

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

MEMOIRE  
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE  
MAGISTER EN PHYSIQUE  
OPTION : PHOTOTHERMIQUE

THEME

**Écoulement de Couette sphérique contrarotatif  
-Effet du Nombre de Rossby-**

PAR

*M<sup>elle</sup>* KHEMICI MERIEM

Soutenu le : / / 2008

Devant le jury :

Président	: L. BAH	Professeur	Université Mentouri Constantine
Rapporteur	: T. BOUFENDI	M. de conférence	Université Mentouri Constantine
Examineurs	: M. AFRID	Professeur	Université Mentouri Constantine
	S. BENISSAAD	M. de conférence	Université Mentouri Constantine

## **-Remerciements-**

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur **T. Boufendi** maître de conférence à l'université Mentouri de Constantine de m'avoir encadré et guidé tout le long de cette recherche et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ces conseils et suggestions.

J'adresse mes profonds remerciements aux membres de jury. Il s'agit du Monsieur **L. Bahi** Professeur à l'université Mentouri de Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **M. Afrid** professeur à l'université Mentouri de Constantine, où son savoir, son expérience, m'ont été d'une grande utilité.

Monsieur **S. Benissaad** maître de conférence à l'université Mentouri de Constantine, m'a fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'il trouve ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Sommaire

	Page
Remerciements	
Sommaire.....	1
Nomenclature.....	4
<b>Chapitre 1 Etude bibliographique</b> .....	<b>7</b>
<b>Chapitre 2 Modélisation mathématique</b> .....	<b>12</b>
2.1 Présentation du problème .....	12
2.2 Modèle mathématique .....	13
2.2.1 Equation de continuité .....	13
2.2.2 Equation de la quantité de mouvement radiale.....	13
2.2.3 Equation de la quantité de mouvement méridionale .....	13
2.2.4 Equation de la quantité de mouvement azimutale .....	13
2.2.5 Les conditions aux limites du problème .....	14
2.3 Adimensionnalisation des variables.....	14
2.4 Equation de conservation adimensionnelles.....	15
2.4.1 Equation de continuité adimensionnelle.....	15
2.4.2 Equation de la quantité de mouvement radiale adimensionnelle .....	15
2.4.3 Equation de la quantité de mouvement polaire adimensionnelle .....	15
2.4.4 Equation de la quantité de mouvement azimutale adimensionnelle .....	16
2.5 Adimensionnalisation les conditions aux limites.....	16
2.6 Calcul du moment angulaire.....	17
<b>Chapitre 3 Résolution numérique</b> .....	<b>18</b>
3.1 Méthode de résolution numérique.....	18
3.2 Discrétisation du domaine physique.....	19
3.3 La discrétisation des équations de conservation.....	21
3.3.1 Traitement des dérivées temporelles.....	21
3.3.2 Traitement des termes convectives et non linéaires.....	22
3.3.3 Traitement des termes diffusifs et de pression .....	22
3.3.4 Discrétisation spatiale.....	22

3.4	Discrétisation des équations modélisantes.....	25
3.4.1	Discrétisation de l'équation de continuité.....	25
3.4.2	Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement....	27
3.4.2.1	Discrétisation terme temporel.....	29
3.4.2.2	Discrétisation des termes advectifs.....	29
3.4.2.3	Discrétisation des autres termes à gauche.....	30
3.4.2.4	Discrétisation des termes diffusifs .....	31
3.4.2.5	Discrétisation des autres termes à droite.....	32
3.4.2.6	Discrétisation du terme de pression.....	33
3.4.3	Discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement....	35
3.4.3.1	Discrétisation terme temporel.....	36
3.4.3.2	Discrétisation des termes advectifs.....	36
3.4.3.3	Discrétisation des autres termes à gauche.....	37
3.4.3.4	Discrétisation des termes diffusifs.....	38
3.4.3.5	Discrétisation des autres termes à droite.....	39
3.4.3.6	Discrétisation du terme de pression.....	40
3.4.4	Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement.	42
3.4.4.1	Discrétisation du terme temporel.....	44
3.4.4.2	Discrétisation des termes advectifs .....	44
3.4.4.3	Discrétisation des autres termes à gauche.....	46
3.4.4.4	Discrétisation des termes diffusifs.....	46
3.4.4.5	Discrétisation des autres termes à droite .....	47
3.4.4.6	Discrétisation du terme de pression.....	48
3.4.5	Discrétisation des conditions aux limites.....	51
3.6	Equation de discrétisation de la pression.....	53
3.7	Résolution des équations discrétisées .....	60
3.8	La méthode de balayage .....	60
3.9	Algorithme de Thomas .....	61
3.10	Algorithme de Thomas cyclique.....	62
3.11	Critères de convergence .....	65
3.12	Validation .....	66

<b>Chapitre 4 Résultats et discussions</b> .....	68
4.1 Variation méridionale de la vitesse azimutale.....	68
4.2 Evolution méridionale de la vitesse angulaire.....	75
4.3 Ecoulement secondaire .....	82
4.4 Distribution méridionale de la pression.....	89
<b>Conclusion</b> .....	95
<b>Références bibliographiques</b> .....	96

**Résumé**

**Abstract**

**Résumé en arabe**

## Nomenclature

**B** : nœud situé dans le sens positif de la direction polaire voisin de **P**.

**b** : face se trouvant entre les deux nœuds **P** et **B**.

$d r_n$  : Distance radiale entre deux nœuds du maillage typique non décalé. En référence à la face **n** qui séparé les deux nœuds considérés (**P** et **N**).

$d \theta_b$  : Distance polaire entre deux nœuds du maillage typique non décalé. En référence à la face **b** qui séparé les deux nœuds considérés (**P** et **B**).

$d \phi_e$  : Distance azimutale entre deux nœuds du maillage typique non décalé. En référence à la face **e** qui séparé les deux nœuds considérés (**P** et **E**).

**E**: nœud situé dans le sens positif de la direction azimutale voisin de **P**.

**e** : face située entre les deux nœuds **P** et **E**.

**F** : nœud situé dans le sens négative de la direction polaire voisin de **P**.

**f** : face située entre les deux nœuds **P** et **F**.

**M** : moment angulaire.

**N** : nœud situé dans le sens positif de la direction radiale voisin de **P**.

**n** : face située entre les deux nœuds **P** et **N**.

$P^*$  : Pression adimensionnelle.

$P_o$  : Pression de référence.

$r^*$  : Distance radiale adimensionnelle.

$R_1$  : Rayon de la sphère intérieure.

$R_2$  : Rayon de la sphère extérieure.

$Re$  : Nombre de Reynolds (basé sur la vitesse de la sphère intérieure).

$Ro$  : Nombre de Rossby.

**S**: nœud situé dans le sens négatif de la direction radiale voisin de **P**.

**s**: face située entre les deux nœuds **P** et **S**.

**T**: torque

$t^*$  : Temps adimensionnel.

$U$  : composante radiale de la vitesse.  $[m/s]$

$U^*$  : Vitesse radiale adimensionnelle.

$V$  : composante méridionale de la vitesse.  $[m/s]$

$V^*$  : Vitesse méridionale adimensionnelle.

$W$  : composante azimutale de la vitesse.  $[m/s]$

$W^*$  : Vitesse azimutale adimensionnelle.

$W$  : nœud situé dans le sens négatif de la direction azimutale voisin de **P**.

$w$  : face se trouvant entre les deux nœuds **P** et **W**.

$\Delta r_N$  : Distance radiale entre deux faces du maillage typique dans la direction Nord.

$\Delta r_S$  : Distance radiale entre deux faces du maillage typique dans la direction Sud.

$\Delta \theta_B$  : Distance polaire entre deux faces du maillage typique dans la direction Basse.

$\Delta \theta_F$  : Distance polaire entre deux faces du maillage typique dans la direction Frontale.

$\Delta \phi_E$  : Distance azimutale entre deux faces du maillage typique dans la direction Est.

$\Delta \phi_W$  : Distance azimutale entre deux faces du maillage typique dans la direction West.

### **Lettres grecques:**

$\beta$  : Rapport d'aspect (épaisseur non dimensionnelle de l'entrefer = 0.5).

$\theta$  : Angle polaire.

$\phi$  : Angle azimutale.

$\Phi$  : Variable dépendante.

$\Omega_1$  : Vitesse angulaire de la sphère intérieure.  $[rd/s]$

$\Omega_2$  : Vitesse angulaire de la sphère extérieure.  $[rd/s]$

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide considéré.  $[m^2/s]$

**Indices :**

u : indique le décalage du maillage suivant la direction radiale.

v : indique le décalage du maillage suivant la direction polaire.

w : indique le décalage du maillage suivant la direction azimutale.

**Exposants :**

t : Désigne l'instant t.

t -  $\Delta t$  : Désigne l'instant t-  $\Delta t$ .

t +  $\Delta t$  : Désigne l'instant t+  $\Delta t$ .

# **CHAPITRE 1**

# 1. Etude bibliographique

Dans la dynamique des fluides, l'écoulement de Couette signifie un écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans un espace compris entre deux surfaces dont l'une est en mouvement relatif par rapport à l'autre. Lorsque la géométrie est cylindrique et que les cylindres sont en rotation, l'écoulement est dit de type Couette-Taylor. Pour des régimes laminaires, à faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est purement azimutal. Dans ce cas l'écoulement est dit de Couette circulaire [1]. C'est **G.I. Taylor** qui a étudié la stabilité de l'écoulement de Couette et a développé la théorie des instabilités hydrodynamiques [2]. Les écoulements rotatifs occupent une large part dans la dynamique des fluides, que ce soit dans l'Engineering ou dans la recherche fondamentale. En particulier, les systèmes en rotation rapides qui sont très attractifs, où plusieurs phénomènes hydrodynamiques sont observés, tels que les écoulements secondaires, les vortex de Taylor, les ondes spirales..... et qui n'apparaissent pas dans l'environnement d'un fluide non rotatif. Parmi ces différents systèmes de fluides rotatifs, le mouvement d'un fluide visqueux confiné entre deux sphères concentriques en rotation, appelé écoulement de Couette sphérique, est très intéressant dans le domaine de la recherche fondamentale et appliquée. Il intervient dans de larges applications telles les centrifugeuses, les fluides gyroscopes, la science colloïdale et en particulier dans les domaines de l'astrophysique et la géophysique. En faisant intervenir les forces centrifuges, les forces de pression et les forces visqueuses, ces écoulements spécifiques deviennent tridimensionnels et tri directionnels. Ils associent une rotation différentielle autour d'un axe (écoulement primaire) et une circulation dans le plan méridional (écoulement secondaire), généré suite au déséquilibre de ces forces [3].

C'est en suivant un ordre chronologique que la recherche bibliographique a été organisée.

**Proudman [4] et K. Stewartson [5]** se basent sur la méthode analytique des perturbations singulières qui consiste à établir un raccordement des solutions interne de couche limite et externe déduite de la théorie potentielle, appliquée aux nombres de Reynolds très élevés ( $Re \rightarrow \infty$ ). Pour une solution au premier ordre, l'écoulement est divisé en deux zones, par un cylindre fictif situé entre les deux sphères solides dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation et tangent à la sphère intérieure. Dans la zone extérieure au cylindre, le fluide est en rotation en bloc à la vitesse de la sphère extérieure tandis que dans la zone intérieure l'écoulement circule dans un plan méridional selon des couches dites de Stewartson quasi parallèles à l'axe de rotation entre les couches d'Ekman situées sur les deux sphères. Le sens de cette circulation est fixé par le signe du nombre de Rossby.

**Munson et Joseph [6]** ont étudié le mouvement laminaire d'un fluide incompressible visqueux confiné entre deux sphères concentriques, ont proposé une solution analytique applicable au faible nombre de Reynolds. Ainsi, les équations de Navier –Stokes est écrite dans la formulation fonction de courant ( $\psi$ ) – vorticité ( $\Omega$ ). Les solutions ont été obtenues à l'aide des développements en série polynomiale de Legendre. Leurs résultats montrent l'influence de la rotation des deux sphères sur le champ d'écoulement pour différents rapports du nombre de Rossby. Ils présentent les résultats pour  $\beta=0.5$ ,  $Ro=-1$  (les deux sphères en rotation à la même vitesse angulaire mais dans la direction opposé) et  $Ro = -0.5$  (la sphère intérieure tourne deux fois plus que la sphère extérieure et dans la direction opposée). Ils en résultent que pour  $Ro = -1$  et  $Re = 100$  la sphère extérieure domine l'écoulement résultant et est constitué d'une cellule orientée dans le sens horaire. En revanche, pour  $Ro = -0.5$  aucune des deux sphères ne domine le mouvement et l'écoulement résultant se compose de deux cellules (vortex) contrarotatives s'étalant sur tout l'espace annulaire sphérique. Les auteurs présentent aussi les torques en fonction du nombre de Reynolds.

Quant à **J. Bonnet et T. de Roquefort [7]**, ils réservent une partie de leur étude numérique aux très faibles nombres de  $Ro$ . En exprimant les équations de conservation en formulation fonction de courant et rotationnel, les solutions stationnaires sont obtenues à l'aide de méthodes numériques basées sur les équations d'évolution. Pour des valeurs de  $RoRe^{1/3} \leq 10^{-2}$  avec  $Re=10^3$  et  $310^3$ , ils obtiennent une structure de l'écoulement proche de celle prévue par la théorie linéarisée de Proudman. Cependant pour  $Re=10^3$  ils observent une zone assez étendue en rotation à la vitesse de la sphère extérieure au voisinage de l'équateur.

Dans un vaste programme de recherche relatif aux écoulements rotatifs, l'étude expérimentale effectuée par **M. Wimmer** [8, 9] a donné lieu à des observations visuelles des écoulements ainsi qu'à l'enregistrement de l'apparition de l'instabilité. Les mesures expérimentales ont donné lieu à des diagrammes de stabilité pour deux valeurs de l'entrefers  $\beta=0.00256$  (faible) et 0.11 (large). La rotation de la sphère intérieure produit une couche potentielle instable qui est contraire de la couche stable produite par la rotation de la sphère extérieure, le rapport de vitesse angulaire détermine l'épaisseur des couches résultantes qui influent sur le champ d'écoulement produit quand les sphères sont en rotation dans des directions opposées, deux courants contra rotatifs peuvent se produire. La contra rotation peut générer deux cellules contrarotatives et un rayon nodal caractérisé par une vitesse angulaire (et circonférentielle) nulle dont la position locale dépend des valeurs des vitesses angulaires des deux sphères. Il montre que les instabilités se développent dans le plan équatorial et il est possible de créer des instabilités sous forme spirale autour du pôle celui de type de Taylor – Görther (TG) à l'équateur et par l'augmentation des vitesses angulaires, les bras des spirales sont prolongés en bas de plan équatorial, ils sont influencés par le développement des vortex de Taylor. Ces différents types d'instabilités sont imbriqués l'une dans l'autre avec des configurations onduleuses. L'auteur fait remarquer qu'il est difficile de détecter le début de l'instabilité dans le cas spécial des deux sphères en contra rotation. En conclusion la rotation de deux sphères en direction opposée produit différentes tailles de couche instable pour différents rapports des vitesses angulaires. En conséquence l'épaisseur de la couche instable est toujours plus petite que la largeur d'espace géométrique. Ceci implique que les modes d'écoulement perturbés correspondant à la plus petite largeur de l'espace.

En étudiant les phénomènes liés aux mouvements atmosphériques des planètes, **I. Yavorskaya et Y. Belyaev** [10] présentent une courbe de stabilité et d'existence des différents régimes d'écoulement dans une couche d'épaisseur égale à 0.11. Ils identifient tous les types d'instabilités : centrifuges, des couches de Stewartson et d'Ekman et des contraintes visqueuses, pour des nombres de Reynolds variant de 0 à 13540,  $\beta= 1$  et 0.11 et  $Ro=-1$ . Ils mettent en évidence les phénomènes d'hystérésis et de non unicité des régimes d'écoulement. Ainsi la non unicité de l'écoulement secondaire résulte du développement de l'écoulement en temps aussi bien des différents mécanismes d'instabilités. Pour  $\beta =0.11$ ,  $Ro = -1$  en plus d'existence de mode axisymétrique de l'écoulement secondaire il y a une grande variété non axisymétrique périodique de l'écoulement secondaire propagé dans la

direction azimutale. Les régions d'existence de ce mode sont imbriquées et menées par la plus forte non unicité de régime d'écoulement. Ce problème de non unicité est très important pour l'analyse des mouvements globaux atmosphériques planétaires là où le flux et le phénomène de stratification de la chaleur provoquent différents types d'instabilités.

**N. M. Astaf'eva** [11] a étudié une technique d'analyse numérique pour l'écoulement visqueux incompressible dans l'espace annulaire entre deux sphères concentriques en contra rotation pour  $Ro = -0.5$ ,  $Re = 550$ , et  $\beta$  variant de 0.05 à 2. Pour  $\beta = 0.3$ ,  $Ro = -0.5$  l'écoulement secondaire se compose de 2 vortex, une cellule près de la sphère extérieure et une cellule avec 2 noyaux près de sphère intérieure. Donc l'influence de la sphère intérieure est prédominante, et la sphère extérieure entraîne une partie de fluide, qui génère un écoulement azimutal dans la direction opposée et réalise une circulation de l'écoulement secondaire adjacente à la sphère extérieure. Tandis que la rotation de la sphère dans la direction opposée conduit à la formation d'une surface nodale.

**B.V.Pal'tsev, A.V.Startsev, I.I.Chechel'** [12] ont effectué une étude numérique, présentent des solutions numériques pour de larges intervalles de l'entrefer, entre 0.1 et 100. Une classification des régimes de rotation est proposée en fonction de la structure du niveau de la fonction de courant ainsi que des trajectoires de particules fluides.

A l'issue de cette recherche bibliographique, notre travail concerne l'étude d'un écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux sphères en contra rotation. Notre mémoire est scindée en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la recherche bibliographique sur les écoulements entre les sphères en rotation. Cette synthèse bibliographique sur les études théoriques, numériques et expérimentales de ce type d'écoulement permettra d'approfondir les phénomènes hydrodynamiques impliqués et donnera la chance de valider certains résultats de la présente étude.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du modèle physique considéré. Ensuite, la modélisation du problème physique par les équations différentielles aux dérivées partielles, adimensionnelles, de continuité et des quantités de mouvements (de Navier- Stokes) ainsi que les conditions initiales et aux limites appropriées. L'adimensionnalisation fera apparaître les différents paramètres contrôlant ce problème.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles par l'utilisation de la méthode de volumes finis pour discrétiser les équations modélisantes et leurs conditions initiales et aux limites. On utilisera des schémas de discrétisation du second ordre, capable de capturer les phénomènes physiques impliqués.

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude, qui sont basés sur l'augmentation de nombre de Rossby, seul paramètre de contrôle variable, à partir d'une certaine valeur. On explorera les régimes d'écoulement et on expliquera les phénomènes hydrodynamiques mis en jeu.

## **CHAPITRE 2**

## 2. Modélisation mathématique

### 2.1 Présentation du problème

On considère deux sphères concentriques, de rayons  $R_1, R_2$ . ( $R_2 > R_1$ ) qui effectuent un mouvement de contra rotation autour d'un même axe vertical passant par le centre. Les sphères, intérieure et extérieure, tournent avec des vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement dans des sens opposés. La sphère extérieure tournant dans le sens horaire tandis que la sphère intérieure tournant dans le sens antihoraire. L'espace de l'entrefer sphérique est rempli d'un fluide Newtonien incompressible à propriétés physiques constantes. La géométrie du problème est illustrée dans la figure 2.1.

Le problème physique est décrit par des équations aux dérivées partielles de continuité et de quantités de mouvements (équation de Navier –Stokes), ainsi que par leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations seront écrites dans les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , [13]. Les composantes du vecteurs vitesses suivant  $r, \theta$  et  $\phi$  sont  $U, V$  et  $W$ , respectivement.

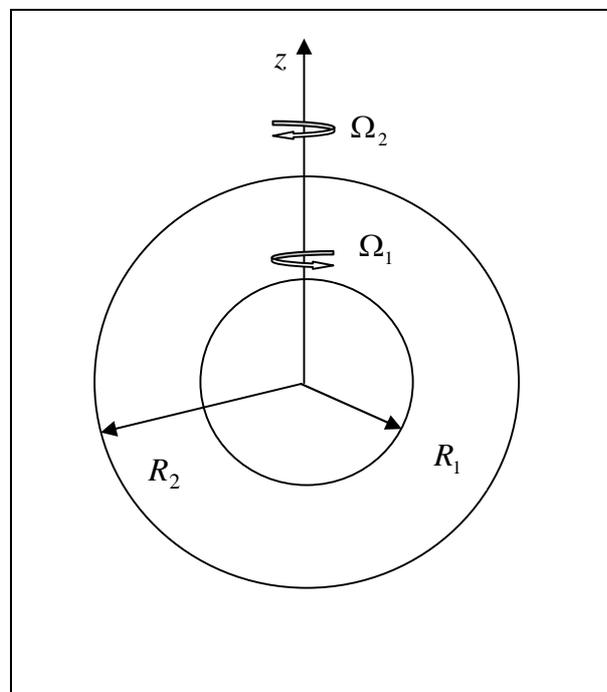


Figure 2.1: Géométrie du problème

Avec  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \phi \leq 2\pi$

## 2.2 Modèle mathématique

$$\text{A } t=0 \quad U = V = W = 0 \quad (2.1)$$

A  $t > 0$  :

### 2.2.1 Equation de continuité

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0. \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Equation de la quantité de mouvement radiale

$$\rho \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (U V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (U W) - \frac{V^2 + W^2}{r} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$\mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - \frac{2U}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) - \right. \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right]$$

### 2.2.3 Equation de la quantité de mouvement méridionale

$$\rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V W) + \frac{U V}{r} - \frac{W^2 \cot \theta}{r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} +$$

$$\mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - \frac{V}{r^2 \sin \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \right. \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right]$$

### 2.2.4 Equation de la quantité de mouvement azimutale

$$\rho \left[ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V W \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (W W) + \frac{U V}{r} - \frac{W V \cot \theta}{r} \right] = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} +$$

$$\mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W}{r^2 \sin \theta} \right]$$

### 2.2.5 Les conditions aux limites du problème

**Pour r :**

$$r = R_1 \quad U=V=0 \quad W = R_1 \Omega_1 \sin \theta$$

$$r = R_2 \quad U=V=0 \quad W = -R_2 \Omega_2 \sin \theta \quad (2.6)$$

**Pour  $\theta$  :**

$$\theta = 0 \quad V=0 \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0.$$

$$\theta = \pi \quad V=0 \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0. \quad (2.7)$$

**Pour  $\phi$  :**

Les conditions de périodicité sont :

$$U(r, \theta, \phi) = U(r, \theta, \phi + 2\pi).$$

$$V(r, \theta, \phi) = V(r, \theta, \phi + 2\pi).$$

$$W(r, \theta, \phi) = W(r, \theta, \phi + 2\pi).$$

(2.8)

### 2.3 Adimensionnalisation des variables

Les équations modélisantes adimensionnelles sont écrites dans les coordonnées sphériques. La longueur et la vitesse caractéristiques sont respectivement  $R_1$  et  $\Omega_1 R_1$ .

$$r^* = \frac{r}{R_1}. \quad \text{Distance radiale adimensionnelle.}$$

$$U^* = \frac{U}{\Omega_1 R_1}. \quad \text{Vitesse radiale adimensionnelle.}$$

$$V^* = \frac{V}{\Omega_1 R_1}. \quad \text{Vitesse méridionale adimensionnelle.}$$

$$W^* = \frac{W}{\Omega_1 R_1}. \quad \text{Vitesse azimutale adimensionnelle.}$$

$$t^* = \frac{t}{(R_1/R_1 \Omega_1)}. \quad \text{Temps adimensionnel.}$$

$$P^* = \frac{P - P_0}{\rho (\Omega_1 R_1)^2}. \quad \text{Pression adimensionnelle.}$$

$$\text{Re} = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}. \quad \text{Nombre de Reynolds (paramètre de contrôle).}$$

## 2.4 Equations de conservation adimensionnelles

La condition initiale (au temps  $t = 0$ ) du premier nombre de Rossby (-0.5) est la suivante:

$$A_{t=0}, U=V=W=0 \quad (2.9)$$

On omet décrire l'exposant (\*) pour des raisons de commodité.

Avec chaque augmentation du nombre de Rossby, l'écoulement obtenu avec le nombre de Rossby précédent est utilisé comme condition initiale. Cette initialisation minimise le temps de calcul.

Pour  $t > 0$ ,

### 2.4.1 Equation de continuité adimensionnelles

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (W) = 0 \quad (2.10)$$

### 2.4.2 Equation de la quantité de mouvement radiale adimensionnelles

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U U) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (U V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (U W) - \frac{V^2}{r} - \frac{W^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - \frac{2U}{r^2} - \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) - \right. \\ & \left. \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 2.4.3 Equation de la quantité de mouvement polaire adimensionnelles

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U V) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V W) + \frac{U V}{r} - \frac{W^2 \cot \theta}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - \frac{V}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

#### 2.4.4 Equation de la quantité de mouvement azimutale adimensionnelles

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U W)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (V W \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (W W) + \frac{U W}{r} + \frac{W V \cot \theta}{r} = \\
 & - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta \partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \right. \\
 & \left. \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W}{r^2 \sin^2 \theta} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

#### 2.5 Adimensionnalisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont:

$$\text{A } r=1, \quad U = V = 0, \quad W = \sin \theta \tag{2.14}$$

$$\text{A } r=1.5, \quad U = V = 0, \quad W = -1.5 \text{ Ro } \sin \theta \tag{2.15}$$

$$\text{A } \theta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = V = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \tag{2.16}$$

$$\text{A } \theta = \pi, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = V = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \tag{2.17}$$

Le système d'équations de conservations adimensionnelles ainsi que les conditions aux limites font apparaître le nombre de Reynolds (Re) et le nombre de Rossby (Ro) comme paramètres de contrôle de l'écoulement tandis que la géométrie est contrôlée par le rapport d'aspect géométrique ou l'entrefer sphérique ( $\beta$ ).

## 2.6 Calcul de moment angulaire

Le fluide qui s'écoule dans la couche sphérique applique un moment angulaire sur la sphère intérieure et sur la sphère extérieure. On peut calculer ce moment angulaire à partir des étapes suivantes :

Premièrement on calcul les contraintes de cisaillement à la paroi :

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \quad (2.18)$$

Et puis on calcul la force élémentaire appliquée

$$d\vec{F} = \tau_{r\phi} dS \cdot \vec{e}_\phi = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_\phi \quad (2.19)$$

L'écoulement est axisymétrique, c'est à dire qu'il n'y pas une variation suivant la direction azimutale, donc  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ .

Donc l'équation (2.19) devient :

$$d\vec{F} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_\phi \quad (2.20)$$

Donc le moment angulaire est défini comme suit

$$d\vec{M} = (r \sin \theta) \vec{e}_r \wedge d\vec{F} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right] r^4 \sin^2 \theta d\theta d\phi \vec{e}_z \quad (2.21)$$

$$dM = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) r^4 \sin^2 \theta d\theta d\phi \right] \quad (2.22)$$

Donc on peut calculer le moment angulaire appliqué sur les sphères par le fluide par la relation suivante :

$$M = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right] r^4 \sin^2 \theta d\theta d\phi \quad (2.22)$$

Et que le moment axiale de la force de cisaillement à la surface d'une sphère est défini par :

$$T = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right] r^3 \sin^2 \theta d\theta d\phi. \quad (2.23)$$

## **CHAPITRE 3**

### 3- Résolution numérique

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires au second ordre exprimées dans un système de coordonnées sphériques, équations (2.10-2.17). Cette forme ne possède pas de solution analytique. On les résout numériquement.

Dans ce chapitre on présente la méthodologie de résolution numérique du système d'équations régissant l'écoulement de Couette sphérique (l'équation de continuité et les équations de conservation de quantité de mouvement) et leurs conditions initiales et aux limites.

#### 3.1 Méthode de résolution numérique

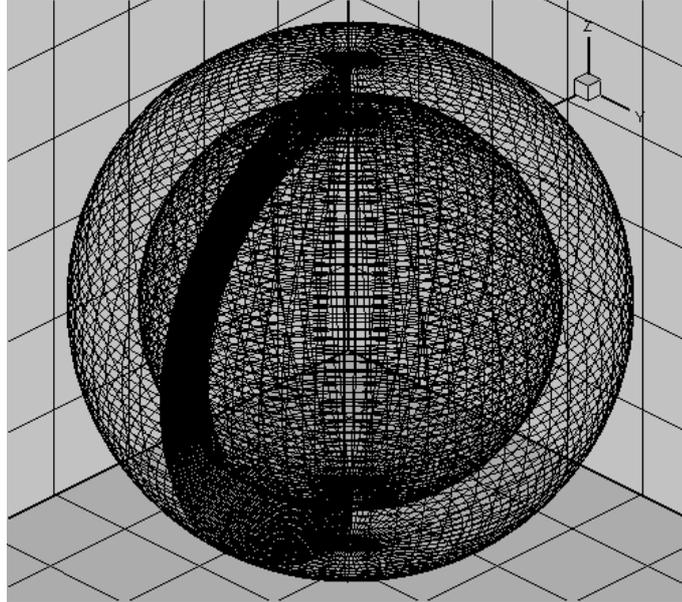
Le but est de déterminer les variables dépendantes dans le domaine numérique étudié. Parmi les nombreuses méthodes numériques qui existent en l'occurrence : les éléments finis, les volumes finis, les différences finies....., on utilise la méthode des volumes finis pour les avantages suivants :

- applicable aux géométries complexes.
- la facilité de mise en œuvre.
- le caractère conservatif de la grandeur  $\Phi$  préservé sur chaque volume de contrôle et dans tout le domaine (La continuité de flux à l'interface).

La méthode des volumes finis est bien détaillée par Patankar [14]. Elle est basée sur la discrétisation du domaine physique en un nombre fini de volume dit volume de contrôle Medjroubi [15]. Sa particularité réside dans l'intégration des équations de conservation dans chaque volume du domaine numérique étudié, et les dérivées partielles sont évaluées à l'aide des profils ou loi d'interpolation, le résultat de cette discrétisation donne un système d'équations algébriques linéaires sur un domaine discret. Enfin on résout ces équations par l'utilisation d'algorithmes de résolution.

### 3.2 Discrétisation du domaine physique

Notre domaine constitué d'un nombre fini de volumes de contrôle sera discrétisé dans la direction radiale, polaire et azimutale. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces.



**Figure3.1: le domaine numérique.**

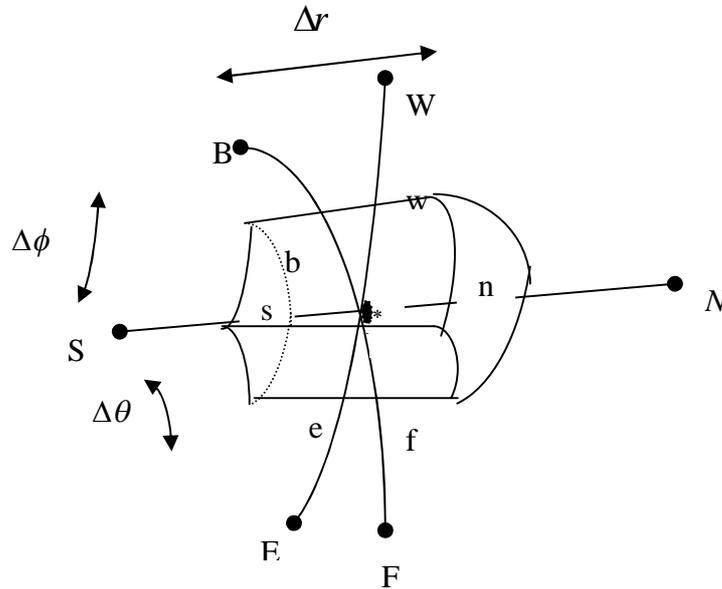
Toutes les variables scalaires telles la température et la pression sont stockées dans les nœuds tandis que les variables vectorielles tels les composantes des vitesses sont stockées dans les faces des volumes de contrôle. Pour chaque volume le point **P** est au centre du volume. Chaque volume est entouré de six volumes où sont centrés les points **N**, **S**, **B**, **F**, **E** et **W**, les faces de volume fini typique est dénommées **n**, **s**, **b**, **f**, **e** et **w** (**N** et **S** pour la direction radiale ces faces sont **n** et **s**) (**B** et **F** pour la direction méridionale ces faces sont **b** et **f**) (**E** et **W** pour la direction azimutale ces faces sont **e** et **w**).

Les distances entre deux nœuds successifs et les faces de chaque volume fini obéissent à une nomenclature précise.

Les distances entre deux nœuds successifs sont précédées par la lettre *d* et ont pour indice la lettre de la face qui sépare les deux nœuds. Quant à la distance entre les deux faces du volume fini, elle est précédée par un  $\Delta$ , et possède comme indice la lettre du nœud qui sépare les deux faces en question.

Dans notre cas le domaine physique est constitué de 32 nœuds dans la direction radiale, 189 noeuds dans la direction polaire et 32 noeuds dans la direction azimutale. Donc le

maillage utilisé est un maillage  $32 \times 189 \times 32$ , ce qui correspond à un nombre total de 193536 nœuds. La figure 3.1 illustre le domaine de calcul discrétisé et la figure 3.2 montre un volume fini typique extrait du domaine discrétisé.



**Figure 3.2: Volume fini typique.**

La modélisation des équations différentielles présente deux champs inconnus (champ de vitesse et champ de pression) et la discrétisation des équations de quantité de mouvement se fait suivant un maillage décalé. Donc pour la détermination de la vitesse radiale ( $u$ ) on décale suivant la direction radiale ( $r$ ), pour la détermination de vitesse méridionale ( $v$ ) on décale suivant la direction méridionale ( $\theta$ ), pour la détermination de vitesse azimutale ( $w$ ) on décale suivant la direction méridionale ( $\phi$ ) et le maillage non décalé est fait pour la détermination de pression ( $P$ ).

### 3.3 La discrétisation des équations de conservation

La discrétisation des équations se base sur le calcul des intégrales des équations aux dérivées partielles termes par termes sur chaque volume de contrôle pour l'obtention des équations algébriques discrétisées dans lesquels les principes sont conservés.

#### 3.3.1 Traitement des dérivées temporelles

Les dérivées temporelles dans les équations de Navier Stokes seront discrétisées au second ordre. Cette discrétisation se fait selon le schéma obtenu de la manière suivante:

Considérons le développement de Taylor d'ordre deux, de la variable dépendante  $\phi$  au temps  $t$ :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.1)$$

Maintenant, considérons le développement de Taylor toujours d'ordre deux, mais cette fois au temps  $t - \Delta t$ :

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{2\Delta t}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.2)$$

On multiplie l'équation (3.1) par 4, puis on retranche l'équation (3.2) du résultat obtenu. On obtient l'équation suivante:

$$4\phi^t - \phi^{t-\Delta t} = 3\phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^3 \quad (3.3)$$

Donc, la valeur de la dérivée temporelle au temps  $t + \Delta t$  est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux  $\Delta t^2$ . Cette discrétisation est dite d'Euler

### 3.3.2 Traitement des termes convectifs et non linéaires.

Les termes convectifs et non linéaires seront discrétisés temporellement au second ordre.

Le schéma de discrétisation est obtenu comme suit :

Considérons le développement de Taylor de la variable dépendante d'ordre un, au temps  $t$  :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le développement de Taylor, d'ordre un de la variable dépendante mais au temps  $t - \Delta t$  :

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.6)$$

On multiplie l'équation (3.5) par  $-2$ , puis on additionne l'équation résultante et l'équation (3.6). On obtient l'équation qui nous donne l'expression de la variable dépendante au temps  $t + \Delta t$  :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^t - \phi^{t-\Delta t} + o(\Delta t)^2 \quad (3.7)$$

Cette expression sera utilisée pour l'évaluation des termes convectifs et non linéaires. L'erreur est d'ordre deux. C'est la discrétisation d'Adams- Bashforth.

### 3.3.3 Traitement des termes diffusifs et de pression.

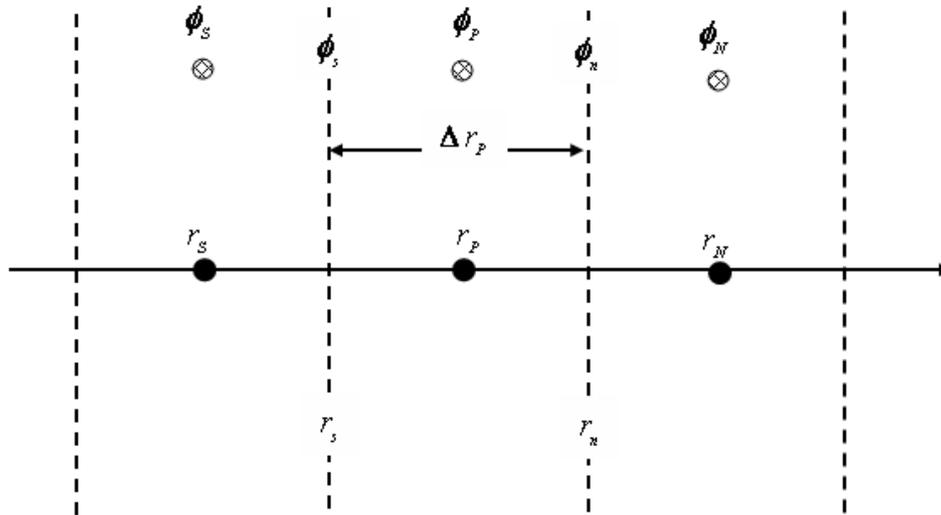
Les termes de pression ainsi que les termes diffusifs seront évalués directement au temps  $t + \Delta t$ . C'est un schéma totalement implicite.

A ce stade, les différents termes contenus dans l'équation de continuité et dans les équations de Navier Stokes, possède un schéma de discrétisation temporelle. Tous les termes seront donc évalués temporellement avec une erreur de troncature d'ordre deux.

### 3.3.4 Discrétisation spatiale

On aura besoin de connaître comment déterminer la variable dépendante aux interfaces des volumes finis. Donc il faut adopter un schéma qui décrira la variation spatiale de la variable dépendante. On a choisit dans cette étude le schéma des *différences centrées*. Ce choix implique que la valeur de la variable dépendante  $\phi$  à l'interface sera : la somme de la valeur de  $\phi$  au noeud à droite (ou dans le sens positif de l'axe de variation) et de la valeur de  $\phi$  au

noeud à gauche (ou dans le sens négatif de l'axe de variation). Les termes, droite et gauche font référence à la position des nœuds par rapport à l'interface considérée.



**Figure 3.3: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la variable dépendante à l'interface.**

En exemple, considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.3. On cherche à déterminer la valeur de la variable dépendante à l'interface  $n$ . Le développement de Taylor au premier ordre, de  $\phi$  (la variable dépendante de référence) au nœud  $N$  est donné par la formule suivante:

$$\phi_N = \phi_n + \frac{\Delta r_P}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.8)$$

Le développement de Taylor au premier ordre de  $\phi$  au nœud  $P$  est donné par l'équation suivante:

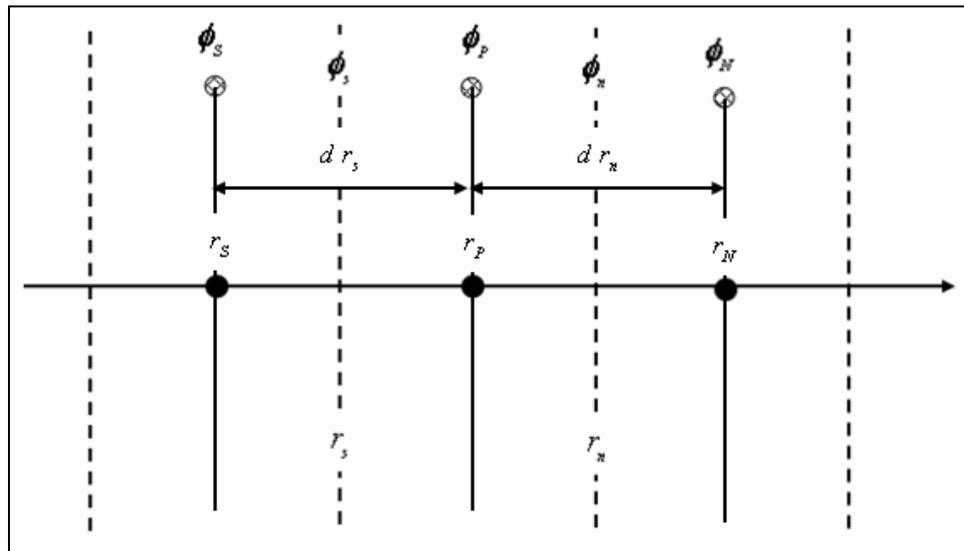
$$\phi_P = \phi_n - \frac{\Delta r_P}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_n + o(\Delta r)^2 \quad (3.9)$$

On fait l'addition des équations (3.8) et (3.9), et on obtient après réarrangement la formule suivante pour  $\phi_n$ :

$$\phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2} + o(\Delta r)^2 \quad (3.10)$$

L'erreur de troncature est d'ordre deux. C'est la formule (3.10) qui servira à évaluer la valeur de la variable dépendante aux interfaces.

En ce qui concerne l'évaluation de la dérivée spatiale à l'interface, elle est égale à la valeur de  $\phi$  au nœud à droite moins la valeur de  $\phi$  au nœud à gauche; divisée par la distance qui sépare les deux nœuds se trouvant de part et d'autre de l'interface considérée. Comme exemple considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.4, ou on cherche à évaluer la valeur de la dérivée suivant la direction radiale de  $\phi$  à l'interface  $n$ .



**Figure 3.4: Maillage unidimensionnel pour le calcul de la valeur de la dérivée radiale de la variable dépendante à l'interface.**

On reconsidère les équations (3.8) et (3.9). On multiplie l'équation (3.9) par le signe -, puis on réarrange l'équation résultante et on obtient la formule suivante pour  $\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{d r_n} + o(\Delta r)^2 \quad (3.11)$$

L'erreur qu'on réalise est d'ordre deux. C'est donc la formule donnée par l'équation (3.11) qui sera utilisée pour l'évaluation des dérivées spatiales (suivant une direction donnée) de la variable dépendante considérée, aux interfaces des volumes.

Dans tous les cas on utilise donc des discrétisation du second ordre : une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre de  $\Delta t^2$  et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta r)^2$ ,  $(\Delta \theta)^2$  et  $(\Delta \phi)^2$ .

La forme d'Euler du second ordre donnée par l'équation (3.4) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation D'Adam -Bashforth, équation (3.7) sera appliquée d'une part à tous les termes non linéaires tels les termes advectifs et d'autre part à tous les termes hybrides qui se retrouvent dans les différentes sources. Enfin la discrétisation selon un schéma totalement implicite au temps ( $t + \Delta t$ ) sera appliquée à tous les termes des gradients purement diffusifs et ceux de pression.

### 3.4 Discrétisation des équations modélisantes

On discrétise le domaine dans la direction radiale, polaire, azimutale.

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, on adopte la convention suivante en ce qui concerne l'exposant de chaque terme discrétisé:

- Les termes au temps  $t - \Delta t$  porteront l'exposant  $t - \Delta t$ .
- Les termes au temps  $t$  porteront l'exposant  $t$ .
- Les termes au temps  $t + \Delta t$  porteront l'exposant  $t + \Delta t$ .

#### 3.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité sera discrétisée dans un volume de contrôle typique, il est montré sur la figure 3.5, la figure 3.6 et la figure 3.7

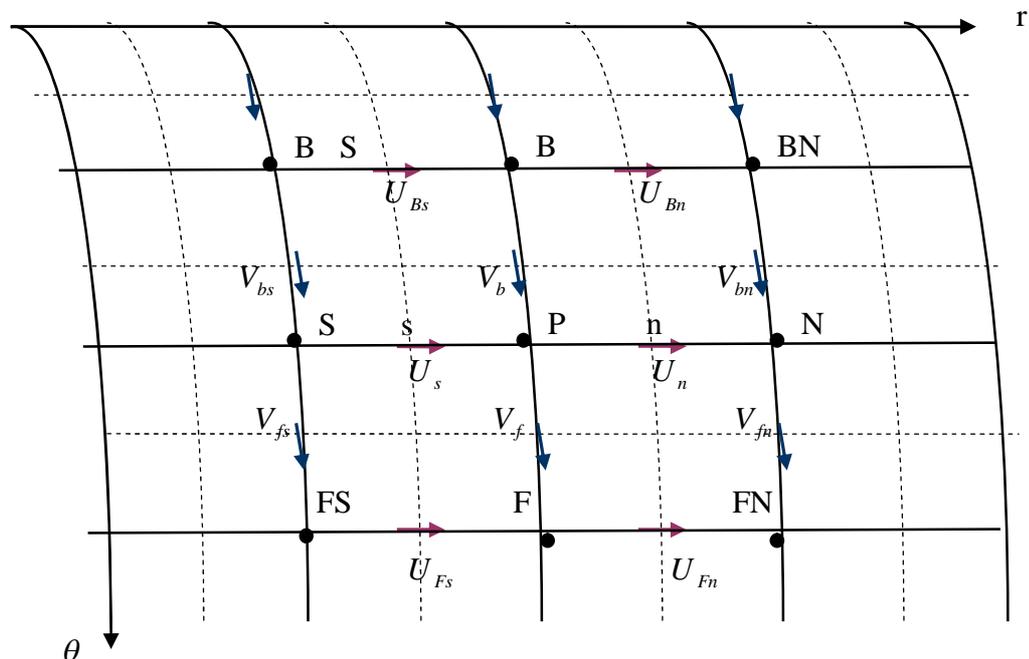


Figure 3.5 Maillage dans le plan (r- $\theta$ ).

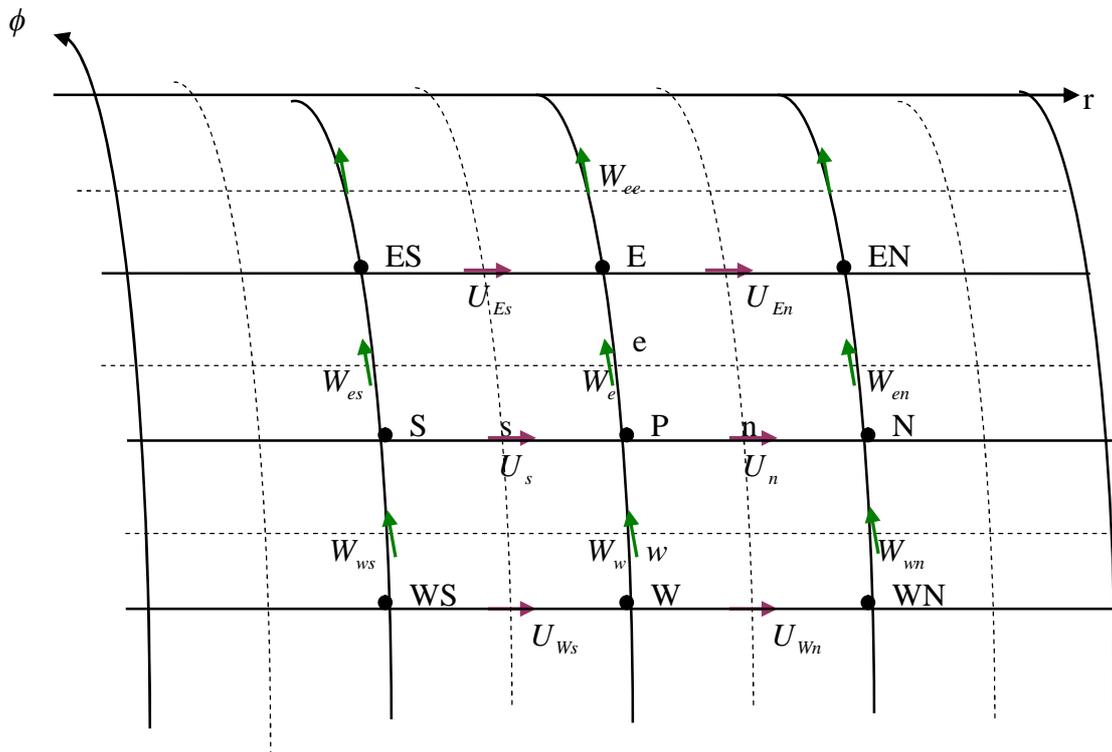


Figure 3.6 Maillage dans le plan  $(r-\phi)$ .

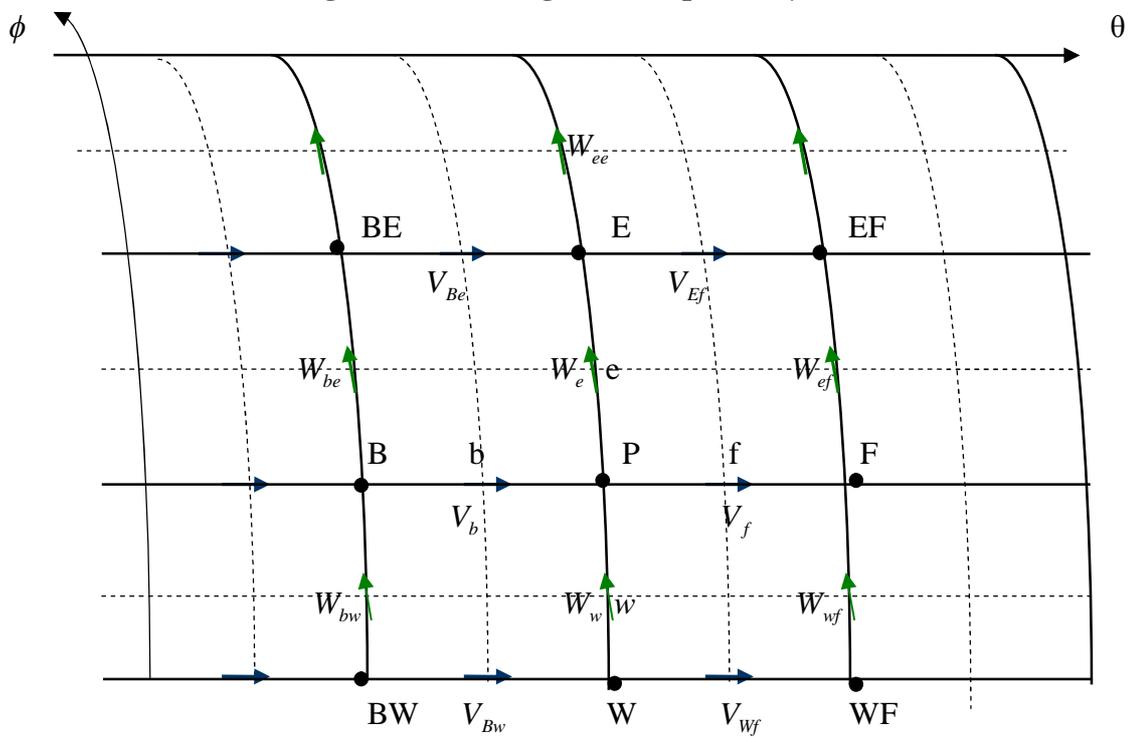


Figure 3.7 Maillage dans le plan  $(\theta-\phi)$ .

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 0$$

Les vitesses seront évaluées au temps  $t + \Delta t$  :

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U^{t+\Delta t} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin \theta_p \Delta \theta_p \Delta \phi_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( V^{t+\Delta t} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \left( V_f \sin \theta_f^{t+\Delta t} - V_b \sin \theta_b^{t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta \phi_p$$

$$\int_s^n \int_b^f \int_w^e \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (W)^{t+\Delta t}}{\partial \phi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p$$

L'équation de continuité discrétisée, s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin \theta_p \Delta \theta_p \Delta \phi_p + \left( V_f \sin \theta_f^{t+\Delta t} - V_b \sin \theta_b^{t+\Delta t} \right) \Delta r_p \Delta \phi_p \\ & + \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0 \end{aligned}$$

### 3.4.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement

Les figures 3.7 et 3.8 illustrent le maillage, décalé radialement, dans les plans  $r - \theta$  et  $r - \phi$  respectivement. Nous procéderons à la discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement terme par terme.

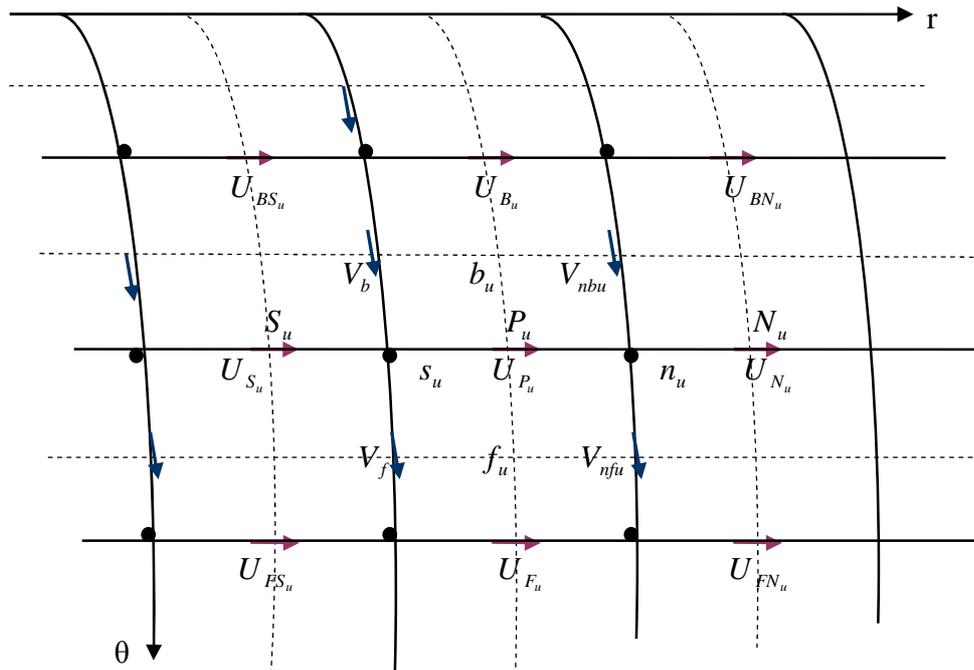


Figure 3.8 Maillage décalé suivant la direction radiale, Plan  $(r-\theta)$ .

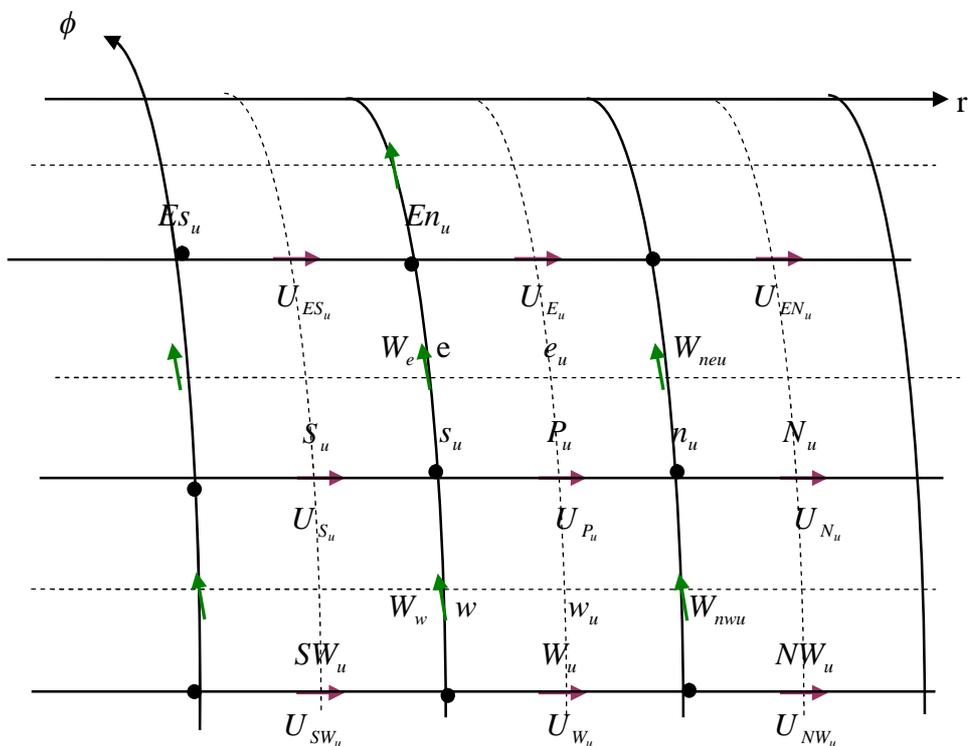


Figure 3.9 Maillage décalé suivant la direction radiale, Plan  $(r-\phi)$ .

### 3.4.2.1 Discrétisation du terme temporel

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt &= U_{P_u} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_u}^2 \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\ &= \frac{3U_{P_u}^{t+\Delta t} - 4U_{P_u}^t + U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \end{aligned}$$

### 3.4.2.2 Discrétisation des termes advectifs

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{f_u}^{e_u} \int_{w_u}^{b_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 U U \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt &= \\ \left[ 2 \left( r^2 U U \right)_{n_u}^t - 2 \left( r^2 U U \right)_{s_u}^t \right] \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P - \left[ \left( r^2 U U \right)_{n_u}^{t-\Delta t} - \left( r^2 U U \right)_{s_u}^{t-\Delta t} \right] \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\ &= \left[ 2 \left( r_{n_u}^2 U_{n_u}^t U_{n_u}^t - r_{s_u}^2 U_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left( r_{n_u}^2 U_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - r_{s_u}^2 U_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\ &= \frac{1}{2} r_{n_u}^2 \left( U_{N_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P - \frac{1}{2} r_{s_u}^2 \left( U_{S_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\ &\quad - \frac{1}{4} r_{n_u}^2 \left( U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P + \frac{1}{4} r_{s_u}^2 \left( U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\ \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( U V \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt &= \\ \left[ 2 \left( U V \right)_{f_u}^t - 2 \left( U V \right)_{b_u}^t \right] r_{P_u} \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P - \left[ \left( U V \right)_{f_u}^{t-\Delta t} - \left( U V \right)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \\ &= \left[ 2 \left( U_{f_u}^t V_{f_u}^t - U_{b_u}^t V_{b_u}^t \right) - \left( U_{f_u}^{t-\Delta t} V_{f_u}^{t-\Delta t} - U_{b_u}^{t-\Delta t} V_{b_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} dr_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \\ &= \frac{1}{2} \left( U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( V_f^t + V_{nfu}^t \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left( V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nfu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (U W) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \left[ 2 (UW)_{e_u}^t - 2 (UW)_{w_u}^t \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta \theta_P - \left[ (UW)_{e_u}^{t-\Delta t} - (UW)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta \theta_P \\
& = \left[ 2 \left( U_{e_u}^t W_{e_u}^t - U_{w_u}^t W_{w_u}^t \right) - \left( U_{e_u}^{t-\Delta t} W_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} W_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] r_{P_u} \, dr_n \, \Delta \theta_P \\
& = \frac{1}{2} \left( U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta \theta_P \\
& - \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n \, dr_n \, \Delta \theta_P \\
& - \frac{1}{4} \left( U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta \theta_P \\
& + \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n \, dr_n \, \Delta \theta_P
\end{aligned}$$

### 3.4.2.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left( \frac{V^2}{r} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& - 2 \left( V_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin \theta_p \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P + \left( V_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin \theta_p \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P \\
& = - 2 \left[ \frac{V_{nf_u}^t + V_b^t + V_f^t + V_{nb_u}^t}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_p \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P \\
& + \left[ \frac{V_{nf_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_{nb_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_p \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} - \left( \frac{W^2}{r} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& - 2 \left( W_{P_u}^2 \right)^t r_{P_u} \sin \theta_P \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P + \left( W_{P_u}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{P_u} \sin \theta_P \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P \\
& = - 2 \left[ \frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P \\
& \quad + \left[ \frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P \, dr_n \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

### 3.4.2.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{n_u}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{s_u}^{t+\Delta t} \right] \sin \theta_P \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_u}^2 \left( \frac{U_{N_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_N} \right) - r_{s_u}^2 \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta r_P} \right) \right] \sin \theta_P \, \Delta \theta_P \, \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{f_u}^{t+\Delta t} - \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{b_u}^{t+\Delta t} \right] dr_n \, \Delta \phi_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sin \theta_{f_u} \left( \frac{U_{F_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{d \theta_f} \right) - \sin \theta_{b_u} \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{B_u}^{t+\Delta t}}{d \theta_b} \right) \right] dr_n \, \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) r^2 \sin \theta \, d r \, d \theta \, d \phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right)_{e_u}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right)_{w_u}^{t+\Delta t} \right] d r_n \Delta \theta_P \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin \theta_P} \left( \frac{U_{E_u}^{t+\Delta t} - U_{P_u}^{t+\Delta t}}{d \phi_e} \right) - \frac{1}{\sin \theta_P} \left( \frac{U_{P_u}^{t+\Delta t} - U_{W_u}^{t+\Delta t}}{d \phi_w} \right) \right] d r_n \Delta \theta_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{U}{r^2} \right) r^2 \sin \theta \, d r \, d \theta \, d \phi \, dt = - \frac{2}{\text{Re}} U_{P_u}^{t+\Delta t} \sin \theta_P \, d r_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

### 3.4.2.5 Discrétisation des autres termes à droite

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) r^2 \sin \theta \, d r \, d \theta \, d \phi \, dt = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ 2 (V \sin \theta)_{f_u}^t - 2 (V \sin \theta)_{b_u}^t \right] d r_n \Delta \phi_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ (V \sin \theta)_{f_u}^{t-\Delta t} - (V \sin \theta)_{b_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \Delta \phi_P \\
& = - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_f^t + V_{nf_u}^t \right) \sin \theta_{f_u} - \left( V_{nb_u}^t + V_b^t \right) \sin \theta_{b_u} \right] d r_n \Delta \phi_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nf_u}^{t-\Delta t} \right) \sin \theta_{f_u} - \left( V_{nb_u}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \sin \theta_{b_u} \right] d r_n \Delta \phi_P \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} r^2 \sin \theta \, d r \, d \theta \, d \phi \, dt = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ (2W)_{e_u}^t - (2W)_{w_u}^t \right] d r_n \Delta \theta_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[ (W)_{e_u}^{t-\Delta t} - (W)_{w_u}^{t-\Delta t} \right] d r_n \Delta \theta_P \\
& = - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] d r_n \Delta \theta_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] d r_n \Delta \theta_P
\end{aligned}$$

### 3.4.2.6 Discrétisation du terme de pression

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{f_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_t^{t+\Delta t} -\frac{\partial P}{\partial r} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \left( P_{n_u}^{t+\Delta t} - P_{s_u}^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

$$= \left( P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t} \right) r_{P_u}^2 \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

On réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme suivante, cette forme est dite forme générale:

$$A_{P_u} U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} U_{S_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} U_{F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} U_{B_u}^{t+\Delta t}$$

$$+ A_{E_u} U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} U_{W_u}^{t+\Delta t} + S_u$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$A_{P_u} = \frac{3}{2\Delta t} r_n^2 \sin\theta_p \, dr_n \Delta\theta_p \Delta\phi_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_N} \frac{r_N^2}{\text{Re} \Delta r_N} \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p + \frac{1}{\text{Re} \Delta r_P} \frac{r_P^2}{\text{Re} \Delta r_P} \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin\theta_f}{d\theta_f} dr_n \Delta\phi_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin\theta_b}{d\theta_b} dr_n \Delta\phi_p$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dr_n \Delta\theta_p}{\sin\theta_p d\phi_e} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dr_n \Delta\theta_p}{\sin\theta_p d\phi_w} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \sin\theta_p \, dr_n \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

$$A_{N_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_N^2}{\Delta r_N} \right) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

$$A_{S_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_P^2}{\Delta r_P} \right) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p$$

$$A_{F_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin\theta_f}{d\theta_f} \right) dr_n \Delta\phi_p$$

$$A_{B_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin\theta_b}{d\theta_b} \right) dr_n \Delta\phi_p$$

$$A_{E_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d r_n \Delta \theta_p}{\sin \theta_p d \phi_e} \right)$$

$$A_{W_u} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d r_n \Delta \theta_p}{\sin \theta_p d \phi_w} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_u &= \frac{4U_{P_u}^t}{2\Delta t} r_n^2 \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P - \frac{U_{P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_n^2 \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad - \frac{1}{2} r_N^2 \left( U_{N_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P + \frac{1}{2} r_P^2 \left( U_{S_u}^t + U_{P_u}^t \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad + \frac{1}{4} r_N^2 \left( U_{N_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P - \frac{1}{4} r_P^2 \left( U_{S_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right)^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( U_{F_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( V_f^t + V_{nfu}^t \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{B_u}^t \right) \left( V_b^t + V_{nbu}^t \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( U_{F_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_f^{t-\Delta t} + V_{nfu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{B_u}^{t-\Delta t} \right) \left( V_b^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \sin \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( U_{E_u}^t + U_{P_u}^t \right) \left( W_{neu}^t + W_e^t \right) r_n dr_n \Delta \theta_P \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( U_{P_u}^t + U_{W_u}^t \right) \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) r_n dr_n \Delta \theta_P \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( U_{E_u}^{t-\Delta t} + U_{P_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta \theta_P \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( U_{P_u}^{t-\Delta t} + U_{W_u}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) r_n dr_n \Delta \theta_P \\
&\quad + 2 \left[ \frac{V_{nfu}^t + V_{nbu}^t + V_f^t + V_b^t}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
&\quad - \left[ \frac{V_{nfu}^{t-\Delta t} + V_{nbu}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[ \frac{W_{neu}^t + W_e^t + W_w^t + W_{nwu}^t}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
& - \left[ \frac{W_{neu}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{nwu}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_n \sin \theta_P dr_n \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ V_{nfv}^t + V_f^t \right] \sin \theta_f dr_n \Delta \phi_P + \frac{2}{\text{Re}} \left[ V_{nbu}^t + V_b^t \right] \sin \theta_b dr_n \Delta \phi_P \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ V_{nfv}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right] \sin \theta_f dr_n \Delta \phi_P - \frac{1}{\text{Re}} \left[ V_{nbu}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right] \sin \theta_b dr_n \Delta \phi_P \\
& - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^t + W_{neu}^t \right) - \left( W_{nwu}^t + W_w^t \right) \right] dr_n \Delta \theta_P \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_e^{t-\Delta t} + W_{neu}^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{nwu}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] dr_n \Delta \theta_P \\
& + (P_P - P_N) r_n^2 \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P
\end{aligned}$$

### 3.4.3 Discrétisation de la composante polaire de l'équation de quantité de mouvement

Les figures 3.10 et 3.11 illustrent le maillage décalé dans la direction polaire, dans les plans  $r - \theta$  et  $\theta - \phi$  respectivement

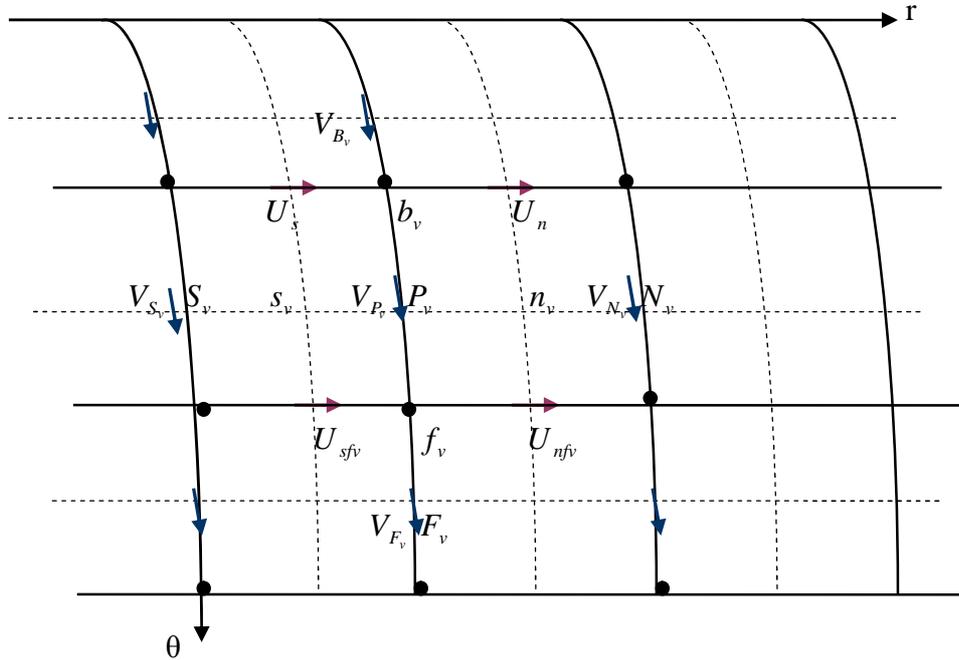


Figure 3.10 Maillage décalé suivant la direction méridionale, Plan  $(r - \theta)$ .



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} r_n^2 \left( U_n^{t-\Delta t} + U_{nf_v}^{t-\Delta t} \right) \left( V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p \\
& + \frac{1}{4} r_s^2 \left( U_s^{t-\Delta t} + U_{sf_v}^{t-\Delta t} \right) \left( V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p \\
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V V) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& \left[ 2(VV)_{f_v}^t - 2(VV)_{b_v}^t \right] r_{P_v} \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p - \left[ (VV)_{f_v}^{t-\Delta t} - (VV)_{b_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
& = \left[ \left( 2 V_{f_v}^t V_{f_v}^t - 2 V_{b_v}^t V_{b_v}^t \right) - \left( V_{f_v}^{t-\Delta t} V_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{b_v}^{t-\Delta t} V_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
& = \frac{1}{2} \left( V_{F_v}^t + V_{P_v}^t \right)^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p - \frac{1}{2} \left( V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right)^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
& - \frac{1}{4} \left( V_{F_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p + \frac{1}{4} \left( V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right)^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V W) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& \left[ 2(VW)_{e_v}^t - 2(VW)_{w_v}^t \right] r_{P_v} \Delta r_p d\theta_f - \left[ (VW)_{e_v}^{t-\Delta t} - (VW)_{w_v}^{t-\Delta t} \right] r_{P_v} \Delta r_p d\theta_f \\
& = \left[ \left( 2V_{f_v}^t W_{f_v}^t - 2V_{w_v}^t W_{w_v}^t \right) - \left( V_{f_v}^{t-\Delta t} W_{f_v}^{t-\Delta t} - V_{w_v}^{t-\Delta t} W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p d\theta_f \\
& = \frac{1}{2} \left( V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right) \left( W_{f_{ev}}^t + W_e^t \right) r_p \Delta r_p d\theta_f - \frac{1}{2} \left( V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right) \left( W_w^t + W_{f_{wv}}^t \right) r_p \Delta r_p d\theta_f \\
& - \frac{1}{4} \left( V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) \left( W_{f_{ev}}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) r_p \Delta r_p d\theta_f \\
& + \frac{1}{4} \left( V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right) \left( W_w^{t-\Delta t} + W_{f_{wv}}^{t-\Delta t} \right) r_p \Delta r_p d\theta_f
\end{aligned}$$

### 3.4.3.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{UV}{r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& 2 \left( U_{P_v}^t V_{P_v}^t \right) r_{P_v} \sin \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p - \left( U_{P_v}^{t-\Delta t} V_{P_v}^{t-\Delta t} \right) r_{P_v} \sin \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[ \left( \frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p \\
&- \left[ \left( \frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p \\
&\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} - \left( W^2 \frac{\cot \theta}{r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
&- 2 \left( W_{P_v}^2 \right)^t r_{p_v} \cos \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p + \left( W_{P_v}^2 \right)^{t-\Delta t} r_{p_v} \cos \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p \\
&= -2 \left[ \frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{fvv}^t}{4} \right]^2 r_p \cos \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p \\
&+ \left[ \frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fvv}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p
\end{aligned}$$

#### 3.4.3.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
&\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{n_v}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{s_v}^{t+\Delta t} \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_v}^2 \left( \frac{V_{N_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) - r_{s_v}^2 \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{S_v}^{t+\Delta t}}{d r_n} \right) \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\
&\frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
&\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{f_v}^{t+\Delta t} - \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{b_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \Delta \phi_p \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sin \theta_{f_v} \left( \frac{V_{F_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \theta_F} \right) - \sin \theta_{b_v} \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{B_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \theta_P} \right) \right] \Delta r_p \Delta \phi_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{e_v}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{w_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, d\theta_f \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin \theta_f} \left( \frac{V_{E_v}^{t+\Delta t} - V_{P_v}^{t+\Delta t}}{d\phi_e} \right) - \frac{1}{\sin \theta_f} \left( \frac{V_{P_v}^{t+\Delta t} - V_{W_v}^{t+\Delta t}}{d\phi_w} \right) \right] \Delta r_p \, d\theta_f
\end{aligned}$$

### 3.4.3.5 discrétisation des autres termes à droite

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{V}{r^2 \sin^2 \theta} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = - \frac{1}{\text{Re} \sin \theta_f} V_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta r_p \, d\theta_f \, \Delta \phi_p \\
& \frac{2}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2U_{f_v}^t - 2U_{b_v}^t \right) \sin \theta_f \, \Delta r_p \, \Delta \phi_p - \left( U_{f_v}^{t-\Delta t} - U_{b_v}^{t-\Delta t} \right) \sin \theta_f \, \Delta r_p \, \Delta \phi_p \right] \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t}{2} \right) - \left( \frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \sin \theta_f \, \Delta r_p \, \Delta \phi_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \sin \theta_f \, \Delta r_p \, \Delta \phi_p \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left( 2W_{e_v}^t - 2W_{w_v}^t \right) \cot \theta_f \, \Delta r_p \, d\theta_f + \frac{2}{\text{Re}} \left( W_{e_v}^{t-\Delta t} - W_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \cot \theta_f \, \Delta r_p \, d\theta_f \\
& = - \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{fev}^t + W_e^t}{2} \right) - \left( \frac{W_{fww}^t + W_w^t}{2} \right) \right] \cot \theta_f \, \Delta r_p \, d\theta_f \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{W_{fww}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot \theta_f \, \Delta r_p \, d\theta_f
\end{aligned}$$

### 3.4.3.6 Discrétisation du terme de pression

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{f_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = - \left( P_{f_v}^{t+\Delta t} - P_{b_v}^{t+\Delta t} \right) r_{p_v} \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p$$

$$= \left( P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$A_{P_v} V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_{N_v} V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{S_v}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{F_v}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{B_v}^{t+\Delta t}$$

$$+ A_{E_v} V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{W_v}^{t+\Delta t} + S_v$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$A_{P_v} = \frac{3V_{P_v}^{t+\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_n^2}{d r_n} \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_s^2}{d r_s} \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin \theta_F}{\Delta \theta_F} \Delta r_p \Delta \phi_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\sin \theta_P}{\Delta \theta_P} \Delta r_p \Delta \phi_p$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d\theta_p}{\sin \theta_f d\phi_e} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d\theta_p}{\sin \theta_f d\phi_w} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p}{\sin \theta_f}$$

$$A_{N_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_n^2}{d r_n} \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p \right)$$

$$A_{S_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_s^2}{d r_s} \sin \theta_f d\theta_f \Delta \phi_p \right)$$

$$A_{F_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin \theta_F}{\Delta \theta_F} \Delta r_p \Delta \phi_p \right)$$

$$A_{B_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin \theta_p}{\Delta \theta_p} \Delta r_p \Delta \phi_p \right)$$

$$A_{E_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta r_p d \theta_p}{\sin \theta_f d \phi_e} \right)$$

$$A_{W_v} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\Delta r_p d \theta_p}{\sin \theta_f d \phi_w} \right)$$

$$\begin{aligned} S_v &= \frac{2V_{P_v}^t}{\Delta t} r_p^2 \sin \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p - \frac{V_{P_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin \theta_f \Delta r_p d \theta_f \Delta \phi_p \\ &\quad - \frac{1}{2} r_n^2 \left[ U_{nfv}^t + U_n^t \right] \left[ V_{N_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\ &\quad + \frac{1}{2} r_s^2 \left[ U_{sfv}^t + U_s^t \right] \left[ V_{S_v}^t + V_{P_v}^t \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\ &\quad + \frac{1}{4} r_n^2 \left[ U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right] \left[ V_{N_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\ &\quad - \frac{1}{4} r_s^2 \left[ U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right] \left[ V_{S_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \sin \theta_f d \theta_f \Delta \phi_p \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right]^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p + \frac{1}{2} \left[ V_{P_v}^t + V_{B_v}^t \right]^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p - \frac{1}{4} \left[ V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{B_v}^{t-\Delta t} \right]^2 r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ V_{E_v}^t + V_{P_v}^t \right] \left[ W_{fev}^t + W_e^t \right] r_p \Delta r_p d \theta_f \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ V_{P_v}^t + V_{W_v}^t \right] \left[ W_{fvv}^t + W_w^t \right] r_p \Delta r_p d \theta_f \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ V_{E_v}^{t-\Delta t} + V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] \left[ W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d \theta_f \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ V_{P_v}^{t-\Delta t} + V_{W_v}^{t-\Delta t} \right] \left[ W_{fvv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right] r_p \Delta r_p d \theta_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[ \left( \frac{U_{nfv}^t + U_{sfv}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) V_{P_v}^t \right] r_p \sin \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p \\
& + \left[ \left( \frac{U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{P_v}^{t-\Delta t} \right] r_p \sin \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p \\
& -2 \left[ \frac{W_{fev}^t + W_e^t + W_w^t + W_{fvv}^t}{4} \right]^2 r_p \cos \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p \\
& + \left[ \frac{W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} + W_{fvv}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 r_p \cos \theta_f \Delta r_p d\theta_f \Delta \phi_p \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{nfv}^t + U_{sfv}^t \right) - \left( U_n^t + U_s^t \right) \right] \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( U_{nfv}^{t-\Delta t} + U_{sfv}^{t-\Delta t} \right) - \left( U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( W_{fev}^t + W_e^t \right) - \left( W_{fvv}^t + W_w^t \right) \right] \cot \theta_f \Delta r_p d\theta_f \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( W_{fev}^{t-\Delta t} + W_e^{t-\Delta t} \right) - \left( W_{fvv}^{t-\Delta t} + W_w^{t-\Delta t} \right) \right] \cot \theta_f \Delta r_p d\theta_f \\
& + \left( P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t} \right) r_p \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p
\end{aligned}$$

#### 3.4.4 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement

Les figures 3.14 et 3.15 illustrent le maillage décalé dans la direction azimutale, dans les plans  $r - \phi$  et  $\theta - \phi$ , respectivement. La composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement sera discrétisée dans le maillage décalé terme par terme, spatialement et temporellement

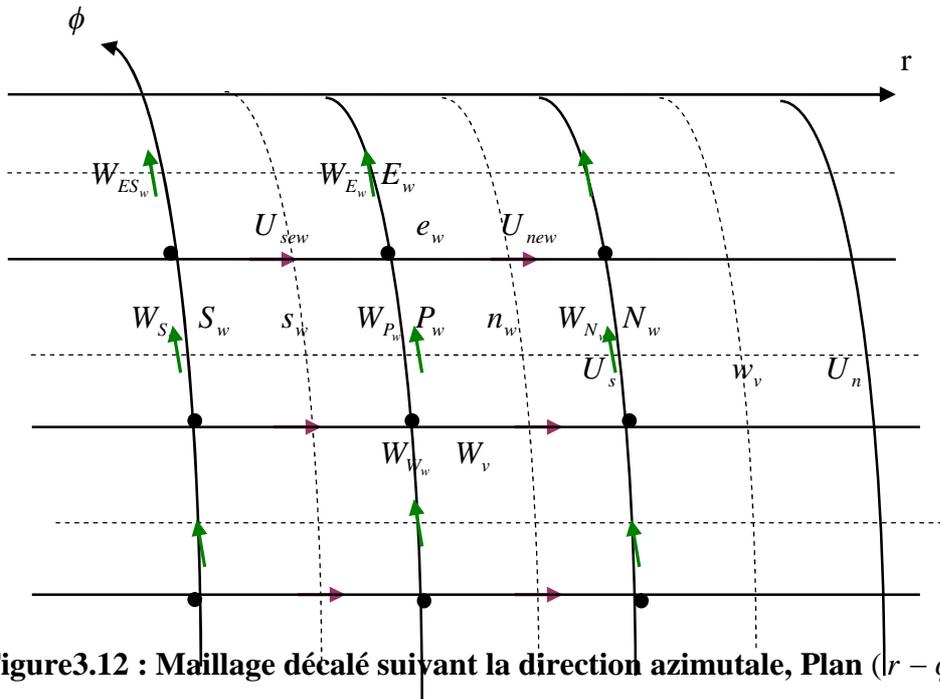


Figure 3.12 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, Plan  $(r - \phi)$ .

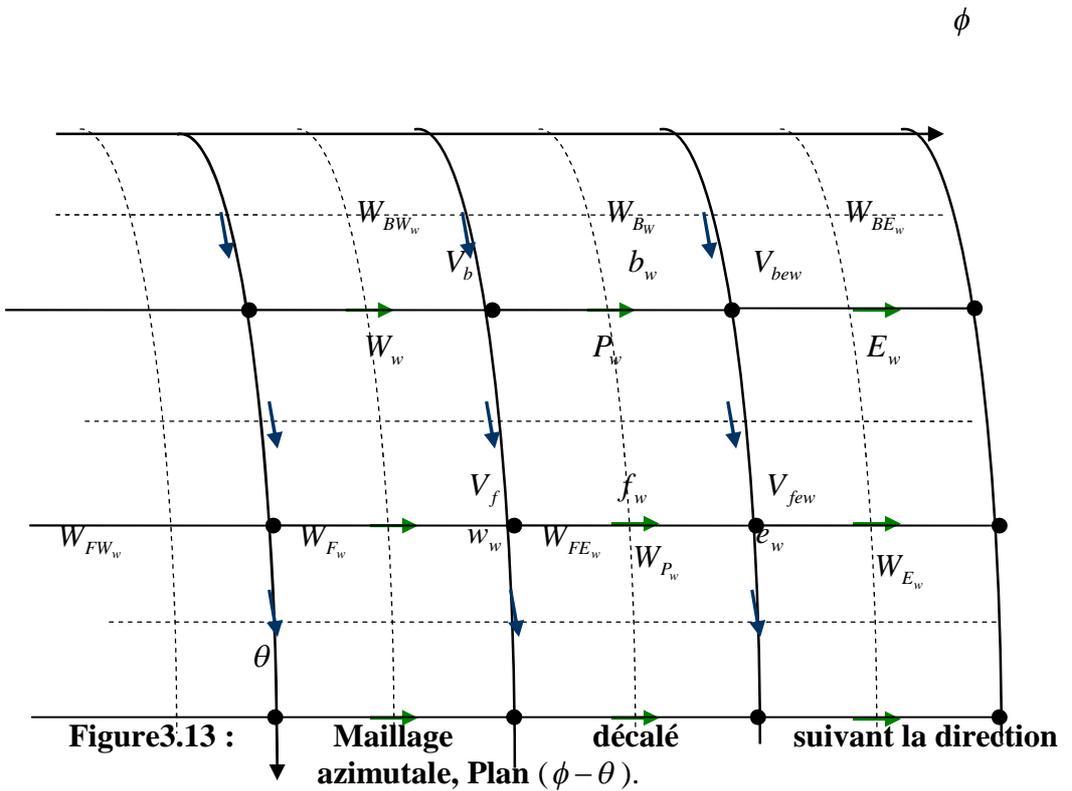


Figure 3.13 : Maillage décalé suivant la direction azimutale, Plan  $(\phi - \theta)$ .

### 3.4.4.1 Discrétisation du terme temporel

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi dt = W_{P_w} \Big|_t^{t+\Delta t} r_{P_w}^2 \sin\theta_e \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e \\
& = \frac{3W_{P_w}^{t+\Delta t} - 4W_{P_w}^t + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin\theta_e \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

#### 3.4.4.2 Discrétisation des termes advectifs

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{e_w} \int_{w_w}^{t+\Delta t} \int_t \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U W) \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi dt = \\
& \left[ 2(r^2 U W)_{n_w}^t - 2(r^2 U W)_{s_w}^t \right] \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e - \left[ (r^2 U W)_{n_w}^{t-\Delta t} - (r^2 U W)_{s_w}^{t-\Delta t} \right] \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
& = \left[ \left( 2r_{n_w}^2 U_{n_w}^t W_{n_w}^t - 2r_{s_w}^2 U_{s_w}^t W_{s_w}^t \right) - \left( r_{n_w}^2 U_{n_w}^{t-\Delta t} W_{n_w}^{t-\Delta t} - r_{s_w}^2 U_{s_w}^{t-\Delta t} W_{s_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
& = 2r_{n_w}^2 \left( \frac{U_{new}^t + U_n^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{N_w}^t}{2} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
& - 2r_{s_w}^2 \left( \frac{U_{sew}^t + U_s^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{S_w}^t}{2} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
& - r_{n_w}^2 \left( \frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
& + r_{s_w}^2 \left( \frac{U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V W \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& = \left[ 2(VW)_{f_w}^t - 2(VW)_{b_w}^t \right] r_{P_w} \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e - \left[ (VW)_{f_w}^{t-\Delta t} - (VW)_{b_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e \\
& = \left[ \left( 2V_{f_w}^t W_{f_w}^t - 2V_{b_w}^t W_{b_w}^t \right) - \left( V_{f_w}^{t-\Delta t} W_{f_w}^{t-\Delta t} - V_{b_w}^{t-\Delta t} W_{b_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e \\
& = 2 \left( \frac{V_{f_w}^t + V_f^t}{2} \right) \left( \frac{W_{F_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e \\
& - 2 \left( \frac{V_{b_w}^t + V_b^t}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{B_w}^t}{2} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e \\
& - \left( \frac{V_{f_w}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e \\
& + \left( \frac{V_{b_w}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p \, d\phi_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} W W \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \left[ 2(WW)_{e_w}^t - 2(WW)_{w_w}^t \right] r_{P_w} \Delta r_p \Delta \theta_p - \left[ (WW)_{e_w}^{t-\Delta t} - (WW)_{w_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& = \left[ \left( 2W_{e_w}^t W_{e_w}^t - 2W_{w_w}^t W_{w_w}^t \right) - \left( W_{e_w}^{t-\Delta t} W_{e_w}^{t-\Delta t} - W_{w_w}^{t-\Delta t} W_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& = \left\{ 2 \left( \frac{W_{E_w}^t + W_{P_w}^t}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{W_{P_w}^t + W_{W_w}^t}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& - \left\{ \left( \frac{W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 - \left( \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 \right\} r_p \Delta r_p \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

### 3.4.4.3 Discrétisation des autres termes à gauche

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{UW}{r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& = \left[ 2(UW)_{P_w}^t - (UW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] r_{P_w} \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& = 2 \left[ \left( \frac{U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t}{4} \right) W_{P_w}^t \right] r_p \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& - \left[ \left( \frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t}}{4} \right) W_e^t \right] r_p \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{VW}{r} \cot \theta \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& \left[ 2(VW)_{P_w}^t - (VW)_{P_w}^{t-\Delta t} \right] \cot \theta_e r_{P_w} \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& = 2 \left( \frac{V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t}{4} \right) W_{P_w}^t \cot \theta_e r_p \sin \theta_p \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& - \left( \frac{V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t}}{4} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot \theta_e r_p \sin \theta_p \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

### 3.4.4.4 Discrétisation des termes diffusifs

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{n_w}^{t+\Delta t} - \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{s_w}^{t+\Delta t} \right] \sin \theta_e \Delta \theta_p d\phi_e \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ r_{n_w}^2 \left( \frac{W_{N_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{dr_n} \right) - r_{s_w}^2 \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{S_w}^{t+\Delta t}}{dr_s} \right) \right] \sin \theta_e \Delta \theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{f_w}^{t+\Delta t} - \left( \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{b_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, d\phi_e \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{W_{F_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{d\theta_f} \right) \sin \theta_{f_w} - \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{B_w}^{t+\Delta t}}{d\theta_b} \right) \sin \theta_{b_w} \right] \Delta r_p \, d\phi_e \\
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)_{e_w}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)_{w_w}^{t+\Delta t} \right] \Delta r_p \, \Delta \theta_p \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sin \theta_{e_w}} \left( \frac{W_{E_w}^{t+\Delta t} - W_{P_w}^{t+\Delta t}}{\Delta \phi_E} \right) - \frac{1}{\sin \theta_{w_w}} \left( \frac{W_{P_w}^{t+\Delta t} - W_{W_w}^{t+\Delta t}}{\Delta \phi_P} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

#### 3.4.4.5 Discrétisation des autres termes à droite

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2U_{e_w}^t - 2U_{w_w}^t \right) - \left( U_{e_w}^{t-\Delta t} - U_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta \theta_p \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{new}^t + U_{sew}^t}{2} \right) - \left( \frac{U_n^t + U_s^t}{2} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta \theta_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta r_p \, \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = \\
& = \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( 2V_{e_w}^t - 2V_{w_w}^t \right) - \left( V_{e_w}^{t-\Delta t} - V_{w_w}^{t-\Delta t} \right) \right] \cot \theta_e \Delta r_P \Delta \theta_P \\
& = \frac{4}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_{f_w}^t + V_{b_w}^t}{2} \right) - \left( \frac{V_f^t + V_b^t}{2} \right) \right] \cot \theta_e \Delta r_P \Delta \theta_P \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{V_{f_w}^{t-\Delta t} + V_{b_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \cot \theta_e \Delta r_P \Delta \theta_P \\
& - \frac{1}{\text{Re}} \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{W}{r^2 \sin^2 \theta} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt = - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin \theta_e} \right) W_{P_w}^{t+\Delta t} \Delta r_P \Delta \theta_P \, d\phi_e
\end{aligned}$$

#### 3.4.4.6 Discrétisation du terme de pression

$$\begin{aligned}
- \int_{s_w}^{n_w} \int_{b_w}^{f_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, dt & = - \left[ P_{e_w} - P_{w_w} \right] r_{P_w} \Delta r_P \Delta \theta_P \\
& = \left[ P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right] r_P \Delta r_P \Delta \theta_P
\end{aligned}$$

Ensuite on réécrit l'équation de quantité de mouvement ainsi discrétisée sous la forme généralisée:

$$\begin{aligned}
A_{P_w} W_{P_w}^{t+\Delta t} & = A_{N_w} W_{N_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} W_{S_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} W_{F_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} W_{B_w}^{t+\Delta t} \\
& + A_{E_w} W_{E_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} W_{W_w}^{t+\Delta t} + S_w
\end{aligned}$$

Les coefficients  $A_i$  seront:

$$\begin{aligned}
A_{P_w} &= \frac{3}{2\Delta t} r_p^2 \sin\theta_e \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e + \frac{\gamma_1 r_n^2}{d r_n} \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e + \frac{\gamma_1 r_s^2}{d r_s} \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \\
&+ \frac{\gamma_1 \sin\theta_f}{d\theta_f} \Delta r_p d\phi_e + \frac{\gamma_1 \sin\theta_b}{d\theta_b} \Delta r_p d\phi_e + \frac{\gamma_1}{\sin\theta_e \Delta\phi_E} \Delta r_p \Delta\theta_p + \frac{\gamma_1}{\sin\theta_e \Delta\phi_P} \Delta r_p \Delta\theta_p \\
&+ \frac{\gamma_1}{\sin\theta_e} \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e
\end{aligned}$$

$$A_{N_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_n^2}{d r_n} \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \right)$$

$$A_{S_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{r_s^2}{d r_s} \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e \right)$$

$$A_{F_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin\theta_f}{d\theta_f} \Delta r_p d\phi_e \right)$$

$$A_{B_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\sin\theta_b}{d\theta_b} \Delta r_p d\phi_e \right)$$

$$A_{E_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin\theta_e \Delta\phi_E} \Delta r_p \Delta\theta_p \right)$$

$$A_{W_w} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\sin\theta_e \Delta\phi_P} \Delta r_p \Delta\theta_p \right)$$

$$s_v = \frac{4W_{P_w}^t}{2\Delta t} r_p^2 \sin\theta_e \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e - \frac{W_{P_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} r_p^2 \sin\theta_e \Delta r_p \Delta\theta_p d\phi_e$$

$$- \frac{1}{2} r_{n_w}^2 \left( U_{new}^t + U_n^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{N_w}^t \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e$$

$$+ \frac{1}{2} r_{s_w}^2 \left( U_{sew}^t + U_s^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{S_w}^t \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e$$

$$+ \frac{1}{4} r_{n_w}^2 \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{N_w}^{t-\Delta t} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e$$

$$- \frac{1}{4} r_{s_w}^2 \left( U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{S_w}^{t-\Delta t} \right) \sin\theta_e \Delta\theta_p d\phi_e$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left( V_{few}^t + V_f^t \right) \left( W_{F_w}^t + W_{P_w}^t \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p d\phi_e \\
& + \frac{1}{2} \left( V_{bew}^t + V_b^t \right) \left( W_{P_w}^t + W_{B_w}^t \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p d\phi_e \\
& + \frac{1}{4} \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} \right) \left( W_{F_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p d\phi_e \\
& - \frac{1}{4} \left( V_{bew}^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{B_w}^{t-\Delta t} \right) r_p \sin \theta_e \Delta r_p d\phi_e \\
& - \left[ \frac{1}{2} \left( W_{E_w}^t + W_{P_w}^t \right)^2 - \frac{1}{2} \left( W_{P_w}^t + W_{W_w}^t \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& + \left[ \frac{1}{4} \left( W_{E_w}^{t-\Delta t} + W_{P_w}^{t-\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( W_{P_w}^{t-\Delta t} + W_{W_w}^{t-\Delta t} \right)^2 \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& - \frac{1}{2} \left( U_{new}^t + U_{sew}^t + U_s^t + U_n^t \right) W_{P_w}^t r_p \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& + \frac{1}{4} \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} + U_n^{t-\Delta t} \right) W_e^t r_p \sin \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& - \frac{1}{2} \left( V_{few}^t + V_f^t + V_b^t + V_{bew}^t \right) W_{P_w}^t \cot \theta_e r_p \sin \theta_p \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& + \frac{1}{4} \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) W_{P_w}^{t-\Delta t} \cot \theta_e r_p \sin \theta_p \Delta r_p \Delta \theta_p d\phi_e \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{new}^t + U_{sew}^t \right) - \left( U_n^t + U_s^t \right) \right] \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( U_{new}^{t-\Delta t} + U_{sew}^{t-\Delta t} \right) - \left( U_n^{t-\Delta t} + U_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& + \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_{few}^t + V_{bew}^t \right) - \left( V_f^t + V_b^t \right) \right] \cot \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& - \frac{2}{\text{Re}} \left[ \left( V_{few}^{t-\Delta t} + V_{bew}^{t-\Delta t} \right) - \left( V_f^{t-\Delta t} + V_b^{t-\Delta t} \right) \right] \cot \theta_e \Delta r_p \Delta \theta_p \\
& + \left[ P_E^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t} \right] r_p \Delta r_p \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

### 3.4.5 Discrétisation des conditions aux limites

**Pour U:** Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse radiale sont:

$$\begin{cases} A & r=1, U=0 \\ A & r=1.5, U=0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} A & \theta=0, \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ A & \theta = \pi, \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p(1, j, k) = 1 \\ S_c(1, j, k) = 0 \\ A_p(il-1, j, k) = 1 \\ S_c(il-1, j, k) = 0 \\ A_p(i, 1, k) = 1 \\ A_f(i, 1, k) = 1 \\ A_p(i, jl, k) = 1 \\ A_b(i, jl, k) = 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

**Pour V:** Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse méridionale sont:

$$\begin{cases} A & r=1, V=0 \\ A & r=1.5, V=0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} A & \theta=0, V=0 \\ A & \theta=\pi, V=0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p(1, j, k) = 1 \\ S_c(1, j, k) = 0 \\ A_p(il, j, k) = 1 \\ S_c(il, j, k) = 0 \\ A_p(i, 1, k) = 1 \\ S_c(i, 1, k) = 0 \\ A_p(i, jl-1, k) = 1 \\ S_c(i, jl-1, k) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

**Pour W:** Les conditions aux limites en ce qui concerne la vitesse azimutale sont:

$$\begin{cases} A & r=1, W = \sin \theta \\ A & r=1.5, W = 1.5 R_0 \sin \theta \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} A & \theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \\ A & \theta = \pi, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Ce qui s'exprimera en termes de coefficients de la manière suivante:

$$\begin{cases} A_p(1, j, k) = 1 \\ S_c(1, j, k) = r_p(1) \sin \theta_p(j) \\ A_p(il, j, k) = 1 \\ S_c(il, j, k) = r_p(il) R_0 \sin \theta_p(j) \\ A_p(i, 1, k) = 1 \\ A_B(i, 1, k) = 1 \\ S_c(i, 1, k) = 0 \\ A_p(i, jl-1, k) = 1 \\ A_F(i, jl-1, k) = 1 \\ S_c(i, jl-1, k) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.6 Equation de discrétisation de la pression

Après la discrétisation des équations de continuité et de quantité de mouvements radiale, méridionale et azimutale; on doit obtenir une équation de discrétisation pour la pression.

Sans équation de la pression, on ne peut résoudre les équations discrétisées obtenues.

Les équations de quantités de mouvement discrétisées, peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}
 a_n U_n &= \sum a_i U_i + b_u + (P_N - P_p) A_n \\
 a_s U_s &= \sum a_i U_i + b_u + (P_p - P_s) A_s \\
 a_b V_b &= \sum a_i V_i + b_v + (P_B - P_p) A_f \\
 a_f V_f &= \sum a_i V_i + b_v + (P_p - P_f) A_b \\
 a_e W_e &= \sum a_i W_i + b_w + (P_E - P_p) A_e \\
 a_w W_w &= \sum a_i W_i + b_w + (P_p - P_w) A_w
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

L'indice  $i$  indique les points voisins du point considéré (dans les trois directions), les termes  $b_u, b_v$  et  $b_w$  sont les termes des sources contenant les termes autres que ceux de la pression, ce dernier étant le troisième terme à droite dans chaque équation du système (3.21). On peut réécrire le système (3.21) sous la forme:

$$\begin{aligned}
 U_n &= \hat{U}_n + d_n (P_N - P_p) \\
 U_s &= \hat{U}_s + d_s (P_p - P_s) \\
 V_f &= \hat{V}_f + d_f (P_p - P_f) \\
 V_b &= \hat{V}_b + d_b (P_B - P_p) \\
 W_e &= \hat{W}_e + d_e (P_E - P_p) \\
 W_w &= \hat{W}_w + d_w (P_p - P_w)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les vitesses  $\hat{U}_n, \hat{U}_s, \hat{V}_f, \hat{V}_b, \hat{W}_e, \hat{W}_w$ , sont dites pseudo vitesses, elles sont définies comme suit:

$$\hat{U}_n = \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_n} ; \hat{U}_s = \frac{\sum a_i U_i + b_u}{a_s}$$

$$\hat{V}_f = \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_f} ; \hat{V}_b = \frac{\sum a_i V_i + b_v}{a_b} \quad (3.23)$$

$$\hat{W}_e = \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w} ; \hat{W}_w = \frac{\sum a_i W_i + b_w}{a_w}$$

On considère l'équation de continuité qui a été intégrée dans un volume de contrôle typique, non décalé. Elle est sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 U_n^{t+\Delta t} - r_s^2 U_s^{t+\Delta t} \right) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p + \left( V_b^{t+\Delta t} \sin\theta_b - V_f^{t+\Delta t} \sin\theta_f \right) \Delta r_p \Delta\phi_p \\ & + \left( W_e^{t+\Delta t} - W_w^{t+\Delta t} \right) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

On remplace les vitesses présentent dans cette équation par leurs définitions (3.22). On obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & r_n^2 \left[ \hat{U}_n + d_n (P_N - P_P) \right] \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p - r_s^2 \left[ \hat{U}_s + d_s (P_P - P_S) \right] \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p \\ & + \left[ \hat{V}_b + d_b (P_B - P_P) \right] \sin\theta_b \Delta r_p \Delta\phi_p - \left[ \hat{V}_f + d_f (P_P - P_F) \right] \sin\theta_f \Delta r_p \Delta\phi_p \\ & + \left[ \hat{W}_e + d_e (P_E - P_P) \right] r_p \Delta r_p \Delta\theta_p - \left[ \hat{W}_w + d_w (P_P - P_W) \right] r_p \Delta r_p \Delta\theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

On simplifie cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( r_n^2 \hat{U}_n - r_s^2 \hat{U}_s \right) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p + \left( \hat{V}_b \sin\theta_b - \hat{V}_f \sin\theta_f \right) \Delta r_p \Delta\phi_p \\ & + \left( \hat{W}_e - \hat{W}_w \right) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p + r_n^2 d_n (P_N - P_P) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p \\ & - r_s^2 d_s (P_P - P_S) \sin\theta_p \Delta\theta_p \Delta\phi_p + d_f \sin\theta_f (P_F - P_P) \Delta r_p \Delta\phi_p \\ & - d_b \sin\theta_b (P_P - P_B) \Delta r_p \Delta\phi_p \\ & + d_e (P_E - P_P) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p - d_w (P_P - P_W) r_p \Delta r_p \Delta\theta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ce qui nous intéresse est de trouver une équation pour la pression sous la forme:

$$\begin{aligned} A_P P_P^{t+\Delta t} &= A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} \\ &+ A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + S \end{aligned} \quad (3.27)$$

A partir de l'équation (3.26) on détermine les coefficients  $A_P, A_N, A_S, A_F, A_B, A_E, A_W$  ainsi que le terme source comme suit :

$$\begin{aligned}
A_N &= r_n^2 d_n \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
A_S &= r_s^2 d_s \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P \\
A_F &= d_f \sin \theta_f \Delta r_P \Delta \phi_P \\
A_B &= d_b \sin \theta_b \Delta r_P \Delta \phi_P
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
A_E &= d_e r_P \Delta r_P \Delta \theta_P \\
A_W &= d_w r_P \Delta r_P \Delta \theta_P \\
S &= \left( r_s^2 \hat{U}_s - r_n^2 \hat{U}_n \right) \sin \theta_P \Delta \theta_P \Delta \phi_P + \left( \hat{V}_b \sin \theta_b - \hat{V}_f \sin \theta_f \right) \Delta r_P \Delta \phi_P \\
&\quad + \left( \hat{W}_w - \hat{W}_e \right) r_P \Delta r_P \Delta \theta_P
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Donc, si on connaît les champs de vitesse on pourra calculer la pression de l'équation (3.27). Dans notre cas, les champs de pression et de vitesse sont à déterminer. Pour résoudre l'équation de la pression (et ainsi obtenir le champ de vitesse) on utilise un champ de vitesse estimé, qui sera introduit comme suit:

$$\begin{aligned}
a_n U_n^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left( P_N^* - P_P^* \right) A_n \\
a_s U_s^* &= \sum a_i U_i^* + b_u + \left( P_P^* - P_S^* \right) A_s \\
a_f V_f^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left( P_P^* - P_F^* \right) A_f \\
a_b V_b^* &= \sum a_i V_i^* + b_v + \left( P_B^* - P_P^* \right) A_b \\
a_e W_e^* &= \sum a_i W_i^* + b_w + \left( P_E^* - P_P^* \right) A_e \\
a_w W_w^* &= \sum a_i W_i^* + b_w + \left( P_P^* - P_W^* \right) A_w
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Les estimations des vitesses et des pressions auront une étoile \* comme exposant. Les équations du système (3.30) indiquent que les estimations des vitesses sont reliées aux estimations des pressions. On suppose que la valeur de la vitesse (ainsi que celle de la pression) sera égale à une estimation plus une correction:

$$\begin{aligned}
U &= U^* + U' \\
V &= V^* + V' \\
W &= W^* + W' \\
P &= P^* + P'
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Les corrections porte une prime comme exposant. L'équation (3.31) s'étendra à toutes les composantes de la vitesse et donnera lieu aux équations:

$$\begin{aligned}
U_n &= U_n^* + U'_n \\
U_s &= U_s^* + U'_s \\
V_f &= V_f^* + V'_f \\
V_b &= V_b^* + V'_b \\
W_e &= W_e^* + W'_e \\
W_w &= W_w^* + W'_w
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour obtenir les équations contenant les corrections, on soustrait le système (3.30) du système (3.22), on obtient:

$$\begin{aligned}
a_n U'_n &= \sum a_i U'_i + (P'_N - P'_p) A_n \\
a_s U'_s &= \sum a_i U'_i + (P'_P - P'_S) A_s \\
a_f V'_f &= \sum a_i V'_i + (P'_P - P'_F) A_f \\
a_b V'_b &= \sum a_i V'_i + (P'_B - P'_P) A_b \\
a_e W'_e &= \sum a_i W'_i + (P'_E - P'_P) A_e \\
a_w W'_w &= \sum a_i W'_i + (P'_P - P'_W) A_w
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Une approximation justifiée par S.V. Patankar [14], consiste à négliger les sommes  $\sum a_i U'_i$ ,  $\sum a_i V'_i$  et  $\sum a_i W'_i$ . Donc, les corrections des vitesses ne seront fonctions que des corrections de la pression:

$$a_n U'_n = (P'_N - P'_p) A_n$$

$$\begin{aligned}
a_s U'_s &= (P'_P - P'_S) A_s \\
a_f V'_f &= (P'_P - P'_F) A_f \\
a_b V'_b &= (P'_B - P'_P) A_b \\
a_e W'_e &= (P'_E - P'_P) A_e \\
a_w W'_w &= (P'_P - P'_W) A_w
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Le système (3.34) exprime de façon claire que les corrections de vitesse sont directement liées aux corrections de pression. Les relations entre les vitesses et leurs corrections sont donc comme suit:

$$\begin{aligned}
U_n &= U_n^* + d_n (P'_N - P'_P) \\
U_s &= U_s^* + d_s (P'_P - P'_S) \\
V_f &= V_f^* + d_f (P'_P - P'_F) \\
V_b &= V_b^* + d_b (P'_B - P'_P) \\
W_e &= W_e^* + d_e (P'_E - P'_P) \\
W_w &= W_w^* + d_w (P'_P - P'_W)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Les vitesses ainsi définies dans le système (3.35) doivent satisfaire l'équation de continuité (3.24). En introduisant ces vitesses dans l'équation de continuité, on obtient l'équation:

$$\begin{aligned}
&r_n^2 (U_n^* - d_n (P'_N - P'_P)) \sin \theta_p \Delta \theta_p \Delta \phi_p - r_s^2 (U_s^* - d_s (P'_P - P'_S)) \sin \theta_p \Delta \theta_p \Delta \phi_p \\
&+ (V_b^* - d_b (P'_B - P'_P)) \sin \theta_b \Delta r_p \Delta \phi_p - (V_f^* - d_f (P'_P - P'_F)) \sin \theta_f \Delta r_p \Delta \phi_p \\
&+ (W_e^* - d_e (P'_E - P'_P)) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p - (W_w^* - d_w (P'_P - P'_W)) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Cette équation permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la correction de la pression comme suit:

$$A_p P'_P = A_n P'_n + A_s P'_s + A_b P'_b + A_f P'_f + A_e P'_e + A_w P'_w + S' \tag{3.37}$$

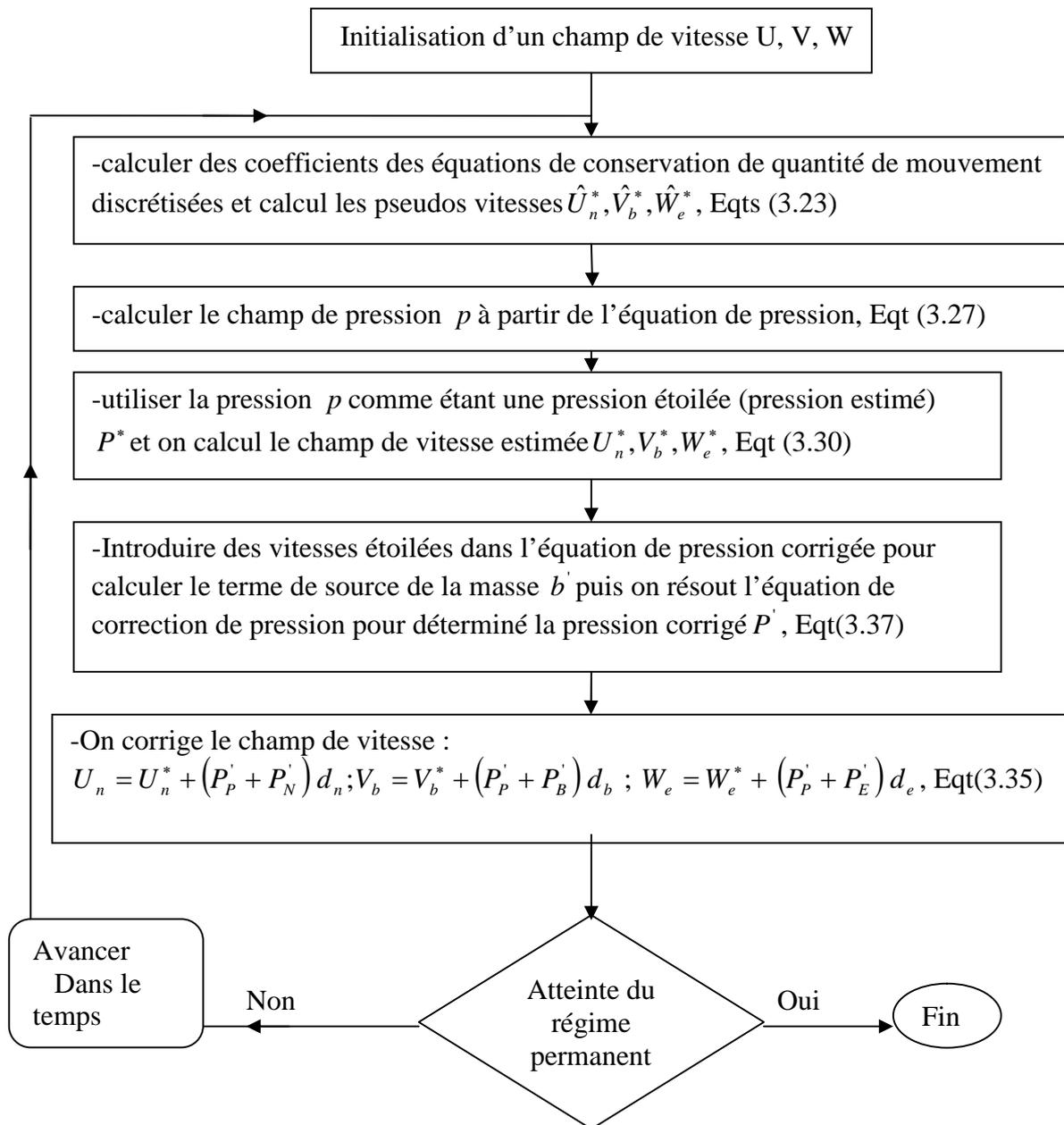
On note que les coefficients de l'équation (3.37) sont les mêmes que les coefficients de l'équation (3.27). Mais la source n'est pas la même, elle est égale à:

$$S = \left( r_s^2 U_s^* - r_n^2 U_n^* \right) \sin\theta_P \Delta\theta_P \Delta\phi_P + \left( V_b^* \sin\theta_b - V_f^* \sin\theta_f \right) \Delta r_P \Delta\phi_P + \left( W_w^* - W_e^* \right) r_P \Delta r_P \Delta\theta_P \quad (3.38)$$

Donc pour trouver les corrections de la pression on résout le système représenté par l'équation (3.37). Ensuite, on utilise ces corrections pour déterminer les corrections de la vitesse.

La solution séquentielle des systèmes d'équation de vitesse, de la pression et de la correction de pression suit l'algorithme **SIMPLER**, cet algorithme est une version améliorée de l'algorithme **SIMPLE**.

Dont voici l'organigramme :



**Figure3.14 : Organigramme de l'algorithme SIMPLER.**

### 3.7 Résolution des équations discrétisées

Après la discrétisation des équations qui modélisent le problème, on obtient un système d'équation algébrique. Ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$[A]\{\Phi\} = \{b\}. \quad (3.39)$$

$[A]$  C'est la matrice des coefficients connus.

$\{\Phi\}$  C'est le vecteur des variables.

$\{b\}$  Vecteur de charge.

### 3.8 La méthode de balayage

Soit le système, d'équations algébriques, représenté par l'équation de discrétisation suivante:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (3.40)$$

La matrice des coefficients de ce système est heptagonale.

Ce système est transformé, momentanément, en le système suivant:

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S^* \quad (3.41)$$

Avec:

$$S^* = A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (3.42)$$

La matrice des coefficients du système (3.41) est tri diagonal. Ce système d'équations peut être résolu par l'algorithme de Thomas, qui sera exposé ultérieurement. La solution obtenue est notée  $\Phi^*$ .

La deuxième étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P \Phi_P = A_F \Phi_F + A_B \Phi_B + S^{**} \quad (3.43)$$

Avec:

$$S^{**} = A_N \Phi_N^* + A_S \Phi_S^* + A_E \Phi_E^* + A_W \Phi_W^* + S \quad (3.44)$$

La matrice des coefficients du système (3.43) est tri diagonal, et le système peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée  $\Phi^{**}$ .

Finalement, la troisième (dernière) étape du balayage commence par la considération du système:

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S^{***} \quad (3.45)$$

Avec:

$$S^{***} = A_N \Phi_N^{**} + A_S \Phi_S^{**} + A_F \Phi_F^{**} + A_B \Phi_B^{**} + S \quad (3.46)$$

La matrice des coefficients du système (3.45) est tri diagonale; mais elle contient un élément non nul à la fin de sa première ligne et un autre élément non nul au début de sa dernière ligne. C'est une matrice tri diagonale cyclique. Et donc, le système (3.45) peut être résolu par l'algorithme tri diagonal cyclique, qui sera présenté plus tard. La solution obtenue, par l'algorithme tri diagonal cyclique est notée  $\Phi^{***}$ . Cette dernière est la solution obtenue après les trois balayages, suivant  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ . Elle représente la solution obtenue après une itération des trois balayages.

### 3.9 Algorithme de Thomas

Cet algorithme est appelé aussi TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm). Il est utilisé pour résoudre un système d'équations tri diagonal. [16]

$$[A] \{ \phi \} = \{ b \} \quad (3.47)$$

Avec :

$[A]$  Matrice des coefficients.

$\{ \phi \}$  Vecteur des inconnues.

$\{ b \}$  Vecteur de charge.

La matrice  $[A]$ , doit être tri diagonale. La méthode utilisée pour résoudre ce système d'équations est l'algorithme de Thomas présenté ci-dessous:

Soit le système tri diagonal d'équations algébriques:

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (3.48)$$

$a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  Sont des coefficients,  $\phi_{i+1}$  est la valeur de la variable dépendante dans le point à droite du point  $i$ ,  $\phi_{i-1}$  est la valeur de la variable dépendante dans le point à

gauche du point  $i$ . Cette forme relie donc la variable dépendante au point  $P$  aux points qui lui sont adjacents. Si le premier point est 1 et le nombre de point est  $N$ , on doit (nécessairement) avoir:

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0 \quad (3.49)$$

Soit la relation de récurrence:

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (3.50)$$

Cette relation avec (3.48), entraîne deux autres relations de récurrence:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.51)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.52)$$

Avec:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.53)$$

Ces deux paramètres sont connus. Aussi il est facile de démontrer que:

$$P_N = 0 \text{ et } T_N = Q_N \quad (3.54)$$

Récapitulation des étapes de calcul de l'algorithme de Thomas:

- 1- Calcul de  $P_1$  et  $Q_1$  de l'équation (3.53).
- 2- Utiliser les équations (3.51) et (3.52) pour obtenir les  $P_i$  et  $Q_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ .
- 3- Poser  $T_N = Q_N$ .
- 4- Utiliser l'équation (3.50),  $i = N-1, N-2, \dots, 1$  pour obtenir  $\phi_{N-1}, \phi_{N-2}, \dots, \phi_1$ .

Cet algorithme est très efficace et converge rapidement.

### 3.10 Algorithme de Thomas cyclique

Un système d'équations tri diagonal cyclique est représenté par l'équation indicelle suivante:

$$a_k \Phi_k = b_k \Phi_{kkk} + c_k \Phi_{kk} + d_k \quad (3.81)$$

$$k = 1, 2, \dots, KL$$

avec:

$$kkk = \begin{cases} k+1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases}$$

$$k_k = \begin{cases} k - 1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Tous les éléments  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  et  $d_k$  sont supposés connus,

On introduit la relation de récurrence suivante:

$$\Phi_k = E_k \Phi_{k_k} + F_k \Phi_{KL} + G_k \quad (3.82)$$

$$k = 1, 2, \dots, KL - 1$$

$$E_1 = \frac{b_1}{a_1}, F_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ et } G_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Cette relation est aussi vraie pour  $k_k$ :

$$\Phi_{k_k} = E_{k_k} \Phi_k + F_{k_k} \Phi_{KL} + G_{k_k} \quad (3.83)$$

En remplaçant (3.83) dans (3.81) on obtient:

$$\Phi_k = \left[ \frac{b_k}{a_k - c_k E_{k_k}} \right] \Phi_{k_k} + \left[ \frac{c_k F_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}} \right] \Phi_{KL} + \left[ \frac{c_k G_{k_k} + d_k}{a_k - c_k E_{k_k}} \right] \quad (3.84)$$

(3.82) et (3.84) sont identiques et on obtient trois nouvelles relations de récurrence:

$$E_k = \frac{b_k}{a_k - c_k E_{k_k}}, F_k = \frac{c_k F_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}} \text{ et } G_k = \frac{d_k + c_k G_{k_k}}{a_k - c_k E_{k_k}}, k = 2, 3, \dots, KL - 1$$

Connaissant  $E_1$ ,  $F_1$  et  $G_1$ , on calcule, avec les relations de récurrence précédentes, tous les

$$E_k, F_k \text{ et } G_k, k = 2, 3, \dots, KL - 1$$

Pour calculer les  $\Phi_k$ ,  $k = KL - 1, KL - 2, KL - 3, \dots, 3, 2, 1$ , avec la relation de récurrence (3.82), il nous faut la valeur de  $\Phi_{KL}$  qui sera déterminée dans ce qui suit.

De l'équation (3.82) on a:

$$a_{KL} \Phi_{KL} = b_{KL} \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + d_{KL}$$

Cette équation est réécrite sous la forme:

$$P_1 \Phi_{KL} = Q_1 \Phi_1 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_1 \quad (3.85)$$

avec:

$$P_1 = a_{KL}, Q_1 = b_{KL} \text{ et } R_1 = d_{KL}$$

D'après (3.82):

$$\Phi_1 = E_1 \Phi_2 + F_1 \Phi_{KL} + G_1$$

Cette équation est utilisée dans (3.82) et on obtient :

$$[P_1 - Q_1 F_1] \Phi_{KL} = [Q_1 E_1] \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_1 + Q_1 G_1] \text{, qui est écrite :}$$

$$P_2 \Phi_{KL} = Q_2 \Phi_2 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_2$$

Aussi de l'équation (3.82), on a :

$$\Phi_2 = E_2 \Phi_3 + F_2 \Phi_{KL} + G_2$$

Cette équation est utilisée dans la précédente et il vient :

$$[P_2 - Q_2 F_2] \Phi_{KL} = [Q_2 E_2] \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + [R_2 + Q_2 G_2]$$

qui est réécrite :

$$P_3 \Phi_{KL} = Q_3 \Phi_3 + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_3$$

Et on remplace  $\Phi_3$  en fonction de  $\Phi_4$  et  $\Phi_{KL}$  , en utilisant l'équation (3.82)...etc ,

Cette procédure est continuée jusqu'à l'obtention de l'équation :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = Q_{KL-1} \Phi_{KL-1} + c_{KL} \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1} \quad (3.86)$$

On peut constater facilement que nous avons trois nouvelles relations de récurrence :

$$P_k = P_{k-1} - Q_{k-1} F_{k-1}$$

$$Q_k = Q_{k-1} E_{k-1}$$

$$R_k = R_{k-1} + Q_{k-1} G_{k-1}$$

Connaissant  $P_1$  ,  $Q_1$  et  $R_1$  , on calcule tous les  $P_k$  ,  $Q_k$  et  $R_k$  ,  $k = 2, \dots, KL - 1$  ,

Reconsidérons l'équation (3.86) :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] \Phi_{KL-1} + R_{KL-1}$$

Avec l'équation (3.79) on a :

$$\Phi_{KL-1} = E_{KL-1} \Phi_{KL} + F_{KL-1} \Phi_{KL} + G_{KL-1} = [E_{KL-1} + F_{KL-1}] \Phi_{KL} + G_{KL-1}$$

Cette équation est utilisée dans (3.86) et il vient :

$$P_{KL-1} \Phi_{KL} = [Q_{KL-1} + c_{KL}] ( [E_{KL-1} + F_{KL-1}] \Phi_{KL} + G_{KL-1} ) + R_{KL-1}$$

Cette équation donne la valeur de  $\Phi_{KL}$  :

$$\Phi_{KL} = \frac{[Q_{KL-1} + c_{KL}] G_{KL-1} + R_{KL-1}}{P_{KL-1} - [Q_{KL-1} + c_{KL}] [E_{KL-1} + F_{KL-1}]} \quad (3.87)$$

Finalement, le calcul de  $\Phi_{KL}$  permet, avec l'utilisation de l'équation (3.82), le calcul

des  $\Phi_k$  , pour  $k = KL - 1, KL - 2, KL - 3, \dots, 3, 2, 1$  ,

### 3.11 Critères de convergence

Dans notre étude numérique de ce problème physique on a fixé trois critères de convergence qui contrôlent la convergence du code de calcul :

#### *Critère numérique :*

$$dif\Phi = \sum_n \left| \Phi^n - \Phi^{n-1} \right|_{\max} \leq \varepsilon$$

$\Phi$  : représente le variable dépendante

$n$  : le nombre d'itération .

$\varepsilon$  : Critère de convergence avec  $\varepsilon \leq 10^{-6}$  .

#### *Critère physique :*

On vérifie aussi la physique du problème par la satisfaction des bilans globaux de la quantité de mouvements dans tout le domaine. Pour cela on contrôle l'égalité des torques (l'égalité des moments par rapport à l'axe vertical des sphères des forces exercées sur les surfaces des deux sphères).

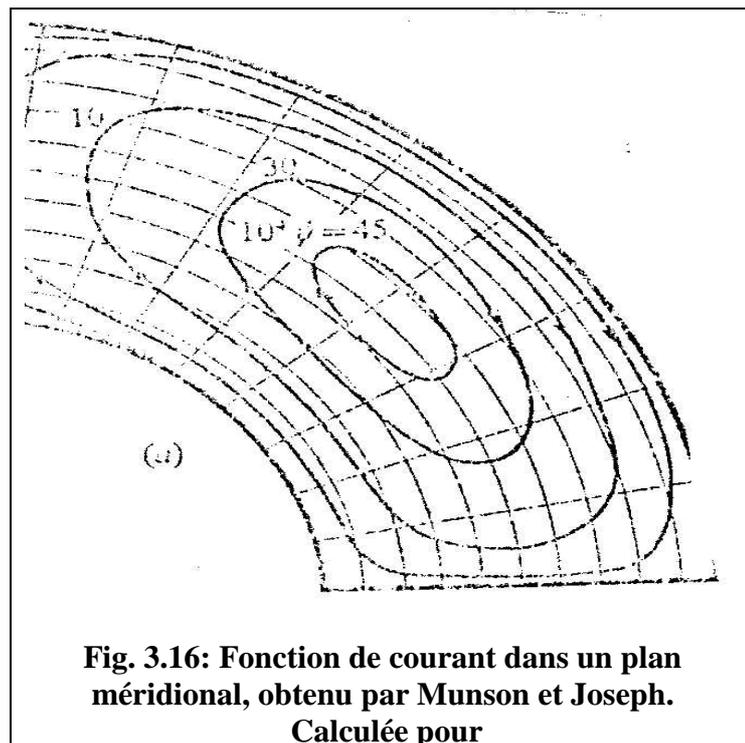
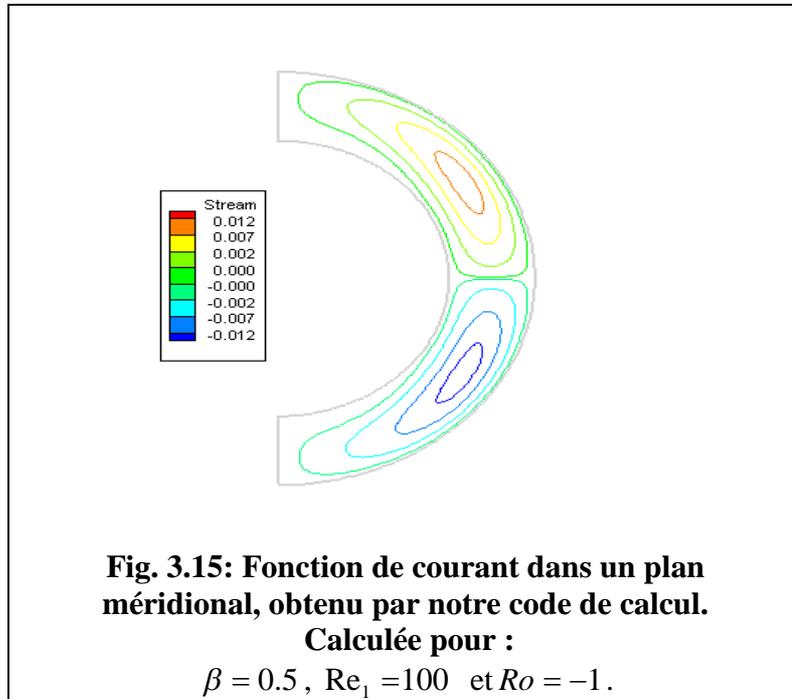
#### *Critère graphique :*

On vérifie, graphiquement, en des points du domaine aléatoirement choisis qu'il n'y a plus de variation temporelle de toute variable associée à ces points, les variables contrôlées sont les vitesses radiales, méridionale et azimutale.

### **3.12 Validation**

La solution séquentielle des équations de discrétisation des variables dépendantes suit l'algorithme SIMPLER. Le système d'équations algébriques de discrétisation de chaque variable dépendante est résolu avec la méthode itérative de balayage, utilisant l'algorithme TDMA suivant les directions radiale et polaire et l'algorithme TDMA cyclique suivant la direction azimutale. Tous les cas sont résolus avec un pas du temps égal à  $10^{-3}$ . Le premier cas, avec le nombre de Rossby égal à -0.5 est résolu avec des conditions initiales statiques. Avec chaque variation du nombre de Rossby, la solution est obtenue avec celle du nombre de Rossby précédent, comme état initial. Toutes les solutions obtenues sont stationnaires. L'état stationnaire est caractérisé par une évolution temporelle nulle de l'écoulement et l'équilibre des torques des deux sphères.

Le code développé a été validé par comparaison avec les résultats fournis par Munson et Joseph [6] qui sont, qualitativement, exactement similaires à ceux produits par notre code de calcul. La figure 3.15 en est une illustration de l'écoulement unicellulaire produit par le code.



$\beta = 0.5$ ,  $Re_1 = 100$  et  $Ro = -1$ .

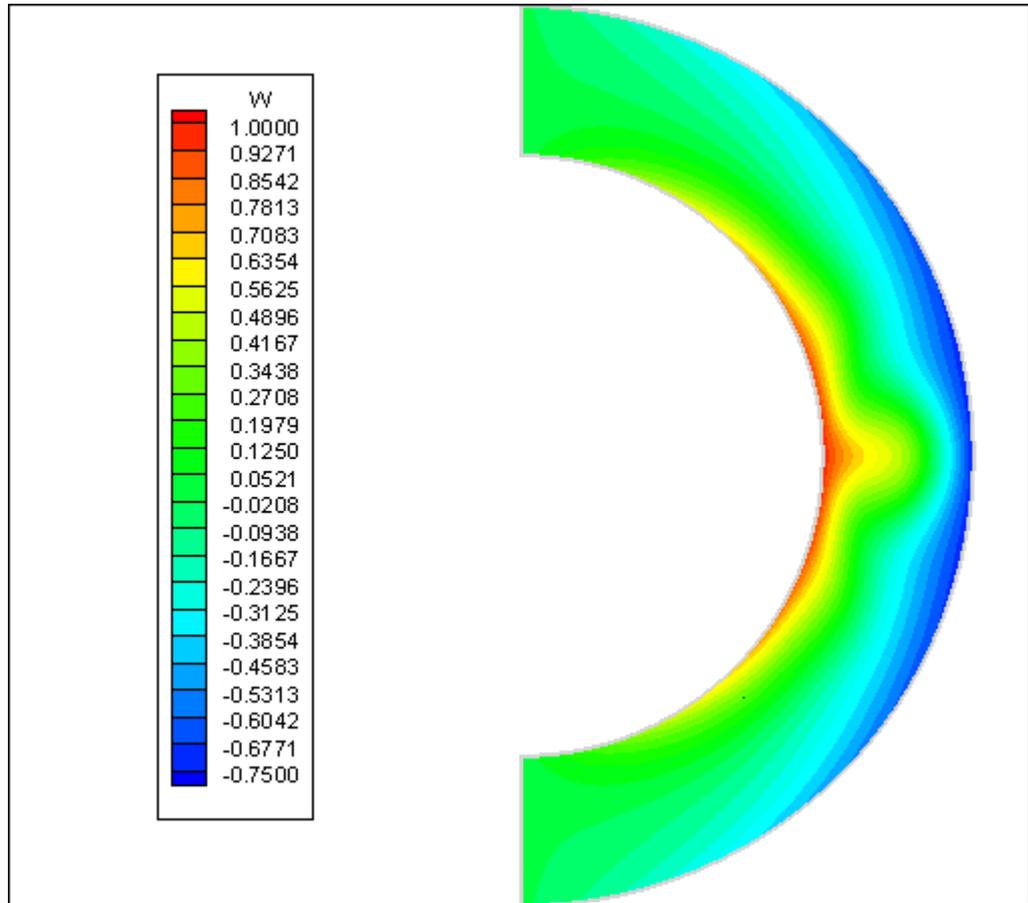
## CHAPITRE 4

## 4. Résultats et discussion

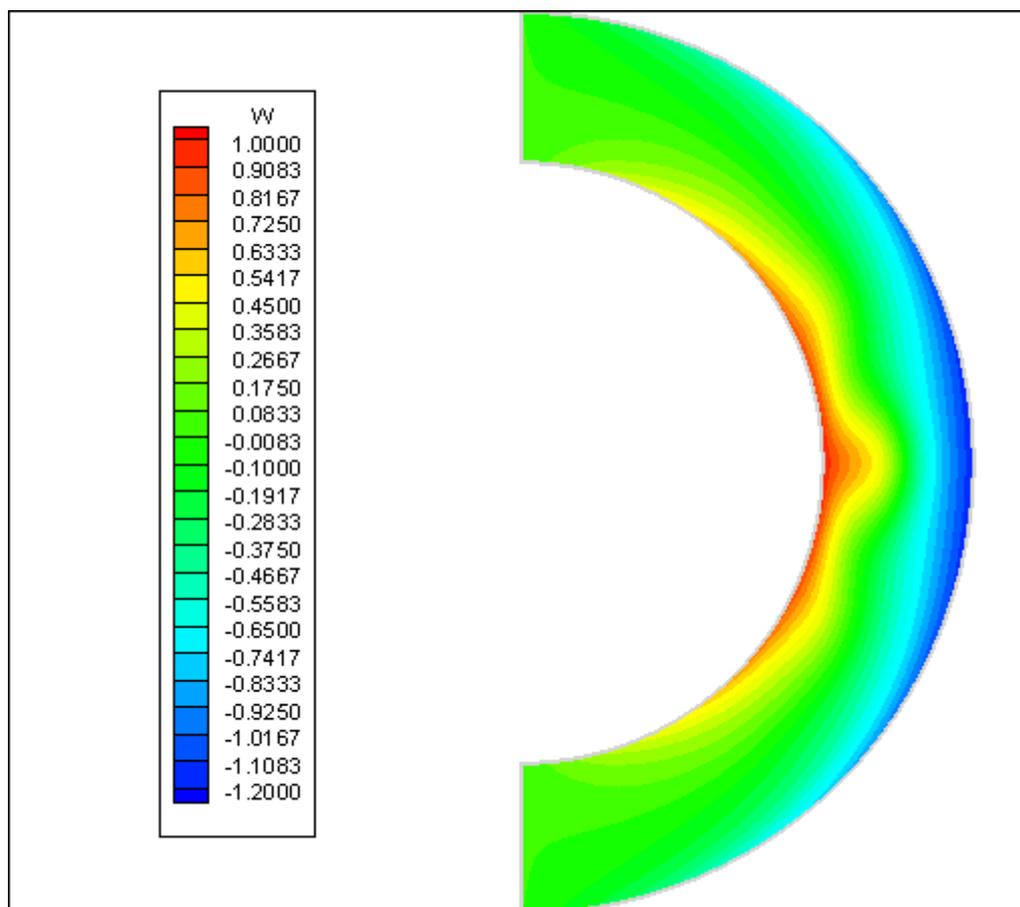
Dans ce chapitre, on présente et on discute les résultats de notre étude. Ces résultats portent sur l'analyse de l'effet du nombre de Rossby sur l'écoulement de Couette sphérique. Pour cela on fixe le nombre de Reynolds ( $Re = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ ) à 300 et on affecte les valeurs suivantes au nombre de Rossby ( $Ro = \Omega_2 / \Omega_1$ ) -0.5, -0.8, -1.0, -1.5, -2.5 et -3. Le rapport d'aspect géométrique  $\left( \beta = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)$  fixé à 0.5

### 4.1 Variation méridionale de la vitesse azimutale

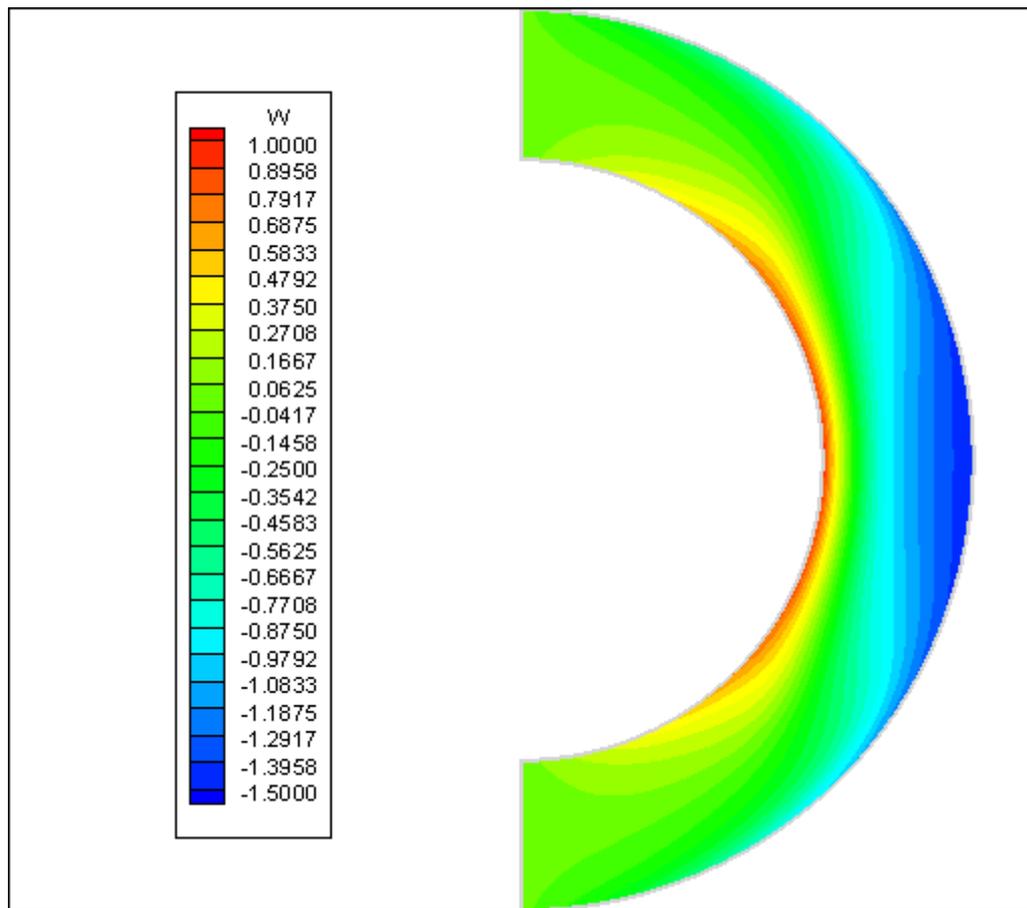
En diminuant le nombre de Rossby négatif (en augmentant sa valeur absolue), la surface nodale (correspondant à une vitesse azimutale nulle) se rapproche de la sphère intérieure, sa forme change et le torque des surfaces solides augmente. Les figures 4.1-a - 4.1-f illustrent la distribution méridionale de la vitesse azimutale de rotation, pour les nombres de Rossby cités. L'examen de cette distribution discerne deux régimes de la rotation de l'écoulement. Le premier régime, représentatif des nombres de Rossby supérieurs à -1, est caractérisé par une distribution radiale et polaire importante dans tout l'entrefer sphérique. Les protubérances des iso tacs sont dues à l'écoulement secondaire méridien. Le deuxième régime, représentatif des nombres de Rossby inférieurs ou égaux à -1, est surtout caractérisé par une invariance axiale visible à l'extérieur du cylindre tangent à la sphère intérieure et loin de la surface solide de la sphère extérieure. Ce deuxième régime est caractéristique d'une rotation rapide de la sphère extérieure, par rapport à celle de la sphère intérieure. En diminuant le nombre de Rossby de -0.5 à -3, les torques des surfaces sphériques solides sont respectivement : 66.73, 90.19, 94.09, 143.92, 256.44 et 317.95. Ces derniers augmentent avec la diminution des nombres de Rossby. Cependant, leur augmentation est plus importante au second régime. Celle-ci traduit correctement la relation liant le torque à la contrainte tangentielle.



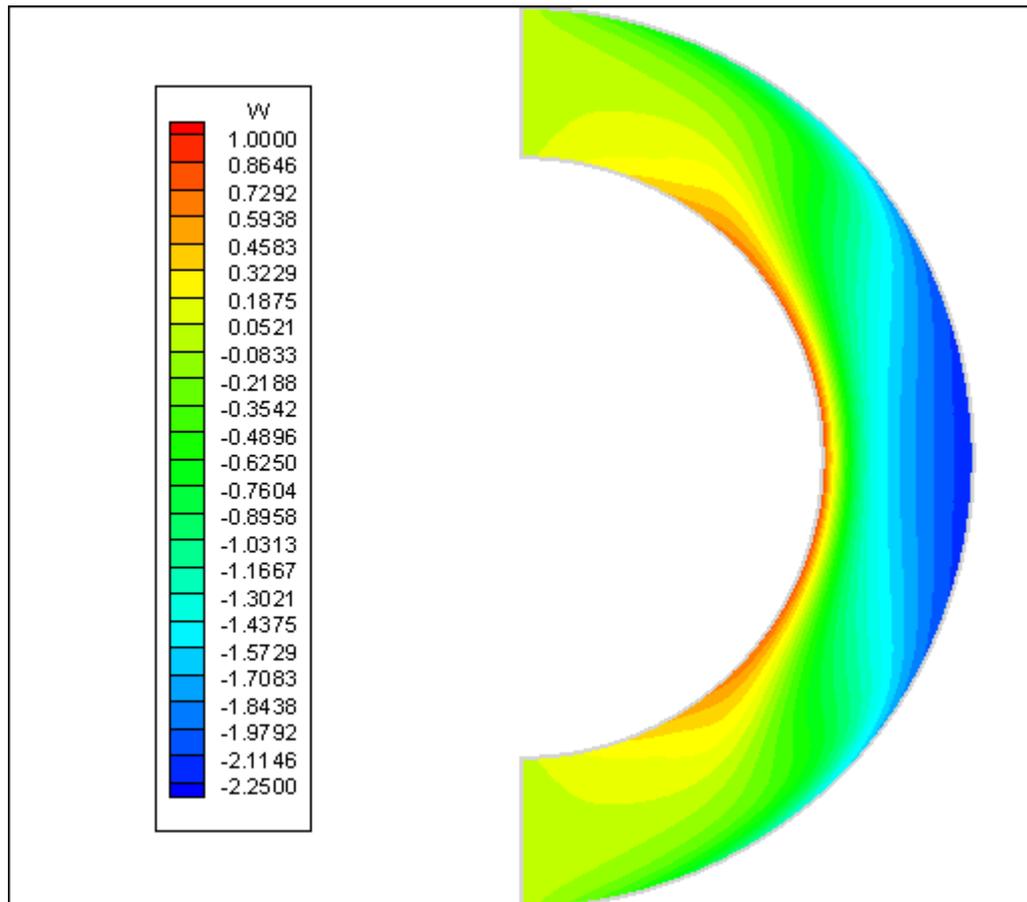
**Fig. 4.1-a** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -0.5$



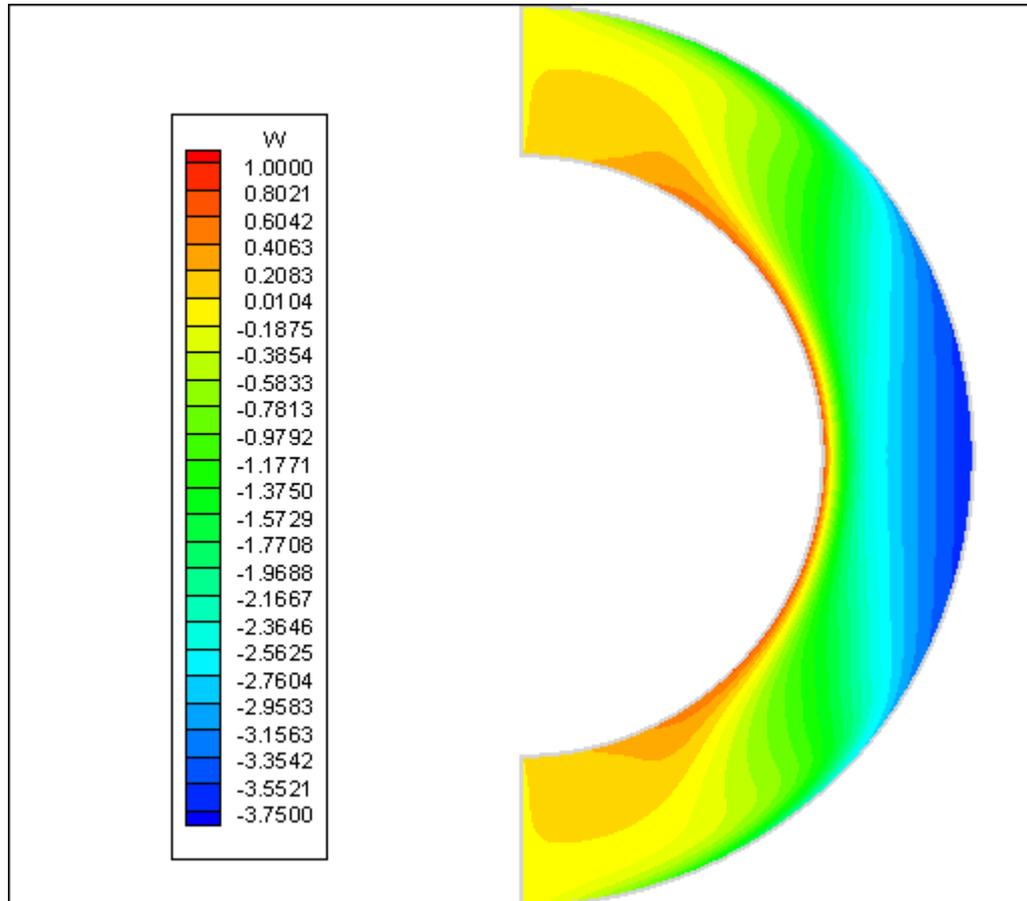
**Fig. 4.1-b** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -0.8$



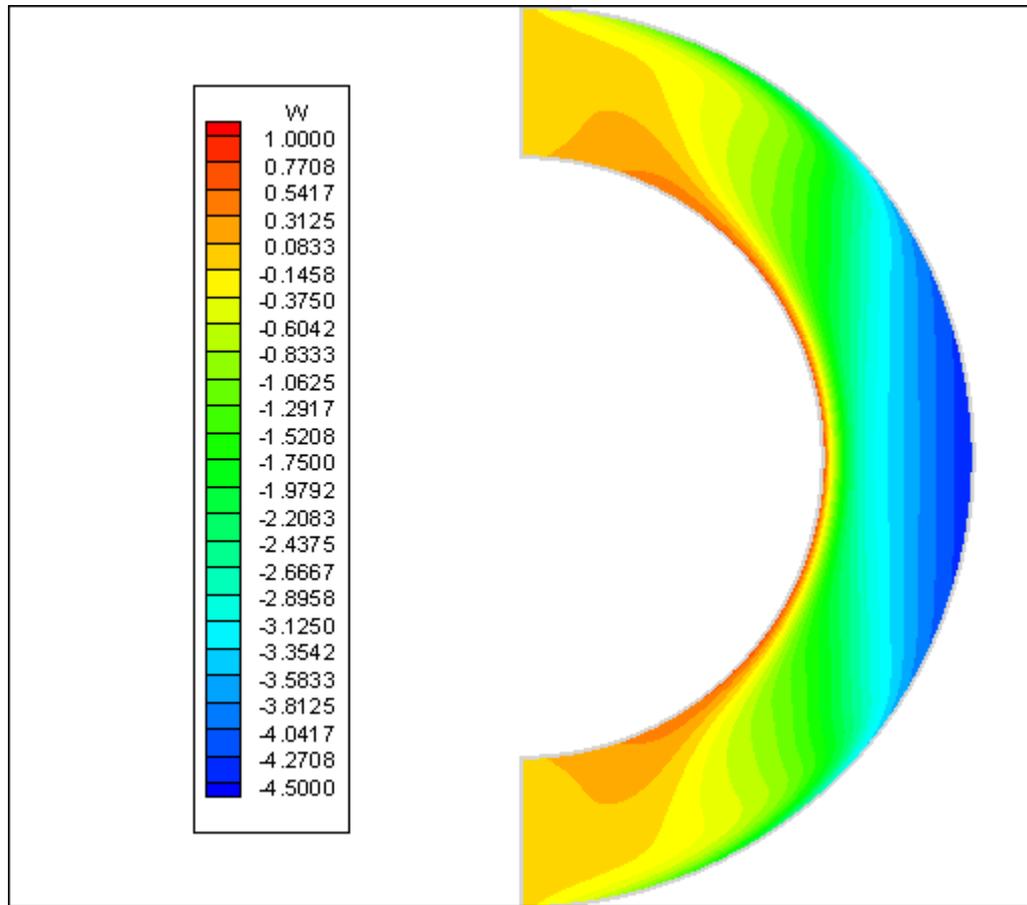
**Fig. 4.1-c** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -1$



**Fig. 4.1-d** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -1.5$



**Fig. 4.1-e** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -2.5$

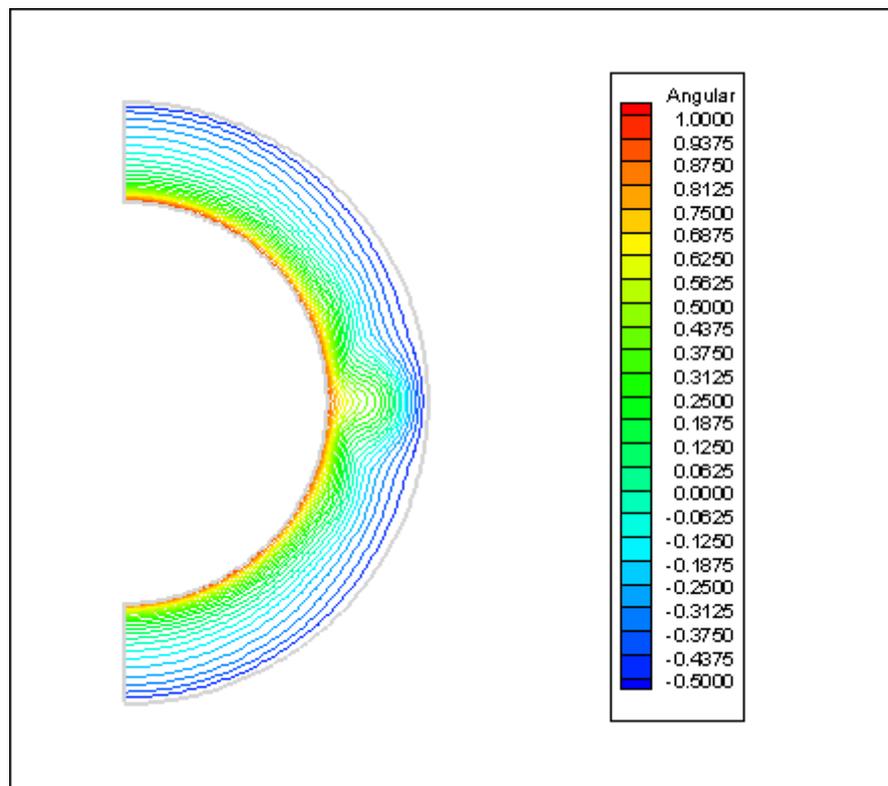


**Fig. 4.1-f** Distribution méridionale de la vitesse azimutale  $Ro = -3$

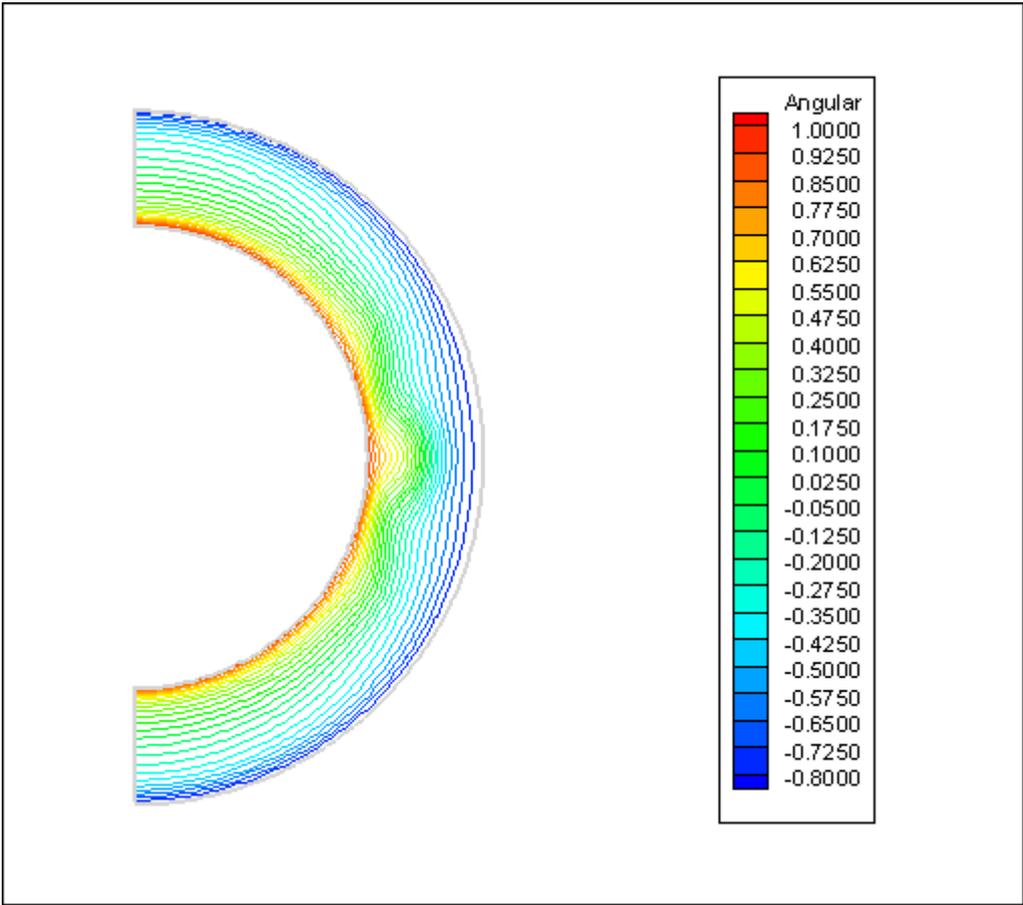
## 4.2 Evolution méridionale de la vitesse angulaire

Si on divise l'entrefers sphérique en deux zones, séparées par un cylindre virtuel tangent à la surface de la sphère intérieure, on distingue alors deux distributions de la vitesse angulaire (égale à la vitesse de rotation divisée par  $r \sin \theta$ ) telles représentées par les figures 4.2-a - 4.2-f. A l'intérieur du cylindre mentionné, la surface solide est composée de la surface totale de la sphère intérieure et une partie de la surface de la sphère extérieure. Toujours étant à l'intérieur du cylindre virtuel; à la surface de la sphère intérieure la vitesse angulaire normalisée vaut 1.0 (positive); alors qu'à la surface de la sphère extérieure, la vitesse angulaire vaut  $Ro$  (négative). Donc, à l'intérieur du cylindre, la vitesse angulaire doit varier continuellement entre les surfaces des deux sphères et il est donc impossible de satisfaire l'invariance axiale décrite par le théorème de Taylor-Proudman. Cependant, à l'extérieur du cylindre tangent, la surface solide est totalement celle de la sphère

extérieure qui tourne avec la même vitesse angulaire et donc pour des rotations rapides, il est possible de satisfaire l'invariance axiale selon le théorème de Taylor-Proudman. Pour le rapport d'aspect et le nombre de Reynolds choisis, il semble que la rapidité de la rotation de la sphère extérieure manifestant l'invariance axiale correspond à des nombres de Rossby inférieurs ou égaux à -1. Le domaine d'invariance axiale se localise à l'intérieur de la zone limitée par le cylindre tangent et la surface de la sphère extérieure (un peu loin des limites).



**Fig. 4.2-a** Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -0.5$



**Fig. 4.2-b** Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -0.8$

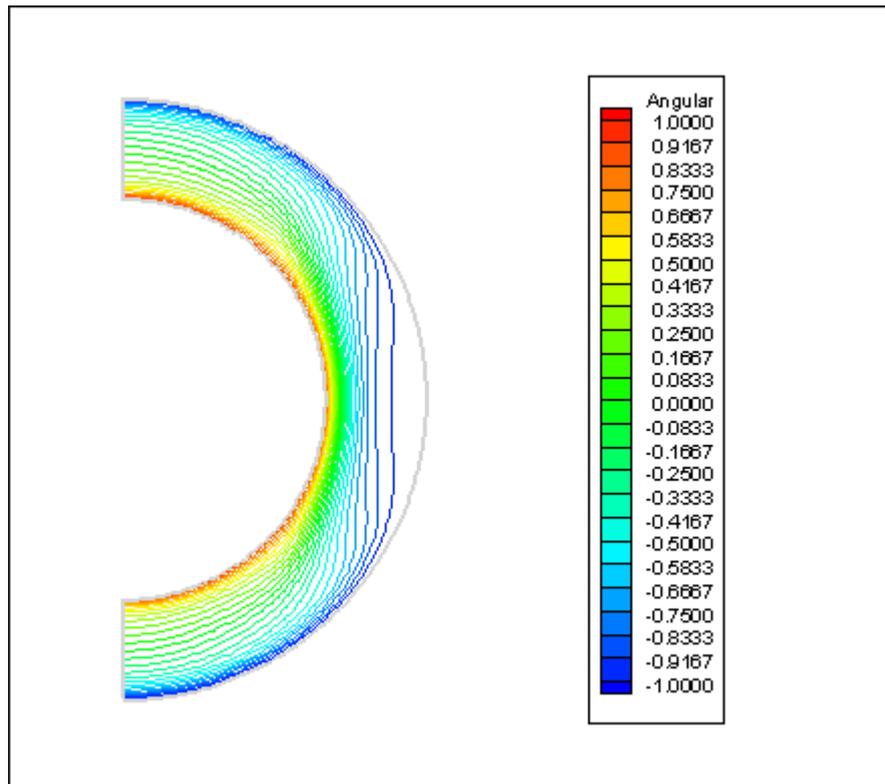
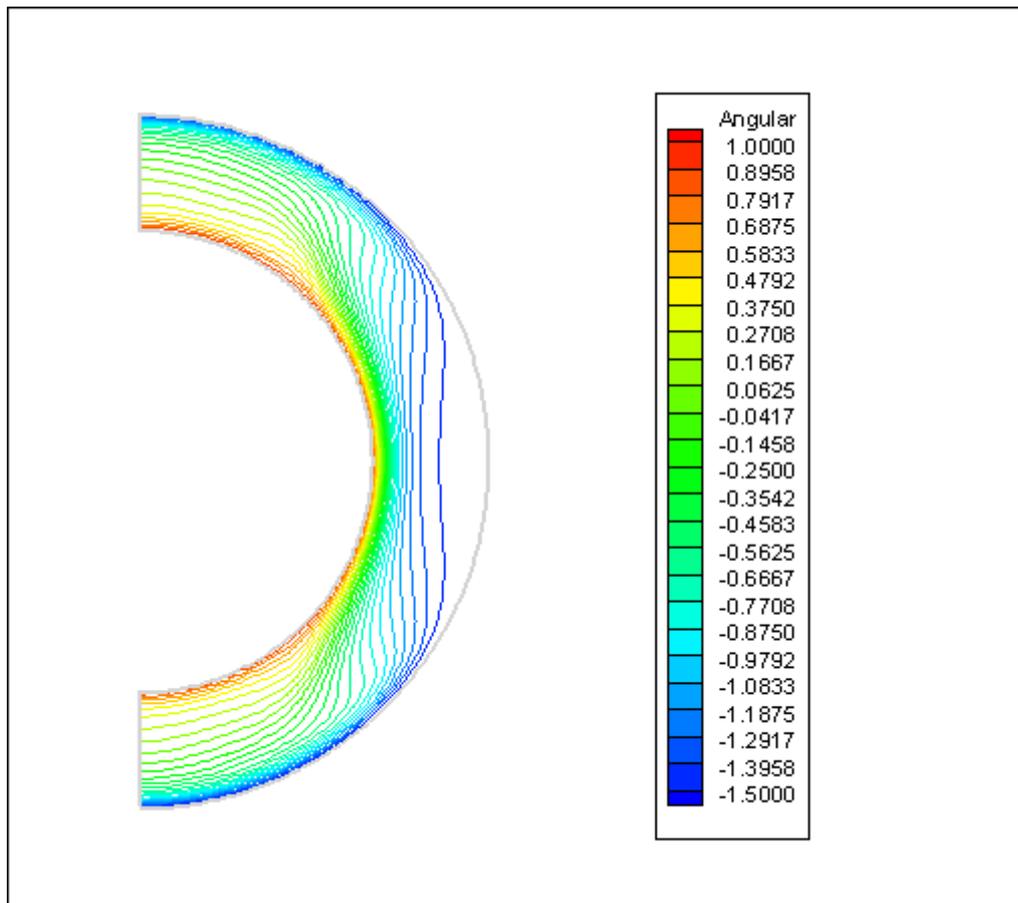
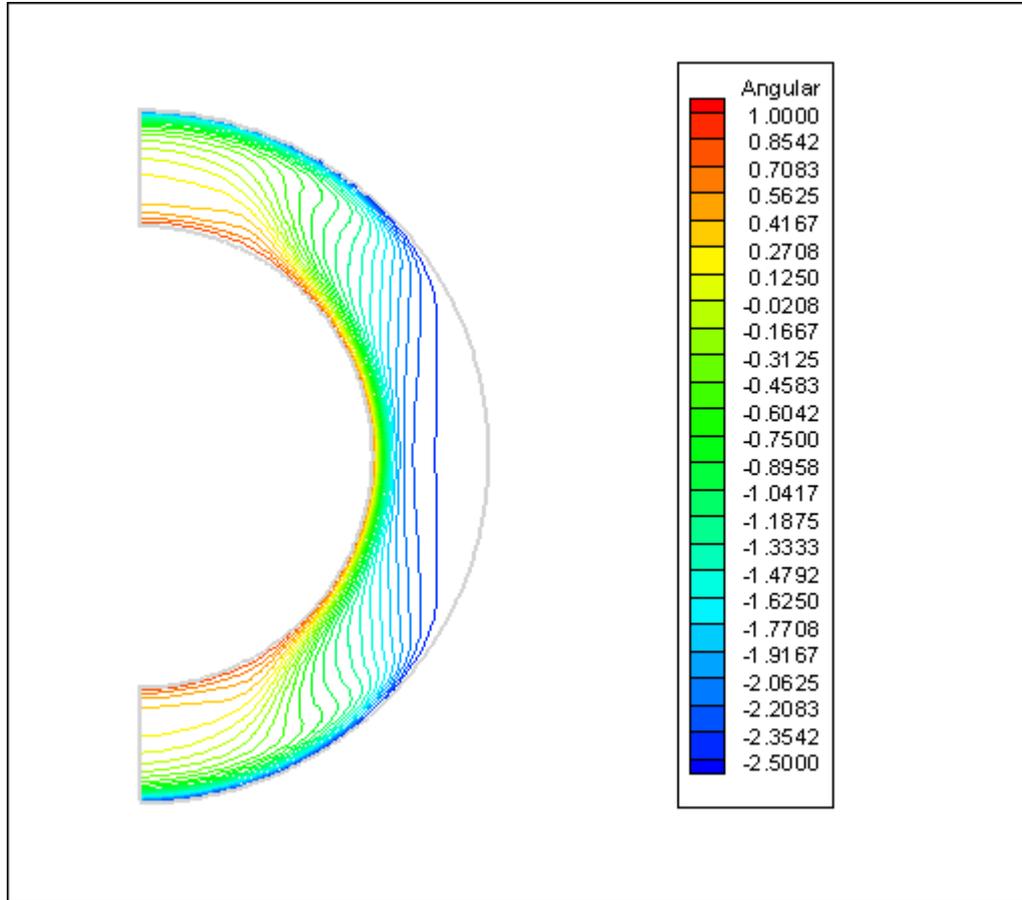


Fig. 4.2-c Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -1$



**Fig. 4.2-d** Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -1.5$



**Fig. 4.2-e** Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -2.5$

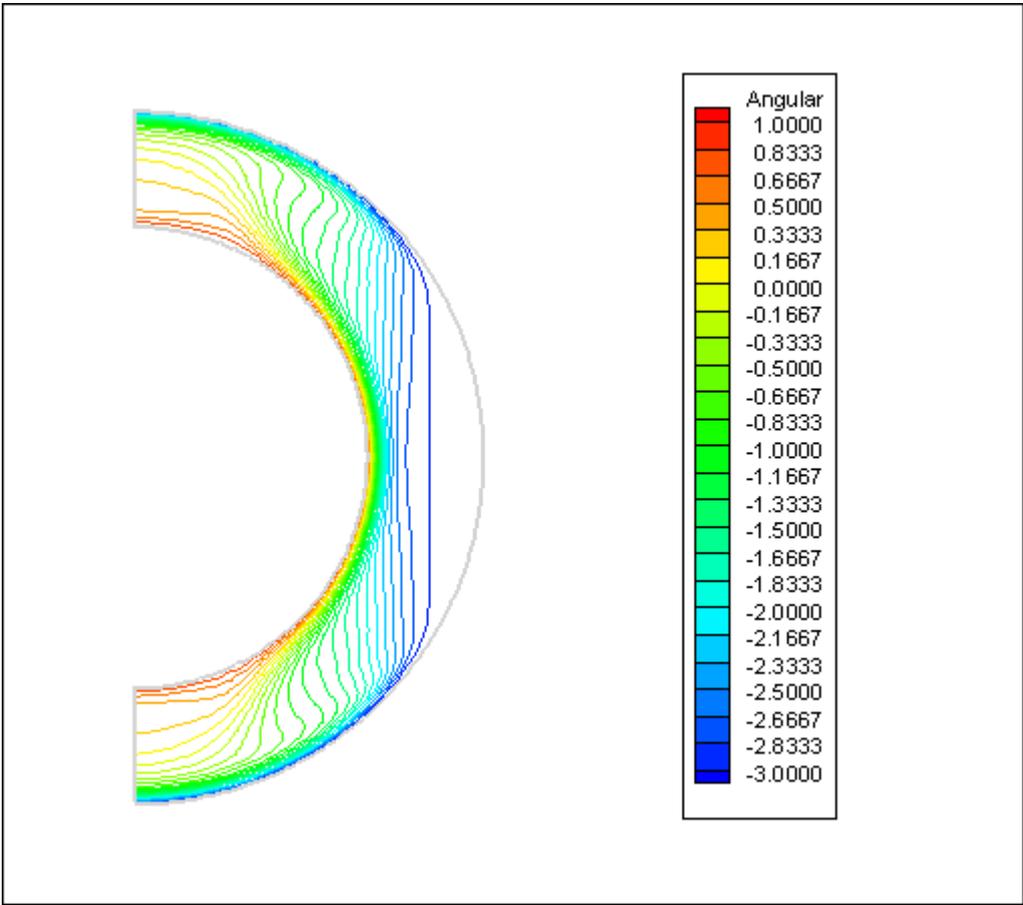
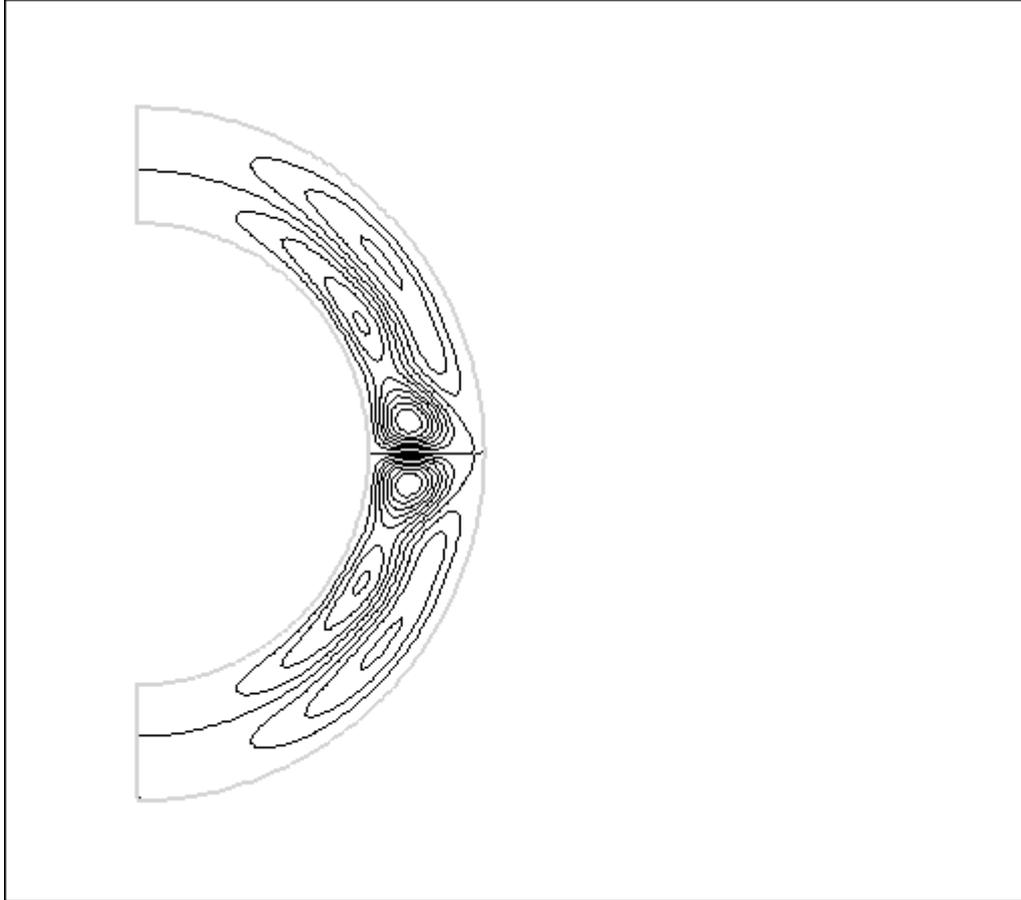


Fig. 4.2-f Evolution méridionale de la vitesse angulaire pour  $Ro = -3$

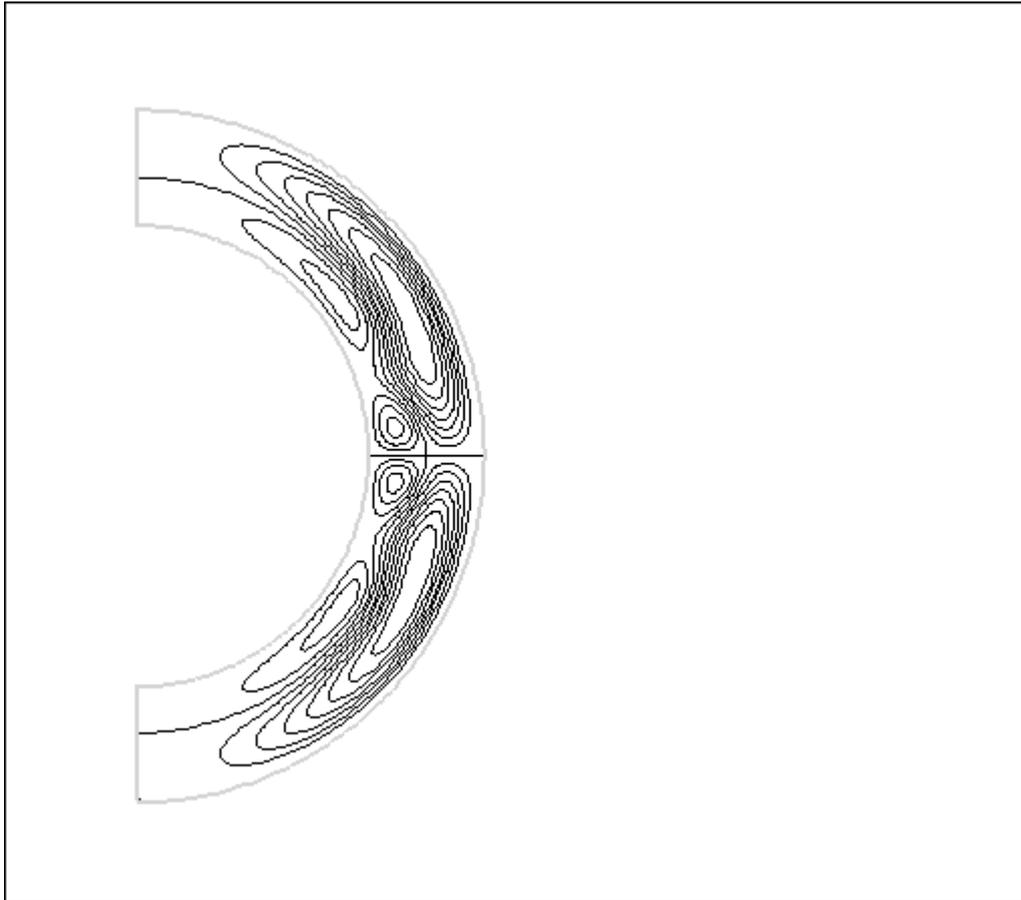
### 4.3 Écoulement secondaire

Les rotations des deux sphères induisent inévitablement un écoulement secondaire dans le plan méridien illustré dans les figures 4.3-a-4.3-f. Les rotations des sphères sont maximales au niveau de l'équateur où l'équilibre des forces (d'inertie, de pression et viscosité) induit deux écoulements radiaux suivant les normales des surfaces sphériques, dirigées vers l'entrefer. Ces deux écoulements équatoriaux sont radiaux, parce que la composante polaire de la vitesse est nulle au niveau de l'équateur (symétrie équatoriale). Aussi, ces écoulements sont nécessairement opposés. Leur rencontre se fait à un endroit à vitesse radiale nulle. Cette vitesse radiale nulle, combinée à la vitesse polaire nulle, crée un point de stagnation de l'écoulement secondaire dans le plan méridien (un cercle dans l'entrefer sphérique tridimensionnel). Sachant qu'à un point de stagnation une ligne de courant se divise en plusieurs branches, deux branches de la ligne de courant équatoriale bifurquent du point de stagnation vers les pôles: autrement dit, chacun des écoulements radiaux se divise en deux parties orientées vers les deux hémisphères. Atteignant l'axe de rotation, chacune des branches décrites rencontre un autre point de stagnation entre les deux sphères, et elles se divisent en deux branches radiales, l'une dirigée vers la sphère intérieure, l'autre vers la sphère extérieure. Atteignant les sphères, les branches suivront les contours des sphères vers l'équateur. Ces profils de la ligne de courant bifurquée au niveau de l'équateur créent un écoulement secondaire de base (dans un plan méridien) sous la forme de deux cellules (d'Eckman) contrarotatives dans chaque hémisphère. Dans l'hémisphère nord, la cellule près de la sphère intérieure tourne dans le sens antihoraire et celle près de la sphère extérieure tourne dans sens horaire. Dans l'hémisphère sud, les rotations des deux cellules sont opposées à celles des cellules de l'hémisphère nord. Les deux cellules de chaque hémisphère sont illustrées dans la figure 4.3-a pour le cas de  $Ro = -0.5$ .



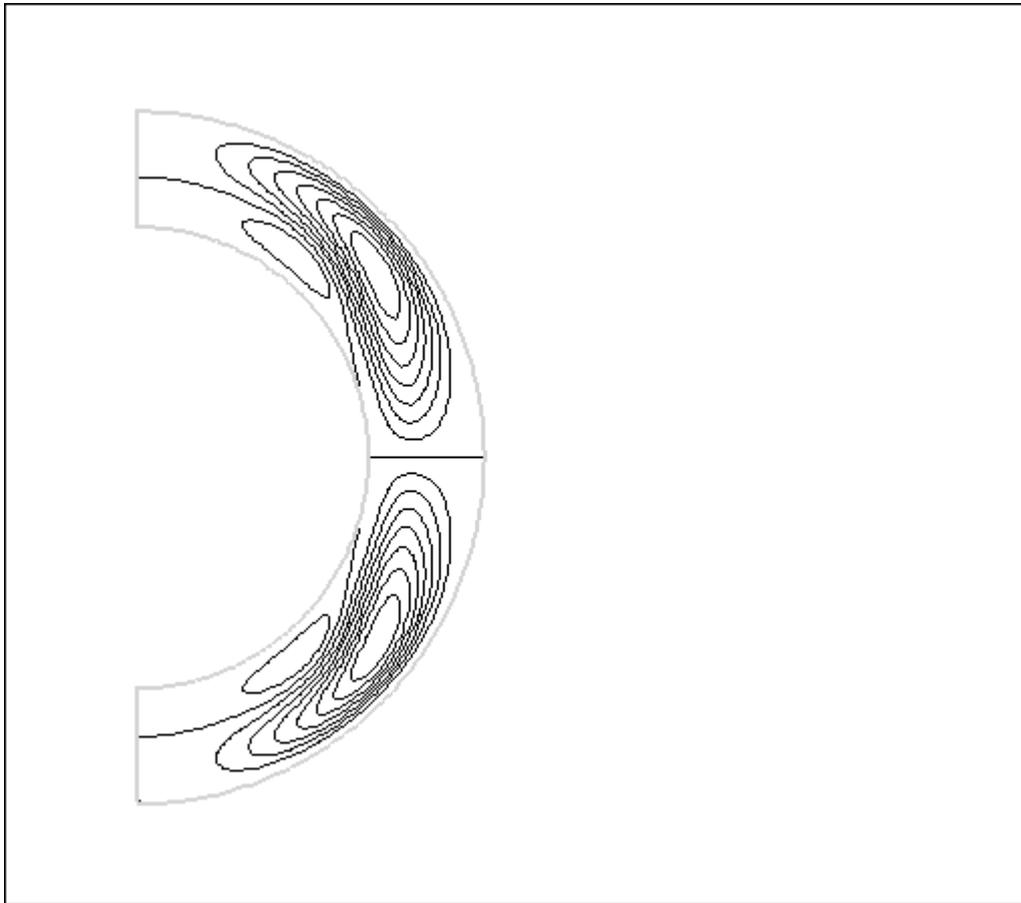
**Fig. 4.3-a** Ecoulement secondaire pour  $Ro = -0.5$

Les cellules près de la sphère extérieure ont un seul noyau alors que celles près de la sphère intérieure ont deux noyaux séparés par une zone de pincement. En diminuant le nombre de Rossby à  $Ro = -0.8$ , l'espace des cellules près de la sphère extérieure augmente et celui des cellules près de la sphère intérieure diminue. Le pincement entre les noyaux de ces dernières est plus important comme l'illustre la figure 4.3-b.



**Fig. 4.3-b** Ecoulement secondaire pour  $Ro = -0.8$

Pour le nombre de Rossby  $Ro = -1$ , la figure 4.3-c montre que les noyaux, près de l'équateur, des cellules près de la sphère intérieure disparaissent et les cellules près de la sphère extérieure s'étendent jusqu'à la sphère intérieure, près de l'équateur.



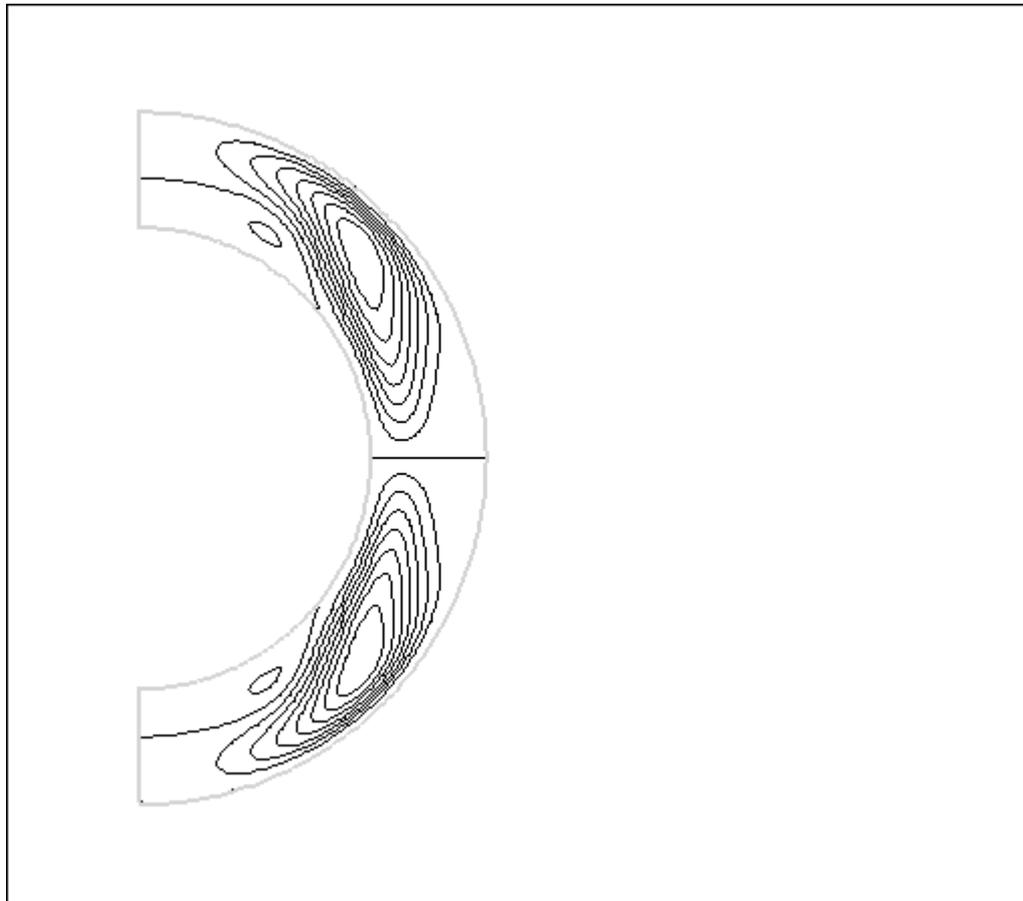
**Fig. 4.3-c Écoulement secondaire pour  $Ro = -1$**

Les cellules près de la sphère intérieure occupent un espace plus restreint. Cet espace est continuellement réduit et décalé vers les pôles, avec la diminution du nombre de Rossby de  $-1$  à  $-1.5$ ,  $-2.5$  et  $-3$ . La disparition des noyaux (près de l'équateur) des cellules accolées à la sphère intérieure, comme l'indiquent les figures 4.3-d-4.3-f, marque une bifurcation importante de l'écoulement entre deux régimes. Le premier régime, avec les nombres de Rossby  $-0.5$  et  $-0.8$ , caractérisé par une variation quasi radiale de la vitesse angulaire dans tout l'entrefers sphérique, perturbée par des protubérances proches de l'équateur. Ce régime illustre l'importance des forces visqueuses, dans tout l'entrefers sphérique, pour les nombres de Rossby cités. Ce régime est celui d'une rotation de la sphère extérieure, relativement faible, par rapport à celle de la sphère intérieure.

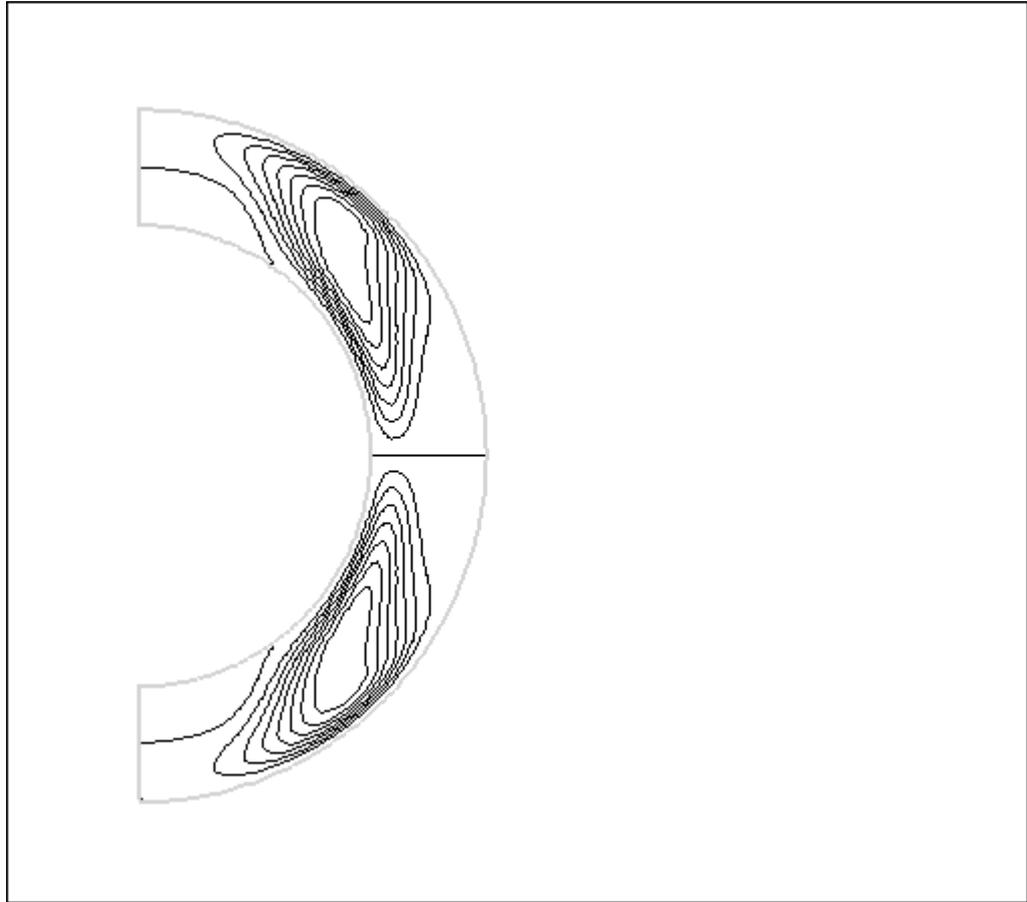
Pour ce régime, l'effet visqueux diffusif semble être important dans tout l'entrefer sphérique.

Qualitativement, nos résultats sont similaires à ceux de Wimmer [9] présentés pour un entrefer avec  $\beta = 0.111$ .

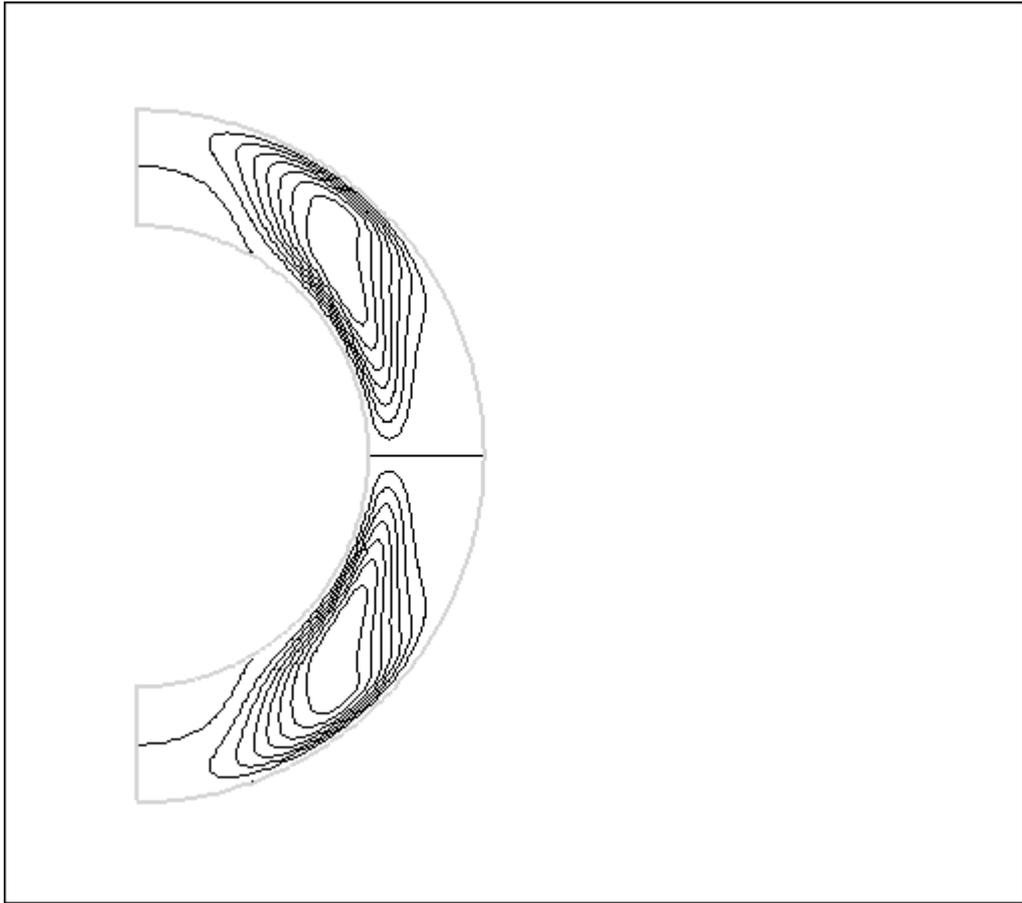
Le deuxième régime avec les nombres de Rossby -1, -1.5 -2.5 et -3, caractérisé par une invariance axiale de la vitesse angulaire, à l'intérieur de la zone limitée par le cylindre tangent à la sphère intérieure et la paroi de la sphère extérieure. Dans la zone d'invariance axiale, l'effet visqueux est moins important que l'effet centrifuge et celui de la pression. Ce deuxième régime illustre l'effet d'une rotation de la sphère extérieure plus rapide que celle de la sphère intérieure.



**Fig. 4.3-d** Ecoulement secondaire pour  $Ro = -1.5$



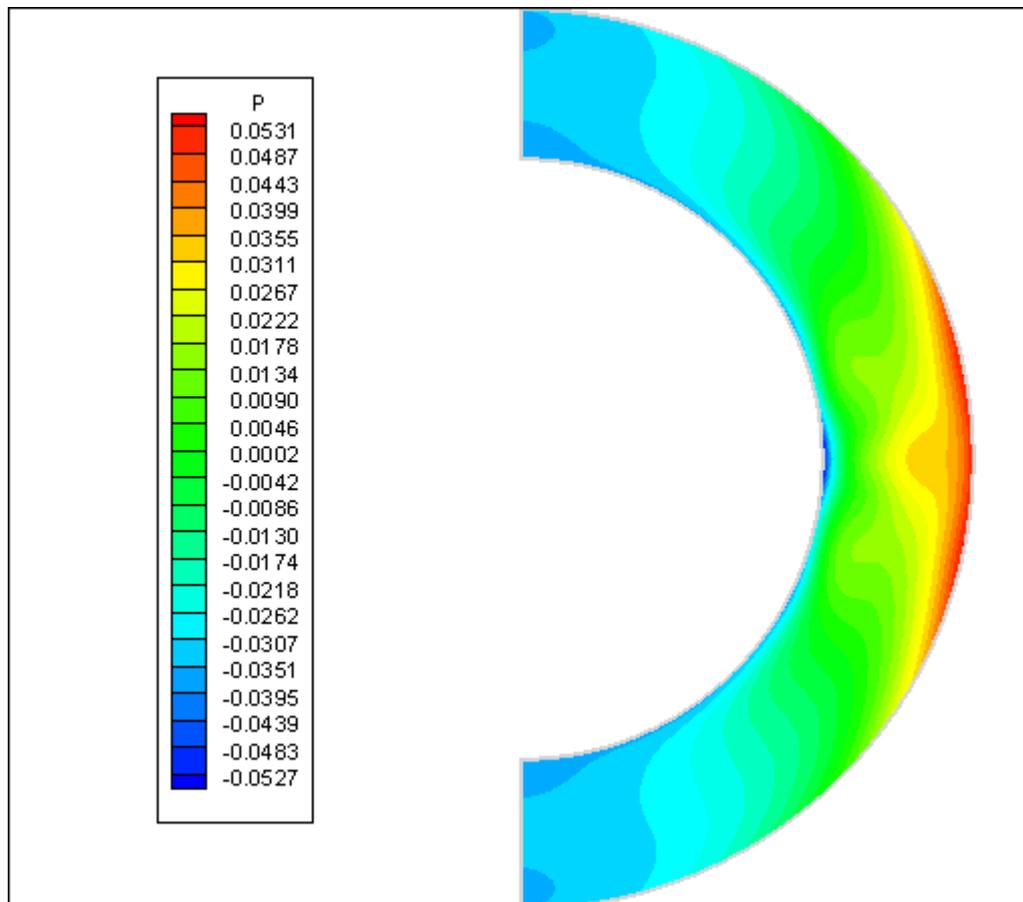
**Fig. 4.3-e** Ecoulement secondaire pour  $Ro = -2.5$



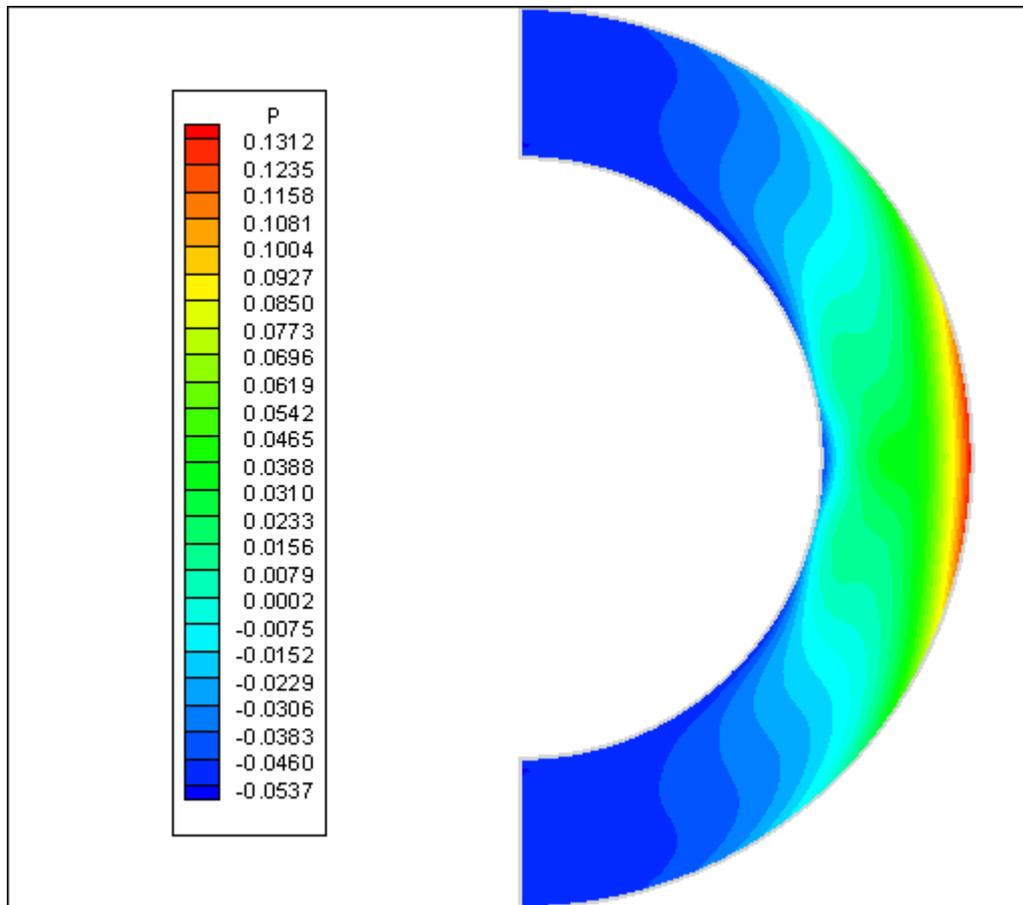
**Fig. 4.3-f** Ecoulement secondaire pour  $Ro = -3$

#### 4.4 Distribution méridionale de la pression

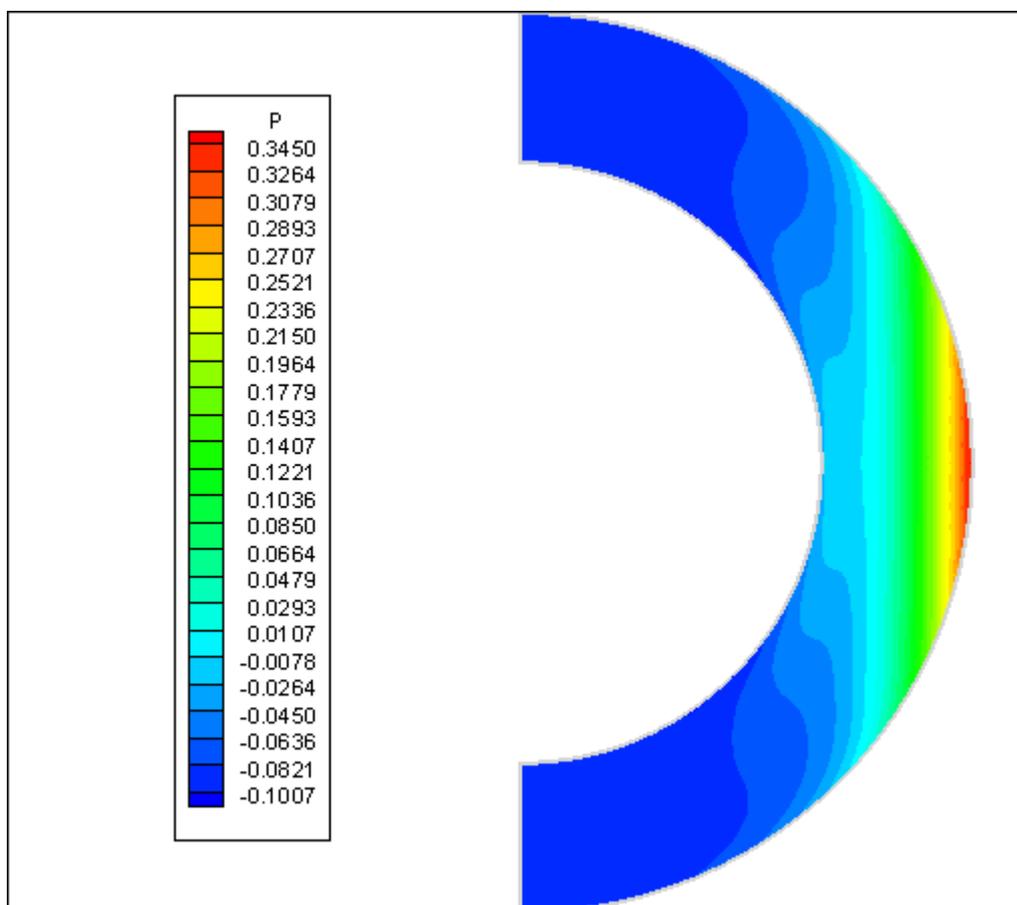
Ces deux régimes sont nettement mis en évidence avec la représentation de la distribution méridionale de la pression dans les figures 4.4-a-4.4-f pour les différents nombres de Rossby.



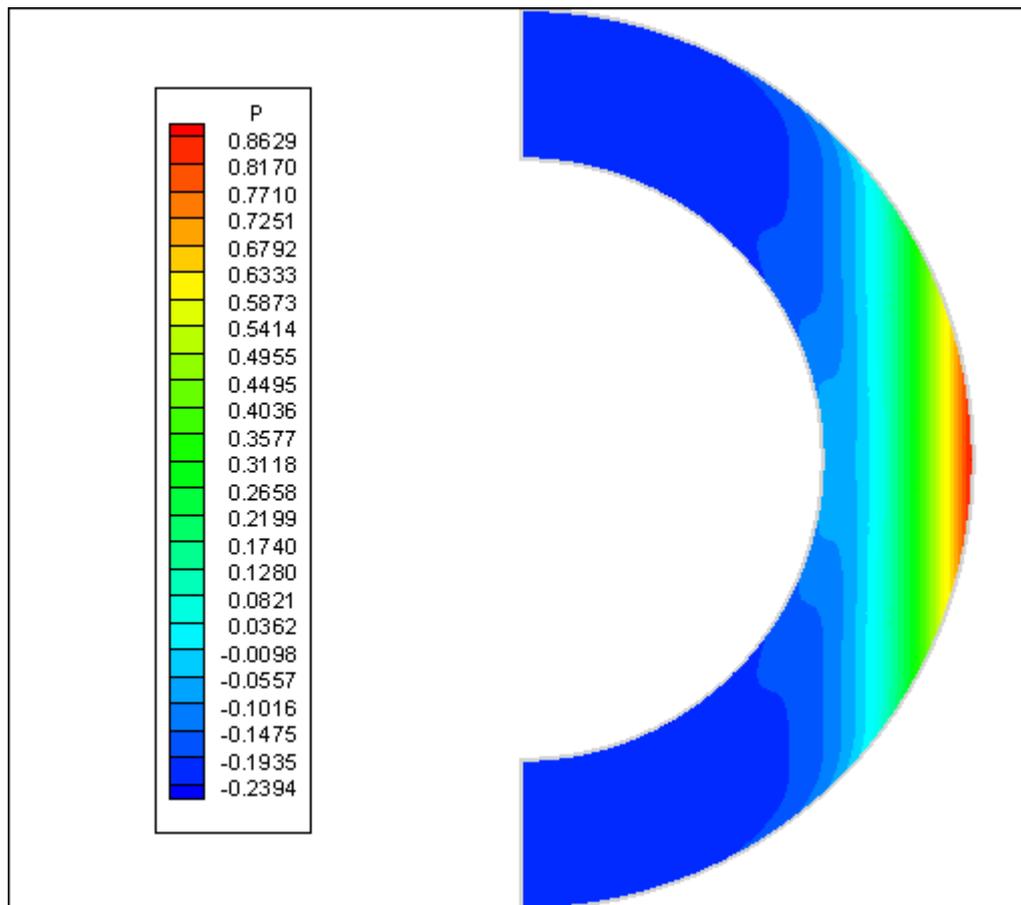
**Fig. 4.4-a** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -0.5$



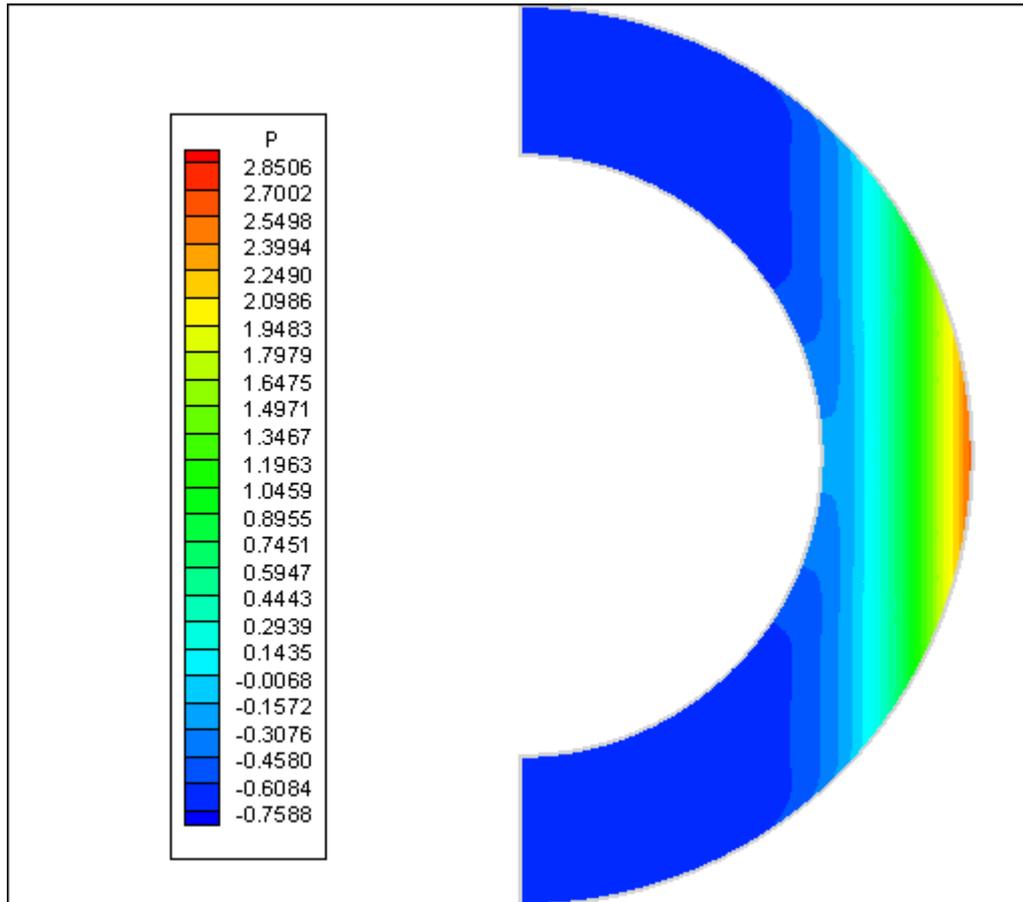
**Fig. 4.4-b** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -0.8$



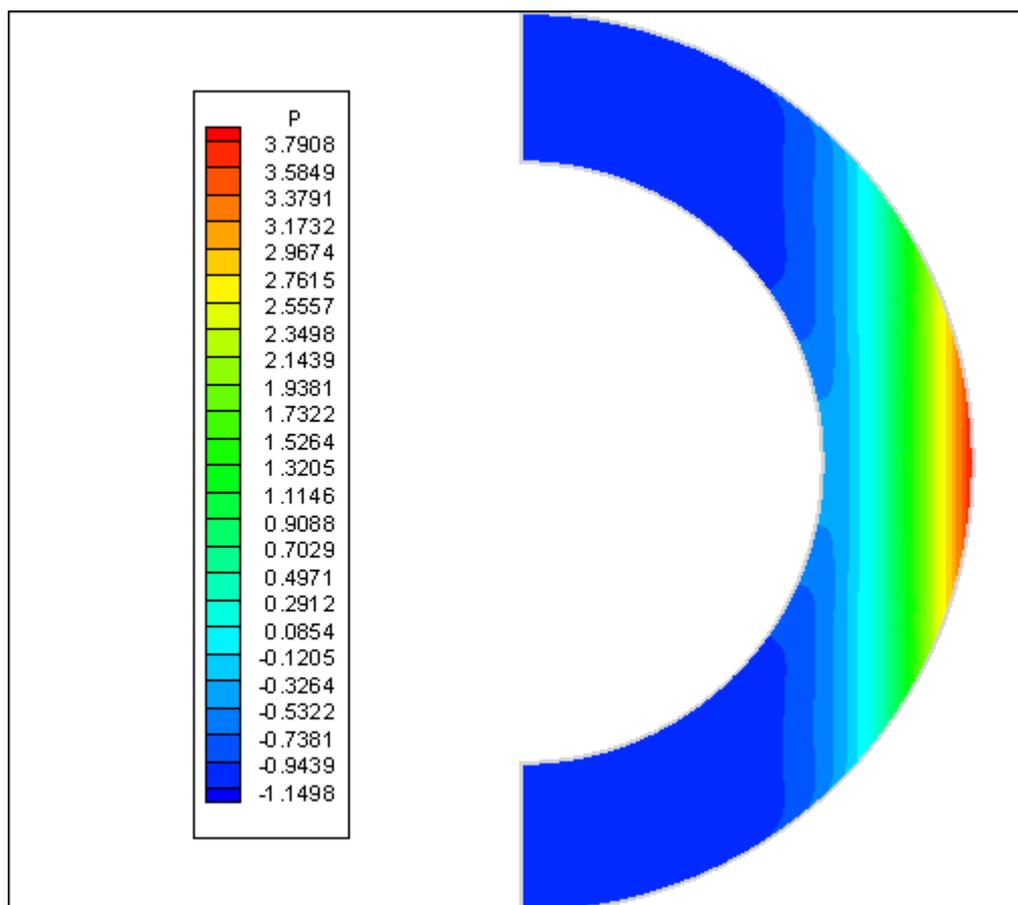
**Fig. 4.4-c** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -1$



**Fig. 4.4-d** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -1.5$



**Fig. 4.4-e** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -2.5$



**Fig. 4.4-f** Champ méridional de la pression pour  $Ro = -3$

## Conclusion

Dans cette étude, l'écoulement de Couette sphérique contrarotatif a fait l'objet d'une simulation numérique dans l'ensemble du domaine sphérique avec une précision spatiotemporelle du second ordre. Les paramètres de contrôle respectifs, le rapport d'aspect géométrique et le nombre de Reynolds, ont été fixés à 0.5 et 300. L'influence du nombre de Rossby sur l'écoulement a été étudiée pour six valeurs : -0.5, -0.8, -1, -1.5, -2.5 et -3. Il en résulte que deux régimes sont bien apparents. Le premier, correspondant aux nombres de Rossby égaux à -0.5 et -0.8, est représentatif des mouvements de rotation très modérés où la contribution de la diffusion visqueuse est prépondérante. Quant au second régime, qui concerne les autres valeurs du Rossby (de -1.0 à -3), il est clair que ce dernier présente une toute autre configuration ; caractérisée surtout par un domaine d'invariance axiale localisé à l'intérieur de la zone limitée par le cylindre tangent et la surface de la sphère extérieure.

Les perspectives de notre étude sont nombreuses, on peut considérer un fluide non Newtonien et entamer une étude similaire qui permettra de discerner les différents régimes d'écoulement. À cause de l'importance de l'étude de l'écoulement de Couette sphérique sur l'analyse des mouvements globaux atmosphériques planétaires la présence de champ magnétique et du transfert thermique pourraient aussi être considérés.

## Références bibliographiques

- [1] **E. Guyon, J-P Hulin, L Petit**, Hydrodynamique Physique, Inter Edition/CNRS Edition, Paris, 1994.
- [2] **P.G. Drazin, W.H.Reid**, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 1981.
- [3] **Physics of Rotating Fluids**, Selected Topics of the 11th International Couette–Taylor, Workshop Held at Bremen, Germany, 20-23 July 1999.
- [4] **I. Proudman**, The Almost Rigid Rotation of Viscous Fluid Between Concentric Spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 1, 1956, pp.505-516.
- [5] **K. Stewartson**, On Almost Rigid Rotations, *J. Fluid Mech.*, Vol. 26, Part 1, 1966, pp.131-144.
- [6] **B. R. Munson, D. D. Joseph**, Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres, Basic Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, Part 2, 1971, pp.289-303.
- [7] **J.-P. Bonnet, T. A. de Roquefort**, Ecoulement Entre Deux Sphères Concentriques en Rotation, *J. Méc.*, Vol. 15, N°3, 1976, pp.373-396.
- [8] **M. Wimmer**, Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 78, 1976, pp.317-335.
- [9] **M. Wimmer**, Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Two Concentric Rotating Spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 103, 1981, pp.117-131.
- [10] **I. M. Yavorskaya, Y. N. Belyaev**, Hydrodynamical Stability in Rotating Spherical layers: Application to Dynamics of Planetary Atmospheres, *Acta Astronautica*, Vol. 13, N°6/7, 1986, pp.433-440.

- [11] **N. M. Astaf'eva**, Stability and no uniqueness of axisymmetric flow in rotating spherical layers (nonlinear theory), *J. Fluid Dynamics*. Vol 33, N° 1, 1998.
- [12] **B. V. Pal'tsev, A. V. Svatsev, I. I. Chechel'**, Numerical Study of the Basic Stationary Spherical Couette Flow at Low Reynolds Numbers, *Comp. Math. and Math. Physics*, Vol. 47, N°4, 2007, pp.664-686.
- [13] **Panton R.L.**, Incompressible flow, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [14] **S. V. Patankar**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [15] **W. Medjroubi**, Régimes d'écoulement entre deux sphères concentriques en rotation, Thèse de magister en physique énergétique, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Mentouri Constantine(2005).
- [16] **D. A. Andersen, J. C. Tannehill, R. H. Pletcher**, *Computational Fluid Mechanics and Heat transfer*, Hemisphere publishing corporation, Taylor & Frances,(1984).

## Résumé

Cette étude concerne la simulation numérique tri dimensionnelle d'un écoulement incompressible et laminaire entre deux sphères concentriques en contra rotation. La sphère intérieure est en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\Omega_1$ , la sphère extérieure est en contra rotation avec une vitesse angulaire constante  $\Omega_2$ . La nature du régime de l'écoulement entre les deux sphères dépend du rapport d'aspect, du nombre de Reynolds et du nombre de Rossby. Dans cette étude, le rapport d'aspect,  $\beta$  est arbitrairement fixé à 0.5, le nombre de Reynolds  $Re$  est arbitrairement fixé à 300. Le nombre de Rossby  $Ro$  est variable: six nombres sont considérés: -0.5, -0.8, -1, -1.5 -2.5 et -3. L'écoulement est modélisé par les équations de continuité et de Navier-Stokes, avec des conditions initiales et aux limites appropriées, dans les coordonnées sphériques. Les équations modélisantes sont résolues avec la méthode des volumes finis. La discrétisation spatiotemporelle est avec une précision du second ordre. Le maillage numérique est de 32X189X32 points suivant les directions radiale, polaire et azimutal respectivement. Bien que les écoulements des six cas considérés soient stationnaires et axisymétriques, ils manifestent deux régimes distincts. Le premier, avec les nombres de Rossby -0.5 et -0.8, caractérisé par une variation quasi radiale de la vitesse angulaire dans l'entrefer sphérique, loin de la zone autour de l'équateur où la variation citée est perturbée par une protubérance orientée vers la sphère extérieure. Ce régime illustre l'importance des forces visqueuses, dans tout l'entrefer sphérique, pour les deux nombres de Rossby cités. Il est caractéristique des rotations relativement faibles pour lesquelles l'effet visqueux diffusif est considérable dans tout l'entrefer sphérique. Le deuxième régime, avec les nombres de Rossby -1, -1.5 -2.5 et -3, est surtout caractérisé par une invariance axiale de la vitesse angulaire, dans l'intérieur de la zone limitée par le cylindre tangent à la sphère intérieure, et la paroi de la sphère extérieure. A l'intérieur du cylindre tangent cité, la distribution méridienne de la vitesse angulaire présente des variations, radiale et polaire, importantes. Dans la zone d'invariance axiale, l'effet visqueux est moins important que les effets centrifuges et de pression. Ce deuxième régime illustre l'effet de la rotation plus rapide de la sphère extérieure entraînant l'apparition d'une zone dans l'écoulement où le théorème de Taylor-Proudman s'applique.

**Mots clés:** Ecoulement de Couette Sphérique- Sphères contrarotatives - Volume finis - Effet du nombre de Rossby.

## Abstract

This study concerns the numerical simulation of a three dimensional and laminar flow Incompressible between two concentric counter rotating spheres. The inner sphere rotated with a constant angular velocity  $\Omega_1$ , while the outer sphere rotated with a constant angular velocity  $\Omega_2$ . The nature of the regime of flow between the two spheres depends on the aspect ratio  $\beta$ , Reynolds number  $Re$  and Rossby number  $Ro$ . In this study the aspect ratio  $\beta$  fixed at 0.5, Reynolds number  $Re$  fixed at 300 and for Rossby number we consider values -0.5, -0.8, -1, -1.5 -2.5 et -3. The flow is modelled by differential equations, partial differential, continuity and Navier-Stokes, with initial conditions and the limits, in spherical coordinates. The equations modélisantes are resolved with the method of finite volume. The discretization spatial with a precision of the second order, the numerical mesh has 32 points following the radial direction, 189 points following the direction of the polar angle and 32 points following the direction of the angle azimuthally. Although the flow of the six cases considered being stationary and axisymmetric, they show two separate regimes. First regime: with the numbers of Rossby -0.5 and -0.8, Characterized by a quasi radial variation of the angular velocity in the entire gap spherical. Away from the area around the equator where the change cited is disturbed by a protuberance oriented outer sphere. This regime shows the importance of viscous forces across the gap spherical, for two numbers Rossby cited. It is characteristic of rotations relatively low for which the effect viscous diffusif is considerable in the entire spherical gap.

The second regime, with the numbers of Rossby -1, -1.5 -2.5 and -3 is mainly characterized by an axial invariance of the angular velocity, in the interior the limited area by the cylinder tangent to the inner sphere and the wall the outer sphere. Within the cylinder tangent city, Meridian distribution of the angular velocity presents variations, radial and polar important. In the area of axial invariance, viscous effect is less important than the effects of centrifugal and pressure. This second regime shows the effect of the increased rotation of the outer sphere resulting in the emergence of a zone in the flow where Taylor's-Proudman theorem applies.

**Key words:** Spherical Couette Flow- Counter rotating spheres- finite volumes- Effect of number of Rossby.

## التلخيص

نتطرق في هذه الأطروحة لدراسة الرقمية ثلاثية الأبعاد لجريان غير قابل للانضغاط وغير مضطرب بين كرتين متركزتين كلاهما في حالة دوران لكن في اتجاه معاكس. الكرة الداخلية تدور بسرعة زاوية ثابتة  $\Omega_1$  ، الكرة الخارجية تدور بسرعة زاوية ثابتة  $\Omega_2$ . نوع الجريان بين الكرتين يرتبط بمعامل الشكل  $\beta$  وعدد رينولدز  $Re$  وعدد روسبي  $Ro$ . في هذه الدراسة عامل الشكل  $\beta = 0.5$  ، عدد رينولدز  $Re = 300$  وعدد روسبي يؤخذ ستة قيم  $Ro = -0.5, -0.8, -1.0, -1.5, -2.5, -3.0$ . قمنا بتمثيل هذه المشكلة بمعادلات حفظ الكتلة و معادلات حفظ كميات الثلاث لكمية الحركة في الاتجاهات : النصف القطرية ، القطبية و السمتية، بالشروط الابتدائية وعند الحدود، المعالجة في الإحداثيات الكروية. المعادلة حلت بطريقة الحجوم المنتهية، التقسيم بدقة من الدرجة الثانية، التقسيم الرقمي ممثل ب 32 نقطة في الاتجاه النصف القطرية ، 189 نقطة في الاتجاه القطبي و 32 نقطة في الاتجاه السمتية. التدفق في الحالات الست المعبر عنها يكون في حالة ثابتة ومتناسق مع المحور، أنها تشير إلى نمطين مستقلين. الأولى ، في حالة روسبي  $-0.5$  و  $-0.8$  ، تتميز بتغيرات شبه شعاعية للسرعة الزاوية في الفجوة كروي، بعيدا عن المنطقة حول خط الاستواء حيث التغيرات السابقة الذكر تضطرب مشكلة نتؤ موجه نحو الكرة الخارجية. هذا النمط يبين أهمية قوى اللزوجة، في كامل الفجوة الكروية، لرقمين روسبي المذكورين. و هو من خصائص الدوران المنخفض السرعة نسبيا الذي له أثر كبير في اللزوجة المنتشرة عبر الفجوة الكروية. النمط الثاني ، مع أعداد روسبي  $-1.0, -1.5, -2.5, -3.0$  ، أساسا تميز بعدم وجود تغير محوري للسرعة الزاوية، في داخل المنطقة المحدودة بالاسطوانة الخيالية إلى الكرة الداخلية، و حافة الكرة الخارجية. داخل الاسطوانة الخيالية، التوزيع الطولي للسرعة الزاوية يبين وجود تغيرات قطرية و قطبية هامة في المجال عدم التغيرات المحورية. تأثير اللزوجة أقل أهمية من الآثار المترتبة على الطرد المركزي والضغط. هذا النمط الأخير يبين اثر زيادة سرعة دوران الكرة الخارجية مما أدى إلى ظهور منطقة في تدفق أين يمكن تطبيق نظرية تايلر – برودمان.

**الكلمات الدالة:** الجريان الكروي Couette - كرتان دوران في اتجاه معاكس - طريقة الحجوم المنتهية- اثر عدد روسبي

## Résumé

Cette étude concerne la simulation numérique tri dimensionnelle d'un écoulement incompressible et laminaire entre deux sphères concentriques en contra rotation. La sphère intérieure est en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\Omega_1$ , la sphère extérieure est en contra rotation avec une vitesse angulaire constante  $\Omega_2$ . La nature du régime de l'écoulement entre les deux sphères dépend du rapport d'aspect, du nombre de Reynolds et du nombre de Rossby. Dans cette étude, le rapport d'aspect,  $\beta$  est arbitrairement fixé à 0.5, le nombre de Reynolds  $Re$  est arbitrairement fixé à 300. Le nombre de Rossby  $Ro$  est variable: six nombres sont considérés: -0.5, -0.8, -1, -1.5 -2.5 et -3. L'écoulement est modélisé par les équations de continuité et de Navier-Stokes, avec des conditions initiales et aux limites appropriées, dans les coordonnées sphériques. Les équations modélisantes sont résolues avec la méthode des volumes finis. La discrétisation spatiotemporelle est avec une précision du second ordre. Le maillage numérique est de 32X189X32 points suivant les directions radiale, polaire et azimutal respectivement. Bien que les écoulements des six cas considérés soient stationnaires et axisymétriques, ils manifestent deux régimes distincts. Le premier, avec les nombres de Rossby -0.5 et -0.8, caractérisé par une variation quasi radiale de la vitesse angulaire dans l'entrefer sphérique, loin de la zone autour de l'équateur où la variation citée est perturbée par une protubérance orientée vers la sphère extérieure. Ce régime illustre l'importance des forces visqueuses, dans tout l'entrefer sphérique, pour les deux nombres de Rossby cités. Il est caractéristique des rotations relativement faibles pour lesquelles l'effet visqueux diffusif est considérable dans tout l'entrefer sphérique. Le deuxième régime, avec les nombres de Rossby -1, -1.5 -2.5 et -3, est surtout caractérisé par une invariance axiale de la vitesse angulaire, dans l'intérieur de la zone limitée par le cylindre tangent à la sphère intérieure, et la paroi de la sphère extérieure. A l'intérieur du cylindre tangent cité, la distribution méridienne de la vitesse angulaire présente des variations, radiale et polaire, importantes. Dans la zone d'invariance axiale, l'effet visqueux est moins important que les effets centrifuges et de pression. Ce deuxième régime illustre l'effet de la rotation plus rapide de la sphère extérieure entraînant l'apparition d'une zone dans l'écoulement où le théorème de Taylor-Proudman s'applique.

**Mots clés:** Ecoulement de Couette Sphérique- Sphères contrarotatives - Volume finis - Effet du nombre de Rossby.