal tube;1streport experimental study on the effect of buoyancy
Int.J.Heat Transfer. Vol.9, pp 453-463, (1966)
- [16]Morcos.S.M, Bergles.A.E: experimental investigation of combined forced and free laminar convection in horizontal tubes
ASME.J.Heat Transfer. Vol.97, pp 212-219, (1975)
- [17]Orfi .D, Galanis.N: Mixed convection with heat and mass transfer in horizontal tubes
Int.com.Heat Transfer.32, pp 511-519,(2005)
- [18]Shome .B, Jensen.M.K: Mixed convection laminar flow and heat transfer of liquids in isothermal horizontal circular ducts.
Int.J.Heat Transfer. Vol.38, pp 1945-1956,(1995)
- [19]Pascal.C, Grief.R: Mixed laminar convection in a horizontal tube with natural convection a rounds its boundaries
Int.J.Heat Transfer. Vol.29, pp 391-402,(1986)
- [20]Hussein.M.A, Salman.Y.K: Experimental investigation of mixed convection heat transfer for thermally developing flow in a horizontal circular cylinder
Applied Thermal Engineering 27,pp 1522-1533 (2007)
- [21]Abid.C, F.Papini, D.Veyret:Etude de la convection mixte dans un conduit cylindrique. Approche analytique : numérique et détermination expérimentale de la température de paroi par thermographie infrarouge
J.phys.III France 3 pp 255-266 (1993)
- [22] Abid.C : Instabilités thermoconvective en écoulement ouvert (cas du conduit horizontal chauffé à la paroi)
Habilitation à diriger des recherches (2000) ,Institut universitaire des systèmes thermiques industriels ,UMR CNRS ,université de Provence
- [23] Bonnefois .F : Contribution à l'étude des instabilités thermoconvective en conduite rectangulaire chauffé par le bas
Thèse de doctorat, école polythèque Marseille(2003)
- [24] Abid.C, Bonnefois .F, F.Papini : Application de la vélocimétrie par image de particule dans un phénomène de convection mixte (Etude des écoulements de poiseuille-bénard)
9^{ème} congrès francophone de vélocimétrie laser(2004)

- [25]Incorpera.F.P, Schutt.J.A: Numerical simulation of laminar convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts
Num .heat transfer 8 pp 707-729(1985)
- [26] Mahaney .H, Incorpora.F.Pet ramdhyanis: Effet of wall heat flux distribution of laminar mixed convection in the entrance region of a horizontal rectangular ducts
Num .heat transfer 13 pp 427-450(1988)
- [27]Churchull.S.D, Chu.H.S: Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder
Int.J .heat transfer 18 pp 1049-1053(1975)
- [28]Baehr.H.D, Stephan.K: Heat and masse transfer, Sringer-Verlag, Berglin,(1998)
- [29]Patankar: Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw-Hill, New-York,(1980)

Comparison between the first and the second order of numerical schemes discretisation: application to a mixed convection phenomenon in a cylindrical duct

Abstract:

This study concerns the flow of a Newtonian and incompressible fluid in a horizontal cylindrical duct uniformly heated at the wall. The associated heat transfer modes are mixed convection in the fluid and conduction in the wall. Thermophysical fluid properties are thermo-dependant. A three dimensional numerical simulation is conducted, The finite volumes method with a second order scheme in time and space is adopted to resolve this problem, Two different heating conditions are considered: strength of electrical current of 45 and 65 Amperes which correspond to two various Grashof numbers: $Gr=244492$ and 510000 . The other control parameters such Reynolds and Prandtl numbers are fixed constant: $Re=606$ and $Pr=8$. The transversal secondary flow in a cross section is induced by a buoyancy effect along the duct. In a cross straight section, two contra-rotative cells are observed. These rolls are separated by the median vertical plane. The center of these rolls moves downward when the axial coordinate increases. The major points of this work consist first at a qualitative and a quantitative comparison between the results obtained by the first and the second order schemes, then a comparison with experimental results is achieved. It is to be noted that, qualitatively the first and the second order schemes give similar results but quantitatively the results obtained by the first order scheme are closer to the experimental results. These differences induce more important discrepancies of the axial Nusselt number.

This is due to the fact that the second order scheme needs a more refined mesh than the first order on one hand and on other hand in the experimental results the uncertainties and the heat losses are not known. Taking into account these comments could reduce the difference between the obtained results.

Key –words: mixed convection, cylinder duct, laminar flow, conjugate heat transfer, numerical simulation, finite volume

مقارنة الطرق العددية للوصف من الدرجة الأولى و الثانية:تطبيق على الحمل المختلط في

أنبوب اسطوان

يتضمن هذا العمل المنجز دراسة الجريان في أنبوب اسطواني أفقي يخضع لتسخين منتظم ،يجري بداخله مائع نيوتوني و غير منضغط .نماذج التحويل المرفقة هي نموذج الحامل المختلط المتولد في المائع و التوصيل الحراري في السطح الصلب .الخواص الفيزيائية للمائع هي معامل اللزوجة ومعامل التوصيل الحراري المتعلقان بالحرارة.نهتم في هذا العمل بالمحاكات العددية ثلاثية الأبعاد،حيث اعتمدنا في الحل على طريقة الحجم المنتهية ،دقتها من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء و الزمن.استعملنا شدتين للتسخين 45 و65.امبير اللتين تأخذان قيمة جراشوف 244492 و510000 أما العددين Reynolds وPrandl مثبتين : $Pr=8.082, Re=606,85$.

الجريان الثانوي يتطور على شكل خليتين متعاكستين و متماثلتين و مفصولتين بمستوي عمودي متناظر .مركز هاتين الخليتين تنتقلان نحو الاسفل بالنسبة للاتجاه المحوري

أهم النقاط الأساسية في هذا العمل تتركز على المقارنة الكمية و الكيفية لنتائج المحاكات العددية من الدرجة الأولى و الثانية مع النتائج التجريبية .فلو حظ ان النتائج من الدرجة الأولى و الثانية كفيًا ،لكن النتائج من الدرجة الأولى أعطت تقاربا كبيرا مع النتائج التجريبية و هذا من الناحية الكمية مما يمكننا القول بان المحاكات العددية من الدرجة الثانية تتطلب تدقيق مهم للشبكة و إن الضياع الحراري و الإرتيابات الناتجة عن القياسات التجريبية يمكن أن تقلص من الفارق بين النتائج.

هذا الفرق الكمي يؤدي الى فرق كبير في عدد Nusselt المحوري.

الكلمات الدالة : الحمل المختلط ،أنبوب اسطواني ،الجريان الرقائقي ،التحويل الحراري المترافق ،المحاكات العددية ،الحجوم المنتهية .

COMPARAISON DES SCHEMAS NUMERIQUE DE DISCRETISATION DES PREMIERS ET SECOND ORDRE : APPLICATION A LA CONVECTION MIXTE DANS UN CONDUIT CYLINDRIQUE

Résumé :

Ce travail se rapporte sur l'étude d'un écoulement dans conduit cylindrique horizontale chauffé uniformément dans laquelle circule un fluide newtonien et incompressible. Les modes de transferts associés sont la convection mixte générée dans le fluide et la conduction thermique dans le solide. Les propriétés physiques du fluide, la viscosité et la conductivité thermique sont thermo dépendantes. On assiste dans ce travail à une simulation numérique tridimensionnelle, la résolution numérique adoptée est la méthode des volumes finis avec une précision du second ordre en temps et en espace. Nous avons considéré deux intensités électriques de chauffage: 45 et 65 Ampères, qui correspondent aux deux nombres de Grashofs : $Gr = 244492.5$ et 510000.0 . Les autres paramètres de contrôle sont fixés: $Re=606.85$, $Pr = 8.082$. l'étude a montré l'existence d'un 'écoulement transversal secondaire (dans les sections droites) qu'est induit par la poussée thermique (convection naturelle) le long du conduit. En chaque section droite, il est représenté par deux cellules contrarotatives identiques, séparées par le plan vertical de symétrie. Les centres de ces cellules se déplacent vers le bas le long de la direction axial. Les points majeurs de ce travail consistent à réaliser une comparaison qualitative et quantitative des résultats de simulation numérique d'ordre un et d'ordre deux et ensuite effectuer une comparaison avec des résultats expérimentaux. Il a été constaté que qualitativement, les résultats du premier ordre et du second ordre sont similaires par contre quantitativement les résultats du premier ordre sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus avec un schéma du second ordre. Ces différences quantitatives entraînent des différences plus considérables des nombres de Nusselt axiaux.

Ceci nous invite à dire que peut être la résolution numérique au second ordre nécessite un affinage important du maillage et que les pertes thermiques ainsi que les incertitudes des mesures expérimentales pourraient réduire l'écart entre les résultats.

Mots clés : convection mixte, conduit cylindrique, écoulement laminaire, transfert thermique conjugué, simulation numérique, volume fini