

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université Mentouri-Constantine  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire de Magister

présenté par :

Guenouche Mourad

Pour obtenir le Diplôme de Magister en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Option : Physique Quantique

Sujet :

Temps de Retard Cosmologique dans le Cadre du  
Modèle d'Einstein-Straus avec Constante  
Cosmologique

soutenu le : 07/01/2009

devant le jury composé de :

Président	L. Guechi	Prof.	Université Mentouri
Rapporteur	S. R. Zouzou	Prof.	Université Mentouri
Examineur	F. Benamira	Prof.	Université Mentouri
Examineur	M. T. Meftah	Prof.	Université d'Ouargla

# Remerciements

Un grand merci à M. Zouzou Sami Ryad, mon encadreur de thèse, d'avoir dirigé mes premiers pas de chercheur après avoir été mon professeur au DES et au DEA de Physique Théorique. Travailler à ses côtés a été pour moi une expérience très enrichissante et très agréable.

J'ai eu la chance de travailler avec M. Boudjemaa Kheir-Eddine. Je garde un excellent souvenir de cette collaboration. Merci mille fois pour les discussions stimulantes et les encouragements !

Merci également à M. Thomas Schücker de l'Université de Provence qui a validé la pertinence de mon travail.

J'adresse toute ma gratitude aux membres du jury. En premier lieu à Mrs. Guechi Larbi, pour en avoir accepté la présidence, et Benamira Farid, pour avoir accepté de juger le travail de ce mémoire de Magister, après avoir été mes professeurs au DES et au DEA de Physique Théorique. Je tiens à remercier également M. Meftah Mohamed Tayeb de l'Université d'Ouargla pour avoir accepté notre invitation de faire partie de jury.

Je remercie mes amis que j'ai côtoyé durant ma thèse et qui ont su m'aider et m'encourager chacun à sa manière, Menchar Rabeih avec qui j'ai parlé *physique* (et pas seulement !), Ghribe Ilhem et Behtene Taher.

J'adresse un grand merci à ma mère et mon père, Abdelmadjid, pour m'avoir toujours soutenu matériellement et moralement. Merci également à ma sœur Amel et à toute la famille.

Enfin, merci à toutes les personnes qui m'ont aidé à un moment ou à un autre et que j'aurais omis de citer.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modèle de Schwarzschild</b>	<b>6</b>
1.1 Forme d'une métrique statique à symétrie sphérique . . . . .	6
1.2 Métrique de Schwarzschild . . . . .	8
1.3 Géodésiques des photons dans un champ de Schwarzschild . . . . .	12
1.3.1 Déflexion des photons dans un champ de Schwarzschild . . . . .	14
1.3.2 Temps de retard dans un champ de Schwarzschild . . . . .	16
1.3.3 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 . . . . .	21
<b>2 Modèle de Kottler (SdS)</b>	<b>23</b>
2.1 Métrique de Kottler (SdS) . . . . .	23
2.2 Contribution de la constante cosmologique à la déflexion des photons dans un champ de Kottler . . . . .	25
2.2.1 Géométrie de l'espace-temps SdS et équation du mouvement . . . . .	26
2.2.2 Déviation de la lumière . . . . .	29
2.3 Contribution de la constante cosmologique au temps de retard dans un champ de Kottler . . . . .	32
2.3.1 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 . . . . .	36
<b>3 Modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en Cosmologie</b>	<b>38</b>
3.1 Principe cosmologique . . . . .	38
3.2 Equation de Friedmann . . . . .	40

3.3	Propagation des photons dans le modèle FLRW . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Modèle d'Einstein-Straus avec Constante cosmologique</b>	<b>46</b>
4.1	Raccordement des solutions FLRW et SdS . . . . .	47
4.2	Géodésiques et déviation dans le modèle d'Einstein-Straus . . . . .	52
4.3	Temps de retard dans le modèle d'Einstein-Straus . . . . .	67
4.4	Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 . . . . .	69
	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>

# Introduction

Ce travail de recherche s'inscrit dans la thématique de la cosmologie relativiste. Cette discipline a été initiée par Einstein en 1917, lorsqu'il s'est penché sur les implications de la relativité générale à grande échelle. Le fait que ce soit la relativité générale qui soit pertinente à l'échelle de l'Univers provient de ce que la gravitation est la seule interaction effective entre constituants de l'Univers dans cette limite.

La relativité générale prédit que le trajet des rayons lumineux est perturbé par les puits de potentiels gravitationnels. On appelle ce phénomène effet de lentille gravitationnelle ou déviation de la lumière. Une expédition fut montée en 1919 par Eddington pour observer cette déviation à l'occasion d'une éclipse totale de Soleil [1]. Ce phénomène de déviation des rayons lumineux conduit à la possibilité de mirages gravitationnels. Un autre effet relativiste accompagnant le phénomène de déviation est le temps de retard d'un signal radar émis de la Terre vers un satellite, où il est réfléchi sur Terre en passant près du soleil. Ce genre de temps de retard a été testé de façon très précise par Shapiro en 1968.

Cependant, on va étudier, dans ce mémoire de thèse, la déviation de la lumière et le temps de retard à l'échelle cosmologique, c'est-à-dire l'effet de lentille gravitationnelle que produisent les grandes structures de l'Univers sur la lumière provenant des objets d'arrière-plan. Pour ce faire, on a étudié l'effet de lentille gravitationnelle dans le cadre de trois modèles cosmologiques : les modèles de Schwarzschild et de Kottler qui sont des modèles statiques et le modèle non statique d'Einstein-Straus.

Le premier chapitre sera consacré au modèle de Schwarzschild. On commencera par dériver la métrique de Schwarzschild dont on fera usage pour extraire les équations régissant le mouvement des photons. On rappellera le calcul permettant la détermination de l'angle total de déviation

d'un photon passant au voisinage d'un objet massif, puis on exposera une technique nous permettant d'extraire une expression analytique pour le temps de retard. Ensuite, on clôturera ce chapitre par une confrontation entre la théorie et l'observation en appliquant nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 afin de déterminer la masse de l'amas de galaxies. Ce chapitre a été rédigé avec l'idée d'exposer les techniques qui vont nous servir pour les modèles de Kottler et d'Einstein-Straus.

Dans le deuxième chapitre, on dérivera la métrique de Kottler et les équations du mouvement qui nous serviront à calculer l'angle de déviation et le temps de retard, en suivant la même démarche que pour le modèle de Schwarzschild. Ensuite, on appliquera nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112. C'est dans ce chapitre qu'on met en évidence la contribution de la constante cosmologique à la déviation. Ce sujet n'est pas complètement nouveau ! Il avait déjà été évoqué auparavant et particulièrement étudié dans les travaux précurseurs de M. Ishak, W. Rindler et T. Schücker.

Dans le troisième chapitre, on exposera les éléments du modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker indispensables pour la construction du modèle d'Einstein-Straus et l'étude de la déviation et du temps de retard. Ces éléments sont essentiels et bien connus en Cosmologie. On parlera du principe cosmologique, de la métrique isotrope et homogène de FLRW, de l'équation de Friedmann ainsi que de la propagation des photons.

Le point principal sur lequel ce mémoire apporte des contributions originales est le calcul du temps de retard dans le cadre du modèle d'Einstein-Straus avec constante cosmologique. Ceci est présenté de manière détaillée dans le quatrième chapitre. On exposera progressivement, dans ce chapitre, les éléments nécessaires pour arriver au calcul du temps de retard. On commencera par raccorder la métrique de FLRW à la métrique de SdS, afin de construire la métrique d'Einstein-Straus, en s'appuyant sur les travaux de T. Schücker tout en apportant certaines modifications tel que la résolution analytique de l'équation de Friedmann. Il s'est avéré difficile dans ce modèle de développer une expression analytique donnant directement (comme dans le cas des modèles de Schwarzschild et de Kottler) le temps de retard. Pour cela nous présenterons deux méthodes pour déterminer le temps de retard, une méthode purement numérique que l'on nommera "méthode de calcul direct", et une méthode que l'on nommera "méthode de calcul par différence" permettant d'obtenir une expression semi-analytique. Enfin nous appliquerons

nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112.

Cette thèse se termine par une conclusion.

# Chapitre 1

## Modèle de Schwarzschild

Le champ gravitationnel des corps à symétrie sphérique est d'une très grande importance en cosmologie. Notons qu'il existe un équivalent du théorème de Gauss en relativité générale: Le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps à symétrie sphérique ne dépend que de la masse du corps et non du détail de la distribution de masse. Il se trouve d'ailleurs que la toute première solution non triviale des équations d'Einstein dans le vide obtenue par l'Allemand Karl Schwarzschild en 1916 [2], juste quelques semaines après la publication de la relativité générale par Albert Einstein, correspond au cas statique avec symétrie sphérique. Nous allons dans ce qui suit donner une dérivation de la métrique de Schwarzschild.

### 1.1 Forme d'une métrique statique à symétrie sphérique

Commençons d'abord par déterminer la forme la plus générale d'une métrique statique isotrope à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique, c'est-à-dire dans une région où le tenseur énergie impulsion est nul:  $T_{\mu\nu} = 0$ . On peut toujours trouver un système de coordonnées quasi-minkowskien de telle manière que l'élément de ligne prenne la forme suivante

$$ds^2 = F(r)dt^2 - C(r)d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - D(r) (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 - 2E(r)dt (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}),$$

où

$$r := \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}.$$

En se plaçant dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  associé aux coordonnées quasi-cartésiennes  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

$ds^2$  peut s'écrire sous la forme

$$ds^2 = F(r)dt^2 - D(r)r^2dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2) - 2E(r)dt dr,$$

avec

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Faisons le choix d'un nouveau temps  $t'$  lié à  $t$  par la relation

$$t' = t + \Phi(r),$$

ce qui correspond à une resynchronisation des horloges, avec  $\Phi$  une fonction arbitraire de  $r$ .  $ds^2$  s'écrit alors

$$\begin{aligned}ds^2 &= F(r)dt'^2 + \left[ F(r) \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + 2E(r)r \frac{d\Phi}{dr} \right] dr^2 - D(r)r^2dr^2 \\ &\quad - C(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2) - 2 \left( F(r) \frac{d\Phi}{dr} + E(r)r \right) dt' dr.\end{aligned}$$

Choisissons  $\Phi$  de telle manière à faire disparaître le terme en  $dt' dr$ , ce qui donne

$$\frac{d\Phi}{dr} = -r \frac{E(r)}{F(r)},$$

et  $ds^2$  se simplifie en

$$ds^2 = F(r)dt'^2 - G(r) dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2),$$

avec

$$G(r) = r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right).$$

Introduisons maintenant une nouvelle coordonnée radiale définie par

$$r'^2 = r^2 C(r),$$

d'où

$$dr = \frac{r' dr'}{\frac{r^2}{2} \frac{dC}{dr} + rC(r)},$$

et  $ds^2$  prend alors la forme

$$ds^2 = B(r') dt'^2 - A(r') dr'^2 - r'^2 d\Omega^2, \quad (1.1)$$

avec

$$B(r') := F(r), \quad A(r') := \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( 1 + \frac{r^2}{2C(r)} \frac{dC}{dr} \right)^{-2}.$$

L'expression (1.1) est appelée forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique. Il s'agit maintenant d'obtenir les fonctions de  $r$ ,  $A(r)$  et  $B(r)$ , en appliquant les équations d'Einstein, ce qui nous donnera la métrique de Schwarzschild.

## 1.2 Métrique de Schwarzschild

Dans un but de commodité,  $r'$  et  $t'$  seront dorénavant notés  $r$  et  $t$  respectivement. En comparant (1.1) à

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

on déduit les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$

$$g_{tt} = -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Il s'ensuit que le tenseur métrique est diagonal et est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Déterminons les fonctions  $A$  et  $B$  en appliquant les équations d'Einstein, qui à l'extérieur de la source s'écrivent

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci, qui s'exprime en termes des symboles de Christoffel  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\eta}. \quad (1.3)$$

Donc, on doit calculer au préalable les symboles de Christoffel  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , qui ont pour expression

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right), \quad (1.4)$$

où  $g^{\mu\nu}$  est le tenseur métrique inverse, qui est diagonal comme l'est le tenseur métrique

$$g^{tt} = -1/B(r), \quad g^{rr} = 1/A(r), \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta).$$

On obtient alors pour les symboles de Christoffel non nuls, les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, & \Gamma^r_{tt} &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{A(r)}, \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -\frac{r}{A(r)} \sin^2 \theta, & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^t_{tr} &= \Gamma^t_{rt} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r, & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont les composantes diagonales, qui ont

comme expressions

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1, \\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta,
\end{aligned}$$

où  $' := d/dr$ . Par conséquent, les équations d'Einstein dans le vide s'écrivent

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} = 0, \\
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = 0, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 = 0.
\end{aligned}$$

En combinant les expressions de  $R_{tt}$  et  $R_{rr}$ , on obtient

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = 0,$$

d'où

$$A(r)B(r) = C^{te}. \tag{1.6}$$

Désignons par  $ds_\infty^2$  la métrique de Minkowski, valable pour un espace-temps plat

$$ds_\infty^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Si nous imposons que la métrique  $ds^2$  tende vers la métrique de Minkowski à l'infini, c'est à dire que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = ds_\infty^2,$$

il vient alors

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (1.7)$$

De (1.6) et (1.7), on obtient

$$A(r) = 1/B(r).$$

En substituant ce résultat dans l'équation  $R_{\theta\theta} = 0$ , on obtient

$$\frac{d}{dr} [rB(r)] = 1,$$

d'où

$$B(r) = 1 + \frac{C^{tet}}{r}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la constante  $C^{tet}$ . Pour cela, considérons la limite d'un champ faible, statique, créé par une distribution de masse non relativiste, auquel cas on a la relation suivante (on peut se référer à [3])

$$g_{tt} \sim -[1 + 2\phi(r)], \quad (1.8)$$

où  $\phi$  est le potentiel gravitationnel de Newton, qui à une distance  $r$  du centre d'une masse sphérique  $M$ , est donné par

$$\phi = -\frac{GM}{r},$$

avec  $G$  la constante universelle de la gravitation ou constante de Newton. Par conséquent,

$$C^{tet} = -2GM$$

et

$$B(r) = -g_{tt} = 1 - \frac{2GM}{r},$$

ce qui donne la forme finale de la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (1.9)$$

qui est asymptotiquement plate pour  $r \gg r_{Schw} := 2GM$ .  $r_{Schw}$  est appelé rayon de Schwarzschild. La métrique de Schwarzschild présente une singularité pour  $r_{Schw} := 2GM$ . C'est une singularité de coordonnées, car disparaissant dans un autre système de coordonnées convenablement choisi. Pour  $r > r_{Schw}$ , la solution décrit le champ de gravitation à l'extérieur de la distribution de masse. Pour  $r < r_{Schw}$ , il n'existe aucune interprétation simple de la métrique. Entres autres, les rôles de l'espace et du temps sont renversés.

C'est la métrique de Schwarzschild qui est utilisée pour obtenir les prédictions de la relativité générale pour la déviation de la lumière par une masse, la précession du périhélie de Mercure, le décalage spectral gravitationnel vers le rouge et le retard de l'écho radar.

### 1.3 Géodésiques des photons dans un champ de Schwarzschild

Dans ce qui suit on s'intéresse uniquement au cas des trajectoires des photons. En vertu de l'isotropie, le mouvement se fait dans un plan, qu'on peut prendre comme le plan équatorial,  $\theta = \pi/2$ . L'équation (1.9) se simplifie alors en

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}.$$

Puisque l'intervalle d'espace-temps pour un photon est de genre lumière,  $ds^2 = 0$ , on doit utiliser un paramètre affine autre que  $s$ . Notons  $p$  un tel paramètre. Les équations de la géodésique s'écrivent

$$\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0. \quad (1.10)$$

En utilisant les expressions des symboles de Christoffel, (1.5), on obtient

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t}\dot{r} = 0, \quad (1.11)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}B(r)B'(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{2}\frac{B'(r)}{B(r)}\dot{r}^2 - rB(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (1.12)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \quad (1.13)$$

où  $\dot{\cdot} := d/dp$ . En divisant (1.11) et (1.13) par  $\dot{t}$  et  $\dot{\varphi}$  respectivement et sachant que  $B'(r) =$

$\dot{B}(r)/\dot{r}$ , on arrive à

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{B(r)}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{r^2}. \quad (1.15)$$

Par intégration, chacune des équations (1.14) et (1.15) donne une constante du mouvement ; l'une des deux constantes, celle résultant de l'intégration de (1.14), pourrait être absorbée dans une redéfinition du paramètre affine  $p$ . Redéfinissons  $p$  de telle manière que la solution de (1.14) soit

$$\dot{t} = 1/B(r). \quad (1.16)$$

L'équation (1.15) s'intègre elle pour donner

$$\dot{\varphi} = J/r^2, \quad (1.17)$$

où  $J$ , la deuxième constante du mouvement, joue le rôle d'un moment angulaire par unité de masse. En substituant les expressions de  $\dot{t}$  et  $\dot{\varphi}$  dans l'équation (1.12) et en multipliant par  $2\dot{r}/B(r)$ , il vient

$$\frac{2}{B(r)} \dot{r}\ddot{r} - \frac{\dot{B}(r)}{B(r)^2} \dot{r}^2 - 2J^2 \frac{\dot{r}}{r^3} + \frac{\dot{B}(r)}{B(r)^2} = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\dot{r}^2}{B(r)} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right) = 0,$$

d'où

$$\dot{r}^2 = B(r) \left( \frac{1}{B(r)} - \frac{J^2}{r^2} - E \right), \quad (1.18)$$

avec  $E$  une troisième constante du mouvement à déterminer.  $E$  joue le rôle d'une énergie par unité de masse. A l'aide des expressions de  $\dot{t}$  et de  $\dot{\varphi}$ ,  $ds^2$  peut s'exprimer en terme de  $dp^2$  comme

$$ds^2 = E dp^2.$$

Pour un photon  $ds^2 = 0$ , et par conséquent  $E$  doit s'annuler

$$E = 0.$$

L'équation (1.18) se simplifie alors en

$$\dot{r}^2 = 1 - J^2 B(r)/r^2. \quad (1.19)$$

En faisant usage des expressions de  $\dot{r}$  et  $\dot{\varphi}$ , on peut obtenir une expression pour  $\frac{dr}{d\varphi}$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm r \sqrt{r^2/J^2 - B(r)}. \quad (1.20)$$

$dr/d\varphi$  doit s'annuler au péri-lens, distance d'approche minimale du photon,  $r = r_P$ , ce qui donne

$$J = r_P / \sqrt{B(r_P)}. \quad (1.21)$$

En substituant dans l'équation (1.20), on obtient

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{r^2/r_P^2 - 1}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}. \quad (1.22)$$

De la même manière, en faisant maintenant usage des expressions de  $\dot{t}$  et  $\dot{r}$ , et compte tenu de l'expression de  $J$ , on obtient une expression pour  $\frac{dt}{dr}$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r) \sqrt{1 - r_P^2/r^2}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}. \quad (1.23)$$

### 1.3.1 Déflexion des photons dans un champ de Schwarzschild

La présence d'une masse déforme la géométrie à son voisinage, et les rayons lumineux répondent à cette déformation en se courbant d'autant plus qu'ils passent à proximité de cette masse. Ce phénomène qui a comme origine le couplage entre matière et courbure, constitue un excellent test de la théorie d'Einstein. Dans cette section, on va faire usage de l'équation (1.22) pour calculer l'angle de déviation total que subit un photon lors de son passage à proximité

d'une masse sphérique  $L$ . Ce photon provient d'une source supposée distante de  $r_S$  du centre de  $L$ , et arrive sur Terre supposée distante de  $r_E$  du centre de  $L$  (voir la figure 1). Soit  $r_P$  la distance minimale d'approche du photon de la lentille, désigné sous le nom de péri-lens. On se limitera à des cas où  $r_P$  est très petit devant  $r_S$  et  $r_E$  :  $r_P/r_S \ll 1$ ,  $r_P/r_E \ll 1$ , conditions réalisées en pratique dans les expériences de déviation de la lumière.

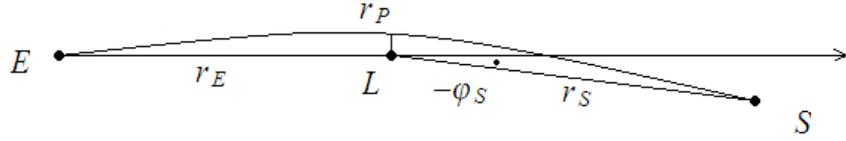


Figure 1 : Déviation de la lumière.

Choisissons l'axe polaire du système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de telle manière que la Terre soit caractérisée par  $\varphi = \varphi_E = \pi$ . La Terre aussi bien que la source font partie de la trajectoire du photon (respectivement points de départ et d'arrivée) et sont par conséquent également contenues dans le plan équatorial  $\theta = \pi/2$  et donc caractérisées par  $(r, \varphi) = (r_S, \varphi_S)$  pour la source et  $(r, \varphi) = (r_E, \varphi_E = \pi)$  pour la Terre.

En tenant compte du fait que  $d\varphi/dr$  est négatif pour  $r$  variant de  $r_S$  à  $r_P$  et est positif pour  $r$  variant de  $r_P$  à  $r_E$ , nous obtenons

$$\varphi_E - \varphi_S = \int_{r_P}^{r_E} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr + \int_{r_P}^{r_S} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr. \quad (1.24)$$

En faisant usage des intégrales

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} &= -\arcsin \frac{1}{z}, \\ \int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2-1}} &= \frac{1}{z}\sqrt{z^2-1}, \\ \int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z^2-1}} &= \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

le calcul de  $\varphi_E - \varphi_S$ , (1.24), donne au premier ordre en  $GM/r_P$

$$\begin{aligned} \varphi_E - \varphi_S \sim \pi - \arcsin \frac{r_P}{r_E} - \arcsin \frac{r_P}{r_S} \\ + \frac{GM}{r_P} \left( \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_E^2}} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_S^2}} + \sqrt{\frac{r_E - r_P}{r_E + r_P}} + \sqrt{\frac{r_S - r_P}{r_S + r_P}} \right). \end{aligned}$$

A l'ordre zéro en  $r_P/r_E$  et en  $r_P/r_S$ , ce qui revient formellement à faire tendre  $r_P/r_E$  et  $r_P/r_S$  vers zéro, on obtient

$$\varphi_E - \varphi_S \sim \pi + \frac{4GM}{r_P}.$$

En l'absence de la lentille  $L$ ,  $M = 0$ , la trajectoire aurait été une droite et  $\varphi_E - \varphi_S$  aurait valu  $\pi$ . Donc la déviation de la lumière, qui est la différence entre  $\varphi_E - \varphi_S$  en présence de la lentille et en l'absence de celle-ci, est donnée par

$$\Delta\varphi = -\varphi_S \sim \frac{4GM}{r_P}, \quad (1.26)$$

où on a tenu compte du fait que  $\varphi_E = \pi$ .

Il est important de noter que la déviation de la lumière par une masse, à savoir l'effet de lentille gravitationnelle, est aujourd'hui un outil d'une importance considérable pour l'étude des distributions de matière.

### 1.3.2 Temps de retard dans un champ de Schwarzschild

Le biangle est l'un des plus belles caractéristiques de la géométrie riemannienne. Le premier biangle a été observé par I. I. Shapiro en 1968 [4]. Ses vertex sont la Terre et Mercure, avec un temps de voyage  $\tau$  de 10 minutes environ, et un temps de retard de  $120 \mu\text{s}$ , pour un photon rasant le Soleil. Ici nous nous intéressons à un biangle d'ordre cosmologique,  $\tau \sim 10^{10}$  ans.

Maintenant, on va considérer deux photons émis en même temps par une source  $S$  et reçus sur Terre,  $E$ . En général, deux photons, qui suivent des trajectoires différentes, n'arrivent pas en même temps sur Terre (Figure 2). L'objectif de cette section est de calculer le temps de retard que met un photon par rapport à l'autre. On adoptera les mêmes conventions que dans la section précédente à l'exception des hypothèses sur  $r_P/r_E$  et  $r_P/r_S$ . On notera  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$  les

angles que font les deux photons à leur réception sur Terre avec l'axe lentille-Terre.

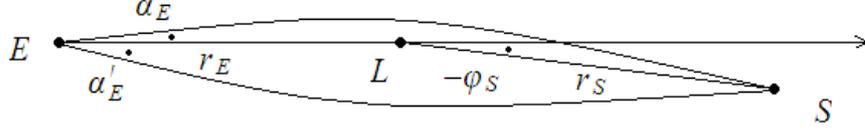


Figure 2: Deux rayons lumineux émis par la source et courbés sous l'effet gravitationnel d'une masse sphérique isolée, la lentille  $L$ . Ils sont reçus sur Terre sous les angles  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ .

Pour le chemin du haut  $dt/dr$  est négatif sur la partie de la trajectoire de  $r_S$  à  $r_P$  et est positif sur la partie de la trajectoire de  $r_P$  à  $r_E$ . C'est également le cas pour le chemin du bas :  $dt/dr$  est négatif de  $r_S$  à  $r'_P$  et est positif de  $r'_P$  à  $r_E$ , ceci nous permet d'écrire

$$t = t_E + t_S = \int_{r_P}^{r_E} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr + \int_{r_P}^{r_S} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr,$$

$$t' = t'_E + t'_S = \int_{r'_P}^{r_E} \left| \frac{dt'}{dr} \right| dr + \int_{r'_P}^{r_S} \left| \frac{dt'}{dr} \right| dr.$$

Déterminons d'abord le temps  $t_E$  qui s'écoule pendant la propagation du photon " $\alpha_E$ " de  $r_P$  à  $r_E$ . Une intégration au premier ordre en  $\delta = GM/r_P$  donne

$$t_E = \int_{r_P}^{r_E} \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r)\sqrt{1-r_P^2/r^2}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2} dr$$

$$\sim r_P \sqrt{B(r_P)} (I_{E1} + 3\delta I_{E2} + \delta I_{E3}),$$

avec

$$I_{E1} = \int_{y_E}^1 \frac{dy}{y^2 \sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{y_E} \sqrt{1-y_E^2},$$

$$I_{E2} = \int_{y_E}^1 \frac{dy}{y \sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arctanh} \sqrt{1-y_E^2},$$

$$I_{E3} = \int_{y_E}^1 \frac{dy}{y^2 (1+y) \sqrt{1-y^2}} = \left( \frac{1}{y_E} + \frac{1}{1+y_E} \right) \sqrt{1-y_E^2} - \operatorname{arctanh} \sqrt{1-y_E^2},$$

et  $y := r_P/r$ ,  $y_E := r_P/r_E$ .

Le même raisonnement que pour le temps  $t_E$  mène dans le cas de  $t'_E$  à des expressions analogues, à condition que  $y$  et  $y_E$  soient respectivement remplacés par  $y' := r'_P/r$  et  $y'_E := r'_P/r_E$ .

Pour évaluer  $t_E - t'_E$ , on doit soustraire des nombres gigantesques qui sont presque identiques. En développant séparément les trois intégrales, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{E1} &= r_P \sqrt{B(r_P)} I_{E1} - r'_P \sqrt{B(r'_P)} I'_{E1} \\ &\sim GM \left[ -\frac{1}{y_E} (1-x) + \frac{y_E}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{\delta}{2y_E} (1-x^2) \right], \\ \Delta_{E2} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E2} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E2} \sim -\ln x, \\ \Delta_{E3} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E3} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E3} \sim \frac{1}{y_E} (1-x) + \ln x - \frac{\delta}{y_E} (1-x^2),\end{aligned}$$

avec  $x = r_P/r'_P$ , d'où

$$\begin{aligned}t_E - t'_E &\sim \Delta_{E1} + 3GM\Delta_{E2} + GM\Delta_{E3} \\ &\sim GM \left[ \frac{y_E}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{3\delta}{2y_E} (1-x^2) - 2\ln x \right].\end{aligned}$$

De même, en répétant la même procédure, on obtient pour  $t_S - t'_S$  l'expression suivante

$$t_S - t'_S \sim \Delta_{S1} + 3GM\Delta_{S2} + GM\Delta_{S3},$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta_{S1} &= r_P \sqrt{B(r_P)} I_{S1} - r'_P \sqrt{B(r'_P)} I'_{S1} \\ &\sim GM \left[ -\frac{1}{y_S} (1-x) + \frac{y_S}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{\delta}{2y_S} (1-x^2) \right], \\ \Delta_{S2} &= \sqrt{B(r_P)} I_{S2} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{S2} \sim -\ln x, \\ \Delta_{S3} &= \sqrt{B(r_P)} I_{S3} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{S3} \sim \frac{1}{y_S} (1-x) + \ln x - \frac{\delta}{y_S} (1-x^2),\end{aligned}$$

et  $y_S := r_P/r_S$ . D'où

$$t_S - t'_S \sim GM \left[ \frac{y_S}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{3\delta}{2y_S} (1-x^2) - 2\ln x \right],$$

En faisant usage des deux expressions pour  $t_E - t'_E$  et  $t_S - t'_S$ , le temps de retard peut s'exprimer en terme de  $M$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $x$  et  $r_P$  comme

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_E - t'_E + t_S - t'_S \\ &\sim GM \left[ \frac{r_P^2}{2GM} \left( \frac{1}{r_E} + \frac{1}{r_S} \right) (1/x^2 - 1) - \frac{3GM}{2r_P^2} (r_E + r_S) (1 - x^2) - 4 \ln x \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Revenons maintenant à l'expression (1.22); pour le chemin du haut  $d\varphi/dr$  est négatif pour  $r$  compris entre  $r_S$  et  $r_P$ , et est positif pour  $r$  compris entre  $r_P$  et  $r_E$ , d'où

$$\pi - \varphi_S = \int_{r'_P}^{r_E} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr + \int_{r'_P}^{r_S} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr. \quad (1.28)$$

En faisant usage des intégrales (1.25), le calcul de (1.28) donne au premier ordre en  $GM/r_P$

$$\begin{aligned} -\varphi_S &\sim -\arcsin \frac{r_P}{r_E} - \arcsin \frac{r_P}{r_S} \\ &\quad + \frac{GM}{r_P} \left( \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_E^2}} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_S^2}} + \sqrt{\frac{r_E - r_P}{r_E + r_P}} + \sqrt{\frac{r_S - r_P}{r_S + r_P}} \right). \end{aligned}$$

pour le chemin du bas  $d\varphi'/dr$  est positif sur le trajet de  $r_S$  à  $r'_P$ , et est négatif sur le trajet de  $r'_P$  à  $r_E$ . Il en résulte alors que

$$\pi + \varphi'_S = \int_{r_P}^{r_E} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr + \int_{r_P}^{r_S} \left| \frac{d\varphi'}{dr} \right| dr,$$

et le calcul donne au premier ordre en  $GM/r'_P$

$$\begin{aligned} -\varphi'_S &\sim \arcsin \frac{r'_P}{r_E} + \arcsin \frac{r'_P}{r_S} \\ &\quad - \frac{GM}{r'_P} \left( \sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r_E^2}} + \sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r_S^2}} + \sqrt{\frac{r_E - r'_P}{r_E + r'_P}} + \sqrt{\frac{r_S - r'_P}{r_S + r'_P}} \right). \end{aligned}$$

Comme les angles  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$  sont très petits devant l'unité (quelques secondes d'arc), nous

pouvons procéder aux approximations suivantes

$$\begin{aligned}
\alpha_E &\sim \tan \alpha_E = r_E |d\varphi/dr(r_E)| \sim (r_E^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r_P/r_E = y_E, \\
\alpha'_E &\sim \tan \alpha'_E = r_E |d\varphi'/dr(r_E)| \sim (r_E^2/r_P'^2 - 1)^{-1/2} \sim r'_P/r_E = y'_E, \\
\alpha_S &\sim \tan \alpha_S = r_S |d\varphi/dr(r_S)| \sim (r_S^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r_P/r_S = y_S, \\
\alpha'_S &\sim \tan \alpha'_S = r_S |d\varphi'/dr(r_S)| \sim (r_S^2/r_P'^2 - 1)^{-1/2} \sim r'_P/r_S = y'_S.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Il s'ensuit que

$$x := r_P/r'_P \sim \alpha_E/\alpha'_E, \quad r_P \sim \alpha_E r_E. \tag{1.30}$$

Alors nous pouvons simplifier davantage les expressions de  $\varphi_S$  et  $\varphi'_S$ , en utilisant (1.29), ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\varphi_S &\sim -\alpha_E \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) + \frac{4GM}{\alpha_E r_E}, \\
-\varphi'_S &\sim +\alpha'_E \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) - \frac{4GM}{\alpha'_E r_E}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Etant donné que les deux photons sont émis au même endroit, la source  $S$ ,  $\varphi_S$  et  $\varphi'_S$  doivent être obligatoirement égaux, d'où une relation entre  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$ ,  $\alpha'_E$  et  $M$

$$\frac{r_E}{r_S} \sim \frac{4GM}{\alpha_E \alpha'_E r_E} - 1. \tag{1.32}$$

En tenant compte de (1.30), on obtient pour le temps de retard (1.27) l'expression suivante en terme de  $M$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$

$$\Delta t \sim GM \left[ \frac{r_E}{2GM} \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2) - \frac{3GM}{2r_E^2} (r_E + r_S) \left(\frac{1}{\alpha_E^2} - \frac{1}{\alpha_E'^2}\right) - 4 \ln \frac{\alpha_E}{\alpha_E'} \right]. \tag{1.33}$$

Donc si on se donne *a priori* les valeurs de  $M$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ , on pourrait calculer le temps de retard du photon " $\alpha_E$ " par rapport au photon " $\alpha'_E$ ". Le temps de retard s'annule, comme prévu, dans le cas où  $\alpha_E = \alpha'_E$  à cause de la symétrie.

### 1.3.3 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

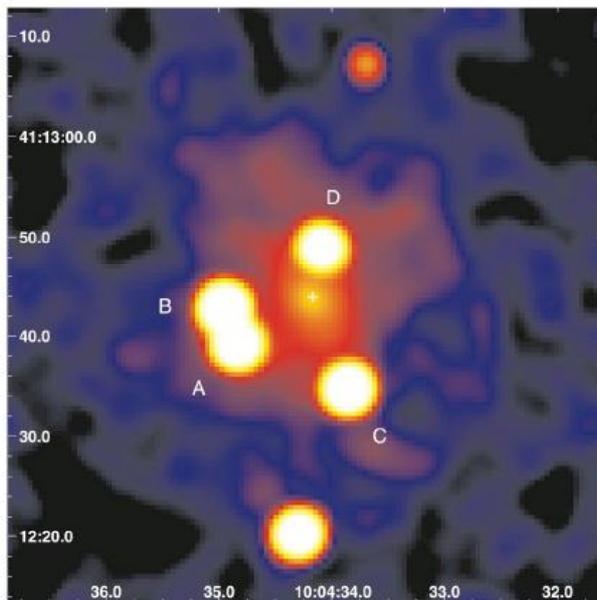


Figure 3 : Images multiples du quasar SDSS J1004+4112. SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

Cette image a été obtenue par Ota *et al* [5]. Elle montre cinq points pratiquement identiques, qui présentent, par analyse spectroscopique, la même luminosité et, plus étrange encore, le même spectre électromagnétique, avec  $z_S = 1.734$  comme red-shift. Il s'agit de cinq mirages d'un même quasar qui se trouve en réalité à des millions d'années-lumière au-delà d'un amas de galaxies. Cet amas de galaxies, visible via les rayons X à  $z_L = 0.68$  comme red-shift, a servi dans ce cas de lentille gravitationnelle (indiqué par une croix au cœur de l'image). On s'intéresse uniquement aux images C et D, avec  $\alpha'_E = 10'' \pm 10\%$  et  $\alpha_E = 5'' \pm 10\%$  respectivement, qui présentent en vérité un important effet gravitationnel ; un temps de retard de  $\Delta\tau > 7.7$  ans comme limite inférieure [9]. On suppose que l'amas de galaxies est sphérique ; malgré le fait que la présence de cinq images implique forcément que l'amas de galaxies ne l'est pas.

Utilisons le modèle  $\Lambda$ CDM à espace plat avec  $\Lambda = 0$  pour convertir les redshifts  $z_L$  et  $z_S$  en distances d'aire  $d_L = r_E$  et  $d_S$  respectivement par rapport à la Terre, en utilisant l'Ansätze

$$d_S = r_E + r_S.$$

On détermine alors la masse de l'amas de galaxies à l'aide de l'expression (1.32), pour les valeurs maximales '+', centrales ' $\pm 0$ ' et minimales '-' des angles  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ . Les résultats sont consignés dans le tableau 1.

Une fois que la masse  $M$  appropriée est déterminée, on calcule l'angle polaire  $\varphi_S$  et le temps de retard que met le photon " $\alpha_E$ " par rapport à " $\alpha'_E$ ", en utilisant respectivement les expressions (1.31) et (1.33).

$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S ["]$	11.85	10.67	13.04	14.22	13.04	<b>15.41</b>	9.48	<b>8.30</b>	10.67
$M [10^{13} M_\odot]$	2.81	3.10	2.53	3.10	<b>3.41</b>	2.79	2.53	2.79	<b>2.28</b>
$\Delta t [\text{ans}]$	15.2	14.3	15.8	19.1	18.4	19.6	11.5	10.6	12.3

Tableau 1.

Par conséquent

$$-\varphi_S = 11.85_{-3.55}^{+3.56} \text{''},$$

et

$$M = 2.81_{-0.53}^{+0.60} \cdot 10^{13} M_\odot.$$

Cette masse n'est pas compatible avec la valeur observée  $M = 5.0_{-1.0}^{+1.0} \cdot 10^{13} M_\odot$  [6].

## Chapitre 2

# Modèle de Kottler (SdS)

En présence de la constante cosmologique la métrique de Schwarzschild est remplacée par celle de Kottler [7] qui se réduit à celle de de Sitter [8] dans un espace-temps vide,  $M = 0$ , ce qui motive l'appellation métrique de Schwarzschild-de Sitter (SdS) également utilisée pour désigner la métrique de Kottler. En fait nous verrons par la suite que l'étude d'une telle métrique conduit à un univers fini avec un rayon de l'ordre de  $\sqrt{3/\Lambda}$ . Et comme l'intuition le suggère, un  $\Lambda$  positif va atténuer l'effet de la gravitation à travers le temps de retard et l'angle de déviation.

### 2.1 Métrique de Kottler (SdS)

Nous souhaitons déterminer la forme d'une métrique statique isotrope à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique, en tenant compte de la constante cosmologique. Les équations d'Einstein, en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

C'est la forme la plus générale qui donnerait un univers statique et fini; la contraction de cette dernière équation donne

$$R = 4(2\pi GT^\mu{}_\mu - \Lambda).$$

En remplaçant dans (2.1), on obtient

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right) - \Lambda g_{\mu\nu}.$$

A l'extérieur de la source,  $T_{\mu\nu} = 0$ , l'équation précédente se réduit à

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}.$$

Si  $\Lambda \neq 0$ , cette équation est incompatible avec l'hypothèse d'un espace-temps plat à l'infini. En effet pour une métrique de Minkowski  $R_{\mu\nu} = 0$ , ce qui exigerait  $\Lambda = 0$ .

En suivant la même démarche que précédemment, nous obtenons pour les équations d'Einstein les expressions

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} = \Lambda B(r), \\ R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = -\Lambda A(r), \\ R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 = -\Lambda r^2, \\ R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta = -\Lambda r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

En combinant les expressions de  $R_{tt}$  et  $R_{rr}$ , on obtient

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = \Lambda - \Lambda = 0,$$

d'où

$$A(r)B(r) = C^{te}.$$

L'équation  $R_{\theta\theta} = -\Lambda r^2$  se réduit alors à

$$\frac{d}{dr} [rB(r)] = C^{te} (1 - \Lambda r^2),$$

qui est équivalent à

$$B(r) = C^{te} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{C^{tel}}{r} \right),$$

où  $C^{te}$  et  $C^{tel}$  des constantes à déterminer. Pour  $r$  suffisamment petit  $B$  devient

$$B(r) \sim C^{te} \left( 1 + \frac{C^{tel}}{r} \right).$$

En comparant à (1.8), le résultat obtenu dans l'approximation pour un champ faible, il vient

$$C^{te} = 1, \quad C^{tel} = -2GM,$$

ce qui détermine complètement la métrique SdS qui prend alors la forme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (2.2)$$

Il est facile de voir que la métrique SdS atteint, en sus de la singularité  $r = 2GM$ , pour  $r$  suffisamment petit, une deuxième singularité de coordonnées, en  $r = \sqrt{3/\Lambda}$ , pour  $r$  suffisamment grand. En outre, l'équation (2.1) avec un  $\Lambda$  positif donne lieu, même en l'absence de la masse, à une accélération radiale  $\Lambda r/3$ , très petite dans la mesure où  $\Lambda$  est faible; de l'ordre de  $10^{-52} \text{ m}^{-2}$  [10]. En effet, l'identification au résultat (1.8) pour un champ faible donne le potentiel

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2.$$

## 2.2 Contribution de la constante cosmologique à la déflexion des photons dans un champ de Kottler

Dans le but de comprendre la nature de l'énergie sombre, qui serait responsable de l'expansion accélérée de l'Univers [11], il est intéressant d'étudier le rôle de la constante cosmologique.

Jusqu'à tout récemment la croyance générale était que la constante cosmologique n'a pas d'effet sur la déviation de la lumière par une masse isolée  $M$  à symétrie sphérique. Cette croyance a comme origine le fait que la constante cosmologique disparaît dans l'équation de la trajectoire  $\varphi(r)$ . Rindler et Ishak [12] ont corrigé cette croyance générale: La constante cosmologique a un

effet sur la déviation de la lumière par une masse  $M$  à symétrie sphérique. Le travail de Rindler et Ishak se fait dans le cadre des hypothèses suivantes :

1. La terre et la source sont au repos par rapport à la lentille.
2. Les masses de la terre et de la source sont négligeables par rapport à la masse de la lentille.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet de la constante cosmologique sur la courbure d'un rayon lumineux, lors de son passage à proximité d'une masse à symétrie sphérique.

### 2.2.1 Géométrie de l'espace-temps SdS et équation du mouvement

Avant d'aller plus loin, considérons un espace euclidien à trois dimensions. Dans des coordonnées cylindriques, l'élément de ligne au carré  $dl^2$  s'écrit

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Considérons maintenant une surface à deux dimensions à symétrie cylindrique  $z = z(r)$  plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. L'élément de ligne  $dl^2$  s'écrit alors

$$dl^2 = \left[ \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.3)$$

Compte tenu de (2.2), La métrique spatiale de Kottler pour un mouvement restreint dans le plan équatorial,  $\theta = \pi/2$ , se simplifie en

$$dl^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.4)$$

Près de la masse où  $\Lambda r^2 \ll GM/r$ ,  $dl^2$  est approximé par la métrique spatiale de Schwarzschild

$$dl^2 \sim \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

En comparant à (2.3), on obtient

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{2GM}{r - 2GM}}.$$

Cette dernière s'intègre pour donner

$$z(r)^2 = 8GM(r - 2GM). \quad (2.5)$$

C'est l'équation de la parabolôïde de Flamm, notée  $\Sigma^1$  sur la figure 4. Loin de la masse où  $GM/r \ll \Lambda r^2$  la métrique spatiale (2.4) est approximée par la métrique spatiale de de Sitter

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

En comparant à (2.3), on en déduit que

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{\Lambda r^2}{3 - \Lambda r^2}},$$

qui s'intègre grâce à un changement de variable approprié, en faisant usage de la deuxième intégrale de (1.25), pour donner

$$z^2 + r^2 = 3/\Lambda.$$

C'est l'équation d'une sphère de rayon  $\sqrt{3/\Lambda}$ , notée  $\Sigma^2$  sur la figure 4.

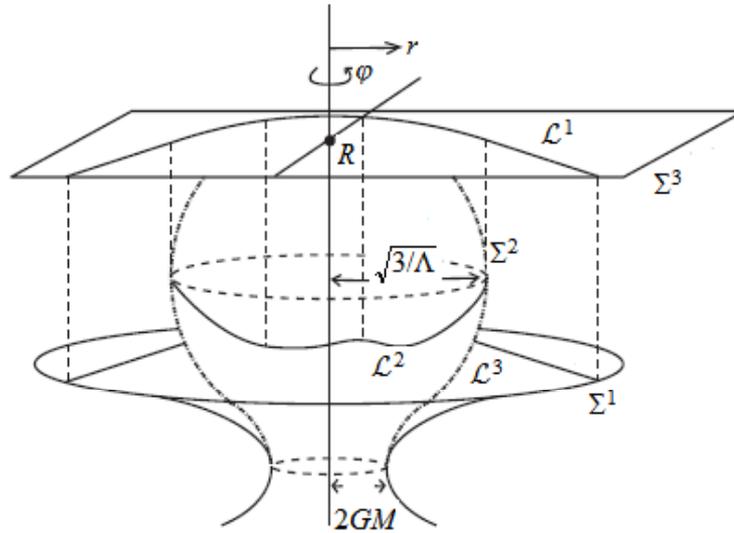


Figure 4: Les géométries de Schwarzschild et de Schwarzschild-de Sitter.  $\Sigma^1$  est la représen-

tation de la parabolôide de Flamm dans l'espace de Schwarzschild ;  $\Sigma^2$  sa surface correspondante dans l'espace de Schwarzschild-de Sitter ;  $\Sigma^3$  est un plan auxiliaire avec  $\mathcal{L}^1$  l'équation orbitale (2.7). Les courbes  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{L}^3$  sont les projections verticales de  $\mathcal{L}^1$  sur  $\Sigma^2$  et  $\Sigma^1$  respectivement.

En faisant le changement  $r = 1/u$  dans l'expression (1.20), qui reste la même aussi bien pour Kottler que pour Schwarzschild, on obtient, après dérivation par rapport à  $\varphi$ , une équation orbitale pour le chemin du photon; dans laquelle la constante cosmologique est éliminée

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3GM}{r^2}. \quad (2.6)$$

Ce résultat donne à penser que la constante cosmologique, en dépit de sa présence dans la métrique SdS, n'a pas d'effet sur la déviation de la lumière. Ce fut l'argument avancé par plusieurs auteurs [13]. Néanmoins, nous allons montrer que malgré l'absence de  $\Lambda$  dans (2.6) la constante cosmologique influe sur la déviation de la lumière, la raison étant que c'est la métrique qui détermine les observations réelles qui peuvent être effectuées.

Le côté droit de l'équation (2.6) est une petite correction relativiste. Par exemple pour une trajectoire à l'extérieur du Soleil ou frôlant le Soleil nous avons

$$\frac{3GM}{r} = \frac{3r_{Schw}}{2r} \lesssim \frac{3r_{Schw}}{2R_{\odot}} \cong 10^{-6},$$

où  $r_{Schw}$  et  $R_{\odot}$  sont respectivement les rayons de Schwarzschild et du Soleil. A l'ordre zéro l'équation (2.6) admet comme solution

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b}.$$

Cette équation représente un rayon lumineux non dévié par le champ gravitationnel, avec  $b$  un paramètre d'impact indiqué dans la figure 5. En introduisant cette solution dans l'équation (2.6), il vient

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3GM}{2b^2} [1 - \cos(2\varphi)],$$

qui admet pour solution

$$u = \frac{1}{r} = \frac{3GM}{2b^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right].$$

On rappelle que la solution d'une équation du type

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sum_i A_i \cos(\omega_i x),$$

est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sum_i \frac{A_i}{1 - \omega_i^2} \cos(\omega_i x).$$

En combinant les deux solutions on obtient au premier ordre de la perturbation

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3GM}{2b^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]. \quad (2.7)$$

En faisant tendre  $r$  vers l'infini, on pourrait obtenir à l'aide de ce résultat l'angle de déviation total (1.26) dans le cas de Schwarzschild. Cependant ce n'est plus le cas dans l'espace-temps SdS dans lequel le rayon  $r$  est toujours inférieur à la singularité  $\sqrt{3/\Lambda}$ .

On peut se convaincre facilement que la distance d'approche minimale  $r = r_P$  correspond à  $\varphi = \pi/2$ . Donc

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{b} + \frac{GM}{b^2}. \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Déviation de la lumière

Afin de calculer l'angle de déviation, on utilise la formule invariante pour le cosinus d'un angle entre deux directions de coordonnées  $d$  et  $\delta$  comme le montre la figure 5

$$\cos \psi = \frac{g_{\mu\nu} d^\mu \delta^\nu}{(g_{\mu\nu} d^\mu d^\nu)^{1/2} (g_{\mu\nu} \delta^\mu \delta^\nu)^{1/2}}, \quad (2.9)$$

où les  $g_{\mu\nu}$  correspondent, dans notre cas, à la métrique spatiale (2.4). Nous avons alors

$$g_{rr} = B(r)^{-1} = \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2.$$

Dérivons maintenant (2.7) par rapport à  $\varphi$  pour obtenir

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{b} \left[ \frac{GM}{b} \sin(2\varphi) - \cos \varphi \right] \equiv A(r, \varphi). \quad (2.10)$$

Donc, nous avons, sachant que  $d$  est la direction de l'orbite et  $\delta$  la direction de la coordonnée  $\varphi = \text{const}$

$$d = (dr, d\varphi) = (A, 1) d\varphi, \quad d\varphi < 0,$$

$$\delta = (\delta r, 0) = (1, 0) \delta r.$$

En substituant dans (2.9), on obtient

$$\cos \psi = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + r^2 B(r)}},$$

ou bien

$$\tan \psi = \frac{r\sqrt{B(r)}}{|A|}. \quad (2.11)$$

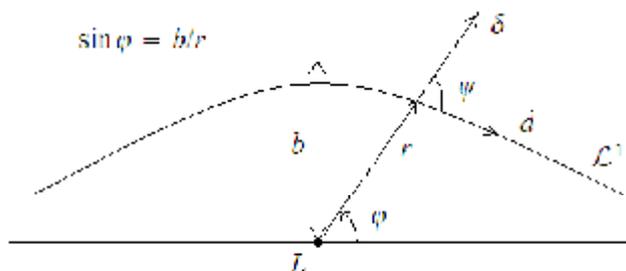


Figure 5 : Le plan équatorial. C'est le graphe de l'équation (2.7) qui coïncide avec  $\mathcal{L}^1$  dans la figure 4. La moitié de l'angle de déviation est  $\psi - \varphi = \varepsilon$ .

L'angle de déflexion totale est défini par

$$\Delta\varphi = 2\varepsilon = 2(\psi - \varphi).$$

Dans le cas où  $\varphi = 0$ , on obtient successivement, des équations (2.7) et (2.10)

$$r = \frac{b^2}{2GM},$$

et

$$|A| = \frac{b^3}{(2GM)^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\Delta\varphi = 2\psi_0 \sim \frac{4GM}{b} \left[ 1 - 2 \left( \frac{GM}{b} \right)^2 - \frac{\Lambda}{24} \left( \frac{b^2}{GM} \right)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Cette formule est d'une importance capitale en Cosmologie. C'est l'angle de déviation totale que doit subir un photon lors de son passage près d'un objet massif, dans le cas où la source et l'observateur sont loin de cet objet. Dans l'espace de Schwarzschild, il suffit, pour obtenir cet angle, de faire tendre  $r$  vers l'infini dans l'équation (2.7), ce qui n'est pas permis dans l'espace de Kottler, puisque comme on l'a dit  $r$  ne peut pas excéder la valeur de l'horizon  $\sqrt{3/\Lambda}$ . La seule valeur caractéristique de  $r$  dans ce cas est celle qui correspond à  $\varphi = 0$ ,  $r = b^2/2GM$ . Il est clair, d'après l'expression (2.12), que l'angle de déviation totale dans le cas de Schwarzschild est bien atteint au premier ordre pour  $\Lambda = 0$  (on rappelle ici que  $b$  est relié à  $r_P$  par la relation (2.8) et l'angle de déviation de Schwarzschild a la même expression à l'ordre le plus bas en terme de  $b$  ou de  $r_P$ ). Au-delà de ce point, on se retrouve dans une région de transition très vaste, essentiellement plate, entre la géométrie de Schwarzschild et celle de Kottler, dans laquelle il n'y a pas une déviation significative supplémentaire. On suppose que l'observateur aussi bien que la source sont situés dans cette région. L'observateur mesurera alors directement l'angle de déviation physique  $2\psi_0$  comme l'angle entre les deux positions apparente et la non perturbée de la source. Comme prévu, d'après (2.12), un  $\Lambda$  positif diminue l'angle de déviation et il s'oppose de ce fait à la gravitation.

Bien entendu, la contribution de la constante cosmologique  $\Lambda$  sur la déviation de la lumière est très faible. On sait d'après les cosmologues que l'ordre de grandeur de  $\Lambda$  est de  $10^{-52} \text{ m}^{-2}$ . Pour cette valeur de  $\Lambda$  le rapport des deux termes dans le membre de droite de (2.12), pour un rayon lumineux frôlant le Soleil, est de  $10^{28}$ .

En conclusion nous avons montré que lorsque la géométrie de l'espace-temps SdS est prise en compte, la constante cosmologique  $\Lambda$  contribue effectivement à la déviation de la lumière.

### 2.3 Contribution de la constante cosmologique au temps de retard dans un champ de Kottler

Nous allons essayer d'établir la formule qui donne le temps de retard dans un champ de Kottler en suivant la même démarche que pour un champ de Schwarzschild. Il s'avère, pour ce faire, que les expressions sont très proches de celles obtenues précédemment, au point que même certaines d'entre-elles préservent la même forme.

$d\varphi/dr$  garde la même forme que pour Schwarzschild

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r\sqrt{r^2/r_P^2 - 1}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}, \quad (2.13)$$

tandis que  $dt/dr$  est donné par

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r)\sqrt{1 - r_P^2/r^2}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}. \quad (2.14)$$

Pour le photon  $\alpha_E$  l'intégration de  $t_E$  au premier ordre en  $\delta = GM/r_P$  donne

$$\begin{aligned} t_E &= \int_{r_P}^{r_E} \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r)\sqrt{1 - r_P^2/r^2}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2} dr \\ &\sim r_P \sqrt{B(r_P)} (I_{E1} + \delta I_{E2} + \delta I_{E3} + 2\delta I_{E4}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_{E1} &= \int_{y_E}^1 \frac{dy}{(y^2 - \lambda^2) \sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\lambda}{y_E} \sqrt{\frac{1 - y_E^2}{1 - \lambda^2}} \right), \\
I_{E2} &= \int_{y_E}^1 \frac{y dy}{(y^2 - \lambda^2) \sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1 - y_E^2}{1 - \lambda^2}}, \\
I_{E3} &= \int_{y_E}^1 \frac{dy}{y^2 (1 + y) \sqrt{1 - y^2}} = \frac{-1}{2(1 - \lambda^2)} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \ln \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - y_E^2}\right)^2 - \lambda^2 y_E^2}{\epsilon_E^2 - \lambda^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}} \ln \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - y_E^2} + \lambda y_E\right) (y_E - \lambda)}{\left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \sqrt{1 - y_E^2} - \lambda y_E\right) (y_E + \lambda)} - 2 \sqrt{\frac{1 - y_E^2}{1 - y_E}} \right], \\
I_{E4} &= \int_{y_E}^1 \frac{y^3 dy}{(y^2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{2(1 - \lambda^2)} \left( \frac{2 - \lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1 - y_E^2}{1 - \lambda^2}} + \lambda^2 \sqrt{\frac{1 - y_E^2}{y_E^2 - \lambda^2}} \right),
\end{aligned}$$

où  $y := r_P/r$ ,  $y_E := r_P/r_E > \lambda$ ,  $\lambda := \sqrt{\Lambda/3} r_P \ll 1$ .

Si nous nous limitons au cas où les angles de coordonnées  $\epsilon_E$  et  $\epsilon'_E$  sont très petits devant l'unité, quelques secondes d'arc, nous avons à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned}
\epsilon_E &\sim \tan \epsilon_E = r_E |d\varphi/dr(r_E)| \sim (r_E^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r_P/r_E = y_E, \\
\epsilon'_E &\sim \tan \epsilon'_E = r_E |d\varphi'/dr(r_E)| \sim (r_E^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r'_P/r_E = y'_E, \\
\epsilon_S &\sim \tan \epsilon_S = r_S |d\varphi/dr(r_S)| \sim (r_S^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r_P/r_S = y_S, \\
\epsilon'_S &\sim \tan \epsilon'_S = r_S |d\varphi'/dr(r_S)| \sim (r_S^2/r_P^2 - 1)^{-1/2} \sim r'_P/r_S = y'_S.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour  $t'_E$  on obtient des expressions analogues, à condition que  $y$ ,  $y_E$  et  $\lambda$  soient respectivement remplacés par  $y' := r'_P/r$ ,  $y'_E := r'_P/r_E$ , et  $\lambda' := \sqrt{\Lambda/3} r'_P$ .

Comme auparavant l'évaluation de  $t_E - t'_E$  donne après un long calcul réputé dans [14] :

$$t_E - t'_E \sim \Delta_{E1} + GM\Delta_{E2} + GM\Delta_{E3} + 2GM\Delta_{E4},$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Delta_{E1} &= r_P \sqrt{B(r_P)} I_{E1} - r'_P \sqrt{B(r'_P)} I'_{E1} \\
&\sim GM \left[ -\frac{1}{\lambda} (1-x) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} + \frac{y_E}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{\delta}{2\lambda} (1-x^2) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} \right], \\
\Delta_{E2} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E2} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E2} \sim -\ln x, \\
\Delta_{E3} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E3} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E3} \\
&\sim \frac{1}{\lambda} (1-x) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} + \ln x - \frac{\delta}{\lambda} (1-x^2) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E}, \\
\Delta_{E4} &= \sqrt{B(r_P)} I_{E4} - \sqrt{B(r'_P)} I'_{E4} \sim -\ln x.
\end{aligned}$$

et  $x = r_P/r'_P$ . D'où

$$t_E - t'_E \sim GM \left[ \frac{y_E}{2\delta} (1/x^2 - 1) - \frac{3\delta}{2\lambda} (1-x^2) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_E} - 2 \ln x \right].$$

De même nous avons pour  $t_S - t'_S$

$$\begin{aligned}
t_S - t'_S &\sim \Delta_{S1} + GM\Delta_{S2} + GM\Delta_{S3} + 2GM\Delta_{S4} \\
&\sim GM \left[ \frac{y_S}{2\delta} (1-x^2) - \frac{3\delta}{2\lambda} (1/x^2 - 1) \operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{y_S} - 2 \ln x \right],
\end{aligned}$$

avec  $y_S := r_P/r_S$ . Le temps de retard peut donc s'exprimer en terme de  $M$ ,  $\lambda$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $x$  et  $r_P$  comme

$$\begin{aligned}
\Delta t &= t_E - t'_E + t_S - t'_S \sim GM \left[ \frac{r_P^2}{2GM} \left( \frac{1}{r_E} + \frac{1}{r_S} \right) (1/x^2 - 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3GM}{2\sqrt{\Lambda/3}r_P^2} \left( \operatorname{arctanh} \frac{r_E}{\sqrt{3/\Lambda}} + \operatorname{arctanh} \frac{r_S}{\sqrt{3/\Lambda}} \right) (1-x^2) - 4 \ln x \right], \quad (2.16)
\end{aligned}$$

qui redonne exactement, dans la limite  $\Lambda = 0$ , le temps de retard (1.27) dans le cas de Schwarzschild.

Déterminons maintenant les relations qui lient les angles de coordonnées  $\epsilon_E$ ,  $\epsilon'_E$ ,  $\epsilon_S$  et  $\epsilon'_S$  aux angles physiques  $\alpha_E$ ,  $\alpha'_E$ ,  $\alpha_S$  et  $\alpha'_S$  respectivement, en faisant usage de l'expression (2.11)

obtenue dans la section précédente

$$\begin{aligned}
\alpha_E &\sim \tan \alpha_E = r_E \sqrt{B(r_E)} |d\varphi/dr(r_E)| \sim \epsilon_E \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}, \\
\alpha'_E &\sim \tan \alpha'_E = r_E \sqrt{B(r_E)} |d\varphi'/dr(r_E)| \sim \epsilon'_E \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3}, \\
\alpha_S &\sim \tan \alpha_S = r_S \sqrt{B(r_S)} |d\varphi/dr(r_S)| \sim \epsilon_S \sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}, \\
\alpha'_S &\sim \tan \alpha'_S = r_S \sqrt{B(r_S)} |d\varphi'/dr(r_S)| \sim \epsilon'_S \sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où on a négligé les termes d'ordre  $GM/r_E$ . Il s'ensuit que

$$x := r_P/r'_P \sim \epsilon_E/\epsilon'_E \sim \alpha_E/\alpha'_E, \quad r_P \sim \epsilon_E r_E \sim \alpha_E r_E. \tag{2.18}$$

En suivant la même méthode que précédemment, nous obtenons, en faisant usage du résultat (2.15), pour les angles  $\varphi_S$  et  $\varphi'_S$ , les expressions

$$\begin{aligned}
-\varphi_S &\sim -\epsilon_E \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) + \frac{4GM}{\epsilon_E r_E}, \\
-\varphi'_S &\sim +\epsilon'_E \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) - \frac{4GM}{\epsilon'_E r_E}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Etant donné que les deux photons partent du même point, la source, on doit avoir  $\varphi_S = \varphi'_S$ . D'où, compte tenu du résultat (2.17), une relation entre  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$ ,  $\alpha'_E$ ,  $\Lambda$  et  $M$

$$\frac{r_E}{r_S} \sim \frac{4GM}{\alpha_E \alpha'_E r_E} (1 - \Lambda r_E^2/3) - 1. \tag{2.20}$$

En tenant compte de (2.18), on obtient à partir de (2.16) le temps propre de retard en terme de  $M$ ,  $\Lambda$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$

$$\begin{aligned}
\Delta\tau &\sim GM \sqrt{1 - \Lambda r_E^2/3} \left[ \frac{r_E}{2GM} \left(1 + \frac{r_E}{r_S}\right) \frac{\alpha_E'^2 - \alpha_E^2}{1 - \Lambda r_E^2/3} - 4 \ln \frac{\alpha_E}{\alpha'_E} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3GM}{2r_E^2} (1 - \Lambda r_E^2/3) \left( \operatorname{arctanh} \frac{r_E}{\sqrt{3/\Lambda}} + \operatorname{arctanh} \frac{r_S}{\sqrt{3/\Lambda}} \right) \left( \frac{1}{\alpha_E^2} - \frac{1}{\alpha_E'^2} \right) \right]. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Donc si on se donne *a priori* les valeurs de  $M$ ,  $\Lambda$ ,  $r_E$ ,  $r_S$ ,  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ , on pourrait calculer le temps propre de retard du photon “ $\alpha_E$ ” par rapport au photon “ $\alpha'_E$ ”.

### 2.3.1 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

Utilisons le modèle  $\Lambda$ CDM à espace plat avec  $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$  pour convertir les redshifts  $z_L$  et  $z_S$  en distances d'aire  $d_L = r_E$  et  $d_S$  respectivement par rapport à la Terre, en utilisant l'Ansätze [14]

$$d_S = \frac{r_E + r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}.$$

On détermine alors la masse de l'amas de galaxies à l'aide de l'expression (2.20) pour les valeurs maximales '+', centrales ' $\pm 0$ ' et minimales '-' de la constante cosmologique et des angles  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ . Les résultats sont consignés dans les tableaux 2, 3, 4.

Une fois que la masse  $M$  appropriée est déterminée, on calcule l'angle polaire de coordonnée  $\varphi_S$  et le temps de retard que met le photon " $\alpha_E$ " par rapport au photon " $\alpha'_E$ ", en utilisant respectivement les expressions (2.19) et (2.21).

$\Lambda \pm 20\%$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S ["]$	13.61	12.25	14.97	16.33	14.97	<b>17.69</b>	10.89	<b>9.53</b>	12.25
$M [10^{13}M_\odot]$	5.80	6.38	5.22	6.38	<b>7.02</b>	5.75	5.22	5.75	<b>4.70</b>
$\Delta\tau [\text{ans}]$	22.6	21.3	23.5	28.3	27.3	<b>29.0</b>	17.2	<b>15.8</b>	18.3

Tableau 2.

$\Lambda \pm 20\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$				
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S ["]$	13.00	11.70	14.30	15.60	14.30	<b>16.90</b>	10.40	<b>9.10</b>	11.70
$M [10^{13}M_\odot]$	4.67	5.13	4.20	5.13	<b>5.64</b>	4.62	4.20	4.62	<b>3.78</b>
$\Delta\tau [\text{ans}]$	20.5	19.3	21.3	25.7	24.8	<b>26.3</b>	15.6	<b>14.3</b>	16.6

Tableau 3.

$\Lambda \pm 20\%$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	–	–	–
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	–	$\pm 0$	+	–	$\pm 0$	+	–
$-\varphi_S ["]$	12.61	11.35	13.87	15.13	13.87	<b>16.39</b>	10.09	<b>8.82</b>	11.35
$M [10^{13} M_\odot]$	4.01	4.41	3.61	4.41	<b>4.85</b>	3.97	3.61	3.97	<b>3.26</b>
$\Delta\tau[\text{ans}]$	18.9	17.8	19.7	23.7	22.8	<b>24.3</b>	14.3	<b>13.2</b>	15.3

Tableau 4.

Par conséquent

$$-\varphi_S = 13.00^{+4.69}_{-4.18}''$$

et

$$M = 4.85^{+2.17}_{-1.59} \cdot 10^{13} M_\odot.$$

Cette valeur est bien compatible avec la valeur observée  $M = 5.0^{+1.0}_{-1.0} \cdot 10^{13} M_\odot$ .

## Chapitre 3

# Modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en Cosmologie

La cosmologie concerne l'étude des grandes structures de l'Univers, de leurs lois, de leurs origines et de leurs évolutions, ainsi que des modèles qui permettent sa compréhension. Puisque les propriétés de l'espace-temps sont déterminées, d'après la relativité générale, par son contenu matériel, la difficulté de construire un modèle cosmologique consiste à trouver la structure riemannienne compatible avec le contenu de l'Univers dans son ensemble et avec les phénomènes physiques qui s'y déroulent.

### 3.1 Principe cosmologique

La plupart des modèles utilisés en cosmologie font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope.

Précisons la signification de l'homogénéité et de l'isotropie. Par homogénéité, on entend que tous les points d'espace jouent le même rôle. Autrement dit, il n'existe pas de point privilégié. Par isotropie, on entend que toutes les directions autour de tout point de l'espace sont équivalentes. On peut montrer qu'en vérité l'isotropie ainsi définie (isotropie autour de chaque point) entraîne l'homogénéité.

On dit des modèles qui font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope qu'ils satisfont au principe cosmologique. Le principe cosmologique implique de fortes contraintes sur la métrique d'espace-temps. On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées, dites coordonnées comobiles, de telle manière que les dix composantes indépendantes du tenseur métrique se réduisent à une seule fonction de  $t$ ,  $t$  désigne la coordonnée temporelle,  $a(t)$  appelée facteur d'échelle et à un seul paramètre discret  $k$  pouvant prendre trois valeurs  $k = 0, \pm 1$ . Plus précisément, on peut toujours pour un Univers satisfaisant au principe cosmologique, faire le choix d'un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  de telle manière que le carré de l'intervalle d'espace-temps  $ds^2$  prenne la forme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.1)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

avec l'indice discret  $k$  pouvant prendre les valeurs  $0, +1, -1$ , qui correspondent respectivement à un espace euclidien à trois dimensions, à une sphère et à une pseudo-sphère.

Si on fait le choix d'une nouvelle coordonnée *radiale*  $\chi$  lié à  $r$  via

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & k = 0 \\ \sin \chi & k = +1 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases},$$

alors (3.1) peut être réécrite comme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (3.2)$$

## 3.2 Equation de Friedmann

La seule fonction inconnue dans (3.1) ou (3.2) est le facteur d'échelle  $a(t)$  qui peut être déterminé par application des équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu},$$

ou

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right),$$

en l'absence d'une constante cosmologique  $\Lambda$ , ou

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu},$$

ou

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right) - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

en présence d'une constante cosmologique  $\Lambda$ .

Ceci nous amène au calcul du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, lesquels requièrent le calcul des symboles de Christoffel  $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ , lesquels à leur tour s'expriment en fonction du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et du tenseur métrique inverse  $g^{\mu\nu}$ , (1.4).

A partir de (3.1), on peut tirer les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = a^2 / (1 - kr^2), \quad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

et du tenseur métrique inverse, qui sont ici immédiates, vu que le tenseur métrique est diagonal

$$g^{tt} = -1, \quad g^{rr} = (1 - kr^2) / a^2, \quad g^{\theta\theta} = 1 / (a^2 r^2), \quad g^{\varphi\varphi} = 1 / (a^2 r^2 \sin^2 \theta).$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne pour les composantes non nulles

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{rr} &= aa_t / (1 - kr^2), & \Gamma^t_{\theta\theta} &= aa_t r^2, & \Gamma^t_{\varphi\varphi} &= aa_t r^2 \sin^2 \theta, \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r (1 - kr^2), & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r (1 - kr^2) \sin^2 \theta, & \Gamma^r_{tr} &= \Gamma^r_{rt} = a_t/a, \\
\Gamma^\theta_{t\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta t} = a_t/a, & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r, & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma^\varphi_{t\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi t} = a_t/a, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r, & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

où l'indice  $t$  désigne la dérivée par rapport au temps. En utilisant l'expression du tenseur de Ricci (1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= 3a_{tt}/a, & R_{rr} &= -(aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k) / (1 - kr^2), \\
R_{\theta\theta} &= -r^2 (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k), & R_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta (aa_{tt} + 2a_t^2 + 2k).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Finalement, on calcule le scalaire de courbure  $R$  par contraction du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

ce qui donne, en utilisant les expressions des composantes (3.5) du tenseur de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 (a_{tt}a + a_t^2 + k) / a^2.$$

Pour écrire les équations d'Einstein, on a également besoin d'une expression pour le tenseur énergie impulsion. On modélise généralement l'Univers comme un fluide parfait dont les molécules sont des galaxies ou des amas de galaxies. Il vaut la peine de remarquer qu'un flux de chaleur ou de particules serait incompatible avec l'isotropie, car fixant une direction privilégiée de l'espace. La forme générale du tenseur énergie impulsion  $T_{\mu\nu}$  d'un fluide parfait avec densité  $\rho$  et pression  $p$  est donnée par

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu},$$

où  $U_\mu$  désigne la 4-vitesse du fluide. Vu qu'on travaille dans un système de coordonnées como-

biles, seule la composante temporelle de  $U_\mu$  est non nulle

$$U_\mu(U_t, 0, 0, 0).$$

Comme

$$U_\mu U^\mu = 1,$$

et vu que le tenseur métrique est diagonal avec :  $g^{tt} = -1$

$$U_t^2 = 1.$$

Comme  $U_t$  est obligatoirement positif, on a

$$U_t = 1.$$

Il est à remarquer que nous obtenons deux équations indépendantes, qui correspondent aux composantes  $tt$  et  $rr$  du tenseur de Ricci, et qui s'écrivent explicitement comme

$$a_t^2 - \frac{1}{3}(8\pi G\rho + \Lambda)a^2 = -k, \quad (3.6)$$

$$2a_{tt}a + a_t^2 + (8\pi Gp - \Lambda)a^2 = -k. \quad (3.7)$$

Du fait de l'isotropie de l'espace, (3.3) produit la même équation (3.7) pour  $\mu = \nu = \theta$  et pour  $\mu = \nu = \varphi$ . Ces équations ont été découvertes par Friedmann en 1922 dans le cas  $p = 0$  [15], puis généralisées à pression non nulle par Lemaître en 1927. En prenant la différence des deux équations (3.7) et (3.6) on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.8)$$

Cette expression nous permet de voir que pour  $\Lambda$  négligeable, dans un univers à contenu matériel, c'est-à-dire tel que  $\rho + 3p > 0$ , l'expansion est décélérée. Il reste à résoudre le problème de la dépendance de la pression avec la densité et pour cela il nous faut encore une équation d'état  $p = p(\rho)$  qui suppose une forme particulière de matière dominant l'Univers ou la connaissance

des diverses formes possibles d'énergie dans l'Univers. En prenant une combinaison linéaire particulière des équations (3.6) et (3.7) ((3.6) multipliée par  $-3$  et (3.7) multipliée par  $1$ ), on obtient

$$\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + 4\pi G(\rho + p) = 0. \quad (3.9)$$

La dérivation de (3.6) par rapport au temps nous donne

$$4\pi G\rho_t = 3\frac{a_t}{a} \left( \frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) et (3.10), on obtient l'équation

$$\rho_t + 3\frac{a_t}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.11)$$

C'est bel et bien le résultat que donne la composante temporelle de l'équation de conservation du tenseur énergie impulsion. L'équation (3.11) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0, \quad (3.12)$$

c'est l'équation d'état qui lie la pression à la densité. Si l'Univers est dominé par la matière non relativiste,  $p \ll \rho$ , et (3.12) mène alors à

$$\rho \propto 1/a^3. \quad (3.13)$$

Pour un univers dominé par la matière relativiste tel que les photons,  $p = \rho/3$ , (voir le rayonnement du corps noir), (3.12) mène à

$$\rho \propto 1/a^4.$$

Pour un univers dominé par l'énergie du vide,  $\rho$  serait indépendante du temps et (3.12) donnerait alors

$$p = -\rho.$$

### 3.3 Propagation des photons dans le modèle FLRW

Ici, nous n'allons traiter que le cas des trajectoires les plus importantes en cosmologie, celles des photons qui voyagent de galaxies lointaines vers nous, à l'origine. Ce problème est particulièrement simple car on doit seulement imposer  $ds^2 = 0$ . Considérons un photon émis à  $(t, \chi, \theta, \varphi)$  puis détecté à l'origine  $(t_0, \chi_0 = 0, \theta_0, \varphi_0)$ . Ceci implique que  $t_0 > t$ . Prenons le cas d'un chemin radial, ce qui signifie que  $\theta = \theta_0$  et  $\varphi = \varphi_0$ . L'équation (3.2) se réduit alors à

$$0 = ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\chi^2,$$

ce qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)}. \quad (3.14)$$

Comme le photon se rapproche du détecteur,  $d\chi$  est forcément négatif et on doit choisir parmi les deux possibilités (3.14) celle avec un signe négatif. Donc

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \quad (3.15)$$

En intégrant (3.15), on obtient

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.16)$$

où  $\chi(t)$  représente la coordonnée géodésique du photon à l'instant  $t$ . Si on est en possession de l'expression de  $a(t)$ , on peut alors évaluer  $\chi(t)$  pour un instant quelconque. Pour des galaxies émettrice et réceptrice suffisamment proches de telle manière qu'on puisse négliger la variation de  $a(t)$  entre l'instant d'émission et l'instant de réception du photon, (3.16) se simplifie en

$$a_0 \chi = t_0 - t,$$

qui dit simplement que le temps de vol est égal à la distance parcourue par un photon, dans un système d'unité où  $c$  vaut 1.

La relation (3.16) permet également d'accéder au décalage spectral. Considérons un premier photon émis à l'instant  $t$  par une galaxie ou un amas de galaxie et reçu sur Terre à l'instant  $t_0$ . Considérons un deuxième photon émis à l'instant  $t + 1/\nu$  où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement

à l'émission. Ce deuxième photon sera reçu sur Terre à un instant  $t_0 + 1/\nu_0$  avec  $\nu_0$  la fréquence à la réception. Comme la distance géodésique est la même pour les deux photons, nous avons

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^t \frac{dt}{a(t)} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

En négligeant la variation de  $a(t)$  sur les intervalles  $(t, t + 1/\nu)$  et  $(t_0, t_0 + 1/\nu_0)$ , on obtient

$$-\frac{1}{a(t)} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{a_0} \frac{1}{\nu_0} = 0,$$

d'où

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a}$$

ou, comme les fréquences et les longueurs d'onde sont inversement proportionnelles

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}. \quad (3.17)$$

Le décalage spectral  $z$  est défini comme

$$1 + z := \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

d'où

$$1 + z = \frac{a_0}{a}.$$

Si  $z > 0$  on parle de décalage spectral vers le rouge ou redshift et si  $z < 0$ , on parle de décalage spectral vers le bleu ou blueshift.

Pour obtenir  $\chi$  en fonction du décalage spectral  $z$ , on fait le changement de variables  $dt = (dt/da) da = da/\dot{a}$  dans (3.16), on obtient alors

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{aa_t}.$$

Cette expression est utile car ce qui est observé c'est le décalage spectral d'une galaxie et non l'instant d'émission d'un photon.

## Chapitre 4

# Modèle d'Einstein-Straus avec Constante cosmologique

Quand on étudie les petites régions de l'Univers, on ne peut pas utiliser l'hypothèse de la distribution isotrope et homogène de la matière. La métrique dans une telle région, dans laquelle il y a une perturbation dans la distribution de la matière, diffère de la métrique FLRW (3.1). Le plus connu des modèles construits pour ces régions est celui d'Einstein-Straus [16] et aussi les modèles caractérisés par la métrique de McVittie [17]. Dans de tels modèles, les galaxies ou les amas de galaxies seront représentées par une condensation de matière plongée dans un fluide parfait. Le modèle d'Einstein-Straus est un modèle plus adapté à l'étude d'une seule condensation à symétrie sphérique placée au centre d'une sphère vide dans laquelle s'applique la métrique de Kottler. C'est un modèle à vacuole, la vacuole étant immergée dans un fluide parfait décrit par la métrique FLRW.

Le modèle d'Einstein-Straus permet de s'affranchir des hypothèses utilisées par Rindler et Ishak [12]: On permet à l'observateur de se déplacer par rapport à l'amas de galaxies (lentille) et les masses des autres amas de galaxies sont incluses sous la forme d'une poussière isotrope et homogène. La métrique d'Einstein-Straus est une solution des équations d'Einstein qui raccorde la solution de Kottler, SdS, à l'intérieur du rayon de Schücking [18] avec la solution FLRW à l'extérieur. Il est à noter que la solution d'Einstein-Straus, tout aussi bien que la solution FLRW, sont des solutions instables. Cette instabilité est la bienvenue car elle permet la formation des

structures.

On se limitera à des espaces asymptotiquement plats,  $k = 0$  dans la métrique FLRW, en présence de la constante cosmologique. Commençons par redémontrer le résultat de Schücker [19] concernant le Jacobien de la transformation de passage des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Kottler.

#### 4.1 Raccordement des solutions FLRW et SdS

Désignons par  $(T, r, \theta, \varphi)$  les coordonnées de Kottler et par  $(t, r, \theta, \varphi)$  les coordonnées de Friedmann. Les éléments de ligne des métriques SdS et FLRW s'écrivent alors respectivement comme

$$ds^2 = B(r)dT^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (4.1)$$

et

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), \quad (4.2)$$

où le facteur d'échelle  $a(t)$  est fourni par l'équation de Friedmann (3.6), qui, dans des unités où  $8\pi G = 1$ , se simplifie en :

$$\frac{da}{dt} = a\sqrt{(\rho + \Lambda)/3}.$$

Dans un univers dominé par la matière non relativiste,  $p \ll \rho$ , nous avons la relation (3.13),  $\rho \propto 1/a^3$ , qui nous permet d'écrire

$$\rho a^3 = \rho_{dust0} a_0^3 = C^{te}.$$

L'équation de Friedmann devient alors

$$\frac{da}{dt} = a\sqrt{(\rho_{dust0} a_0^3 / a^3 + \Lambda)/3}, \quad (4.3)$$

avec le facteur d'échelle  $a(t)$  supposé strictement monotone. Les deux solutions SdS et FLRW sont raccordées pour le rayon constant de Schücker  $\chi_{Schü}$

$$r_{Schü}(T) := a(t)\chi_{Schü}, \quad r \leq r_{Schü}, \quad \chi \geq \chi_{Schü}.$$

La masse centrale  $M$  doit être égale à la densité de la poussière multipliée par le volume de la sphère avec rayon de Schücking

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{Schü}^3 \rho = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \chi_{Schü}^3 \rho_{dust0}, \quad (4.4)$$

d'où en tire une expression pour le rayon de Schücking :  $\chi_{Schü}$

$$\chi_{Schü} = \left( \frac{3M}{4\pi a_0^3 \rho_{dust0}} \right)^{1/3}. \quad (4.5)$$

Il est utile de définir  $B_{Schü}$  et  $C_{Schü}$  respectivement comme

$$B_{Schü} := B(r_{Schü}) = 1 - \frac{1}{3} (\rho_{dust0} a_0^3 / a^3 + \Lambda) a^2 \chi_{Schü}^2,$$

$$C_{Schü} := \sqrt{1 - B_{Schü}}.$$

Nous allons partir des coordonnées de Friedmann  $(t, \chi)$  et faire deux transformations de coordonnées successives :  $(t, \chi) \rightarrow (a, \chi) \rightarrow (\xi, r)$ . Nous allons également partir des coordonnées de Kottler  $(T, r)$  et faire une transformation de coordonnées :  $(T, r) \rightarrow (\xi, r)$ . Autrement dit, nous allons passer des coordonnées de Friedmann  $(t, \chi)$  et de Kottler  $(T, r)$  au système de coordonnées  $(\xi, r)$ , ce qui nous permettra de raccorder les deux solutions de Friedmann et de Kottler.

La métrique FLRW (4.2) s'écrit dans le système de coordonnées  $(a, \chi)$  comme

$$ds^2 = \frac{3da^2}{(\rho_{dust0} a_0^3 / a^3 + \Lambda) a^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \chi^2 d\Omega^2. \quad (4.6)$$

Faisons un deuxième changement de système de coordonnées  $(a, \chi) \rightarrow (\xi, r)$  de telle manière que le facteur devant  $d\Omega^2$  se réduit à  $r^2$

$$a := \Phi(\xi, r), \quad \chi := r/\Phi(\xi, r),$$

avec la condition aux limites, qu'en le rayon de Schücking, l'ancienne coordonnée de temps

coïncide avec la nouvelle coordonnée de temps

$$a = \xi = \Phi(\xi, \xi\chi_{Schü}). \quad (4.7)$$

Alors dans le système de coordonnées  $(\xi, r)$  la métrique FLRW (4.6) s'écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{\xi\xi}^F d\xi^2 - g_{rr}^F dr^2 - 2g_{\xi r}^F d\xi dr - r^2 d\Omega^2 \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2 \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2}\right) d\xi^2 - \left[\left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{C_1^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right] dr^2 \\ &\quad - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \left[\frac{r}{\Phi} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] d\xi dr - r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

avec

$$C_1 := \Phi \sqrt{(\rho_{dust0} a_0^3 / \Phi^3 + \Lambda) / 3}.$$

On veut que la métrique soit diagonale, c'est-à-dire :  $g_{\xi r}^F = 0$ , ce qui donne

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{r}{\Phi} \frac{C_1^2}{B_1}, \quad B_1 := 1 - \frac{1}{3} (\rho_{dust0} a_0^3 / \Phi^3 + \Lambda) r^2.$$

$ds^2$  se simplifie alors en

$$ds^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2 \frac{B_1}{C_1^2} d\xi^2 - B_1^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

En dérivant  $\Phi$  par rapport à  $\xi$ , et compte tenu de (4.7) on obtient en  $\chi = \chi_{Schü}$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right|_{Schü} = 1 - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{Schü} \chi_{Schü} = 1/B_{Schü}.$$

Considérons maintenant la solution de Kottler et faisons un changement de coordonnées :  $(T, r) \rightarrow (\xi, r)$  avec

$$\frac{dT}{d\xi} = \Psi(\xi). \quad (4.8)$$

Nous pouvons écrire la métrique SdS (4.1) dans le système de coordonnées  $(\xi, r, \theta, \varphi)$  comme :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{\xi\xi}^K d\xi^2 - g_{rr}^K dr^2 - r^2 d\Omega^2 \\ &= B\Psi(\xi)^2 d\xi^2 - B^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

Notons que la transformation de coordonnée (4.8) nous permet encore de choisir une condition initiale, dont on pourra faire usage plus tard, en cas de besoin.

C'est dans ce système de coordonnées,  $(\xi, r, \theta, \varphi)$ , qu'on raccorde de manière continue les deux solutions FLRW et SdS sur la sphère de Schücking et pour des temps arbitraires

$$g_{\xi\xi}^F \Big|_{Schü} = g_{\xi\xi}^K \Big|_{Schü}, \quad g_{rr}^F \Big|_{Schü} = g_{rr}^K \Big|_{Schü}. \quad (4.9)$$

On peut facilement montrer que

$$B_1 \Big|_{Schü} = B_{Schü}, \quad C_1 \Big|_{Schü} = \frac{C_{Schü}}{\chi_{Schü}}.$$

La relation (4.9) implique alors que

$$\Psi(\xi) = \frac{\chi_{Schü}}{B_{Schü} C_{Schü}}.$$

En faisant un usage répété de la dérivée d'une fonction composée

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} &= \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \end{aligned}$$

on obtient en  $\chi = \chi_{Schü}$ , le rayon de Schücking, le Jacobien de la transformation de coordonnées  $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{Schü} &= 1, & \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü}}{B_{Schü}}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{Schü} &= -\frac{C_{Schü}}{a}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{Schü} &= \frac{1}{a B_{Schü}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}} \\ -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{a} & \frac{1}{aB_{Sch\ddot{u}}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Le Jacobien de la transformation inverse des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Kottler  $(t, \chi) \rightarrow (T, r)$  n'est autre que l'inverse de la matrice (4.11). Le calcul de l'inverse de (4.11) donne

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{B_{Sch\ddot{u}}} & a\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}} \\ C_{Sch\ddot{u}} & a \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{Sch\ddot{u}} &= \frac{1}{B_{Sch\ddot{u}}}, & \frac{\partial T}{\partial \chi} \Big|_{Sch\ddot{u}} &= a\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}}, \\ \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{Sch\ddot{u}} &= C_{Sch\ddot{u}}, & \frac{\partial r}{\partial \chi} \Big|_{Sch\ddot{u}} &= a. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pour comparer la coordonnée temporelle de Friedmann,  $t$ , à celle de de Kottler  $T$ , en  $\chi = \chi_{Sch\ddot{u}}$ , on considère la courbe paramétrée  $T = p$ , avec  $r = \xi\chi_{Sch\ddot{u}}$ ,  $\theta = \pi/2$  et  $\varphi = 0$ . Sa 4-vitesse est

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dp} &= 1, \\ \frac{dr}{dp} &= \frac{dr}{d\xi} \frac{d\xi}{dT} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} = \chi_{Sch\ddot{u}} \Psi(\xi)^{-1} \cdot 1 = B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}}, \end{aligned}$$

dans les coordonnées de Kottler et

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} = 1 \cdot 1 - \frac{C_{Sch\ddot{u}}}{B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} = B_{Sch\ddot{u}}, \\ \frac{d\chi}{dp} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dT}{dp} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{Sch\ddot{u}} \frac{dr}{dp} = -\frac{C_{Sch\ddot{u}}}{a_{Sch\ddot{u}}} \cdot 1 + \frac{1}{a_{Sch\ddot{u}} B_{Sch\ddot{u}}} B_{Sch\ddot{u}} C_{Sch\ddot{u}} = 0. \end{aligned}$$

dans les coordonnées de Friedmann. On en déduit la relation

$$\frac{dt}{dT} \Big|_{Sch\ddot{u}} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = B_{Sch\ddot{u}}. \quad (4.13)$$

On peut remarquer que le raccordement des solutions FLRW et SdS n'est possible que si

1. Les deux solutions FLRW et SdS correspondent à la même constante cosmologique  $\Lambda$ .

2. Si nous allons interpréter la masse centrale comme la masse d'un amas de galaxie,  $M \sim 10^{14} M_{\odot}$ , il faut alors satisfaire à une hiérarchie pour les échelles de longueur, le rayon de Schwarzschild  $r_{Schw} \sim 10^{-9}$  am, le rayon typique d'un amas  $r_{cluster} \sim 10^{-3}$  am, le rayon de Schücking  $r_{Schü} \sim 10^{-3}$  am, la distance typique entre amas  $D_{cluster} \sim 10^{-3}$  am et le rayon de de Sitter  $r_{dS} \sim 1$  am :

$$r_{Schw} < r_{cluster} < r_{Schü} < D_{cluster}, \quad r_{Schü} < r_{dS}.$$

## 4.2 Géodésiques et déviation dans le modèle d'Einstein-Straus

Les géodésiques seront intégrées par morceaux: Dans la solution plate FLRW avec constante cosmologique  $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\%$  et densité de poussière  $\rho_{dust0}$ , et pour la solution de Kottler SdS. Elles seront raccordées de manière continue au rayon de Schücking avec leurs dérivées premières raccordées en utilisant le Jacobien calculé précédemment. On déterminera le facteur d'échelle  $a(t)$  analytiquement à partir de l'équation de Friedmann(4.3)

$$\frac{da}{dt} = a\sqrt{(\rho_{dust0}/a^3 + \Lambda)/3},$$

où

$$\rho_{dust0} = 3 - \Lambda,$$

avec la condition finale  $a(0) = 1$ . Il vaut la peine de noter que ceci est équivalent à déterminer  $a(t)$  à partir de l'équation du second ordre

$$2aa_{tt} + a_t^2 = \Lambda a^2,$$

avec les conditions finales  $a(0) = da/dt|_{t=0} = 1$ . D'autre part la partie spatiale des géodésiques est facilement intégrable: Les photons suivent des lignes droites dans les coordonnées polaires  $(\chi, \theta, \varphi)$ . Dans la solution SdS les géodésiques sont intégrées analytiquement au premier ordre dans le rapport  $2GM/r_P$  du rayon de Schwarzschild  $2GM$  au péri-lens  $r_P$ . Dans le cas concret auquel on appliquera notre calcul, à savoir le système lentille-quasar SDSS J1004+4112, le rapport précédent est de l'ordre de  $10^{-5}$ , ce qui fait que les termes d'ordre supérieur peuvent

être sûrement négligés.

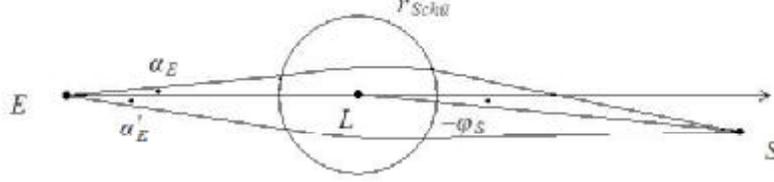


Figure 6 : Les deux rayons lumineux de la figure 2 sont maintenant courbés juste dans la sphère de Schücking.

Puisque ce sont les conditions finales qui sont données, on intégrera à reculons dans le temps,  $dt$ ,  $dT$  et  $dp$  seront alors négatifs, avec  $p$  un paramètre affine.

### Étape 0

Avant d'aller plus loin, intégrons l'équation de Friedmann de la Terre jusqu'à la source sans déflexion. Prenons l'origine,  $\chi = 0$ , sur Terre et définissons le plan contenant la Terre, la lentille et la source par  $\theta = \pi/2$ . Notre condition finale en  $p = 0$  est

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi = 0, \quad \varphi = \pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} = -1, \quad \dot{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

$\chi(t)$  est déterminé par intégration de l'équation (3.15),  $d\chi/dt = -1/a$ , où  $a$  est fourni par l'équation de Friedmann avec la condition sus-mentionné  $a(0) = 1$ . On remarque que si  $a$  est monotone,  $\chi$  serait nécessairement monotone et par conséquent inversible, avec son inverse noté  $\tilde{t}(\chi)$ . Notons que pour obtenir les conditions finales  $\dot{\chi} = -1$  et  $\dot{\varphi} = 0$ , on utilise le fait que la métrique FLRW se réduit à

$$\frac{\dot{t}^2}{a^2} = \dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2, \quad (4.14)$$

ainsi que l'équation (3.15).

L'intégration de l'équation de Friedmann avec la condition initiale  $a(0) = 1$  donne

$$a(t) = (-1)^{1/3} (1 - 3/\Lambda)^{1/3} \cosh^{2/3} \left( \sqrt{\frac{3\Lambda}{4}} t + \mathcal{H} \right), \quad (4.15)$$

où

$$\mathcal{H} := \operatorname{arccosh}\left(-1/\sqrt{1-3/\Lambda}\right).$$

En remplaçant  $a(t)$  par son expression dans  $d\chi/dt = -1/a$  avec la condition  $\chi|_{t=0} = 0$ , on obtient comme solution

$$\chi(t) = \zeta(t) + \sqrt{2} \sqrt{1 - \cosh(2\mathcal{H})} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; \frac{1}{1-3/\Lambda}\right), \quad (4.16)$$

où

$$\begin{aligned} \zeta(t) = & -\frac{\sqrt{6/\Lambda}}{(1-3/\Lambda)^{1/3}} \sqrt{1 - \cosh(\sqrt{3\Lambda}t + 2\mathcal{H})} \cosh^{1/3}\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{4}}t + \mathcal{H}\right) \\ & \times \operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{4}}t + \mathcal{H}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; \cosh^2\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{4}}t + \mathcal{H}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En utilisant (4.15), (4.16) ainsi que la définition du redshift (3.17)

$$1 + z = \frac{1}{a},$$

et du rayon de Schücking (4.5)

$$\chi_{Schü} = \left(\frac{3M}{4\pi\rho_{dust0}}\right)^{1/3},$$

on obtient les résultats consignés dans le tableau suivant, avec comme masse  $M = 5 \cdot 10^{13} M_{\odot}$

	Terre	${}^0\chi_{E,SchüE}$	Lentille, $\chi_{E,L}$	${}^0\chi_{E,SchüS}$	Source, $\chi_{E,S}$
$z$	0		0.68		1.734
${}^0t$	0	-0.4556	-0.4566	-0.4576	-0.7372
$\chi$	0	0.5888	0.5905	0.5922	1.1847

Si on veut maintenant prendre l'origine des  $\chi$  en la lentille, il suffit de translater les valeurs de  $\chi$ , et on obtient le tableau suivant

	Terre, $\chi_{E,L}$	$\chi_{Schü}$	Lentille	$\chi_{Schü}$	Source, ${}^0\chi_{L,S}$
$z$	0		0.68		1.734
${}^0t$	0	-0.4556	-0.4566	-0.4576	-0.7372
$\chi$	0.5905	0.0017	0	0.0017	0.5942

Dans la limite  $\Lambda = 0$ , les solutions,  $a(t)$  et  $\chi(t)$  se réduisent à

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}t + 1\right)^{2/3},$$

$$\chi(t) = 2 \left[1 - \left(\frac{3}{2}t + 1\right)^{1/3}\right].$$

Ce sont les même résultats qu'on obtient en faisant  $\Lambda = 0$  dans (4.3).

### Étape 1

Intégrons maintenant la trajectoire du photon " $\alpha_E$ " entre la Terre et le rayon de Schücking en utilisant les symboles de Christoffel, (3.4), de la métrique FLRW dans le plan  $\theta = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{\chi\chi} &= aa_t, & \Gamma^t_{\varphi\varphi} &= aa_t\chi^2, & \Gamma^{\chi}_{\varphi\varphi} &= -\chi, \\ \Gamma^{\chi}_{t\chi} &= \Gamma^{\chi}_{\chi t} = a_t/a, & \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} &= \Gamma^{\varphi}_{\varphi t} = a_t/a, & \Gamma^{\varphi}_{\chi\varphi} &= \Gamma^{\varphi}_{\varphi\chi} = 1/\chi. \end{aligned}$$

On obtient alors les équations des géodésiques

$$\ddot{t} + aa_t\dot{\chi}^2 + aa_t\chi^2\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.18)$$

$$\ddot{\chi} + 2\frac{a_t}{a}\dot{t}\dot{\chi} - \chi\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.19)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{a_t}{a}\dot{t}\dot{\varphi} + \frac{2}{\chi}\dot{\chi}\dot{\varphi} = 0. \quad (4.20)$$

Pour définir les conditions finales en  $p = 0$ , nous utilisons le fait que l'angle de coordonnée  $\arctan(\chi|\dot{\varphi}/\dot{\chi}|)$  coïncide avec l'angle physique  $\alpha_E$  mesuré en ns/ns. On note que les conditions finales pour  $\dot{\chi}$  et  $\dot{\varphi}$  sont obtenues immédiatement en faisant usage des équations (3.15) et (4.14), en retenant les expressions qui correspondent à un signe positif, car dans cette région  $\chi$  et  $\varphi$

augmentent au fur et à mesure que  $t$  (ou  $p$ ) augmente

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi &= \chi_{E,L}, \quad \varphi = \pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} &= \sin \alpha_E, \quad \dot{\varphi} = \sin \alpha_E / \chi_{E,L}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En remplaçant (4.14) dans l'équation (4.18), et sachant que  $a_t = \dot{a}/\dot{t}$ , on obtient

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{t} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a},$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales (4.21), pour donner

$$\dot{t} = 1/a(t). \quad (4.22)$$

En remplaçant ce résultat dans (4.20), on obtient

$$\frac{d}{dp} \ln \dot{\varphi} = \frac{d}{dp} \ln \frac{1}{a^2 \chi^2},$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales, pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{\chi_P}{a^2 \chi^2}, \quad \chi_P := \chi_{E,L} \sin \alpha_E. \quad (4.23)$$

En remplaçant  $\dot{t}$  par son expression, (4.22), dans (4.18), il vient

$$a^2 = 1/\sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2}.$$

En remplaçant  $a^2$  par son expression précédente dans (4.23), il vient que

$$\frac{d\varphi}{dp} = -\frac{d}{dp} \left( \frac{\chi_P}{\chi} \right) / \sqrt{1 - \left( \frac{\chi_P}{\chi} \right)^2},$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions finales, pour donner

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi} + \alpha_E, \quad (4.24)$$

ou

$$\chi = \frac{\chi_P}{\sin(\varphi - \alpha_E)}. \quad (4.25)$$

L'instant  $t_{SchüE}$  où le photon  $\alpha_E$  sort de la sphère de Schücking en se dirigeant vers la Terre est donné par

$$t_{SchüE} = \tilde{t}(\chi_{E,SchüE}), \quad (4.26)$$

où  $\chi_{E,SchüE}$  est la distance entre le point de sortie de la sphère de Schücking du photon  $\alpha_E$ , noté  $SchüE$ , et la Terre. On peut montrer facilement que cette distance s'écrit en terme de  $\chi_{E,L}$ ,  $\chi_{Schü}$  et  $\varphi_{SchüE}$  comme

$$\chi_{E,SchüE} = \chi(t_{SchüE}) = \sqrt{\chi_{E,L}^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_{E,L}\chi_{Schü} \cos \varphi_{SchüE}},$$

avec

$$\varphi_{SchüE} = \pi - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}} + \alpha_E.$$

En remplaçant  $\chi_{E,SchüE}$  par son expression dans (4.26), on déduit  $t_{SchüE}$ , ce qui nous permet de calculer la 4-vitesse du photon à la sortie de la sphère de Schücking compte tenu des solutions (4.22), (4.23) et (4.25)

$$\dot{t}_{SchüE} = 1/a_{SchüE}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = -\frac{\cos(\varphi_{SchüE} - \alpha_E)}{a_{SchüE}^2}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = \frac{\chi_P}{a_{SchüE}^2 \chi_{Schü}^2}.$$

On définit  $\gamma_{FE}$  comme le plus petit angle physique entre la direction du photon et la direction dirigée vers la lentille en le point  $SchüE$

$$\gamma_{FE} := \arctan \left( \chi_{Schü} \left| \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{\chi}_{SchüE}} \right| \right) = \pi - \varphi_{SchüE} + \alpha_E = \arcsin \frac{\chi_P}{\chi_{Schü}}.$$

Pour intégrer la trajectoire du photon " $\alpha'_E$ " dans la partie inférieure, on suit la même démarche que précédemment, mais seulement avec des conditions finales différentes

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \chi &= \chi_{E,L}, \quad \varphi = -\pi, \\ \dot{t} = 1, \quad \dot{\chi} &= \sin \alpha'_E, \quad \dot{\varphi} = -\sin \alpha'_E / \chi_{E,L}. \end{aligned}$$

Avec les conditions finales ci-dessus, les équations des géodésiques (4.18), (4.19) et (4.20) s'intègrent en

$$\dot{t} = 1/a(t), \quad \chi = -\frac{\chi'_P}{\sin(\varphi + \alpha'_E)}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\chi'_P}{a^2 \chi^2},$$

avec

$$\varphi = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi} - \alpha'_E, \quad \chi'_P := \chi_{E,L} \sin \alpha'_E.$$

Le photon " $\alpha'_E$ " croise la sphère de Schücking au point  $SchüE'$  à l'instant

$$t'_{SchüE} = \tilde{t}(\chi'_{E,SchüE}),$$

avec  $\chi'_{E,SchüE}$  la distance entre la Terre et le point  $SchüE'$

$$\chi'_{E,SchüE} = \chi(t'_{SchüE}) = \sqrt{\chi_{E,L}^2 + \chi_{Schü}^2 + 2\chi_{E,L}\chi_{Schü} \cos \varphi'_{SchüE}}$$

et

$$\varphi'_{SchüE} = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi_{Schü}} - \alpha'_E.$$

On verra ci-dessus que le temps  $t'_{SchüE}$  peut se calculer en terme de  $t_{SchüE}$  via une expression analytique approchée. Dans l'approximation  $\alpha_E \ll 1$ ,  $\alpha'_E \ll 1$ , les distances  $\chi_{E,SchüE}$  et  $\chi'_{E,SchüE}$  peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} \chi_{E,SchüE} &\sim (\chi_{E,L} - \chi_{Schü}) \left( 1 + \frac{\chi_{E,L}}{2\chi_{Schü}} \alpha_E^2 \right), \\ \chi'_{E,SchüE} &\sim (\chi_{E,L} - \chi_{Schü}) \left( 1 + \frac{\chi_{E,L}}{2\chi_{Schü}} \alpha_E'^2 \right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

D'autre part, nous avons grâce à la relation (3.15),  $d\chi/dt = -1/a$

$$\chi'_{E,SchüE} - \chi_{E,SchüE} = -\int_{t_{SchüE}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{a(t)} \sim -\frac{t'_{SchüE} - t_{SchüE}}{a_{SchüE}},$$

car le facteur d'échelle,  $a$ , ne varie de manière significative que pour des temps cosmologiques. En utilisant (4.27), on obtient

$$\Delta t_{SchüE} = t'_{SchüE} - t_{SchüE} \sim \frac{a_{SchüE}}{2} \chi_{E,L} \left(1 - \frac{\chi_{E,L}}{\chi_{Schü}}\right) (\alpha_E'^2 - \alpha_E^2).$$

La 4-vitesse du photon “ $\alpha'_E$ ” au point  $SchüE'$  est

$$\dot{t}_{SchüE} = 1/a_{SchüE'}, \quad \dot{\chi}_{SchüE} = -\frac{\cos(\varphi'_{SchüE} + \alpha'_E)}{a_{SchüE}^2}, \quad \dot{\varphi}_{SchüE} = -\frac{\chi'_P}{a_{SchüE}^2 \chi_{Schü}^2}.$$

On définit de même  $\gamma'_{FE}$  comme le plus petit angle physique entre la direction du photon “ $\alpha'_E$ ” et la direction dirigée vers la lentille en le point  $SchüE'$

$$\gamma'_{FE} := \arctan\left(\chi_{Schü} \left| \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{\chi}_{SchüE}} \right| \right) = \pi + \varphi'_{SchüE} + \alpha'_E = \arcsin \frac{\chi'_P}{\chi_{Schü}}.$$

## Étape 2

Maintenant nous utilisons la condition mentionnée après l'équation (4.8) pour mettre

$$T_{SchüE} = t_{SchüE}.$$

Nous avons, en utilisant le Jacobien inverse (4.12) ainsi que l'expression du  $\gamma_{FE}$ , la 4-vitesse au point  $SchüE$  dans les coordonnées de Kottler

$$\begin{aligned} \dot{T}_{SchüE} &= \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \frac{\partial T}{\partial \chi} \Big|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{1 + C_{SchüE} \cos \gamma_{FE}}{a_{SchüE} B_{SchüE}}, \\ \dot{r}_{SchüE} &= \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{SchüE} \dot{t}_{SchüE} + \frac{\partial r}{\partial \chi} \Big|_{SchüE} \dot{\chi}_{SchüE} = \frac{C_{SchüE} + \cos \gamma_{FE}}{a_{SchüE}}. \end{aligned}$$

On définit  $\gamma_{KE}$  comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon “ $\alpha_E$ ” et la direction dirigée vers la lentille en le point  $SchüE$ . Compte tenu des expressions de  $\gamma_{FE}$  et  $\dot{r}_{SchüE}$  on a

$$\gamma_{KE} := \arctan\left(r_{SchüE} \left| \frac{\dot{\varphi}_{SchüE}}{\dot{r}_{SchüE}} \right| \right) = \arctan \frac{\sin \gamma_{FE}}{C_{SchüE} + \cos \gamma_{FE}}.$$

Pour le photon “ $\alpha'_E$ ”, la 4-vitesse au point  $SchüE'$  dans les coordonnées de Kottler est

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{SchüE} &= \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{SchüE'} \dot{t}'_{SchüE} + \frac{\partial T}{\partial \chi} \Big|_{SchüE'} \dot{\chi}'_{SchüE} = \frac{1 + C'_{SchüE} \cos \gamma'_{FE}}{a'_{SchüE} B'_{SchüE}}, \\ \dot{r}'_{SchüE} &= \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{SchüE'} \dot{t}'_{SchüE} + \frac{\partial r}{\partial \chi} \Big|_{SchüE'} \dot{\chi}'_{SchüE} = \frac{C'_{SchüE} + \cos \gamma'_{FE}}{a'_{SchüE}},\end{aligned}$$

et on définit  $\gamma'_{KE}$  comme le plus petit angle de coordonnée entre la direction du photon “ $\alpha'_E$ ” et la direction dirigée vers la lentille en le point  $SchüE'$ . On montre que

$$\gamma'_{KE} := \arctan \left( r_{SchüE'} \left| \frac{\dot{\phi}'_{SchüE}}{\dot{r}'_{SchüE}} \right| \right) = \arctan \frac{\sin \gamma'_{FE}}{C'_{SchüE} + \cos \gamma'_{FE}}.$$

### Étape 3

Pour intégrer la trajectoire du photon  $\alpha_E$  dans la sphère de Schücking nous avons besoin des symboles de Christoffel de la métrique SdS dans le plan  $\theta = \pi/2$ . On peut, en l'occurrence, utiliser (1.5), les symboles de Christoffel de la métrique de Schwarzschild, à condition que la composante  $B$  prenne la forme mentionnée dans la métrique SdS, (4.1)

$$\begin{aligned}\Gamma^T_{Tr} &= \Gamma^T_{rT} = -\Gamma^r_{rr} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma^r_{TT} &= B(r)B'(r)/2, \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -rB(r).\end{aligned}$$

Les équations de la géodésique s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\ddot{T} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{T} \dot{r} &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{1}{2} B(r) B'(r) \dot{T}^2 - \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{r}^2 - r B(r) \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} &= 0.\end{aligned}$$

On a également des expressions analogues à (1.16), (1.17), (1.19), (1.21), (1.23) et (1.22)

$$\dot{T} = 1/B(r), \quad \dot{r} = \pm \sqrt{1 - J^2 B(r)/r^2}, \quad \dot{\varphi} = J/r^2, \quad (4.28)$$

$$J = r_P / \sqrt{B(r_P)}, \quad (4.29)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{r^2/r_P^2 - 1}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}, \quad (4.30)$$

$$\frac{dT}{dr} = \pm \frac{\sqrt{B(r_P)}}{B(r) \sqrt{1 - r_P^2/r^2}} \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_P} \frac{r}{r+r_P} \right)^{-1/2}, \quad (4.31)$$

où  $r_P$  est le péri-lens, distance d'approche minimale du photon " $\alpha_E$ " et  $J$  une constante du mouvement, jouant le rôle d'un moment angulaire par unité de masse. On ne retient dorénavant que les termes d'ordre  $2GM/r_P$  qui sont, dans notre cas, de l'ordre de  $10^{-5}$ . A cette approximation le péri-lens peut s'écrire comme

$$r_P \sim r_{SchüE} \sin \gamma_{KE} - GM. \quad (4.32)$$

On note que pour la trajectoire du photon " $\alpha_E$ ",  $d\varphi/dr$  est positif sur le trajet de  $r_P$  à  $r_{SchüE}$ , et est négatif de  $r_{SchüS}$  à  $r_P$ . Nous avons, en utilisant (4.30)

$$\varphi_{SchüE} - \varphi_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr,$$

qui s'intègre facilement, en utilisant les intégrales (1.25), pour donner :

$$\begin{aligned} \varphi_{SchüS} \sim \varphi_{SchüE} - \pi + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüE}} + \arcsin \frac{r_P}{r_{SchüS}} \\ - \frac{GM}{r_P} \left( \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüE}^2}} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{SchüS}^2}} + \sqrt{\frac{r_{SchüE} - r_P}{r_{SchüE} + r_P}} + \sqrt{\frac{r_{SchüS} - r_P}{r_{SchüS} + r_P}} \right). \end{aligned}$$

Pour calculer l'angle  $\varphi_{SchüS}$  nous avons besoin de déterminer le temps  $t_{SchüS}$  de Friedmann. Remarquons que pour le chemin du haut  $dT/dr$  est positif sur le trajet de  $r_P$  à  $r_{SchüE}$ , et négatif de  $r_{SchüS}$  à  $r_P$ , (la même remarque vaut également pour le chemin du bas :  $dT/dr$  est positif

sur le trajet de  $r'_P$  à  $r'_{SchüE}$ , et est négatif de  $r'_{SchüS}$  à  $r'_P$ ). Il s'ensuit que

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{r_P}^{r(t_{SchüE})} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr + \int_{r_P}^{r(t_{SchüS})} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr. \quad (4.33)$$

On peut également dériver une autre expression pour  $T_{SchüE} - T_{SchüS}$  en utilisant (4.13)

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}}. \quad (4.34)$$

En combinant (4.33) et (4.34), en sachant que  $r(t_{Schü}) = a(t_{Schü})\chi_{Schü}$ , on obtient

$$\int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}} - \int_{r_P}^{a(t_{SchüS})\chi_{Schü}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \int_{r_P}^{a(t_{SchüE})\chi_{Schü}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr.$$

On ajuste alors, par un calcul numérique, la valeur de  $t_{SchüS}$  de telle manière à assurer l'égalité des deux membres de la relation précédente, en utilisant bien entendu la solution exacte pour le facteur d'échelle, (4.15), et l'expression approchée pour le péri-lens  $r_P$ , (4.32).

Pour le photon " $\alpha'_E$ ", le péri-lens s'écrit à l'ordre  $2GM/r'_P$  comme

$$r'_P \sim r'_{SchüE} \sin \gamma'_{KE} - GM,$$

et l'angle  $\varphi'_{SchüS}$  comme

$$\begin{aligned} \varphi'_{SchüS} &\sim \varphi'_{SchüE} + \pi - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüE}} - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{SchüS}} \\ &+ \frac{GM}{r'_P} \left( \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüE}'^2}} + \sqrt{1 - \frac{r_P'^2}{r_{SchüS}'^2}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüE} - r'_P}{r'_{SchüE} + r'_P}} + \sqrt{\frac{r'_{SchüS} - r'_P}{r'_{SchüS} + r'_P}} \right). \end{aligned}$$

Le temps  $t'_{SchüS}$  est déterminé en combinant les deux équations

$$\begin{aligned} T'_{SchüE} - T'_{SchüS} &= \int_{r'_P}^{r(t'_{SchüE})} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr + \int_{r'_P}^{r(t'_{SchüS})} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr, \quad (4.35) \\ T'_{SchüE} - T'_{SchüS} &= \int_{t'_{SchüS}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_{t'_{SchüS}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}} - \int_{r'_P}^{\alpha(t'_{SchüS})\chi_{Schü}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \int_{r'_P}^{\alpha(t'_{SchüE})\chi_{Schü}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr.$$

et  $t'_{SchüS}$  est déterminé numériquement en ajustant sa valeur de telle manière à assurer l'égalité précédente.

Le temps  $t'_{SchüS}$  peut également se calculer en terme de  $t_{SchüS}$  via une expression analytique approchée. Pour cela on procède comme ce qui suit : On a en utilisant (4.13)

$$\begin{aligned} T'_{SchüE} - T_{SchüE} &= \int_{t_{SchüE}}^{t'_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}} \sim \frac{t'_{SchüE} - t_{SchüE}}{B_{SchüE}} = \frac{\Delta t_{SchüE}}{B_{SchüE}}, \\ T'_{SchüS} - T_{SchüS} &= \int_{t_{SchüS}}^{t'_{SchüS}} \frac{dt}{B_{Schü}} \sim \frac{t'_{SchüS} - t_{SchüS}}{B_{SchüS}} = \frac{\Delta t_{SchüS}}{B_{SchüS}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le  $B_{Schü}$  ne varie de manière significative que sur des échelles de temps cosmologique, on en déduit :

$$T'_{SchüE} - T_{SchüE} - T'_{SchüS} + T_{SchüS} \sim \frac{\Delta t_{SchüE}}{B_{SchüE}} - \frac{\Delta t_{SchüS}}{B_{SchüS}}. \quad (4.36)$$

L'expression (4.35) peut être décomposée selon

$$\begin{aligned} T'_{SchüE} - T'_{SchüS} &= \int_{r_{SchüE}}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr + \int_{r_{SchüS}}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr, \\ &+ \int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr. \end{aligned} \quad (4.37)$$

D'une part, on peut écrire

$$\int_{r_{SchüE}}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüE}} (r'_{SchüE} - r_{SchüE}), \quad (4.38)$$

$$\int_{r_{SchüS}}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüS}} (r'_{SchüS} - r_{SchüS}), \quad (4.39)$$

en utilisant toujours le fait que  $|dT/dr|$  ne varie de manière appréciable que sur des échelles cosmologiques, d'autre part, nous avons, en intégrant l'équation de Friedmann

$$a'_{SchüE} - a_{SchüE} = \int_{t_{SchüE}}^{t'_{SchüE}} \frac{da}{dt} dt \sim \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüE}} (t'_{SchüE} - t_{SchüE}) = \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüE}} \Delta t_{SchüE},$$

$$a'_{SchüS} - a_{SchüS} = \int_{t_{SchüS}}^{t'_{SchüS}} \frac{da}{dt} dt \sim \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüS}} (t'_{SchüS} - t_{SchüS}) = \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüS}} \Delta t_{SchüS}.$$

Alors les expressions (4.38) et (4.39) se transforment, sachant que  $r_{Schü} = a_{Schü} \chi_{Schü}$  en

$$\int_{r_{SchüE}}^{r'_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \chi_{Schü} \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüE}} \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüE}} \Delta t_{SchüE} \equiv F_{SchüE} \Delta t_{SchüE},$$

$$\int_{r_{SchüS}}^{r'_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr = \chi_{Schü} \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüS}} \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüS}} \Delta t_{SchüS} \equiv \Xi_{SchüS} \Delta t_{SchüS},$$

où on a posé

$$F_{SchüE} = \chi_{Schü} \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüE}} \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüE}},$$

$$\Xi_{SchüS} = \chi_{Schü} \left| \frac{dT}{dr} \right|_{r_{SchüS}} \left. \frac{da}{dt} \right|_{a_{SchüS}}.$$

En substituant dans (4.37), puis en faisant la différence avec (4.33), on obtient compte tenu du résultat (4.36)

$$\frac{\Delta t_{SchüE}}{B_{SchüE}} - \frac{\Delta t_{SchüS}}{B_{SchüS}} = I + F_{SchüE} \Delta t_{SchüE} + \Xi_{SchüS} \Delta t_{SchüS},$$

avec

$$I = \int_{r'_P}^{r_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr + \int_{r'_P}^{r_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr - \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr - \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \left| \frac{dT}{dr} \right| dr.$$

On en tire l'expression de  $\Delta t_{SchüS}$ , on obtient

$$\Delta t_{SchüS} = t'_{SchüS} - t_{SchüS} = \frac{(B_{SchüE}^{-1} - F_{SchüE}) \Delta t_{SchüE} - I}{B_{SchüS}^{-1} + \Xi_{SchüS}}.$$

L'intégrale  $I$  peut être calculée à partir d'une intégrale quasiment identique à une intégrale intervenant dans l'expression du temps de retard dans le cadre de la métrique de Kottler. Il

suffit de remplacer dans (2.16)  $r_E$  par  $r_{SchüE}$  et  $r_S$  par  $r_{SchüS}$ , ce qui donne

$$I \sim GM \left[ \frac{r_P^2}{2GM} \left( \frac{1}{r_{SchüE}} + \frac{1}{r_{SchüS}} \right) (1/x^2 - 1) - \frac{3GM}{2\sqrt{\Lambda/3}r_P^2} \left( \operatorname{arctanh} \frac{r_{SchüE}}{\sqrt{3/\Lambda}} + \operatorname{arctanh} \frac{r_{SchüS}}{\sqrt{3/\Lambda}} \right) (1 - x^2) - 4 \ln x \right],$$

avec  $x = r_P/r'_P$ .

#### Étape 4

Ici, on s'intéresse à la région qui contient la source. La 4-vitesse au point  $SchüS$  est définie dans les coordonnées de Kottler, d'après les expressions (4.28) et (4.29) comme

$$\dot{T}_{SchüS} = 1/B_{SchüS}, \quad \dot{r}_{SchüS} = -\sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi}_{SchüS} = \frac{r_P}{r_{SchüS}^2 \sqrt{B(r_P)}},$$

où on a retenu le signe moins pour la vitesse radiale  $\dot{r}_{SchüS}$ , puisque dans cette région le temps augmente lorsque le photon  $\alpha_E$  se rapproche de la lentille. La 4-vitesse s'écrit dans les coordonnées de Friedmann comme

$$\begin{aligned} \dot{t}_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{1}{B_{SchüS}} \left( 1 + C_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \\ \dot{\chi}_{SchüS} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS} \dot{T}_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS} \dot{r}_{SchüS} \\ &= \frac{-1}{a_{SchüS} B_{SchüS}} \left( C_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{SchüS}}{r_{SchüS}^2 B(r_P)}} \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé le Jacobien (4.10).

On définit au point *Schüs*  $\gamma_{FS}$  comme le plus petit angle physique entre la direction du photon  $\alpha_E$  et la direction dirigée vers la lentille. On a

$$\begin{aligned}\gamma_{FS} &:= \arctan\left(\chi_{Schü} \left| \frac{\dot{\varphi}_{Schüs}}{\dot{\chi}_{Schüs}} \right| \right) \\ &= \arctan\left[ \frac{r_P B_{Schüs}}{r_{Schüs} \sqrt{B(r_P)}} \left( C_{Schüs} + \sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{Schüs}}{r_{Schüs}^2 B(r_P)}} \right)^{-1} \right].\end{aligned}$$

Nous avons d'après le triangle que forment la source, la lentille et le point *Schüs*

$$\frac{\sin \alpha_S}{\chi_{Schü}} = \frac{\sin(\pi - \gamma_{FS})}{\chi_{L,S}}. \quad (4.40)$$

Ceci d'une part. D'autre part, étant donné que la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$

$$\alpha_S = \varphi_S - \varphi_{Schüs} + \gamma_{FS}.$$

En reportant dans (4.40), on obtient une expression pour l'angle  $\varphi_S$

$$\varphi_S = \varphi_{Schüs} - \gamma_{FS} + \arcsin\left(\frac{\chi_{Schü}}{\chi_{L,S}} \sin \gamma_{FS}\right).$$

Pour le photon " $\alpha'_E$ ", la 4-vitesse au point *Schüs'* dans les coordonnées de Kottler est

$$\dot{T}'_{Schüs} = 1/B'_{Schüs}, \quad \dot{r}'_{Schüs} = -\sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{Schüs}}{r_{Schüs}'^2 B(r_P')}}, \quad \dot{\varphi}'_{Schüs} = -\frac{r'_P}{r_{Schüs}'^2 \sqrt{B(r_P')}}.$$

et dans les coordonnées de Friedmann

$$\begin{aligned}
\dot{t}_{SchüS} &= \frac{\partial t}{\partial T} \Big|_{SchüS'} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{SchüS'} \dot{r}'_{SchüS} \\
&= \frac{1}{B'_{SchüS}} \left( 1 + C'_{SchüS} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right), \\
\dot{\chi}_{SchüS'} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{SchüS'} \dot{T}'_{SchüS} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{SchüS'} \dot{r}'_{SchüS} \\
&= \frac{-1}{a'_{SchüS} B'_{SchüS}} \left( C_{SchüS'} + \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right).
\end{aligned}$$

On définit au point  $SchüS'$   $\gamma'_{FS}$  comme le plus petit angle physique entre la direction du photon  $\alpha'_E$  et la direction dirigée vers la lentille

$$\begin{aligned}
\gamma'_{FS} &:= \arctan \left( \chi_{Schü} \left| \frac{\dot{\chi}'_{SchüS}}{\dot{\chi}_{SchüS}} \right| \right) \\
&= \arctan \left[ \frac{r'_P B'_{SchüS}}{r'_{SchüS} \sqrt{B(r'_P)}} \left( C'_{SchüS} + \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{SchüS}}{r_{SchüS}'^2 B(r'_P)}} \right)^{-1} \right].
\end{aligned}$$

De la même manière que pour la trajectoire du photon  $\alpha_E$ , on détermine l'angle  $\phi'_S$  pour la trajectoire du photon  $\alpha'_E$ . Cet angle a pour expression

$$\phi'_S = \phi'_{SchüS} + \gamma'_{FS} - \arcsin \left( \frac{\chi_{Schü}}{\chi_{L,S}} \sin \gamma'_{FS} \right).$$

### 4.3 Temps de retard dans le modèle d'Einstein-Straus

Dans cette section, on cherche à calculer le temps de retard que met le photon “ $\alpha_E$ ” par rapport à “ $\alpha'_E$ ”. Ceci est équivalent à déterminer les temps de départ des deux photons,  $t_S$  et  $t'_S$ , en complétant l'intégration des géodésiques dans la région qui contient la source. En intégrant l'équation (3.15),  $d\chi/dt = -1/a$  avec la condition  $\chi(t_{SchüS}) = 0$ , on obtient la solution

$$\chi(t) = \zeta(t) - \zeta(t_{SchüS}),$$

où la fonction  $\zeta(t)$  est définie plus haut par l'expression (4.17). Cette solution se réduit dans la limite  $\Lambda = 0$  à

$$\chi(t) = 2 \left[ \left( \frac{3}{2} t_{SchüS} + 1 \right)^{1/3} - \left( \frac{3}{2} t + 1 \right)^{1/3} \right].$$

Donc, les temps de départ des deux photons “ $\alpha_E$ ” et “ $\alpha'_E$ ” sont respectivement

$$\begin{aligned} t_S &= \tilde{t}(\chi_{S,SchüS}), \\ t'_S &= \tilde{t}(\chi'_{S,SchüS}), \end{aligned}$$

où  $\chi_{S,SchüS}$  et  $\chi'_{S,SchüS}$  sont respectivement les distances entre la source et chacun des points  $SchüS$  et  $SchüS'$ . On peut démontrer que ces distances s'écrivent en terme de  $\chi_{L,S}$ ,  $\chi_{Schü}$ ,  $\varphi_{SchüS}$ ,  $\varphi_{SchüS'}$ , et  $\varphi_S$  comme

$$\begin{aligned} \chi_{S,SchüS} &= \chi(t_S) = \sqrt{\chi_{L,S}^2 + \chi_{Schü}^2 - 2\chi_{L,S}\chi_{Schü} \cos(\varphi_{SchüS} - \varphi_S)}, \\ \chi'_{S,SchüS} &= \chi(t'_S) = \sqrt{\chi_{L,S}^2 + \chi_{Schü}^2 - 2\chi_{L,S}\chi_{Schü} \cos(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)}. \end{aligned}$$

Le temps de retard est défini comme

$$\Delta t = \Delta t_S = (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) = t'_S - t_S,$$

car on a supposé que les deux photons arrivent sur Terre en même temps,  $t_E = t'_E = 0$ .

Le temps  $t'_S$  peut se calculer en terme de  $t_S$  via une expression analytique approchée. Pour cela on procède selon ce qui suit : Dans l'approximation  $|\varphi_{SchüS} - \varphi_S| \ll 1$ ,  $|\varphi'_{SchüS} - \varphi_S| \ll 1$ , les distances  $\chi_{S,SchüS}$  et  $\chi'_{S,SchüS}$  peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned} \chi_{S,SchüS} &\sim \chi_{L,S} - \chi_{Schü} - \frac{(\varphi_{SchüS} - \varphi_S)^2}{2(\chi_{L,S}^{-1} - \chi_{Schü}^{-1})}, \\ \chi'_{S,SchüS} &\sim \chi_{L,S} - \chi_{Schü} - \frac{(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)^2}{2(\chi_{L,S}^{-1} - \chi_{Schü}^{-1})}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

D'autre part, nous avons grâce à la relation (3.15),  $d\chi/dt = -1/a$

$$\begin{aligned}\chi_{S,SchüS} &= -\int_{t_{SchüS}}^{t_S} \frac{dt}{a(t)} = -\int_{t'_S}^{t_S} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_{SchüS}}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)}, \\ \chi'_{S,SchüS} &= -\int_{t'_{SchüS}}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\chi'_{S,SchüS} - \chi_{S,SchüS} = \int_{t_{SchüS}}^{t'_{SchüS}} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_S}^{t'_S} \frac{dt}{a(t)} \sim \frac{\Delta t_{SchüS}}{a_{SchüS}} - \frac{\Delta t_S}{a_S},$$

où on a utilisé le fait que  $a$  ne varie de façon significative que sur des échelles de temps cosmologiques. Par conséquent, on obtient, compte tenu de (4.41)

$$\Delta t \sim a(t_S) \left[ \frac{\Delta t_{SchüS}}{a_{SchüS}} + \frac{(\varphi'_{SchüS} - \varphi_S)^2 - (\varphi_{SchüS} - \varphi_S)^2}{2(\chi_{L,S}^{-1} - \chi_{Schü}^{-1})} \right].$$

#### 4.4 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

Etant donné que les deux photons partent du même point, la source, on doit avoir  $\varphi_S = \varphi'_S$ . En vérité, cette égalité n'est satisfaite que pour une masse  $M$  particulière de l'amas de galaxie. On fait donc varier la masse  $M$  jusqu'à ce que les deux angles coïncident, pour les valeurs maximales '+', centrales ' $\pm 0$ ' et minimales '-' de la constante cosmologique et des angles  $\alpha_E$  et  $\alpha'_E$ . On a de plus traité le cas de  $\Lambda = 0$ . Les résultats sont consignés dans les tableaux 5, 6, 7, 8.

Une fois que l'angle polaire de coordonnée  $\varphi_S$  et la masse  $M$  appropriée sont déterminés, on calcule le temps de retard que met le photon " $\alpha_E$ " par rapport au photon " $\alpha'_E$ ", en utilisant la méthode de calcul direct et la méthode de calcul par différence.

$\Lambda \pm 20\%$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S [']$	9.03	8.13	9.93	10.84	9.93	<b>11.74</b>	7.22	<b>6.32</b>	8.13
$M [10^{13} M_\odot]$	1.80	1.98	1.62	1.98	<b>2.18</b>	1.78	1.62	1.78	<b>1.46</b>
$\Delta t_{dir}$ [ans]	9.9	9.3	10.4	12.6	12.0	13.0	7.5	6.8	8.0
$\Delta t_{dif}$ [ans]	9.7	9.2	10.2	12.3	11.8	<b>12.8</b>	7.4	<b>6.7</b>	7.9

Tableau 5.

$\Lambda \pm 20\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$				
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S [']$	9.97	8.97	10.97	11.97	10.97	<b>12.96</b>	7.98	<b>6.98</b>	8.97
$M [10^{13} M_\odot]$	1.82	2.00	1.64	2.00	<b>2.20</b>	1.80	1.64	1.80	<b>1.48</b>
$\Delta t_{dir}$ [ans]	10.1	9.4	10.6	12.7	12.2	13.2	7.6	6.9	8.1
$\Delta t_{dif}$ [ans]	9.7	9.1	10.2	12.3	11.7	<b>12.7</b>	7.3	<b>6.7</b>	7.9

Tableau 6.

$\Lambda \pm 20\%$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S [']$	10.57	9.51	11.63	12.68	11.63	<b>13.74</b>	8.45	<b>7.40</b>	9.51
$M [10^{13} M_\odot]$	1.80	1.98	1.62	1.98	<b>2.18</b>	1.78	1.62	1.78	<b>1.46</b>
$\Delta t_{dir}$ [ans]	9.9	9.3	10.4	12.6	12.0	13.0	7.5	6.9	8.0
$\Delta t_{dif}$ [ans]	9.5	9.0	10.0	12.0	11.5	<b>12.4</b>	7.2	<b>6.6</b>	7.7

Tableau 7.

$\Lambda$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha'_E \pm 10\%$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	+	+	+	-	-	-
$\alpha_E \pm 10\%$	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-	$\pm 0$	+	-
$-\varphi_S ['']$	11.86	10.67	13.05	14.23	13.05	<b>15.42</b>	9.49	<b>8.30</b>	10.67
$M [10^{13} M_\odot]$	1.68	1.84	1.51	1.84	<b>2.03</b>	1.66	1.51	1.66	<b>1.36</b>
$\Delta t_{dir} [\text{ans}]$	9.2	8.7	9.7	11.7	11.2	12.1	7.0	6.4	7.5
$\Delta t_{dif} [\text{ans}]$	8.7	8.2	9.1	11.0	10.5	<b>11.3</b>	6.6	<b>6.0</b>	7.0

Tableau 8.

On peut résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Schwarzschild	$-\varphi_S = 11.85^{+3.56}_{-3.55} ''$	$M = 2.81^{+0.60}_{-0.53} \cdot 10^{13} M_\odot$	$\Delta t = 15.2^{+4.4}_{-4.6} \text{ ans}$
Kottler	$-\varphi_S = 13.00^{+4.69}_{-4.18} ''$	$M = 4.85^{+2.17}_{-1.59} \cdot 10^{13} M_\odot$	$\Delta \tau = 20.5^{+8.5}_{-7.3} \text{ ans}$
Einstein-Straus sans $\Lambda$	$-\varphi_S = 11.86^{+3.56}_{-3.56} ''$	$M = 1.68^{+0.35}_{-0.32} \cdot 10^{13} M_\odot$	$\Delta t = 8.7^{+2.6}_{-2.7} \text{ ans}$
Einstein-Straus avec $\Lambda$	$-\varphi_S = 9.85^{+3.89}_{-3.53} ''$	$M = 1.80^{+0.40}_{-0.34} \cdot 10^{13} M_\odot$	$\Delta t = 9.7^{+3.1}_{-3.1} \text{ ans}$

Tableau 9 : Estimation de la masse de l'amas de galaxies, du temps de retard et de l'angle  $\varphi_S$ .

La méthode du calcul par différence nous a permis d'obtenir des temps de retard concevables dont la variation en fonction de  $\Lambda$  est monotone, comme on le voit directement sur les tableaux. Cependant cette propriété n'est pas respectée avec la méthode du calcul direct ; la variation en  $\Lambda$  est en forme de cloche ( les valeurs critiques maximales sont représentées dans le tableau 6). Il est clair que la méthode du calcul par différence est plus fiable comparativement à la méthode de calcul direct.

# Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse la déflexion de la lumière par une masse statique à symétrie sphérique dans le cadre de plusieurs métriques : Métrique de Schwarzschild, métrique de Kottler, ou métrique de Schwarzschild-de Sitter, et métrique d'Einstein-Straus. En particulier, l'effet de la constante cosmologique est soigneusement analysé et il s'avère que la déflexion dépend de la constante cosmologique. Nous avons appliqué nos résultats au système lentille-quasar SDSS J1004+4112. Il vaut la peine de noter que nous avons ajusté sur la masse de l'amas de galaxies. Ceci d'une part. D'autre part, nous nous sommes également penchés sur le temps de retard : la différence des temps de parcours source-Terre entre deux photons émis en même temps par une même source et empruntant des chemins différents pour nous parvenir ici sur Terre. Nous avons calculé ce temps de retard dans le cadre des mêmes métriques considérées à l'occasion de la déflexion de la lumière. Nous avons considéré avec un soin particulier le calcul du temps de retard dans le cadre de la métrique d'Einstein-Straus. Le modèle d'Einstein-Straus est le plus sophistiqué des modèles que nous avons considérés. Il permet tout en tenant compte de l'expansion de l'Univers à grande échelle, d'expliquer le fait que les systèmes planétaires et les systèmes atomiques ne sont pas affectés par cette expansion, ce qui constitue la motivation première de ce modèle. Le modèle d'Einstein-Straus est aussi instable que les modèles de Friedmann et c'est cette grande instabilité qui est à l'origine de la formation de structures. Comparativement au modèle de Kottler, le modèle d'Einstein-Straus permet de s'affranchir de plusieurs simplifications : On permet à l'observateur et à la source de se mouvoir par rapport à la lentille et on tient compte de la masse des autres amas de galaxies sous forme de poussière homogène et isotrope, avec l'observateur et la source comobiles par rapport à la poussière. Finalement, de toutes les hypothèses adoptées dans le cadre du modèle de Kottler, seule l'hypothèse

d'une symétrie sphérique est retenue. Il en résulte que les prédictions du modèle seront d'autant plus fiables. C'est également là que se situe la partie la plus originale de ce travail de thèse. C'est en effet la première fois, à notre connaissance, que le calcul du temps de retard est réalisé dans le cadre de la solution d'Einstein-Straus. Nous avons également appliqué nos résultats au système SDSS J1004+4112 et obtenu une prédiction pour le temps de retard dans le cadre de cette solution et également des prédictions dans le cadre des solutions de Schwarzschild et de Kottler, prédictions qui pourraient être dans un avenir relativement proche confrontées aux observations expérimentales. Nous sommes donc dans l'attente du verdict de l'expérience.

# Bibliographie

- [1] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, *Phyl. Traus. Roy. Soc.*, **220A**, 291 (1920) ;  
*Mem. Roy. Astro. Soc.*, **62**, 291 (1920).
- [2] Schwarzschild. K., 1916a, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie,” *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, 189-196.
- [3] S. Weinberg., 1972, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley & Sons. New York.[ page 77].
- [4] I. I. Shapiro, G. H. Pettengill, M. E. Ash, M. L. Stone, W. B. Smith, R. P. Ingalls, and R. A. Brockelman, *Phys. Rev. Letters*, 20, 1265 (1968).
- [5] N. Ota et al, *Astrophys. J.* 647, 215 (2006).
- [6] N. Inada et al. [SDSS Collaboration], “A Gravitationally Lensed Quasar with Quadruple Images Separated by 14.62 Arcseconds,” *Nature* 426 (2003) 810 [arXiv :astro-ph/0312427],  
M. Oguri et al. [SDSS Collaboration], “Observations and Theoretical Implications of the Large Separation Lensed Quasar SDSS J1004+4112,” *Astrophys. J.* 605 (2004) 78 [arXiv :astro-ph/0312429].
- [7] F. Kottler “Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie”, *Ann. Phys. (Berlin)*, 56, 401-461, (1918).
- [8] de Sitter, W., 1917a, “On the relativity of inertia : Remarks concerning Einstein’s latest hypothesis,” *Proc, Kon. Ned. Akad. Wet.* 19, 1217-1225 ; de Sitter, W., 1917b, “On the curvature of space” *Proc, Kon. Ned. Akad. Wet.* 20, 229-243.
- [9] J. Fohlmeister, C. S. Kochanek, E. E. Falco, C. W. Morgan and J. Wambsganss, “The Rewards of Patience : An 822 Day Time Delay in the Gravitational Lens SDSS J1004+4112,” arXiv :0710.1634 [astro-ph].

- [10] P.J.E. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :559, 2003.
- [11] A. G. Riess, et al., *Astron. J.* 116, 1009-1038 (1998); S. Perlmutter, et al., *Astrophys. J.* 517, 565-586 (1999); R. A. Knop, et al., *Astrophys. J.* 598, 102-137 (2003); A. G. Riess, et al., *Astrophys. J.* 607, 665-687 (2004); C. L. Bennett, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 148, 1 (2003); D. N. Spergel, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* , 175 (2003); L. Page et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 148, 2333 (2003). Seljak et al., *Phys.Rev.* D71, 103515 (2005); M. Tegmark, et al., *Astrophys. J.* 606, 702-740 (2004). D.N. Spergel , et al., *Astrophys.J.Suppl.* 170, 377 (2007).
- [12] W. Rindler and M. Ishak, “The Contribution of the Cosmological Constant to the Relativistic Bending of Light Revisited,” *Phys. Rev. D* 76 (2007) 043006 [arXiv :0709.2948 [astro-ph]].
- [13] N.J. Islam, *Phys. Lett. A* 97, 239 (1983); W. H. C. Freire, V. B. Bezerra, J. A. S. Lima, *Gen. Relativ. Gravit.* 33, 1407 (2001); A. W. Kerr, J. C. Hauck, B. Mashhoon, *Class. Quant. Grav.*, 20, 2727 (2003); V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, *Phys.Lett. B* 634 465-470 (2006); F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, *Phys.Rev. D* 75, 043003 (2007); M. Sereno, Ph. Jetzer, *Phys. Rev. D* 73, 063004 (2006).
- [14] T. Schücker and N. Zaimen, “Cosmological constant and time delay,” *A&A* 484 (2008) 103 [arXiv :0801.3776 [astro-ph]].
- [15] Friedmann, A., 1922, “Über die Krümmung des raumes.” *Z. Phys.* 10, 377-386.
- [16] A. Einstein and E. G. Straus, “The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual star,” *Rev. Mod. Phys.* 17 (1945) 120, 18(1946) 148.
- [17] G.C. McVittie, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 93, 325 (1933); see also G. C. McVittie, *General Relativity and Cosmology*, Chapman and Hall, London, 1965
- [18] E. Schücking, “Das Schwarzschildsche Linienelement und die Expansion des Weltalls,” *Z. Phys.* 137 (1954) 595.
- [19] T. Schücker, “Strong lensing in the Einstein-Straus solution,” arXiv :0807.0380 [astro-ph], *Gen. Rel. Grav.* in press.