REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DE SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE
SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME

Energie quasilocale en gravitation topologiquement massive à trois dimensions

Par

Bilel Bounekdja

SOUTENU LE : 23 /09/ 2009

Devant le jury :

President :	N. Mebarki	Prof. UNIV. Mentouri Constantine
Rapporteur :	K. Ait Moussa	Prof. UNIV. Mentouri Constantine
Examinateurs :	H. Aissaoui	M.C. UNIV. Mentouri Constantine
	A. Boudine	M.C. C.U. Oum El Bouaghi

DEDICACE

A mes parents qui m'ont prodigué tout le long de ma vie, tendresse, amour, compréhension et soutien, et dont les sacrifices consentis m'ont permis d'atteindre cet objectif.

A tous ceux, et celles qui ont contribué à ma formation, à mon éducation, à mon épanouissement je tiens a marquer toute ma gratitude.

A tous et toutes j'implore le créateur de les guider sur le droit chemin, qu'Il les mènent à réussite ici et dans l'au-delà, qu'il soit loué, le tout puissant.

BILEL

Remerciements

بسم الله الرحمان الرحيم

Au nom de DIEU, le Clément, le Miséricordieux

Tout d'abord, je remercie ALLAH , l'Omnipotent, L'Omniscient qui m'a permis de m'abreuver de la fontaine du savoir et que par sa grâce je suis parvenu à concrétiser un vœu , voire une étape sur le sentier de la science qui hélas s'avère intarissable !!

Comme il m'est impératif d'adresser mes vifs remerciements à Monsieur Karim Ait Moussa : Professeur à l'université Mentouri de constantine qui m'a, conseillée et avisé dans le domaine qui a toujours attiré mon attention et intérêt (la Relativité Générale) et particulièrement l'énergie Quasilocale en gravitation topologiquement massive à trois dimensions.

Je le remercie derechef pour m'avoir encadré .comme je tiens occasionnellement à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Nourredine MEBARKI Professeur à l'université Mentouri de Constantine qui m'a fait l'auguste honneur de présider le jury de mon mémoire.

Néanmoins j'adresse ma profonde reconnaissance à Messieurs H .AISSAOUI Maître de conférence à l'université Mentouri de Constantine et A BOUDINE Maître de conférence au centre Universitaire d'Oum el Bouaghi désignés comme examinateurs du jury.

Je rends un vibrant hommage à ceux et à celles qui de près ou de loin m'ont soutenus moralement et je cite particulièrement Ma Chère Maman, mes frères, mes sœurs, ma Femme parents et amis.

Table des matières

Introduction

Un des problèmes qui se posent en relativité générale est la définition de l'énergie du champ gravitationnel lui même. On sait bien définir un tenseur d'énergie impulsion d'un champ couplé à la gravitation, qui vérifie une équation de conservation covariante [1, 2]. Cette procédure ne peut pas s'appliquer au champ gravitationnel lui même. L. Landau aproposé un pseudo-tenseur d'énergie impulsion [3], mais qui n'est pas très satisfaisant parce qu'il est trop arbitraire et qu'il n'est pas covariant. On peut comprendre cette difficulté à partir du principe d'équivalence : on peut toujours annuler l'effet du champ gravitationnel par un choix de système de coordonnées ou référentiel. Si on annule le champ gravitationnel on élimine aussi son énergie. On dit que l'énergie du champ gravitationnel n'est pas localisée.

Une des premières définitions a été proposée par Arnowitt, Deser et Misner [4], qui ont défini un formalisme hamiltonien pour la relativité générale et ont proposé une définition de l'énergie du champ gravitationnel. Cependant cette définition s'applique uniquement pour des métriques asymptotiquement minkowskiennes. Or beaucoup de solutions de théories couplées à la gravitation ou de théories généralisant la relativité restreinte ne sont pas asymptotiquement minkowskiennes. L'exemple le plus simple est la métrique de de Sitter [5], solution des équations d'Einstein avec constante cosmologique. Ainsi beaucoup de travaux ont été consacrés à la définition d'une énergie localisée, définie comme le flux d'une quantité à travers une surface fermée à deux dimensions [6], ou comme la valeur sur couche (lorsque les équations du champ sont vérifiées) de l'hamiltonien [7].

Le but de ce mémoire est d'adapter la définition de l'énergie quasilocale comme valeur de l'hamiltonien sur couche à la gravitation topologiquement massive à trois dimensions (GTM en abrégé). Cette théorie, qui est une généralisation de la gravitation à trois dimensions, qui est non dynamique (pas de degré de liberté de propagation), est définie par l'ajout d'un terme, dit topologique, à l'actions de la gravitation [8, 9]. Il existe déjà des travaux consacrés à la recherche de l'hamiltonien de GTM [10, 11], mais même les plus récents ne tiennent jamais compte des termes de surface, qui ont une grande importance dans la définition de l'énergie quasilocale.

Nous nous proposons dans ce mémoire de calculer ces termes de surface pour la GTM, afin d'évaluer la contribution du terme de Chern-Simmons à l'énergie quasilocale, celui du terme d'Einstein étant déjà connu [7]. Il est organisé comme suit. Dans le premier chapitre nous rappelons brièvement quelques définitions à propos de la gravitation et de la gravitation topologiquement massive. Dans le deuxième chapitre nous exposons le formalisme hamiltonien de la relativité générale afin de le généraliser à la GTM, et définissons précisément l'énergie quasilocale. Le troisième chapitre qui contient notre contribution, est consacré à la determination des termes de surface dans l'hamiltonien de la GTM, afin de les utiliser pour définir une énergie quasilocale. Nous appliquons ensuite nos résultats à une métrique trou noir de la GTM dite métrique ACL [12]. Nous terminerons ce mémoire par une conclusion où nous analysons nos résultats.

Chapitre 1

Gravitation topologiquement massive à trois dimensions

Le but de ce premier chapitre est de présenter succintement la gravitation pure [1, 2, 3] (que nous appellerons de manière abrégée RG) et la gravitation topologiquement massive à 3 trois dimensions (notée GTM) [8, 9]. Nous parlerons de l'action, des équations du mouvement de chaque théorie, et d'une solution trou noir stationnaire à symétrie axiale de GTM, à laquelle nous appliquerons nos résultats.

1.1 Gravitation pure (RG)

1.1.1 Action et équations du mouvement

Les équations de RG dérivent de l'action :

$$S = \frac{1}{\kappa}\int_V dx^3 \sqrt{|g|}R \tag{1.1}$$

où $\kappa \equiv 16\pi G$, g est le détérminant de la metrique $g_{\mu\nu}$ qui définit l'élément d'intervalle d'espace-temps à 3 dimensions :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} ds^\mu ds^\nu \;\; ; \;\; (\mu, \nu = 0, 1, 2) \tag{1.2}$$

et R est le scalaire de courbure $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. $g^{\mu\nu}$ est la métrique inverse($g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_{\ \rho}$) et $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{1.3}$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sont les connexions définies à partir de la métrique par

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.4}$$

Dans l'action (1.1), V est un volume de l'éspace-temps et ∂V est sa limite (hypersurface fermée).

En imposant $\delta S = 0$ pour des variations de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$(ou $\delta g^{\mu\nu}$) arbitraires dans V mais nulles sur ∂V $(\delta g_{\mu\nu}|_{\partial V} = \delta g^{\mu\nu}|_{\partial V} = 0)$, on obtient les équations d'Einstein dans le vide :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{1.5}$$

La contraction de ces équations avec $g^{\mu\nu}$ donne :

$$R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.6}$$

D'autre part, le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est défini à partir du tenseur de Riemann, par $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ où

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \tag{1.7}$$

est le tenseur de Riemann. Ce tenseur exprime la courbure intrinsèque de l'espace-temps. Or on sait qu'à trois dimensions, le tenseur de Riemann peut s'exprimer en fonction du tenseur de Ricci par :

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} \equiv g_{\lambda\alpha} R^\alpha_{\mu\rho\nu} = g_{\lambda\mu} R_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} R_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) R \tag{1.8}$$

Donc, à trois dimensions, les équations d'Einstein (1.6) impliquent $R_{\lambda\mu\rho\nu} = 0$, c'est-à-dire que l'espace-temps n'a pas de courbure intrinsèque. Cela se traduit d'une autre façon, dans l'approximation linéaire, où l'on trouve que la" gravitation " à trois dimensions n'a pas de degré de liberté de propagation. Il ne peut donc pas y avoir de graviton dans la gravitation pure à trois dimensions. C'est dans ce sens qu'on dit que la gravitation pure à trois dimensions est triviale. Cet aspect est la principale différence par rapport à la gravitation topologiquement massive.

1.1.2 Terme de surface pour des conditions aux limites de Dirichlet

Pour bien montrer l'importance des termes de surface et le rôle qu'ils peuvent jouer [15, 20], examinons avec plus de détail la variation de l'action (1.1) :

$$\delta S = \frac{1}{\kappa}\left[\int_V dx^3\delta\left(\sqrt{|g|}\right)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \int_V dx^3\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} + \int_V dx^3\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right] \tag{1.9}$$

avec $\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = 0$ sur ∂V. Les deux premières intégrales dans (1.9) donnent les équations d'Einstein et la troisième est un terme de surface. Pour voir cela, on se place dans un repère localement inertiel, en un point donné, et où $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$ métrique de Minkowski) et $\partial g_{\mu\nu} = 0$,ce qui implique que $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$, mais $\partial^2 g_{\mu\nu} \neq 0$. D'après (1.3), on a dans ce repère :

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} \tag{1.10}$$

Dans un referentiel quelconque, cette relation devient

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - D_\mu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}) \tag{1.11}$$

où $D_\lambda V^\rho \equiv \partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\alpha} V^\alpha$ définit la dérivée covariante compatible avec la métrique $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire $D_\alpha g_{\mu\nu} = D_\alpha g^{\mu\nu} = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} D_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu} D_\mu \delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} \\ &= D_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - D_\mu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}) \\ &= D_\mu(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

On peut donc l'écrire $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = D_\mu V^\mu$ avec

$$V^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} \tag{1.13}$$

La relation (1.9) donne :

$$\delta S = \frac{1}{\kappa}\left[\int_V dx^3 \sqrt{g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} + \int_V dx^3 \sqrt{|g|} D_\mu V^\mu\right] \tag{1.14}$$

La première partie donne les équations d'Einstein et la deuxième partie peut se transformer en intégrale de surface :

$$\frac{1}{\kappa}\int_v dx^3 \sqrt{|g|} D_\mu V^\mu = \frac{1}{\kappa}\oint_{\partial V} V^\mu d\Sigma_\mu \tag{1.15}$$

où $d\Sigma_\mu$ est le 4-vecteur élément de surface sur ∂V. Comme $\delta g_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu} = 0$ sur ∂V, et d'après (1.4), on a sur ∂V

$$V^\mu = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\left[\delta(\partial_\alpha g_{\nu\beta}) - \delta(\partial_\nu g_{\alpha\beta})\right] \tag{1.16}$$

Donc :

$$\frac{1}{2\kappa}\int_V dx^3 \sqrt{|g|} D_\mu V^\mu = \frac{1}{2\kappa}\oint_{\partial V} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}(\delta(\partial_\alpha g_{\nu\beta}) - \delta(\partial_\nu g_{\alpha\beta}))d\Sigma_\mu. \tag{1.17}$$

Or avec des conditions aux limites de Dirichlet, seul $\delta g^{\mu\nu} = 0$ et $\delta(\partial_\alpha g_{\nu\beta}) \neq 0$,et ce terme n'est en général pas nul. La solution de ce problème existe et est connue en RG, car on peut montrer que (1.17) est lié à la variation de la trace ${K_i}^i$ de la courbure extrinsèque K_{ij} de l'hypersurface ∂V dans l'éspace-temps (pour les définitions relatives à la courbure extrinsèque,voir Ch.2). Donc :

$$\frac{1}{\kappa}\oint_{\partial V} V^\mu d\Sigma_\mu = -\frac{2}{\kappa}\delta\left[\oint_{\partial V} K\sqrt{|h|}d^2x\right] \tag{1.18}$$

où h est le déterminant de la metrique h_{ij} qui est la projection de $g_{\mu\nu}$ sur ∂V (voir Ch.2), et d^2x est l'élément de volume sur ∂V. En résumé, on peut prendre comme action,

$$S = \frac{1}{\kappa}\left[\int_V d^3x\sqrt{|g|}R + 2\oint_{\partial V} K\sqrt{|h|}d^2x\right] \tag{1.19}$$

Remarquons que le terme ajouté ne change pas les équations du mouvement (1.5) ou (1.6), mais donne un principe variationnel cohérent ($\delta S = 0$ pour $\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = 0$ sur ∂V). Il ne joue pas de rôle ici, mais joue un rôle dans la valeur de l'hamiltonien comme on le verra au chapitre 2.

1.2 Gravitation topologiquement massive à trois dimensions (GTM)

1.2.1 Action et équations du mouvement

On peut définir la GTM par l'action dont dérivent les équations du mouvement [8, 9] :

$$S = \frac{1}{\kappa}\int_V d^3x(\sqrt{|g|}R + \mathcal{L}_{cs}) \tag{1.20}$$

où

$$\mathcal{L}_{cs} = \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\rho}(\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\rho\lambda} + \frac{2}{3}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\rho\lambda}) \tag{1.21}$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho}$ étant le symbole complètement antisymetrique à trois dimensions (avec $\epsilon^{012} = +1$), $\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$ les connexions définies en (1.4), et m est une constante de couplage. $\mathcal{L}_{cs}$ est le lagrangien de Chern-Simmons, qui est appelé terme topologique car il ne contient pas explicitement la métrique. La variation de l'action (1.20) avec $\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = 0$ sur ∂V donne les équations de la GTM :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{m} C_{\mu\nu} = 0 \tag{1.22}$$

où $C_{\mu\nu}$ est le tenseur de Cotton défini par :

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\mu}^{\ \alpha\beta} D_{\alpha} R_{\beta\nu} + \epsilon_{\nu}^{\ \alpha\beta} D_{\alpha} R_{\beta\mu}) \tag{1.23}$$

avec $\epsilon_{\mu}^{\ \alpha\beta} \equiv g_{\mu\rho} \epsilon^{\rho\alpha\beta}$. L'étude des équations (1.22) dans l'approximation linéaire montre que la GTM décrit la propagation d'un graviton de masse m, de spin 2, à 2 degrés de liberté [9]. C'est cette propriété qui fait l'intérêt de cette théorie.

De même que pour l'action (1.1), la variation de (1.20) avec des conditions aux limites de Dirichlet ($\delta g_{\mu\nu} = 0$ sur ∂V) donne un terme de surface non nul, qui est :

$$\oint_{\partial V} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} \delta \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} d\Sigma_{\mu} \tag{1.24}$$

(Voir annexe 1 pour la dérivation des équations (1.22) et le terme de surface qui reste). Ce terme de surface n'apparait pas dans la litterature consacrée à la GTM, bien qu'il joue un rôle. Mais nous n'avons pas réussi à la mettre sous la forme de la variation d'une quantité donné comme dans le cas de RG (voir (1.18)).

Nous utiliserons le lagrangien (1.20) dans le chapitre 3 pour déterminer les termes de surface dans la décomposition 2+1 (Ch 2). Nous appliquerons alors ces termes de surface à la solution trou noir stationnaire à symétrie axiale que nous décrivons dans la section suivante.

1.2.2 Solution trou noir stationnaire à symétrie axiale :

Une solution des équations de la GTM (1.22) est donnée par la métrique du trou noir stationnaire à symétrie axiale (métrique ACL [12]) qui s'écrit en coordonnées

$(x^0, x^1, x^3) \equiv (t,\rho,\varphi)$

$$ds^2 = 3dt^2 - 2(2\rho + 3\omega)dtd\varphi + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} + r^2 d\varphi^2 \tag{1.25}$$

où $r^2 \equiv \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3}$, ρ étant la coordonnée radiale et φ la coordonnée angulaire. Elle peut se mettre sous la forme ADM(Arnowit - Deser - Misner [4]) que nous définirons au Ch 2 :

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2}dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} + r^2\left(d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2}dt\right)^2 \tag{1.26}$$

Cette solution, qui dépend de deux paramètre réels ρ_0 et ω, décrit de façon générale, un trou noir dont l'horizon externe est situé en $\rho = \rho_0$.Nous aurons besoin de la métrique dans le cas $\omega = \rho_0 = 0$, qui est :

$$ds_0^2 = -dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2\left(d\varphi - \frac{2}{\rho}dt\right)^2 \tag{1.27}$$

Cette métrique, qui est la forme asymptotique ($\rho \to +\infty$) de (1.26), n'a pas d'horizon.

On peut la considérer comme étant, la solution de plus "basse énérgie" ou niveau fondamental, dans l'ensemble des solutios (1.26), dépendant des deux paramètre ρ_0 et ω. Plus particulièrement, nous la définirons comme métrique de fond (background metric) au Ch3.

Chapitre 2

Formalisme hamiltonien de RG

La définition d'un hamiltonien pour la relativité générale nécessite la définition préalable d'un "temps", c'est-à-dire d'une coordonnée de genre temps, par rapport à laquelle on définit les moments conjugués.

Il faut donc séparer les coordonnées spaciales de la coordonnée temps. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthode de feuilletage (foliation en anglais) de l'éspace-temps. Ensuite on l'utilise pour définir l'hamiltonien de la relativité générale, puis l'énergie quasi-locale.

Nous donnons les définitions dans un espace-temps à 4 dimensions, l'application à l'espace-temps à 3 dimensions de la GTM se fera directement au chapitre 3.

2.1 Feuilletage de l'espace-temps (décomposition ADM)

2.1.1 Feuilletage de l'espace-temps [2, 15] :

Soit l'espace-temps à quatre dimensions, décrit par un système de coordonnées (y^{α}) $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, de métrique $g_{\mu\nu}$ (signature $- + ++$). Nous considérons l'espace-temps comme une succession (un empliment) d'hypersurfaces Σ_t de genre espace de dimensions 3. Chaque hypersurface peut-etre définie par une fonction $\Phi(y^\alpha) = t$. Lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'ensemble des hypersurfaces Σ_t forme un feuilletage de l'espace-temps, si tout point M de l'espace-temps appartient à une et une seule hypersurface Σ_t. En d'autre terme, tout point M se trouve sur une hypersurface Σ_t, et ces hypersurfaces sont toutes disjointes.

Le 4-vecteur unitaire, normal à Σ_t est défini par :

$$n_\mu = -N\partial_\mu t = -N\frac{\partial t}{\partial y^\mu} \tag{2.1}$$

Le facteur $N(y^\alpha)$ est un facteur de normalisation, de façon que n_μ soit de genre temps ($n_\mu n^\mu = -1$ avec la signature $- + ++$). Le signe $-$ est posé de telle façon que $n^0 \succ 0$, c'est-à-dire que le 4-vecteur est dirigé vers t croissant. On peut comprendre ces conventions sur l'exemple très simple de l'espace-temps de Minkowski, où Σ_t sont les hypersurfaces (x, y, z) à t constant, et où $n_\mu = (-1, 0, 0, 0)$, et $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

On appelle 4-vecteur spacial V^μ, un quadrivecteur tel que :

$$V^\mu n_\mu = V_\mu n^\mu = 0 \tag{2.2}$$

C'est alors un 4-vecteur tangent à Σ_t. Remarquons que ceci n'implique pas que $V^0 = 0$ ou $V_0 = 0$. Ceci est vrai dans un sytème de coordonnées adaptées, que nous verrons au paragraphe 2.1.2 . Plus généralement, un tenseur T^μ_ν est spacial si :

$$T^\mu_\nu n_\mu = T^\mu_\nu n^\nu = 0 \tag{2.3}$$

On peut définir sur Σ_t une métrique $h_{\mu\nu}$ induite par la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$ par :

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{2.4}$$

Considérons deux points infiniment voisins M et $M + dM$, tous les deux situés sur une hypersurface Σ_t, séparés par dx^μ. dx^μ est tangent à Σ_t, donc $n_\mu dx^\mu = 0$, donc :

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - n_\mu n_\nu dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.5}$$

et on voit bien que $h_{\mu\nu}$ joue le rôle de métrique sur Σ_t. On peut aussi définir $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ qui est donné par :

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \tag{2.6}$$

Les tenseurs $h_{\mu\nu}$ et $h^{\mu\nu}$ sont des tenseurs spaciaux. En effet, en tenant compte de $n_\mu n^\mu = -1$, (2.4) et (2.6) donnent :

$$h^{\mu\nu}n_\nu = h^{\mu\nu}n_\mu = h_{\mu\nu}n^\nu = h_{\mu\nu}n^\mu = 0 \tag{2.7}$$

Le projecteur sur l'hypersurface Σ_t est définie par :

$$h^\mu_{\ \nu} = g^\mu_{\ \nu} + n^\mu n_\nu \equiv \delta^\mu_{\ \nu} + n^\mu n_\nu \tag{2.8}$$

En effet en utilisant $n^\nu n_\nu = -1$, il vient :

$$h^\mu_{\ \nu}n^\nu = h^\mu_{\ \nu}n_\mu = 0 \qquad h^\mu_{\ \nu}h^\nu_{\ \rho} = h^\mu_{\ \rho} \tag{2.9}$$

$h^\mu_{\ \nu}V^\nu$ donne la composante tangente à Σ_t de tout 4-vecteur V^μ et $V^\mu n_\mu$ donne sa composante normale à Σ_t.

Soit ∇_α la dérivée covariante d'espace-temps compatible avec la métrique $g_{\mu\nu}$. Soit V_μ un 4-vecteur tangent à une hypersurface Σ_t ($V^\mu n_\mu = 0$). On définit la dérivée covariante compatible avec la métrique induite $h_{\mu\nu}$, et agissant sur un 4-vecteur spacial sur Σ_t par :

$$D_\mu V_\nu \equiv h_\mu^{\ \alpha}h_\nu^{\ \beta}\nabla_\alpha V_\beta \tag{2.10}$$

où $\nabla_\alpha V_\beta$ est la dérivée covariante d'espace-temps compatible avec la métrique $g_{\mu\nu}$. On peut montrer directement, à partir de (2.8) et (2.10) que :

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \text{ et } n^\mu n_\mu = -1 \text{ et } n^\mu \nabla_\alpha n_\mu = 0 \Rightarrow D_\alpha h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.11}$$

(en général $V^\mu V_\mu = cste \Rightarrow V^\mu \nabla_\alpha V_\mu = V_\mu \nabla_\alpha V^\mu = 0$). Plus généralement, pour un tenseur spacial $T_\nu^{\ \mu}(T_\nu^{\ \mu}n^\nu = T^\mu_{\ \nu}n_\nu = 0)$,

$$D_\alpha T^\mu_{\ \nu} \equiv h_\alpha^{\ \rho}h^\mu_{\ \beta}h^\alpha_{\ \nu}\nabla_\rho T^\beta_{\ \alpha} \tag{2.12}$$

On peut montrer que $D_\alpha T^\mu_\nu$ est aussi un tenseur spacial.

On définit le tenseur de la courbure extrinsèque $K_{\mu\nu}$ de l'hypersurface Σ_t, de vecteur unitaire normal n_μ, plongée dans l'espace-temps, par :

$$K_{\mu\nu} = -h_\mu^{\ \alpha} h_\nu^{\ \beta} \nabla_\alpha n_\beta \equiv -D_\mu n_\nu \tag{2.13}$$

où $h_\mu^{\ \alpha}$ est le projecteur sur Σ_t et ∇_α est la dérivée covariante compatible avec la métrique de l'espace-temps $g_{\mu\nu}$. Le tenseur de courbure extrinsèque décrit la courbure de Σ_t plongée dans l'espace-temps. Il ne faut pas la confondre avec la courbure intrinsèque, qui est décrite par le tenseur de Riemann (voir (1.7)). On parle toujour de la courbure extrinsèque d'un sous-espace Σ_t de dimension $n = 3$ par rapport à un espace de dimension $n + 1 = 4$. On peut montrer [15] que $K_{\mu\nu}$ est symétrique en μ et ν, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$.

Jusqu'à présent, dans ce paragraphe, nous avons donné des définitions valables dans un système de coordonnées quelconque $\{y^\alpha\}$, et pour des hypersurfaces de genre espace quelconques. Dans le paragraphe qui suit nous allons reprendre ces définitions dans un système de coordonnées adapté au formalisme hamiltonien.

2.1.2 Décomposition 3+1 ou Décomposition ADM :

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre les définitions précédentes dans un système de coordonnées adapté que l'on peut toujours choisir.

Soit le système de coordonnées $\{x^\mu\}$ tel que $x^0 = t$, où t est le paramètre qui repère l'hypersurface Σ_t dans le feuilletage de l'espace-temps. Comme coordonnées d'espace, on choisit un système de coordonnées $\{x^i\}$, $i = 1, 2, 3$ sur Σ_t.

Le système de coordonnées est donc : $\{x^\mu\} = \{x^0 = t,\ x^i\}$. Dans ce cas, d'après (2.1) :

$$n_\mu = -N\partial_\mu t = -N\frac{\partial t}{\partial x^\mu} \tag{2.14}$$

Les compopsantes du vecteur normal à Σ_t sont donc dans ce système de coordonnées $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$. Il s'ensuit que la composante contravariante T^0 de tout vecteur T^μ spacial est nulle :

$$T^\mu n_\mu = 0 \Longleftrightarrow T^0 n_0 + T^i n_i = 0 \Rightarrow T^0 = 0 \tag{2.15}$$

De même pour un tenseur spacial $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} n_\mu = T^{\mu\nu} n_\nu = 0 \Rightarrow T^{00} = T^{0i} = 0 \tag{2.16}$$

En particulier, pour le tenceur spacial $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu$ (voir (2.4)), on a :

$$h^{00} = h^{0i} = 0 \tag{2.17}$$

On a, pour un 4-vecteur spacial :

$$T^\mu n_\mu = T_\mu n^\mu = 0 \Leftrightarrow T_0 n^0 + T_i n^i = 0 \Rightarrow T_0 = -\frac{T_i n^i}{n^0} \tag{2.18}$$

On en déduit, en utilisant $g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$, et $h^{i0} = 0$

$$\begin{aligned} T^i &\equiv g^{i\nu} T_\nu = g^{i0} T_0 + g^{ij} T_j = (h^{i0} - n^i n^0) T_0 + (h^{ij} - n^i n^j) T_j \\ &= -n^i n^0 \left(-\frac{T_j n^j}{n^0}\right) + h^{ij} T_j - n^i n^j T_j = h^{ij} T_j \end{aligned} \tag{2.19}$$

D'autre part :

$$T_i \equiv g_{i\nu} T^\nu = g_{i0} T^0 + g_{ij} T^j = h_{ij} T^j \tag{2.20}$$

ou on a utilisé (2.4) et $n_i = 0$. Les indices des composantes spaciales T^{ij} et T_{ij} sont "éleveés" et "abaissés" avec la métrique d'espace h_{ij}, et sont des 3-tenseurs, vis-à-vis des transformations de coordonnées spaciales $\{x^i\}$ sur Σ_t.On peut montrer [15] que dans ce système de coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} g^{00} &= N^{-2} \ ; \quad g^{0i} = N^{-2} N^i \quad ; \quad g^{ij} = h^{ij} - N^{-2} N^i N^j \\ g_{00} &= h_{ij} N^i N^j - N^2 \quad ; \quad g_{0i} = h_{ij} N^j \equiv N_i \quad ; \quad g_{ij} = h_{ij} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où on introduit le trivecteur $N^i \equiv N^{-1}n^i$, où n^i sont les composantes spaciales contravariantes du quadrivecteur n^μ normal à Σ_t. On a pour ce trivecteur $N_i \equiv h_{ij}N^j$ et $N^j = h^{jk}N_k$. La fonction N définie dans (2.1) est appellée fonction lapse (lapse function) et N^i le vecteur shift (shift vector). L'intervalle d'espace-temps s'écrit donc dans ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -N^2dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^idt)(dx^j + N^jdt) \end{aligned} \tag{2.22}$$

C'est ce qu'on appelle la forme ADM (Arnowit-Deser-Misner) de la métrique. Pour le tenseur de courbure extrinsèque $K_{\mu\nu}$, défini en (2.13), on a :

$$K_{00} = K_{0i} = 0\,;\; K_{ij} = \frac{1}{2N}(N_{i;j} + N_{j;i} - \dot{h}_{ij}) \tag{2.23}$$

où nous avons introduit la notation :

$$N_{i;j} = D_iN_j = \partial_iN_j - \gamma^k_{ij}N_k \tag{2.24}$$

et $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$. D_i est la dérivée covariante d'espace définie, dans le cas général, en (2.10). Dans le système de coordonnées adaptées, elle s'exprime à l'aide des connexions γ^k_{ij} définies à partir de la métrique d'espace h_{ij} et de son inverse h^{ij} :

$$\gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}h^{kl}(\partial_ih_{lj} + \partial_jh_{li} - \partial_lh_{ij}) \tag{2.25}$$

Pour établir un fomalisme hamiltonien de la RG, ou de la GTM, il faut exprimer les quantités quadridimensionnelles, relatives à l'espace-temps à 4 dimensions, en fonction de quantités tridimensionnelles h_{ij}, N, N_i et K_{ij}. En particulier, pour définir l'action, il faut calculer le scalaire de courbure R de l'espace-temps en fonction des quantités tridimensionnelles. Cela se fait grâce à la relation de Gauss-Codazzi [15], qui exprime le tenseur de Riemann $R_{\alpha\mu\nu\beta}$ de l'espace-temps à 4-dimensions, et relatif à la métrique

$g_{\mu\nu}$, en fonction du tenseur de Riemann $R^{(3)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ du sous-espace Σ_t, et de la courbure extrinsèque $K_{\mu\nu}$ de Σ_t dans l'espace-temps à 4-dimensions.

$$h^{\rho}_{\mu} h^{\sigma}_{\nu} h^{\gamma}_{\alpha} h^{\delta}_{\beta} R_{\rho\sigma\gamma\delta} = R^{(3)}_{\mu\nu\alpha\beta} + K_{\mu\alpha} K_{\nu\beta} - K_{\mu\beta} K_{\nu\alpha} \tag{2.26}$$

Cette fomule donne la projection sur Σ_t du tenseur de Riemann de l'espace -temps quatre dimension. Elle est écrite dans un système de coordonnées quelconque $\{y^{\alpha}\}$. On en déduit le scalaire de courbure R à quatre dimensions :

$$R = R^{(3)} + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 + 2\nabla_{\mu} \left[n^{\mu} (\nabla_{\nu} n^{\nu}) \right] - 2\nabla_{\nu} \left[n^{\mu} \nabla_{\mu} n^{\nu} \right] \tag{2.27}$$

où $K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ est la trace de la courbure extrinsèque de Σ_t dans l'espace-temps à 4-dimensions. Dans un système de coordonnées adapté, (2.27) devient :

$$R = R^{(3)} + K_{ij} K^{ij} - (h^{ij} K_{ij})^2 + 2\nabla_{\mu} \left[n^{\mu} (\nabla_{\nu} n^{\nu}) \right] - 2\nabla_{\nu} \left[n^{\mu} \nabla_{\mu} n^{\nu} \right] \tag{2.28}$$

avec K_{ij} donné en (2.23) et $R^{(3)}$ est défini en fonction de la métrique spaciale h^{ij} de la connexion spaciale γ^{k}_{ij} (2.25) par :

$$R^{(3)} = h^{ij} R^{(3)}_{ij} = h^{ij} (\partial_k \gamma^{k}_{ij} - \partial_i \gamma^{k}_{jk} + \gamma^{k}_{ij} \gamma^{l}_{kl} - \gamma^{k}_{il} \gamma^{l}_{jk}) \tag{2.29}$$

$R^{(3)}_{ij}$ étant le tenseur de Ricci relatif à Σ_t indépendamment de l'espace-temps à 4 dimensions. C'est la formule (2.28) qu'on va utiliser dans le paragraphe suivant pour décrire l'hamiltonien de la relativité générale.

2.2 Formalisme hamiltonien :

2.2.1 Hamiltonien :

Pour simplifier certaines notions, nous nous plaçons directement, dans ce paragraphe dans l'espace-temps à trois dimensions $d = 3$. L'hypersurface Σ_t est alors simplement une surface à 2 dimensions.

Les variables canonique en relativité générale sont les 3 composantes indépendantes de la metrique spaciale h_{ij} $(i, j = 1, 2)$, induite sur Σ_t par la metrique $g_{\mu\nu}$ à $d = 3$. Comme $g_{\mu\nu}$ a 6 composantes indépendantes, les trois autres peuvent toujours être fixées par un changement de coordonnées. Ces trois composantes sont representées par la fonction lapse N et les deux composantes N_i $(i = 1, 2)$ du vecteur shift. L'arbitraire dans le choix des N et N_i est lié à la liberté de choix de la foliation de l'espace-temps par les hypersurfaces de genre espace Σ_t. C'est en quelque sorte un choix de gauge.

On considère l'action de la relativité générale sous la forme (1.19), dans l'espace-temps à trois dimentions

$$S = \frac{1}{\kappa}\int_V d^3x\sqrt{|g|}R + \frac{2}{\kappa}\oint_{\partial V} K\sqrt{|h|}d^2x \tag{2.30}$$

où R est le scalaire de courbure intrinsèque de l'espace-temps à 3 dimensions et K est la trace de la courbure extrinsèque des hypersurfaces Σ_t, à 2 dimensions, qui forment le feuilletage de l'espace-temps. En utilisant les relations (2.28) et (2.29) adaptées à l'espace-temps à 3 dimensions, (2.30) s'ecrit :

$$S = \frac{1}{\kappa}\int_V N\sqrt{|h|}d^3x\left[(R^{(2)} + K_{ij}K^{ij} - K^2) - 2\nabla_\alpha(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha\nabla_\beta n^\beta)\right] + \frac{2}{\kappa}\oint_{\partial V} K\sqrt{|h|}d^2x \tag{2.31}$$

où $R^{(2)}$ est le tenseur de courbure intrinsèque de Σ_t, K_{ij} le tenseur de courbure extrinsèque de Σ_t dans l'espace-temps à 3 dimensions, $K \equiv h^{ij}K_{ij}$ et ∇_α est la dérivée covariante compatible avec la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps. Nous avons utilisé $g = Nh$ ou $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ et $h \equiv \det(h_{ij})$.

Pour aller plus loin, précisons la structure du volume d'intégration V et sa limite ∂V. Le volume V est limité par deux hypersurfaces Σ_{t_1} et Σ_{t_2} $(t_1 \prec t_2)$ de genre espace et par une hypersurface B de genre temps. Le $3-$vecteur normal à Σ_{t_1} et Σ_{t_2} est n_μ de genre temps $(n_\mu n^\mu = -1)$ et le 3-vectuer normal à B est r^μ de genre espace $(r^\mu r_\mu = 1)$ et $n^\mu r_\mu = 0$. Dans l'espace-temps à $d = 3$, V est un "cylindre" de bases Σ_{t_1} et Σ_{t_2} et de surface latérale B.

L'intersection de l'hypersurface B avec une hypersurface Σ_t est S_t. A $d = 4$, S_t est une surface à deux dimensions, et à $d = 3$, qui nous interesse, S_t est une courbe fermée sur Σ_t, de vecteur normal r^μ. Remarquons que $n^\mu r_\mu = 0$ implique que r^μ est tangent à Σ_t.

Posons $A^\alpha \equiv (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta)$. Une partie de (2.31) s'écrirt alors :

$$-\frac{2}{\kappa}\int_V (\nabla_\alpha A^\alpha) N\sqrt{h} d^3x = -\frac{2}{\kappa}\left[\oint_{\partial V} A^\alpha d\Sigma_\alpha = -\int_{\Sigma_{t_1}} A^\alpha d\Sigma_\alpha + \int_{\Sigma_{t_2}} A^\alpha d\Sigma_\alpha + \int_B A^\alpha dB_\alpha\right] \tag{2.32}$$

où $d\Sigma_\alpha$ est dB_α sont les vecteurs normaux aux surfaces Σ_t et B, orientés vers l'exterieur de V (d'où le signe $-$ pour l'intégrale sur Σ_t). Le terme en K dans (2.31) s'ecrit aussi :

$$\frac{2}{\kappa}\oint_{\partial V} K\sqrt{h} d^2x = \frac{2}{\kappa}\left[-\int_{\Sigma_{t_1}} K\sqrt{h} d^2x + \int_{\Sigma_{t_2}} K\sqrt{h} d^2x + \int_{\Sigma_{t_1}} K_B\sqrt{\gamma} d^2z\right] \tag{2.33}$$

où $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$, γ_{ij} étant la la métrique induite sur B et K_B est la trace du tenseur de courbure extrinsèque de l'hypersurface B dans l'espace-temps à $d = 3$. En utilisant $d\Sigma_\alpha = n_\alpha \sqrt{h} d^2x$ et $dB_\alpha = r_\alpha \sqrt{\gamma} d^2z$, on peut montrer que les deux intégrales sur Σ_{t_1} et Σ_{t_2} dans (2.32) et (2.33) se compensent. D'autre part, compte tenu de $n^\alpha r_\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} A^\alpha dB_\alpha &= (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) r_\alpha \sqrt{\gamma} d^2z \\ &= n^\beta (\nabla_\beta n^\alpha) r_\alpha \sqrt{\gamma} d^2z = -(\nabla_\beta r_\alpha) n^\beta n^\alpha \sqrt{\gamma} d^2z \end{aligned} \tag{2.34}$$

L'action (2.31) devient finalement :

$$S = \frac{1}{\kappa}\int_V d^3x N\sqrt{h}\left[{}^2R + K_{ij}K^{ij} - K^2\right] + \frac{2}{\kappa}\int_B (K_B + n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta)\sqrt{\gamma} d^2z \tag{2.35}$$

On peut montrer que :

$$K_B + n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta = k \tag{3.36}$$

où k est la trace de la courbure de extrinsèque de S_t dans Σ_t. D'autre part l'ensembles des "surfaces" S_t (des cercles pour un espace-temps à $d = 3$) réalise un feuilletage de

B. Donc (2.35) s'ecrit encore :

$$S = \frac{1}{K}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^2x\sqrt{h}N\left[{}^2R + K_{ij}K^{ij} - K^2\right] + 2\int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{S_t} kN\sqrt{\sigma}d\varphi \qquad (2.37)$$

où $\sigma \equiv \det\sigma_{ij}$, σ_{ij} etant la métrique induite sur S_t et on a utilisé $\gamma = N\sigma$.

L'action S dépend des variables canoniques h_{ij} par l'intermédiaire de $\sqrt{h}$ et de :

$$K_{ij}K^{ij} - K^2 \equiv h^{ik}h^{jm}(K_{ij}K_{km} - K_{ik}K_{jm}) \qquad (2.38)$$

et des derivées $\dot{h}_{ij} \equiv \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}$ par l'intermédiaire de (voir (2.23))

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(N_{i;j}N_{j;i} - \dot{h}_{ij}) \qquad (2.39)$$

Le moment conjugué π^{ij} de h_{ij} est défini par :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_G)}{\partial(\dot{h}_{ij})} \qquad (2.40)$$

Où

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} \equiv N\sqrt{h}\left[{}^2R + K_{ij}K^{ij} - K^2\right] \qquad (2.41)$$

est l'intégrand de l'intégrale de volume dans (2.37). Comme $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ depend de $\dot{h}_{ij}$à travers K_{ij}, on a :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial K_{mn}}\frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \qquad (2.42)$$

qui donne :

$$\pi^{ij} = \sqrt{h}\left[h^{ij}K - K^{ij}\right] \qquad (2.43)$$

La densité hamiltonienne est définie par :

$$\mathcal{H}_G \equiv \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \sqrt{-g}\mathcal{L}_G \qquad (2.44)$$

qui donne l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma_t}\left[N(k^{ij}k_{ij} - k^2 -^2 R) - 2N_i(D_j\left[K^{ij} - h^{ij}K\right])\right]\sqrt{h}d^2x \\ &\quad +2\oint_{S_t} N_i\left[K^{ij} - h^{ij}K\right]dS_j - 2\oint_{S_t}(k)N\sqrt{\sigma}d\varphi \qquad (2.45)\end{aligned}$$

Chapitre 3

Formalisme hamiltonien pour TMG

Ce chapitre est consacré à la mise en évidence d'un terme de surface qui va apparaitre dans l 'action de Chern-Simons I_{CS}, lorsque celle-ci est développée dans la décomposition $2+1$. Les termes de volume qui interviennent dans le lagrangien sont connus [10], mais pas les termes de surface. Pour trouver ces termes, dont l'importance est essentielle si on veut définir une énergie (ou masse) à partir de la valeur de l'hamiltonien sur couche, c'est-à-dire lorsque les équations du champ sont vérifiées, il est nécéssaire de reprendre tout le calcul, qui n'est pas explicité dans la littérature. Nous utilisons ici les définitions données au chapitre 2, pour la décomposition de la métrique.

3.1 Décomposition 2+1

L'action pour TMG a la forme :

$$\begin{aligned} I &= I_E + I_{CS} \\ I_E &= -\frac{1}{\kappa}\int d^3x\sqrt{-g}R \\ I_{CS} &= \frac{1}{2\kappa m}\int d^3x\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\gamma}(\partial_\mu\Gamma^{\gamma}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^{\gamma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous nous interessons dans ce chapitre au terme de Cher-Simmons, que l'on ecrit sous la forme $I_{CS} = \frac{1}{2\kappa m}\int d^3x\mathcal{L}_{CS}$ avec

$$\mathcal{L}_{CS} \equiv \epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\gamma}(\partial_\mu\Gamma^{\gamma}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^{\gamma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho}) \tag{3.2}$$

On utilise la décomposition de la métrique $g_{\mu\nu}$ qui correspond feuilletage de l'espace-temps par l'ensemble des surfaces Σ_t. L'intervalle d'espace-temps à trois dimensions s'écrit alors

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right) \tag{3.3}$$

Ceci correspond à la décomposition suivante de la métrique

$$\begin{aligned} g_{00} &= -N^2 + N_iN^i \quad ; \quad g_{oi} = N_i \quad ; \quad g_{ij} = h_{ij} \\ g^{00} &= -N^{-2} \quad ; \quad g^{oi} = N^{-2}N^i \quad ; \quad g^{ij} = h^{ij} - N^{-2}N^iN^j \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous allons écrire $\mathcal{L}_{CS}$ en fonction de N, N_i et h_{ij}. Pour cela, il faut décomposer les connections à trois dimensions Γ en fonction de N, N_i et h_{ij}. En considérant $\Gamma^{\rho}_{\lambda\gamma}$ comme une matice Γ_λ d'éléments $(\Gamma_\lambda)^{\rho}{}_{\gamma}$, le lagrangien $\mathcal{L}_{CS}$ peut s'écrire

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{\lambda\mu\nu}Tr\left(\Gamma_\lambda\partial_\mu\Gamma_\nu + \frac{2}{3}\Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right) \tag{3.5}$$

où Tr représente la trace. Les premier terme de l'expression (3.5) se décompose comme suit :

$$\begin{aligned}\epsilon^{\lambda\mu\nu}Tr\left(\Gamma_\lambda\partial_\mu\Gamma_\nu\right) &= \epsilon^{0ij}Tr(\Gamma_0\partial_i\Gamma_j) + \epsilon^{i0j}Tr(\Gamma_i\partial_0\Gamma j) + \epsilon^{ij0}Tr(\Gamma_i\partial_j\Gamma_0) \\ &= \epsilon^{ij}Tr(\Gamma_0\partial_i\Gamma_j) - \epsilon^{ij}Tr(\Gamma_i\partial_0\Gamma_j) + \epsilon^{ij}Tr(\Gamma_i\partial_j\Gamma_0) \qquad (3.6)\end{aligned}$$

où nous avons introduit le symbole antisymétrique à deux dimension $\varepsilon^{ij} \equiv \varepsilon^{0ij}$ tel que $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$. D'autre part, le deuxième terme de (3.5) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\epsilon^{\lambda\mu\nu}Tr(\Gamma_\lambda\partial_\mu\Gamma_\nu) &= \frac{2}{3}\left[\epsilon^{0ij}Tr(\Gamma_0\Gamma_i\Gamma_j) + \epsilon^{i0j}Tr(\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_j) + \epsilon^{ij0}Tr(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0)\right] \\ &= 2\varepsilon^{ij}Tr\left(\Gamma_0\Gamma_i\Gamma_j\right) \qquad (3.7)\end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'antisymétrie de ε^{ij} et de l'invariance par permutation circulaire de la trace. Lorsqu'on remet tous les indices des connections Γ le lagrangien $\mathcal{L}_{CS}$ s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CS} &= \mathcal{L}^{(1)}_{CS} + \mathcal{L}^{(2)}_{CS} \\ \mathcal{L}^{(1)}_{CS} &= \epsilon^{ij}\left(\Gamma^\mu_{0\nu}\partial_i\Gamma^\nu_{j\mu} - \Gamma^\mu_{i\nu}\partial_0\Gamma^\nu_{j\mu} + \Gamma^\mu_{i\nu}\partial_j\Gamma^\nu_{0\mu}\right) \qquad (3.8) \\ \mathcal{L}^{(2)}_{CS} &= 2\epsilon^{ij}\Gamma^\mu_{0\nu}\Gamma^\nu_{i\rho}\Gamma^\rho_{j\mu}\end{aligned}$$

Pour écrire $\mathcal{L}_{CS}$ en fonction de N, N_i et h_{ij}, il faut séparer les indices $\mu, \nu, \rho = 0$ et $\mu, \nu, \rho = i$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)}_{CS} &= \varepsilon^{ij}\left(\Gamma^0_{00}\partial_i\Gamma^0_{j0} + \Gamma^0_{0k}\partial_i\Gamma^k_{j0} + \Gamma^k_{00}\partial_i\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{0l}\partial_i\Gamma^l_{jk} - \Gamma^0_{i0}\partial_0\Gamma^0_{j0} - \Gamma^0_{ik}\partial_0\Gamma^k_{j0}\right. \\ &\quad \left.- \Gamma^k_{i0}\partial_0\Gamma^0_{jk} - \Gamma^k_{il}\partial_0\Gamma^l_{jk} + \Gamma^0_{i0}\partial_j\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{ik}\partial_j\Gamma^k_{00} + \Gamma^k_{i0}\partial_j\Gamma^0_{0k} + \Gamma^k_{il}\partial_j\Gamma^l_{0k}\right) \\ \mathcal{L}^{(2)}_{CS} &= 2\epsilon^{ij}\left(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{j0} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{j0} + \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{j0} + \Gamma^k_{00}\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{00}\Gamma^0_{il}\Gamma^l_{jk}\right. \\ &\quad \left.+ \Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk}\right) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Avant de poursuivre le calcul, on remarque que l'expression de $\mathcal{L}_{CS}^{(1)}$ peut être simplifiée en isolant déjà des termes de surface. En effet, en utilisant l'antisymétrie de ε^{ij} , on a :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{ij}\left(\Gamma^0_{00}\partial_i\Gamma^0_{j0}+\Gamma^0_{i0}\partial_j\Gamma^0_{00}\right) &= 2\varepsilon^{ij}\Gamma^0_{00}\partial_i\Gamma^0_{j0}+\varepsilon^{ij}\partial_j\left(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{i0}\right)\\
\varepsilon^{ij}\left(\Gamma^k_{00}\partial_i\Gamma^0_{jk}+\Gamma^0_{ik}\partial_j\Gamma^k_{00}\right) &= 2\varepsilon^{ij}\Gamma^k_{00}\partial_i\Gamma^0_{jk}+\varepsilon^{ij}\partial_j\left(\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{00}\right)\\
\varepsilon^{ij}\left(\Gamma^0_{0k}\partial_i\Gamma^k_{j0}+\Gamma^k_{i0}\partial_j\Gamma^0_{0k}\right) &= 2\varepsilon^{ij}\Gamma^0_{0k}\partial_i\Gamma^k_{j0}+\varepsilon^{ij}\partial_j\left(\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{0k}\right)\\
\varepsilon^{ij}\left(\Gamma^k_{0l}\partial_i\Gamma^l_{jk}+\Gamma^k_{il}\partial_j\Gamma^l_{0k}\right) &= 2\varepsilon^{ij}\Gamma^k_{0l}\partial_i\Gamma^l_{jk}+\varepsilon^{ij}\partial_j\left(\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{0k}\right)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Le lagrangien $\mathcal{L}_{CS}^{(1)}$ s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CS}^{(1)} &= \mathcal{L}_{CS}^{\prime(1)}+S_1\\
\mathcal{L}_{CS}^{\prime(1)} &= \varepsilon^{ij}\left(2\Gamma^0_{00}\partial_i\Gamma^0_{j0}+2\Gamma^k_{00}\partial_i\Gamma^0_{jk}+2\Gamma^0_{0k}\partial_i\Gamma^k_{j0}+2\Gamma^k_{0l}\partial_i\Gamma^l_{jk}\right.\\
&\quad\left.-\Gamma^0_{i0}\partial_0\Gamma^0_{j0}-\Gamma^0_{ik}\partial_0\Gamma^k_{j0}-\Gamma^k_{i0}\partial_0\Gamma^0_{jk}-\Gamma^k_{il}\partial_0\Gamma^l_{jk}\right)\\
S_1 &= \varepsilon^{ij}\partial_j\left(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{i0}+\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{00}+\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{0k}+\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{0k}\right)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

où S_1 est un terme qui donnera un terme de surface dans l'action.

On utilise maintenant l'expression des connexions $\Gamma^\mu_{\nu\rho}\equiv\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\lambda\rho}+\partial_\rho g_{\lambda\nu}-\partial_\lambda g_{\nu\rho}\right)$ en fonction des quantités à deux dimensions N, N_i et h_{ij}. On utilise la décomposition (3.4). Celles-ci sont données par $\left(\dot{f}\equiv df/dt\right)$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= N^{-1}(\dot{N}+N^iN_{,i}-N^iN^jK_{ij})\\
\Gamma^0_{0i} &= N^{-1}(N_{,i}-N^jK_{ij})\\
\Gamma^i_{00} &= \dot{N^i}-N^{-1}N^i\dot{N}+N^jN^i{}_{;j}+(Nh^{ij}-N^{-1}N^iN^j)N_{,j}\\
&\quad+(N^{-1}N^iN^j-2Nh^{ij})N^kK_{jk}\\
\Gamma^j_{i0} &= N^j{}_{;i}-N^{-1}N^jN_{,i}-(Nh^{jk}-N^{-1}N^jN^k)K_{ik}\\
\Gamma^0_{ij} &= -N^{-1}K_{ij}\\
\Gamma^k_{ij} &= \gamma^k_{ij}+N^{-1}N^kK_{ij}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Nous avons introduit ici les deux quantités K_{ij} et γ^k_{ij}. K_{ij} est le tenseur de courbure extrinsèque de l'hypersurface Σ_t dans l'espace-temps à trois dimensions et γ^k_{ij} sont les connexions à deux dimensions compatibles avec la métrique h_{ij} définie sur Σ_t, c'est-à-dire $\gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}h^{kl}(\partial_i h_{lj} + \ \partial_j h_{li} - \partial_l h_{ij})$ (voir Chap.2). Le tenseur de courbure extrinsèque K_{ij} est introduit par l'intermédiaire de la dérivée $\dot{h}_{ij}$ en utilisant l'expression $K_{ij} = \frac{N^{-1}}{2}(N_{i;j} + N_{j;i} - \dot{h}_{ij})$. La dérivées covariante $N^i{}_{;j}$ est définie avec la connexion γ^k_{ij}, h^{ij} étant la métrique inverse et $N^i \equiv h^{ij}N_j$.

Nous allons montrer que le lagrangien (3.2) s'écrit [10] :

$$\mathcal{L}_{CS} = 2\varepsilon^{ij}\dot{K}_{ik}K^k_j - N\mathcal{H}^{CS} - N^i\mathcal{H}^{CS}_i + \sum_p S_p \tag{3.13}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{CS} &= 4\epsilon^{ij}K^l_{i;lj} + 2A^{ij}K_{ij} \\ \mathcal{H}^{CS}_k &= 4\epsilon^{ij}K^l_k K_{il;j} + 2\epsilon^{ij}(K_{jk}K^l_i)_{;l} - h_{ki}\epsilon^{ij}R_{;j} + 2A^j_{k;j} \end{aligned} \tag{3.14}$$

et les termes S_p sont des divergences donnant des termes de surface dans l'action. Le tenseur A^{ij} est défini par :

$$\int d^3x\ \epsilon^{ij}\dot{\gamma}^k_{il}\gamma^l_{jk} = \int d^3x A^{ij}\dot{h}_{ij} + \text{terme de surface}$$

A^{ij} est obtenu par une intégration par parties. Nous reviendrons à ce terme plus loin. Pour déterminer les différents termes de (3.13), on écrit (3.9) sous la forme

$$\mathcal{L}_{CS} = \sum_{n=1}^{12} T^n \tag{3.15}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
T^1 &= 2\epsilon^{ij}\Gamma^0_{00}\partial_i\Gamma^0_{j0} \\
&= -2\epsilon^{ij}N^{-1}\left[N^{-1}N^m K_{jm}\right]_{,i}\left[\dot{N}+N^k N_{,k}-N^k N^l K_{kl}\right] \qquad (3.16)\\
T^2 &= 2\epsilon^{ij}\Gamma^k_{00}\partial_i\Gamma^0_{jk} \\
&= -2\epsilon^{ij}\left[N^{-1}K_{jk}\right]_{,i}\Big[\dot{N^k}-N^{-1}N^k\dot{N}+N^l N^k_{;l}+(Nh^{kl}-N^{-1}N^k N^l)N_{,l} \\
&\qquad +(N^{-1}N^k N^l N^m K_{lm}-2NK^k_m N^m)\Big] \qquad (3.17)\\
T^3 &= 2\epsilon^{ij}\Gamma^0_{0k}\partial_i\Gamma^k_{j0} \\
&= 2\epsilon^{ij}\left[N^{-1}(N_{,k}-N^l K_{kl})\right]\big[(N^k_{;j})_{,i}-(N^{-1}N^k N_{,j})_{,i}-(NK^k_j)_{,i} \\
&\qquad +(N^{-1}N^k N^m K_{jm})_{,i}\big] \qquad (3.18)\\
T^4 &= 2\epsilon^{ij}\Gamma^k_{0l}\partial_i\Gamma^l_{jk} \\
&= 2\epsilon^{ij}\left[\gamma^l_{jk,i}+(N^{-1}N^l K_{jk})_{,i}\right] \\
&\qquad \times\left[N^k_{;l}-N^{-1}N^k N_{,l}-NK^k_l+N^{-1}N^k N^m\ K_{lm}\right] \qquad (3.19)\\
T^5 &= \epsilon^{ij}\Gamma^0_{i0}\partial_0\Gamma^0_{j0} \\
&= -\epsilon^{ij}\left[N^{-1}(N_{,i}-N^l K_{il})\right]\left[(N^{-1}N_{,j})^{\cdot}-(N^{-1}N^m K_{jm})^{\cdot}\right] \qquad (3.20)\\
T^6 &= \epsilon^{ij}\Gamma^0_{ik}\partial_0\Gamma^k_{j0} \\
&= \epsilon^{ij}(N^{-1}K_{ik})\left[(N^k_{;j})^{\cdot}-(N^{-1}N^k N_{,j})^{\cdot}-(NK^k_j)^{\cdot}+(N^{-1}N^k N^l K_{jl})^{\cdot}\right] \qquad (3.21)\\
T^7 &= \epsilon^{ij}\Gamma^k_{i0}\partial_0\Gamma^0_{jk} \\
&= \epsilon^{ij}(N^{-1}K_{jk})^{\cdot}\left[N^k_{;i}-N^{-1}N^k N_{,i}-NK^k_i+N^{-1}N^k N^l K_{il}\right] \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^8 &= \epsilon^{ij}\Gamma^k_{il}\partial_0\Gamma^l_{jk} \\
&= -\epsilon^{ij}(\gamma^k_{il} + N^{-1}N^k K_{il})\left[\dot{\gamma}^l_{jk} + (N^{-1}N^l K_{jk})^{\cdot}\right] && (3.23) \\
T^9 &= \epsilon^{ij}\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} \\
&= -2\epsilon^{ij}N^{-2}K_{ik}\left[\dot{N} + N^l N_{,l} - N^l N^m K_{lm}\right]\left[N^k_{;j} - N^{-1}N^k N_{,j} - (Nh^{kn} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. N^{-1}N^k N^m)\, K_{jn}\right] && (3.24) \\
T^{10} &= \epsilon^{ij}\Gamma^k_{00}(\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^0_{il}\Gamma^l_{jk}) \\
&= 2\epsilon^{ij}\left[\dot{N}^k - N^{-1}N^k\dot{N} + N^m N^k_{;m} + (Nh^{km} - N^{-1}N^k N^m)N_{,m}\right. \\
&\qquad \left. +(N^{-1}N^k N^m - 2Nh^{km})N^n K_{mn}\right] \\
&\qquad \times\left[-N^{-2}K_{jk}N_{,i} - N^{-1}K_{il}\gamma^l_{jk}\right] && (3.25) \\
T^{11} &= \epsilon^{ij}\Gamma^0_{0k}(\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{j0} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{j0}) \\
&= 2\epsilon^{ij}\left[N^{-1}N_{,k} - N^n K_{kn}\right] \\
&\quad \times\left[N^{-1}N_{,j}\left(N^k_{;i} - NK^k_i\right) - N^{-1}N^m K_{jm}\left(N^k_{;i} - N^{-1}N^k N_{,i} - NK^k_i\right)\right. \\
&\quad \left.\gamma^k_{il}\left(N^l_{;j} - N^{-1}N^l N_{,j} - NK^l_j + N^{-1}N^l N^m K_{jm}\right) + N^{-1}N^k K_{il}N^l_{;j}\right] && (3.26) \\
T^{12} &= \epsilon^{ij}\Gamma^k_{0l}(\Gamma^l_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk}) \\
&= 2\epsilon^{ij}\left[N^k_{;l} - N^{-1}N^k N_{,l} - NK^k_l + N^{-1}N^k N^n K_{l\ n}\right] \\
&\quad \times\left[-N^{-1}K_{jk}(N^l_{;i} - N^{-1}N^l N_{,i} - NK^l_i)\right. \\
&\qquad \left. +\gamma^l_{im}(\gamma^m_{jk} + N^{-1}N^m K_{jk}) + N^{-1}N^l K_{im}\gamma^m_{jk}\right] && (3.27)
\end{aligned}
$$

Ces différents termes s'écrivent comme le produit d'un facteur par une somme (comme T^1 ou T^2) ou comme le produit de deux sommes (comme T^{10} ou T^{11}), ou encore comme le produit d'un facteur par le produit de deux sommes (comme T^9). Nous utiliserons la notation T^n_i pour indiquer le produit du facteur par le $i$ème terme de la somme pour les termes T^n dans le premier cas, T^n_{ij} le produit du $i$ème terme de la première somme par le $j$ème de la deuxième somme dans le deuxième cas, ou du facteur par le produit du

$i$ème terme de la première somme par le $j$ème de la deuxième somme dans le troisième cas.

Les termes qui donnent une intégrale de volume dans l'hamiltonien, et qui figurent dans les formules (3.13) et (3.14) sont les suivants :

1. Terme $2\epsilon^{ij}\dot{K}_i^k K_{jk}$

$$
\begin{aligned}
T_3^6 + T_3^7 &= -2\epsilon^{ij} N^{-1}\dot{N} K_{ik} K_j^k + 2\epsilon^{ij}\dot{K}_i^k K_{jk} \\
&= 2\epsilon^{ij}\dot{K}_i^k K_{jk}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

   Le premier terme est nul car $K_{ik}K_j^k$ est symétrique en i et j.

2. Terme $-4\epsilon^{ij} N K_{i;lj}^l$

   La recherche des termes en γ dans cette dérivée covariante n'est pas triviale. On montre d'abord, en utilisant la relation $\varepsilon^{[ij}\delta_k^{l]} \equiv 0$, que

$$
-4\epsilon^{ij} N K_{i;lj}^l = -4N\varepsilon^{ij}\left(K_{i,lj}^l + \left(\gamma_{jm}^l K_i^m\right)_{,l}\right) \tag{3.29}
$$

   La double dérivée est donnée par les termes

$$
T_{13}^3 + T_4^2 = -4N\varepsilon^{ij} K_{i,lj}^l - 4\left(N K_{j,i}^k\right)_{,k} + 2\varepsilon^{ij} K_{jk} h_{,i}^{kl} N_{,l} \tag{3.30}
$$

   Les termes en γ est donné, après des intégrations par parties, par

$$
T_{42}^{10} + T_{18}^{15} = -4N\varepsilon^{ij}\left(\gamma_{jm}^l K_i^m\right)_{,l} - 4\varepsilon^{ij}\left(N\gamma_{il}^k K_j^l\right)_{,k} + 2\varepsilon^{ij} K_{ik} h_{,j}^{kl} N_{,l} \tag{3.31}
$$

   On obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
T_{13}^3 + T_4^2 + T_{42}^{10} + T_{18}^{15} &= -4\epsilon^{ij} N K_{i;lj}^l + R_4 \\
R_4 &= -4\varepsilon^{ij}\left(N K_{j;i}^k\right)_{,k}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

3. Termes $-2NA^{ij}K_{ij}$ et $-2N^k A_{k;j}^j$

Ces termes proviennent de l'intégration par parties de T_{11}^8

$$
\begin{aligned}
\int d^3x\ \varepsilon^{ij}\dot{\gamma}_{il}^k\gamma_{jk}^l &= \int d^3x A^{ij}\dot{h}_{ij} + TS \\
TS &= \int d^3x\varepsilon^{ij}\left[\partial_i\left(h^{km}\dot{h}_{ml}\gamma_{jk}^l\right) + \partial_l\left(h^{km}\dot{h}_{im}\gamma_{jk}^l\right)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_m\left(h^{km}\dot{h}_{il}\gamma_{jk}^l\right)\right] \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A^{pq} &= \frac{1}{2}\left(B^{pq} + B^{qp}\right) \\
B^{pq} &\equiv -\varepsilon^{ij}\left[\gamma_{jl}^k\gamma_{ik}^q h^{lp} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{jl}^q h^{lp}\right)_{,i}\right. \qquad (3.34) \\
&\qquad \left. +\frac{1}{2}\left(\gamma_{jl}^k h^{lq}\right)_{,k}\delta_i^p - \frac{1}{2}\left(\gamma_{jl}^q h^{lm}\right)_{,m}\delta_i^p\right]
\end{aligned}
$$

D'autre part, compte tenu de $K_{ij} = \frac{N^{-1}}{2}(N_{i;j} + N_{j;i} - \dot{h}_{ij})$, on a :

$$
\begin{aligned}
\int d^3x\ A^{ij}\dot{h}_{ij} &= \int d^3x\ \left(-2NA^{ij}K_{ij}\right) + 2\int d^3x\ A^{ij}N_{i;j} \\
&= \int d^3x\ \left(-2NA^{ij}K_{ij}\right) + 2\int d^3x\ \left(A^{ij}N_i\right)_{,j} \\
&\qquad -2\int d^3x\ \sqrt{h}\left(\frac{A^{ij}}{\sqrt{h}}\right)_{;j}N_i \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

On a donc finalement :

$$
\begin{aligned}
\int d^3x\ \varepsilon^{ij}\dot{\gamma}_{il}^k\gamma_{jk}^l &= \int d^3x\ \left(-2NA^{ij}K_{ij}\right) - 2\int d^3x\ \sqrt{h}\left(\frac{A^{ij}}{\sqrt{h}}\right)_{;j}N_i + R_6 \\
R_6 &= 2\int d^3x\ \left(A^{ij}N_i\right)_{,j} + TS \\
TS &= \int d^3x\varepsilon^{ij}\left[\partial_i\left(h^{km}\dot{h}_{ml}\gamma_{jk}^l\right) + \partial_l\left(h^{km}\dot{h}_{im}\gamma_{jk}^l\right)\right. \\
&\qquad \left. -\partial_m\left(h^{km}\dot{h}_{il}\gamma_{jk}^l\right)\right] \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

4. Terme $-4\epsilon^{ij}N^kK_k^lK_{il;j}$

Ce terme vient de

$$\begin{aligned}
T_7^2 + T_{72}^{10} &= -4\epsilon^{ij} N^{-1} N^m K^k_{\ m} N_{,i} K_{jk} + 4\epsilon^{ij} N^m K^k_{\ m} K_{jk,i} + 4\epsilon^{ij} N^n K_{il} \gamma^l_{jk} K^k_n N^n \\
&= -4\epsilon^{ij} N^k K^l_k K_{il;j} + R_2 \\
R_2 &= -4\epsilon^{ij} N^{-1} N^m K^k_{\ m} N_{,i} K_{jk} \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

5. Terme $-2\epsilon^{ij} N^k (K_{jk} K^l_i)_{;l}$

   Remarquons d'abord que :

$$-2\epsilon^{ij} N^k (K_{jk} K^l_i)_{;l} = -2\epsilon^{ij} N^k (K_{jk} K^l_i)_{,l} + 2\varepsilon^{ij} N^k \gamma^m_{lk} K_{jm} K^l_i \qquad (3.38)$$

   Ces deux termes sont donnés par :

$$\begin{aligned}
T_{15}^{11} + T_{13}^{12} &= -2\epsilon^{ij} N^k (K_{jk} K^l_i)_{;l} + R_3 \\
R_3 &= 2\varepsilon^{ij} N^{-1} \left(N N^m K_{jm} K^k_i \right)_{,k} \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

6. Terme $-N^k h_{ki} \epsilon^{ij} R_{;j} = -N_i \epsilon^{ij} R_{;j}$

   Rappelons d'abord que le tenseur de Riemann relatif à la métrique h_{ij} est :

$$R^l_{kij} = \gamma^l_{kj,i} - \gamma^l_{ki,j} + \gamma^l_{im} \gamma^m_{jk} - \gamma^l_{jm} \gamma^m_{ik} \qquad (3.40)$$

   On a alors, compte tenu de l'antisymétrie de ε^{ij} :

$$\begin{aligned}
T_{11}^4 &= 2\varepsilon^{ij} \gamma^l_{jk,i} N^k_{;l} = \varepsilon^{ij} \left(\gamma^l_{jk,i} - \gamma^l_{ik,j} \right) N^k_{;l} \\
T_{14}^{12} &= 2\varepsilon^{ij} \gamma^l_{im} \gamma^m_{jk} N^k_{;l} = \varepsilon^{ij} \left(\gamma^l_{im} \gamma^m_{jk} - \gamma^l_{jm} \gamma^m_{ik} \right) N^k_{;l} \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
T_{11}^4 + T_{14}^{12} &= \varepsilon^{ij} \left(\gamma^l_{jk,i} - \gamma^l_{ik,j} + \gamma^l_{im} \gamma^m_{jk} - \gamma^l_{jm} \gamma^m_{ik} \right) N^k_{;l} \\
&\equiv \varepsilon^{ij} R^l_{kij} N^k_{;l} \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

D'autre part, à deux dimensions, on a :

$$R^l_{kij} = \frac{1}{2}\left(\delta^l_i h_{kj} - \delta^l_j h_{ki}\right) R \tag{3.43}$$

où R est le scalaire de courbure. (3.42) devient alors :

$$\begin{aligned} T^4_{11} + T^{12}_{14} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left(\delta^l_i h_{kj} - \delta^l_j h_{ki}\right) R N^k_{;l} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\left(N_{j;i} - N_{i;j}\right) R \\ &= -\varepsilon^{ij} N_{i;j} R = \varepsilon^{ij} N_i R_{;j} + R_5 \\ R_5 &= -\varepsilon^{ij}\left(N_i R\right)_{;j} = -\varepsilon^{ij}\left(N_i R\right)_j \end{aligned} \tag{3.44}$$

Le terme en γ^l_{ij} de la dérivée covariante dans R_4 s'annule avec ε^{ij}, laissant la dérivée ordinaire.

Notons ici une correction par rapport à la litterature qui le terme dans (3.35) est qui est le facteur $1/\sqrt{h}$ qui est nécessaire car A^{ij} n'est pas un tenseur mais une densité tensorielle. Le lagrangien (3.13)-(3.14) fera partie de l'intégrand de l'intégrale volumique de l'hamiltonien. Les termes de $\mathcal{L}_{CS}$ produisent des restes dus, entre autres, aux intégrations par parties. Ces restes sont en résumé :

$$\begin{aligned} R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 &= -4\epsilon^{ij} N^{-1} N^m K^k_{\ m} N_{,i} K_{jk} + 2\varepsilon^{ij} N^{-1}\left(N N^m K_{jm} K^k_i\right)_{,k} \\ &\quad -4\varepsilon^{ij}\left(N K^k_{j;i}\right)_{,k} - \varepsilon^{ij}\left(N_i R\right)_j + 2\left(A^{ij} N_i\right)_{,j} \\ &\quad +\varepsilon^{ij}\left[\partial_i\left(h^{km}\dot{h}_{ml}\gamma^l_{jk}\right) + \partial_l\left(h^{km}\dot{h}_{im}\gamma^l_{jk}\right) - \partial_m\left(h^{km}\dot{h}_{il}\gamma^l_{jk}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ces termes seront combinés au terme S_1 dans (3.11) pour donner le terme de surface que l'on cherche à identifier. Le reste des termes de (3.15)-(3.27) s'annulent. Le terme S_1 dans (3.11) donne :

$$\begin{aligned} S_1 &= \varepsilon^{ij}\partial_j\left[-2K^k_i N_{,k} + N^{-1} N_{,k} N^k_{;i} - N K_{kl} N^l N^k_{;i} + N^{-2} K_{il} N^l N^m N^k K_{km}\right. \\ &\quad \left. + \gamma^k_{il}\left(N^l_{;k} - N^{-1} N^l N_{,k} - N K^l_k + N^{-1} N^l N^m K_{km}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.46}$$

Remarquons que le terme dans la troisième ligne de (3.45) ne doit pas, comme terme de surface, contenir $\dot{h}_{il}$ (dérivée de la variable canonique). Il suffit de remplacer $\dot{h}_{il}$ par son expression en fonction de K_{il} (voir (2.23)). Certains termes parmi (3.45) et (3.46) se combinent et on obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
I_{CS} &= \frac{1}{2\kappa m}\int d^3x\left(2\varepsilon^{ij}\dot{K}_{ik}K_j^k - N\mathcal{H}^{CS} - N^i\mathcal{H}_i^{CS}\right) + I_{surface} \\
\mathcal{H}^{CS} &= 4\epsilon^{ij}K^l_{i;lj} + 2A^{ij}K_{ij} \\
\mathcal{H}_k^{CS} &= 4\epsilon^{ij}K_k^lK_{il;j} + 2\epsilon^{ij}(K_{jk}K_i^l)_{;l} - h_{ki}\epsilon^{ij}R_{;j} + 2A^j_{k;j} + 2\left(h^{-1/2}A_k^j\right)_{;j} \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

et l'intégrale de surface $I_{surface}$, appelée ainsi car elle ne contient que des divergences, peut-être mise sous la forme :

$$
\begin{aligned}
I_{surface} = \frac{1}{2\kappa m}\int d^3x\ \partial_j & \left[2V^j_{(1)} - 4V^j_{(2)} - \epsilon^{ij}N_iR + f^j(\dot{h},h,\gamma) + 2A^{ij}N_i + \epsilon^{ij}V_i\right. \\
& \left. +\varepsilon^{ji}\left(N^{-1}K_{ik}\right)^{\cdot}N^k\right] - \varepsilon^{ij}\partial_0\left[\left(N^{-1}K_{jk}\right)_{,i}N^k\right] \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
V^k_{(1)} &\equiv \epsilon^{ij}K_{jm}N^mK_i{}^k \\
V^j_{(2)} &\equiv \epsilon^{ij}NK^k_{j;i} \\
f^j(h,\dot{h},\gamma) &\equiv \varepsilon^{ij}\left[\partial_i\left(h^{km}\dot{h}_{ml}\gamma^l_{jk}\right) + \partial_l\left(h^{km}\dot{h}_{im}\gamma^l_{jk}\right) - \partial_m\left(h^{km}\dot{h}_{il}\gamma^l_{jk}\right)\right] \\
A^{pq} &= \frac{1}{2}\left(B^{pq} + B^{qp}\right) \qquad (3.49) \\
B^{pq} &\equiv -\varepsilon^{ij}\left[\gamma^k_{jl}\gamma^q_{ik}h^{lp} + \frac{1}{2}\left(\gamma^q_{jl}h^{lp}\right)_{,i} + \frac{1}{2}\left(\gamma^k_{jl}h^{lq}\right)_{,k}\delta^p_i - \frac{1}{2}\left(\gamma^q_{jl}h^{lm}\right)_{,m}\delta^p_i\right] \\
\epsilon^{ij}V_i &\equiv \varepsilon^{ij}\left[-2K_i^kN_{,k} + N^{-1}N_{,k}N^k_{;i} - NK_{kl}N^lN^k_{;i} + N^{-2}K_{il}N^lN^mN^kK_{km}\right. \\
&\qquad \left. + \gamma^k_{il}\left(N^l_{;k} - N^{-1}N^lN_{,k} - NK^l_k + N^{-1}N^lN^mK_{km}\right)\right]
\end{aligned}
$$

3.2 Contribution du terme de Chern-Simons à l'énergie quasilocale :

Notre but ici n'est pas de définir précisément l'hamiltonien de GTM, car il reste certaines ambiguités dues au fait que les équations de GTM sont du troisème ordre en h_{ij}. Ceci implique que le lagrangien contient des dérivées secondes de h_{ij} , qui contribuent affectivement, contrairement à la gravitation pure, où ces dérivées secondes sont absorbées dans un terme de surface ; il y a alors plusieurs façons de définir un hamiltonien. Ceci fera l'objet de d'un travail ultérieur, qui prolonge ce mémoire. De toute façon, quelle que soit la méthode adoptée, lorsque les équations du mouvement sont satisfaites, c'est-à-dire sur couche, la partie volumique de l'hamiltonien H s'annule. La valeur de l'hamiltonien sur couche est donc uniquement due aux termes de surface (3.48).

Nous définissons la contribution du terme de Chern-Simmons à l'énergie quasilocale par la valeur de l'hamiltonien sur couche. Comme l'hamiltonien est défini par

$$H \equiv \int_{\Sigma_t} d^2x \; \mathcal{H} = \int_{\Sigma_t} d^2x \; \left(\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) \tag{3.50}$$

la contribution des termes de surface (3.48) vient avec un signe $-$. La contribution du terme de Chern-Simmons à l'énergie quasilocale est donc par définition :

$$E = -\frac{1}{2\kappa m} \int_{\Sigma_t} d^2x \; \partial_j \left[2V^j_{(1)} - 4V^j_{(2)} - \epsilon^{ij} N_i R + f^j(\dot{h}, h, \gamma) + 2A^{ij} N_i + \epsilon^{ij} V_i \right] \tag{3.51}$$

où

$$
\begin{aligned}
V^k_{(1)} &\equiv \epsilon^{ij} K_{jm} N^m K_i{}^k \\
V^j_{(2)} &\equiv \epsilon^{ij} N K^k_{j;i} \\
f^j(h,\dot{h},\gamma) &\equiv \varepsilon^{ij}\left[\partial_i\left(h^{km}\dot{h}_{ml}\gamma^l_{jk}\right) + \partial_l\left(h^{km}\dot{h}_{im}\gamma^l_{jk}\right) - \partial_m\left(h^{km}\dot{h}_{il}\gamma^l_{jk}\right)\right] \\
A^{pq} &= \frac{1}{2}\left(B^{pq} + B^{qp}\right) \qquad (3.52) \\
B^{pq} &\equiv -\varepsilon^{ij}\left[\gamma^k_{jl}\gamma^q_{ik}h^{lp} + \frac{1}{2}\left(\gamma^q_{jl}h^{lp}\right)_{,i} + \frac{1}{2}\left(\gamma^k_{jl}h^{lq}\right)_{,k}\delta^p_i - \frac{1}{2}\left(\gamma^q_{jl}h^{lm}\right)_{,m}\delta^p_i\right] \\
\epsilon^{ij}V_i &\equiv \varepsilon^{ij}\left[-2K^k_i N_{,k} + N^{-1}N_{,k}N^k_{;i} - NK_{kl}N^l N^k_{;i} + N^{-2}K_{il}N^l N^m N^k K_{km}\right. \\
&\qquad \left. + \gamma^k_{il}\left(N^l_{;k} - N^{-1}N^l N_{,k} - NK^l_k + N^{-1}N^l N^m K_{km}\right)\right]
\end{aligned}
$$

L'intégrale (3.51) peut être transformée en intégrale de "surface" sur S_t qui est ici un cercle de "rayon ρ". On obtient :

$$
E = -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t}\frac{1}{\sqrt{h}}\left[2V^j_{(1)} - 4V^j_{(2)} - \epsilon^{ij}N_i R + f^j(\dot{h},h,\gamma) + 2A^{ij}N_i + \epsilon^{ij}V_i\right]dS_j \quad (3.53)
$$

où dS_j est le vecteur surface normal à S_t, qui est donné par

$$
dS_j = r_j\sqrt{\sigma}d\varphi \quad ; \quad r_1 = \sqrt{h_{11}} \quad ; \quad r_2 = 0 \quad ; \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{h_{22}} \qquad (3.54)
$$

où r_j est le vecteur unitaire normal à S_t dans Σ_t , et σ est la métrique sur S_t. Comme la métrique h_{ij} est diagonale, $\sqrt{h} = \sqrt{h_{11}h_{22}}$. Compte tenu de toutes ces valeurs, (3.53) devient

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t}\frac{1}{\sqrt{h}}\left[2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} - \epsilon^{i1}N_i R + f^1(\dot{h},h,\gamma) + 2A^{i1}N_i + \epsilon^{i1}V_i\right]dS_1 \\
&= -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t}\frac{1}{\sqrt{h}}\left[2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} - \epsilon^{21}N_2 R + f^1(\dot{h},h,\gamma) + 2A^{21}N_2 + \epsilon^{21}V_2\right]dS_1 \\
&= -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t}\frac{1}{\sqrt{h}}\left[2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} - \epsilon^{21}N_2 R + f^1(\dot{h},h,\gamma)\right. \qquad (3.55) \\
&\qquad \left. + 2A^{21}N_2 + \epsilon^{21}V_2\right]dS_1
\end{aligned}
$$

soit pour $dS_1 = \sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}d\varphi$ et $\sqrt{h} = \sqrt{h_{11}h_{22}}$:

$$E = -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t}\left[2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} + N_2 R + 2A^{21}N_2 - V_2\right] d\varphi \tag{3.56}$$

où nous avons tenu compte du fait que $f^1(\dot{h}, h, \gamma) = 0$ pour une métrique stationnaire.

Nous allons tester cette définition sur une solution stationnaire à symétrie axiale des équations de la GTM. Dans ce cas, les éléments de la métrique ne dépendent pas de t et le terme $f^j(h, \dot{h}, \gamma)$ ne contribue pas à E. D'autre part, l'énergie (3.56) est en général divergente pour une solution non asymptotiquement plate, comme c'est le cas des solutions que nous allons tester. On effectue alors une sorte de renormalisation de E en soustrayant à la valeur de E pour une solution donnée, sa valeur pour une métrique de fond, (background metric en anglais), qui est la forme asymptotique de la métrique (forme à l'infini spacial). On a alors

$$E \equiv E_{sol} - E_{fond} \tag{3.57}$$

Nous allons maintenant appliquer ces définitions à la solution trou noir stationnaire à symétrie axiale de la GTM (dite solution ACL).

3.3 Application

3.3.1 Métrique stationnaire à symétrie axiale

Cette métrique est de la forme générique (dans la décomposition ADM),

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{11}d\rho^2 + h_{22}(d\varphi + N^\varphi dt)^2 \tag{3.58}$$

ρ est la coordonnée radiale et φ la coordonnée angulaire sur l'hypersurface Σ_t à t constant. En posant $x^1 \equiv \rho$ et $x^2 \equiv \varphi$, on a :

$$h_{12} = h_{21} = 0 \quad ; \quad h^{11} = (h_{11})^{-1} \quad ; \quad h^{22} = (h_{22})^{-1} \tag{3.59}$$

et

$$N_1 = N^1 \equiv h^{11}N_1 = 0 \quad ; \quad N^2 = N^\varphi \quad ; \quad N_2 = h_{22}N^\varphi \tag{3.60}$$

De plus toutes ces quantités ne dépendent que de ρ. Donc en général $\partial_t f = \partial_\varphi f = 0$ pour toute composante f de la métrique. En posant $\partial_1 \equiv \partial_\rho t$, les composantes non nulles de toutes les quantités dont nous aurons besoin dans (3.51)-(3.52)-(3.53) sont les connexions

$$\gamma^1_{11} = \frac{1}{2}h^{11}\partial_1 h_{11} \ , \ \gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}h^{11}\partial_1 h_{22} \ , \gamma^2_{12} = \frac{1}{2}h^{22}\partial_1 h_{22} \tag{3.61}$$

les dérivées du vecteur shift N_i :

$$\begin{aligned} N_{1;1} &= N_{2;2} = 0 \quad ; \quad N_{1;2} = -\gamma^2_{21}N_2 \quad ; \quad N_{2;1} = N_{2,1} - \gamma^2_{12}N_2 \\ N^1_{\ ;1} &= N^2_{\ ;2} = 0 \quad ; \quad N^1_{\ ;2} = h^{11}N_{1;2} \quad ; \quad N^2_{\ ;1} = h^{22}N_{2;1} \end{aligned} \tag{3.62}$$

le tenseur de courbure extrinsèque

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{22} = 0 \quad ; \quad K_{12} = K_{21} = \frac{1}{2N}(N_{2,1} - 2\gamma^2_{12}N_2) \\ K_1^{\ 1} &\equiv h^{11}K_{11} = 0 \quad ; \quad K_2^{\ 2} = 0 \quad ; \quad K_1^{\ 2} = h^{22}K_{12} \quad ; \quad K_2^{\ 1} = h^{11}K_{21} \end{aligned} \tag{3.63}$$

et le scalaire de courbure

$$\begin{aligned} R &= h^{11}R_{11} + h^{22}R_{22} \\ R_{11} &= -\gamma^2_{12,1} + \gamma^1_{11}\gamma^2_{12} - \gamma^2_{12}\gamma^2_{12} \\ R_{22} &= \gamma^1_{22,1} + \gamma^1_{22}\gamma^1_{11} - \gamma^2_{21}\gamma^1_{22} \end{aligned} \tag{3.64}$$

Compte tenu de ces simplifications, l'énergie quasilocale (3.56) s'écrit pour une métrique stationnaire à symétrie axiale :

$$E = -\frac{1}{2\kappa m}\oint_{S_t} \left[2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} + N_2 R + 2A^{21}N_2 - V_2\right] d\varphi \tag{3.65}$$

avec

$$
\begin{aligned}
V^1_{(1)} &= -K_{12}N^2{K_2}^1 \\
V^1_{(2)} &= N(K^1_{2,1} + \gamma^1_{11}{K_2}^1 - \ \gamma^1_{22}{K_1}^2) \\
A^{21} &= \frac{1}{2}\left\{(\gamma^1_{11} - \gamma^2_{21})(\gamma^2_{21}h^{11} - \gamma^1_{22}h^{22}) - (\gamma^1_{22}h^{22})_{,1}\right\} \qquad (3.66) \\
V_2 &= -2{K_2}^1N_{,1} + N^{-1}N_{,1}N^1_{;2} - NK_{12}N^2N^1_{;2} \\
&\quad +\gamma^1_{22}(N^2_{;1} - N^{-1}N^2N_{,1} - N{K_1}^2 + N^{-1}(N^2)^2K_{12}) + \gamma^2_{21}(N^1_{;2} - N{K_2}^1)
\end{aligned}
$$

3.3.2 Solution ACL

La solution ACL représente un trou noir stationnaire à symétrie axiale, solution des équations (1.22) de la GTM, est donnée par :

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{r^2}dt^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} + r^2\left(d\varphi - \frac{2\rho + 3\omega}{r^2}dt\right)^2 \\
r^2 &\equiv \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \frac{\rho_0^2}{3} \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

Cette solution, qui dépend de deux paramètre réels ρ_0 et ω, décrit de façon générale, un trou noir dont l'horizon externe est situé en $\rho = \rho_0$. Elle est écrite sous la forme ADM (2.22), ce qui permet d'identifier les éléments de métrique dont nous aurons besoin :

– la métrique :

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad ; \quad h_{22} = r^2 \quad ; \quad h^{11} = \rho^2 - \rho_0^2 \quad ; \quad h^{22} = \frac{1}{r^2} \\
N &= \frac{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}{\sqrt{r^2}} \quad ; \quad N_1 = N^1 = 0 \quad ; \quad N^2 = -\frac{2\rho + 3\omega}{r^2} \quad ; \qquad (3.68) \\
N_2 &= -(2\rho + 3\omega)
\end{aligned}
$$

– les connexions non nulles :

$$
\gamma^1_{11} = -\frac{\rho}{\rho^2 - \rho_0^2} \quad ; \quad \gamma^1_{22} = -(\rho + 2\omega)(\rho^2 - \rho_0^2) \quad ; \quad \gamma^2_{12} = \frac{\rho + 2\omega}{r^2} \qquad (3.69)
$$

– les dérivées du vecteur shift N_i

$$\begin{aligned}
N_{1;2} &= \frac{(\rho+2\omega)(2\rho+3\omega)}{r^2} \quad ; \quad N_{2;1} = -\frac{\omega\rho+2\frac{\rho_0^2}{3}}{r^2} \\
N^1_{;2} &= \frac{(\rho^2-\rho_0^2)(\rho+2\omega)(2\rho+3\omega)}{r^2} \quad ; \quad N^2_{;1} = -\frac{\omega\rho+2\frac{\rho_0^2}{3}}{(r^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

– les composantes du tenseur K_{ij}

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{\rho^2+3\omega\rho+3\omega^2-\frac{\rho_0^2}{3}}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}\sqrt{r^2}} \quad ; \quad K_2{}^1 = K^1{}_2 = \frac{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}(\rho^2+3\omega\rho+3\omega^2-\frac{\rho_0^2}{3})}{\sqrt{r^2}} \\
K_1{}^2 &= K^2_{\ 1} = \frac{\rho^2+3\omega\rho+3\omega^2-\frac{\rho_0^2}{3}}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}(r^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

– le scalaire de courbure R de l'hypersurface Σ_t à deux dimensions

$$R = \frac{2}{r^2}\left\{\frac{(\rho^2-\rho_0^2)(\omega^2-\frac{\rho_0^2}{3})}{r^2} - \rho(\rho+2\omega)\right\} \tag{3.72}$$

Nous allons donner maintenant les quantités caractéristiques de la métrique de fond (background metric).

3.3.3 Métrique de fond :

Nous choisirons comme métrique de fond, la métrique (3.67) pour $\omega = \rho_0 = 0$:

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2(d\varphi - \frac{2}{\rho}dt)^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} \tag{3.73}$$

Cette métrique ne possède pas d'horizon (qui sont les zéros de la fonction shift N) et est la forme asymptotique de (3.67) pour $\rho \to \infty$. Elle représente en quelque sorte le niveau zéro, ou niveau fondamental, par rapport à laquelle on mesure l'énergie d'une solution dépendant des paramètres ω et ρ_0. Les grandeurs relatives à cette métrique et dont nous avons besoin sont :

– la métrique :

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{1}{\rho^2} \quad ; \quad h^{11} = \rho^2 \quad ; \quad h_{22} = \rho^2 \quad ; \quad h^{22} = \frac{1}{\rho^2} \\
N &= 1 \;\; ; \;\; N^1 = N_1 = 0 \quad ; \quad N^2 = -\frac{2}{\rho} \;\; ; \;\; N_2 = -2\rho
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

– les connexions non nulles :

$$
\gamma^1_{11} = -\frac{1}{\rho} \quad ; \quad \gamma^1_{22} = -\rho^3 \quad ; \quad \gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho} \tag{3.75}
$$

– les dérivées du vecteur shift N_i

$$
N_{1;2} = 2 \quad ; \quad N_{2;1} = 0 \quad ; \quad N^1_{;\,2} = 2\rho^2 \quad , \quad N^2_{;\,1} = 0 \tag{3.76}
$$

– les composantes du tenseur K_{ij}

$$
K_{12} = 1 \;\; ; \;\; {K_1}^2 = \frac{1}{\rho^2} \;\; ; \;\; {K_2}^1 = \rho^2 \qquad (K_{11} = K_{22} = {K_1}^1 = {K_2}^2 = 0) \tag{3.77}
$$

– le scalaire de courbure R de l'hypersurface Σ_t à deux dimensions

$$
R = -2 \tag{3.78}
$$

3.3.4 Calcul de la contribution du terme de Chern-Simmons à l'énergie quasilocale

L'intégrale (3.65), effectuée sur un cercle à $\rho = cste$ donne la contribution à l'énergie contenue dans un "volume" fermé de l'espace, d'où le nom d'énergie quasilocale. Cette intégrale donne un résultat qui va dépendre du rayon ρ. Nous recherchons la contribution due à l'espace entier, donc il faut faire tendre ρ vers l'infini. Cette intégrale diverge en général, car les termes (3.36) donnent par développement une série dont le terme de plus grand degré est en ρ. Cependant, en retranchant la contribution de la métrique de fond, donc en renormalisant, on peut obtenir une valeur constante, qui, a priori dépend de ω et ρ_0, les constantes caractéristiques de la métrique d'espace-temps. Nous allons donc calculer la valeur de l'intégrand de (3.65) pour la métrique de fond, puis sa valeur, à l'ordre ρ^0 pour la métrique (3.67) et calculerons (3.57).

Métrique de fond

En utilisant (3.74) à (3.78) dans (3.66), on obtient

$$2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} + N_2 R + 2A^{21}N_2 - V_2 = 4\rho - 8\rho + 4\rho + 6\rho - 2\rho = 4\rho \tag{3.79}$$

Métrique complète

On utilise (3.68) à (3.72) dans (3.66), puis on développe le résultat en puissances de ρ. On obtient :

$$\begin{aligned}
V^1_{(1)} &= \frac{(\rho^2 + 3\omega\rho + 3\omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3})^2(2\rho + 3\omega)}{(r^2)^2} = 2\rho(1 - \frac{\omega}{2\rho}) + O\left(1/\rho\right) \\
V^1_{(2)} &= \frac{(2\rho + 3\omega)(\rho^2 - \rho_0^2)}{r^2} = 2\rho(1 - \frac{5\omega}{2\rho}) + O\left(1/\rho\right) \\
A^{21} &= -\frac{(\rho^2 - \rho_0^2)(3\rho^2 + 12\omega\rho + 13\omega^2 - \frac{\rho_0^2}{3})}{(r^2)^2} \\
&= -\frac{3}{2}(1 - \frac{4\omega}{\rho}) + O\left(1/\rho^2\right) \\
V_2 &= 2\rho(1 - \frac{12\omega}{\rho}) + O\left(1/\rho\right) \\
N_2 R &= 4\rho\left(1 - \frac{\omega}{2\rho}\right) + O\left(1/\rho\right) \\
2A^{21}N_2 &= 6\rho\left(1 - \frac{5\omega}{2\rho}\right) + O\left(1/\rho\right)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

ce qui donne :

$$2V^1_{(1)} - 4V^1_{(2)} + N_2 R + 2A^{21}N_2 - V_2 = 4\rho + 25\omega + +O\left(1/\rho\right) \tag{3.81}$$

La relation (3.57) donne alors, pour $\rho \to \infty$:

$$E \equiv E_{sol} - E_{fond} = -\frac{1}{2\kappa m} \oint_{S_t(\rho\to\infty)} 25\omega \; d\varphi = -\frac{25\pi\omega}{\kappa m} = -\frac{25\omega}{16Gm} \tag{3.82}$$

3.4 Conclusion

Pour évaluer cette contribution, comparons la à la valeur de l'énergie obtenue par une autre méthode qui consiste à étudier les isométries asymptotiques de la métrique [13, 14]. dans cet article la valeur trouvée est (adaptée à notre métrique (3.67)) est $\frac{2\pi\omega}{3\kappa m}$.

La valeur que nous avons trouvée est négative et ne constitue que la contribution du terme de Chern-Simmons, alors que la valeur précédente revient à tenir compte de tous les termes. Mais un résultat positif est que les termes de surface que nous avons obtenu donnent une valeur constante de la même forme que les masse calculée par d'autres méthodes.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons exposé le formalisme hamiltonien de la relativité générale, cadre dans lequel on définit l'énergie quasilocale. Nous avons ensuite adapté ce formalisme à la gravitation topologiquement massive, pour établir les termes de surface qui apparaissent et qui permettent de définir une énergie quasilocale. ces termes de surface sont essentiellement dus au terme de Chern-Simmons qui est le terme ajouté qui définit la GTM. Nous avons ensuite appliqué le résultat que nous avons trouvé à la métrique du trou noir stationnaire à symétrie axiale de la GTM.

Si des travaux ont déjà été consacrés au formalisme hamiltonien de la GTM, les termes de surface que nous avons établis n'ont jamais été calculés. Comme ceux-ci dépendent aussi bien de la métrique h_{ij} que du tenseur de courbure extrinsèque K_{ij}, qui sont des variables canoniques, ces termes de surface peuvent affecter la définition de l'hamiltonien et même les équations canoniques que l'on en déduit.

D'autre part les équations de la théorie (1.22)-(1.23) contiennent des dérivées d'ordre 3, qui proviennent d'un lagrangien contnant des dérivées d'ordre 2. Les références [10] et [11] utilisent la méthode d'Ostrogradsky [16] qui fait intervenir des contraintes, mais sans tenir compte des termes de surface. Il y a cependant une autre méthode de définition de l'hamiltonien qui semble plus satisfaisante pour les systèmes de lagrangien avec des dérivées d'ordre supérieur [17, 18], qui ont été appliqués à la GTM linéarisée [19]. Ceci constitue une excellente perspective pour la suite de ce travail, d'établir un hamiltonien non linéarisé en se basant sur cette méthode ; Ceci permettra d'identifier clairement l'hamiltonien, de vérifier que les équations canoniques sont équivalentes aux équations (1.22)-(1.23), et de mieux cerner les termes de surface. En effet, le talon d'Achille de notre travail est d'avoir supposé que le terme de volume dans la décomposition (3.13)-(3.14) s'annule en vertu des équations du mouvement, car cela dépend de la façon de définir un hamiltonien, et mérite d'être vérifié explicitement. Ceci fait l'objet d'un travail en cours. En ce sens, ce mémoire constitue une porte ouverte sur le formalisme hamiltonien de la GTM, qui est basé sur la décomposition du chapitre 2.

Annexe A

Derivation des equations de la GTM

Nous détaillons dans cette annexe la variation de l'action de Chern-Simmons, définie à partir du lagrangien (1.21) :

$$I_{cs} = \frac{1}{2m\kappa}\int_V dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu}(\Gamma^{\beta}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\lambda\sigma}) \tag{A.1}$$

En considérant $\Gamma^{\beta}_{\lambda\sigma}$ comme l'élèment $\beta\sigma$ de la matrice Γ_λ, I_{cs} s'écrit :

$$I_{cs} = \frac{1}{2m\kappa}\int_V dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} Tr\left[\Gamma_\lambda\partial_\mu\Gamma_\nu + \frac{2}{3}\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\lambda\right] \tag{A.2}$$

En utilisant l'antisymétrie de $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ et l'invariance de la trace par permutation circulaire, on a :

$$\delta I_{cs} = \frac{1}{2m\kappa}\int_V dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} Tr\left[\delta\Gamma_\lambda\partial_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\lambda\partial_\mu\delta\Gamma_\nu + 2\Gamma_\mu\Gamma_\nu\delta\Gamma_\lambda\right] \tag{A.3}$$

En intégrant par parties le deuxième terme, et avec l'antisymétrie de $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\delta I_{cs} &= \frac{1}{2m\kappa}(I_1 + I_2) \\
I_1 &= \int_V d^3x \; 2\epsilon^{\lambda\mu\nu} Tr\left[(\partial_\mu \Gamma_\nu)\,\delta\Gamma_\lambda + \Gamma_\mu \Gamma_\nu \delta\Gamma_\lambda\right] \\
I_2 &= \int_V d^3x \partial_\mu (\epsilon^{\lambda\mu\nu} Tr \Gamma_\lambda \delta\Gamma_\nu)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

I_2 donne un terme de surface. Dans un repère localement inertiel (RLI), $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$, et $\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ non necessaire nul I_1 devient alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\int dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \delta\Gamma^\beta_{\lambda\sigma}) \\
&= \int dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\beta}) \delta\Gamma^\beta_{\lambda\sigma} \\
&= \int dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} R^\sigma_{\beta\mu\nu} \delta\Gamma^\beta_{\lambda\sigma}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

On a utilisé dans la deuxième ligne l'antisymétrie de $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ et la définition (1.7) du tenseur de Riemann dans un RLI, dans la troisième ligne.

Dans un RLI, $\delta\Gamma^\beta_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} g^{\beta\rho}(\partial_\lambda(\delta g_{\sigma\rho}) + \partial_\sigma(\delta g_{\lambda\rho}) - \partial_\rho(\delta g_{\lambda\sigma}))$, (car $\partial_\lambda g_{\sigma\rho} = 0$). En remplaçant dans (A.5), on fait une integration par parties qui fait intervenir des $\delta g_{\mu\nu}$ qui sont nuls sur ∂V . Ces termes de surface sont donc nuls.

En utilisant $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} \left[\partial_\lambda (R^\sigma_{\beta\mu\nu}) g_{\sigma\rho} + \partial_\sigma (R^\sigma_{\beta\mu\nu}) g_{\lambda\rho} - \partial_\tau (R^\sigma_{\alpha\mu\nu}) g^{\alpha\tau} g_{\sigma\rho} g_{\lambda\beta}\right] \delta g^{\beta\rho} \\
&= \frac{1}{2}\int dx^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} \left[\partial_\lambda (R_{\rho\beta\mu\nu}) + g_{\lambda\rho} \partial_\sigma R^\sigma_{\beta\mu\nu} - g_{\lambda\beta} \partial_\sigma (R^\sigma_{\rho\mu\nu})\right] \delta g^{\beta\rho}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

où on a utilisé $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ et $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\sigma\rho}$. Le premier terme est identiquement nul, étant la contraction $\left(\partial_\lambda R_{[\rho\beta][\mu\nu]}\right) \delta g^{(\beta\rho)}$. Le deuxième terme s'écrit :

$$g_{\lambda\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \partial_\sigma R^\sigma_{\beta\mu\nu} = g_{\lambda\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \delta^\sigma_\alpha \partial_\sigma R^\alpha_{\beta\mu\nu} \tag{A.7}$$

En utilisant l'identité :

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha} = \epsilon^{\sigma\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\alpha} + \epsilon^{\lambda\sigma\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + \epsilon^{\lambda\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} \tag{A.8}$$

(A.7) devient :

$$g_{\lambda\rho}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\partial_\sigma R^{\sigma}_{\beta\mu\nu} = \epsilon^{\sigma\mu\nu}\partial_\sigma R_{\rho\beta\mu\nu} + \epsilon_{\rho}^{\ \sigma\nu}\partial_\sigma R_{\beta\nu} - \epsilon_{\rho}^{\ \mu\sigma}\partial_\sigma R_{\beta\mu} \tag{A.9}$$

Le premier terme de (A.9), antisymétrique en $[\rho\beta]$ ne contribue pas car il est contracté avec $\delta g^{(\rho\beta)}$. Nous avons posé $\epsilon_{\rho}^{\ \sigma\nu} \equiv g_{\rho\lambda}\epsilon^{\lambda\sigma\nu}$ et utilisé $R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$. Le deuxième et le troisème termes sont identiques et donnent

$$g_{\lambda\rho}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\partial_\sigma R^{\sigma}_{\beta\mu\nu} = 2\epsilon_{\rho}^{\ \sigma\nu}\partial_\sigma R_{\beta\nu} \tag{A.10}$$

Le troisième terme dans (A.6) est obtenu à partir du deuxième par permutation $\rho \leftrightarrow \beta$. On obtient finalement dans un RLI :

$$\delta I_{cs} = \frac{1}{2m\kappa}\int_V d^3x \ \left[\epsilon_{\rho}^{\ \sigma\nu}\partial_\sigma R_{\beta\nu} + \epsilon_{\beta}^{\ \sigma\nu}\partial_\sigma R_{\rho\nu}\right]\delta g^{\beta\rho} + \frac{1}{2m\kappa}\int_V d^3x \ \partial_\mu(\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}) \tag{A.11}$$

Dans un système de coordonnées quelconque, on a

$$\delta I_{cs} = \frac{1}{2m\kappa}\int_V d^3x \ \left[\epsilon_{\rho}^{\ \sigma\nu}D_\sigma R_{\beta\nu} + \epsilon_{\beta}^{\ \sigma\nu}D_\sigma R_{\rho\nu}\right]\delta g^{\beta\rho} + \frac{1}{2m\kappa}\oint_{\partial V}\frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu}}{\sqrt{g}}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}d\Sigma_\mu \tag{A.12}$$

Ce qui donne les équations du mouvement (1.22). Remarquons que le terme de surface, qui dépend de $\delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu})$ n'est pas nul pour $\delta g^{\mu\nu} = 0$ sur ∂V seulement.

Bibliographie

[1] Weinberg, *"Gravitation and Cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity",* (Wiley, New York,1972).

[2] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *"Gravitation",* (Freeman,NewYork,1973).

[3] L. Landau et E. Lifschitz, "*Théorie des champ*" (EditionsMir, Moscou, 1970).

[4] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, "*The dynamics of general relativit*" (in "*Gravitation : an introduction to current researc*", L. Witten ed., Wiley, New York, (1962), p.227). (gr-qc/0409105)

[5] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *"The large scale structure of space-time"* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[6] J. D. Brown and J. W. York, *Phys. Rev.* **D**47, (1993) 1407. (gr-qc/9501014).

[7] S. W. Hawking and G. T. Horowitz, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 1487.

[8] S. Deser and R. Jackiw ; *Annals Phys.* **153',** (1984) 405.

[9] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, (1984) 220.

[10] I. L. Buchbinder, S. L. Lyahovich and V. A. Krykhtin, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993),2083.

[11] K. Hotta, Y. Hyakutake, T. Kubota and H. Tanida , **JHEP**0807 : 066, (2008)(arXiv :0805.2005, hep-th)

[12] K. Ait Moussa, G. Clément and C. Leygnac, *Class. Quantum Grav.* **20**, (2003) L227.

[13] S. Deser and X. Xiang, *Phys. Lett;* **B**263 (1991) 39.

[14] A. Bouchareb and G. Clément, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) 5581 (arXiv : 0706.0263, gr-qc).

[15] E. Poisson, *"A relativist's toolkit"* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[16] M. V. Ostrogradsky, *Mem. Acad. Sci.,* St. Petersberg **6** (1850) 385.

[17] G. C. Constantelos, *Nuovo Cimento B,* **2** (1974) 279.

[18] V. Tapia, *Nuovo Cimento B,* **90** (1985) 15.

[19] I. Bengtsson, *Phys. Rev;* **D**39 (1989) 667.

[20] R. M. Wald, *"General relativity"* (UNiversity of Chicago Press, Chicago 1984).

Summary

In this report , we establish the contribution of the Chern-Simmons part to the quasilocal energy in topologically massive gravity in three dimensions (TMG). This dynamical theory generalizes the three dimensional gravity, which is devoid of dynamics.
To do this, we construct the hamitonian of TMG. More precisely, we determine the surface terms, which give the on-shell value of the hamitonian, due to the Chern-simmons term.
This value is defined as the Chern-simmons contribution to the quasi-local energy. We then apply this result to the stationary axially symmetric black hole of TMG, to compare our result to those obtained by other methods, and conclude by an analysis of the validity of our results.
Key words : General relativity, Hamiltonian formalism, quasilocal energy

ملخص الأطروحة

تهتم هده المذكرة بالبحث عن مساهمه حد Chern-Simmons في الطاقة الشبه محليه في النسبية العامة ذات الكتلة الطبولوجية في ثلاثة أبعاد (GTM). هذه النظرية الديناميكية تعمم النسبية العامة في ثلاثة أبعاد, و التي هي ليست ديناميكية.

على هذا الأساس, نقوم أولا بتعريف هاميلتونيان GTM. تحديدا نقوم بتعريف حد المساحة, الذي يعطي قيمة الهاميلتونان فوق الطبقة, (أي عندما تكون معادلات النظرية محققة), الناتجة عن حد Chern-Simmons . هذه القيمة تعرف على أساس أنها تمثل مساهمةChern-Simmons في الطاقة الشبه محلية. في النهاية نقوم بتطبيق هذه النتيجة على المترية المستقرة وذات التناظر المحوري للثقب الأسود ل GTM , لمقاربة النتائج التي توصلنا إليها بتلك التي تحصل عليها بطرق أخرى, ثم نختتم في النهاية بتحليل للنتائج التي توصلنا إليها

كلمات مفتاح : النسبية العامة ، البنية الهاميلتونية ، الطاقة الشبه محلية .

Résumé

Ce mémoire est consacré à la recherche de la contribution du terme de Chern-Simmons à l'énergie quasi-locale en gravitation topologiquement massive à trois dimensions (GTM). Cette théorie, dynamique, généralise la gravitation à 3 dimensions, qui, elle, est non dynamique.

Pour ce faire, nous déterminons d'abord l'halmiltonien de la GTM. Plus précisément, nous déterminons les termes de surface, qui donnent la valeur de l'hamiltonien sur couche, issus du terme de Chern-Simmons. Cette valeur est définie comme la contribution de Chern-Simmons à l'énergie quasilocale. Ensuite nous appliquons ce résultat à la métrique du trou noir stationnaire, à symétrie axiale de la GTM. Pour confronter nos résultats à ceux calculés par d'autres méthodes, et terminons par une analyse de nos résultats.

Mots clés : Gravitation, formalisme hamiltonien, énergie quasilocale