

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

**MEMOIRE**

**Présenté pour obtenir le diplôme de**

**MAGISTER EN PHYSIQUE**

**Spécialité : ENERGETIQUE**

**Option : PHOTOTHERMIQUE**

**Thème :**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE  
ENCEINTE ALLONGEE, DE GRAND AXE HORIZONTAL ET DE SECTION  
CARREE, INCLINEE EU EGARD AU PLAN HORIZONTAL, ET CHAUFFEE PAR  
DEUX COTES OPPOSES.**

**Par**

**AZZOUZ KHADOUDJA**

**Soutenu le : 20/06/2009**

**Devant le jury :**

|                   |          |                   |                         |                           |
|-------------------|----------|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| <b>Présidente</b> | <b>:</b> | <b>A. CHAKER</b>  | <b>Professeur</b>       | <b>Univ. Mentouri Cne</b> |
| <b>Rapporteur</b> | <b>:</b> | <b>M. DJEZZAR</b> | <b>M. de Conférence</b> | <b>Univ. Mentouri Cne</b> |
| <b>Examineurs</b> | <b>:</b> | <b>N. BELLEL</b>  | <b>M. de Conférence</b> | <b>Univ. Mentouri Cne</b> |
|                   |          | <b>S. LAOUAR</b>  | <b>M. de Conférence</b> | <b>Univ. Skikda</b>       |

Je dédie ce mémoire à mes parents.

A tous les membres de ma famille, grands et petits.

A tous mes amis

# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur DJEZZAR Mahfoud, Maître de conférence à l'Université Mentouri Constantine de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestions.

Je tiens à remercier sincèrement Madame Chaker Abla, Professeur à l'université Mentouri de Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen et ce malgré ces nombreuses occupations.

Monsieur BELLEL Nadir, Maître de conférence à l'Université Mentouri Constantine, et Monsieur LAOUAR Salah, Maître de conférence à l'Université de Skikda, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury d'examen. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes meilleurs remerciements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Nomenclature

## Lettres latines

|                 |  |
|-----------------|--|
| a               | diffusivité thermique. ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )  |
| $c_p$           | chaleur massique à pression constante. ( $\text{J}.\text{kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )                     |
| $\vec{g}$       | accélération de la pesanteur. ( $\text{m}.\text{s}^{-2}$ )   |
| Ra              | nombre de Rayleigh défini par $\text{Ra} = \frac{g\beta(T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}})L^3}{\alpha\nu}$ |
| L               | Côté de l'enceinte cubique. (m)  |
| Nu              | nombre de Nusselt.   |
| P               | pression au sein du fluide. (Pa)   |
| Pr              | nombre de Prandtl défini par $\text{Pr} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}$ .                              |
| $S_\varphi$     | Terme de source.   |
| T               | Température du fluide. (K)   |
| $T_{\text{ch}}$ | Température des parties chaudes de l'enceinte. (K)   |
| $T_{\text{fr}}$ | Température des parties froides de l'enceinte. (K)   |
| $T_d$           | écart de température $T_d = T - T_{\text{fr}}$ (K)   |
| $\Delta T$      | écart de température $\Delta T = T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}$ (K)                                    |
| t               | temps. (s)   |
| U, V            | composantes de la vitesse suivant x et y. ( $\text{m}.\text{s}^{-1}$ )                                 |
| $\vec{V}$       | Vecteur vitesse. ( $\text{m}.\text{s}^{-1}$ )  |
| x, y, z         | coordonnées cartésiennes. (m)  |

## Lettres grecques

|                  |  |
|------------------|--|
| $\alpha$         | angle d'inclinaison. ( $^\circ$ )  |
| $\beta$          | coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $\text{K}^{-1}$ )   |
| $\Gamma_\varphi$ | coefficient de diffusion figurant dans l'équation 3.3.                       |
| $\lambda$        | conductivité thermique du fluide. ( $\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) |
| $\nu$            | viscosité cinématique. ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )                        |

|          |  |
|----------|--|
| $\rho$   | masse volumique du fluide. ( $\text{kg. m}^{-3}$ )   |
| $\psi$   | fonction de courant. ( $\text{m}^2. \text{s}^{-1}$ ) |
| $\omega$ | vorticité. ( $\text{s}^{-1}$ )                       |
| $\phi$   | fonction générale.                                   |

### Exposant

+ Paramètres adimensionnels.

### Indices

|                  |         |
|------------------|---------|
| ch               | chaude. |
| fr               | froide. |
| L                | local.  |
| M                | moyen.  |
| G                | global. |
| AB, CD, BC et AD | parois. |

# Sommaire

|   |    |
|---|----|
| <b>INTRODUCTION</b>   | 1  |
| <b>CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>   | 3  |
| <b>CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE</b>   | 7  |
| 2.1 Description du problème   | 7  |
| 2.2 Hypothèses simplificatrices   | 8  |
| 2.3 Formulation vectorielle   | 8  |
| 2.3.1 Formulation indicielle  | 9  |
| 2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes   | 9  |
| 2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement   | 10 |
| 2.6 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles  | 11 |
| 2.6.1 Première condition pariétale thermique  | 11 |
| 2.6.2 Deuxième condition pariétale thermique  | 12 |
| 2.6.3 Troisième condition pariétale thermique   | 12 |
| 2.6.4 Quatrième condition pariétale thermique   | 12 |
| 2.7 Adimensionalisation   | 13 |
| 2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles   | 14 |
| 2.8.1 Première condition pariétale thermique  | 14 |
| 2.8.2 Deuxième condition pariétale thermique  | 15 |
| 2.8.3 Troisième condition pariétale thermique   | 14 |
| 2.8.4 Quatrième condition pariétale thermique   | 15 |
| 2.9 Coefficients d'échange de la chaleur  | 15 |
| 2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt  | 15 |
| 2.9.2 Nombre de Nusselt global  | 16 |
| <b>CHAPITRE 3 – FORMULATION NUMERIQUE</b>   | 17 |
| 3.1 Introduction  | 17 |
| 3.2 Méthode de résolution numérique   | 17 |
| 3.2.1 Volume élémentaire d'intégration  | 18 |
| 3.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle | 19 |
| 3.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie   | 24 |
| 3.4.1 Discrétisation des conditions aux limites   | 27 |

|  |   |           |
|--|---|-----------|
| 3.5                                      | Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement                         | 28        |
| 3.5.1                                    | Discrétisation des conditions aux limites                                     | 30        |
| 3.6                                      | Discrétisation de l'équation de la fonction de courant                        | 31        |
| 3.6.1                                    | Discrétisation des conditions aux limites                                     | 32        |
| 3.7                                      | Discrétisation des composantes de la vitesse                                  | 32        |
| 3.8                                      | Processus du calcul   | 33        |
| <b>CHAPITRE 4 – RESULTATS NUMERIQUES</b> |   | <b>35</b> |
| 4.1                                      | Introduction  | 35        |
| 4.2                                      | Etude du maillage   | 35        |
| 4.3                                      | Comparaison des résultats issus du code de calcul avec ceux de la littérature | 36        |
| <b>4.4</b>                               | <b>Première condition pariétale thermique :</b>                               | <b>37</b> |
| 4.4.1                                    | Influence du nombre de Rayleigh   | 37        |
| 4.4.1.1                                  | Isothermes et lignes de courant   | 37        |
| 4.4.1.2                                  | Nombre de Nusselt local   | 40        |
| 4.4.1.2.1                                | Variation du nombre de Nusselt local sur les parois chaudes                   | 40        |
| 4.4.1.2.2                                | Variation du nombre de Nusselt local sur les parois froides                   | 41        |
| 4.4.1.2.3                                | Nombre de Nusselt moyen   | 43        |
| <b>4.5</b>                               | <b>Deuxième condition pariétale thermique :</b>                               | <b>43</b> |
| 4.5.1                                    | Influence du nombre de Rayleigh   | 43        |
| 4.5.1.1                                  | Isothermes et lignes de courant   | 43        |
| 4.5.1.2                                  | Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives                   | 47        |
| <b>4.6</b>                               | <b>Troisième condition pariétale thermique :</b>                              | <b>49</b> |
| 4.6.1                                    | Influence du nombre de Rayleigh   | 49        |
| 4.6.1.1                                  | Isothermes et lignes de courant   | 49        |
| 4.6.1.2                                  | Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives                   | 52        |
| <b>4.7</b>                               | <b>Quatrième condition pariétale thermique :</b>                              | <b>54</b> |
| 4.7.1                                    | Influence du nombre de Rayleigh   | 54        |
| 4.7.1.1                                  | Isothermes et lignes de courant   | 54        |
| 4.7.1.2                                  | Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives                   | 56        |
| <b>CONCLUSION</b>                        |   | <b>59</b> |
| <b>ANNEXE : METHODES ITERATIVES</b>      |   | <b>60</b> |
| <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>       |   | <b>63</b> |

# Introduction

L'étude des transferts de chaleur par convection dans les enceintes fermées est intéressante, compte tenu de leurs diverses applications dans le génie industriel, ainsi que leur utilisation comme échangeurs dans la conversion énergétique.

Comme exemples d'applications, on peut citer le chauffage industriel de l'eau et la stérilisation médicale.

L'objectif du présent travail est d'étudier la convection, naturelle, laminaire et permanente dans une enceinte cubique allongée, de grand axe horizontal, inclinée d'un angle  $\alpha$  eu égard au plan horizontal, remplie d'un fluide newtonien et chauffée par deux côtés opposés (deux parois opposées sont maintenues isothermes chaudes quant aux deux autres elles sont isothermes froides), dans un premier cas, ensuite dans un deuxième, un troisième et un quatrième cas de chauffage nous imposons aux deux parois inférieures une température dont les variations sont périodiques suivant les dimensions de chacune des parois considérée et nous maintenons les deux parois supérieures adiabatiques.

Etant donné l'abondance des travaux concernant le phénomène de convection naturelle pouvant se dérouler dans des enceintes fermées cubiques, nous illustrons dans le premier chapitre, une riche étude bibliographique qui nous a permis de situer notre travail.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développées. Les équations paraboliques décrivant l'écoulement sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis tandis que l'équation de la fonction de courant l'est à l'aide d'un développement



en série de Taylor, les équations ainsi obtenues sont résolues par la méthode de sous-relaxation successive (Successive Under Relaxation).

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par des résultats issus de la littérature et enfin nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant et les isothermes au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt locaux et globaux, sur les parois chaudes et froides de l'enceinte, sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Rayleigh, pour voir leur effet sur les transferts de chaleur au sein de l'enceinte considérée.

Pour ne pas alourdir le texte, nous présentons en annexe quelques compléments d'analyse numérique.

# Chapitre 1

## Recherche Bibliographique

Une grande variété de corrélations mathématiques servant à la prédiction des transferts de chaleur est disponible dans la littérature, concernant aussi bien les processus transitoires que permanents.

Parmi les travaux concernant les enceintes fermées la majorité a été consacrée à la géométrie cubique.

J.Pallares et al [1] ont présenté l'étude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle laminaire dans une enceinte cubique chauffée par le bas, pour des nombres de Rayleigh modérés en considérant trois nombres de Prandtl 0.71, 10 et 130. Les parois sont considérées rigides et immobiles, celles horizontales sont maintenues isothermes alors que celles latérales sont adiabatiques. L'approximation de Boussinesq est considérée, ils ont obtenu sept différentes structures d'écoulements et ont identifié plusieurs transitions pour  $Ra \leq 6 \times 10^6$  et  $Pr \leq 130$ .

Ramon L. Frederick et al [2] ont étudié numériquement dans une enceinte cubique avec une paroi verticale froide et un secteur carré chaud centré sur la paroi opposée, la convection naturelle stationnaire laminaire et tridimensionnelle, L'écoulement s'organise en une seule cellule. La transition du régime conductif au régime de convectif se fait à  $Ra=10^5$ .

Qi-Hong Deng et al [3] ont mené une étude numérique de la convection naturelle stationnaire laminaire et bidimensionnelle dans une enceinte rectangulaire dont les parois sont chauffées partiellement. Une combinaison entre les différentes conditions de chauffage pour les parois chauffées partiellement, est utilisée pour l'adimensionalisation des équations, gouvernant la convection naturelle.

Massimo Corcione [4] propose une étude numérique de la convection naturelle stationnaire laminaire et bidimensionnelle dans une enceinte rectangulaire, remplie d'air et soumise à un gradient de température vertical, en considérant plusieurs conditions thermiques pour les parois latérales. Un modèle numérique basé sur l'algorithme SIMPLER est employé pour la solution des équations de la masse, du mouvement et de l'énergie, les simulations sont effectuées pour plusieurs valeurs du rapport d'aspect « largeur/hauteur » de l'enceinte variant entre 0.66 et 8 et le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de la cavité variant entre  $10^3$  et  $10^6$  dont l'influence sur l'écoulement est examinée, les distributions des isothermes et des isocourants sont analysés et discutés. Des comparaisons parmi les différentes configurations thermiques considérées sont illustrées en particulier, celle où les parois latérales sont adiabatiques.

A.K. da Silva et al [5] ont évalué dans cette étude, l'effet sur la convection naturelle laminaire et tridimensionnelle dans une enceinte cubique soumise à un gradient thermique horizontal, du rapport d'aspect d'une ailette parallépipédique métallique, à très grande conductivité thermique, en faisant varier sa longueur, cette dernière est attachée à la paroi verticale chaude, toutes les autres parois sont maintenues adiabatiques. L'objectif de cette configuration est l'augmentation de la transmission de la chaleur provenant de la paroi chauffée au fluide lorsque la fraction volumique de l'ailette est fixée. Deux valeurs différentes pour le volume de cette dernière ont été examinées: (i) une grande ailette qui occupe 10% de l'enceinte cubique, et (ii) une ailette beaucoup plus petite qui occupe seulement 0.1% du volume total de l'enceinte. La technique des éléments finis a été appliquée pour résoudre à l'état stationnaire les équations couplées de la vitesse et de la température en faisant varier le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de l'enceinte «  $10^3 \leq Ra \leq 10^5$  ».

Mehmet Cem Ece et al [6] ont présenté une étude de la convection naturelle stationnaire et laminaire en présence d'un champ magnétique dans une enceinte rectangulaire inclinée à laquelle on impose un gradient de température sur deux parois adjacentes, les deux autres parois opposées sont maintenues adiabatiques. Les équations gouvernantes sont résolues numériquement en utilisant la formulation vorticité-fonction de courant et une méthode de quadrature différentielle pour différents nombres de Grashof et de Hartman, trois rapports d'aspect, différents angles d'inclinaison et directions du champ magnétique. Les résultats montrent que l'orientation et le rapport d'aspect de l'enceinte ainsi que l'intensité et la

direction du champ magnétique ont des effets significatifs sur les champs d'écoulement et de température.

E. Bilgen et al [7] ont étudié numériquement la convection naturelle stationnaire laminaire dans une enceinte rectangulaire, dont une paroi verticale est active alors que toutes les autres parois sont adiabatiques. La paroi latérale active également divisée est chauffée et refroidie avec des profils de température sinusoïdaux. Deux cas ont été considérés : (i) la partie inférieure est chauffée tandis que la partie supérieure est refroidie, (ii) la partie supérieure est chauffée tandis que la partie inférieure est refroidie. Les équations de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie sont résolues numériquement et les résultats sont présentés sous forme d'isocourants, isothermes, nombre de Nusselt local et moyen.

Abdullatif Ben-Nakhi et Ali J. Chamkha [8] ont consacré leur étude à la convection naturelle stationnaire laminaire dans une enceinte carrée dont l'une des parois latérales est chauffée et munie d'une ailette inclinée de longueur arbitraire, alors que les trois autres parois sont maintenues froides. La solution numérique basée sur la méthode des volumes finis est obtenue. Les résultats représentatifs illustrent les effets de l'angle d'inclinaison de l'ailette ainsi que sa longueur sur les isocourants et les isothermes dans l'enceinte. En outre, des résultats pour les nombres locaux et moyens de Nusselt sont présentés et discutés pour différentes conditions paramétriques.

Zekeriya Altaç et Özen Kurtul [9] ont mené une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans des enceintes rectangulaires inclinées contenant une plaque chaude verticalement située à l'intérieur. La plaque est très mince et isotherme sur les deux faces latérales, et elle agit comme une source de chaleur au centre. Une paroi latérale de l'enceinte est froide alors que les trois autres parois sont adiabatiques. L'approximation de Boussinesq est considérée, les équations de Navier Stokes, l'équation de continuité et l'équation de l'énergie, sont résolues en utilisant la formulation vorticité-fonction de courant et la méthode des volumes finis. Le nombre de Rayleigh varie de  $10^5$  à  $10^7$  et l'angle d'inclinaison de l'enceinte varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . Les rapports d'aspect des enceintes rectangulaires qui sont considérées dans cette étude sont  $A=1$  et  $A=2$ . Les isothermes et les isocourants sont présentés pour différents nombres de Rayleigh, et les nombres de Nusselt moyens sont calculés en fonction du nombre de Rayleigh et d'autres paramètres géométriques non dimensionnels.

Amaresh Dalal et Manab Kumar Das [10] ont présenté dans cette étude numérique la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée remplie d'air, dont l'une des deux parois latérales est corruguée. La paroi supérieure est chauffée par une température à profil sinusoïdal. Les trois autres parois, sont refroidies. Ce problème est résolu numériquement en utilisant l'algorithme SIMPLE et la méthode des volumes finis avec un schéma numérique de Quick dans un système de coordonnées non-orthogonal généralisé. L'effet des différents paramètres (nombre de Rayleigh, amplitude des ondulations ainsi que leur nombre) sur l'écoulement à été examiné.

Tzong Huei Chen et al [11] ont présenté une simulation numérique de la convection naturelle laminaire stationnaire et bidimensionnelle dans une enceinte carrée dont la paroi latérale gauche est divisée en deux parties (chaude-adiabatique) et celle du bas l'est en cinq parties (adiabatique-chaude-adiabatique-chaude-adiabatique), ceci étant un premier cas de chauffage, le deuxième cas de chauffage serait d'utiliser la paroi du bas à la place de celle de gauche et celle de gauche à la place de celle du bas. Le problème est résolu en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats sont illustrés sous formes d'isocourants et d'isothermes pour des nombres de Rayleigh variant de  $10^2$  à  $10^7$  dans la cavité. Les effets des longueurs des parties chauffées des deux parois sur les champs hydrodynamique et thermique à l'intérieur de l'enceinte sont également présentés.

Abdullatif Ben-Nakhi et Ali J. Chamkha [12] ont mené une étude numérique de la convection naturelle stationnaire laminaire autour d'un conduit cylindrique, muni de quatre ailettes perpendiculaires, placé au centre d'une enceinte carrée. Le problème est adimensionnalisé et numériquement résolu par la méthode des volumes finis. Les résultats illustrent les effets de la longueur des ailettes ainsi que leur inclinaison sur les isocourants et les isothermes dans l'enceinte. Les nombres locaux et moyens de Nusselt sont présentés et discutés pour différentes conditions paramétriques.

# Chapitre 2

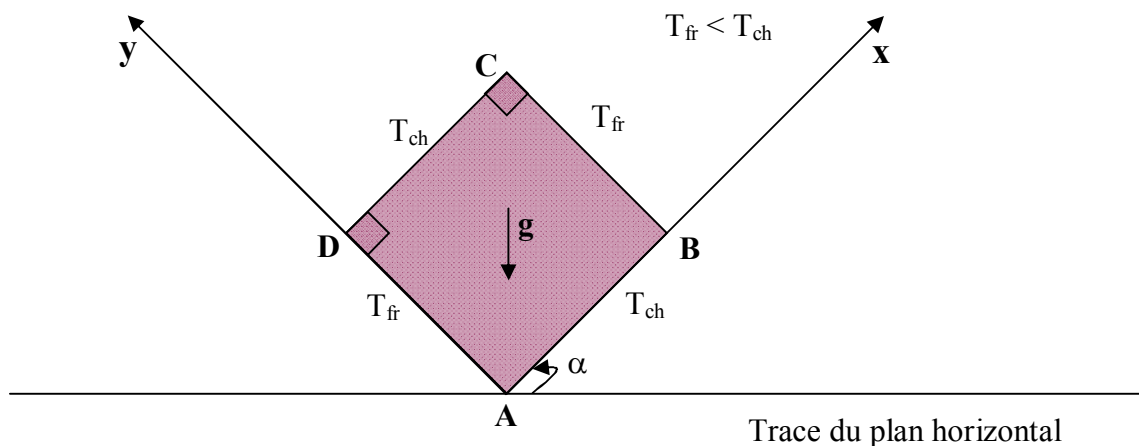
## Analyse théorique

### 2.1 Description du problème

La figure 2.1 schématise une section transversale, par un plan vertical, d'une cavité très allongée suivant un axe horizontal  $Az$  perpendiculaire au plan de la figure, de section droite carrée, inclinée de façon que ses plans diagonaux soit l'un vertical, l'autre horizontal, ainsi que le repère cartésien bidimensionnel.

La cavité est supposée remplie d'un fluide newtonien, en l'occurrence de l'air.

Initialement le système est en équilibre thermodynamique à la température  $T_0$ . Les côtés  $AB$  et  $CD$  sont portés à la température  $T_{ch}$  et les côtés  $BC$  et  $AD$  à la température  $T_{fr}$  avec  $T_{ch} > T_{fr}$ , ceci dans un premier cas de chauffage et nous verrons dans ce qui suit les autres cas de chauffage.



**Figure 2.1** représentation schématique de la section transversale du système par un plan vertical et du repère cartésien

Il se produit, donc dans l'enceinte une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

## 2.2 Hypothèses simplificatrices

Nous considérons un écoulement de fluide incompressible, à propriétés physiques constantes et par ailleurs nous supposons être dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Celle-ci consiste à considérer les variations de la masse volumique  $\rho$  négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température, supposées linéaires engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc:

$$\rho = \rho(P, T) = \rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

où :  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique (constant).

$\rho_0$  est la masse volumique de référence (constante).

$T_0$  est la température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à  $\rho_0$ .

La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur, le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des parois étant négligées).

Nous admettons que le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.

## 2.3 Formulation vectorielle

- Equation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (2.3)$$

- Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

avec :

- $\rho, \lambda$  : masse volumique et conductivité thermique du fluide.
- $c_p$  : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.
- $P$  : tenseur des contraintes.
- $\vec{V}, \vec{g}$  : Vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.

### 2.3.1 Formulation indicielle

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.2.a)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i \quad (2.3.a)$$

- Equation de la température:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.4.a)$$

avec :

$P$  : pression du fluide.

$\tau_{ij}$  : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

### 2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes définies sur la figure 2.2.

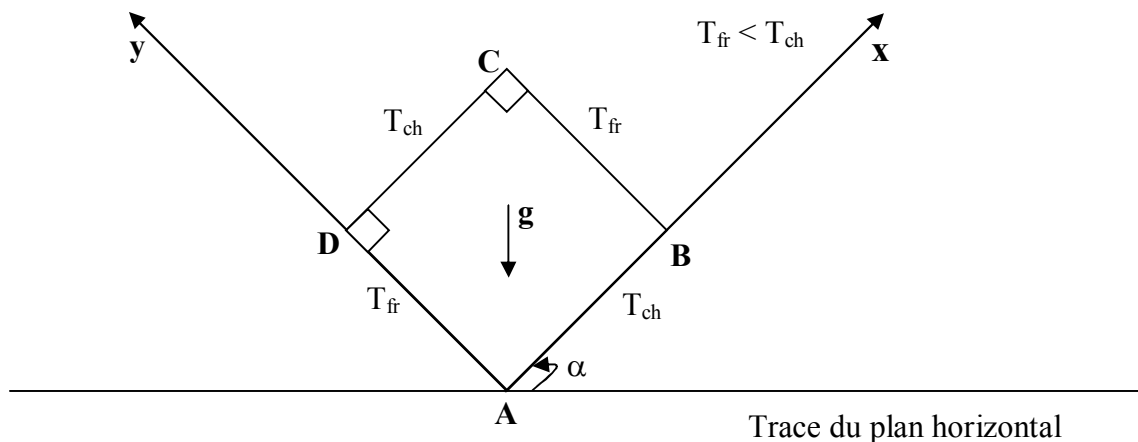


Figure 2.2 Coordonnées cartésiennes



Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations (2.2), (2.3) et (2.4) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) \beta T_d + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.6.a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) \beta T_d + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.6.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

## 2.5 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement

En dérivant les équations du mouvement (2.6.a) et (2.6.b) respectivement par rapport à y et à x. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (g \beta T_d \sin(\alpha)) \\ + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g \beta T_d \cos(\alpha)) \\ + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8.b)$$

En soustrayant l'équation (2.8.a) de (2.8.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité  $\omega$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \beta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

Avec :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.10.aa)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial U^2}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.10.b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.bb)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.c)$$

Où ;

U, V sont les composantes de la vitesse suivant les directions x, y.

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Nous en déduisons :

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

## 2.6 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles

Les conditions initiales dimensionnelles sont :

$0 \leq x \leq L$  et  $0 \leq y \leq L$

$$T = 0 \quad (2.13.a)$$

$$U = V = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (2.13.b)$$

$$\omega = 0 \quad (2.13.c)$$

Les conditions aux limites dimensionnelles sont :

### 2.6.1 Première condition pariétale thermique

$\forall y$ , à  $x = 0$  ou  $x = L$

$$T = T_{fr} \quad (2.14)$$

$\forall x$ , à  $y = 0$  ou  $y = L$

$$T = T_{ch} \quad (2.15)$$

**2.6.2 Deuxième condition pariétale thermique** $\forall x, \text{ à } y=0$ 

$$T = \frac{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}}{2} \left( 1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) + T_{\text{fr}} \quad (2.16)$$

 $\forall x, \text{ à } y=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

 $\forall y, \text{ à } x=0$ 

$$T = \frac{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}}{2} \left( 1 + \cos\left(\pi \frac{y}{L}\right) \right) + T_{\text{fr}} \quad (2.18)$$

 $\forall y, \text{ à } x=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.19)$$

**2.6.3 Troisième condition pariétale thermique** $\forall x, \text{ à } y=0$ 

$$T = \frac{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}}{2} \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \right) + T_{\text{fr}} \quad (2.20)$$

 $\forall x, \text{ à } y=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

 $\forall y, \text{ à } x=0$ 

$$T = \frac{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}}{2} \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{y}{L}\right) \right) + T_{\text{fr}} \quad (2.22)$$

 $\forall y, \text{ à } x=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

**2.6.4 Quatrième condition pariétale thermique** $\forall x, \text{ à } y=0$ 

$$T = (T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + T_{\text{fr}} \quad (2.24)$$

 $\forall x, \text{ à } y=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

 $\forall y, \text{ à } x=0$ 

$$T = (T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}) \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right) + T_{\text{fr}} \quad (2.26)$$

 $\forall y, \text{ à } x=L$ 

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

Avec :

$$U = V = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.29)$$

sur toutes les parois considérées quelque soit la condition pariétale thermique considérée.

## 2.7 Adimensionalisation

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$L$  : la longueur des côtés de l'enceinte est prise comme référence.

$$x^+ = \frac{x}{L}, \quad y^+ = \frac{y}{L}, \quad U^+ = \frac{UL}{a}, \quad V^+ = \frac{VL}{a}, \quad \omega^+ = \frac{\omega L^2}{a}, \quad T^+ = \frac{T - T_{fr}}{T_{ch} - T_{fr}}, \quad \psi^+ = \frac{\psi}{a} \quad \text{et} \quad t^+ = \frac{ta}{L^2}$$

Et en les portant dans les équations (2.5), (2.7) et (2.9), on obtient :

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial V^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\partial T^{+2}}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial T^{+2}}{\partial y^{+2}} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial y^+} = Ra \cdot Pr \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \cos(\alpha) - \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \sin(\alpha) \right) + Pr \left( \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (2.32)$$

Avec :

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{g\beta(T_{ch} - T_{fr})L^3}{a\nu}$$

$Pr$ , le nombre de Prandtl.

Où:

Les composantes  $U^+$ ,  $V^+$  de la vitesse et de la vorticité  $\omega^+$  adimensionnelles sont définies par :

$$U^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} \quad (2.33.a)$$

$$V^+ = - \frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} \quad (2.33.b)$$

$$\omega^+ = - \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^{+2}} \right] \quad (2.34)$$

## 2.8 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions initiales adimensionnelles sont :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1$$

$$T^+ = 0 \quad (2.35)$$

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial \Psi^+}{\partial x^+} = \frac{\partial \Psi^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.36)$$

$$\omega^+ = 0 \quad (2.37)$$

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

### 2.8.1 Première condition pariétale thermique

$$\forall y, \text{ à } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$T^+ = 0 \quad (2.38)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 0 \text{ ou } y = 1$$

$$T^+ = 1 \quad (2.39)$$

### 2.8.2 Deuxième condition pariétale thermique

$$\forall x, \text{ à } y = 0$$

$$T^+ = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi x^+)) \quad (2.40)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 1$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = 0 \quad (2.41)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 0$$

$$T^+ = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi y^+)) \quad (2.42)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 1$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.43)$$

### 2.8.3 Troisième condition pariétale thermique

$$\forall x, \text{ à } y = 0$$

$$T^+ = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi x^+)) \quad (2.44)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 1$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = 0 \quad (2.45)$$

$\forall y$ , à  $x = 0$

$$T^+ = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi y^+)) \quad (2.46)$$

$\forall y$ , à  $x = 1$

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.47)$$

#### 2.8.4 Quatrième condition pariétale thermique

$\forall x$ , à  $y = 0$

$$T^+ = \sin(\pi x^+) \quad (2.48)$$

$\forall x$ , à  $y = 1$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = 0 \quad (2.49)$$

$\forall y$ , à  $x = 0$

$$T^+ = \sin(\pi y^+) \quad (2.50)$$

$\forall y$ , à  $x = 1$

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.51)$$

Avec :

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} = \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.52)$$

$$\omega^+ = -\left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (2.53)$$

sur toutes les parois considérées quelque soit la condition pariétale thermique considérée.

## 2.9 Coefficients d'échange de la chaleur

### 2.9.1 Valeur locale du nombre de Nusselt

En utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les deux conditions, il vient :

- Sur les parois AB et CD :

$$Nu_{L, AB, CD} = -\frac{\partial T^+}{\partial y^+} \Big|_{y=0,1} \quad (2.54.a)$$

- Sur les parois AD et BC:

$$\text{Nu}_{L AD, BC} = -\left. \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right|_{x=0,1} \quad (2.54.b)$$

### 2.9.2 Nombre de Nusselt global

Définissons (par unité de longueur suivant Az) la somme des nombres de Nusselt moyens des deux parois chaudes, comme étant un nombre de Nusselt global relatif à ces deux dernières :  $\text{Nu}_{G(AB+CD)} = \text{Nu}_{M AB} + \text{Nu}_{M CD}$

Et la somme des deux nombres de Nusselt moyens des deux parois froides, comme étant un nombre de Nusselt global relatif à ces deux parois :  $\text{Nu}_{G(AD+BC)} = \text{Nu}_{M AD} + \text{Nu}_{M BC}$ .

Il vient :

$$\text{Nu}_{G(AB+CD)} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_{\frac{1}{2}} dx + \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_{\frac{1}{2}} dx \quad (2.55.a)$$

$$\text{Nu}_{G(AD+BC)} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right)_{\frac{1}{2}} dy + \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right)_{\frac{1}{2}} dy \quad (2.55.b)$$

Avec:

$$\text{Nu}_{M AB} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{Nu}_{M CD} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{Nu}_{M AD} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right)_{\frac{1}{2}} dy$$

$$\text{Nu}_{M BC} = \int_0^1 \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right)_{\frac{1}{2}} dy$$

# Chapitre 3

## Formulation Numérique

### 3.1 Introduction

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre précédent, montre que deux paramètres influencent les profils de la fonction de courant et de la température dans l'enceinte cubique, en maintenant le nombre de Prandtl constant, ce sont :

- l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .
- le nombre de Rayleigh Ra.

Dans notre travail, nous utilisons :

- Une valeur de l'angle d'inclinaisons  $\alpha=45^\circ$ .

Nous utilisons des pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$  constants.

Plus précisément, nous posons :

$$\Delta x = \frac{x_{NI} - x_1}{NI - 1}$$

avec :

$$\Delta y = \frac{y_{NN} - y_1}{NN - 1}$$

NI : le nombre des points suivant x.

NN : le nombre des points suivant y.

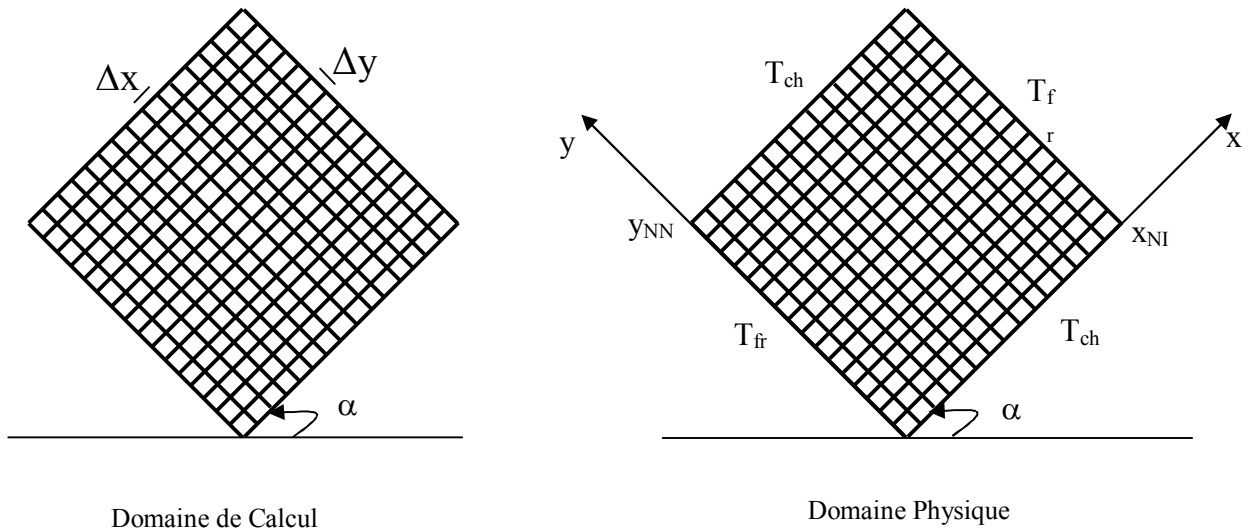
### 3.2 Méthode de résolution numérique

Pour la résolution du système d'équations (2.31), (2.32) et les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Alors que pour l'équation (2.34), nous considérons une solution numérique par la méthode des différences centrées.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts, elles sont bien exposées par S.V. PATANKAR [13], E.F. NOGOTOV [14] et par E. SAATAJIAN [15].

La figure 3.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.





**Figure 3.1** Domaine de calcul et domaine physique.

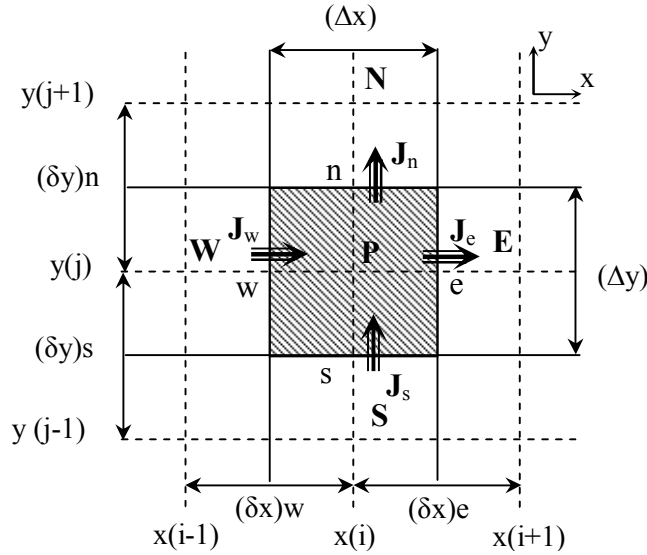
### 3.2.1 Volume élémentaire d'intégration

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $x$  et  $y$  en un ensemble de volumes élémentaires ou « volume de contrôle » égaux à « $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$ ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction  $z$  comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$  et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$ . Les variables scalaires (vorticité, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds  $E$  et  $N$  sont pris dans les directions des coordonnées positives de  $x$  et  $y$  respectivement et les nœuds  $W$  et  $S$  dans les sens contraires.

La figure 3.2 représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.



**Figure 3.2 Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage dans le domaine de calcul.**

### **3.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle**

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation de la chaleur (2.31) et l'équation du mouvement (2.32).

Elles s'écrivent, compte tenu de l'équation de continuité (2.30), respectivement :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} (U^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial x^+}) + \frac{\partial}{\partial y^+} (V^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial y^+}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} (U^+ \omega^+ - \text{Pr} \frac{\partial \omega^+}{\partial x^+}) + \frac{\partial}{\partial y^+} (V^+ \omega^+ - \text{Pr} \frac{\partial \omega^+}{\partial y^+}) = \text{Ra} \cdot \text{Pr} \left( \cos(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (3.2)$$

Ces deux équations sont de la forme générale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^+} (U^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x^+}) + \frac{\partial}{\partial y^+} (V^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y^+}) = S_\phi \quad (3.3)$$

Les sources et les coefficients de diffusion sont spécifiés dans le tableau 3.1

| équation | $\varphi$  | $\Gamma_\varphi$ | $S_\varphi$   |
|----------|------------|------------------|---|
| 3.1      | $T^+$      | 1                | 0   |
| 3.2      | $\omega^+$ | Pr               | $\text{Ra.Pr} \left( \cos(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \frac{1}{\text{Pr}}$ |

**Tableau 3.1** Les sources et les coefficients de diffusion des variables  $\varphi$ 

$\varphi$  : fonction générale (soit  $\omega^+$ , soit  $T^+$ ).

$\Gamma_\varphi$  : coefficient adimensionnel.

$S_\varphi$  : terme de source.

L'équation de discrétisation d'une variable  $\varphi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} dx dy dt + \iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial x^+} (U^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+}) dx dy dt + \\ \iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial y^+} (V^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+}) dx dy dt = \iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} S_\varphi dx dy dt \end{aligned}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial \varphi}{\partial t^+} dx dy dt + \underbrace{\iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \left[ \frac{\partial (U^+ \varphi)}{\partial x^+} + \frac{\partial (V^+ \varphi)}{\partial y^+} \right] dx dy dt}_1 = \\ \underbrace{\iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} \left[ \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y^+} \right) \right] dx dy dt}_2 + \underbrace{\iint_{w s} \int_{t^+}^{e n t^+ + \Delta t^+} S_\varphi dx dy dt}_3 \end{aligned}$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de  $\varphi$ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour approcher les variations de  $\varphi$  entre les points du maillage [13]. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, [13].

Posons :

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \left( U^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ j_y &= \left( V^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Où  $j_y$  et  $j_x$  sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portons ces valeurs dans l'équation (3.3), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = S_\varphi \quad (3.5)$$

L'intégration de l'équation (3.5) dans le volume de contrôle de la figure 3.2 donne :

$$\frac{(\varphi_p^{t^+} - \varphi_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + j_n - j_s + j_e - j_w = \overline{S_\varphi} \cdot \Delta V \quad (3.6)$$

$j_e, j_w, j_n$  et  $j_s$  sont les valeurs de flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\overline{S_\varphi}$  est la valeur moyenne de  $S_\varphi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\varphi_p$  (au nœud P) et se mettre sous la forme :

$$\overline{S_\varphi} = S_0 + S_p \cdot \varphi_p \quad (3.7)$$

avec  $S_p < 0$ .

Par suite l'équation (3.6) devient :

$$\frac{(\varphi_p^{t^+} - \varphi_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + j_n - j_s + j_e - j_w = (S_0 + S_p \cdot \varphi_p) \cdot \Delta V \quad (3.8)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (2.11) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.9)$$

Où  $F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$ , sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (V^+)_n \cdot \Delta x \\ F_s &= (V^+)_s \cdot \Delta x \\ F_e &= (U^+)_e \cdot \Delta y \\ F_w &= (U^+)_w \cdot \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Nous poserons dans ce qui suit  $\varphi_p^{t^+} = \varphi_p$

En multipliant l'équation (3.9) par la fonction  $\varphi_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.8), il vient :

$$\begin{aligned} (\varphi_P - \varphi_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + (j_n - F_n \cdot \varphi_P) - (j_s - F_s \cdot \varphi_P) + (j_e - F_e \cdot \varphi_P) \\ - (j_w - F_w \cdot \varphi_P) = (S_0 + S_p \cdot \varphi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'après le schéma numérique du POWER LAW de S.V. PATANKAR [13], on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (3.11) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} j_n - F_n \cdot \varphi_P &= a_N (\varphi_P - \varphi_N) \\ j_s - F_s \cdot \varphi_P &= a_S (\varphi_S - \varphi_P) \\ j_e - F_e \cdot \varphi_P &= a_E (\varphi_P - \varphi_E) \\ j_w - F_w \cdot \varphi_P &= a_W (\varphi_W - \varphi_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} (\varphi_P - \varphi_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} + a_N (\varphi_P - \varphi_N) - a_S (\varphi_S - \varphi_P) + a_E (\varphi_P - \varphi_E) \\ - a_W (\varphi_W - \varphi_P) = (S_0 + S_p \cdot \varphi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_P \varphi_P = a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b \quad (3.14)$$

avec :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_p \Delta V \quad (3.15)$$

$$a_P^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} \quad (3.16)$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V + a_P^0 \varphi_P^0 \quad (3.17)$$

On introduit maintenant la fonction  $A(|P|)$  du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law), d'après S.V. PATANKAR [13], elle est donnée par :

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1|P|)^5 \right\|$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de l'équation algébrique (3.14) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n A \left( P_n \right) + \| -F_n, 0 \| \\ a_S &= D_s A \left( P_s \right) + \| F_s, 0 \| \\ a_E &= D_e A \left( P_e \right) + \| -F_e, 0 \| \\ a_W &= D_w A \left( P_w \right) + \| F_w, 0 \| \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Dans les relations (3.17), les grandeurs  $D_n$ ,  $D_s$ ,  $D_e$  et  $D_w$  sont les termes diffusifs, et  $P_n$ ,  $P_s$ ,  $P_e$  et  $P_w$  sont donc, les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta y}{(\delta x)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta y}{(\delta x)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta x}{(\delta y)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta x}{(\delta y)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration  $(\delta x)_n$ ,  $(\delta x)_s$ ,  $(\delta y)_e$  et  $(\delta y)_w$  peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta x$  et  $\Delta y$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Considérons que les interfaces  $n$ ,  $s$ ,  $e$  et  $w$  qui sont les milieux des  $(P,N)$ ,  $(P,S)$ ,  $(P,E)$  et  $(P,W)$ .

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta y}{\Delta x} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta y}{\Delta x} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta x}{\Delta y} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.14) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_p$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$ , doit être égal à la somme des autres coefficients et  $S_p \Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variable dépendantes :  $\varphi$  est l'une de ces variables  $T^+$  et  $\omega^+$ . Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\varphi$  et la source  $S_\varphi$  sont définis dans le tableau 3.1.

### 3.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de l'énergie est intégrée dans le volume fini typique de dimension  $(\Delta x)_p \cdot (\Delta y)_p$ . En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_p T_p^+ = a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + S_T \quad (3.21)$$

le coefficient  $a_p$  figurant dans l'équation (3.15) devient :

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} \quad (3.22)$$

Et le terme de source de cette équation est :

$$S_T = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t^+} T_p$$

où  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  ont respectivement les mêmes expressions que celles données dans le système (3.17).

En introduisant la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^+$  dans le système (3.10), il vient :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \Delta x \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_n \\ F_s &= \Delta x \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_s \\ F_e &= \Delta y \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial y} \right)_e \\ F_w &= \Delta y \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial y} \right)_w \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\begin{aligned}\psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2}\end{aligned}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface "e" est établi d'après la démarche de E.F. NOGOTOV [14], comme suit : (voir figure 3.3).

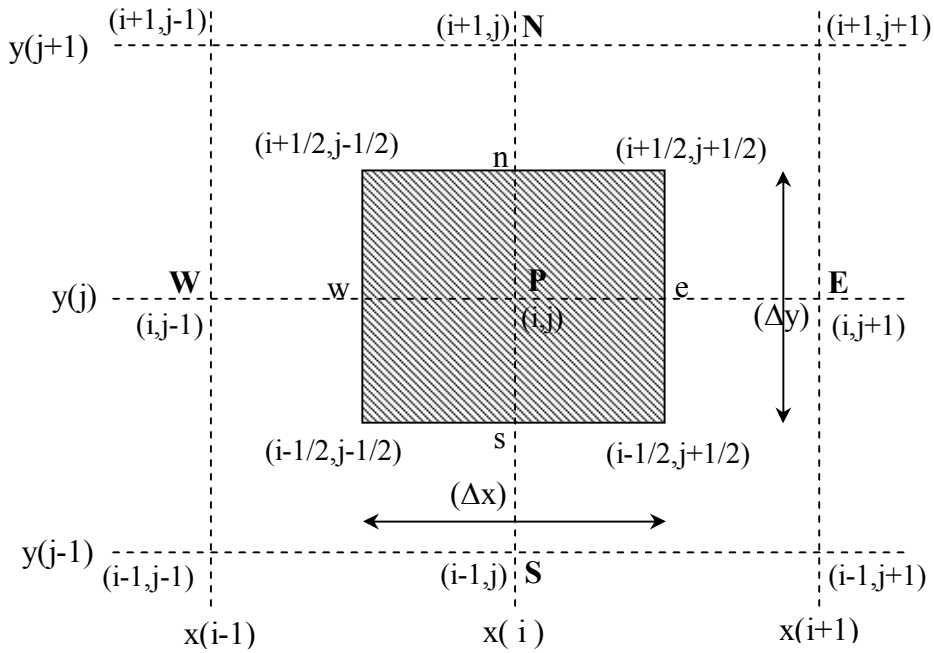


Figure 3.3 Représentation schématique des nœuds P, E, W, N et S dans le maillage

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y}\right)_e &= \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)}{\Delta y} \\ \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial y}\right)_e &= \frac{1}{2\Delta y} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta y} \left[ \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]\end{aligned}$$

Par suite la fonction  $F_e$  s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.a)$$



De la même façon, on écrit le gradient à l'interface "w".

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \right)_{\dot{j}_w} &= \frac{\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta y} \\ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta y} \end{aligned}$$

Et la fonction  $F_w$  est donnée par :

$$F_w = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.b)$$

De la même manière, le gradient à l'interface "n" est défini par :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_{\dot{j}_n} &= \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)}{\Delta x} \\ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_{\dot{j}_n} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta x} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_{\dot{j}_n} &= \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta x} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F_n = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.c)$$

Le gradient à l'interface "s" s'exprime par la relation :

$$\left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right)_{\dot{j}_s} = \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta x}$$

Et l'expression  $F_s$  devient :

$$F_s = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient  $\Gamma_\phi$  prend la valeur (1).

En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ D_e = D_w &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21), on écrit W, P, E, N et S respectivement  $(i-1, j)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j+1)$  et  $(i, j-1)$ .

Les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i,j)$ .

Ainsi l'équation (3.21) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$a_P T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) + S_T \quad (3.27)$$

### 3.4.1 Discrétisation des conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir :

#### 3.4.1.1 Première condition pariétale thermique

- Sur les parois froides ( $I=1$  et  $I=NI$ ) :

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Sur les parois chaudes ( $J=1$  et  $J=NN$ ) :

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

#### 3.4.1.2 Deuxième condition pariétale thermique

- Sur la première paroi active ( $J=1$ ) :

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x^+))$$

- Sur la deuxième paroi active ( $I=1$ ) :

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi y^+))$$

### 3.4.1.3 Troisième condition pariétale thermique

- Sur la première paroi active (J=1) :  
 $a_p = 1$   
 $a_E = a_W = a_N = a_S = 0$  et  $S_T = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi x^+))$
- Sur la deuxième paroi active (I=1) :  
 $a_p = 1$   
 $a_E = a_W = a_N = a_S = 0$  et  $S_T = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi y^+))$

### 3.4.1.4 Quatrième condition pariétale thermique

- Sur la première paroi active (J=1) :  
 $a_p = 1$   
 $a_E = a_W = a_N = a_S = 0$  et  $S_T = \sin(\pi x^+)$
- Sur la deuxième paroi active (I=1) :  
 $a_p = 1$   
 $a_E = a_W = a_N = a_S = 0$  et  $S_T = \sin(\pi y^+)$

Pour le deuxième, troisième et quatrième cas les coefficients de l'équation de discrétisation quand l'une des parois est considérée adiabatique sont les suivants :

- Sur la première paroi adiabatique (J=NN) :  
 $a_p = 1$   
 $a_N = 1$   
 $a_E = a_W = a_S = 0$  et  $S_T = 0$
- Sur la première paroi adiabatique (I=NI) :  
 $a_p = 1$   
 $a_W = 1$   
 $a_E = a_N = a_S = 0$  et  $S_T = 0$

## 3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation discrétisée (3.13) peut se mettre sous forme :

$$a_p \omega_p^+ = a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + b \quad (3.28)$$

L'identification du coefficient  $a_p$  à celui de l'équation (3.15) donne :

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (3.29)$$

avec :

$$S_p \Delta V = 0 \quad (3.30)$$

Les coefficients de l'équation algébrique  $a_n, a_s, a_e$  et  $a_w$  ont pour expressions celles données par le système (3.17).

Lorsque le coefficient  $\Gamma_\Phi$  est égal à  $(Pr)$ , comme nous l'avons montré dans le tableau 3.1, aux interfaces  $n, s, e$  et  $w$ ; les coefficients  $D_n, D_s, D_e$  et  $D_w$  se déduisent des expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= Pr \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ D_e = D_w &= Pr \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{P_r} \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_s &= \frac{F_s}{P_r} \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ P_e &= \frac{F_e}{P_e} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ P_w &= \frac{F_w}{P_r} \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Les coefficients  $F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$  ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.24.a), (3.24.b), (3.24.c) et (3.24.d).

Dans le tableau 3.1, nous pouvons constater que le terme constant ( $S_0$ ) du terme de source est donné par :

$$S_0 = Ra.Pr \left( \cos(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (3.33)$$

Par conséquent, le coefficient  $b$  devient :

$$b = S_0 \Delta V$$

Avec:

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$$

$b$  s'écrit donc :

$$b = Ra.Pr \left( \cos(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial x^+} - \sin(\alpha) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.34)$$

avec :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2 \Delta x} \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2 \Delta y} \quad (3.36)$$

Pour homogénéiser on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds W, P, E, N et S deviennent respectivement  $(i, j-1)$  ;  $(i, j)$  ;  $(i, j+1)$  ;  $(i+1, j)$  et  $(i-1, j)$ . Les coefficients  $a_N, a_S, a_E, a_W$  et  $b$  sont pris au nœud  $(i, j)$ .

Il s'ensuit que l'équation du mouvement discrétisée (3.28) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} a_P \omega_P^+(i, j) &= a_N \omega_N^+(i+1, j) + a_S \omega_S^+(i-1, j) \\ &+ a_E \omega_E^+(i, j+1) + a_W \omega_W^+(i, j-1) + b \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.5.1 Discrétisation des Conditions aux limites

En déterminant la vorticité  $\omega^+$  sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par P.J. ROACH [16], qui a exprimé  $\omega^+$  en fonction de  $\psi^+$  et utilisé un développement en série de Taylor :

- Sur la paroi froide ( $I = 1$ ) :

$$\omega_1^+ = - \left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^{+2}} \right)_{y=y_1}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi active interne ( $i=1, NI$ )

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial y^2} + \dots$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(1, j) = \left[ \frac{7\psi^+(1, j) - 8\psi^+(2, j) + \psi^+(3, j)}{2(\Delta x)^2} \right] \quad (3.38.a)$$

- Sur la paroi froide ( $I = NI$ ) :

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(NI, j) = \left[ \frac{7\psi^+(NI, j) - 8\psi^+(NI-1, j) + \psi^+(NI-2, j)}{2(\Delta x)^2} \right] \quad (3.38.b)$$

- Sur la paroi chaude (j = 1) :

$$\omega^+(i, 1) = \left[ \frac{7\psi^+(i, 1) - 8\psi^+(i, 2) + \psi^+(i, 3)}{2(\Delta y)^2} \right] \quad (3.39.a)$$

- Sur la paroi chaude (j = NN) :

$$\omega^+(i, NN) = \left[ \frac{7\psi^+(i, NN) - 8\psi^+(i, NN-1) + \psi^+(i, NN-2)}{2(\Delta y)^2} \right] \quad (3.39.b)$$

### 3.6 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

Récrivons l'équation adimensionnelle (2.26) sous la forme suivante :

$$-\omega^+ = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x^+} \right)_{i,j} + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial y^+} \right)_{i,j} \quad (3.40)$$

Nous remarquons que l'identification de cette équation à l'équation (3.3) est compliquée, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons le développement en série de Taylor :

$$-\omega^+(i, j) = \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{+2}} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^{+2}} \Big|_{i,j}$$

avec :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.41)$$

Nous en déduisons :

$$-\omega^+(i, j) = \left[ \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta x^+)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta y^+)^2} \right] \quad (3.42)$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S s'écrit :

$$\psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta x^+)^2} + \frac{1}{(\Delta y^+)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta x^+)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta y^+)^2} + \omega^+(i, j) \right] \quad (3.43)$$

### 3.6.1 Discrétisation des Conditions aux limites

Les conditions aux limites, que nous avons déterminées pour les parois isothermes dans les équations (2.27.b) et (2.28.b) deviennent :

- Sur la paroi chaude ( $J = 1$  et  $j = NN$ ):

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{-3\psi^+(1, j) + 4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta y} = 0$$

et donc: 
$$\psi^+(1, j) = \frac{4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{3} \quad (3.44.a)$$

- Sur la paroi froide ( $I = 1$  et  $I = NI$ )

$$\psi^+(NI, j) = \frac{4\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{3} \quad (3.44.b)$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "underrelaxation".

### 3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse

Les équations (2.24.a) et (2.24.b) nous donnent respectivement les composantes adimensionnelles  $U^+$  et  $V^+$  de la vitesse : P.J. ROACHE [16], utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui nous donne :

$$U^+(i, j) = \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \right|_{i,j} = \left[ \frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \quad (3.45.a)$$

$$V^+(i, j) = - \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \right|_{i,j} = - \left[ \frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \quad (3.45.b)$$

$$\forall (i, j) \quad \begin{array}{l} i \neq 1 \quad ; \quad i \neq NI \\ j \neq 1 \quad ; \quad j \neq MI \end{array}$$

### 3.8 Processus du calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.27), (3.37) et (3.38) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [14].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une **méthode itérative à coefficients de relaxation** :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - G_T)T^n(i, j) + \left(\frac{G_T}{a_P}\right) \left[ a_E T^n(i, j+1) + a_W T^{n+1}(i, j-1) + a_N T^n(i+1, j) + a_S T^{n+1}(i-1, j) \right] \quad (3.46)$$

$$\omega^{n+1}(i, j) = (1 - G_W)\omega^n(i, j) + \left(\frac{G_W}{a_P}\right) \left[ a_E \omega^n(i, j+1) + a_W \omega^{n+1}(i, j-1) + a_N \omega^n(i+1, j) + a_S \omega^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) \right] \quad (3.47)$$

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - G_P)\psi^n(i, j) + \frac{G_P}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^n(i+1, j) + \psi^{n+1}(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi^n(i, j+1) + \psi^{n+1}(i, j-1)}{(\Delta y)^2} + \omega^{n+1}(i, j) \right] \quad (3.48)$$

n : ordre de l'intégration.

Les paramètres  $G_T$ ,  $G_W$  et  $G_P$  sont les "facteurs de relaxation". Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Rayleigh (Ra).

Nous résolvons le système d'équations (3.46), (3.47) et (3.48) de la façon suivante :

1/ Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.

2/ Calcul de la distribution de la température.

3/ Calcul de la vorticité.

4/ Calcul de la distribution de la fonction de courant.

5/ Calcul des composantes des vitesses.

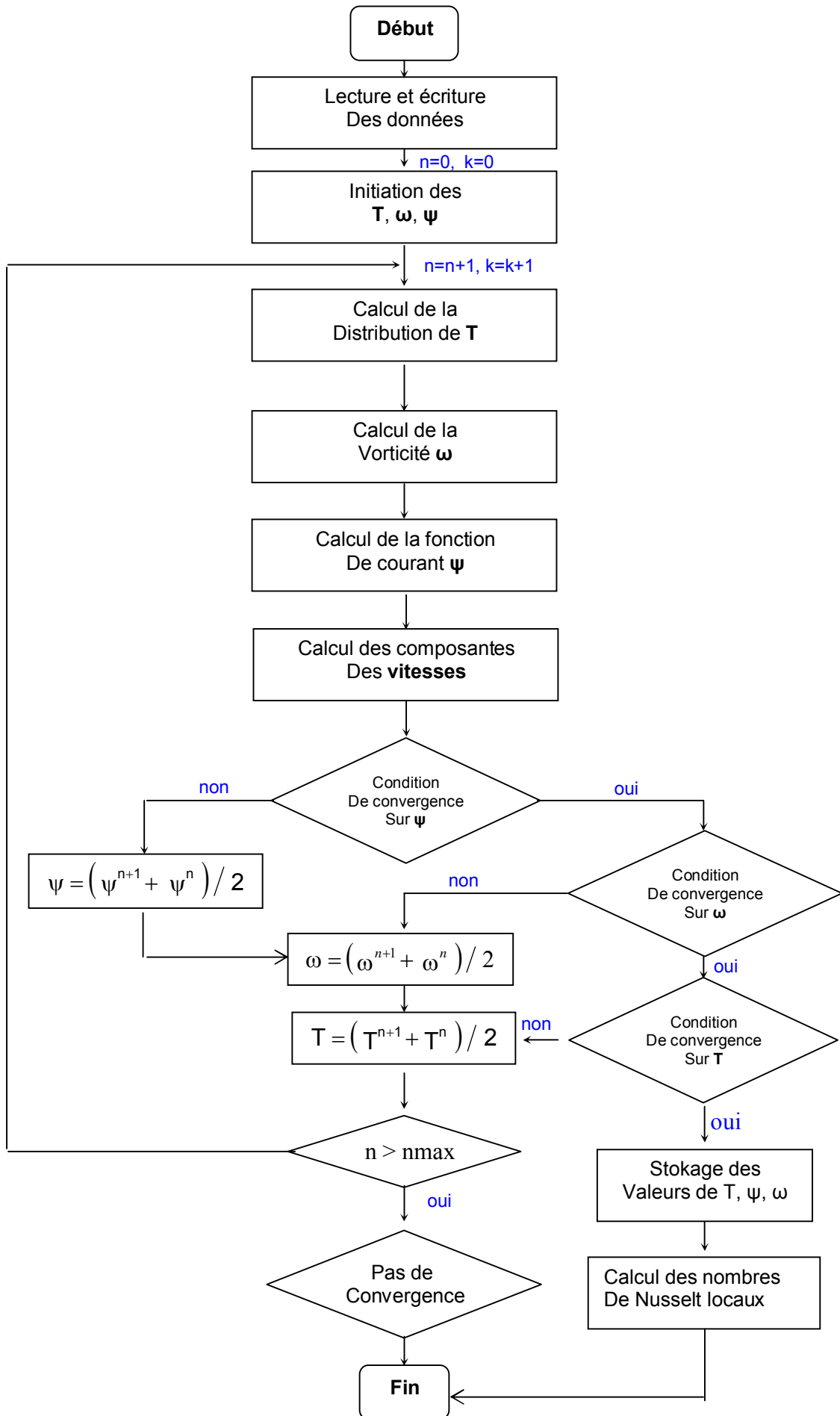
6/ Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de  $\psi$  par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

7/ Le même critère est utilisé pour la vorticité et la température.

8/ Stockage des valeurs de  $T$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ .





# Chapitre 4 Résultats

## 4.1 Introduction

Dans notre étude, nous avons utilisé les conditions pariétales thermiques suivantes :

- Les parois opposées sont chauffées différemment  $T_{ch}$  et  $T_f$  ( $T_{ch} > T_f$ ).
- Nous imposons aux deux parois inférieures une température dont les variations sont périodiques suivant les dimensions de chacune des parois considérées et nous maintenons les deux parois supérieures adiabatiques.

## 4.2 Etude du maillage

Dans cette étude plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ( $\alpha=45^\circ$ . Pour  $Ra=10^2$ ,  $Ra=10^3$ ,  $Ra=10^4$ ,  $Ra=10^5$ ,  $Ra=2.10^5$ ), pour voir leurs effets sur les résultats, le tableau 4.1 nous montre donc, la variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage (111x111).

| 14x14       | 13x13       | 12x12       | 11x11       | 10x10       | 9x9         | 8x8         | 7x7         | 6x6         | 5x5         | 4x4         | 3x3          | 2x2   | nixnn        |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------|--------------|-------------|
| <b>0,06</b> | <b>0,08</b> | <b>0,09</b> | <b>0,14</b> | <b>0,15</b> | <b>0,20</b> | <b>0,29</b> | <b>0,35</b> | <b>0,50</b> | <b>0,73</b> | <b>0,67</b> | <b>-0,57</b> |       | (%) Er       | $Ra=2.10^5$ |
| 15,13       | 15,12       | 15,11       | 15,09       | 15,07       | 15,05       | 15,02       | 14,98       | 14,93       | 14,85       | 14,74       | 14,64        | 14,73 | $\Psi_{max}$ |             |
| <b>0,04</b> | <b>0,04</b> | <b>0,06</b> | <b>0,06</b> | <b>0,06</b> | <b>0,12</b> | <b>0,14</b> | <b>0,25</b> | <b>0,34</b> | <b>0,37</b> | <b>0,68</b> | <b>0,12</b>  |       | (%) Er       | $Ra=10^5$   |
| 11,28       | 11,27       | 11,27       | 11,26       | 11,25       | 11,25       | 11,23       | 11,22       | 11,19       | 11,15       | 11,11       | 11,03        | 11,02 | $\Psi_{max}$ |             |
| <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,04</b> | <b>0,04</b> | <b>0,00</b> | <b>0,07</b> | <b>0,14</b> | <b>0,00</b> | <b>0,14</b> | <b>1,52</b>  |       | (%) Er       | $Ra=10^4$   |
| 2,834       | 2,834       | 2,834       | 2,834       | 2,834       | 2,833       | 2,832       | 2,832       | 2,83        | 2,826       | 2,826       | 2,822        | 2,779 | $\Psi_{max}$ |             |
| <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,31</b> | <b>0,00</b> | <b>0,00</b> | <b>0,31</b> | <b>0,31</b> | <b>0,00</b>  |       | (%) Er       | $Ra=10^3$   |
| 0,326       | 0,326       | 0,326       | 0,326       | 0,326       | 0,326       | 0,326       | 0,325       | 0,325       | 0,325       | 0,324       | 0,323        | 0,323 | $\Psi_{max}$ |             |
| <b>0</b>    | <b>0</b>    | <b>0</b>    | <b>0</b>    | <b>0</b>    | <b>0,0</b>  | <b>0,0</b>  | <b>0,0</b>  | <b>0,0</b>  | <b>3,0</b>  | <b>0,0</b>  | <b>0,0</b>   |       | (%) Er       | $Ra=10^2$   |
| 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,033       | 0,032       | 0,032        | 0,032 | $\Psi_{max}$ |             |

**Tableau 4.1 Variation de la valeur maximale  
de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds**

### 4.3 Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature

Dans une première étape nous allons exposer les solutions du problème de Davis [17], où il considère une enceinte parallélépipédique allongée suivant un axe donné et de section carrée, les deux parois verticales sont différentiellement chauffées alors que les parois horizontales sont isolées. Nous avons appliqué notre code de calcul à la configuration présentée par Davis et nous avons comparé les résultats de nos calculs avec les siens, nous remarquons qu'ils sont en bon accord, l'écart relatif maximal dans tous les cas n'atteint pas 1% . Le tableau 4.2 illustre bien cette comparaison.

Dans ce tableau  $\Psi_{\text{mid}}$  est la valeur de la fonction de courant au milieu de l'enceinte,  $\Psi_{\text{min}}$  est la valeur minimale de la fonction de courant,  $NU_{AB}$  est le nombre de Nusselt moyen sur la paroi AB.

|           |                     | Davis  | Présent Code<br>(51x51) pour $Ra=10^3$ et $10^4$<br>(61x61) pour $Ra=10^5$ | Ecart Relatif<br>(présent code - ref)/ref |
|-----------|---------------------|--------|--|---|
|           | $NU_{AB}$           | 1,117  | 1,119  | 0,18%                                     |
| $Ra=10^3$ | $\Psi_{\text{mid}}$ | -1,174 | -1,173   | -0,09%                                    |
|           | $NU_{AB}$           | 2,238  | 2,252  | 0,63%                                     |
| $Ra=10^4$ | $\Psi_{\text{mid}}$ | -5,071 | -5,059   | -0,24%                                    |
|           | $NU_{AB}$           | 4,509  | 4,531  | 0,49%                                     |
| $Ra=10^5$ | $\Psi_{\text{mid}}$ | -9,111 | -9,112   | 0,01%                                     |
|           | $\Psi_{\text{min}}$ | -9,612 | -9,611   | -0,01%                                    |

**Tableau 4.2 Comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [17]**

#### 4.4 Première condition pariétale thermique :

##### 4.4.1 Influence du nombre de Rayleigh

##### 4.4.1.1 Isothermes et lignes de courants

Les figures (4.1-4.5) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  quand  $\alpha=45^\circ$ .

Ces figures montrent que la structure de l'écoulement est bicellulaire. Le plan horizontal fictif médian sépare un tourbillon supérieur tournant dans le sens horaire d'un tourbillon inférieur tournant dans le sens trigonométrique.

Pour  $Ra=10^2$ ,  $Ra=10^3$  les lignes isothermes des figures (4.1) et (4.2) sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois. Dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. On peut dire que les transferts thermiques se font par pseudo conduction au niveau de la paroi chauffée, car les champs des vitesses sont différents de zéro. Les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur ces figures sont très petites.

Pour  $Ra=10^4$ ,  $Ra=10^5$  et  $Ra=2.10^5$  les lignes isothermes des figures (4.3), (4.4) et (4.5) se modifient sensiblement pour suivre le sens de l'écoulement, et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur la même figure augmentent aussi sensiblement, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif.

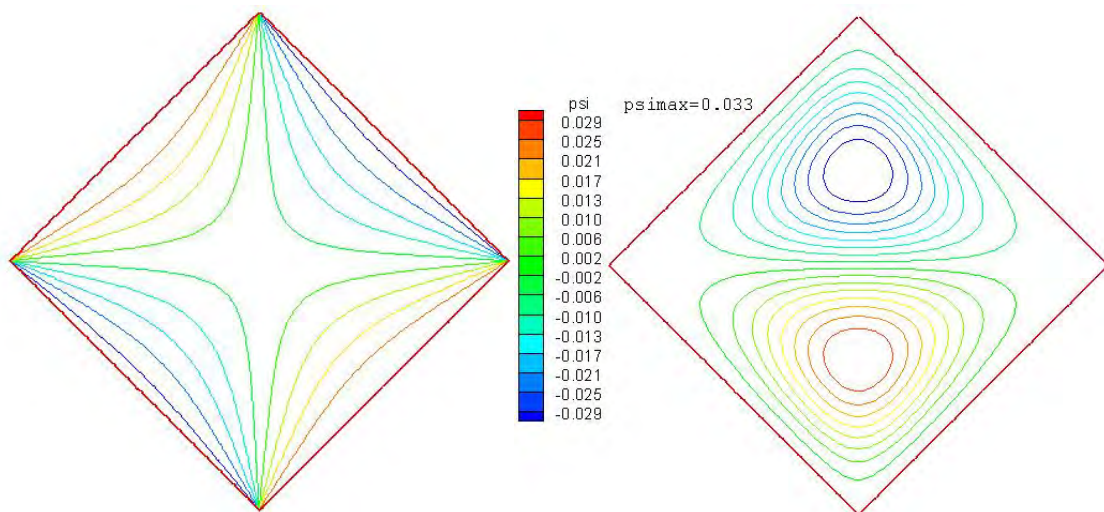


Figure 4.1 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^2$

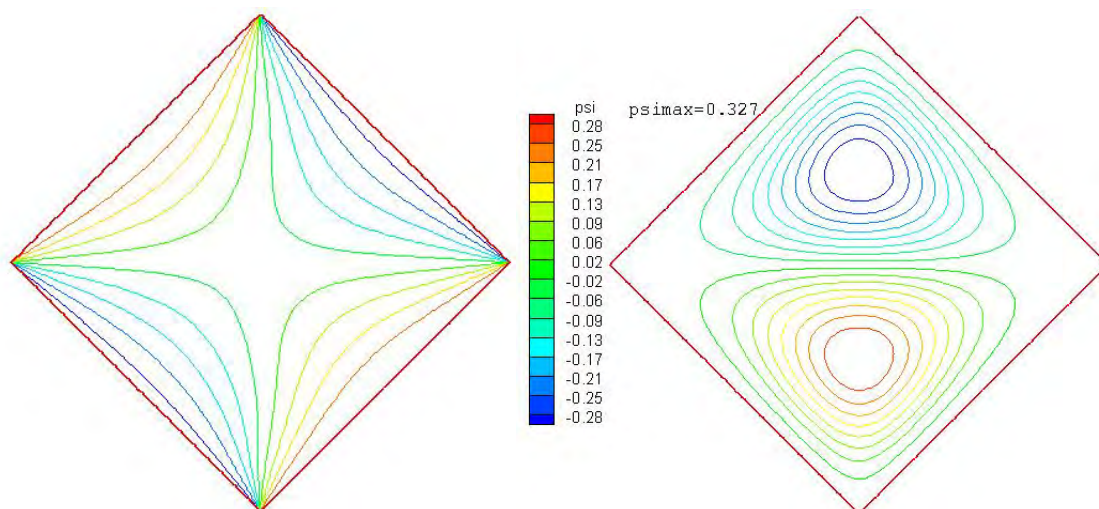


Figure 4.2 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^3$

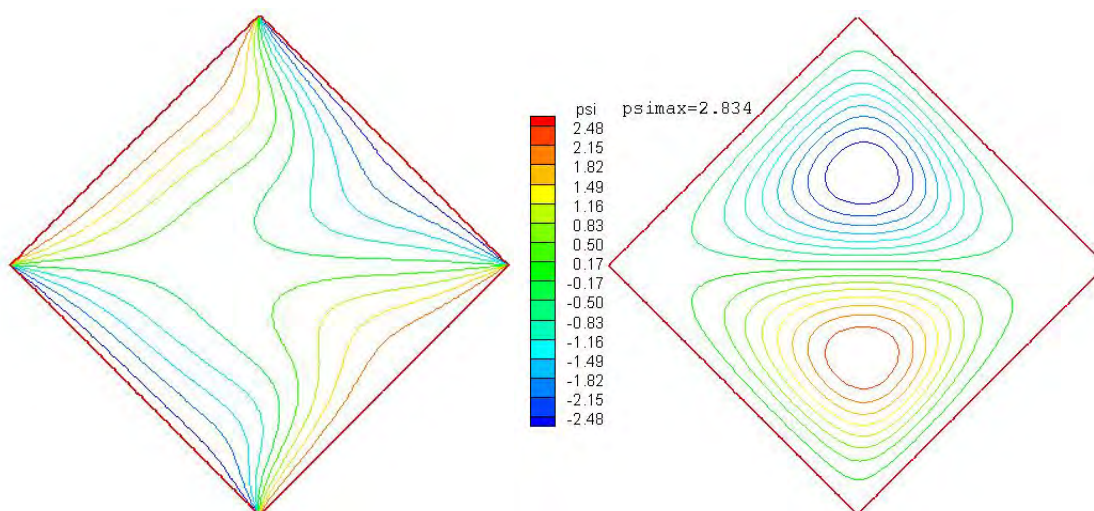


Figure 4.3 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^4$

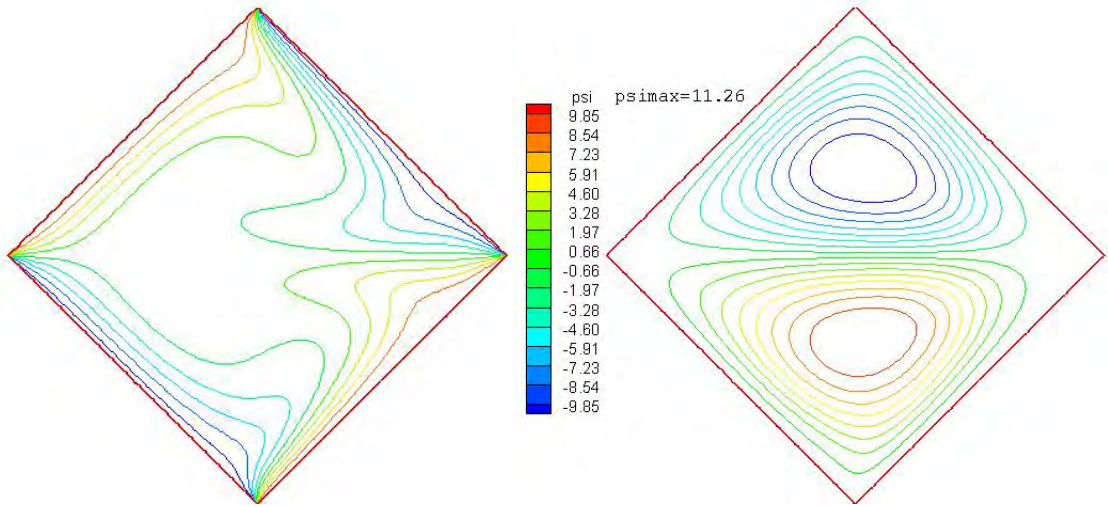


Figure 4.4 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^5$

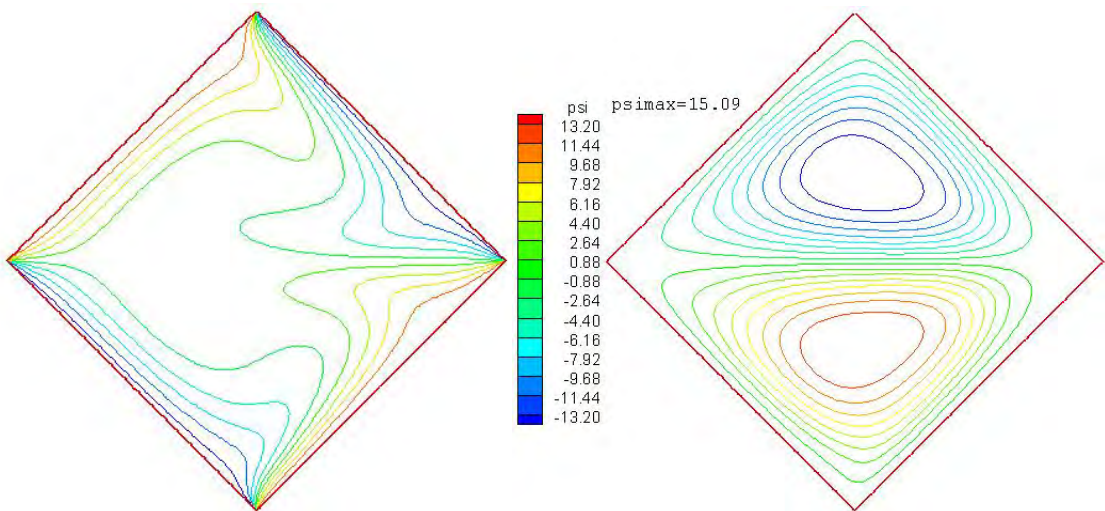


Figure 4.5 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=2 \cdot 10^5$

#### 4.4.1.2 Nombre de Nusselt local

Nous déterminons les nombres de Nusselt locaux dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres. Par exemple, si l'on considère un point courant sur une paroi suivant une coordonnée; l'observation d'une diminution monotone du nombre de Nusselt local correspond à un écoulement dirigé suivant cette coordonnée; l'observation d'une augmentation correspond à un écoulement dirigé en sens opposé.

##### 4.4.1.2.1 Variation du nombre de Nusselt local sur les parois chaudes:

Les figures (4.6) et (4.7), illustrent la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude, et nous permettent de remarquer qu'avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, mais à la position  $x=0.7$  (pour la figure 4.6) et à la position  $x=0.75$  (pour la figure 4.7) cette variation se fait en sens inverse, ceci est dû au fait qu'à ces positions là, le fluide quitte la paroi comme en témoignent les figures (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5).

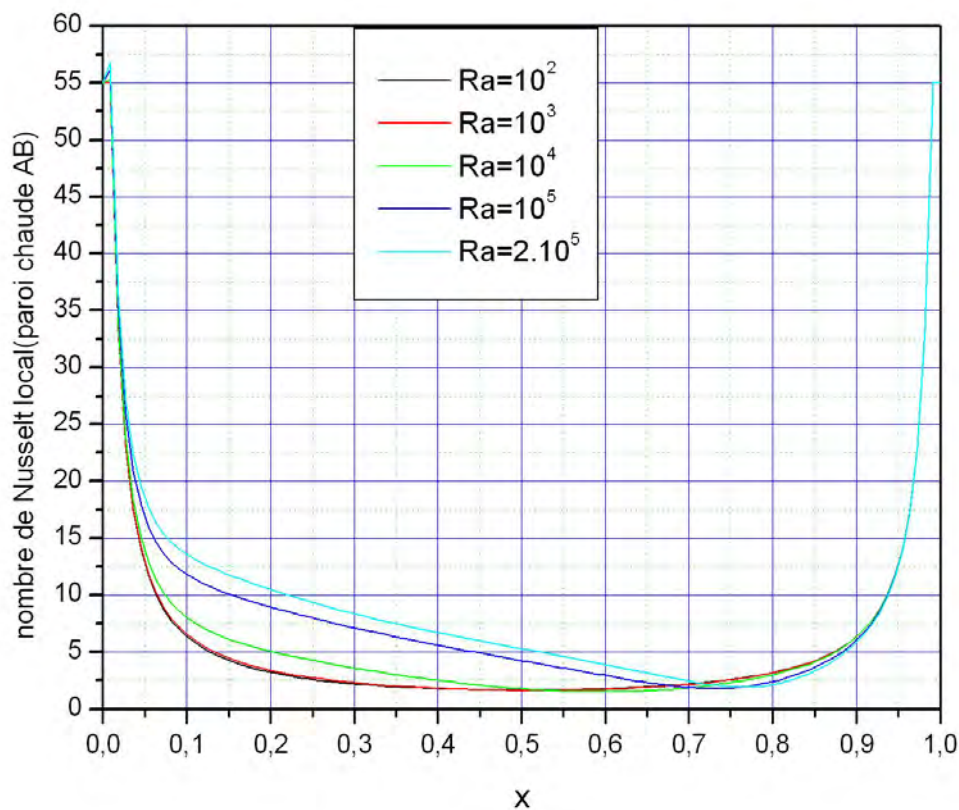
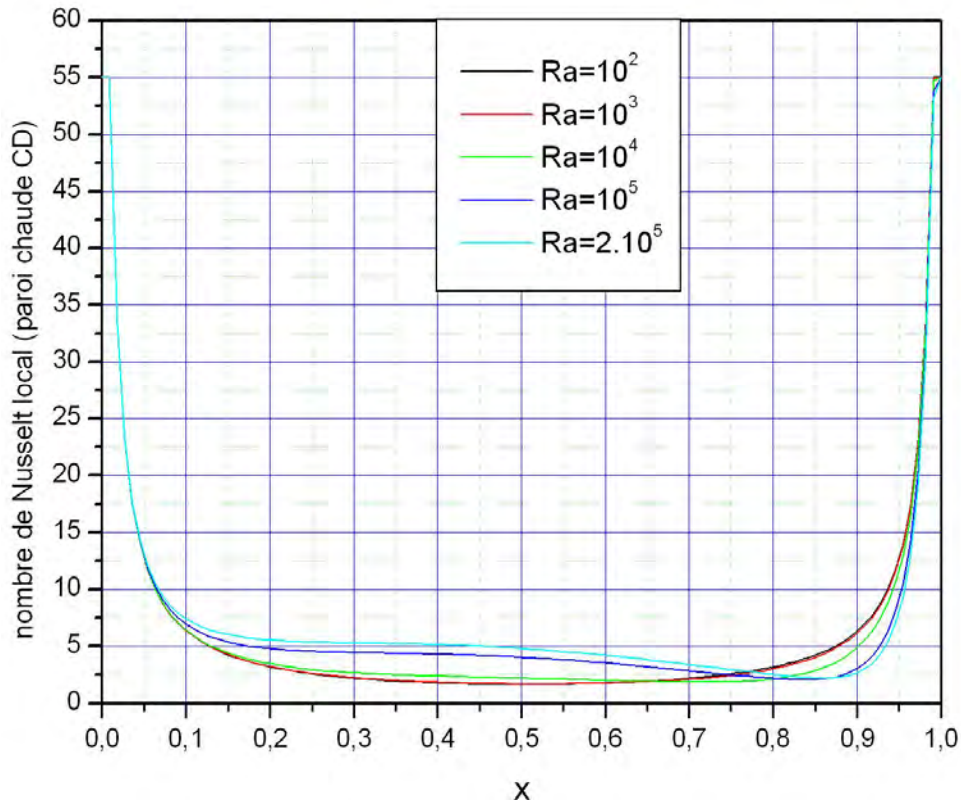


Figure 4.6 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude AB



**Figure 4.7** Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude CD

#### **4.4.1.2.2 Variation du nombre de Nusselt local sur les parois froides :**

Examinons les figures (4.8) et (4.9) qui représentent les courbes de variation des nombres de Nusselt locaux sur les parois froides, nous remarquons que la valeur du nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh à partir de la position  $x=0.25$  (pour la figure 4.8) et à partir de la position  $x=0.32$  (pour la figure 4.9), positions pour lesquelles le fluide quitte la paroi comme en témoignent les figures (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5).



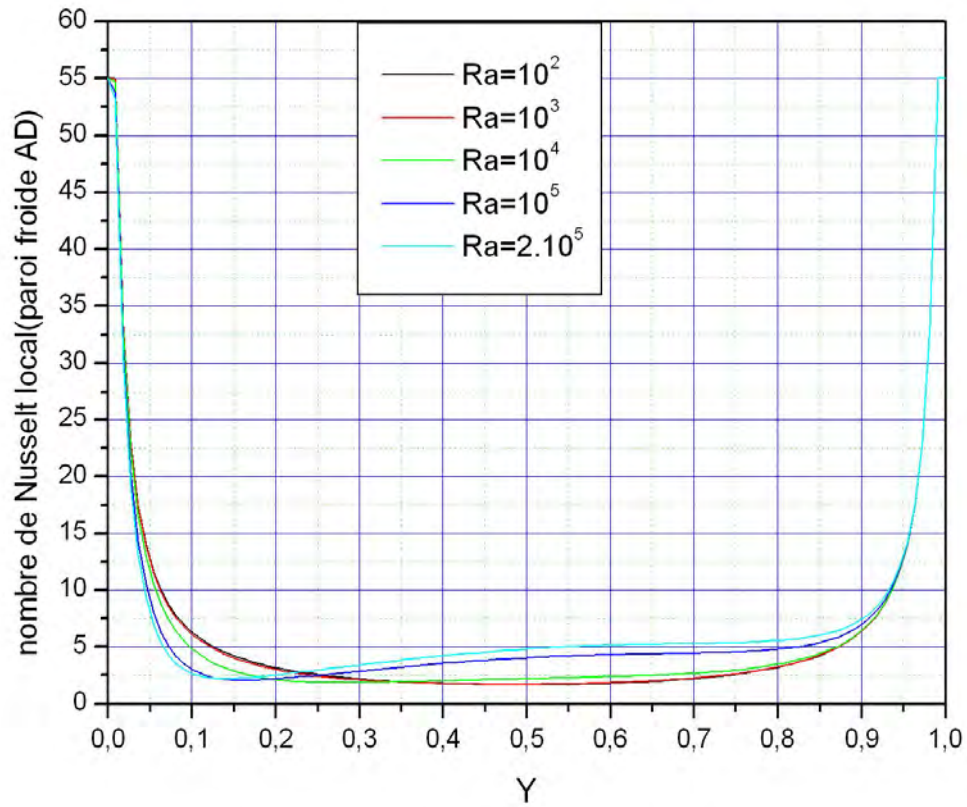


Figure 4.8 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi froide AD

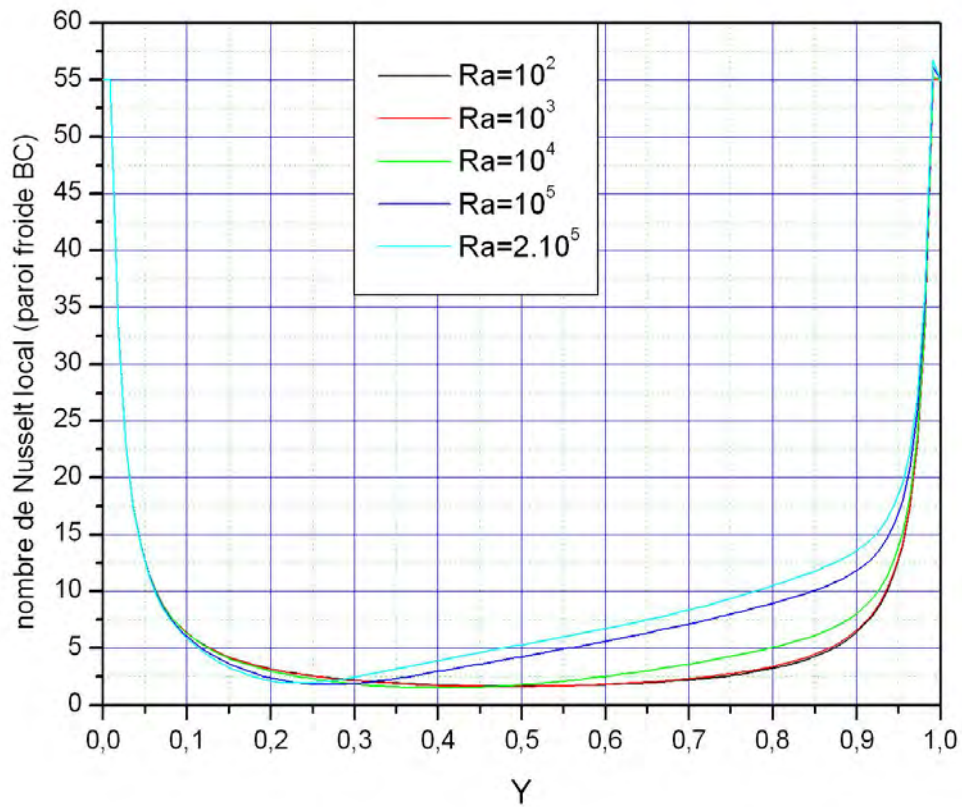


Figure 4.9 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi froide BC

#### 4.4.1.2.3 Nombre de Nusselt moyen

La figure (4.10) illustre les variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois chaudes en fonction du nombre de Rayleigh, ce nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh, le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction pour des nombres de Rayleigh  $< 1000$ , pour les plus grandes valeurs du nombre de Rayleigh le transfert devient convectif.

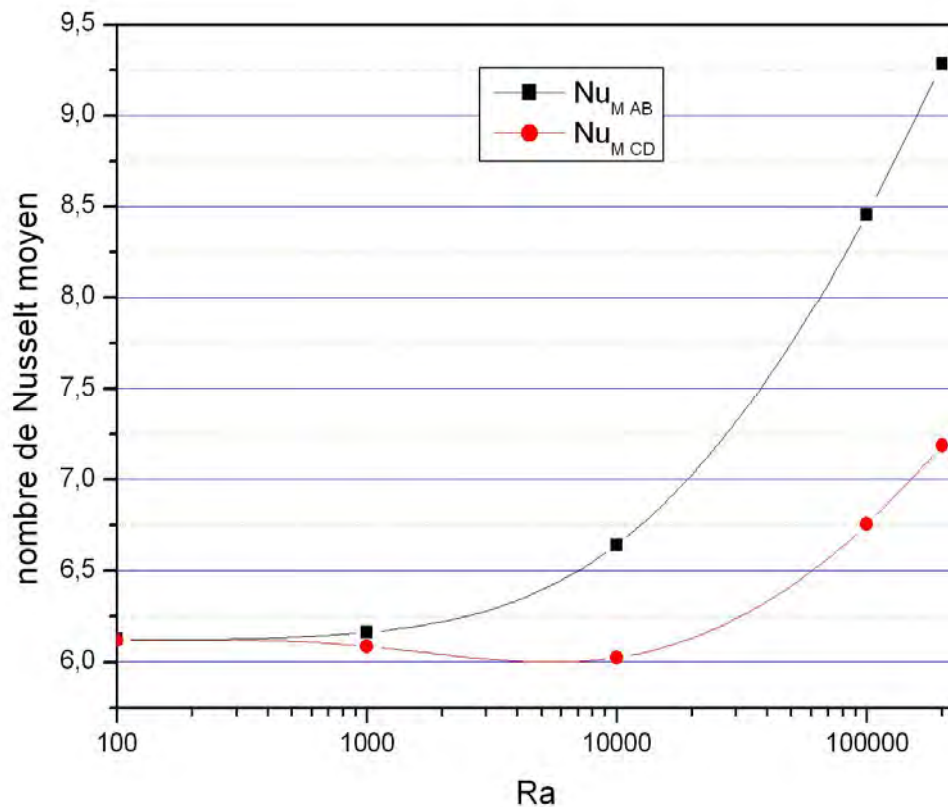


Figure 4.10 Variation du nombre de Nusselt moyen sur les parois chaudes

#### 4.5 Deuxième condition pariétale thermique :

##### 4.5.1 Influence du nombre de Rayleigh:

##### 4.5.1.1 Isothermes et lignes de courants:

Les figures (4.11-4.15) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh quand  $\alpha=45^\circ$ .

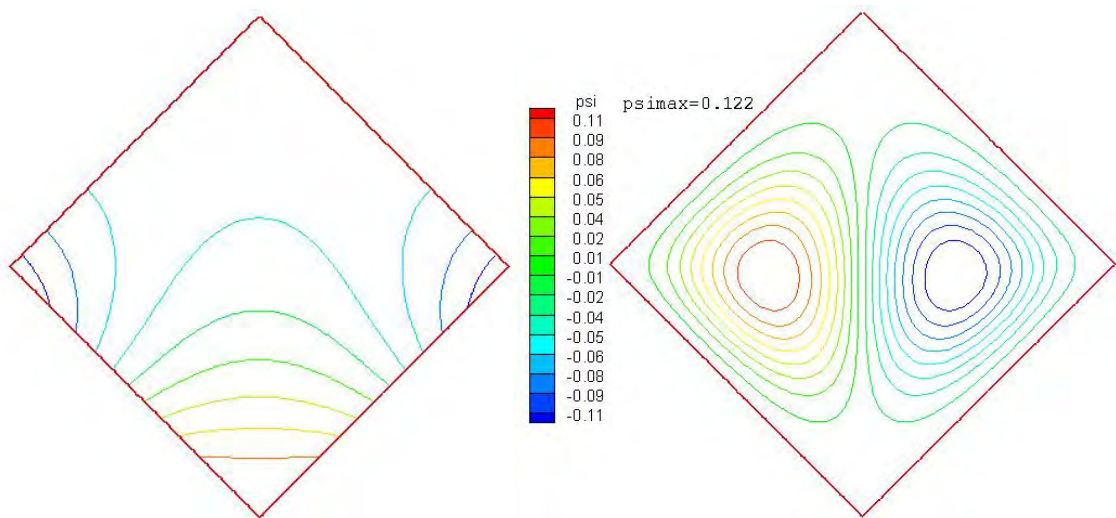
Nous remarquons, que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical fictif médian.

Dans ce cas il ya deux cellules symétriques tournant dans des sens opposés. Du côté gauche, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique et du côté droit, il est de sens contraire.

Pour  $\mathbf{Ra=10^3}$ , les lignes isothermes de la figure (4.11) sont des courbes presque parallèles, la valeur de la fonction de courant très petite, ce qui traduit une pseudo-conduction aussi.

Pour  $\mathbf{Ra=10^4}$ ,  $\mathbf{Ra=8.10^4}$ ,  $\mathbf{Ra=10^5}$  et  $\mathbf{Ra=2.10^5}$  les lignes isothermes des figures (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur la même figure augmentent sensiblement, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif.

Les valeurs des fonctions de courant augmentent quand le nombre de Rayleigh modifié augmente, ce qui traduit une intensification du transfert convectif.



**Figure 4.11 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $\mathbf{Ra=10^3}$**

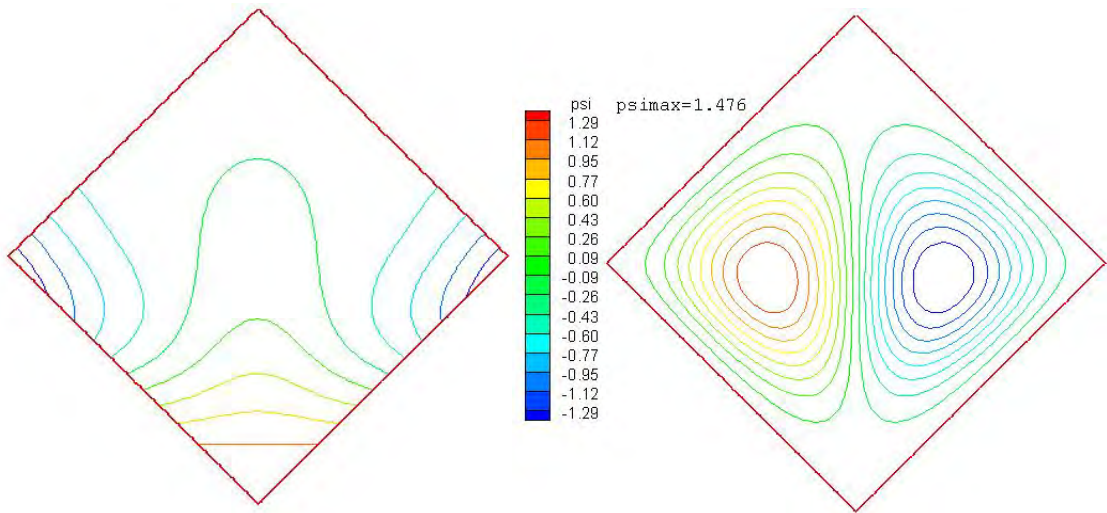


Figure 4.12 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^4$

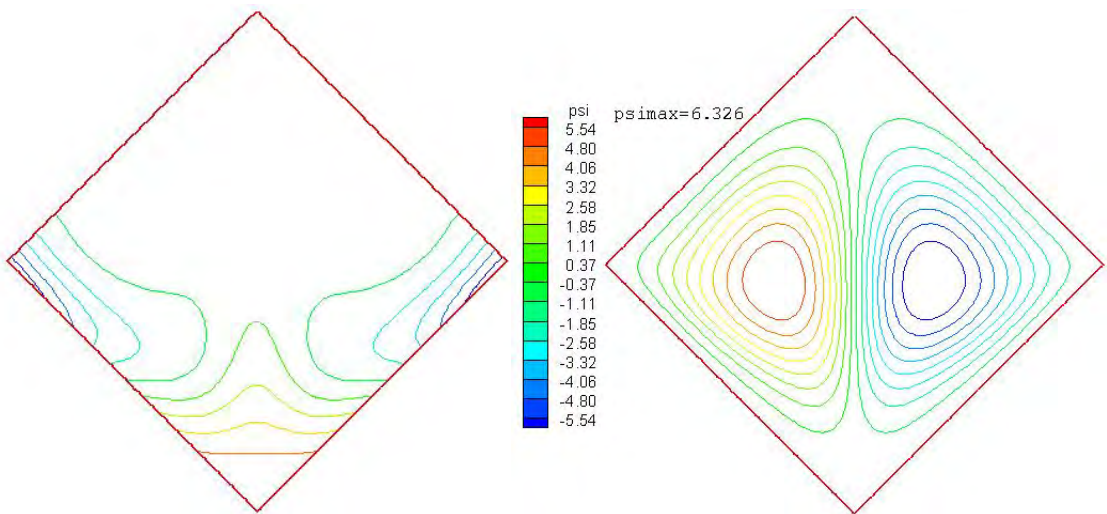


Figure 4.13 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=8.10^4$

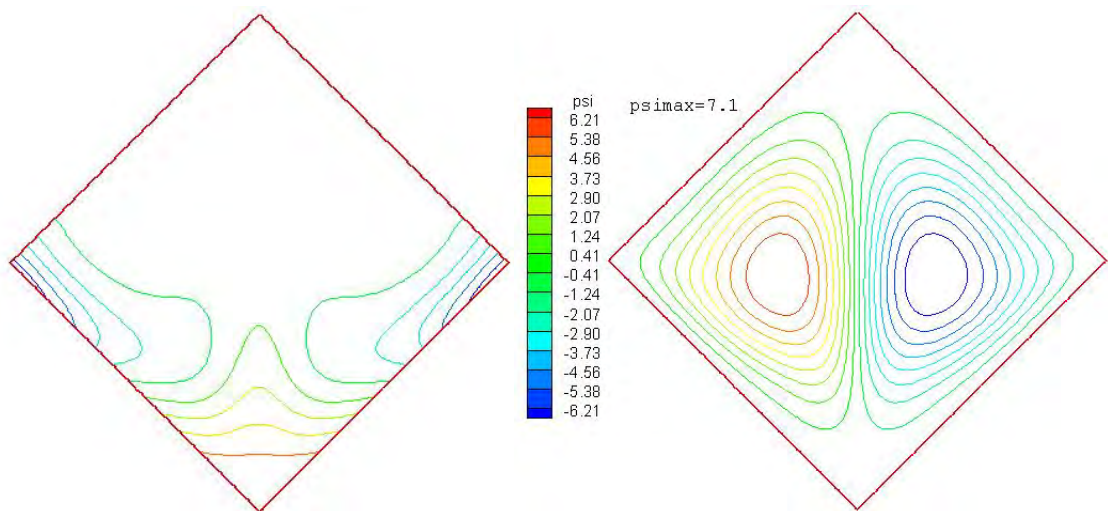


Figure 4.14 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^5$

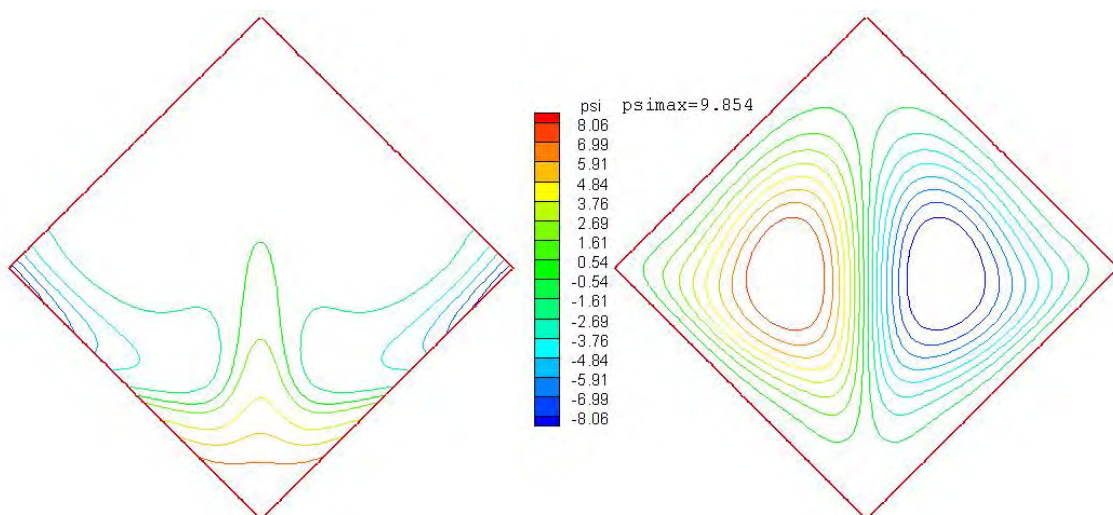


Figure 4.15 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=2.10^5$

#### 4.5.1.2 Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives

Les figures (4.16) et (4.17), illustrent la variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives, et nous permettent de remarquer qu'en augmentant le nombre de Rayleigh, la valeur du nombre de Nusselt local augmente aussi, mais à la position  $x= 0.65$  c'est le contraire qui se produit c'est-à-dire que le nombre Nusselt diminue, ceci est dû au fait que l'excitation thermique est périodique et donc à cette position précisément comme en témoigne la figure (4.18) qui illustre la variation de la température adimensionnelle sur la paroi considérée, la valeur de la température adimensionnelle diminue suffisamment pour permettre ce cas de figure.

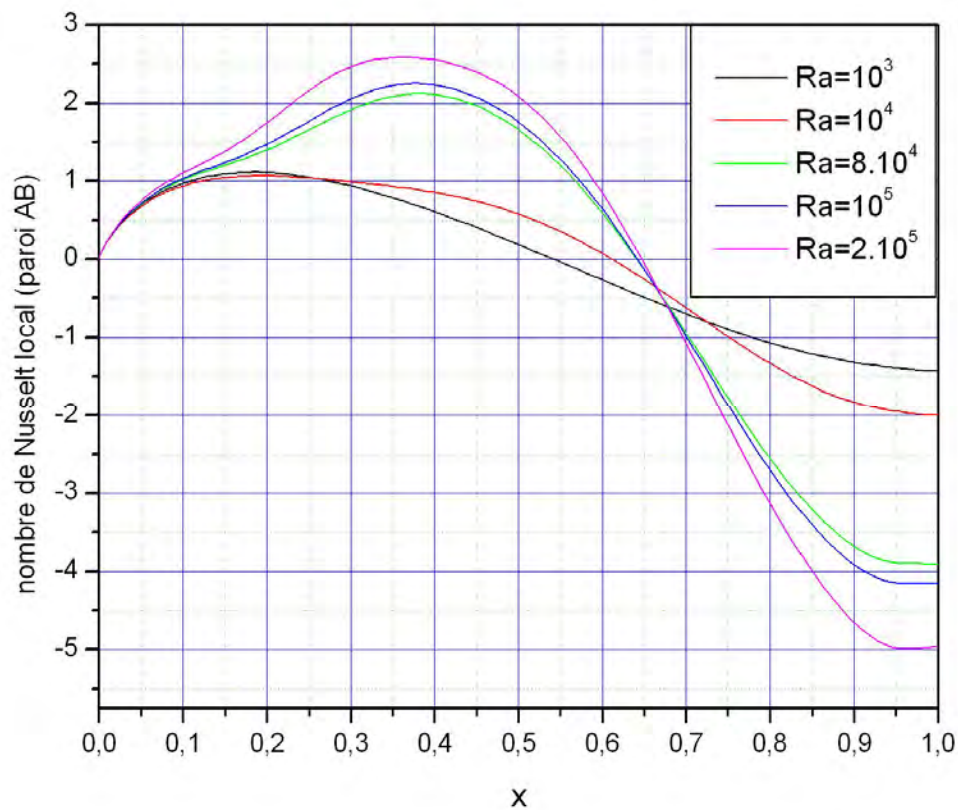


Figure 4.16 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AB

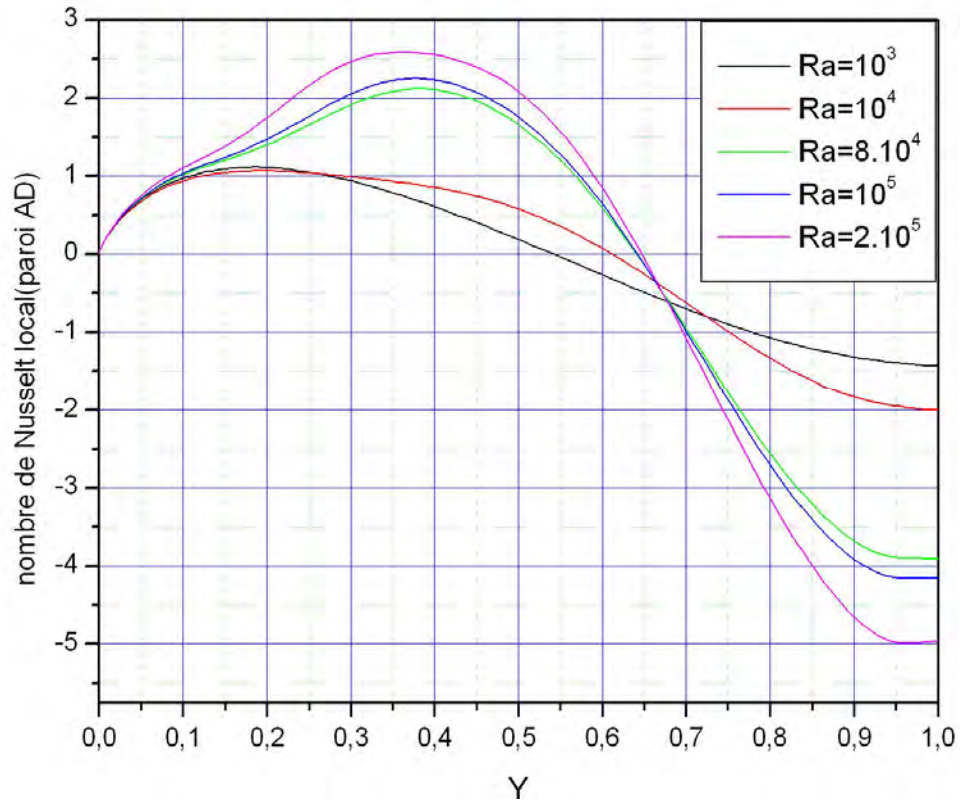


Figure 4.17 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AD

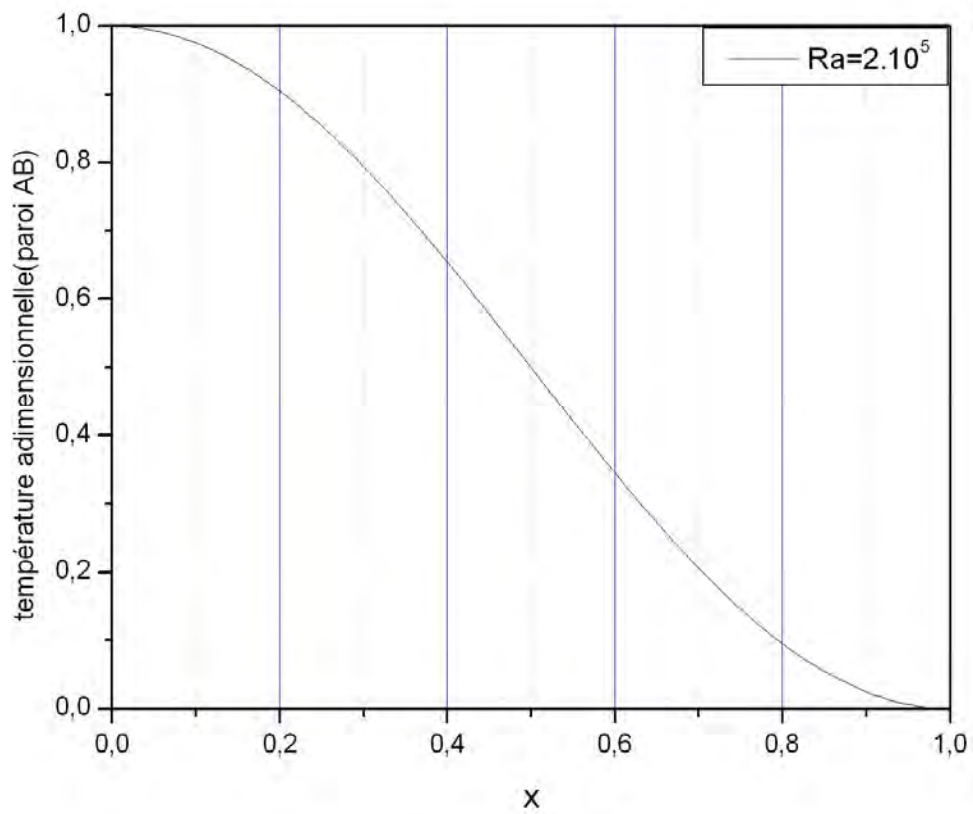


Figure 4.18 Variation de la température adimensionnelle sur la paroi AB

## 4.6 Troisième condition pariétale thermique :

### 4.6.1 Influence du nombre de Rayleigh

#### 4.6.1.1 Isothermes et lignes de courants:

Les figures (4.19-4.23) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  quand  $\alpha=45^\circ$ .

Nous remarquons, que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical fictif médian.

Dans ce cas la structure de l'écoulement est quadri cellulaire. Du côté gauche il y a deux cellules ; supérieure et inférieure, la première tourne dans le sens horaire et la deuxième tourne dans le sens trigonométrique. Et du côté droit, l'écoulement est de sens contraire.

Pour  $Ra=10^3$ ,  $Ra=10^4$  les lignes isothermes des figures (4.19) et (4.20) sont des courbes presque parallèles, les valeurs de la fonction de courant sont très petites, ce qui traduit une pseudo-conduction aussi.

Pour  $Ra=7.5.10^4$ ,  $Ra=8.5.10^4$  et  $Ra=10^5$  les lignes isothermes des figures (4.21), (4.22) et (4.23) se modifient pour suivre le sens de l'écoulement et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur ces mêmes figures augmentent sensiblement, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif.

Lorsqu'on augmente la valeur du nombre de Rayleigh, nous remarquons que les cellules supérieures qui étaient plus importantes pour des nombres de Rayleigh faibles tendent à s'équilibrer avec les cellules inférieures.



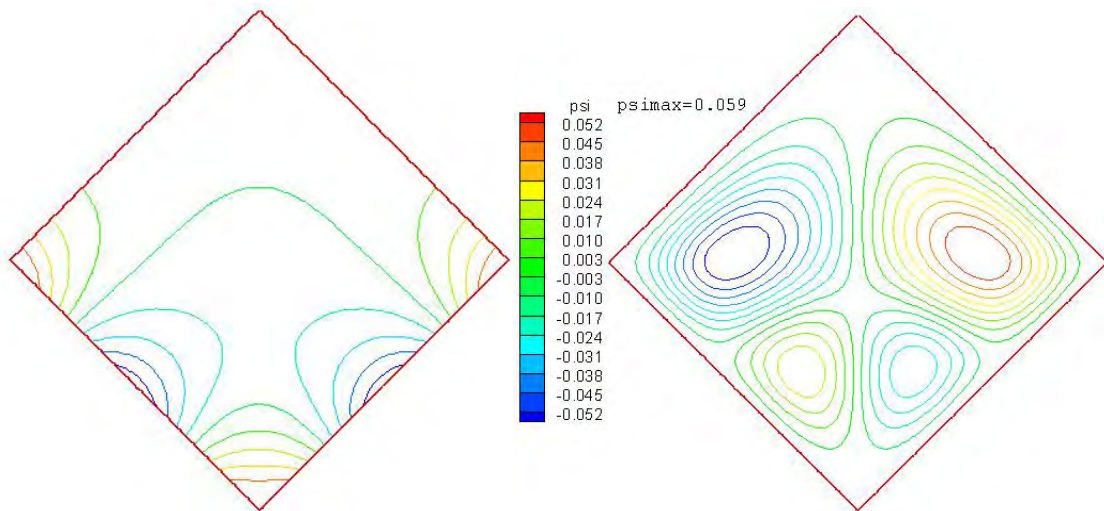


Figure 4.19 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^3$

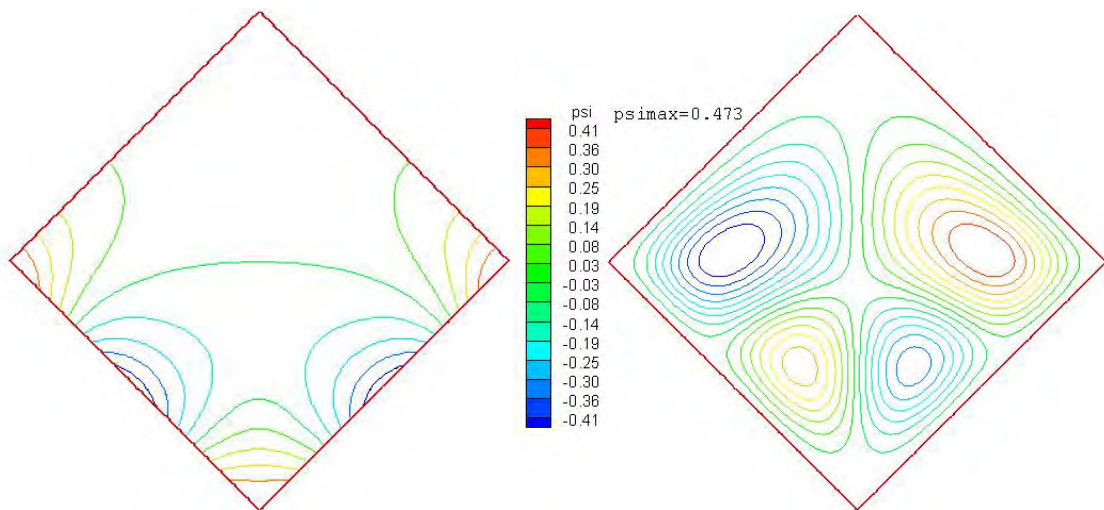


Figure 4.20 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^4$

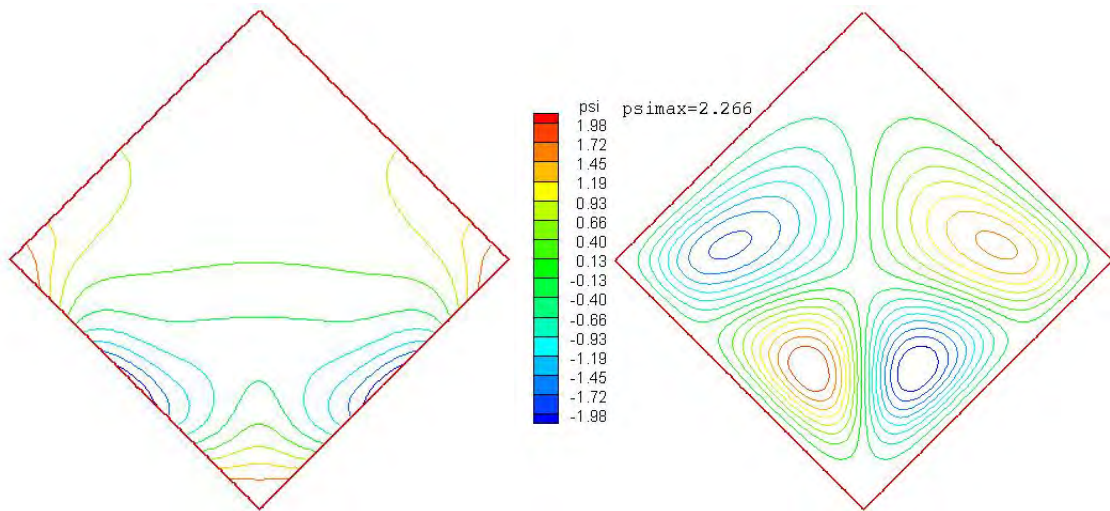


Figure 4.21 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=7.5.10^4$

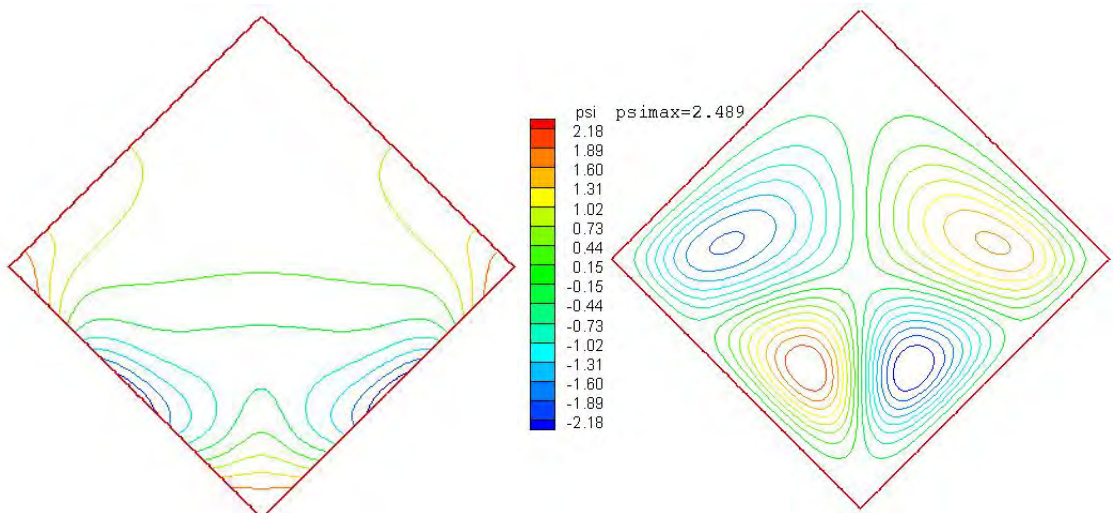
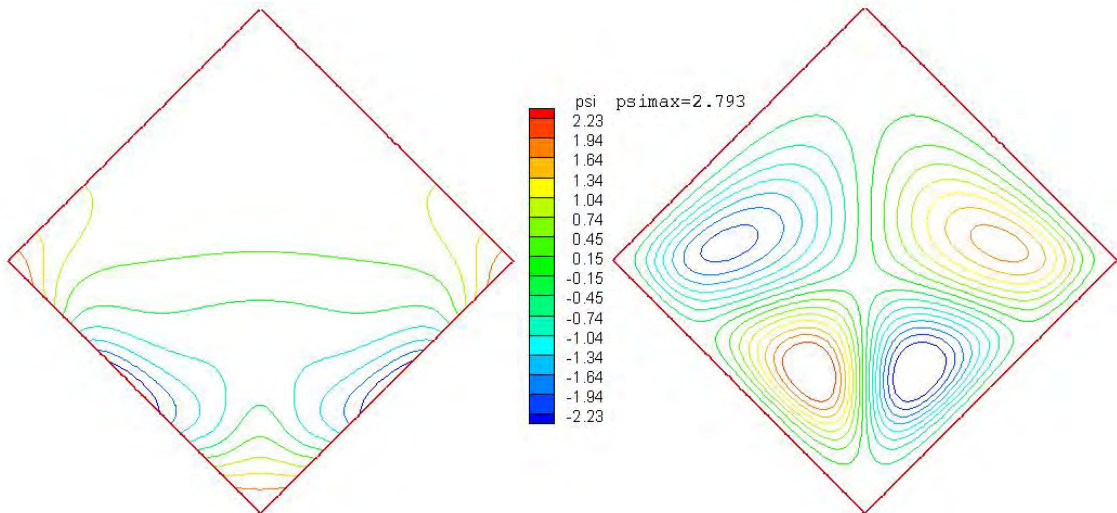


Figure 4.22 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=8.5.10^4$



**Figure 4.23 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^5$**

#### **4.6.1.2 Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives**

Les figures (4.24) et (4.25), illustrent la variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives. Nous remarquons sur ces deux figures que jusqu'à la position  $x=0.1$  les courbes se superposent quelque soit la valeur du nombre de Rayleigh considéré ceci exprime que dans cette région de l'enceinte c'est la pseudo conduction qui domine. Nous remarquons aussi que ces courbes présentent un minimum à la position  $x=0.5$ , ceci concorde très bien avec les figures (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22) qui montrent qu'effectivement à ces deux positions des deux parois actives le fluide quitte la paroi. Ceci d'une part, d'autre part dans les régions situées entre les positions  $[0.4,0.75]$  nous remarquons qu'avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, la valeur du nombre de Nusselt local diminue, ceci est dû au fait que l'excitation thermique est périodique et donc à ces régions précisément comme en témoigne la figure (4.26) qui illustre la variation de la température adimensionnelle sur la paroi considérée, la valeur de la température adimensionnelle diminue suffisamment pour permettre ce cas de figure.

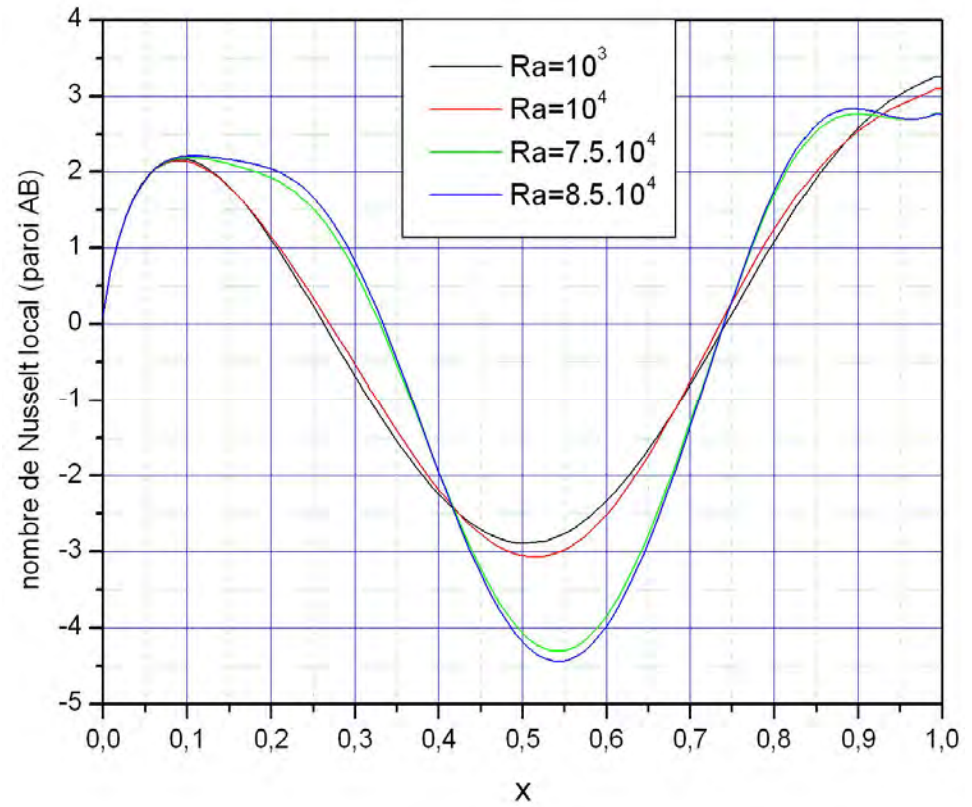


Figure 4.24 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AB

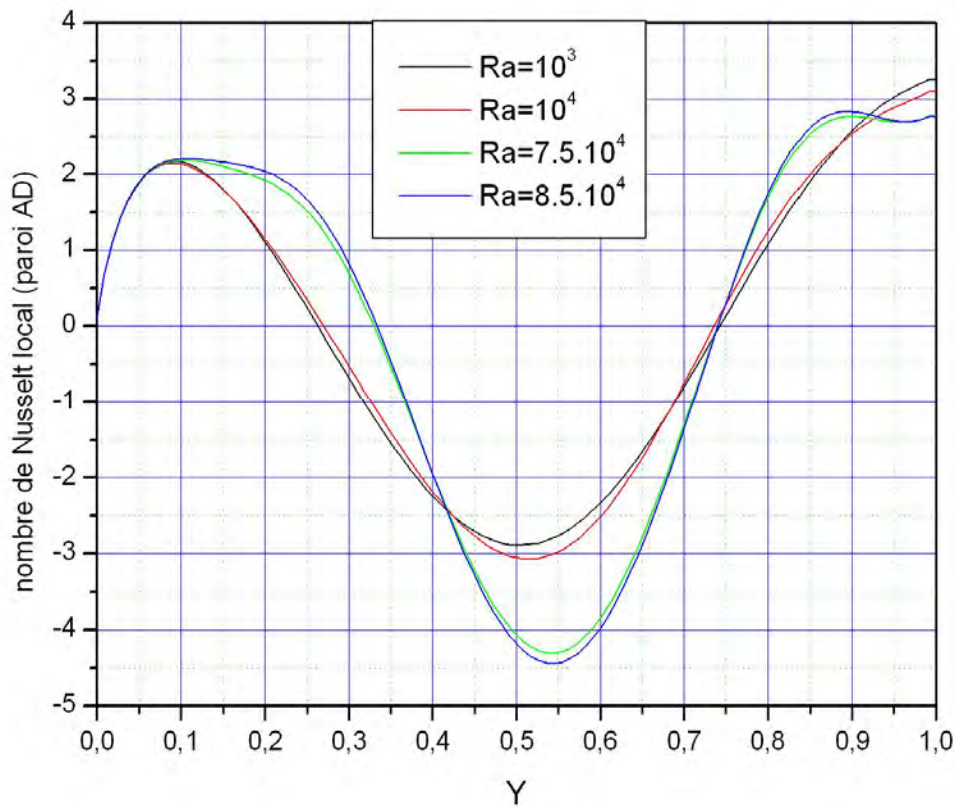


Figure 4.25 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AD

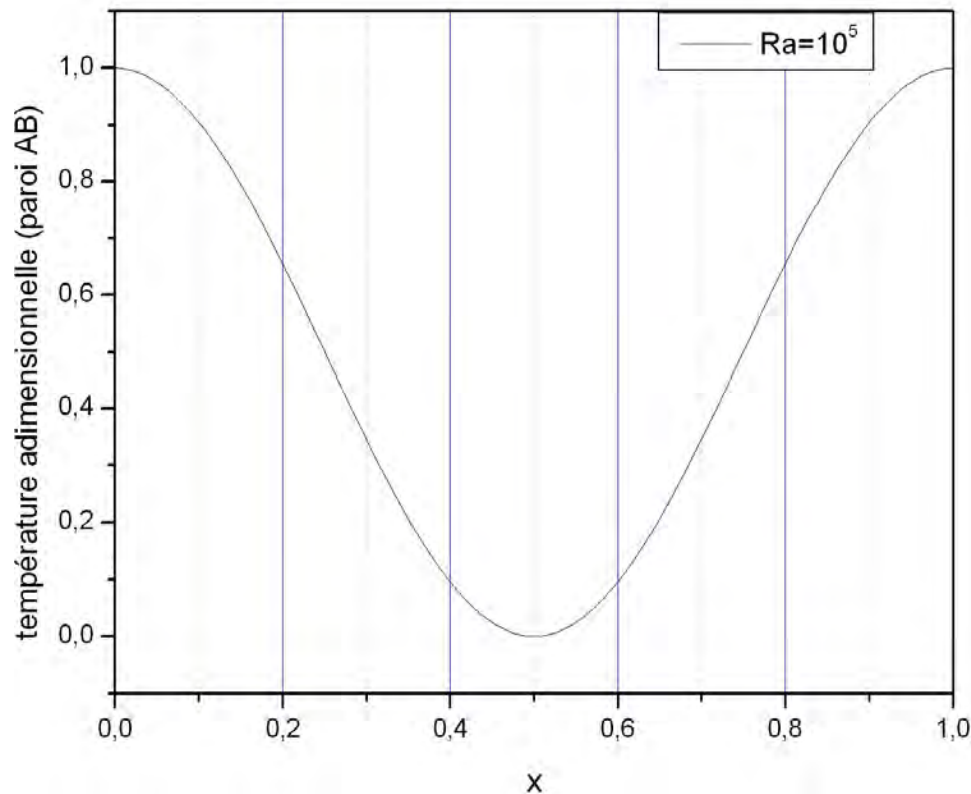


Figure 4.26 Variation de la température adimensionnelle sur la paroi AB

#### 4.7 Quatrième condition pariétale thermique :

##### 4.7.1 Influence du nombre de Rayleigh

##### 4.7.1.1 Isothermes et lignes de courants:

En ce qui concerne les isothermes et les lignes de courant, figures (4.27-4.30), nous observons une symétrie par rapport au plan vertical fictif médian.

Dans ce cas aussi la structure de l'écoulement est quadri cellulaire. Du côté gauche il y a deux cellules ; supérieure et inférieure, la première tourne dans le sens trigonométrique et la deuxième tourne dans le sens horaire. Et du côté droit, l'écoulement est de sens contraire.

Pour  $Ra=10^3$ ,  $Ra=10^4$  les lignes isothermes des figures (4.27) et (4.28) sont des courbes presque parallèles, les valeurs de la fonction de courant sont très petites, ce qui traduit une pseudo-conduction aussi.

Pour  $Ra=10^5$  et  $Ra=2.10^5$  les lignes isothermes des figures (4.29) et (4.30) se modifient aussi pour suivre le sens de l'écoulement et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur ces mêmes figures augmentent aussi sensiblement, ce qui traduit un passage d'un régime pseudo-conductif à un régime convectif.

Dans cette configuration nous remarquons qu'en augmentant le nombre de Rayleigh les deux cellules supérieures deviennent de plus en plus importantes par rapport à celles inférieures qui ont tendance à diminuer.

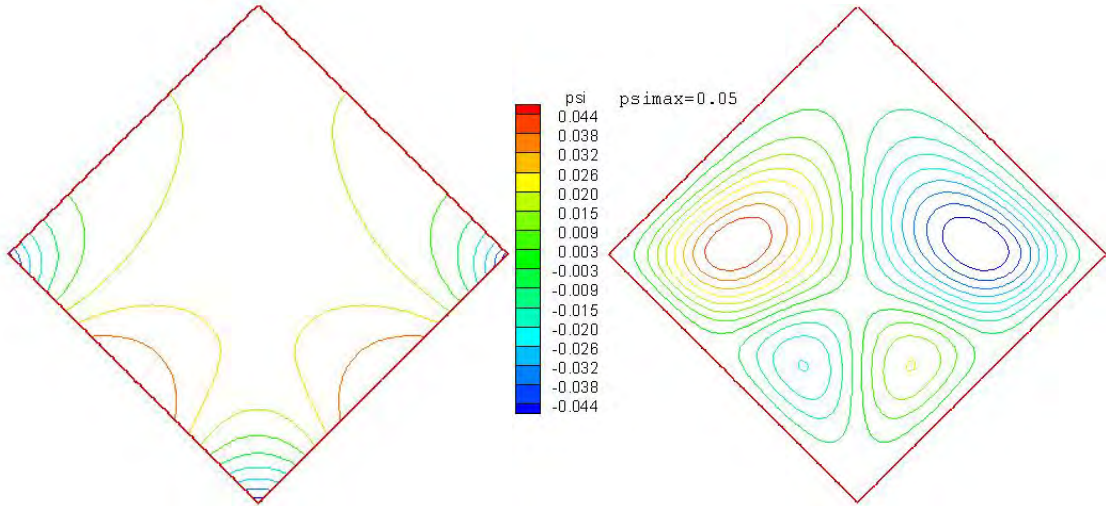


Figure 4.27 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^3$

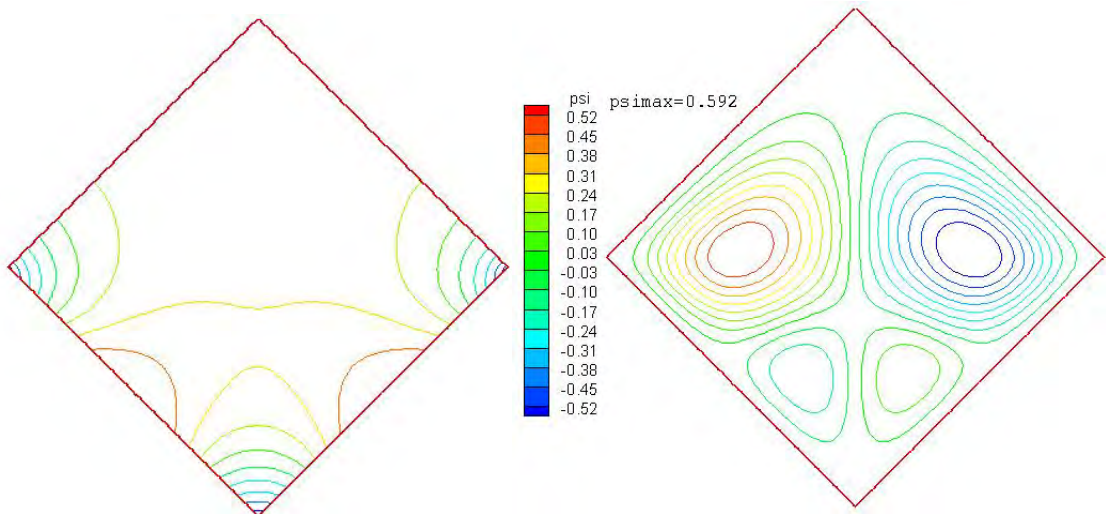


Figure 4.28 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^4$

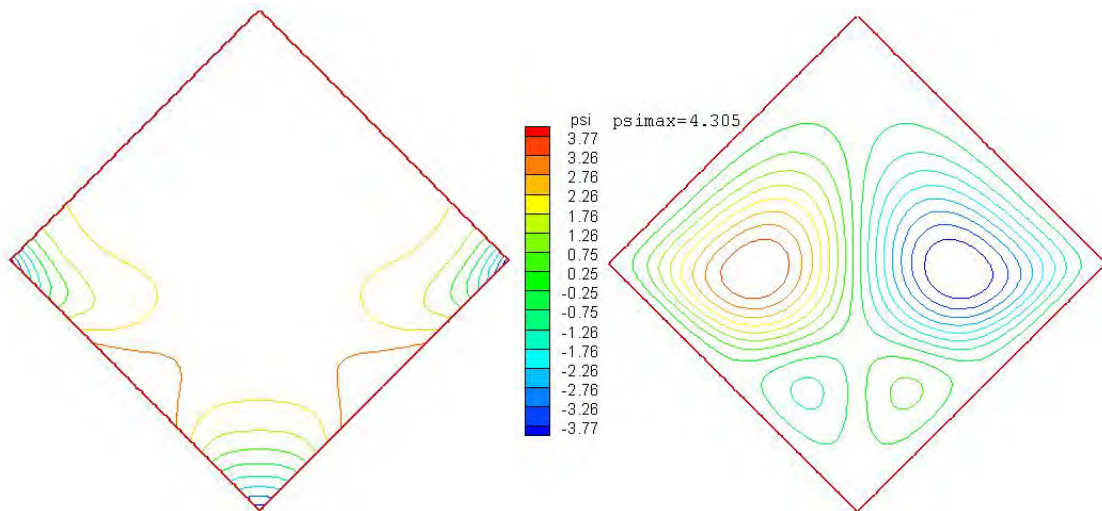


Figure 4.29 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=10^5$

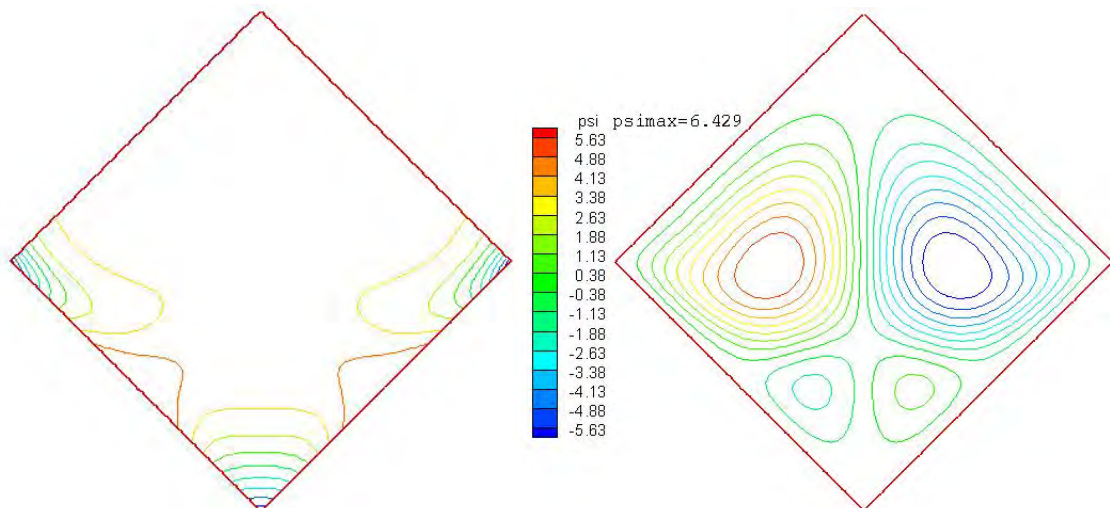


Figure 4.30 Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=45^\circ$ ,  $Ra=2.10^5$

#### 4.7.1.2 Variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives

Les figures (4.30) et (4.31), illustrent la variation du nombre de Nusselt local sur les parois actives. Nous remarquons sur ces deux figures que jusqu'à la position  $x=0.5$  les courbes se superposent quelque soit la valeur du nombre de Rayleigh considéré ceci exprime que dans cette région de l'enceinte c'est la pseudo conduction qui domine, comme l'illustrent si bien les figures (4.27), (4.28), (4.29) et (4.30).

La figure (4.33) qui illustre la variation de la température adimensionnelle sur la paroi active, montre qu'à la position  $x=0.85$  la valeur de la température adimensionnelle diminue suffisamment pour inverser le sens de variation du nombre de Nusselt local avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

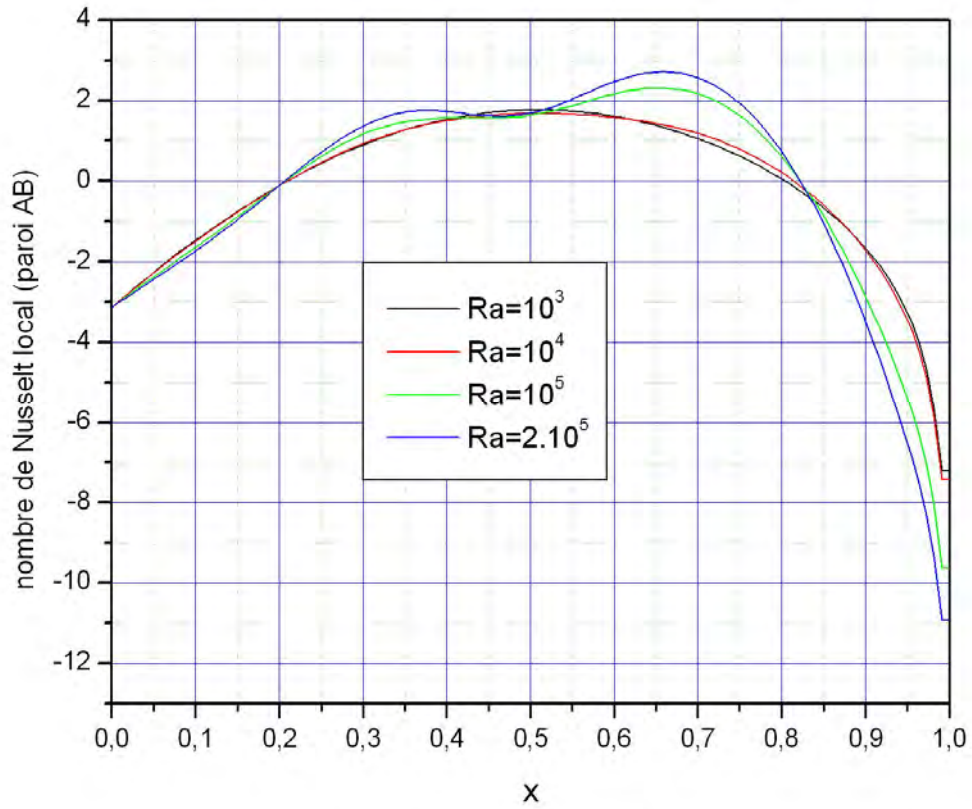


Figure 4.31 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AB

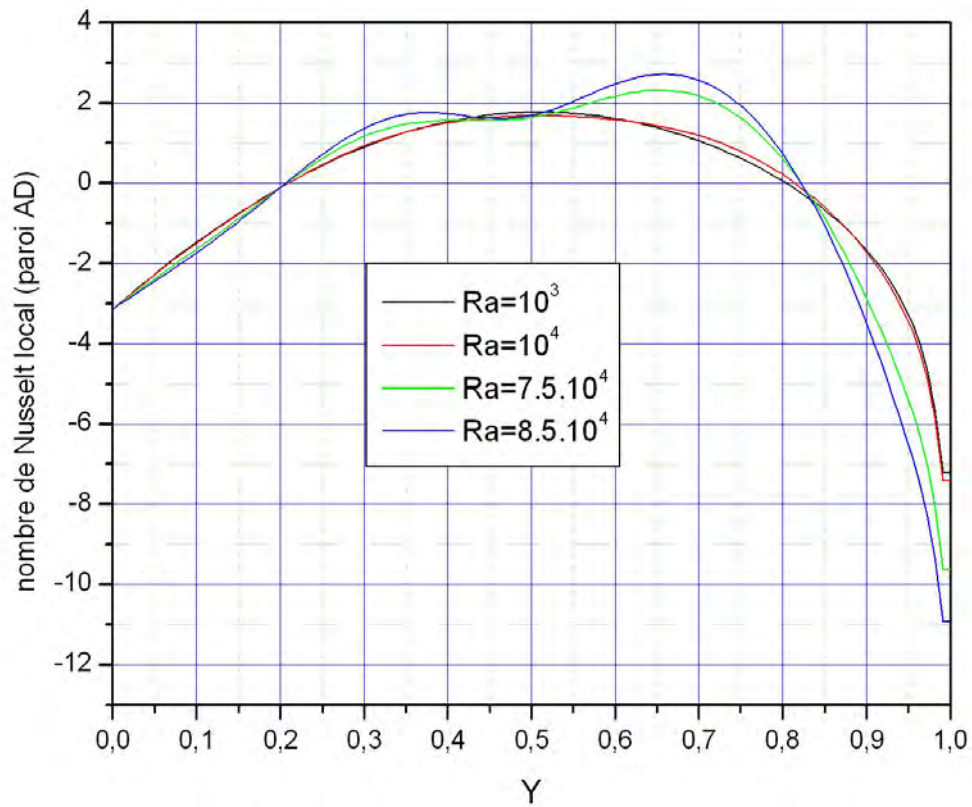


Figure 4.32 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi AD



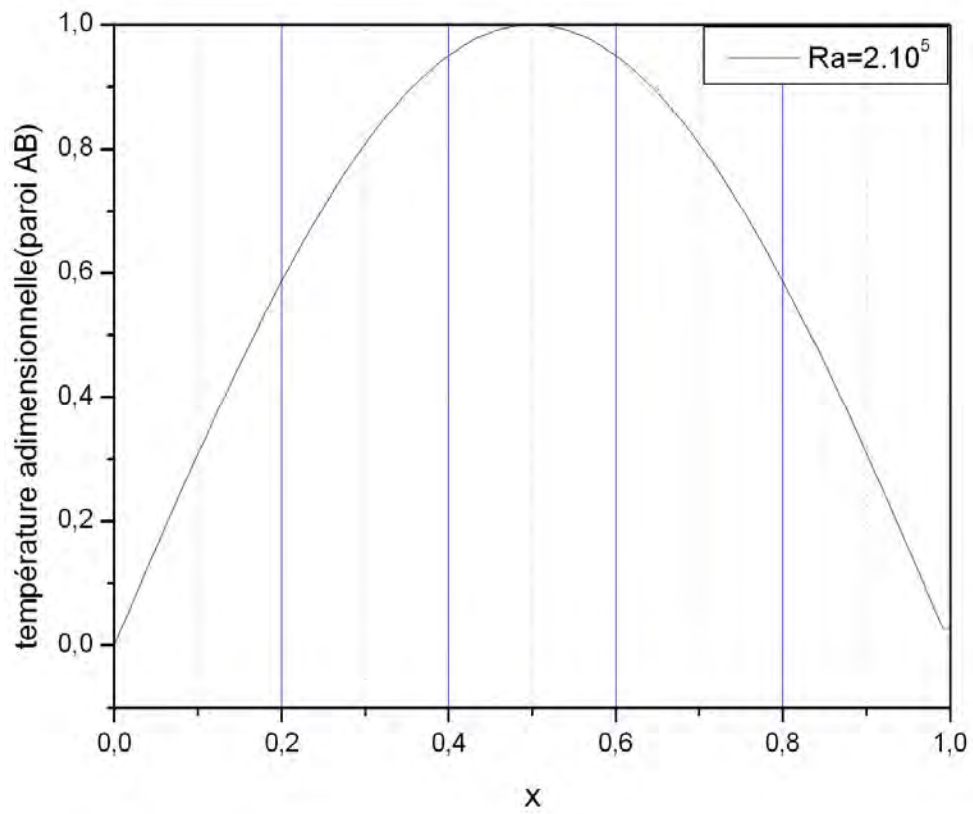


Figure 4.33 Variation de la température adimensionnelle sur la paroi AB

# CONCLUSION

Nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans une enceinte cubique allongée, de grand axe horizontal, inclinée d'un angle  $\alpha$  eu égard au plan horizontal, remplie d'un fluide newtonien et chauffée par deux côtés opposés (deux parois opposées sont maintenues isothermes chaudes quant aux deux autres, elles sont isothermes froides), dans un premier cas, ensuite dans un deuxième, un troisième et un quatrième cas de chauffage nous imposons aux deux parois inférieures une température dont les variations sont périodiques suivant les dimensions de chacune des parois considérée et nous maintenons les deux parois supérieures adiabatiques.

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de mouvement au sein du fluide et de chaleur à travers les parois de l'enceinte. Ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Nous avons mis au point un code de calcul numérique, basé sur une méthode aux volumes finis, qui permet de déterminer les champs de températures et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et globaux sur les parois de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système. L'influence du nombre de Rayleigh et de l'inclinaison du système, sur l'écoulement en régime stationnaire a été notamment examinée.

Les résultats des simulations numériques ont montré que la conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Rayleigh  $\leq 10^3$ , pour la première et la deuxième condition thermique pariétale considérée. Pour des nombres de Rayleigh supérieurs à  $10^3$ , le rôle de la convection devient prépondérant, alors que pour la troisième et quatrième condition thermique pariétale considérée c'est au dessus d'un nombre de Rayleigh de l'ordre de  $10^4$  que la convection commence à apparaître. Donc, nous pouvons dire que le type d'excitation thermique imposée aux parois influe beaucoup sur le régime d'écoulement au sein de l'enceinte considérée.

Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'étude en considérant le cas tridimensionnel de notre enceinte, ceci en considérant bien sûr la formulation en variables primitives (vitesse-pression) et l'utilisation de l'algorithme Simpler.

## Méthode itérative pour la résolution des systèmes linéaires

### 1-généralités :

On s'intéresse à la solution du système linéaire de n équation à n inconnues :

$$y = Ax$$

### Notations

On désignera par  $A_{ij}$  l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de A, et par  $y_i$  (resp.  $x_j$ ) la  $i^{\text{ème}}$  (resp.  $j^{\text{ème}}$ ) composante de y (resp. x).

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

### Méthode

Il n'existe pas de méthode universelle pour déterminer numériquement la solution : le choix est guidé par la nature de la matrice, la mémoire et le nombre d'opérations nécessaires pour l'atteindre.

- 1) les méthodes directes donnent la solution exacte en un nombre fini d'opérations (en l'absence d'erreurs d'arrondi).
- 2) les méthodes itératives engendrent une suite finie ou infinie de vecteurs qui tend vers la solution.

L'idée des méthodes itératives est de former une suite  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  telle que les erreurs successives  $\|x - x^{(k)}\|^2$  forment une suite décroissante convergeant vers zéro:

$\overline{A}$



On engendre alors une suite image  $\{y^{(k)}\}_{k \geq 0}$  convergeant vers y.

Dans le cas des méthodes itératives linéaires,  $x^{(k+1)}$  est une fonction affine de  $x^{(k)}$  à travers l'itération (point fixe):

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} + d$$

Une manière assez générale d'obtenir une telle suite est d'utiliser un splitting de la matrice A sous la forme:

$$A = M - N$$

De sorte que  $y = Ax$  s'écrit alors  $Mx = Nx + y$  auquel on associe l'itération :

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + y$$

C'est-à-dire :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}y$$

Ce qui suppose que M soit inversible.

## 2- Gauss-seidel

La méthode de Gauss Seidel est associée au splitting:

$$A = D - L - U$$

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$-L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$-U = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel est associée au splitting:

$$A = D - L - U$$

Avec

$$M = D - L \text{ et } N = U$$

De sorte que l'itération  $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + y$  s'écrit ici:

$$Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + y$$

C'est-à-dire :

$$\forall i=1,2,3,\dots,n \quad A_{ii} x_i^{(k+1)} = \left( - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} + y_i \right) \frac{1}{A_{ii}}$$

A partir d'un vecteur  $x^{(0)}$  on construit la suite  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  de la manière suivante:

$$\forall i=1,2,\dots,n \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{A_{ii}}$$

Cette méthode n'est définie que si les  $A_{ii}$  sont non nuls !

### 3-SOR

On peut généraliser les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel en introduisant un paramètre de relaxation  $\omega$  pour former une combinaison linéaire:

Jacobi:  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{1}{A_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{A_{ii}} + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

Gauss-Seidel:  $\forall i=1,2,\dots,n$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{1}{A_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{A_{ii}} + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

La généralisation de Jacobi n'est pas utilisée.

La généralisation de Gauss-Seidel donne la méthode de SOR.

Le paramètre de relaxation doit être compris entre 0 et 2:

$\omega < 1$  sous-relaxation

$\omega > 1$  sur-relaxation

Son optimum est:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_j^2}}$$

Où  $\rho_j$  est le rayon spectrale de la matrice  $J = D^{-1}(L+U)$  de la méthode de Jacobi.

## Références Bibliographiques

- [1] J Pallares, F.X.Grau, Francesc Giralt, *Flow transitions in laminar Rayleigh-Benard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh numbers*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 42, pp. 753-769. (1999).
- [2] Ramon L. Frederick, Fernando Quirozo, *The transition from conduction to convection regime in a cubical enclosure with a partially heated wall*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 44, pp. 1699-1709. (2001).
- [3] Qi-Hong Deng, Guang-Fa Tang, Yuguo Li, *A combined temperature scale for analyzing natural convection in rectangular enclosures with discrete wall heat sources*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 45, pp. 3437-3446. (2002).
- [4] Massimo Corcione, *Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above*, Int. J. Thermal Sciences, vol. 42, pp. 199–208. (2003).
- [5] A.K. da Silva, L Gosselinn, *On the thermal performance of an internally finned three-dimensional cubic enclosure in natural convection*, Int. J. Thermal Sciences, vol. 44, pp. 540-546. (2005).
- [6] Mehmet Cem Ece, Elif Buyuk, *Natural convection flow under a magnetic field in an inclined rectangular enclosure heated and cooled on adjacent walls*, Fluid Dynamics Research, vol. 38, pp. 564-590. (2006).
- [7] E. Bilgen, R.Ben Yedder, *Natural convection in enclosure with heating and cooling by sinusoidal temperature profiles on one side*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 50, pp. 139-150. (2007).
- [8] Abdullatif Ben-Nakhi, Ali J. Chamkha, *Conjugate natural convection in a square enclosure with inclined thin fin of arbitrary length*, Int. J. Thermal Sciences, vol. 46, pp. 467-478. (2007).
- [9] Zekeriya Altaç, Özen Kurtul, *Natural convection in tilted rectangular enclosures with a vertically situated hot plate inside*, Applied Thermal Engineering, vol. 27, pp. 1832-1840. (2007).

- [10] Amaresh Dalal, Manab Kumar Das, *Numerical study of laminar natural convection in a complicated cavity heated from top with sinusoidal temperature and cooled from other sides*, Computers and Fluids, vol. 36, pp. 680-700. (2007).
- [11] Tzong Huei Chen, Li-Yueh Chen, *Study of buoyancy-induced flows subjected to partially heated sources on the left and bottom walls in a square enclosure*, Int. J. Thermal Sciences, vol. 46, pp. 1219-1231 .(2007).
- [12] Abdullatif Ben-Nakhi, Ali J. Chamkha, *Conjugate natural convection around a finned pipe in a square enclosure with internal heat generation*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 50,pp. 2260-2271. (2007).
- [13] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New York, (1980).
- [14] E.F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat Transfer*, McGraw-Hill book company, New York, (1978).
- [15] E. Saadjan, *Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques*, Polytechnica, Paris, (1998).
- [16] P.J. ROACHE, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa (1982).
- [17] De Vahl Davis G, *Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution*, Int. J. Num. Meth. Fluid, Vol. 3, pp. 249-264, (1983).

**Titre :** Contribution à l'étude de la convection naturelle dans une enceinte allongée, de grand axe horizontal et de section carrée, inclinée eu égard au plan horizontal, et chauffée par deux côtés opposés.

**Résumé :**

L'auteur propose dans ce travail, l'étude numérique du phénomène de la convection naturelle, en régime laminaire et permanent dans une enceinte cubique allongée, de grand axe horizontal, inclinée d'un angle  $\alpha$  eu égard au plan horizontal, dont les parois sont chauffées par deux côtés opposés  $T_{ch}$  pour les deux parois chaudes et  $T_f$  pour les deux parois froides avec  $T_{ch} > T_f$ , dans un premier cas, dans un deuxième, un troisième et un quatrième cas de chauffage, nous imposons aux deux parois inférieures une température dont les variations sont périodiques suivant les dimensions de chacune des parois considérée et nous maintenons les deux parois supérieures adiabatiques, l'enceinte est remplie d'un fluide newtonien et incompressible. Le nombre de Prandtl est fixé à 0.702 (cas de l'air) mais le nombre de Rayleigh varie. En utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, l'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles: les équations de continuité, des quantités de mouvement et de la chaleur. Un code de calcul a été mis au point, ce dernier utilise les volumes finis, pour la discrétisation des équations et afin de montrer sa fiabilité, l'auteur compare des résultats issus de ce dernier avec d'autres résultats similaires existant dans la littérature et il examine l'effet du nombre de Rayleigh ainsi que les différentes conditions thermiques pariétales considérées sur les résultats obtenus que ce soit qualitativement ou quantitativement.

**Mots-clés** : convection naturelle, équations de Boussinesq, enceintes fermées cubiques, Formulation vorticité-fonction de courant.



**Title: Numerical study of the natural convection, in square enclosures.**

**Summary:** The author proposes in this work, the numerical study of the phenomenon of the natural laminar and permanent convection in a square enclosure. This latter is oriented at an angle  $\alpha$ . The enclosure is filled by a Newtonian and incompressible fluid. The number of Prandtl is fixed at 0.702 (case of the air) but the number of Rayleigh varies. By using the approximation of Boussinesq and the vorticity-function formulation of current, the flow is modeled by the differential equations with the derivative partial: the equations of continuity, heat and the momentum. For the conditions of heating, they suppose in a first case, two opposite walls of enclosure are heated and the other opposite walls are cooled,  $T_{ch}$  for the heated walls and  $T_{fr}$  for the cooled walls, with  $T_{ch} > T_{fr}$ , and in a second case, third case and fourth case they suppose the two bottom walls heated by a periodic temperature and the two top walls are adiabatic.

A computer code was developed, the latter uses finished volumes, for the discretization of the equations and in order to show its reliability, the author compares results resulting from the latter with other similar results existing in the literature and he examines the effect of the parietal thermal conditions and the number of Rayleigh on the results obtained that it is qualitatively or quantitatively.

**Key words:** natural convection, Boussinesq equations, closed square enclosure, vorticity-function formulation.

## العنوان الدراسة العددية للحمل الطبيعي، لفضاء متوازي مستطيلات.

### ملخص

قمنا في إطار هذا العمل بدراسة عددية لظاهرة انتقال الحرارة عن طريق الحمل الطبيعي، الموجود في تجويف لفضاء متوازي مستطيلات و مائل بزواوية  $\alpha$  بالنسبة لمستوى افقى. هذا الفضاء مملوء بمائع نيوتوني غير منضغظ، يتدفق بصفة رقائقية و دائمة. نأخذ القيمة 0.702 لعدد Prandtl ثابتة (حالة الهواء) و لكن عدد Rayleigh يتغير. باستعمال مقاربة بوسينسك. كذب نموذج هذا التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية: معادلات الاستمرارية وكميات الحركة. بالنسبة لشروط هذا التسخين. في الحالة الأولى ، سخن الجدران المتقابلان تحت درجة حرارة  $T_{ch}$  و  $T_{fr}$  بالنسبة للجدران الباردان. مع  $T_{ch} > T_{fr}$ . أما في الحالة الثانية، الثالثة و الرابعة افترضنا من اجل الجدران السفليان درجة حرارة جيبيية، وأما الجدران العلويان كظيمان.

برنامج معلوماتي وضع للقيام بمختلف الحسابات لدراسة هذه الجملة، باستعمال طريقة الحجم المنتهية. بعدها قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج مماثلة لأبحاث أخرى

**المفاتيح :** الحمل الطبيعي، معادلات بوسينسك، فضاء مكعب ، طريقة الحجم المنتهية.