

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANINE**  
**FACULTE DES SCIENCES EXACTES**  
**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

**MEMOIRE**

présenté pour obtenir le diplôme de

**MAGISTER**

Spécialité : Physique théorique

Option : Physique quantique

Par

BENACHOUR Amine

**THEME**

<b>Approche de supersymétrie en mécanique quantique et application à la construction de potentiels non hermitiens avec spectres réels</b>
---

Soutenu le 29/06/2010

**Devant le Jury :**

Président :	L. Guechi	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Rapporteur :	F. Benamira	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
Examineurs :	S. R. Zouzou	Prof.	Univ. Mentouri- Constantine
	B. Bentag	M. C. A	Univ. Mentouri- Constantine

# Introduction

Depuis longtemps, plusieurs physiciens tentent de construire une théorie unique qui serait capable de décrire l'univers dans son ensemble. Cette théorie serait l'aboutissement à l'unification de la mécanique quantique et de la relativité générale ; une quête à laquelle Einstein s'était consacré durant les dernières années de sa vie.

Dans ce contexte Gel fond et Likhtman [1], Ramond [2], Neveu et Schwartz [3] donnèrent naissance, au début des années soixante dix, à la théorie de la SUPERSYMETRIE, qui constitue l'une des hypothèses les plus prometteuses, vue que les symétries occupent une place privilégiée en physique, notamment en physique des particules.

C'est justement en 1974 que Julius Wess et Bruno Zumino [4] apportèrent une réponse à la question de savoir s'il est possible de lier les bosons et les fermions, en construisant une théorie permettant de rendre compte des relations profondes entre bosons et fermions grâce à l'action d'une nouvelle symétrie : la supersymétrie.

Depuis, la supersymétrie ne cesse de connaître du succès, notamment en théorie des champs. Ainsi, plusieurs théories de supersymétrie vont voir le jour ; elles seront toutes rassemblées sous l'acronyme SUSY. Parmi elles, on cite :

La théorie des supercodes qui est une théorie de cordes obéissant aux lois de la symétrie, dont le but est l'unification de toutes les particules et forces fondamentales de la nature.

La théorie de la supergravité qui est une théorie des champs de Maxwell, combinant supersymétrie et relativité générale. C'est l'une des théories des champs de la gravité, candidate à l'unification de la mécanique quantique avec la relativité générale.

La théorie de jauge supersymétrique qui est aussi une théorie des champs possédant plusieurs supersymétries et incorporant une symétrie de jauge et la théorie de jauge ordinaire.

La mécanique quantique supersymétrique (MQ SUSY), en anglais (SUSY QM), a été initiée par Witten [5] qui a introduit pour la première fois en mécanique quantique non relativiste les concepts de symétrie relatifs à la théorie des champs, ses travaux seront ensuite repris et développés par d'autres physiciens [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

pour résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension tout en se basant sur la méthode de factorisation élaborée auparavant par Schrödinger [17] lui-même et généralisée par Hull et Infeld [18]. La méthode supersymétrique connaîtra un énorme succès suite à la découverte fondamentale en 1983 du concept d'invariance de forme [7], par le russe Gendshstein, conduisant à une démarche algébrique élégante permettant la résolution exacte de l'équation de Schrödinger relative aux potentiels vérifiant cette propriété, dits aussi invariants de forme.

Le chapitre 1 est consacré justement à une illustration de cette méthode, en suivant les différentes étapes allant de la factorisation de l'hamiltonien jusqu'à l'obtention du spectre énergétique et des fonctions d'ondes.

L'autre point fort fut la découverte dans les années quatre vingt dix de la  $PT$  symétrie par Bender et collaborateurs [19], qui montrèrent qu'un hamiltonien invariant par réflexion de l'espace et par renversement du sens du temps possède un spectre réel, si la  $PT$  symétrie n'est pas brisée. Cette mécanique quantique non hermitienne est considérée par beaucoup de physiciens comme l'extension de la mécanique quantique ordinaire. On parle alors de mécanique quantique  $PT$  symétrique ou  $PT$  symétrie.

Nous évoquerons dans le chapitre 2 les principaux résultats de la  $PT$  symétrie qui nous seront utiles pour les travaux présentés aux chapitres 3 et 4.

Dans le chapitre 3 nous présenterons une méthode originale pour obtenir des potentiels non hermitiens et non nécessairement  $PT$  symétriques qui possèdent un spectre réel. Nous montrons qu'il est toujours possible d'obtenir un potentiel complexe strictement isospectral à un potentiel hermitien.

Le chapitre 4 est réservé à l'exposé d'une nouvelle technique de construction de potentiels partenaires complexes de spectre énergétique réel pouvant être déterminé analytiquement. La construction de tels potentiels se fera en exploitant la notion d'invariance de forme.

# Chapitre 1

## Résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension par l'approche de la supersymétrie

### 1.1 Introduction

Selon beaucoup de spécialistes, la mécanique quantique est la théorie scientifique la plus révolutionnaire du XX<sup>ème</sup> siècle. Sans doute parce qu'elle s'est lancée le défi de comprendre l'univers de l'infiniment petit. Elle est à l'origine des progrès technologiques extraordinaires, des semi-conducteurs aux nanotechnologie en passant par l'imagerie médicale à résonance magnétique jusqu'à l'informatique quantique, autant de découvertes au service de l'humanité.

Venue au monde au début des années vingt pour mettre définitivement fin à la crise qu'a connu la physique dès la fin du 19 siècle ; marqué par l'impuissance et l'échec de la physique classique dans la description et la compréhension des phénomènes atomiques et subatomiques couronnant ainsi les travaux d'illustres physiciens tels que Bohr, De Broglie, Heisenberg, Dirac, Jordan, Schrödinger, Pauli, considérés comme ses pères fondateurs et ceux qui ont établi ses principes de base.

Bose et Fermi l'élargirons pour des systèmes de particules identiques. Quand a Van Numan, il s'occupera du formalisme mathématique en s'appuyant sur les travaux d'anciens mathématiciens.

ciens, principalement ceux de David Hilbert.

Il nous est impossible de parler de mécanique quantique sans évoquer l'équation de Schrödinger, la plus célèbre et la plus fondamentale de la physique. Elle fut conçue en 1925 par Erwin Schrödinger, c'est l'équation d'évolution dans le temps d'une fonction de carrée sommable, dite fonction d'onde, qu'on doit associer à toute particule matérielle selon l'hypothèse de Louis de Broglie, auteur du double aspect de la matière : « onde-corpuscule ».

Dans le présent chapitre, nous allons voir comment, grâce à de simples démarches inspirées de la supersymétrie (opérateurs fermioniques et bosoniques) et de la méthode de factorisation de Schrödinger [17], Hull [18], sous certaines conditions (invariance de forme, non brisure de symétrie), présenter une technique de résolution algébrique de l'équation de Schrödinger pour des systèmes stationnaires unidimensionnels et non relativistes.

## 1.2 Equation de Schrödinger stationnaire

L'équation de Schrödinger pour l'évolution dans le temps de la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$  d'une particule repérée par son vecteur position  $\vec{r}$  s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t), \quad (1.1)$$

où  $H$  est l'opérateur hamiltonien de la particule et  $\hbar$  la constante de Planck. Si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire stationnaire et en l'absence de champ magnétique,  $H$  ne dépendra pas explicitement du temps et prendra la forme simple suivante :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}), \quad (1.2)$$

où  $m$  est la masse de la particule, supposée constante,  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien et  $V(\vec{r})$  étant l'opérateur d'énergie potentielle associée au potentiel d'interaction.

Les états physiques sont celles qui correspondent à des solutions pour lesquelles  $\psi(\vec{r}, t)$  est normalisable sur tout l'espace de définition de  $V(\vec{r})$ . Autrement dit  $\psi(\vec{r}, t)$  appartient à

l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable :

$$\int d\vec{r} |\psi(\vec{r}, t)|^2 < \infty, \quad (1.3)$$

car  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  représente la densité de probabilité de présence.

Pour résoudre une équation du type (1.1) dans le cas stationnaire, on utilise souvent la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Ceci consiste à chercher les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps :

$$\psi(\vec{r}, t) = u(t)\varphi(\vec{r}). \quad (1.4)$$

En substituant (1.4) dans (1.1), on obtient après séparation

$$\frac{i\hbar}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})} H\varphi(\vec{r}), \quad (1.5)$$

il s'agit d'une égalité entre deux expressions, dont l'une ne dépend que de l'espace et l'autre ne dépend que du temps, qui n'est satisfaite que si chaque membre est égal à la même constante. Ainsi, si on dénote cette constante par  $E$ ,  $u(t)$  et  $\varphi(\vec{r})$  seront donnés par

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}Eu(t), \quad (1.6)$$

dont la solution est simplement donnée par

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right),$$

et

$$H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}). \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) que doit satisfaire la fonction  $\varphi(\vec{r})$  est une équation aux valeurs propres de l'opérateur  $H$  agissant dans l'espace de Hilbert. Par conséquent les valeurs propres  $E$  de l'Hamiltonien coïncident avec les énergies possibles que peut prendre la particule soumise aux interactions extérieures. Cette équation est appelée "équation de Schrödinger stationnaire".

Selon la forme de l'interaction, les solutions physiques peuvent être de deux natures différentes. Les solutions étendues dans l'espace, c'est-à-dire qui ne s'annulent qu'à l'infini, représentent les états de diffusion et sont associées à des énergies appartenant au spectre continu de la particule. Par contre, les solutions localisées dans l'espace, c'est-à-dire qui s'annulent à l'extérieur d'un domaine fermé et borné, représentent les états liés [20, 21] et correspondent à des énergies discrètes appartenant au spectre quantifié. Un système physique peut avoir uniquement des états de diffusion ou uniquement des états liés comme il peut avoir les deux à la fois. Pour un hamiltonien du type (1.2), on peut avoir une idée sur la nature du spectre directement à partir de la forme du potentiel si ce dernier est à une dimension de l'espace,  $V(\vec{r}) \equiv V(x)$ , ou central,  $V(\vec{r}) \equiv V(r)$ . Dans ces cas particuliers, comme en mécanique classique [23], l'existence d'un minimum pour le potentiel est une signature de l'existence d'états localisés et par conséquent d'un spectre d'énergies quantifiées dont le nombre dépend de la profondeur du minimum. Par ailleurs, on montre que dans ces cas le spectre n'est pas dégénéré [21], de sorte qu'à chaque niveau d'énergie quantifiée correspond une seule fonction propre caractérisée par le nombre de zéro qu'elle possède sur l'intervalle de définition du potentiel [24]; la plus basse énergie lui correspond une fonction d'onde qui n'a aucun zéro et est appelé niveau fondamental, celle du premier niveau excité possède un seul zéro, et ainsi de suite, c'est à dire de façon générale la fonction d'onde du nième niveau excité possède exactement  $n$  zéro. Toutes les solutions ne satisfaisant pas ces conditions ne peuvent pas représenter des états physiques.

### 1.2.1 Exemples de potentiels à une dimension

Si le mouvement de la particule est confiné sur une droite, le potentiel est alors une fonction à une seule variable de l'espace. Dans ce cas l'équation de Schrödinger de la particule ne dépend que d'une seule variable de l'espace. L'hamiltonien du type (1.1), s'écrit alors

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (1.8)$$

De nos jours, ce type de problèmes de mécanique quantique à une dimension et d'une importance capitale en physique mésoscopique dans le domaine du solide où de l'électronique. Parmi les potentiels les plus utilisés on cite le potentiel harmonique et le potentiel de Pöschl-

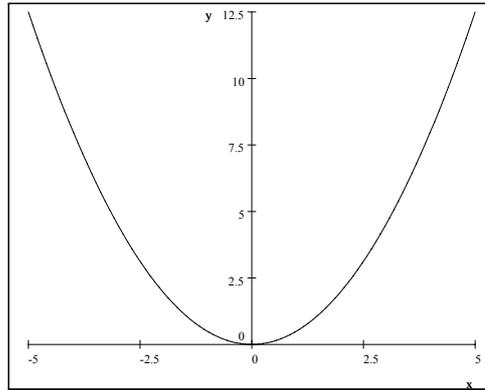
Teller.

### Particule soumise à l'effet du potentiel harmonique à une dimension

Le potentiel harmonique est donné

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (1.9)$$

dont l'allure pour  $m\omega^2 = 1$  est représentée sur la figure



qui est non borné quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . Dans ce cas, toutes les solutions physiques de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire qui sont de carré sommable, sont localisées. Elles sont en nombre infini et correspondent aux énergies discrètes données par

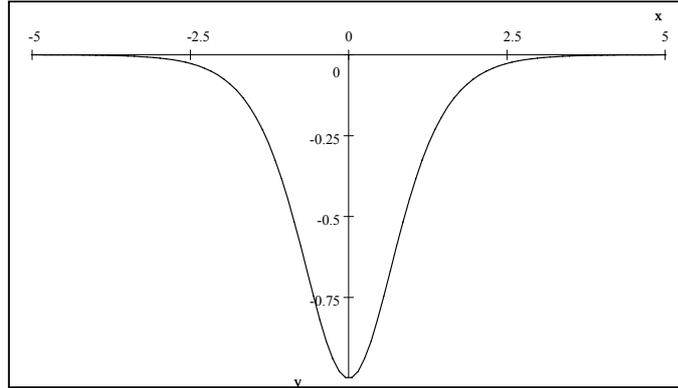
$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots . \quad (1.10)$$

### Particule soumise au potentiel hyperbolique de Pöschl-Teller à une dimension

Le potentiel de hyperbolique de Pöschl-Teller est donnée par

$$V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad (1.11)$$

où  $V_0$  est  $\alpha$  sont des constantes positives. L'allure de ce potentiel pour  $\alpha = V_0 = 1$  est représentée sur la figure 2



Dans ce cas, il existe des solutions étendues correspondant à un spectre continu d'énergies positives,  $E \geq 0$ . Les solutions d'énergies strictement négatives,  $E < 0$ , sont toutes localisées et correspondent à un spectre quantifié selon la loi [21]

$$E_n = \frac{-\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[ -(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right]^2, \text{ pour } 0 \leq n < n_{\max}, \quad (1.12)$$

avec

$$n_{\max} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}} - 1 \right) \quad (1.13)$$

Ainsi, le nombre des états localisés dépend de la profondeur du potentiel,  $V_0$  et de sa largeur  $\alpha$ .

### 1.3 Factorisation d'un hamiltonien

Depuis l'introduction de l'équation fondamentale de la mécanique quantique par Schrödinger, on n'a pas cessé d'essayer de lui trouver des méthodes de résolution adéquates. De nos jours plusieurs techniques existent, chacune peut être mieux adaptées à une situation particulière. La méthode de factorisation, qui fut établie par Schrödinger en 1941 [17] pour résoudre le problème de l'atome d'Hydrogène et qui a connue des ramifications plus tard par Hull et Infeld [18] est l'une des plus anciennes. Elle s'applique principalement dans les problèmes à une dimension de l'espace ou lorsque le potentiel est central. Dans ce dernier cas, l'équation de Schrödinger, écrite en coordonnées sphériques, se réduit à une équation à une dimension sur le demi axe positif avec un potentiel effectif qui est la somme du potentiel original et d'un terme centrifuge

provenant de l'invariance par rotation dans l'espace à trois dimensions.

Nous allons présenter dans cette section plus ou moins en détails les différentes étapes de cette méthode.

Considérons un potentiel à une dimension  $V(x)$ , défini sur un intervalle  $(a, b) \subseteq R$  et satisfaisant aux contraintes d'existence d'états localisés. Soient  $\{\varphi_n(x)\}$  et  $\{E_n\}$  l'ensemble des fonctions propres localisées et les énergies correspondantes d'une particule de masse  $m$  placée dans ce potentiel. L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit donc

$$H\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x), \quad (1.14)$$

avec

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (1.15)$$

Il sera commode de classer les énergies  $E_n$  selon un ordre croissant

$$E_0 < E_1 < E_2 < \dots \quad (1.16)$$

Le but est de factoriser  $H$  sous la forme

$$H = A^+A + C, \quad (1.17)$$

où  $C$  est une constante réelle.  $A$  et  $A^+$  sont deux opérateurs bosoniques, adjoints l'un de l'autre définis par

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.18)$$

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.19)$$

où  $W(x)$  est une fonction réelle qu'on appellera superpotentiel.

L'équation de Schrödinger (1.14) est alors équivalente à une nouvelle équation de Schrödinger, donnée par

$$H_- \varphi_n^-(x) = E_n^- \varphi_n^-(x), \quad (1.20)$$

pour le nouvel Hamiltonien  $H_-$  tel que

$$H_- = H - C = A^+ A = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x), \quad (1.21)$$

dont les fonctions propres et valeurs propres sont reliées à celles de  $H$  ainsi

$$\varphi_n^-(x) \sim \varphi_n(x), \quad (1.22)$$

et

$$E_n^{(-)} = E_n - C. \quad (1.23)$$

En substituant (1.18) et (1.19) dans(1.21), le superpotentiel  $W(x)$  est solution de l'équation du type Riccati

$$W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} = V_-(x). \quad (1.24)$$

En fait, la constante  $C$  ne peut pas être choisie arbitrairement, mais elle doit avoir comme borne supérieure la valeur propre  $E_0$ . Ceci peut être facilement prouvé de la manière suivante.

En multipliant à gauche les deux membres de (1.20) par  $\varphi_n^{-*}(x)$  et en intégrant sur  $(a, b)$ , on obtient

$$\int_a^b \varphi_n^{-*}(x) A^+ A \varphi_n^-(x) dx = E_n^- \int_a^b \varphi_n^{-*}(x) \varphi_n^-(x) dx, \quad (1.25)$$

qui s'écrit aussi

$$\|A\varphi_n^-(x)\|^2 = E_n^- \|\varphi_n^-(x)\|^2, \quad (1.26)$$

on en déduit immédiatement que les énergies propres de  $H_-$  sont positives,

$$E_n^- \geq 0, \quad \forall n. \quad (1.27)$$

Tenant compte de (1.23), il vient que :

$$C \leq E_0. \quad (1.28)$$

En mécanique quantique supersymétrique, et dans un but de résolution de l'équation de Schrödinger par cette approche, on choisit toujours

$$C = E_0, \quad (1.29)$$

car ce choix, correspond à

$$E_0^- = 0, \quad (1.30)$$

compt tenu de (1.21)

$$H_- = H_- E_0 \Rightarrow V_-(x) = V(x) - E_0, \quad (1.31)$$

et

$$E_n^{(-)} = E_n - E_0. \quad (1.32)$$

## 1.4 Existence d'un hamiltonien partenaire

En évaluant le produit  $AA^+$ , nous obtenons

$$AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}, \quad (1.33)$$

si on pose :

$$W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} = V_+(x), \quad (1.34)$$

on se rend compte que l'expression (1.33) est un hamiltonien  $H_+$  défini par

$$H_+ = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \quad (1.35)$$

qu'on peut associer à l'hamiltonien  $H_-$ , d'une manière univoque, et qui sera dit hamiltonien

partenaire. En combinant (1.24) et (1.34) on peut exprimer le potentiel  $V_+(x)$  en fonction de  $V_-(x)$  comme

$$V_+(x) = V_-(x) + 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (1.36)$$

$V_+(x)$  est appelé potentiel partenaire de  $V_-(x)$ . L'appellation hamiltoniens partenaires est due au fait que les leurs énergies propres et fonctions propres correspondantes sont étroitement liées et peuvent s'obtenir les unes des autres, comme nous allons le voir. C'est la conséquence principale de la méthode de factorisation

## 1.5 Lien entre les valeurs et fonctions propres des hamiltoniens partenaires :

Dénotons les valeurs propres des spectres discrets et les fonctions propres de  $H_-$  et  $H_+$  respectivement par  $\{E_n^-; \varphi_n^-(x)\}$  et  $\{E_n^+; \varphi_n^+(x)\}$ . Ainsi,

$$A^+ A \varphi_n^-(x) = E_n^- \varphi_n^-(x), \quad (1.37)$$

et

$$A A^+ \varphi_n^+(x) = E_n^+ \varphi_n^+(x). \quad (1.38)$$

En multipliant respectivement les équations (1.37) et (1.38) à gauche par  $A$  et  $A^+$  et tenant compte de (1.21) et (1.35), on obtient :

$$H_+ (A \varphi_n^-(x)) = E_n^- (A \varphi_n^-(x)), \quad (1.39)$$

et

$$H_- (A^+ \varphi_n^+(x)) = E_n^+ (A^+ \varphi_n^+(x)). \quad (1.40)$$

Les expressions (1.39) et (1.40) montrent clairement que les valeurs propres  $E_n^-$  de  $H_-$ , sont aussi valeurs propres de  $H_+$  correspondant aux fonctions  $A \varphi_n^-(x)$ , tandis que les valeurs propres  $E_n^+$  de  $H_+$  sont aussi valeurs propres de  $H_-$  associées aux fonctions propres  $A^+ \varphi_n^+(x)$ .

Par ailleurs, en vertu de (1.26) et (1.30), il vient que la norme de la fonction propre

$A\varphi_0^-(x)$  est nulle,

$$\|A\varphi_0^-(x)\|^2 = 0, \quad (1.41)$$

ce qui ne se réalise que si la fonction elle-même est nulle,

$$A\varphi_0^-(x) = 0. \quad (1.42)$$

Il découle alors de (1.39) que pour  $n = 0$ , l'égalité est triviale; c'est-à-dire à une valeur propre nulle correspond une fonction propre nulle. Par conséquent, la valeurs propre  $E_0^- = 0$  doit être exclue du spectre de  $H_+$ . Ainsi, l'énergie de l'état fondamental de  $H_+$ , c'est-à-dire  $E_0^+$ , doit être confondue avec l'énergie du premier niveau excité de  $H_-$ , qui est  $E_1^-$ . De proche en proche, on obtient la relation générale

$$E_{n+1}^- = E_n^+ \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.43)$$

En conclusion, les partenaires  $H_-$  et  $H_+$  possèdent le même spectre, sauf pour la valeur propre nulle qui n'existe que pour  $H_-$ .

La fonction propre de l'état fondamental de  $H_-$  peut être facilement obtenu à partir de (1.42). En effet, en reportant (1.18) dans (1.42) et après intégration, on obtient

$$\varphi_0^-(x) = N_0^- \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(x') dx'\right), \quad (1.44)$$

où  $N_0^-$  est une constante de normalisation.

Cette expression donne une relation biunivoque entre la fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_-$  et du superpotentiel  $W(x)$ . Connaissant  $W(x)$  on en déduit  $\varphi_0^-(x)$  et réciproquement.

Les fonctions d'ondes des niveaux excités des deux partenaires sont, en vertu de (1.39), (1.40) et (1.37), (1.38) et (1.43) reliées entre elles par

$$\varphi_n^+(x) = N_{n+1}^- A\varphi_{n+1}^-(x), \quad (1.45)$$

et

$$\varphi_{n+1}^-(x) = N_n^+ A^+ \varphi_n^+(x), \quad (1.46)$$

où  $N_{n+1}^-$  et  $N_n^+$  sont des constantes de normalisation.

En normalisant à l'unité toutes les fonctions propres, il vient de l'égalité des normes des deux membres de (1.45) que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{+*}(x) \varphi_n^+(x) dx &= |N_{n+1}^-|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1}^{-*}(x) (A^+ A) \varphi_{n+1}^-(x) dx \\ &= |N_{n+1}^-|^2 E_{n+1}^- \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1}^{-*}(x) \varphi_{n+1}^-(x) dx, \end{aligned} \quad (1.47)$$

ainsi, on obtient

$$|N_{n+1}^-| = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^-}}. \quad (1.48)$$

En procédant de la même manière sur (1.46) on obtient

$$|N_n^+| = \frac{1}{\sqrt{E_n^+}}. \quad (1.49)$$

On peut alors réécrire (1.45) et (1.46), comme

$$\varphi_n^+(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^-}} A \varphi_{n+1}^-(x), \quad (1.50)$$

et

$$\varphi_{n+1}^-(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^+}} A^+ \varphi_n^+(x). \quad (1.51)$$

En conclusion, la connaissance des fonctions propres de l'un des hamiltoniens partenaires suffit pour déterminer celles de l'autre, par action des opérateurs  $A$  et  $A^+$ .

## 1.6 Brisure de symétrie

On vient de voir que si on connaît les solutions d'un hamiltonien, c'est-à-dire ses fonctions propres et ses valeurs propres, on peut obtenir les solutions de son partenaire. D'après (1.24) et (1.34) ces deux hamiltoniens partenaires sont construits à partir du superpotentiel  $W(x)$ , déduit de la fonction propre de l'état fondamental  $\varphi_0^-(x)$  du potentiel en question en inversant

l'équation (1.44) ainsi

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \log \varphi_0^-(x). \quad (1.52)$$

Le problème c'est qu'en général la fonction propre de l'état fondamental  $\varphi_0^-(x)$  n'est pas connue au préalable, et il faut donc se débrouiller pour résoudre l'équation non linéaire de Riccati (1.24) qui admet une infinité de solutions "mathématiques". Cependant après résolution, on doit sélectionner parmi toutes les solutions possibles celle qui génère la fonction propre de l'état fondamental. Autrement dit si on dénote cette solution par  $W_0(x)$ , il faudrait que l'expression

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_0(y) dy\right), \quad (1.53)$$

soit une fonction d'onde satisfaisant aux contraintes physiques, requises pour la fonction d'onde de l'état fondamental. En particulier, elle doit être de carré sommable et garantissant l'hermiticité de l'hamiltonien. Il se trouve que ces deux conditions sont satisfaites si on exige que l'expression (1.53) soit une fonction continue, bornée et s'annulant seulement aux extrémités du domaine de définition du potentiel en question. On doit donc avoir

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_0(y) dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow a, b} 0. \quad (1.54)$$

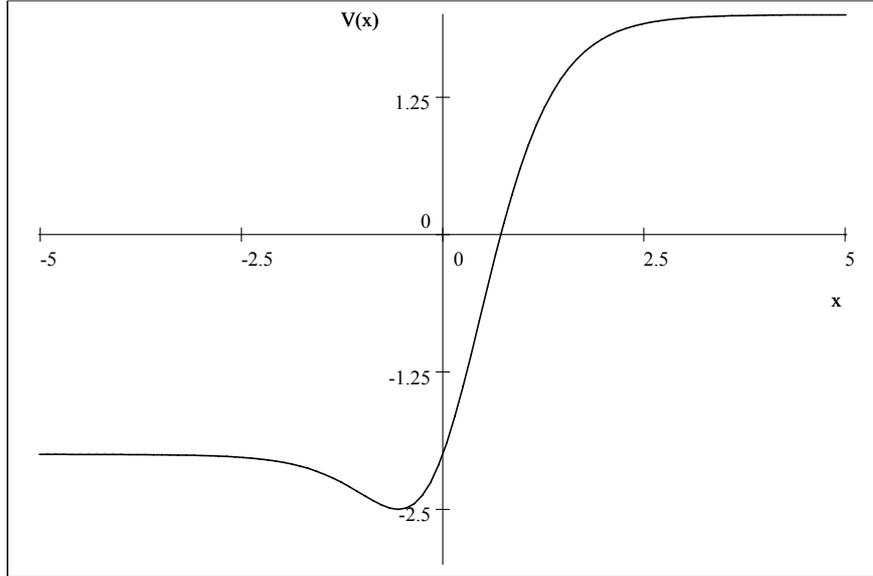
Si la contrainte (1.54) est satisfaite on dit que la symétrie est non brisée, sinon il y'a brisure de symétrie. Notons que la technique supersymétrique utilisée comme méthode de résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire n'est applicable, que si la symétrie est non brisée, car en cas de brisure de symétrie elle peut conduire à des résultats complètement erronés comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

### 1.6.1 Exemple illustratif

Considérons le potentiel à une dimension du type Rosen-Morse, donné par

$$V(x) = -\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x; \quad (1.55)$$

défini sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  et dont l'allure est donnée dans la figure suivante :



Il est claire, d'après cette allure et du fait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = -2$ , que si des états liés existent, leurs énergies dans le système d'unités  $\hbar = 2m = 1$  seraient comprises entre  $-2$  et  $-2.5$  (le minimum du potentiel).

En utilisant l'approche décrite plus haut, le potentiel  $V_-(x)$  est donné par

$$\begin{aligned} V_-(x) &= W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx} \\ &= -\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x - E_0, \end{aligned} \quad (1.56)$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental, qui est à priori inconnue, et  $W(x)$  le superpotentiel. En principe, il faut résoudre l'équation différentiel de Riccati (1.56) pour obtenir  $W(x)$  mais ici on va juste le proposer et vérifier s'il convient ou pas. Considérons donc le choix

$$W_0(x) = a \tanh x + b, \quad (1.57)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres réels. En reportant (1.57) dans (1.56), on obtient

$$-\frac{2}{\cosh^2 x} + 2 \tanh x - E_0 = -\frac{a(a+1)}{\cosh^2 x} + 2ab \tanh x + a^2 + b^2. \quad (1.58)$$

Par identification, on établit trois équations pour les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $E_0$ , qui sont

$$a(a+1) = 2 \quad (1.59)$$

$$ab = 1 \quad (1.60)$$

$$a^2 + b^2 = -E_0 \quad (1.61)$$

Les équations (1.59) et (1.60) serviront pour fixer  $a$  et  $b$  et l'équation (1.61) permettra de déterminer l'énergie de l'état fondamental. On trouve donc deux solutions distinctes dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau suivant :

$a$	1	-2	
$b$	1	$-\frac{1}{2}$	
$E_0$	-2	$-\frac{17}{4}$	
$W_0(x)$	$\tan x + 1$	$-2 \tan x - \frac{1}{2}$	(1.62)
$\varphi_0(x)$	$C \frac{e^{-x}}{\cosh x}$	$C e^{\frac{x}{2}} \cosh^2 x$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_0(x)$	$2C$	$\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_0^-(x)$	0	$\infty$	

où  $C$  est une constante de normalisation finie.

On constate donc que, pour les deux solutions possibles, d'une part l'énergie obtenue pour l'état fondamental est loin des valeurs permises et d'autre part la contrainte (1.54) n'est pas satisfaite. En conclusion, les superpotentiels qu'on a proposés ne conduisent pas à la solution physique du problème. Ainsi, s'il n'existe que ces deux solutions pour l'équation (1.56), la supersymétrie serait brisée pour le potentiel (1.55).

Par ailleurs, si on veut que la symétrie ne soit pas brisée, on doit fixer les paramètres  $a$  et  $b$  de sorte que la fonction de l'état fondamental, qui est facilement obtenue sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi_0^-(x) &\sim \exp\left(-\int^x (a \tanh y + b) dy\right) \\ &= e^{-bx} (\cosh x)^{-a}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

s'annule pour  $x \rightarrow \pm\infty$  (contrainte (1.54)). On constate que  $\varphi_0^-(x)$  satisfait cette condition si

$$(a + b) > 0 \text{ et } a > b, \quad (1.64)$$

En dehors de ces limites, (1.57) conduit à une brisure de symétrie.

### 1.6.2 Remarque :

L'approche utilisée dans cet exemple pour obtenir le superpotentiel est généralement celle qui est communément utilisée. C'est-à-dire, on propose une fonction  $W_0(x)$ , bornée sur l'intervalle de définition, qui dépend de certains paramètres qu'on ajuste de telle sorte à satisfaire l'équation de Riccati (1.24) et la contrainte (1.54). Cette procédure permet d'obtenir l'énergie de l'état fondamental directement avant même la résolution de l'équation de Schrödinger.

## 1.7 Construction d'une hiérarchie d'hamiltoniens partenaires

On a vu que la factorisation d'un hamiltonien permet de construire un hamiltonien partenaire, dont le spectre et les fonctions propres se déduisent du premier hamiltonien. Cette procédure peut être répétée pour en construire d'autres hamiltoniens partenaires. En effet, on peut aussi factoriser le nouveau hamiltonien et obtenir son hamiltonien partenaire. Tant que la symétrie n'est pas brisée, ce processus peut être répété autant de fois mais devra être stopé à l'étape où la symétrie se brise. De cette manière, on obtiendra une famille d'hamiltoniens partenaires  $\{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ , où  $H_{i+1}$  est le partenaire de  $H_i$ , pour  $i$  allant de 1 à  $N - 1$ , ces hamiltoniens se déduisent tous les uns des autres. Ici,  $N$  représente l'étape où la symétrie se brise. Nous allons illustrer brièvement cette démarche, en adoptant le système d'unités  $\hbar = 2m = 1$  pour simplifier les expressions.

Soit donc le hamiltonien de départ

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (1.65)$$

et admettons qu'il possède des états liés d'énergies  $E_n^{(1)}$  correspondant aux fonctions propres  $\varphi_n^{(1)}(x)$ . Il peut donc être factorisé sous la forme

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)}, \quad (1.66)$$

avec  $E_0^{(1)}$  l'énergie de son niveau fondamental,  $A_1$  et  $A_1^+$  sont deux opérateurs adjoint l'un de l'autre, définis par

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad (1.67)$$

et

$$A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x),$$

tel que  $W_1(x)$  est solution de l'équation de Riccati

$$W_1^2(x) - \frac{dW_1(x)}{dx} = V_1(x) - E_0^{(1)}. \quad (1.68)$$

Une fois l'équation (1.68) résolue, on obtient la fonction de l'état fondamental à partir de la relation

$$W_1(x) = -\frac{d}{dx} \text{Log} \left( \varphi_0^{(1)}(x) \right). \quad (1.69)$$

L'hamiltonien partenaire  $H_2$ , de valeurs propres  $E_n^{(2)}$  et fonctions propres correspondantes  $\varphi_n^{(2)}(x)$ , sera construit à partir des opérateurs  $A_1$  et  $A_1^+$  sous la forme

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)}, \quad (1.70)$$

et qu'on doit identifier avec

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (1.71)$$

On obtient ainsi  $V_2(x)$ , qui sera donné par l'équation

$$W_1^2(x) + \frac{dW_1(x)}{dx} = V_2(x) - E_0^{(1)},$$

ou bien par l'équation

$$\begin{aligned} V_2(x) &= V_1(x) + 2\frac{dW_1(x)}{dx} \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \text{Log} \left( \varphi_0^{(1)}(x) \right) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Les relations de la section précédente conduisent à

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.73)$$

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \frac{A_1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} \varphi_{n+1}^{(1)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.74)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{(1)}(x) &= \frac{A_1^+}{\sqrt{E_n^{(2)} - E_0^{(1)}}} \varphi_n^{(2)}(x) \\ &= \frac{A_1^+}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} \varphi_n^{(2)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (1.75)$$

L'étape suivante consiste à factoriser l'hamiltonien  $H_2$  pour déterminer son partenaire. Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} H_2 &= A_2^+ A_2 + E_0^{(2)} \\ &= A_2^+ A_2 + E_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

avec

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad (1.77)$$

et

$$A_2^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x), \quad (1.78)$$

et  $W_2(x)$  satisfait l'équation de Riccati

$$W_2^2(x) - \frac{dW_2(x)}{dx} = V_2(x) - E_0^{(2)}. \quad (1.79)$$

On obtient l'état fondamental de  $H_2$ ,  $\varphi_0^{(2)}(x)$ , par l'équation

$$W_2(x) = -\frac{d}{dx} \text{Log} \left( \varphi_0^{(2)}(x) \right). \quad (1.80)$$

Maintenant, nous construisons le partenaire de  $H_2$ , en suivant la même démarche. Il sera dénoté  $H_3$  et possèdera les énergies propres  $E_n^{(3)}$  et les fonctions propres  $\varphi_n^{(3)}(x)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} H_3 &= A_2 A_2^+ + E_0^{(2)} \\ &= A_2 A_2^+ + E_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

qui doit être identifié avec

$$H_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (1.82)$$

Il vient, d'après (1.77), (1.78), (1.81) et (1.82), que

$$W_2^2(x) + \frac{dW_2(x)}{dx} = V_3(x) - E_0^{(2)}, \quad (1.83)$$

et compte tenu de (1.79), (1.83) et (1.80), (1.72) on obtient

$$\begin{aligned} V_3(x) &= V_2(x) + 2 \frac{dW_2(x)}{dx} \\ &= V_2(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \text{Log} \left( \varphi_0^{(2)}(x) \right) \\ &= V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \text{Log} \left( \varphi_0^{(1)}(x) \varphi_0^{(2)}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Puisque  $H_2$  et  $H_3$  sont partenaires, leurs valeurs propres et fonctions propres respectives vérifient donc

$$E_{n+1}^{(2)} = E_n^{(3)} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(3)}(x) &= \frac{A_2}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}}} \varphi_{n+1}^{(2)}(x) \\
&= \frac{A_2}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}}} \varphi_{n+1}^{(2)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{1.86}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}^{(2)}(x) &= \frac{A_2^+}{\sqrt{E_n^{(3)} - E_0^{(2)}}} \varphi_n^{(3)}(x) \\
&= \frac{A_2^+}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}}} \varphi_n^{(3)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots.
\end{aligned} \tag{1.87}$$

En vertu de (1.73), (1.74) et (1.75), on peut relier les valeurs propres et fonctions propres de  $H_3$  à ceux de  $H_1$  par l'intermédiaire de celles de  $H_2$ . On obtient :

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \tag{1.88}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(3)}(x) &= \frac{A_2 A_1}{\sqrt{(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}) (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})}} \varphi_{n+2}^{(1)}(x) \\
&= \frac{A_2 A_1}{\sqrt{(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}) (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})}} \varphi_{n+2}^{(1)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{1.89}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+2}^{(1)}(x) &= \frac{A_1^+ A_2^+}{\sqrt{(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)}) (E_n^{(3)} - E_0^{(2)})}} \varphi_n^{(3)}(x) \\
&= \frac{A_1^+ A_2^+}{\sqrt{(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}) (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})}} \varphi_n^{(3)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots.
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Ainsi, de la même manière, on peut factoriser  $H_3$  et en déduire son partenaire  $H_4$ , ensuite factoriser  $H_4$  et obtenir son partenaire  $H_5$  et ainsi de suite. De façon générale, connaissant les caractéristiques de l'hamilltonien  $H_{m-1}$ , on procède de la manière suivante pour son partenaire  $H_m$  :

$$H_m = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x). \quad (1.91)$$

Il sera factorisé par l'intermédiaire des opérateurs

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad (1.92)$$

et

$$A_m^+ = -\frac{d}{dx} + W_m(x). \quad (1.93)$$

On écrit donc

$$H_m = A_m^+ A_m + E_0^{(m)}, \quad (1.94)$$

d'où

$$W_m^2(x) - \frac{dW_m(x)}{dx} = V_m(x) - E_0^{(m)}, \quad (1.95)$$

avec

$$W_m(x) = -\frac{d}{dx} \text{Log} \left( \varphi_0^{(m)}(x) \right) \quad (1.96)$$

où  $\varphi_0^{(m)}(x)$  est la fonction propre de l'état fondamental de  $H_m$ .

De la factorisation (1.94) résulte l'hamilltonien partenaire  $H_{m+1}$  tel que

$$H_{m+1} = A_m A_m^+ + E_0^{(m)}. \quad (1.97)$$

Les énergies propres et fonctions propres des hamiltoniens  $H_m$  et  $H_{m+1}$  sont reliées par

$$E_n^{(m)} = E_n^{(m+1)} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.98)$$

$$\varphi_n^{(m+1)}(x) = \frac{A_m}{\sqrt{E_{n+1}^{(m)} - E_0^{(m)}}} \varphi_{n+1}^{(m)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.99)$$

et

$$\varphi_{n+1}^{(m)}(x) = \frac{A_m^+}{\sqrt{E_n^{(m+1)} - E_0^{(m)}}} \varphi_n^{(m+1)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots. \quad (1.100)$$

Or, les fonctions propres et valeurs propres de l'hamiltonien  $H_m$  s'expriment en fonction de celles de l'hamiltonien  $H_{m-1}$ . Ces dernières s'expriment en fonction de celles de  $H_{m-2}$  et ainsi de suite jusqu'à l'hamiltonien de départ  $H_1$ . Nous pouvons ainsi relier le spectre énergétique et les fonctions d'ondes du  $m^{\text{ième}}$  hamiltonien à celle de l'hamiltonien de départ de la manière suivante :

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(m)}(x) &= \frac{A_{m-1} A_{m-2} \dots A_1}{\sqrt{(E_{n+1}^{(m-1)} - E_0^{(m-1)}) (E_{n+2}^{(m-2)} - E_0^{(m-2)}) \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})}} \varphi_{n+m-1}^{(1)}(x) \\ &= \frac{A_{m-1} A_{m-2} \dots A_1}{\sqrt{(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}) (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-3}^{(1)}) \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})}} \varphi_{n+m-1}^{(1)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+m-1}^{(1)}(x) &= \frac{A_1^+ A_2^+ \cdots A_{m-1}^+}{\sqrt{\left(E_n^{(m)} - E_0^{(1)}\right) \left(E_n^{(m)} - E_0^{(2)}\right) \cdots \left(E_n^{(m)} - E_0^{(m-1)}\right)}} \varphi_n^{(m)}(x) \\
&= \frac{A_1^+ A_2^+ \cdots A_{m-1}^+}{\sqrt{\left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right) \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_1^{(1)}\right) \cdots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)}} \varphi_n^{(m)}(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Le potentiel  $V_m(x)$  sera donné en fonction des potentiels partenaires d'ordres inférieurs par

$$\begin{aligned}
V_m(x) &= V_{m-1}(x) - 2 \frac{d}{dx} \text{Log} \left( \varphi_0^{(m-1)}(x) \right) \\
&= V_{m-2}(x) - 2 \frac{d}{dx} \text{Log} \left( \varphi_0^{(m-2)}(x) \varphi_0^{(m-1)}(x) \right) \\
&\quad \vdots \\
&= V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \text{Log} \left( \varphi_0^{(1)}(x) \cdots \varphi_0^{(m-1)}(x) \right).
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Il faut noter que si l'hamiltonien de départ  $H_1$  possède  $k$  états liés, on ne peut construire que  $(k-1)$  hamiltoniens partenaires  $(H_2, H_3, \dots, H_m, \dots, H_k)$ . Ceci est dû au fait que tant que la symétrie n'est pas brisée, chaque hamiltonien construit ne possède pas l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien qui le précède. Autrement dit, le nombre de niveaux d'énergie diminue d'une unité à chaque nouvelle construction.

## 1.8 Invariance de forme

Jusqu'à présent, nous disposons des moyens nécessaires pour obtenir les spectres de tous les hamiltoniens partenaires de la hiérarchie, pourvu qu'on connaisse celui de l'hamiltonien de départ. Dans cette section, nous présentons le résultat le plus important dans l'approche supersymétrique en mécanique quantique. Il s'agira de montrer que si le potentiel de départ possède une propriété supplémentaire, dite d'invariance de forme, il sera alors possible déduire son spectre énergétique d'une manière très simple.

L'invariance de forme pour un potentiel stationnaire à une dimension a été introduite en

1983 par Gendshtein [7]. Cette propriété fondamentale, combinée aux résultats de la hiérarchie abordés dans la section précédente, permet d'obtenir toutes les énergies quantifiées de l'hamiltonien par une formule simple et unifiée. Les fonctions propres associées aux niveaux excités peuvent également être déduites directement de la fonction propre de l'état fondamental.

### 1.8.1 Définition :

Admettons que le potentiel supersymétrique de départ dépend de certains paramètres qu'on dénote simplement par  $a_1$ . Il s'écrit donc explicitement  $V(x, a_1)$ . Les équations de Riccati pour les potentiels partenaires associés à  $V(x, a_1)$  s'écrivent donc comme

$$V_-(x, a_1) = W^2(x, a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a_1)}{dx} \quad (1.105)$$

et

$$V_+(x, a_1) = W^2(x, a_1) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a_1)}{dx}. \quad (1.106)$$

Par définition, on dit que  $V(x, a_1)$  est un potentiel invariant de forme, si les partenaires  $V_-(x, a_1)$  et  $V_+(x, a_1)$  satisfont la relation suivante :

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_1), \quad (1.107)$$

où  $a_2$  est une certaine fonction de  $a_1$

$$a_2 = f(a_1), \quad (1.108)$$

et  $R(a_1)$  est une autre fonction de  $a_1$ , indépendante de  $x$ , appelée le reste.

### 1.8.2 Fonctions propres et spectre énergétique d'un hamiltonien dont le potentiel est invariant de forme

Considérons la hiérarchie d'hamiltoniens partenaires  $(H_1(a_1), H_2(a_1), \dots, H_m(a_1), H_{m+1}(a_1), \dots)$  dépendant de l'ensemble de paramètres  $a_1$ . On a déjà vu que  $H_m(x, a_1)$  et son partenaire  $H_{m+1}(x, a_1)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
H_m(x, a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x, a_1) \\
&= A_{m-1}(a_1) A_{m-1}^+(a_1) + E_0^{(m-1)} \\
&= A_m^+(a_1) A_m(a_1) + E_0^{(m)},
\end{aligned} \tag{1.109}$$

et

$$\begin{aligned}
H_{m+1}(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_{m+1}(x, a_1) \\
&= A_m(a_1) A_m^+(a_1) + E_0^{(m)}.
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Admettons que  $V_1(x, a_1)$  est invariant de forme et dénotons par

$$a_{n+1} = f^{(n)}(a_1) \equiv \underbrace{f \circ f \circ f \cdots f}_{n \text{ fois}}(a_1) \text{ pour } n = 0, 1, \dots \tag{1.111}$$

D'après la définition (1.107), le partenaire  $V_2(x, a_1)$  s'écrira

$$\begin{aligned}
V_2(x, a_1) &= V_1(x, a_2) + R(a_1) \\
&= V_1(x, f(a_1)) + R(a_1),
\end{aligned} \tag{1.112}$$

qui est valide quel que soit  $a_1$ .

Ainsi le potentiel  $V_2(x, a_1)$  coïncide avec le potentiel de départ dans lequel on remplace  $a_1$  par  $a_2 = f(a_1)$  et on lui ajoute la constante  $R(a_1)$ . Par conséquent,  $V_2(x, a_1)$  est aussi invariant de forme de sorte que son partenaire, qui est  $V_3(x, a_1)$ , coïncide avec le partenaire de  $V_1(x, f(a_1))$  auquel on ajoute  $R(a_1)$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}
V_3(x, a_1) &= V_2(x, f(a_1)) + R(a_1) \\
&= V_1(x, f^{(2)}(a_1)) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\
&= V_1(x, a_3) + R(a_2) + R(a_1).
\end{aligned} \tag{1.113}$$

De proche en proche, on montre que

$$\begin{aligned}
V_{m+1}(x, a_1) &= V_m(x, f(a_1)) + R(a_1) \\
&= V_{m-1}\left(x, f^{(2)}(a_1)\right) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\
&= V_{m-2}\left(x, f^{(3)}(a_1)\right) + R\left(f^{(2)}(a_1)\right) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\
&\quad \vdots \\
&= V_1\left(x, f^{(m)}(a_1)\right) + \sum_{k=0}^{m-1} R\left(f^{(k)}(a_1)\right) \\
&= V_1(x, a_{m+1}) + \sum_{k=0}^{m-1} R(a_{k+1})
\end{aligned} \tag{1.114}$$

D'après (1.112), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
H_2(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_1) \\
&= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_2) + R(a_1) \\
&= H_1(a_2) + R(a_1).
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Cette dernière relation s'écrit d'après (1.66) et (1.76) sous la forme

$$A_2^+(a_1) A_2(a_1) + E_0^{(2)} = A_1^+(a_2) A_1(a_2) + E_0^{(1)} + R(a_1), \tag{1.116}$$

et par conséquent, on en déduit que

$$A_2(a_1) = A_1(a_2), \tag{1.117}$$

et :

$$R(a_1) = E_0^{(2)} = E_1^{(1)}, \tag{1.118}$$

puisque  $E_0^{(1)}$  est nulle par construction. Notons que le spectre énergétique dépend de  $a_1$ .

De la même manière, d'après (1.113), on obtient

$$\begin{aligned} H_3(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_2) + R(a_1) \\ &= H_2(a_2) + R(a_1), \end{aligned} \quad (1.119)$$

et d'après (1.115), on aura

$$H_3(a_1) = H_1(a_3) + R(a_2) + R(a_1), \quad (1.120)$$

avec

$$a_3 = f^{(2)}(a_1), \quad (1.121)$$

selon la définition(1.111).

En se servant des factorisations de  $H_3(a_1)$  et  $H_1(a_3)$ , on peut exprimer (1.120) en fonction des pérateurs bosoniques de la manière suivante :

$$A_3^+(a_1) A_3(a_1) + E_0^{(3)} = A_1^+(a_3) A_1(a_3) + E_0^{(1)} + R(a_2) + R(a_1), \quad (1.122)$$

et on en déduit que

$$A_3(a_1) = A_1(a_3), \quad (1.123)$$

et

$$E_0^{(3)} = E_1^{(2)} = E_2^{(1)} = R(a_2) + R(a_1). \quad (1.124)$$

Les mêmes démarches peuvent être répétées pour tous les hamiltoniens de la hiérarchie. De façon générale, on obtient, compte tenu de (1.114)

$$\begin{aligned} H_{m+1}(a_1) &= H_m(a_2) + R(a_1) \\ &= H_{m-1}(a_3) + R(a_1) + R(a_2) \\ &\quad \vdots \\ &= H_1(a_{m+1}) + R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_m), \end{aligned} \quad (1.125)$$

ou encore

$$A_{m+1}^+(a_1) A_{m+1}(a_1) + E_0^{(m+1)} = A_1^+(a_{m+1}) A_1(a_{m+1}) + E_0^{(1)} + R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_m).$$

Ainsi, il vient que

$$A_{m+1}(a_1) = A_1(a_{m+1}), \quad (1.126)$$

et

$$E_0^{(m+1)} = R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_m). \quad (1.127)$$

Par ailleurs, d'après (1.101), on obtient les relations suivantes :

$$E_0^{(m+1)} = E_1^{(m)} = \dots = E_m^{(1)}. \quad (1.128)$$

En combinant (1.127) et (1.128), il vient :

$$E_m^{(1)} = R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_m). \quad (1.129)$$

On peut aussi lier les fonctions propres des différents hamiltoniens de la hiérarchie. D'après (1.75) :

$$\varphi_{n+1}^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1)}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} \varphi_n^{(2)}(x, a_1). \quad (1.130)$$

Pour  $n = 0$ ; on a :

$$\varphi_1^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1)}{\sqrt{E_1^{(1)} - E_0^{(1)}}} \varphi_0^{(2)}(x, a_1). \quad (1.131)$$

L'équation de Schrödinger de l'hamiltonien  $H(a_2)$ , s'écrit pour  $n = 0$  :

$$H_2(a_1) \varphi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(2)} \varphi_0^{(2)}(x, a_1). \quad (1.132)$$

De (1.115) :

$$[H_1(a_2) + R(a_1)] \varphi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(2)} \varphi_0^{(2)}(x, a_1), \quad (1.133)$$

qui s'écrit compte tenu de (1.118) :

$$H_1(a_2) \varphi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(1)} \varphi_0^{(2)}(x, a_1). \quad (1.134)$$

Or on sait que :

$$H_1(a_2) \varphi_0^{(1)}(x, a_2) = E_0^{(1)} \varphi_0^{(1)}(x, a_2) \quad (1.135)$$

De (1.134) et (1.135) on déduit :

$$\varphi_0^{(2)}(x, a_1) = \varphi_0^{(1)}(x, a_2). \quad (1.136)$$

Compte tenu de (1.136); (1.131) s'écrit :

$$\varphi_1^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1)}{\sqrt{E_1^{(1)} - E_0^{(1)}}} \varphi_0^{(1)}(x, a_2). \quad (1.137)$$

Cette dernière relation nous permet d'affirmer qu'on peut obtenir la fonction d'onde du premier niveau excité, si on connaît celle du niveau fondamental; pour un potentiel invariant de forme.

La relation (1.90) représente l'expression des fonctions d'ondes de  $H_1(a_1)$ , en fonction de celles de  $H_3(a_1)$  :

$$\varphi_{n+2}^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1) A_2^+(a_1)}{\sqrt{(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}) (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})}} \varphi_n^{(3)}(x, a_1). \quad (1.138)$$

On montre, en suivant le même raisonnement précédent, que

$$\varphi_0^{(3)}(x, a_1) = \varphi_0^{(1)}(x, a_3). \quad (1.139)$$

Compte tenu de (1.117) et de (1.139), (1.138) s'écrit pour  $n = 0$  comme

$$\varphi_2^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1) A_1^+(a_2)}{\sqrt{(E_2^{(1)} - E_0^{(1)}) (E_2^{(1)} - E_1^{(1)})}} \varphi_0^{(1)}(x, a_3), \quad (1.140)$$

qui montre que si un potentiel est invariant de forme, on peut également déduire la fonction propre associée au deuxième niveau excité à partir de celle du niveau fondamental.

D'une manière générale, suite à la factorisation (1.109) de l'hamiltonien  $H_m(a_1)$ , les fonctions propres de l'hamiltonien de départ  $H_1(a_1)$  s'expriment en fonction de l'hamiltonien  $H_{m+1}(a_1)$  partenaire de  $H_m(a_1)$ , d'après (1.103); ainsi :

$$\varphi_{n+m}^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1) A_2^+(a_1) \dots A_m^+(a_1)}{\sqrt{(E_{n+m}^{(1)} - E_0^{(1)}) (E_{n+m}^{(1)} - E_1^{(1)}) \dots (E_{n+m}^{(1)} - E_{m-1}^{(1)})}} \varphi_n^{(m+1)}(x, a_1). \quad (1.141)$$

On montre en écrivant l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien  $H_m(a_1)$  que

$$\varphi_0^{(m+1)}(x, a_1) = \varphi_0^{(1)}(x, a_{m+1}). \quad (1.142)$$

En vertu de (1.117), (1.123), (1.126), (1.142), l'expression (1.141) s'écrit pour  $n = 0$  :

$$\varphi_m^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1) A_1^+(a_2) \dots A_1^+(a_m)}{\sqrt{(E_m^{(1)} - E_0^{(1)}) (E_m^{(1)} - E_1^{(1)}) \dots (E_m^{(1)} - E_{m-1}^{(1)})}} \varphi_0^{(1)}(x, a_{m+1}). \quad (1.143)$$

Finalement, la première factorisation nous a permis d'en déduire l'énergie du premier niveau excité (1.118) et sa fonction propre (1.137) à partir de celle du fondamental.

La seconde factorisation permet d'en déduire l'énergie du deuxième niveau (1.124) et la fonction propre correspondante (1.140). On peut continuer ainsi pour tous les hamiltoniens de la hiérarchie. A chaque fois, on obtient l'énergie d'un niveau et sa fonction d'onde jusqu'à ce qu'on obtienne tous le spectre énergétique et toutes les fonctions propres correspondantes.

En conclusion, d'après (1.129) le spectre énergétique d'un potentiel  $V_1(x, a_1)$ , invariant de forme, est donné par

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k), \quad (1.144)$$

et les fonctions propres correspondantes s'en déduisent toutes de la fonction propre du niveau fondamental en vertu de (1.143), ainsi

$$\varphi_n^{(1)}(x, a_1) = \left[ \prod_{k=1}^n \left( \frac{A_1^+(a_k)}{\sqrt{E_n^{(1)} - E_{k-1}^{(1)}}} \right) \right] \varphi_0^{(1)}(x, a_{n+1}), \quad (1.145)$$

où  $n$  est supérieur à zéro, et  $a_m$  est défini par (1.111).

## 1.9 Exemples illustratifs

Les résultats du paragraphe précédent mettent à notre disposition tous les ingrédients nécessaires pour la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension correspondant à des hamiltoniens supersymétriques et invariants de formes. Nous allons présenter dans cette section deux exemples pour illustrer cette méthode et montrer son élégance et sa simplicité.

### 1.9.1 Problème de l'oscillateur harmonique par la méthode supersymétrique

L'équation de Schrödinger pour une particule de masse  $m$ , subissant l'effet d'un potentiel harmonique s'écrit :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x) \text{ pour } n = 0, 1, \dots \quad (1.146)$$

On a vu que le potentiel harmonique ne possède que des états liés et c'est pour cela que les fonctions propres et valeurs propres sont indexées par un indice entier infini. L'hamiltonien peut être factorisé comme

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] = A^+ A + E_0, \quad (1.147)$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental.

Le superpotentiel  $W(x)$  doit donc vérifier l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} &= V_-(x) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_0. \end{aligned} \quad (1.148)$$

On propose une solution sous la forme

$$W(x) = ax, \quad (1.149)$$

de sorte que

$$a^2 x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_0. \quad (1.150)$$

On obtient par identification les relations suivantes :

$$a^2 = \frac{m}{2}\omega^2 \quad \text{et} \quad E_0 = \frac{\hbar a}{\sqrt{2m}}. \quad (1.151)$$

Sachant à priori que les valeurs propres du potentiel harmonique sont positives, on ne considère que la valeur positive de  $a$ ,

$$a = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega, \quad (1.152)$$

de sorte que l'énergie de l'état fondamental est donnée par

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2},$$

qui coïncide bien sûr avec la valeur connue.

La fonction propre de l'état fondamental est simplement obtenue sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= N_0 e^{-\sqrt{2m/\hbar} \int^x W(x') dx'} \\ &= N_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

qui satisfait bien la contrainte (1.54). La constante  $N_0$  peut être calculée en imposant que la la

norme de la fonction  $\varphi_0(x)$  soit égale à 1. Ainsi, un calcul simple donne

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (1.154)$$

Dans le but de calculer tout le spectre énergétique du problème, vérifions tout d'abord que  $V_-(x, a)$  est invariant de forme. En effet, on a :

$$V_-(x, a) = a^2x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}a, \quad (1.155)$$

et d'après (1.34) :

$$V_+(x; a) = a^2x^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}a, \quad (1.156)$$

ainsi, la condition d'invariance de forme (1.107)

$$V_+(x; a_1) = V_-(x, a_2) + \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}}a_1.$$

est bien satisfaite pour :

$$a_2 = f(a_1) = a_1, \quad (1.157)$$

et

$$R(a_1) = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}}a_1. \quad (1.158)$$

En utilisant (1.144) et en tenant compte de (1.157), (1.158) et (1.152), le spectre de  $V_-(x)$ , sera donné par

$$E_n^- = n\hbar\omega. \quad (1.159)$$

D'après (1.32), le spectre énergétique de l'hamiltonien  $H$  sera donné par

$$\begin{aligned}
E_n &= E_n^- + E_0 \\
&= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}
\tag{1.160}$$

Quant aux fonctions propres des différents niveaux excités, elles s'obtiennent en utilisant la formule (1.145). Sachant que

$$A_1^+(a_k) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( -\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x \right), \tag{1.161}$$

et

$$E_n^- - E_k^- = \hbar\omega (n - k), \tag{1.162}$$

on obtient aisément

$$\varphi_n(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{n!}} \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^n \left( -\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x \right)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{1.163}$$

qui coïncide bien avec l'expression connue dans la littérature.

Cet exemple simple démontre de l'efficacité de la technique supersymétrique dans la résolution de l'équation de Schrödinger, si le potentiel est invariant de forme et la symétrie est non brisée.

### 1.9.2 Quelques potentiels invariants de forme

Les principaux potentiels invariants de forme dont la relation entre les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  est une translation de la forme

$$a_2 = a_1 + Q, \tag{1.164}$$

où  $Q$  est une constante indépendante de ces paramètres sont dressés dans le tableau suivant :

Nom du potentiel	$V(x)$
Oscillateur harmonique à une dimension	$\frac{1}{4}\omega^2 \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2$
Oscillateur harmonique à trois dimensions	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}$
Coulomb	$-\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}$
Morse à une dimension	$V_1 \exp(-2\alpha x) - V_2 \exp(-\alpha x)$
Scarf II (hyperbolique)	$\frac{-V_1}{\cosh^2(\alpha x)} + V_2 \frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh(\alpha x)}$
Rosen-Morse II (hyperbolique)	$\frac{-V_1}{\cosh^2(\alpha x)} + V_2 \tanh(\alpha x)$
Eckart	$\frac{-V_1}{\coth^2(\alpha r)} + V_2 \cot h(\alpha r)$
Sarf I (trigonométrique)	$\frac{V_1}{\cos^2(\alpha x)} + V_2 \frac{\tan g(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}$
Poschel-Teller généralise	$\frac{V_1}{\sinh^2(\alpha r)} + V_2 \frac{\tanh(\alpha r)}{\sinh(\alpha r)}$
Rosen-Morse I (trigonométrique)	$\frac{V_1}{\sin^2(\alpha x)} + V_2 \cot(\alpha x)$

Les constantes  $\alpha, V_1, \omega, e, l$  sont positives et  $r > 0$ .

On trouve dans les références [16, 26, 27] le même tableau, plus détaillé où l'on donne l'expression du superpotentiel ainsi que les fonctions d'ondes des potentiels  $V_-(x)$  et leurs spectres d'énergie. Ces références contiennent en plus des notions évoquées dans ce chapitre, d'autres développements relatifs à la théorie supersymétrique en mécanique quantique.

### 1.9.3 Problème du potentiel de Pöschl-Teller hyperbolique

Il est connu [21] que le potentiel de Pöschl-Teller hyperbolique à une dimension, donné par :

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } V_0 > 0, \quad (1.165)$$

et défini sur tout l'axe réel, possède un spectre discret (1.12), caractérisé par un nombre fini d'états liés (1.13).

La technique supersymétrique permet de déterminer aisément le spectre énergétique de ce potentiel et fournit également le nombre exact de niveaux d'énergies quantifiées, comme nous allons le montrer.

Le potentiel partenaire  $V_-(x)$  correspondant au potentiel (1.165) s'écrit

$$V_-(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} - E_0, \quad (1.166)$$

où  $E_0$  est l'énergie de son état fondamental. Ainsi, le superpotentiel  $W(x)$  doit satisfaire l'équation de Riccati suivante :

$$V_-(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (1.167)$$

Bien que cette solution semble à première vue difficile à résoudre, on se rend compte qu'une solution particulière peut être cherchée sous la forme

$$W(x) = \frac{\hbar a_1}{\sqrt{2m}} \tanh(\alpha x), \quad (1.168)$$

où  $a_1$  est un paramètre à déterminer. On obtient après substitution de (1.168) dans (1.167) que

$$\begin{aligned} V_-(x) &= -\frac{\hbar^2 a_1 (a_1 + \alpha) / 2m}{\cosh^2(\alpha x)} + \frac{\hbar^2 a_1^2}{2m} \\ &= -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} - E_0. \end{aligned} \quad (1.169)$$

En procédant par identification, on obtient les relations qui doivent fixer  $a_1$  et  $E_0$  sous la forme

$$\frac{\hbar^2}{2m} a_1 (a_1 + \alpha) = V_0, \quad (1.170)$$

et

$$-\frac{\hbar^2 a_1^2}{2m} = E_0. \quad (1.171)$$

La solution de (1.170) donne deux valeurs possibles pour le paramètre  $a_1$ ,

$$a_1 = \frac{\alpha}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right), \quad (1.172)$$

mais on ne doit retenir qu'une seule. Pour ce faire, on doit sélectionner celle qui rend la fonction propre de l'état fondamental acceptable physiquement. Cette dernière sera donnée par

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= e^{-\sqrt{2m}/\hbar \int^x W(x') dx'} \\
&= N [\cosh(\alpha x)]^{-a_1/\alpha},
\end{aligned} \tag{1.173}$$

où  $N$  est une constante de normalisation. Il est évident que  $\varphi_0(x)$  converge pour  $x \rightarrow \pm\infty$  seulement pour la solution positive de  $a_1$ . Ainsi, on prend

$$a_1 = \frac{\alpha}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \right). \tag{1.174}$$

L'énergie du niveau fondamental s'écrit, d'après (1.171) et (1.174) comme

$$E_0 = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \right)^2, \tag{1.175}$$

qui est bien sûr négative.

Le calcul du potentiel partenaire  $V_+(x)$  donne

$$V_+(x) = -\frac{\hbar^2 a_1 (a_1 - \alpha) / 2m}{\cosh^2(\alpha x)} + \frac{\hbar^2 a_1^2}{2m} \tag{1.176}$$

On voit bien de (1.169) et (1.176) que la propriété d'invariance de forme (1.107) est satisfaite. En effet, l'invariance de forme exige que

$$-\frac{\hbar^2 a_1 (a_1 - \alpha) / 2m}{\cosh^2(\alpha x)} + \frac{\hbar^2 a_1^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 a_2 (a_2 + \alpha) / 2m}{\cosh^2(\alpha x)} + \frac{\hbar^2 a_2^2}{2m} + R(a_1), \tag{1.177}$$

qui est satisfaite pour une relation de translation entre  $a_1$  et  $a_2$ , donnée par

$$a_2 = a_1 - \alpha, \tag{1.178}$$

et la fonction reste sous la forme

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m} (a_1^2 - a_2^2). \tag{1.179}$$

Notons qu'on a exclu la possibilité d'avoir l'invariance de forme pour  $a_2 = -a_1$  puisque  $a_1$  et  $a_2$  doivent être positifs pour éviter la brisure spontanée de la symétrie.

En vertu de (1.144) et (1.179), on en déduit le spectre énergétique de  $V_-(x)$

$$\begin{aligned} E_n^- &= \frac{\hbar^2}{2m} [(a_1^2 - a_2^2) + (a_2^2 - a_3^2) + \dots + (a_n^2 - a_{n+1}^2)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (a_1^2 - a_{n+1}^2). \end{aligned} \quad (1.180)$$

D'après (1.178), on obtient

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - \alpha, \\ a_4 &= a_3 - \alpha, \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a_n - \alpha, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$a_{n+1} = a_1 - n\alpha. \quad (1.181)$$

Il en découle que (1.180) s'écrit

$$E_n^- = \frac{\hbar^2}{2m} [a_1^2 - (a_1 - n\alpha)^2], \quad (1.182)$$

de sorte que l'énergie  $E_n$  correspondant au potentiel (1.165) sera donnée par

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^- + E_0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (a_1 - n\alpha)^2. \end{aligned} \quad (1.183)$$

En remplaçant  $a_1$  par son expression (1.174), on retrouve bien le spectre d'énergie (1.12),

$$E_n = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{8m} \left[ -(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \right]^2. \quad (1.184)$$

D'autre part on a démontré que  $E_n^{(-)}$  est toujours positive. En imposant la condition (1.27) à (1.182), on obtient :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ a^2 - (a - n\alpha)^2 \right] \geq 0 \implies 0 \leq n \leq \frac{2a}{\alpha}. \quad (1.185)$$

Cette condition est nécessaire, mais insuffisante pour fixer le nombre exact de niveaux d'énergie.  $n_{\max}$  est certainement inférieure à  $\frac{2a}{\alpha}$ , car la positivité de l'énergie n'implique pas forcément que la fonction propre correspondante est normalisable. Pour trouver le nombre exact d'états liés, il faut trouver l'étape à partir de laquelle la symétrie se brise naturellement, à cause du spectre énergétique qui devient continu.

Comme ce potentiel est invariant de forme, cette tâche est très simple, en effet la méthode de factorisation permet de construire une hiérarchie d'hamiltoniens partenaires, chaque hamiltonien possède un niveau de moins que son partenaire qui le précède. La construction s'arrête quand on arrive au dernier hamiltonien qui ne possède qu'un seul niveau puisque après cela, le spectre devient continu et la symétrie est forcément brisée. Donc le nombre de niveaux énergétiques est égal au nombre d'hamiltoniens de la hiérarchie.

L'avantage quand le potentiel est invariant de forme c'est qu'on connaît l'expression de n'importe quel potentiel de la hiérarchie en fonction du potentiel de départ. D'après (1.114) et compte tenu de (1.169) et (1.181), on a

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x, a_1) &= V_1(x, a_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} R(a_{k+1}) \\ &= \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} (a_1 - \alpha n) [a_1 - \alpha(n-1)]}{\cosh^2(\alpha x)} + \frac{\hbar^2 (a_1 - n\alpha)^2}{2m} + \sum_{k=0}^{n-1} R(a_{k+1}). \end{aligned} \quad (1.186)$$

Si la symétrie n'est pas brisée à la  $n^{\text{ième}}$  étape, le  $n^{\text{ième}}$  hamiltonien peut être factorisé et on obtiendra son partenaire  $H_{n+1}$ , par contre si elle se brise à cette étape, cela veut dire que  $H_n$  ne possède qu'un seul niveau et ne peut plus être factorisé car le spectre devient continu.

C'est justement en imposant la condition de quantification du spectre énergétique au po-

tentiel  $V_{n+1}(x, a)$  qu'on obtient le nombre exact de niveaux d'énergie. Pour le potentiel de Pöschl-Teller, la condition d'existence d'états liés dépend du signe du facteur qui multiplie le terme  $\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}$ . Ce facteur doit être négatif, donc il faut que

$$(a_1 - \alpha n) [a_1 - \alpha(n - 1)] > 0 \implies n < \frac{a_1}{\alpha}, \text{ où } n > \frac{a_1}{\alpha} + 1. \quad (1.187)$$

L'inégalité  $n > \frac{a_1}{\alpha} + 1$  doit être rejetée car elle contredit la contrainte (1.185), qui assure la positivité des  $E_n^-$ . On aura donc

$$0 < n < \frac{a_1}{\alpha}. \quad (1.188)$$

En substituant  $a_1$  par son expression (1.174), on obtient :

$$0 < n < \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \right). \quad (1.189)$$

On retrouve ainsi le résultat (1.13), bien connu dans la littérature.

## Chapitre 2

# Quelques notions sur la théorie quantique $PT$ symétrique

### 2.1 Introduction

Bien que la mécanique quantique soit fondée sur des idées excessivement probabilistes, à tel point qu'elle a été critiquée voire même rejetée par certains physiciens comme le célèbre Einstein, elle a réussi jusqu'à présent le challenge de satisfaire toutes les conditions sine qua non que doit vérifier une théorie, à savoir être correcte du point de vu le plus stricte des mathématiques et aucune expérience ne doit la mettre en échec ; au contraire elle doit expliquer et prédire les résultats de celle-ci.

Cette réussite, elle la doit en grande partie au génie de ces fondateurs qui ont su à la fois réconcilier contraintes physiques et difficultés mathématiques. Ainsi pour décrire convenablement la dynamique du système, l'hamiltonien doit conduire à une évolution unitaire des fonctions d'ondes, conformément à l'interprétation probabiliste. Ceci est possible si les valeurs propres représentant le spectre énergétique sont réelles. Pour cette raison, on a postulé que l'opérateur hamiltonien, défini dans un espace de Hilbert, doit être hermitien.

L'herméticité est alors le moyen, par excellence, garantissant la satisfaction de ces exigences physiques ; principalement la réalité du spectre. Or l'exigence de l'herméticité de l'hamiltonien représente une restriction pour une théorie si ambitieuse qu'est la mécanique quantique. N'y a-il pas un moyen permettant l'extension vers une mécanique quantique non hermitienne, conforme

aux contraintes physiques ?.

En faisant un calcul numérique, Bender et collaborateurs ont réussi en 1998 [19] à prouver que la famille de potentiels non hermitiens, définie par

$$V(x) = x^2 (ix)^\nu \text{ pour } \nu \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

possède un spectre énergétique réel pour  $\nu \geq 0$  et complexe pour  $\nu < 0$ . Ce résultat impressionnant a incité les chercheurs aussi bien mathématiciens que physiciens à étudier profondément ces potentiels pour bien comprendre l'origine de la réalité du spectre. Il s'est avéré alors que le secret réside dans l'invariance de symétrie par rapport aux opérations simultanées de la parité et du renversement du sens du temps. Cette double opération est appelée alors *PT* symétrie et les potentiels qui sont invariants sous cette opération sont dits *PT* symétriques (voir appendice A). Plus tard, on a montré que la *PT* symétrie du potentiel seul, qui n'est pas bien sur nécessaire pour la réalité du spectre d'un potentiel, n'est pas n'en plus suffisante mais il faut aussi que les fonctions propres de l'hamiltonien associée soient aussi invariantes par l'opération *PT* [29, 30, 31, 32].

Ainsi, un nouveau champ de recherche en mécanique quantique est apparu attirant de nombreux chercheurs désireux de contribuer à enrichir cette nouvelle mécanique quantique non hermitienne. Avant d'exposer, dans les prochains chapitres, notre contribution dans le cadre de la *PT* symétrie, nous commençons d'abord par un résumé ses principaux résultats.

## 2.2 Opérateurs *PT* symétriques et équation aux valeurs propres

Pour mieux comprendre la théorie de la *PT* symétrie, énonçons les deux théorèmes suivants :

### 2.2.1 Théorème 1 :

Si  $H$  est un opérateur non hermitien mais invariant sous la *PT* symétrie, son spectre est constitué de paires d'énergies complexes, conjuguée l'une de l'autre.

Preuve :

Soit  $\varphi_\lambda(x)$  une fonction propre de  $H$  correspondant à la valeur propre  $E_\lambda$ . Ainsi, l'équation

aux valeurs propres s'écrit

$$H\varphi_\lambda(x) = E_\lambda\varphi_\lambda(x), \quad (2.2)$$

où  $E_\lambda$  est éventuellement une valeur propre complexe.

En appliquant l'opérateur  $PT$  aux deux membres de (2.2), il vient que :

$$\begin{aligned} (PT)H\varphi_\lambda(x) &= (PT)E_\lambda\varphi_\lambda(x) \\ &= E_\lambda^*(PT)\varphi_\lambda(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $E_\lambda^*$  désigne le complexe conjugué de  $E_\lambda$ .

En utilisant maintenant la propriété d'invariance de  $H$  par l'opération  $PT$ , qui s'exprime par (cf :appendice A)

$$(PT)^+ H (PT) = H$$

ou de façon équivalente par

$$(PT)H = H(PT), \quad (2.4)$$

l'équation (2.3) peut être réécrite comme

$$H(PT\varphi_\lambda(x)) = E_n^*(PT\varphi_\lambda(x)). \quad (2.5)$$

Cette dernière équation signifie alors que la nouvelle fonction

$$PT\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda^*(-x), \quad (2.6)$$

est aussi fonction propre de  $H$  avec la valeur propre  $E_\lambda^*$ .

Ainsi le spectre de tout opérateur linéaire  $PT$  symétrique est constitué de couples de valeurs propres complexes conjuguées l'une de l'autre,  $(E_n, E_n^*)$ .

### 2.2.2 Théorème 2 :

Si un opérateur non hermitien est  $PT$  symétrique et s'il possède des fonctions propres qui sont aussi invariantes sous l'opération  $PT$ , alors leurs énergies propres correspondantes sont réelles.

Preuve :

La démonstration de ce théorème découle directement du théorème 1. En effet

$$\begin{aligned}PT\varphi_\lambda(x) &= \varphi_\lambda^*(-x) \\ &= \varphi_\lambda(x),\end{aligned}\tag{2.7}$$

l'équation (2.5) s'écrit dans ce cas

$$H\varphi_\lambda(x) = E_\lambda^*\varphi_\lambda(x).\tag{2.8}$$

En comparant (2.8) avec (2.2), il vient que forcément

$$E_\lambda = E_\lambda^*,\tag{2.9}$$

et par conséquent la valeur propre  $E_\lambda$  est réelle.

En résumé, la  $PT$  symétrie d'un hamiltonien n'entraîne pas automatiquement la réalité de ses valeurs propres. Seulement les fonctions propres qui sont aussi  $PT$  symétriques, leurs correspondent des valeurs propres réelles et vice-versa. Si tout le spectre d'un opérateur  $PT$  symétrique est réel, on dit que la  $PT$  symétrie est non brisée. Il se pourrait qu'un opérateur  $PT$  symétrique possède une partie réelle de son spectre, et une autre partie complexe et symétrique. On parle dans ce cas de  $PT$  symétrie partiellement brisée. Si tout son spectre est complexe symétrique, on dit que la  $PT$  symétrie est totalement brisée.

## 2.3 $PT$ symétrie et mécanique quantique

La question est de savoir si les propriétés des opérateurs  $PT$  symétriques peuvent être exploitées en mécanique quantique. On sait que la condition de réalité du spectre de l'hamiltonien

de tout système physique est une condition nécessaire. Celle-ci est assurée si l'hamiltonien est hermitien et on vient de voir qu'elle l'est aussi si l'hamiltonien est non hermitien mais possédant une symétrie  $PT$  non brisée. Reste à savoir si de tels potentiels peuvent décrire la dynamique de systèmes physiques. Dans l'affirmative, la mécanique quantique ordinaire, définie pour des hamiltoniens nécessairement hermitiens, trouvera une extension naturelle aux hamiltoniens  $PT$  symétriques.

Pour ce faire, il faut que les fonctions propres d'un hamiltonien  $PT$  symétrique engendrent un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire dont la norme est définie positive. Par ailleurs, l'évolution temporelle des états de cet espace doit être unitaire. Ces deux caractéristiques des hamiltoniens hermitiens sont à la base de la théorie quantique ordinaire et notamment de l'interprétation probabiliste. Elles devraient donc être satisfaites dans toute théorie d'extension de la mécanique quantique.

Le produit scalaire de deux fonctions propres quelconques  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  a été défini, dans le nouveau espace de Hilbert, par

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2)_{PT} &= \int_C [PT\varphi_1(x)\varphi_2(x)] dx \\ &= \int_C \varphi_1^*(x)\varphi_2(x) dx, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où  $C$  est un certain contour défini dans le plan complexe qui peut être choisi sur l'axe réel.

Le choix d'une définition pareille pour le produit scalaire des fonctions propres d'un hamiltonien  $PT$  symétrique a été adopté pour deux raisons fondamentales. La première est qu'il conduit à une norme indépendante de la phase globale pour toute fonction  $PT$  symétrique, et la seconde, c'est justement l'indépendance de cette norme par rapport au temps.

Cependant, avec ce choix on a été confronté à un problème de taille qui est la non positivité de la norme de certains états d'hamiltoniens  $PT$  symétriques. Dans le cas du potentiel (2.1), il a été prouvé numériquement avec une très grande précision que pour  $\nu > 0$ , on a les relations suivantes [29, 30]

$$\begin{aligned}
(\Psi_n, \Psi_m)_{PT} &= \int_c [PT\Psi_n(x) \Psi_m(x)] dx \\
&= (-1)^n \delta_{mn},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\sum_n (-1)^n [PT\Psi_n(x)] \Psi_n(y) = \delta(x-y). \tag{2.12}$$

D'après (2.11), les fonctions propres correspondant aux niveaux énergétiques d'indices impaires ont des normes négatives et de ce fait, elles ne peuvent pas représenter des états physiques. Par ailleurs, et à cause du même problème, la relation (2.12) signifie que l'espace engendré par toutes les fonctions propres d'un hamiltonien  $PT$  symétrique ne peut être complet.

Fort heureusement, il a été prouvé plus tard [32, 33] que ces deux anomalies peuvent être levées en exploitant une nouvelle symétrie "cachées" pour les hamiltoniens  $PT$  symétriques, caractérisée par un opérateur de symétrie, dénoté par  $C$  et baptisé opérateur de conjugaison de charge (Appendice A). Cet opérateur satisfait donc

$$[H, C] = [C, PT] = 0, \tag{2.13}$$

ce qui donne

$$[H, CPT] = 0. \tag{2.14}$$

On montre que le produit scalaire, défini par rapport au produit  $CPT$ , conduit à des normes positives et à un espace complet, à savoir

$$\begin{aligned}
(\Psi_n, \Psi_m)_{CPT} &= \int_c [CPT\Psi_n(x) \Psi_m(x)] dx \\
&= \delta_{mn},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$\sum_n [CPT\Psi_n(x)] \Psi_n(y) = \delta(x-y). \tag{2.16}$$

Cependant, il faut noter que l'appellation "opérateur de conjugaison de charge" est introduite seulement par analogie avec la théorie des champs, car l'opérateur  $C$  n'a rien à voir avec la charge des particules. En outre, cet opérateur n'a pas de définition générale comme les opérateurs  $P$  et  $T$  qui sont uniques. Il dépend étroitement de l'hamiltonien et par conséquent de la dynamique de chaque problème. Son calcul direct est très compliqué et n'a été obtenu que perturbativement aux premiers ordres pour certains problèmes particuliers [29, 34, 35] ou pour des systèmes d'hamiltoniens  $PT$  symétriques à deux et trois niveaux [36].

## 2.4 Extension de la méthode de factorisation aux potentiels non hermitiens et $PT$ symétriques

Afin de résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire pour des hamiltoniens non hermitiens, on peut aussi utiliser l'approche supersymétrique que nous avons exposée dans le chapitre 1. En effet, tout au long de l'exposé de la méthode de factorisation et de la condition d'invariance de forme, nous n'avons à aucun moment utilisé le caractère hermitien des potentiels, à savoir superpotentiel ou potentiels partenaires. Par conséquent, tout ce qui a été dit pour un potentiel hermitien demeure aussi valable dans le cas d'un potentiel complexe, à condition que ce dernier possède des états d'énergies discrètes et réelles. Les potentiels  $PT$  symétriques à symétrie non brisée peuvent donc être traités par l'approche de la supersymétrie. Cependant, il faut juste noter quelques petites différences. Ici nous allons faire un résumé, en insistant seulement sur les points de différences.

Considérons un hamiltonien  $H$  à une dimension de l'espace, donné par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

où  $V(x)$  est un potentiel complexe, c'est-à-dire dépendant d'un ensemble de paramètres complexes. Nous admettons qu'il possède des états d'énergies discrètes et réelles. Si  $E_0$  est l'énergie réelle la plus basse,  $H$  peut être factorisé de la même manière que s'il était hermitien par l'intermédiaire des opérateurs  $A$  et  $\tilde{A}$ , sous la forme

$$H = \tilde{A}A + E_0. \tag{2.17}$$

$A$  et  $\tilde{A}$  seront définis par des expressions similaires à celles du chapitre 1, données par

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.18)$$

et

$$\tilde{A} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (2.19)$$

où le superpotentiel  $W(x)$  est maintenant une fonction complexe qui doit satisfaire l'équation de Riccati.

$$W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} = V(x) - E_0 \quad (2.20)$$

De ce fait,  $A$  et  $\tilde{A}$  ne sont pas adjoint l'un de l'autre. Si  $V(x)$  est  $PT$  symétrique,  $W(x)$  et par conséquent  $A$  et  $\tilde{A}$  devraient être anti- $PT$  symétriques. Autrement dit, on devrait avoir

$$(PT) W(x) (PT)^{-1} = -W(x), \quad (2.21)$$

et par conséquent

$$(PT) A (PT)^{-1} = -A, \quad (2.22)$$

et

$$(PT) \tilde{A} (PT)^{-1} = -\tilde{A}. \quad (2.23)$$

La fonction propre de l'état fondamental  $\Psi_0(x, a_0)$  est solution de l'équation  $A\Psi_0(x, a_0) = 0$ , et elle est aussi donnée par

$$\Psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\int^x W(y) dy\right). \quad (2.24)$$

Il faut juste noter ici que  $\Psi_0(x)$  ainsi que toutes les fonctions propres des états excités ne sont pas des fonctions réelles comme c'est le cas pour un potentiel hermitien.

Ce sont donc les seules différences notables par rapport au traitement du chapitre 1.

## Chapitre 3

# Construction de potentiels non hermitiens, partenaires ou isospectraux, avec spectres réels

### 3.1 Introduction

La construction de potentiels isospectraux hermitiens est connue dans la littérature depuis longtemps [16]. Récemment, Mostafa Zadeh a montré dans une série de travaux [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46] que tout hamiltonien  $PT$  symétrique  $H$ , est pseudo-hermitien. Ceci veut dire que  $H$  et son adjoint  $H^+$  sont reliés par

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}, \quad (3.1)$$

où  $\eta$  est un opérateur hermitien inversible, appelé métrique. Il a aussi montré que dans ce cas, on peut en principe trouver un opérateur hermitien  $h$  qui soit isospectral avec  $H$ . En effet, il a été prouvé que l'opérateur  $h$  est relié à  $H$  par

$$h = \eta^{\frac{1}{2}} H \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Ainsi, le passage de la mécanique quantique ordinaire à la mécanique quantique pseudo-

hermitienne passe par la définition d'une métrique dans un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire particulier. Le problème avec la théorie de Mostafa Zadeh est qu'elle est seulement valide dans des espaces de Hilbert de dimensions finies. Par ailleurs, la construction exacte de la métrique  $\eta$  et par conséquent de l'hamiltonien hermitien, isospectral avec l'hamiltonien complexe, ne peut se faire que pour certains cas simples et dans la majorité des cas elle ne peut être obtenue que de façon perturbative au plus bas ordre.

Dans ce chapitre, nous allons exploiter l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique pour construire des potentiels complexes, possédant des spectres réels. Nous allons montrer comment, à partir d'un potentiel hermitien dont on connaît le spectre, nous pouvons construire des familles de potentiels complexes généraux qui sont des partenaires du premier ou isospectraux avec lui. Sachant que la construction de potentiels complexes, partenaires de potentiels hermitiens et vis versa n'a pas été abordée dans la littérature, nous espérons que les résultats de ce chapitre rempliront partiellement ce vide et constitueront un support pour de futures recherches dans ce domaine.

### 3.2 Construction de potentiels complexes, partenaires de potentiels réels

Soit  $\widetilde{W}(x)$  une fonction complexe, définie sur l'intervalle  $(a, b)$ . Elle sera caractérisée par ses parties réelle et complexe, sous la forme

$$\widetilde{W}(x) = W_R(x) + iW_I(x). \quad (3.3)$$

Dans le système d'unité  $\hbar = 2m = 1$ , les potentiels partenaires, construits à partir de  $\widetilde{W}(x)$ , sont donnés par

$$\widetilde{V}_-(x) = \left( W_R^2(x) - \frac{dW_R(x)}{dx} - W_I^2(x) \right) + i \left( 2W_R(x)W_I(x) - \frac{dW_I(x)}{dx} \right), \quad (3.4)$$

et

$$\widetilde{V}_+(x) = \left( W_R^2(x) + \frac{dW_R(x)}{dx} - W_I^2(x) \right) + i \left( 2W_R(x)W_I(x) + \frac{dW_I(x)}{dx} \right). \quad (3.5)$$

L'idée consiste à construire  $W_R(x)$  et  $W_I(x)$  de telle sorte que les fonctions  $\tilde{V}_-(x)$  et  $\tilde{V}_+(x)$  soient respectivement complexe et réelle. Pour ce faire, on doit exiger que la partie imaginaire de  $\tilde{V}_+(x)$  soit identiquement nulle, ce qui implique alors que les fonctions  $W_R(x)$  et  $W_I(x)$  sont interdépendantes. En effet, on doit avoir

$$2W_R(x) = -\frac{1}{W_I(x)} \frac{dW_I(x)}{dx}, \quad (3.6)$$

qui signifie que la connaissance de  $W_I(x)$  implique celle de  $W_R(x)$ .

Le potentiel  $\tilde{V}_+(x)$  se réduira alors à une forme simple, donnée par

$$\tilde{V}_+(x) = W_R^2(x) + \frac{dW_R(x)}{dx} - W_I^2(x). \quad (3.7)$$

Introduisons la fonction auxiliaire  $u(x)$  tel que

$$W_R(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad (3.8)$$

où l'on admettra que

$$u(x) \neq 0. \quad (3.9)$$

En reportant (3.8) dans (3.6) et en intégrant, on obtient

$$W_I(x) = \frac{k}{u^2(x)}, \quad (3.10)$$

où  $k$  est une constante réelle arbitraire.

Le superpotentiel  $\tilde{W}(x)$  ainsi que les partenaires  $\tilde{V}_-(x)$  et  $\tilde{V}_+(x)$  s'écrivent maintenant en fonction d'une seule inconnue,  $u(x)$ , et dépendent explicitement du paramètre  $k$ . Ils seront donnés par

$$\tilde{W}(x; k) = \frac{u'(x)}{u(x)} + i \frac{k}{u^2(x)}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{V}_-(x; k) = 2 \left( \frac{u'(x)}{u(x)} \right)^2 - \frac{u''(x)}{u(x)} - \frac{k^2}{u^4(x)} + 4ik \frac{u'(x)}{u^3(x)}. \quad (3.12)$$

et

$$\tilde{V}_+(x; k) = \frac{u''(x)}{u(x)} - \frac{k^2}{u^4(x)}. \quad (3.13)$$

La fonction propre associée à l'état fondamental de  $\tilde{V}_-(x; k)$  sera donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0(x; k) &= N_0 \exp\left(-\int^x \tilde{W}(y) dy\right) \\ &= \frac{N_0}{u(x)} \exp\left(-ik \int^x \frac{dy}{u^2(y)}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

qui est une fonction complexe. Elle dépend aussi explicitement du paramètre  $k$  mais seulement par sa phase. Par ailleurs, si  $u(x)$  est une fonction paire ou impaire,  $\tilde{\varphi}_0(x; k)$  peut être rendu  $PT$  symétrique en choisissant convenablement la phase de la constante  $N_0$ . En effet, si  $u(x)$  est paire,  $N_0$  doit être réel, et si  $u(x)$  est impaire,  $N_0$  doit être imaginaire pur. Pour que cette fonction converge au sens de la contrainte (1.54), on doit imposer à  $u(x)$  de vérifier les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow a, b} u(x) = \pm\infty. \quad (3.15)$$

En conclusion, nous avons montré comment obtenir des potentiels hermitiens qui sont partenaires de potentiels complexes dont les fonctions propres de leurs états fondamentaux sont convergentes au sens de la contrainte (1.54). Par conséquent, les potentiels complexes sont assurés d'avoir des spectres réels et éventuellement ils peuvent représenter les dynamiques de problèmes physiques concrets. Les potentiels, ainsi construits, dépendent explicitement d'un paramètre réel  $k$ , qui fixe leurs natures. Pour  $k \neq 0$ , un des partenaires est forcément complexe dans le cas général et peut être rendu  $PT$  symétrique dans des situations particulières. Pour  $k = 0$ , les deux partenaires sont hermitiens.

### 3.3 Exemple illustratif

Considérons le choix

$$u(x) = \cosh^n \alpha x, \quad (3.16)$$

où  $\alpha$  et  $n$  sont des paramètres réels.

Un calcul simple donne le superpotentiel sous la forme

$$\widetilde{W}(x; k) = \alpha n \tanh \alpha x + i \frac{k}{\cosh^{2n} \alpha x}, \quad (3.17)$$

qui conduit aux partenaires

$$\widetilde{V}_+(x; k) = \alpha^2 n^2 - \frac{\alpha^2 n(n-1)}{\cosh^2 \alpha x} - \frac{k^2}{\cosh^{4n} \alpha x}, \quad (3.18)$$

et

$$\widetilde{V}_-(x; k) = \alpha^2 n^2 - \frac{\alpha^2 n(n+1)}{\cosh^2 \alpha x} - \frac{k^2}{\cosh^{4n} \alpha x} + 4ik\alpha n \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^{2n+1} \alpha x}. \quad (3.19)$$

En principe, quel que soit le paramètre  $n$ ,  $\widetilde{V}_+(x; k)$  et  $\widetilde{V}_-(x; k)$  sont des potentiels partenaires possédant le même spectre positif.

Dans le cas particulier où  $n = \frac{1}{2}$ , les partenaires se réduisent en

$$\widetilde{V}_+(x; k) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2 - \frac{\alpha^2}{4}}{\cosh^2 \alpha x},$$

et

$$\widetilde{V}_-(x; k) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2 + \frac{3\alpha^2}{4}}{\cosh^2 \alpha x} + 2ik\alpha \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^2 \alpha x}.$$

## 3.4 Construction de potentiels complexes, isospectraux à un potentiel hermitien

### 3.4.1 Première méthode

Nous venons de montrer donc, qu'en choisissant une fonction  $u(x)$ , vérifiant (3.15), on peut construire de façon unique une famille de partenaires  $\widetilde{V}_-(x; k)$  et  $\widetilde{V}_+(x; k)$ , respectivement complexe et réel. Cependant, ces partenaires ne sont manifestement pas invariants de formes et par conséquent on ne peut pas déterminer leurs spectres par l'approche de supersymétrie. Il faut donc choisir judicieusement la fonction  $u(x)$  pour faire coïncider, par exemple, le potentiel réel  $\widetilde{V}_+(x; k)$  avec un potentiel dont on connaît les énergies propres et les fonctions propres et ensuite en déduire celles du potentiel complexe  $\widetilde{V}_-(x; k)$ , comme nous l'avons montré sur un

exemple illustratif.

Cette façon de procéder s'avère un peu délicate et artificielle, car il n'est pas évident de pouvoir choisir la fonction  $u(x)$  adéquate qui conduit à un potentiel donné. La meilleure façon de procéder est de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de commencer d'abord par fixer  $\tilde{V}_+(x)$  par un choix quelconque parmi les potentiels exactement solubles, dont on connaît le spectre et les fonctions propres, et déterminer la fonction  $u(x)$  par la résolution de l'équation différentielle (3.13). Nous nous proposons de procéder ainsi.

Soit  $W(x)$  une fonction réelle, choisie comme superpotentiel générant les partenaires  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$ , donnés par

$$V_-(x) = W^2(x) - W'(x), \quad (3.20)$$

et

$$V_+(x) = W^2(x) + W'(x). \quad (3.21)$$

En imposant que  $\tilde{V}_+(x)$  et  $V_+(x)$  soient identiques, le problème revient donc à la résolution de l'équation (3.13), avec

$$\tilde{V}_+(x) \equiv V_+(x). \quad (3.22)$$

Par ailleurs, la condition (3.22) signifie que les potentiels  $V_-(x)$  et  $\tilde{V}_-(x)$  ont le même partenaire et par conséquent, en vertu des résultats du chapitre 1, ils auront strictement le même spectre. On dit qu'ils sont isospectraux.

Il faut noter que dans cette vision des choses, le potentiel  $\tilde{V}_+(x)$  doit être indépendant du paramètre  $k$ . En fait, c'est la fonction  $u(x)$ , solution de l'équation (3.13) qui dépendra explicitement de  $k$ . L'équation (3.13) devrait mieux s'écrire sous la forme

$$V_+(x) = \frac{u_k''(x)}{u_k(x)} - \frac{k^2}{u_k^4(x)}. \quad (3.23)$$

En multipliant les deux membres de (3.23) par  $u_k(x)$ , on obtient l'équation équivalente

$$u_k''(x) - V_+(x) u_k(x) = \frac{k^2}{u_k^3(x)}, \quad (3.24)$$

qui n'est autre que l'équation d'Ermakov [47] Pinney [48], bien connue en mathématique mais aussi dans certaines branches de la physique, notamment dans la résolution de certaines équations

tions de Schrödinger dépendantes du temps [49]. Nous allons suivre les démarches de la référence [50] pour obtenir la solution générale de (3.24).

Tout d'abord, passons de la variable dynamique  $x$  et de la fonction  $u_k(x)$  à la nouvelle variable dynamique  $\xi$  et à la nouvelle fonction  $Z_k(\xi)$ , définies par

$$\xi = \int \frac{dx}{\omega^2(x)}, \quad (3.25)$$

et

$$Z_k(\xi) = \frac{u_k(x)}{\omega(x)}, \quad (3.26)$$

où  $\omega(x)$  est à priori une fonction réelle non nulle sur l'intervalle  $[a, b]$ , qui sera déterminée plus tard.

En reportant (3.25) et (3.26) dans (3.24), on obtient l'équation différentielle pour la nouvelle fonction  $Z_k(\xi)$  sous la forme

$$Z_k(\xi) \left( \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - V_+(x)\omega(x) \right) + \frac{1}{\omega^3(x)} \left( \frac{d^2Z_k(\xi)}{d\xi^2} - \frac{k^2}{Z_k^3(\xi)} \right) = 0. \quad (3.27)$$

Une manière simple de satisfaire (3.27) et d'imposer que les expressions entre parenthèses s'annulent séparément. Ceci conduit donc à résoudre deux équations différentielles indépendantes, l'une pour la fonction  $\omega(x)$ , donnée par

$$\frac{d^2\omega(x)}{dx^2} - V_+(x)\omega(x) = 0, \quad (3.28)$$

et l'autre pour la fonction  $Z_k(\xi)$ , donnée par

$$\frac{d^2Z_k(\xi)}{d\xi^2} = \frac{k^2}{Z_k^3(\xi)}. \quad (3.29)$$

L'équation (3.28) servira donc pour fixer  $\omega(x)$  comme une fonctionnelle sur  $V_+(x)$ . Sa solution est obtenue directement à partir des hypothèses du problème. En effet, en reportant (3.21) dans (3.28), cette dernière se factorise comme

$$AA^+\omega(x) = 0, \quad (3.30)$$

qui implique que

$$A^+ \omega(x) = 0, \quad (3.31)$$

avec

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \quad \text{et} \quad A^+ = -\frac{d}{dx} + W(x). \quad (3.32)$$

La solution de (3.31) est ainsi donnée par

$$\begin{aligned} \omega(x) &\sim \exp\left(\int^x W(y) dy\right) \\ &\sim \frac{1}{\varphi_0(x)}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $\varphi_0(x)$  est la fonction propre de l'état fondamental de  $V_-(x)$ .

L'équation (3.29) est de même type que l'équation (3.24) mais plus simple puisque le terme du potentiel est absent. Afin de résoudre cette équation, définissons une fonction auxiliaire  $\theta(Z_k)$  par

$$\frac{dZ_k(\xi)}{d\xi} = \sqrt{\theta(Z_k)}. \quad (3.34)$$

Comme  $Z_k(\xi)$  est une fonction réelle, sa dérivée l'est aussi et par conséquent  $\theta(Z_k)$  devrait être strictement positive.

$$\theta(Z_k) > 0. \quad (3.35)$$

En dérivant les deux membres de (3.34) par rapport à  $\xi$ , on obtient

$$\frac{d^2 Z_k(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{d\theta(Z_k)}{dZ_k}. \quad (3.36)$$

En reportant cette dernière dans (3.29), on obtient une équation plus simple pour  $\theta(Z_k)$ , donnée par

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta(Z_k)}{dZ_k} = \frac{k^2}{Z_k^3}, \quad (3.37)$$

qui peut être intégrée facilement pour donner

$$\theta(Z_k) = C_1 - \frac{k^2}{Z_k^2}, \quad (3.38)$$

où  $C_1$  est une constante d'intégration réelle, qui devrait être choisie strictement positive en vertu de la contrainte (3.35).

En reportant, enfin, (3.38) dans (3.34), on obtient

$$\frac{dZ_k}{d\xi} = \sqrt{C_1 - \frac{k^2}{Z_k^2}}, \quad (3.39)$$

qu'on peut intégrer pour obtenir

$$\xi + C_2 = \pm \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 Z_k^2 - k^2}, \quad (3.40)$$

où  $C_2$  est une constante d'intégration, à priori arbitraire.

En multipliant les deux membres de (3.40) par  $C_1$  et, en élevant au carré ces deux membres, on obtient

$$Z_k^2 = \frac{1}{C_1} \left( k^2 + (\lambda + C_1 \xi)^2 \right), \quad (3.41)$$

avec  $\lambda = C_1 C_2$ , qui est aussi arbitraire.

En reportant les expressions (3.26), (3.25) de  $Z_k$  et  $\xi$  dans (3.41), on obtient finalement

$$u_k^2(x) = \frac{\omega^2(x)}{C_1} \left[ k^2 + \left( \lambda + C_1 \int^x \frac{dy}{\omega^2(y)} \right)^2 \right]. \quad (3.42)$$

D'après (3.28), la fonction  $\omega(x)$  est définie à une constante multiplicative près, par ailleurs  $u_k(x)$  peut être définie à un signe multiplicatif près, qui est sans importance sur le superpotentiel, on peut donc sans perte de généralité, prendre  $C_1 = 1$  et écrire en tenant compte de (3.33)

$$u_k(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)} \left[ k^2 + \left( \lambda + \int^x \varphi_0^2(y) dy \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.43)$$

où  $k$  est une constante réelle, à priori non nulle, et  $\lambda$  est une constante réelle arbitraire.

De (3.43), on constate que  $u_k(x)$  dépend explicitement de  $k$  et de  $V_-(x)$  par l'intermédiaire de la fonction propre de son état fondamental,  $\varphi_0(x)$ .

En combinant (3.4), (3.20) on obtient

$$\tilde{V}_-(x; k, \lambda) = V_-(x) + 2 \frac{d}{dx} \left( W(x) - \tilde{W}(x; k) \right). \quad (3.44)$$

Posons

$$I_\lambda(x) = \lambda + \int^x \varphi_0^2(y) dy, \quad (3.45)$$

et

$$J_{k,\lambda}(x) = \left( k^2 + I_\lambda^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

Cette nouvelle notation permet d'écrire  $\tilde{W}(x; k, \lambda)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{W}(x; k, \lambda) &= \frac{u'_k(x)}{u_k(x)} + i \frac{k}{u_k^2(x)} \\ &= \frac{J'_{k,\lambda}(x)}{J_{k,\lambda}(x)} - \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + ik \frac{I'_\lambda(x)}{J_{k,\lambda}^2(x)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

D'après (3.33)

$$W(x) = -\frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}. \quad (3.48)$$

En substituant (3.47) et (3.48) dans (3.44), il vient :

$$\tilde{V}_-(x; k, \lambda) = V_-(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln J_{k,\lambda}(x) - 2ik \frac{d}{dx} \frac{I'_\lambda(x)}{J_{k,\lambda}^2(x)}, \quad (3.49)$$

il s'agit d'une famille "infinie" de potentiels complexes, isospectraux avec  $V_-(x)$ , dépendant des deux paramètres indépendants  $k$  et  $\lambda$ .

Dans les cas particuliers où  $k = 0$ , les potentiels construits deviendront hermitiens et on retrouve le résultat bien connu dans la littérature [16],

$$\tilde{V}_-(x; \lambda) = V_-(x) - 2 \frac{d}{dx} \ln I_\lambda(x). \quad (3.50)$$

En conclusion, nous venons de montrer qu'on peut associer à chaque potentiel hermitien, de spectre réel, une famille de potentiels complexes ayant strictement le même spectre que lui,

caractérisés par deux paramètres indépendants. Un des paramètres joue un rôle important car c'est lui qui précise la nature des potentiels. S'il est nul, les potentiels construits deviendront hermitiens, sinon ils sont complexes mais pas forcément  $PT$  symétriques. Ils deviendront  $PT$  symétriques si la fonction génératrice  $u_k(x)$  est paire ou impaire. Ceci peut être réalisé pour le cas particulier où le second paramètre,  $\lambda$ , est nul, si la fonction  $\varphi_0(x)$  est elle-même symétrique ou anti-symétrique.

### 3.4.2 Seconde méthode

Montrons qu'il est possible d'obtenir les mêmes résultats de la section 3.4.1 en procédant autrement.

En partant du superpotentiel  $W(x)$ , générant les partenaires  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$ , cherchons une fonction  $g(x)$  tel que le nouveau superpotentiel, défini par

$$\widetilde{W}(x) = W(x) + g(x), \quad (3.51)$$

conduit aux partenaires  $\widetilde{V}_-(x)$  et  $V_+(x)$ . Autrement dit, on doit avoir

$$W^2(x) + g^2(x) + 2W(x)g(x) + \frac{dW}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} = V_+(x). \quad (3.52)$$

Puisque par hypothèse, on a

$$W^2(x) + \frac{dW(x)}{dx} = V_+(x), \quad (3.53)$$

(3.52) se réduit en

$$g^2(x) + g'(x) + 2W(x)g(x) = 0, \quad (3.54)$$

qui est une équation différentielle du premier ordre de type Bernoulli, qu'on linéarise en définissant la nouvelle inconnue  $z(x)$  par

$$g(x) = \frac{1}{z(x)}, \quad (3.55)$$

en reportant dans (3.54), on obtient donc pour  $z(x)$  une équation plus simple sous la forme

$$-\frac{dz}{dx} + 2W(x)z(x) + 1 = 0. \quad (3.56)$$

En écrivant  $z(x)$  ainsi

$$z(x) = u(x)v(x), \quad (3.57)$$

on obtient :

$$-\frac{du}{dx}v(x) + u(x)\left(-\frac{dv(x)}{dx} + 2W(x)v(x)\right) + 1 = 0. \quad (3.58)$$

Maintenant, on peut choisir  $v(x)$  de telle sorte que

$$-\frac{dv(x)}{dx} + 2W(x)v(x) = 0, \quad (3.59)$$

qui s'intègre facilement pour donner

$$v(x) \sim e^{2\int^x W(y)dy}. \quad (3.60)$$

En tenant compte de (3.59), (3.58) se réduit en

$$u(x) = C + \int^x \frac{dy}{v(y)}, \quad (3.61)$$

D'après(3.60) et (3.61), (3.57) s'écrit

$$z(x) = \left[ C + \int^x e^{-2\int^y W(z)dz} dy \right] e^{2\int^x W(y)dy}, \quad (3.62)$$

d'où

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{e^{-2 \int^x W(y) dy}}{C + \int^x e^{-2 \int^y W(z) dz} dy}, \\
&= \frac{\varphi_0^2(x)}{C + \int^x \varphi_0^2(y) dy},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

où  $\varphi_0^2(x)$  est la fonction propre de l'état fondamental de  $V_-(x)$  et  $C$  est une constante d'intégration arbitraire.

Compte tenu de (3.51) et (3.63)

$$\widetilde{W}(x; C) = W(x) + \frac{d}{dx} \ln [C + I_C(x)], \tag{3.64}$$

où on a posé

$$I_C(x) = \int^x \varphi_0^2(y) dy. \tag{3.65}$$

En en déduit

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_-(x; C) &= V_-(x) + 2 \frac{d}{dx} \left( W(x) - \widetilde{W}(x; C) \right). \\
&= V_-(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [C + I_C(x)].
\end{aligned} \tag{3.66}$$

C'est exactement le même résultat qu'on trouve dans la littérature [16]. Cependant, il a toujours été admis que  $C$  est une constante réelle. Dans ce cas les potentiels  $V_-(x)$  et  $\widetilde{V}_-(x)$  sont des potentiels isospectraux hermitiens. Si on prend  $C$  complexe, on arrive exactement aux résultats de la section 3.4.1. En effet en posant  $C = \lambda + ik$  et en introduisant les notations (3.45), (3.46),  $\widetilde{W}(x; k, \lambda)$  se met sous la forme

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(x; k, \lambda) &= W(x) + \frac{\varphi_0^2(x)}{\lambda + ik + \int^x \varphi_0^2(y) dy} \\
&= W(x) + \frac{1}{J_{k, \lambda}(x)} - ik \frac{I'_\lambda(x)}{I_\lambda^2(x) + k^2}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\tilde{V}_-(x; k, \lambda) &= V_-(x) + 2\frac{d}{dx} \left( W(x) - \widetilde{W}(x; k, \lambda) \right) \\ &= V_-(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln J_{k,\lambda}(x) + 2ik \frac{d}{dx} \frac{I'_\lambda(x)}{J_{k,\lambda}^2(x)},\end{aligned}\tag{3.68}$$

qui est exactement l'expression (3.49) de la section 3.4.1 étant donné que  $J_{k,\lambda}(x)$  est symétrique par rapport à  $k$ .

## Chapitre 4

# Construction de potentiels complexes avec spectres réels à partir de superpotentiels de la forme

$$W(x, a) = W_R(x, a) + iW_I(x, a)$$

### 4.1 Introduction

Le présent chapitre consiste à introduire une méthode générale permettant la construction de potentiels partenaires complexes ayant des spectres réels en exploitant la méthode supersymétrique, plus précisément nous construirons de tels potentiels à partir d'un superpotentiel complexe, en imposant au préalable la propriété d'invariance de forme, menant à un système de deux équations différentielles non linéaires qui doivent être impérativement vérifiées par la partie réel et imaginaire du superpotentiel générateur. Bien que ce système d'équations soit difficile à intégrer de façon générale, il se réduit pour des formes particulière du superpotentiel à des équations différentielles très simples à résoudre. Ces situation particulière limite nos choix, néanmoins elles garantissent l'obtention de potentiels complexes dont on peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger associée, et obtenir d'une manière explicite les énergies propres et les fonctions propres correspondantes.

Comme nous allons le constater certains potentiels obtenus par cette approche, représentent des généralisations de potentiels  $PT$  symétriques connus dans la littérature.

## 4.2 Exposé de la méthode

Considérons un superpotentiel complexe  $W(x, a_1)$  dépendant d'un ensemble de paramètres réels  $a_1$

$$W(x, a_1) = W_R(x, a_1) + iW_I(x, a_1), \quad (4.1)$$

où  $W_R(x, a_1)$  et  $W_I(x, a_1)$  sont les parties réelle et imaginaire de  $W(x, a_1)$  et sont donc des fonctions réelles. On construit les potentiels partenaires  $V_-(x, a_1)$  et  $V_+(x, a_1)$  sous la forme

$$\begin{aligned} V_-(x, a_1) &= W^2(x, a_1) - \frac{d}{dx}W(x, a_1) \\ &= \left( W_R^2(x, a_1) - \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} - W_I^2(x, a_1) \right) + i \left( 2W_R(x, a_1)W_I(x, a_1) - \frac{dW_I(x, a_1)}{dx} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

et

$$\begin{aligned} V_+(x, a_1) &= W^2(x, a_1) + \frac{d}{dx}W(x, a_1) \\ &= \left( W_R^2(x, a_1) + \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} - W_I^2(x, a_1) \right) + i \left( 2W_R(x, a_1)W_I(x, a_1) + \frac{dW_I(x, a_1)}{dx} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

En imposant la condition d'invariance de forme entre les potentiels partenaires,

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_1) \text{ avec } a_2 = f(a_1), \quad (4.4)$$

et la réalité du reste, le spectre qui est donné par

$$E_n^{(-)} = \sum_{k=1}^n R(a_k). \quad (4.5)$$

est forcément réel. La contrainte de non brisure de symétrie, qui est en principe donnée par

$$e^{-\int^x [W_R(x') + iW_I(x')] dx'} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0,$$

se réduit à

$$e^{-\int^x W_R(x') dx'} \xrightarrow{x \rightarrow a, b} 0, \quad (4.6)$$

car

$$\left| e^{-i \int^x W_I(x') dx'} \right| < 1. \quad (4.7)$$

En combinant (4.2), (4.3) et (4.4), on obtient pour les fonctions  $W_R(x, a_1)$  et  $W_I(x, a_1)$  les deux équations différentielles couplées suivantes :

$$W_R^2(x, a_1) + \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} - W_I^2(x, a_1) = W_R^2(x, a_2) - \frac{dW_R(x, a_2)}{dx} - W_I^2(x, a_2) + R(a_1) \quad (4.8)$$

et

$$2W_R(x, a_1)W_I(x, a_1) + \frac{dW_I(x, a_1)}{dx} = 2W_R(x, a_2)W_I(x, a_2) - \frac{dW_I(x, a_2)}{dx}. \quad (4.9)$$

Ces deux équations sont très compliquées à intégrer dans le cas général. Pour les rendre plus maniables nous allons considérer, dans les sections suivantes, quelques cas particuliers et chercher les solutions physiques qui satisfont la contrainte (4.6). Nous montrons que les solutions possibles sont des généralisations de certains potentiels  $PT$  symétriques bien connus dans la littérature. L'idée générale que nous allons suivre dans notre démarche consiste à fixer la dépendance de  $W_I(x, a)$  par rapport aux deux variables  $x$  et  $a$  ou seulement par rapport à l'une des variables. Ceci ramène la résolution des équations couplées (4.8) et (4.9) à la résolution d'équations du type Riccati particulières. Nous considérons dans ce mémoire trois modèles différents qui mèneront à des résultats intéressants.

### 4.3 Superpotentiel complexe avec $W_I(x, a) = \text{constante}$

Dans ce premier modèle, nous choisissons la partie imaginaire du superpotentiel  $W(x, a_1)$  comme une constante indépendante du paramètre  $a_1$ . Le superpotentiel s'écrit donc

$$W(x, a_1) = W_R(x, a_1) + ib,$$

où  $b$  est une constante réelle, indépendante de  $a_1$ . L'inconnu est la fonction  $W_R(x, a_1)$  dont nous voulons déterminer sa dépendance par rapport à la variable  $x$  et au paramètre  $a_1$  à partir des équations (4.8) et (4.9), qui se réduisent dans ce cas en

$$W_R^2(x, a_1) + \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} = W_R^2(x, a_2) - \frac{dW_R(x, a_2)}{dx} + R(a_1), \quad (4.10)$$

et

$$W_R(x, a_2) = W_R(x, a_1). \quad (4.11)$$

On remarque que ces équations, qui servent pour la détermination de  $W_R(x, a)$  et  $R(a)$ , ne dépendent pas explicitement du paramètre  $b$ . Ceci signifie que ce paramètre peut être choisis arbitrairement et n'a aucune influence sur le spectre du problème. Par ailleurs, l'équation (4.11) signifie que ce modèle est possible seulement si

$$f(a) = a, \quad (4.12)$$

ce qui fait penser au potentiel harmonique qu'on avait discuté dans le chapitre précédent. En effet, en tenant compte de (4.11), l'équation (4.10) se réduit à une équation différentielle du premier ordre, de la forme

$$\frac{dW_R(x, a_1)}{dx} = \frac{R(a_1)}{2}, \quad (4.13)$$

qui donne après intégration

$$W_R(x, a_1) = \frac{R(a_1)}{2}x + c, \quad (4.14)$$

où  $c$  est une constante d'intégration arbitraire, mais réelle. On constate que  $W_R(x, a_1)$  dépend du paramètre  $a_1$  par l'intermédiaire de la fonction reste  $R(a_1)$  et par conséquent, sans perte de

généralité, on peut choisir  $R(a_1) = 2a_1$ , de sorte

$$W_R(x, a) = ax + c. \quad (4.15)$$

Le superpotentiel est alors donné par

$$\begin{aligned} W(x) &= (ax + c) + ib, \\ &= ax + d, \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $d$  est un nombre complexe arbitraire. On voit donc que le superpotentiel coïncide, à une constante additive près, avec celui de l'oscillateur harmonique.

Les potentiels partenaires sont donnés par

$$V_-(x) = (ax + d)^2 - a,$$

et

$$V_+(x) = (ax + d)^2 + a.$$

En choisissant le paramètre  $a$  positif,  $V_+(x)$  sera le partenaire de  $V_-(x)$ . La fonction propre de l'état fondamental sera donnée par

$$\varphi_0^{(-)}(x) = e^{-\int^x W(x')dx'} = N_0 e^{-\frac{a}{2}x^2 + dx}, \quad (4.17)$$

où  $N_0$  est une constante de normalisation.

Les niveaux d'énergie du potentiel  $V_-(x)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} E_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^n R(a_k) \\ &= 2na, \end{aligned} \quad (4.18)$$

bien sûr les  $E_n^{(+)}$  sont liées aux  $E_n^{(-)}$  par la relation (1.43).

Notons enfin que la nature des potentiels  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$  dépend du paramètre  $d$ . Si  $d$  est réel,  $V_-(x)$  et  $V_+(x)$  seront hermitiens et si  $d$  est imaginaire pur, ils seront  $PT$  symétriques. Dans le cas général, c'est-à-dire si l'argument de  $d$  est différent de 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ , les partenaires sont des potentiels complexes, non hermitiens et non  $PT$  symétriques.

#### 4.4 Superpotentiel complexe avec $W_I(x, a) = g(a)$

Dans ce modèle, nous allons considérer la partie imaginaire du superpotentiel comme une fonction indépendante de la variable dynamique  $x$ , mais explicitement dépendante du paramètre  $a$ . Le superpotentiel s'écrit dans ce cas comme

$$W(x, a) = W_R(x, a) + ig(a), \quad (4.19)$$

où  $g(a)$  est une fonction réelle arbitraire. Les équations d'invariance de forme (4.8) et (4.9) s'écrivent comme

$$W_R^2(x, a_1) + \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} - g^2(a_1) = W_R^2(x, a_2) - \frac{dW_R(x, a_2)}{dx} - g^2(a_2) + R(a_1), \quad (4.20)$$

et

$$g(a_1) W_R(x, a_1) = g(a_2) W_R(x, a_2). \quad (4.21)$$

En tenant compte de (4.21), l'équation (4.20) se réduit à une équation de Riccati à coefficients constants, de la forme

$$\frac{dW_R(x, a_1)}{dx} = b(a_1) W_R^2(x, a_1) + c(a_1), \quad (4.22)$$

avec

$$b(a_1) = \frac{g(a_1)}{g(a_2)} - 1, \quad (4.23)$$

et

$$c(a_1) = \frac{g^2(a_1) - g^2(a_2) + R(a_1)}{1 + \frac{g(a_1)}{g(a_2)}}. \quad (4.24)$$

Dans la suite nous allons admettre que  $b(a_1)$  est non nul, ou de façon équivalente  $g(a_2) \neq g(a_1)$  car dans le cas contraire l'équation (4.22) se réduira exactement à l'équation (4.13) et on retrouvera le modèle de la section précédente. Par ailleurs, nous nous intéressons seulement aux solutions non triviales de (4.22) où  $W_R(x, a)$  dépend explicitement de la variable dynamique  $x$ .

Pour résoudre l'équation (4.22), on passe de la variable  $W_R(x; a)$  à la nouvelle variable  $z(x, a)$ , définie par

$$W_R(x, a) = -\frac{1}{b(a)} \frac{z'(x, a)}{z(x, a)}, \quad (4.25)$$

qui conduit à une équation différentielle linéaire pour  $z(x, a)$ , donnée par

$$z''(x, a) + bc z(x, a) = 0. \quad (4.26)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Elle possède deux solutions linéairement indépendantes, données par [22]

$$z_{\pm}(x, a) = e^{\pm i\sqrt{bc}x}. \quad (4.27)$$

La solution générale est prise comme une combinaison linéaire de  $z_{\pm}(x)$  sous la forme

$$z(x, a) = A_+ e^{i\sqrt{cb}x} + A_- e^{-i\sqrt{cb}x}, \quad (4.28)$$

où  $A_{\pm}$  sont des constantes non nulles qui doivent être choisies de telle sorte que  $z(x)$  soit une fonction réelle.

Compte tenu de la définition (4.25), on obtient la solution générale de  $W_R(x, a)$  sous la forme

$$W_R(x, a) = -\frac{i\sqrt{cb}}{b} \frac{A_+ e^{i\sqrt{cb}x} - A_- e^{-i\sqrt{cb}x}}{A_+ e^{i\sqrt{cb}x} + A_- e^{-i\sqrt{cb}x}}. \quad (4.29)$$

Il est évident que la solution obtenue dépend explicitement du paramètre  $a$  par l'intermédiaire de  $b$  et  $c$ . Par ailleurs, jusqu'à présent, nous avons juste montré que cette solution satisfait

l'équation (4.22), qui n'est pas tout à fait équivalente à l'équation (4.20). Pour obtenir les solutions de (4.20) nous devons imposer aux solutions (4.29) de satisfaire aussi la contrainte (4.21). En écrivant cette dernière sous la forme équivalente

$$W_R(x, a_2) = \frac{g(a_1)}{g(a_2)} W_R(x, a_1), \quad (4.30)$$

on voit qu'elle sera satisfaite si, quel que soit  $a$ , on a

$$W_R(x, a_1) = h(a_1) \widetilde{W}_R(x), \quad (4.31)$$

où  $\widetilde{W}_R(x)$  est une fonction qui ne dépend pas explicitement du paramètre  $a_1$  et  $h(a_1)$  est une fonction ne dépendant pas explicitement de  $x$ .

En reportant (4.31) dans (4.30), on obtient

$$\frac{h(a_1)}{h(a_2)} = \frac{g(a_2)}{g(a_1)}. \quad (4.32)$$

Par ailleurs, pour que les solutions (4.29) peuvent s'écrire sous la forme (4.31), il suffit d'imposer aux paramètres  $b(a_1)$  et  $c(a_1)$  d'être inversement proportionnels, indépendamment du paramètre  $a_1$ . Autrement dit, on doit imposer que

$$c(a_1) b(a_1) = \lambda, \quad (4.33)$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel et non nul, indépendant de  $a_1$ . En effet, dans ce cas on peut avoir

$$h(a_1) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{b(a_1)}, \quad (4.34)$$

En combinant (4.34) et (4.32) avec (4.23), on se rend compte facilement que la fonction  $g$  doit satisfaire la contrainte suivante :

$$\frac{1}{g(a_3)} - \frac{1}{g(a_2)} = \frac{1}{g(a_2)} - \frac{1}{g(a_1)}, \quad (4.35)$$

qui se généralise aisément en

$$\frac{1}{g(f(a))} - \frac{1}{g(a)} = \alpha, \quad (4.36)$$

où  $\alpha$  est une constante réelle.

La contrainte (4.33) permet de fixer la forme du reste  $R(a_1)$ . En effet, en combinant (4.33) avec (4.23) et (4.24), on obtient

$$R(a_1) = \lambda \frac{g(a_1) + g(a_2)}{g(a_1) - g(a_2)} + g^2(a_2) - g^2(a_1). \quad (4.37)$$

En tenant compte de la contrainte (4.36) et de la relation (4.23), on obtient facilement

$$b(a) = \alpha g(a), \quad (4.38)$$

de sorte que le superpotentiel s'écrira finalement sous la forme

$$W(x, a) = -\frac{i\sqrt{\lambda}}{\alpha g(a)} \frac{A_+ e^{i\sqrt{\lambda}x} - A_- e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{A_+ e^{i\sqrt{\lambda}x} + A_- e^{-i\sqrt{\lambda}x}} + ig(a). \quad (4.39)$$

On constate alors que le paramètre  $a$  intervient dans l'expression de  $W(x, a)$  uniquement à travers la fonction  $g(a)$ . Ainsi, sans perte de généralité on peut prendre  $g(a)$  sous la forme simple

$$g(a) = \frac{1}{a}, \quad (4.40)$$

de sorte que

$$f(a) = a + \alpha, \quad (4.41)$$

et

$$R(a_1) = \frac{\lambda}{\alpha^2} (a_2^2 - a_1^2) + \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right). \quad (4.42)$$

Nous distinguons les deux cas différents ;  $\lambda$  positif et  $\lambda$  négatif, que nous allons étudier séparément.

#### 4.4.1 Cas où $\lambda$ est positif

On pose

$$\sqrt{\lambda} = \gamma, \quad (4.43)$$

où  $\gamma$  est un nouveau paramètre réel.

Dans ce cas, pour assurer la réalité de  $W_R(x, a)$  dans (4.39),  $A_{\pm}$  peuvent, sans perte de généralité, être choisis conjugué où anti-conjugué l'un de l'autre. Dans le premier cas, on pose donc

$$A_+ = A_-^* = Ae^{-i\gamma x_0}, \quad (4.44)$$

avec  $A \neq 0$  et  $x_0$  réel.

Le superpotentiel s'écrit

$$W(x, a) = \frac{\gamma}{\alpha} a \tan \gamma (x - x_0) + \frac{i}{a}, \quad (4.45)$$

et les potentiels partenaires sont donnés par

$$V_-(x, a) = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{a(a - \alpha)}{\cos^2 \gamma (x - x_0)} + 2i\frac{\gamma}{\alpha} \tan \gamma (x - x_0) - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 a^2 - \frac{1}{a^2}, \quad (4.46)$$

et

$$V_+(x, a) = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{a(a + \alpha)}{\cos^2 \gamma (x - x_0)} + 2i\frac{\gamma}{\alpha} \tan \gamma (x - x_0) - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 a^2 - \frac{1}{a^2}. \quad (4.47)$$

Ces potentiels sont périodiques, de période égale  $\pi$ , et par conséquent ils seront définis sur l'intervalle

$$x \in \left[ x_0 - \frac{\pi}{2\gamma}, x_0 + \frac{\pi}{2\gamma} \right]. \quad (4.48)$$

Ils sont invariants par rapport au renversement du sens du temps et la réflexion par rapport au point  $x_0$ . Autrement dit, ils sont  $PT$  symétriques sur le domaine de définition (4.48).

Remarquons que si l'on avait pris  $A_+$  et  $A_-$  anti-conjugué l'un de l'autre, on aurait trouvé pour le superpotentiel  $W(x, a)$  une expression similaire à (4.45) avec le remplacement de  $\tan \alpha \gamma (x - x_0)$  par  $-\cot \alpha \gamma (x - x_0)$ . On obtient la même chose si on remplace  $x_0$  par  $x_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$  et par conséquent, ce cas est parfaitement pris en considération par le premier choix puisque  $x_0$  est arbitraire.

En admettant, sans perte de généralité, que  $\frac{a}{\alpha} > 0$ ,  $V_+$  sera le partenaire de  $V_-$ . La fonction propre de l'état fondamental, correspondant à une énergie nulle, sera donnée par

$$\varphi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{i}{a}(x - x_0)\right) [\cos \gamma (x - x_0)]^{\frac{a}{\alpha}}, \quad (4.49)$$

où  $N_0$  est une constante de normalisation. Cette fonction satisfait bien la condition (4.6).

Le spectre, qui est infini dans ce cas, sera donné par

$$\begin{aligned} E_n^- &= \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 (a_{n+1}^2 - a_1^2) + \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) \\ &= \frac{\gamma^2}{\alpha} n(2a_1 + \alpha n) + \left(\frac{1}{(a_1 + \alpha n)^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) \text{ pour } n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.50)$$

#### 4.4.2 Cas où $\lambda$ est négatif

Sans perte de généralité, on pose

$$i\sqrt{\lambda} = \gamma, \quad (4.51)$$

avec  $\gamma$  un paramètre réel.

Dans ce cas, il est nécessaire de choisir  $A_{\pm}$  réels et non nuls pour assurer la réalité de  $W_R(x, a)$ . En posant

$$\frac{A_-}{A_+} = e^{2\gamma x_0}, \quad (4.52)$$

avec  $x_0$  réel, le superpotentiel et les potentiels partenaires seront donnés respectivement par

$$W(x, a) = -\frac{\gamma}{\alpha} a \tanh \gamma (x - x_0) + \frac{i}{a}, \quad (4.53)$$

$$V_-(x, a) = -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{a(a - \alpha)}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} - 2i\frac{\gamma}{\alpha} \tanh \gamma (x - x_0) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 a^2 - \frac{1}{a^2}, \quad (4.54)$$

et

$$V_+(x, a) = -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{a(a + \alpha)}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} - 2i\frac{\gamma}{\alpha} \tanh \gamma (x - x_0) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 a^2 - \frac{1}{a^2}. \quad (4.55)$$

Il est clair que les potentiels partenaires, dans ce cas, sont aussi  $PT$  symétriques par rapport à

$x_0$ . Le domaine de variation doit être choisi coïncidant avec l'axe réel tout entier,

$$x \in \mathbb{R}. \quad (4.56)$$

En admettant, sans perte de généralité, que  $\frac{a}{\alpha} < 0$ ,  $V_+$  sera le partenaire de  $V_-$ . La fonction propre de l'état fondamental, correspondant à l'énergie nulle, sera donnée par

$$\varphi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{i}{a}(x - x_0)\right) [\cosh \gamma(x - x_0)]^{\frac{a}{\alpha}}, \quad (4.57)$$

qui satisfait bien la condition (4.6).

Le spectre, qui est fini, sera donné par

$$\begin{aligned} E_n^- &= -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 (a_{n+1}^2 - a_1^2) + \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) \\ &= -\frac{\gamma^2}{\alpha} n (\alpha n - 2a_1) + \left(\frac{1}{(a_1 + \alpha n)^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, n_{\max}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $n_{\max}$  est le plus grand nombre entier qui est inférieur à  $-\frac{a}{\alpha}$ .

Remarquons que si l'on avait pris  $A_+$  et  $A_-$  de signes contraires, on aurait obtenu des potentiels non acceptables physiquement. En effet, dans ce cas on obtient les mêmes expressions pour le superpotentiel et les potentiels partenaires avec la simple permutation de  $\sinh \gamma(x - x_0)$  et  $\cosh \gamma(x - x_0)$ . Dans ce cas, le domaine de définition des potentiels partenaires devrait être pris comme le demi axe dont l'origine coïncide avec  $x_0$ . La fonction propre de l'état fondamental sera donc donnée par une expression similaire à (4.57) avec le remplacement de  $\cosh \gamma(x - x_0)$  par  $\sinh \gamma(x - x_0)$ . Une vérification simple montre que la condition (4.6) ne sera pas satisfaite pour  $x = 0$ .

## 4.5 Superpotentiel complexe avec $W_I(x, a) = g(x)$

Dans ce modèle, la partie imaginaire du superpotentiel sera prise comme une fonction de la variable  $x$ , mais ne dépendant pas explicitement du paramètre  $a$ . Ainsi,

$$W(x, a) = W_R(x, a) + ig(x). \quad (4.59)$$

Nous voulons obtenir l'expression de la fonction  $g(x)$  et sa relation avec  $W_R(x, a_1)$  pour qu'il y ait invariance de forme d'une part et pour que le modèle soit physiquement acceptable d'autre part. Les équations d'invariance de forme (4.8) et (4.9) se réduisent dans ce cas en

$$W_R^2(x, a_1) + \frac{dW_R(x, a_1)}{dx} = W_R^2(x, a_2) - \frac{dW_R(x, a_2)}{dx} + R(a_1), \quad (4.60)$$

et

$$2W_R(x, a_1)g(x) + \frac{dg(x, a_1)}{dx} = 2W_R(x, a_2)g(x) - \frac{dg(x)}{dx}. \quad (4.61)$$

En introduisant la nouvelle fonction  $h(x)$ , définie par

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx}, \quad (4.62)$$

l'équation (4.61) s'écrit

$$W_R(x, a_2) = W_R(x, a_1) + h(x). \quad (4.63)$$

En reportant (4.63) dans (4.60), cette dernière se réduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients variables, de la forme

$$\frac{dW_R(x, a_1)}{dx} - h(x)W_R(x, a_1) = \frac{R(a_1) + h^2(x) - h'(x)}{2}. \quad (4.64)$$

Ce type d'équations différentielles peut être résolu par la technique de variation de la constante [22]. La solution générale est donnée par

$$W_R(x, a_1) = \left[ C + \frac{1}{2} \int^x \frac{R(a_1) + h^2(y) - h'(y)}{g(y)} dy \right] g(x), \quad (4.65)$$

ou  $C$  est une constante d'intégration réelle. Pour que cette solution soit aussi solution de l'équation originale (4.60), elle doit satisfaire l'équation (4.63). On doit donc avoir

$$\frac{g(x)}{2} \left[ \int^x \frac{R(a_2) + h^2(y) - h'(y)}{g(y)} dy \right] = \frac{g(x)}{2} \left[ \int^x \frac{R(a_1) + h^2(y) - h'(y)}{g(y)} dy \right] + h(x), \quad (4.66)$$

qui se simplifie en

$$\frac{R(a_2) - R(a_1)}{2} g(x) \int^x \frac{dy}{g(y)} = h(x). \quad (4.67)$$

Sachant que  $g(x)$  et, par conséquent,  $h(x)$  sont des fonctions indépendantes du paramètre  $a$ , la fonction reste doit satisfaire

$$R(a_2) - R(a_1) = 2\lambda, \quad (4.68)$$

avec  $\lambda$  un paramètre constant indépendant de  $a$  (le facteur 2 est introduit par commodité). On admettra que  $\lambda \neq 0$ , car dans le cas contraire  $g(x)$  se réduira à une constante et on retrouvera le modèle de la section 4.3.

Si on pose

$$z(x) = \int^x \frac{dy}{g(y)}, \quad (4.69)$$

l'équation (4.67) donnera une équation linéaire du second ordre pour  $z(x)$ , de la forme

$$z''(x) + \lambda z(x) = 0, \quad (4.70)$$

qui nous rappelle l'équation (4.26). Nous avons vu que les solutions de cette équation sont des fonctions trigonométriques ou hyperboliques selon le signe de  $\lambda$ . Nous allons considérer les deux cas séparément.

#### 4.5.1 Cas où $\lambda$ est positif

Dans ce cas, et en se basant sur les calculs de la section précédente, la solution réelle la plus générale peut être mise sous la forme

$$z(x) = K \sin \gamma (x - x_0), \quad (4.71)$$

où  $K$  et  $x_0$  sont des paramètres réels arbitraires et

$$\gamma = \sqrt{\lambda}. \quad (4.72)$$

Les fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$  sont facilement obtenues sous la forme

$$g(x) = \frac{B}{\cos \gamma (x - x_0)}, \quad (4.73)$$

et

$$h(x) = \gamma \tan \gamma (x - x_0), \quad (4.74)$$

avec  $B = (\gamma K)^{-1}$ , une constant réelle arbitraire mais non nulle.

En reportant (4.73) et (4.74) dans (4.65) et effectuant l'intégration, on obtient

$$W_R(x, a_1) = \frac{R(a_1) - \gamma^2}{2\gamma} \tan \gamma (x - x_0) + \frac{A}{\cos \gamma (x - x_0)},$$

où  $A = BC$  est une constante réelle arbitraire.

On constate que  $W_R(x, a_1)$  dépend de  $a_1$  uniquement par l'intermédiaire de  $R(a_1)$ . Donc, sans perte de généralité, nous choisirons par comodité la fonction reste sous la forme

$$R(a_1) = 2\gamma a_1 + \gamma^2. \quad (4.75)$$

En tenant compte de (4.68), le choix (4.75) permettra de fixer la fonction  $f$  sous la forme

$$a_2 = f(a_1) = a_1 + \gamma. \quad (4.76)$$

Le superpotentiel sera donné par

$$W(x, a_1) = \frac{A + a_1 \sin \gamma (x - x_0)}{\cos \gamma (x - x_0)} + i \frac{B}{\cos \gamma (x - x_0)}, \quad (4.77)$$

et les potentiels partenaires par

$$\begin{aligned} V_-(x, a_1) = & \frac{a_1(a_1 - \gamma) + A(2a_1 - \gamma) \sin \gamma (x - x_0) + A^2 - B^2}{\cos^2 \gamma (x - x_0)} \\ & + iB \frac{(2a_1 - \gamma) \sin \gamma (x - x_0) + 2A}{\cos^2 \gamma (x - x_0)} - a_1^2, \end{aligned} \quad (4.78)$$

et

$$V_+(x, a_1) = \frac{a_1(a_1 + \gamma) + A(2a_1 + \gamma) \sin \gamma(x - x_0) + A^2 - B^2}{\cos^2 \gamma(x - x_0)} + iB \frac{(2a_1 + \gamma) \sin \gamma(x - x_0) + 2A}{\cos^2 \gamma(x - x_0)} - a_1^2. \quad (4.79)$$

Ces potentiels sont périodiques, de période  $2\pi$ . Cependant, nous devons les considérer seulement sur l'intervalle de la demi période défini par (4.48), de telle sorte qu'ils ne divergent éventuellement qu'aux extrémités de l'intervalle. En considérant  $V_+$  comme le partenaire de  $V_-$ , la fonction propre de l'état fondamental, d'énergie nulle, sera donnée par

$$\varphi_0(x) = \exp \left[ i \frac{B}{2\gamma} \ln \frac{1 - \sin \gamma(x - x_0)}{1 + \sin \gamma(x - x_0)} \right] \left( \frac{1 - \sin \gamma(x - x_0)}{1 + \sin \gamma(x - x_0)} \right)^{\frac{A}{2\gamma}} (\cos \gamma(x - x_0))^{\frac{a_1}{\gamma}}. \quad (4.80)$$

Une vérification simple montre que cette fonction satisfait la contrainte (4.6) sur l'intervalle (4.48) si  $a_1$  est strictement supérieur à  $A$ , c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm \frac{\pi}{2\gamma}} \varphi_0(x) = 0 \text{ pour } a_1 > A. \quad (4.81)$$

Compte tenu de (4.5), (4.75) et (4.76), le spectre énergétique, qui est infini dans ce cas, est alors donné par

$$E_n^- = \gamma n (2a_1 + \gamma n) \text{ pour } n = 0, 1, \dots. \quad (4.82)$$

Avant de clôturer cette section, remarquons que les paramètres  $A$  et  $B$  n'interviennent pas dans le spectre. Par conséquent, nous avons obtenu une famille de potentiels possédant le même spectre. On remarque aussi que ces potentiels sont complexes dans le cas général,  $PT$  symétriques pour  $A = 0$  et hermitiens pour  $B = 0$ . Bien sûr, même si  $B$  était supposé non nul au début des calculs, rien ne nous empêche à présent de le prendre égal à zéro. D'ailleurs, pour  $A = B = 0$ , on retrouve le potentiel de Pöschl-Teller trigonométrique et pour les autres cas de figures on obtient les généralisations, hermitienne,  $PT$  symétrique et complexe de ce potentiel.

### 4.5.2 Cas où $\lambda$ est négatif

Dans ce cas, la solution réelle la plus générale de l'équation (4.70) peut être mise sous la forme

$$z(x) = A_+ e^{\gamma x} + A_- e^{-\gamma x}, \quad (4.83)$$

où  $A_{\pm}$  sont des paramètres réels arbitraires et

$$\gamma = \sqrt{-\lambda}. \quad (4.84)$$

On en déduit les expressions de  $g(x)$  et  $h(x)$ , qui seront données par

$$g(x) = \frac{1}{\gamma (A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x})}, \quad (4.85)$$

et

$$h(x) = -\gamma \frac{A_+ e^{\gamma x} + A_- e^{-\gamma x}}{A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x}}. \quad (4.86)$$

En reportant (4.85) et (4.86) dans (4.65) et effectuant l'intégration, on obtient l'expression du superpotentiel sous la forme générale suivante :

$$W_R(x, a_1) = \frac{R(a_1) + \gamma^2}{2\gamma} \frac{A_+ e^{\gamma x} + A_- e^{-\gamma x}}{A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x}} + \frac{D}{A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x}}, \quad (4.87)$$

avec  $D = \gamma^{-1}C$ , une constante arbitraire.

Puisque  $W_R(x, a_1)$  dépend de  $a_1$  uniquement par l'intermédiaire de la fonction reste  $R(a_1)$ , alors, sans perte de généralité, cette dernière peut être choisie sous la forme

$$R(a_1) = 2\gamma a_1 - \gamma^2. \quad (4.88)$$

En tenant compte de (4.68), le choix (4.88) permettra de fixer la fonction  $f$  sous la forme

$$a_2 = f(a_1) = a_1 - \gamma. \quad (4.89)$$

Compte tenu de (4.5), (4.88) et (4.89), le spectre énergétique est donné par

$$E_n^- = \gamma n (2a_1 - \gamma n) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, n_{\max}. \quad (4.90)$$

Le superpotential sera donné sous sa forme la plus générale par l'expression suivante :

$$W(x, a_1) = \frac{D + a_1 (A_+ e^{\gamma x} + A_- e^{-\gamma x})}{A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x}} + i \frac{1}{\gamma (A_+ e^{\gamma x} - A_- e^{-\gamma x})}. \quad (4.91)$$

On peut distinguer trois cas possibles :

### Cas où un des paramètres $A_+$ ou $A_-$ est nul

Dans ce cas, le superpotential se réduit en

$$W(x, a_1) = \pm D_{\pm} e^{\mp \gamma x} \pm i B_{\pm} e^{\mp \gamma x} \pm a_1, \quad (4.92)$$

avec les notations,  $D_{\pm} = D/A_{\pm}$  et  $B_{\pm} = (\gamma A_{\pm})^{-1}$ .

Si  $D_{\pm} = 0$ , il est facile de se rendre compte que, quel que soit le signe du paramètre  $a_1$ , la contrainte (4.6) n'est pas satisfaite et par conséquent ce modèle n'est pas intéressant physiquement.

Pour  $D_{\pm} \neq 0$ , la situation est différente. Les potentiels partenaires sont donnés par

$$V_-(x, a_1) = (D_{\pm}^2 - B_{\pm}^2) e^{\mp 2\gamma x} + D_{\pm} (2a_1 + \gamma) e^{\mp \gamma x} + i B_{\pm} [2D_{\pm} e^{\mp 2\gamma x} + (2a_1 + \gamma) e^{\mp \gamma x}] + a_1^2, \quad (4.93)$$

et

$$V_+(x, a_1) = (D_{\pm}^2 - B_{\pm}^2) e^{\mp 2\gamma x} + D_{\pm} (2a_1 - \gamma) e^{\mp \gamma x} + i B_{\pm} [2D_{\pm} e^{\mp 2\gamma x} + (2a_1 - \gamma) e^{\mp \gamma x}] + a_1^2. \quad (4.94)$$

Si on considère  $V_+$  comme le partenaire de  $V_-$ , la fonction propre de l'état fondamental, d'énergie

nulle, sera donnée par

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= N_0 \exp\left(-\int^x dy W(y, a_1)\right) \\ &= N_0 \exp\left(\frac{D_{\pm}}{\gamma} e^{\mp\gamma x} + i\frac{B_{\pm}}{\gamma} e^{\mp\gamma x} \mp a_1 x\right).\end{aligned}$$

qui doit satisfaire la contrainte (4.6). Pour ce faire, il faut que  $a_1 > 0$ ,  $D_+ < 0$  et  $D_- > 0$ .

Pour  $B_{\pm} = 0$ , les potentiels partenaires donnés par (4.93) et (4.94) coïncident avec ceux du potentiel de Morse. Ainsi, ce modèle peut être vu comme la complexification du potentiel de Morse réel. Notons enfin que  $V_-(x, a_1)$  et  $V_+(x, a_1)$  ne sont pas  $PT$  symétriques.

### Cas où $A_+$ et $A_-$ sont différents de zéro et de signes différents

Dans ce cas, sans perte de généralité, on peut écrire le superpotentiel sous la forme

$$W(x, a_1) = \frac{a_1 \sinh \gamma (x - x_0) + A + iB}{\cosh \gamma (x - x_0)},$$

de sorte que les potentiels partenaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}V_-(a, x) &= \frac{-a_1 (a_1 + \gamma) + A (2a_1 + \gamma) \sinh \gamma (x - x_0) + A^2 - B^2}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} \\ &\quad + iB \frac{(2a_1 + \gamma) \sinh \gamma (x - x_0) + 2A}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} + a_1^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}V_+(a, x) &= \frac{-a_1 (a_1 - \gamma) + A (2a_1 - \gamma) \sinh \gamma (x - x_0) + A^2 - B^2}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} \\ &\quad + iB \frac{(2a_1 - \gamma) \sinh \gamma (x - x_0) + 2A}{\cosh^2 \gamma (x - x_0)} + a_1^2.\end{aligned}$$

Ces potentiels sont complexes dans le cas général. Ils sont  $PT$  symétriques si  $A = 0$  et hermitiens si  $B = 0$ . Dans le cas particulier où  $A = B = 0$ , on retrouve le potentiel de Pöschl-Teller hyperbolique.

En considérant  $V_+(a, x)$  comme le partenaire de  $V_-(a, x)$ , la fonction propre de l'état fon-

damental sera donnée par

$$\varphi_0(x) = N_0 \frac{\exp \left[ -\frac{2(A+iB)}{\gamma} \arctan e^{\gamma(x-x_0)} \right]}{\cosh^{\frac{a_1}{\gamma}} \gamma (x - x_0)},$$

qui satisfait la contrainte (4.6) si  $a_1 > 0$ .

Notons enfin que certains des potentiels obtenus dans ce chapitre sont discutés dans les travaux de Jia et collaborateurs [51][52][53][54] (Potential PT symétrique de : Scarf , Rosen-Morse ,Eckart, ...).

# Conclusion et perspectives

La mécanique quantique est la discipline qui permet de mieux comprendre l'univers de l'infiniment petit. Elle est fondée sur l'équation de Schrödinger dont la résolution est sine qua non. Plusieurs méthodes ont été élaborées afin d'atteindre cet objectif. Parmi elles, la méthode supersymétrique en mécanique quantique, dont le nom rappelle celui de la théorie de la supersymétrie, qui fut fondée dans le but de rendre compte des symétries qui existent entre particules élémentaires ; plus précisément entre bosons et fermions.

En s'inspirant de celle-ci et de la méthode de Schrödinger Infeld, on a pu construire une méthode qu'on appelle communément méthode supersymétrique ; très efficace dans la résolution de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle pour des potentiels jouissant de la propriété d'invariance de forme et dans le cadre d'une symétrie non brisée ; c'est-à-dire si la fonction d'onde déduite, suite à la factorisation de l'hamiltonien, est acceptable physiquement.

Malheureusement tous les potentiels ne sont pas invariants de forme, et il est parfois difficile d'éviter la brisure de symétrie, car on a affaire à l'équation de Riccati, où il n'existe aucune recette permettant son intégration de façon générale.

Sans ces deux difficultés majeures (invariance de forme et brisure de symétrie), la technique supersymétrique serait sans doute la plus géniale des méthodes permettant d'intégrer l'équation de Schrödinger stationnaire unidimensionnelle avec élégance. Il serait alors bon de penser un jour à trouver une alternative, en cas de non invariance de forme, ou de brisure de symétrie, sans recourir à d'autres méthodes.

Certains physiciens ont vu en cette méthode un moyen d'édifier une nouvelle mécanique quantique non hermitienne. L'invariance des hamiltoniens non hermitiens, ainsi que leurs fonctions propres sous la transformation  $PT$  garantissent la réalité de leurs spectres.

Nous avons exposé dans ce mémoire les principaux résultats de la  $PT$  symétrie en se basant sur les travaux de Bender et collaborateurs, où on a constaté également que la technique supersymétrique s'applique de la même manière que pour les hamiltoniens hermitiens malgré le fait que les opérateurs  $A$  et  $A^+$  ne soient pas adjoints l'un de l'autre. Puis, nous avons présenté notre manière d'introduire de nouveaux hamiltoniens complexes, non nécessairement  $PT$  symétriques et possédant un spectre réel, en les considérant comme partenaires d'hamiltoniens hermitiens. Plus précisément, nous avons pu associer à n'importe quel potentiel réel, une infinité de potentiels partenaires complexes ayant le même spectre, dits isospectraux.

Il est également possible de construire de nouveaux potentiels complexes ayant des spectres réels, en imposant aux potentiels partenaires construits à partir d'un superpotentiel, la contrainte d'invariance de forme. La réalité du spectre sera garantie en imposant au reste  $R(a_1)$  d'être réel par construction.

Après identification des parties réelles et imaginaires des deux potentiels partenaires de part et d'autre de l'égalité d'invariance de forme, nous obtenons deux équations différentielles couplées pour les parties réelle et imaginaire du superpotentiel générateur.

En résolvant systématiquement ces équations différentielles couplées pour des choix particuliers de la partie imaginaire, nous arrivons à construire des potentiels complexes intéressants, possédant forcément des spectres réels. Certains de ces potentiels sont déjà discutés dans la littérature alors que d'autres sont nouveaux, à notre connaissance.

La démarche suivie peut être généralisée à d'autres formes de superpotentiels. Nous pouvons par exemple imposer à la partie réelle d'être la somme de deux fonctions distinctes ou encore l'introduction de deux paramètres ou plus dans le superpotentiel et imposer l'invariance de forme par rapport à tous les paramètres, et ainsi de suite. Toutes ces idées constituent une partie de nos perspectives que nous sommes d'ores et déjà entraînés à investiguer.

# Annexe A

## Rappel sur les transformations en mécanique quantique :

### A.1 Transformation des vecteurs d'états et des observables

#### A.1.1 Transformation des vecteurs d'état

En mécanique quantique, on associe à toute transformation un opérateur agissant dans l'espace de Hilbert. L'état physique d'un système donné, caractérisé par le ket  $|\Psi\rangle$  qui appartient à l'espace abstrait des états  $\xi$ , peut être transformé par l'intermédiaire d'un opérateur  $K$  en un autre état physique équivalent, caractérisé par le ket  $|\tilde{\Psi}\rangle$  et appartenant au même espace :

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{K} |\tilde{\Psi}\rangle = K|\Psi\rangle. \quad (\text{A.1})$$

L'opérateur  $K$  est dit linéaire si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in \xi : K(\lambda_1|\Psi_1\rangle + \lambda_2|\Psi_2\rangle) = \lambda_1 K|\Psi_1\rangle + \lambda_2 K|\Psi_2\rangle, \quad (\text{A.2})$$

et il est dit antilinéaire si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in \xi : K(\lambda_1 |\Psi_1\rangle + \lambda_2 |\Psi_2\rangle) = \lambda_1^* K |\Psi_1\rangle + \lambda_2^* K |\Psi_2\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Puisqu'à tout ket de l'espace  $\xi$ , correspond un bras de l'espace dual  $\xi^*$ , alors à tout opérateur  $K$  transformant  $|\Psi\rangle$  en  $|\tilde{\Psi}\rangle$ , correspond aussi un opérateur, dénoté  $K^+$  et agissant sur l'espace dual  $\xi^*$ , qui transforme  $\langle\Psi|$  en  $\langle\tilde{\Psi}|$  :

$$\langle\Psi| \longrightarrow \langle\tilde{\Psi}| = \langle\Psi| K^+. \quad (\text{A.4})$$

L'opérateur  $K^+$  est appelé complexe conjugué de  $K$  ou adjoint de  $K$ . En considérant que l'état  $|\Psi\rangle$  est normé à l'unité, l'état transformé doit garder cette caractéristique :

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\tilde{\Psi}|\tilde{\Psi}\rangle = 1,$$

ce qui entraîne, en utilisant (A.1) et (A.4), l'unitarité de l'opérateur  $K$  :

$$K^+ K = K K^+ = 1. \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, l'opérateur adjoint coïncide avec l'opérateur inverse

$$K^+ = K^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

On dit que  $K$  est un opérateur hermitique ou auto-adjoint s'il est égal à son adjoint :

$$K = K^+. \quad (\text{A.7})$$

Un opérateur auto-adjoint possède des valeurs propres réelles et représente souvent une observable.

### A.1.2 Transformation des observables

Puisque l'opérateur  $K$  transforme un vecteur d'état physique  $|\Psi\rangle$  en un autre vecteur d'état physique  $|\tilde{\Psi}\rangle$ , les observables associées doivent aussi être transformées de telle sorte que leurs

valeurs moyennes par rapport aux deux vecteurs d'état soit égales. Autrement dit, si  $A$  est une observable du système physique ayant pour vecteur d'état le ket  $|\Psi\rangle$ , il lui correspond une autre observable  $\tilde{A}$  dans le système équivalent ayant pour vecteur d'état le ket  $|\tilde{\Psi}\rangle$  :

$$A \xrightarrow{K} \tilde{A}. \quad (\text{A.8})$$

$\tilde{A}$  est déterminé à partir de la condition

$$\langle \tilde{\Psi} | \tilde{A} | \tilde{\Psi} \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle, \quad (\text{A.9})$$

qui donne en utilisant (A.1), (A.4) et (A.5)

$$\tilde{A} = KAK^+. \quad (\text{A.10})$$

Une observable  $A$  est invariante sous la transformation  $K$  si elle reste inchangée suite à cette transformation. Ainsi :

$$KAK^{-1} = A, \quad (\text{A.11})$$

et par conséquent  $A$  commute avec  $K$  :

$$[K, A] = 0. \quad (\text{A.12})$$

On dit souvent qu'un système physique possède une symétrie s'il existe une transformation qui laisse inchangé son vecteur d'état. Si  $K$  est un opérateur de symétrie pour un système physique, alors quel que soit l'état physique  $|\Psi\rangle$ , on a

$$K|\Psi\rangle = c|\Psi\rangle, \quad (\text{A.13})$$

ou  $c$  est une constante de phase arbitraire. La relation (A.13) signifie que les vecteurs invariants sous une transformations sont les vecteurs propres de celle-ci.

En physique, il existe plusieurs types de transformations dont les transformations de l'espace comme, la translation, la rotation et la parité. D'autres transformations font intervenir le temps

comme la translation temporelle ou le renversement du sens du temps.

Nous allons rappeler brièvement dans ce qui suit les propriétés essentielles de la parité et du renversement du sens du temps dont les résultats sont largement utilisés dans les travaux de ce mémoire.

## A.2 La parité $P$

L'opération de parité, souvent dénotée par  $P$ , est l'opération de réflexion par rapport à un point représentant en général l'origine des coordonnées. Elle transforme respectivement le temps et les vecteurs position et impulsion de la manière suivante :

$$PtP^{-1} = t, \quad (\text{A.14})$$

$$P\vec{r}P^{-1} = -\vec{r}, \quad (\text{A.15})$$

et

$$P\vec{p}P^{-1} = -\vec{p} = \frac{-\hbar}{i}\vec{\nabla}. \quad (\text{A.16})$$

L'action de l'opérateur  $P$  sur la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \Psi(t) \rangle$  est donnée par

$$P\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(-\vec{r}, t). \quad (\text{A.17})$$

Ainsi, on peut mettre par définition

$$P|\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle, \quad (\text{A.18})$$

ce qui donne

$$P^2|\vec{r}\rangle = P(P|\vec{r}\rangle) = |\vec{r}\rangle, \quad (\text{A.19})$$

ou encore

$$P^2 = 1. \quad (\text{A.20})$$

Il en résulte aussi que

$$P = P^{-1}. \quad (\text{A.21})$$

De ce qui précède, on conclut que  $P$  est un opérateur linéaire :

$$P [c_1 \Psi_1 (\vec{r}, t) + c_2 \Psi_2 (\vec{r}, t)] = c_1 P \Psi_1 (\vec{r}, t) + c_2 P \Psi_2 (\vec{r}, t), \quad (\text{A.22})$$

pour  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

L'action de  $P$  sur le bras  $\langle \vec{r} |$  est donnée par

$$\langle \vec{r} | P = \langle -\vec{r} |, \quad (\text{A.23})$$

et en prenant l'adjoint des deux membres, tout en tenant en compte (A.21), on obtient :

$$P = P^+ = P^{-1}. \quad (\text{A.24})$$

Si la fonction  $\Psi (\vec{r}, t)$  est paire, on voit bien, d'après (A.17), que

$$P \Psi (\vec{r}, t) = \Psi (\vec{r}, t), \quad (\text{A.25})$$

et si elle est impaire, on obtient

$$P \Psi (\vec{r}, t) = -\Psi (\vec{r}, t). \quad (\text{A.26})$$

Ainsi, les fonctions d'onde paires et impaires sont fonctions propres l'opérateur  $P$ .

### A.3 Renversement du sens du temps $T$

La transformation de renversement du sens du temps est souvent dénotée par  $T$ . Ses actions sur le temps et les vecteurs position et impulsion sont données par

$$TtT^{-1} = -t, \quad (\text{A.27})$$

$$T\vec{r}T^{-1} = \vec{r}, \quad (\text{A.28})$$

et

$$T\vec{p}T^{-1} = -\vec{p}. \quad (\text{A.29})$$

En suivant le même raisonnement utilisé pour l'opérateur  $P$ , on montre que

$$T = T^+ = T^{-1}. \quad (\text{A.30})$$

Si l'hamiltonien du système étudié ne dépend pas explicitement du temps, les fonctions d'ondes correspondantes peuvent être mises sous la forme

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{-i}{\hbar}Et} \varphi(\vec{r}), \quad (\text{A.31})$$

de sorte que

$$T\Psi(\vec{r}, t) = Te^{\frac{-i}{\hbar}Et} \varphi(\vec{r}) = e^{\frac{i}{\hbar}Et} \varphi(\vec{r}). \quad (\text{A.32})$$

Par conséquent, le renversement du sens du temps sur la fonction d'onde est équivalent à la conjugaison complexe :

$$T\Psi(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t). \quad (\text{A.33})$$

On doit donc ajouter la propriété

$$TiT^{-1} = -i. \quad (\text{A.34})$$

De façon générale, pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , on peut écrire

$$T [\lambda_1 \Psi_1(\vec{r}, t) + \lambda_2 \Psi_2(\vec{r}, t)] = \lambda_1^* T \Psi_1(\vec{r}, t) + \lambda_2^* T \Psi_2(\vec{r}, t) \quad (\text{A.35})$$

$$= \lambda_1^* \Psi_1^*(\vec{r}, t) + \lambda_2^* \Psi_2^*(\vec{r}, t), \quad (\text{A.36})$$

ce qui signifie que  $T$  est un opérateur antilinéaire.

Pour terminer, signalons que si  $\Psi(\vec{r}, t)$  est une fonction réelle ou imaginaire pure, on aura

$$T \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t), \quad (\text{A.37})$$

dans le premier cas et

$$T \Psi(\vec{r}, t) = -\Psi(\vec{r}, t), \quad (\text{A.38})$$

dans le second. Ceci veut dire que les fonctions d'onde réelles ou imaginaires pures sont des fonctions propre de  $T$  et par conséquent invariantes par cette transformation.

## A.4 La transformation $PT$

C'est la composition des deux transformations précédentes, c'est-à-dire l'action simultanée du renversement du sens du temps et de la parité. L'ordre des opérations n'est pas important du fait que les deux opérateurs  $P$  et  $T$  commutent. En combinant les propriétés précédentes, on peut écrire :

$$(PT) t (PT)^+ = -t, \quad (\text{A.39})$$

$$(PT) \vec{r} (PT)^+ = -\vec{r}, \quad (\text{A.40})$$

et

$$(PT) \vec{p} (PT)^+ = \vec{p}. \quad (\text{A.41})$$

En particulier,  $PT$  est un opérateur antilinéaire, puisque c'est le produit d'un opérateur linéaire et d'un opérateur antilinéaire. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}
\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in \xi : (PT) [\lambda_1 |\Psi_1\rangle + \lambda_2 |\Psi_2\rangle] &= P(T[\lambda_1 |\Psi_1\rangle + \lambda_2 |\Psi_2\rangle]) \\
&= P(\lambda_1^* T |\Psi_1\rangle + \lambda_2^* T |\Psi_2\rangle) \\
&= \lambda_1^* (PT) |\Psi_1\rangle + \lambda_2^* (PT) |\Psi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

$PT$  est un opérateur hermitique puisque  $P$  et  $T$  le sont et commutent entre eux :

$$(PT)^+ = T^+ P^+ = TP = PT. \tag{A.43}$$

Comme  $P$  est un opérateur unitaire et  $T$  est antiunitaire, il en découle que  $PT$  est un opérateur unitaire :

$$(PT)(PT)^+ = PT T^+ P^+ = 1. \tag{A.44}$$

De même :

$$(PT)^+ (PT) = T^+ P^+ PT = 1. \tag{A.45}$$

De (A.44) et (A.45) :

$$(PT)(PT)^+ = (PT)^+ (PT) = 1 \tag{A.46}$$

Notons enfin que l'action de  $PT$  sur les fonctions d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$PT\Psi(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{-r}, -t). \tag{A.47}$$

On suggère la référence [55] pour plus de détails sur les symétries en mécanique quantique.

# Bibliographie

- [1] Y. A. Gel'fand, E. P. Likhtman, Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance, JETP Lett. **13** (1971) 323.
- [2] P. Ramond, Dual theory for free fermions, Phys. Rev. D **3** (1971) 2415.
- [3] A. Neveu and J. Schwarz, Factorizable dual model of pions, Nucl. Phys. B **31** (1971) 86.
- [4] J. Wess and B. Zumino, Supergauge transformations in four dimensions, Nucl. Phys. B **70** (1974) 39; Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics, B **78** (1974) 1.
- [5] E. Witten, Dynamical breaking of symmetry, Nucl. Phys. B **188** (1981) 513.
- [6] F. Cooper, B. Freedman, Aspects of symmetric quantum mechanics, Ann. Phys (NY) **146** (1983) 262.
- [7] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP. lett.**38** (1983) 356.
- [8] D. Lancaster, Supersymmetry breakdown in supersymmetric quantum mechanics, Nuovo Cimento A **79** (1984) 28.
- [9] L. Gendenshtein, I.V. Krive, Supersymmetry in quantum mechanics, Sov. Phys. Usp. **28** (1985) 654.
- [10] G. Stedman, Simple supersymmetry : factorisation methode in quantum mechanics, Euro. Jour. Phys. **6** (1985) 163.
- [11] C. V. Sukmar, Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a hamiltonian hierarchy, J. Phys. A **18** (1985) L57.
- [12] R. Hamaker and A. R. P. Rau, Supersymmetry in quantum mechanics, Am. Jour. Phys. **54** (1986) 928.

- [13] R. Dutt, A.Khare and U. Sukatme, Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials, *Am. Jour. Phys.* **56** (1988) 163.
- [14] A. Lahiri, P. Roy and B. Bagchi, Supersymmetry in quantum mechanics, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **5** (1990) 1383.
- [15] O. L de Lange and R. E. Raab, *Operator methods in quantum mechanics*, Oxford University Press (1991).
- [16] F. Cooper, A.Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and quantum mechanics*, *Phy. Rep.* **251** (1995) 267 ; *Supersymmetry in quantum mechanics*, World Scientific Publishings (2001).
- [17] E. Schrödinger, Further studies on solving eigenvalue problems by factorisation, *Proc. Roy. Irish. Acad.* **46 A** (1941)183.
- [18] L. Infeld and T. E. Hull, The factirisation method, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
- [19] C. M Bender, S. Boettcher, Real spectra in non-hermitan hamiltonians having PT symmetry, *Phy. Rev. Lett.* **80** (1998) 5243.
- [20] Y. Ayant and E. Belorizky, *Cours de mécanique quantique*, Edition Dunod (1980).
- [21] L. Landau and E. Lifchitz, *Mecanique quantique*, Edition Mir (1967).
- [22] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral (tome II)*, Edition Mir (1987).
- [23] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [24] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics, Volume 1, Chap. VI*, Wiley Classics Library (1989).
- [25] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **202** (1982) 253.
- [26] B. K. Bagchi, *Supesymmetry in quantum and classical mechanics*, Chapman & Hall/CRC (2001).
- [27] G. Junker, *Supersymmetry in quantum and statistical physics*, Springer-Verlag (1996).
- [28] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and product*, Academic Press Elseiver (2007).
- [29] G. A. Mezincescu, Some properties of eigenvalues and eigenfunctions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant, *J. Phys. A : Math. Gen.* **33** (2000) 4911.

- [30] C. M. Bender and Q. Wang, Comment on recent paper by Mezincesu, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** (2001) 3325.
- [31] C. M. Bender, Droje C. Brody and H. F. Jones, Complex extension of quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 270401.
- [32] C. M. Bender, Droje C. Brody and H. F. Jones, Must hamiltonian be hermitian ?, *Am. J. Phys.* **71** (2003) 1095.
- [33] A. Zafar, P, T, PT and CPT invariance of hermitian hamiltonians, *Phys. Lett. A* **310** (2003) 139.
- [34] C. M. Bender and H. F. Jones, Semiclassical calculation of the C operator in PT symmetric quantum mechanics, *Phys. Lett. A* **328** (2004) 2.
- [35] Q. Wang, Calculation of C operator on PT symmetric quantum mechanics, *Proceedings of institute of mathematics of NAS of Ukrain*, Vol. 50, Part 2 (2004) 986.
- [36] N. Zaghrou, Supersymétrie et PT symétrie en mécanique quantique, mémoire de magister, Université de Jijel (2007).
- [37] A. Zafar, Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex PT -invariant potential, *Phys. Lett. A* **282** (2001) 343.
- [38] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 205.
- [39] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry II : A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 2814.
- [40] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry III : Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 3944.
- [41] A. Mostafazadeh, Pseudo-Supersymmetric Quantum Mechanics and Isospectral Pseudo-Hermitian Hamiltonians, *Nucl. Phys. B* **640** (2002) 419.
- [42] A. Mostafazadeh, On the Pseudo-Hermiticity of a Class of PT-Symmetric Hamiltonians in One Dimension, *Mod. Phys. Lett. A* **17** (2002) 1973.
- [43] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT-Symmetries, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 974.

- [44] A. Mostafazadeh, Exact PT-Symmetry Is Equivalent to Hermiticity, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** (2003) 7081.
- [45] A. Mostafazadeh and A. Batal, Physical Aspects of Pseudo-Hermitian and PT-Symmetric Quantum Mechanics, *J. Phys. A : Math. Gen.* **37** (2004) 11645.
- [46] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian Description of PT-Symmetric Systems Defined on a Complex Contour, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** (2005) 3213.
- [47] V. P. Yermakov, Second-order differential equations. Integrability conditions in closed form [in Russian], *Universitetskie Izvestiya, Kiev*, No. 9 (1880).
- [48] E. Pinney, *Proc. Am. Math. Soc.* **1** (1950) 681.
- [49] Pedro Basilio Espinoza Padilla, Ermakov-Lewis dynamic invariants with some applications, Master Thesis, Instituto de FISICA Universidad de Guanajuato, 31 January 2000.
- [50] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, Chapman & Hall/CRC (2003).
- [51] C. S. Jia, X. L. Zeng and L. T. Sun, PT symmetry and shape invariance for a potential well with a barrier, *Phys. Lett. A* **294** (2002) 185.
- [52] C. S. Jia, P. Y. Lin and L. T. Sun, A new pseudo-Hermitian complex potential with PT symmetry, *Phys. Lett. A* **298** (2002) 78.
- [53] C. S. Jia, S. C. Li, Y. Li and L. T. Sun, Pseudo-Hermitian potential models with PT symmetry, *Phys. Lett. A* **300** (2002) 115.
- [54] C. S. Jia, Y. Li, Y. Sun, J. Y. Liu and L. T. Sun, Bound states of the five-parameter exponential-type potential model, *Phys. Lett. A* **311** (2003) 115.
- [55] W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics. Symmetries*, Springer-Verlag, New York (2001).