

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE:

RAYONNEMENTS ET APPLICATIONS

THEME

**Étude semi classique et quantique de l'interaction
rayonnement-matière**

Par :

AMEL BENAHMED

SOUTENU LE : 15/06/2009

Devant le jury:

Président:	N. KEGHOUCHE	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur:	A. LECHEHEB	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Examineurs:	L. CHETOUANI	Prof. Univ. Mentouri Constantine
	T. BOUDJEDAA	Prof. Univ de Jijel

Remerciement

Je tiens tout d'abord, à exprimer mes vifs remerciements à :

Dieu, tout puissant, pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces années d'étude.

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire a été réalisé au laboratoire de physique mathématique et subatomique du département de physique à l'université Mentouri de Constantine sous la direction de Monsieur **A. Lecheheb** professeur à l'université Mentouri de Constantine que je tiens à le remercier pour son aide scientifique.

Je tiens à remercier tout particulièrement et chaleureusement **Mme. N. Keghouche**, professeur à l'université Mentouri de Constantine pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également :

Mr. L. Chetouani professeur à l'université Mentouri de Constantine

Mr. T. Boudjedaa, Professeur à l'université de Jijel.

qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail et faire partie de ce jury.

Je voudrais maintenant témoigner une profonde gratitude à mes parents qui ont jamais douté de moi et jusqu'ici ils m'ont encouragé et donné les moyens de réussir en particulier ma mère qui est la chandelle de ma vie, pour son suivi tout au long de mes études, pour son soutien moral et surtout sa tendresse.

A mes frères à mes sœurs et aussi à leurs enfants ainsi qu'à tous les amis qui m'ont encouragé à persévérer.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes enseignants de classe primaire, moyenne, secondaire, graduation et post-graduation.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Table des matières

Introduction générale.....	1
1. Traitement semi classique de l'interaction champ-atome	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Description classique du champ électrique par les équations de Maxwell.....	6
1.2.1 Rappels sur les ondes électromagnétiques.....	6
1.2.1 Fréquence laser et enveloppe du champ.....	7
1.3 Description quantique du milieu atomique par les équations de Bloch dans le cas d'un système à deux niveaux.....	11
1.4 Couplage des équations de Maxwell avec les équations de Bloch.....	17
1.5 Solutions stationnaires des équations de Maxwell-Bloch.....	19
1.5.1 Détermination de la susceptibilité diélectrique $\chi(\omega)$	21
1.5.2 Détermination de la fréquence d'oscillation du laser	24
1.5.3 Détermination du gain	27
1.5.4 Détermination de l'intensité stationnaire du laser	28
1.6 Description des équations du bilan par les équations de Maxwell-Bloch.....	29
1.7 Conclusion.....	30
2. Description du champ électromagnétique et de sa quantification.....	31
2.1 Introduction	31
2.2 Rappels sur la théorie électromagnétique.....	32
2.2.1 Détermination de la densité d'énergie électromagnétique dans l'espace non libre	32
2.2.2 Détermination de la densité d'énergie électromagnétique dans l'espace libre	34
2.2.3 Equations des potentiels en jauge de Coulomb	36

2.2.4 Représentation du champ par un ensemble d'oscillateurs harmoniques....	37
2.2.4.1 Décomposition du potentiel vecteur et des champs	37
2.2.4.2 L'expression de l'énergie électromagnétique à l'aide des u_k	39
2.2.4.3 Dénombrement des modes propres	41
2.3 Description de la quantification du champ électromagnétique	44
2.3.1 Etude des états quantiques du champ électromagnétique	48
2.3.2 Description quantique du rayonnement du corps noir.....	54
2.3.3 Considérations sur les photons	57
2.4. Conclusion.....	60
3. Traitement quantique de l'interaction atome-champ	61
3.1 Introduction	61
3.2 Rappels sur la théorie des perturbations	62
3.3 La probabilité de la désexcitation d'un atome.....	64
3.4 L'étude de l'émission spontanée	65
3.5 L'étude de l'émission stimulée et d'absorption	68
3.6 Mécanismes d'élargissement spectral	71
3.6.1 Description de l'élargissement naturel	71
3.6.2 Description de l'élargissement par collisions.....	72
3.6.3 Description de l'élargissement par effet Doppler.....	75
3.7 Conclusion.....	78
Conclusion générale	79

Références.

Introduction générale :

C'est en 1960 que Maiman [1], suivant une idée de Townes et Schawlow, construit et fit fonctionner pour la première fois un LASER (le nom est un acronyme de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). L'apparition de cet instrument a complètement transformé de nombreux domaines de la physique. En premier lieu bien sûr, l'optique, mais aussi la physique atomique et moléculaire et bien d'autres aspects de la physique de la matière condensée.

Ainsi ces faisceaux de lumière cohérente sont utilisés dans des domaines aussi variés que la recherche scientifique, la télémétrie, la détection des polluants, les spectacles, la chirurgie et la médecine [2], l'usinage [3, 4, 5], les télécommunications [6], l'affichage [7, 8], le stockage optique de l'information, la photolithographie [9], l'impression laser, etc. Parmi les sources lumineuses le laser, comme on le sait, se singularise par une émission très directive (concentrée dans un très faible angle solide) et très monochromatique (de très faible largeur spectrale), et aussi très intense.

Le laser comporte ainsi trois éléments fondamentaux : la cavité optique, le milieu actif et une source de pompage, voir la figure (0.1) [14]. La cavité optique aussi appelée le résonateur optique se compose de deux, trois ou plusieurs miroirs, destinée à maintenir à l'intérieur du milieu actif une énergie lumineuse élevée, favorable à l'émission stimulée. Il ya deux types de cavités qui sont la cavité plane (mode de Fabri Pérot) et en anneau. Le milieu amplificateur, peut être solide, liquide, gazeux ou plasma, composé d'atomes, d'ions ou de molécules, situé entre les miroirs de la cavité optique. La source de pompage est la source d'excitation du milieu actif afin que l'émission stimulée soit favorisée.

Pour la description du fonctionnement d'un laser, il y a un modèle simple dont l'étude du bilan des échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement permet de dégager, de manière phénoménologique, les équations de l'évolution temporelle des variables pertinentes du laser : L'inversion de population et l'intensité du champ dans la cavité [10, 13, 15, 16].

Dans ce cadre, des caractéristiques essentielles comme la notion du seuil d'émission

laser, l'évolution de l'intensité laser en fonction du paramètre de pompe ou encore l'effet de saturation du gain, ont pu être dégagées.

Cette description séduisante par sa simplicité, n'est cependant pas complète. Nous pouvons nous demander par exemple, quelle est la fréquence d'émission du laser ?

Nous savons maintenant qu'à un oscillateur optique sont associées deux fréquences caractéristiques : d'une part la fréquence de la cavité vide ω_c , et d'autre part la fréquence de la transition atomique ω_a . Comment se situe alors la fréquence du champ laser par rapport à ces valeurs ?

La réponse peut être obtenue dans le cadre de la théorie semi-classique [10, 12, 13, 15, 23] qui sera traitée dans le premier chapitre, elle fournit une description classique du champ laser par les équations de Maxwell [11, 15] et du milieu atomique dans le cadre de la mécanique quantique par les équations de Bloch [12, 15]. L'ensemble de ces deux descriptions donnent alors lieu à un système d'équations pour le champ et les variables atomiques qui sont les équations de Maxwell-Bloch [12, 13, 15].

Néanmoins ; cette description n'est pas satisfaisante, car elle ne peut pas traiter les processus d'émission spontanée, de même la distribution statistique des photons [26] ne peut être obtenue dans la formulation classique en termes des équations de Maxwell. Seule une approche "tout quantique" que nous allons développer dans le troisième chapitre [17, 21, 22, 23, 26], permet de rendre compte de ces phénomènes.

C'est à la poursuite de cette démarche que nous consacrons ce chapitre, dans lequel nous allons traiter l'interaction du champ électromagnétique avec la matière du point de vue entièrement quantique, ce qui va nous permettre en particulier d'étudier les processus élémentaires : émission spontanée, absorption et émission stimulée et des divers mécanismes qui déterminent le profil spectral d'une transition.

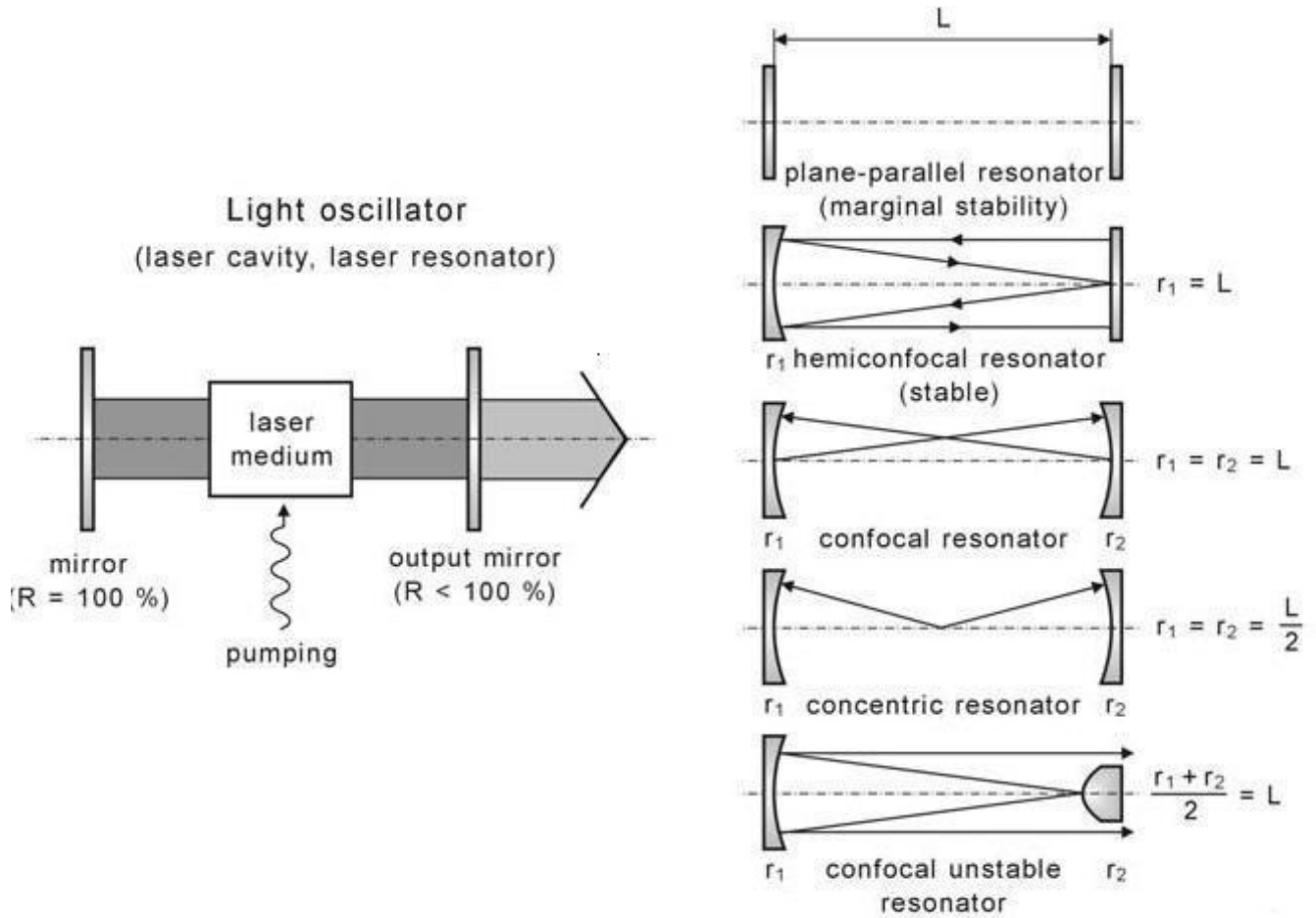


FIG. 0-1 – Constituants du laser et différentes configurations de miroir d'un résonateur laser

Chapitre 1

Traitement semi-classique de l'interaction atome-champ :

1.1 *Introduction :*

L'interaction du rayonnement électromagnétique avec la matière est décrite par un couplage réciproque entre le champ E et la polarisation P dans lequel, le champ électrique $E(r, t)$ induit des dipôles microscopiques p et de là une polarisation macroscopique $P(r, t)$ (qui agit comme un "terme de source" pour E), engendrant un champ résultant $E'(r, t)$. C'est en fait, ce champ qui induit les moments dipôlares. Il doit, par conséquent, être identique à $E'(r, t)$.

Ce couplage peut se traduire par un schéma auto-consistant qui est illustré par la figure (1.1) [10].

Dans ce chapitre, nous allons donner une première description des échanges d'énergie entre les atomes et le champ, qui est la description semi-classique dans laquelle le milieu atomique sera traité quantiquement par les équations de Bloch alors que le champ sera traité classiquement par les équations de Maxwell. Ce chapitre comprend ainsi quatre paragraphes :

- Le premier paragraphe est consacré à la description du champ électrique E par les

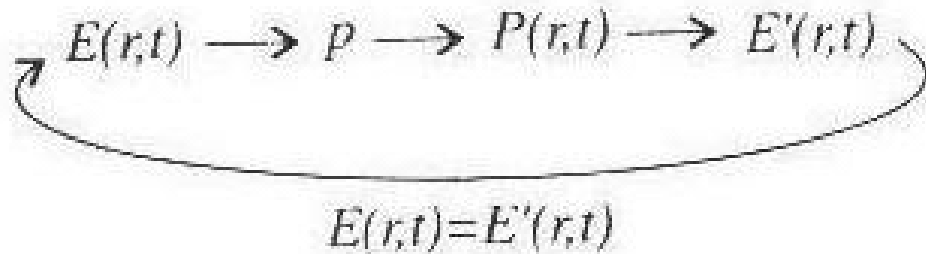


FIG. 1-1 – Couplage réciproque entre le champ E et la polarisation P

équations de Maxwell; il va mettre ensuite en évidence le rôle que joue la polarisation du milieu dans la génération du champ électrique .

- Dans le deuxième paragraphe, le milieu atomique sera analysée dans le cadre d'un système d'atomes à deux niveaux en interaction avec le champ électrique par les équations de Bloch.

- Et dans le troisième paragraphe, on va coupler ces équations pour obtenir les équations du Maxwell-Bloch qui nous fournissent des renseignements très importants sur le comportement du laser.

- Nous terminons ce chapitre par une conclusion qui décrit le lien avec les équations du bilan.

1.2 *Description classique du champ électrique par les équations de Maxwell :*

1.2.1 *Rappels sur les ondes électromagnétiques :*

Les équations de Maxwell suivantes [11] permettent de décrire le champ électrique comme :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ Loi de Lenz} \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ Théorème d'Ampère} \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \text{ Théorème de Gauss} \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \text{ Pas de monopôle magnétique} \quad (1.1d)$$

Où \vec{E} et \vec{B} sont respectivement les champs électriques et magnétiques, μ_0 est la perméabilité du vide.

\vec{D} est le vecteur de déplacement ou d'induction électrique et \vec{H} représente l'induction magnétique, d'où : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Aux équations de Maxwell s'ajoute l'équation constitutive qui précise la relation entre l'induction électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} qui est donnée par [11] :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.1e)$$

Où ε_0 est la constante diélectrique.

De (1.1a), (1.1b) et (1.1e) en tenant compte de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \mu_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \wedge \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \right] \\ -\nabla^2 E &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \text{ où : } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Où P est la polarisation du milieu supposée homogène et isotrope.

Dans une cavité vide ($P = 0$), l'équation (1.2) admet les ondes planes comme solutions. Supposons que ces ondes planes ont des vecteurs d'onde k_c et de fréquence ω_c et elles se propagent dans la direction z fixée par l'axe de la cavité. Donc les champs E et P sont donnés sous la forme [12] :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} [E_0(t) e^{i(k_c z - \omega_c t)} + c.c.] \quad (1.3a)$$

$$P(z, t) = \frac{1}{2} [P_0(t) e^{i(k_c z - \omega_c t)} + c.c.] \quad (1.3b)$$

Les grandeurs E_0 et P_0 sont les amplitudes ou bien les enveloppes associées à E et P .

1.2.2 *Fréquence laser et enveloppe du champ :*

Les champs E et P ne sont pas exactement des ondes planes de fréquence ω_c , donc le champ laser est caractérisé par une fréquence notée $\omega_L \neq \omega_c$. On peut cependant supposer que ω_L est proche de ω_c et que les effets de dispersions sont relativement faibles [13], donc : $|\omega_L - \omega_c| \ll \omega_c$. Si E oscille à ω_L , alors la dépendance temporelle de l'enveloppe est donnée d'après la figure (1.2) [13] par :

$$E_0(t) = A(t) e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} \quad (1.4)$$

Où $A(t)$ représente l'amplitude du champ, si le laser présente une solution stationnaire elle sera constante.

On suppose que l'enveloppe du champ varie peu dans le temps par rapport aux oscillations rapides en fréquence ω_c , ces variations sont faibles sur un intervalle $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$, voir la figure (1.2) [13].

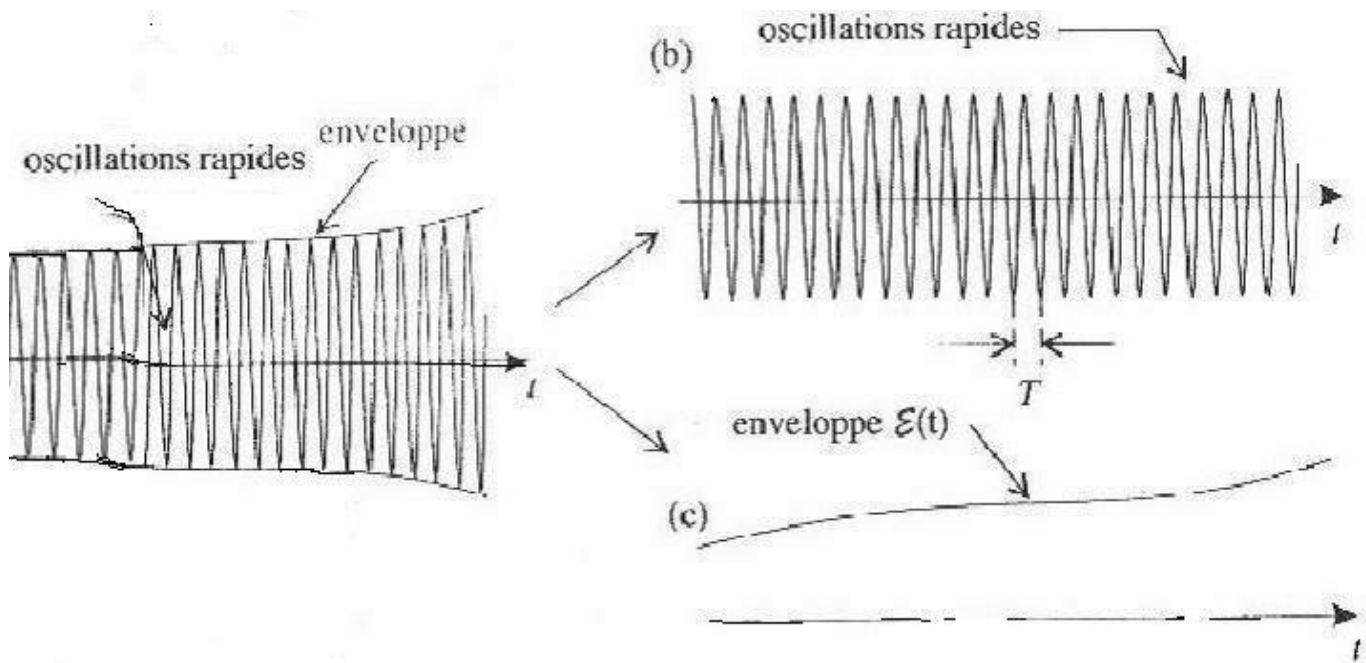


FIG. 1-2 – La variation temporelle de l'enveloppe du champ E_0 par rapport aux oscillations de fréquences optiques ω_c .

Interprétation de la figure (1. 2) :

Cette figure présente la variation temporelle de l'enveloppe du champ E_0 par rapport aux oscillations rapides de fréquence ω_c , si on prend un intervalle $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$, on note que ces variations sont faibles (presque négligeables) par rapport aux oscillations rapides.

Ceci se traduit par :

$$\dot{E}_0 = -i(\omega_L - \omega_c) E_0 \Rightarrow \left| \dot{E}_0 \right| = |\omega_L - \omega_c| |E_0|$$

Et comme :

$$|\omega_L - \omega_c| \ll \omega_c$$

Donc :

$$\left| \dot{E}_0 \right| \ll \omega_c |E_0| \quad \left| \dot{P}_0 \right| \ll \omega_c |P_0| \quad (1.5)$$

Et de même :

$$\left| \ddot{E}_0 \right| \ll \omega_c \left| \dot{E}_0 \right| \quad \left| \ddot{P}_0 \right| \ll \omega_c \left| \dot{P}_0 \right| \quad (1.6)$$

Les inégalités (1.5) et (1.6) sont à la base des développements qui suivent et permettent d'autoriser l'approximation de l'enveloppe lentement variable.

Reportant (1.3) dans (1.2), on obtient :

$$-k^2 E_0 - \frac{1}{c^2} (\ddot{E}_0 - 2i\omega_c \dot{E}_0 - \omega_c^2 E_0) = \mu_0 (\ddot{P}_0 - 2i\omega_c \dot{P}_0 - \omega_c^2 P_0)$$

Où :

$$\nabla^2 E = -k^2 E_0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \ddot{E}_0 - 2i\omega_c \dot{E}_0 - \omega_c^2 E_0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \ddot{P}_0 - 2i\omega_c \dot{P}_0 - \omega_c^2 P_0$$

Ainsi :

$$\ddot{E}_0 - 2i\omega_c \dot{E}_0 = -\mu_0 c^2 (-\omega_c^2 P_0 - 2i\omega_c \dot{P}_0 + \ddot{P}_0) \quad (1.7)$$

Où $k^2 = \frac{\omega_c^2}{c^2}$.

Si on tient compte de (1.5) et (1.6); l'enveloppe du champ devient :

$$-2i \omega_c \dot{E}_0 = -\mu_0 c^2 (-\omega_c^2 P_0) \text{ d'où : } \dot{E}_0 = \frac{i \omega_c}{2 \varepsilon_0} P_0 \quad (1.8)$$

Notons ici que la polarisation P_0 est comme un terme de source pour le champ E_0 , les enveloppes de E_0 et P_0 dépendent aussi de coordonnée z , mais comme on va supposer que le gain et les pertes sont faibles et homogènes en z , donc les variations en z sont négligeables (milieu isotrope) et si la réponse du milieu est instantanée [15] :

$$P_0 = \varepsilon_0 \chi E_0 = \varepsilon_0 (\chi' + i\chi'') E_0 \quad (1.9)$$

La susceptibilité $\chi(\omega_L)$ est une fonction évaluée à la fréquence du champ ω_L .

De (1.8) et (1.4), on trouve :

$$\left[\frac{\dot{A}}{A} - i (\omega_L - \omega_c) \right] E_0 = \frac{i \omega_c}{2} (\chi' + i\chi'') E_0$$

D'où :

$$\dot{A} = -\frac{\omega_c}{2} \chi'' A \quad (1.10a)$$

$$\omega_L = \omega_c - \frac{\omega_c}{2} \chi' \quad (1.10b)$$

L'expression (1. 10b) montre que la fréquence ω_L s'écarte de la fréquence ω_c proportionnellement à χ' ce que implique que la fréquence laser ω_L dépend non seulement des propriétés du mode de cavité mais aussi des caractéristiques du milieu atomique.

Le flux d'énergie par unité de temps qui se propage perpendiculairement à la direction de propagation z est donné par : $I = A^2$, donc :

$$\dot{I} = 2\dot{A}A \implies \dot{I} = -\omega_c \chi'' I \quad (1.11)$$

Remarques [13] :

Si $\chi'' < 0$: le milieu agit comme un amplificateur de la lumière (champ électromagnétique), et si $\chi'' > 0$: il agit comme un absorbant.

Le champ électromagnétique est amplifié si $D > 0$ "l'inversion de population" est réalisée au milieu donc $\chi'' \propto D$ du milieu atomique.

La polarisation de milieu ne répond pas de manière instantanée au champ électrique qui lui est appliqué et elle n'obéit pas à une expression simple de type (1.9) comme on va montrer dans l'étude de la polarisation d'un système d'atome à 2 niveaux d'énergie.

1.3 *Description quantique du milieu atomique par les équations de Bloch dans le cas d'un système à deux niveaux :*

Le milieu atomique est formé d'un ensemble d'atomes. Supposons que chaque atome est entouré d'un seul électron de charge $(-e)$. L'atome est décrit par sa fonction d'onde $\Psi(r, t)$. En mécanique quantique l'électron est associé à une fonction d'onde $\Psi(r, t)$ et à un moment dipolaire p donné par [11] comme :

$$p = -e\langle r \rangle = -e \int \dots \int \Psi^*(r, t) r \Psi(r, t) dr \quad (1.12)$$

Où $\langle r \rangle$ est la position moyenne relativement au noyau.

La connaissance de la fonction d'onde $\Psi(r, t)$ nous permet de calculer ce moment dipolaire p . L'hamiltonien de l'atome en absence du champ est noté H_0 décrit à partir de l'équation de Schrödinger stationnaire comme :

$$H_0\varphi_n(r) = E_n\varphi_n(r).$$

E_n et $\varphi_n(r)$ sont respectivement les états propres et les énergies, sont supposés connus. Si l'atome ne présente pas de dipôle permanent $p = 0$, l'expression (1.12) devient :

$$p = -e \int \dots \int \varphi_n^*(r) r \varphi_n(r) dr = 0 \quad (1.13)$$

$\varphi_n(r)$ est de parité définie (paire ou impaire).

Notre étude ici, se ramène seulement au problème d'un atome à deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 qui interagissent avec le champ dont la transition est associée à la fréquence de Bohr [11] proche de la fréquence ω du champ qui est donnée par : $\omega_a = (E_2 - E_1)/\hbar$. L'énergie potentielle de cette interaction est obtenue dans [12] par :

$$V(r) = erE = exE \text{ (Le champ est polarisé suivant x)}$$

Dans la base des états propres de $H_0 : \{\varphi_1(r), \varphi_2(r)\}$, les éléments de matrice sont notés :

$$V_{12} = V_{21} = eE \int \varphi_1^*(r)x\varphi_2(r)dr \equiv -E\mu \quad (1.14)$$

Le paramètre :

$$\mu = -e \int \varphi_2^*(r)x\varphi_1(r)dr \quad (1.15)$$

est le moment dipolaire de la transition atomique supposé réel. Si μ est grand, le champ couple fortement les deux niveaux d'énergie et le taux d'émission stimulée et d'absorption devient très élevé [11].

L'état quantique de l'atome en présence d'un champ électrique est défini en notation de Dirac par [11] :

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} |\varphi_1\rangle + c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} |\varphi_2\rangle \quad (1.16)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$|\Psi^*(t)\rangle = c_1^*(t)e^{i E_1 t / \hbar} |\varphi_1^*\rangle + c_2^*(t)e^{i E_2 t / \hbar} |\varphi_2^*\rangle \quad (1.17)$$

Ainsi :

$$\langle \Psi(t) | \Psi^*(t) \rangle = c_2(t)c_1^*(t)e^{-i(E_2 - E_1)t / \hbar} \langle \varphi_1^* | \varphi_2 \rangle + c.c.$$

Et si on tient compte de (1.15) et de (1.12) ; on obtient :

$$p = \mu [c_2(t)c_1^*(t)e^{-i(E_2 - E_1)t / \hbar} + c.c] \quad (1.18)$$

Le problème se ramène à déterminer les amplitudes $c_1(t)$ et $c_2(t)$ associés à chaque niveau d'énergie. Il sera résolu dans le paragraphe suivant.

Détermination des équations de Bloch :

La fonction d'onde atomique obéit à l'équation de Schrödinger est donnée par :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (1.19)$$

Où $H = H_0 + V(r)$.

Lorsque le champ couple des états propres de parité définie ; les éléments diagonaux de V sont nuls [12] et l'hamiltonien : $H = H_0 + V$ de l'atome s'écrit :

$$H = \begin{vmatrix} E_1 & -E\mu \\ -E\mu & E_2 \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

On peut écrire l'expression (1.16) sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \begin{vmatrix} c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} \\ c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

Reportant cette expression dans (1.19) en tenant compte de (1.20) , on obtient :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} \\ c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & -E\mu \\ -E\mu & E_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} \\ c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

Donc :

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} + c_1(t) \left(\frac{-iE_1}{\hbar} \right) e^{-i E_1 t / \hbar} \\ \dot{c}_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} + c_2(t) \left(\frac{-iE_2}{\hbar} \right) e^{-i E_2 t / \hbar} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} - E\mu c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} \\ -E\mu c_1(t)e^{-i E_1 t / \hbar} + E_2 c_2(t)e^{-i E_2 t / \hbar} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$i\hbar \dot{c}_1(t) = -\mu c_2(t) e^{-i(E_2 - E_1)t / \hbar} E(t) \quad (1.23a)$$

$$i\hbar \dot{c}_2(t) = -\mu c_1(t) e^{-i(E_2 - E_1)t / \hbar} E(t) \quad (1.23b)$$

Nous savons que le milieu atomique est formé de N atomes par unité de volume et il présente une polarisation macroscopique (moment dipolaire par unité de volume) : $P = Np$.

Et si on remplace P par sa formule donnée par (1.18), on obtient :

$$P = N\mu [c_1^*(t)c_2(t)e^{-i(E_2 - E_1)t / \hbar} + c.c.] \quad (1.24)$$

En comparant avec (1.8), l'enveloppe P_0 obéit à l'expression (1.3b) :

$$P(z, t) = \frac{1}{2} [P_0(t) e^{i(k_c z - \omega t)} + c.c.] \implies P_0 = 2P e^{i(k_c z - \omega t)}.$$

Ainsi :

$$P_0 = 2N \mu c_1^* c_2 e^{-ik_c z} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \quad (1.25)$$

Où : $\omega_a = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ est la fréquence de Bohr.

Revenant aux équations (1.23), on veut les intégrer mais le problème se ramène à la connaissance de $E(t)$ qui est inconnu pour le moment. D' autre part, nous savons que dans un laser $E(t)$ est lui même couplé à P_0 . On peut cependant le définir par une équation différentielle comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{P}_0 &= 2N \mu c_1^* c_2 e^{-ik_c z} [-i(\omega_a - \omega_c)] e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} + 2N \mu c_2 c_1'^* e^{-ik_c z} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \\ &\quad + 2N \mu c_2' c_1^* e^{-ik_c z} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \end{aligned}$$

Et si on tient compte de (1.23a) et (1.23b), on trouve :

$$\dot{P}_0 = -i(\omega_a - \omega_c)P_0 + \left[\begin{array}{l} \frac{2N\mu^2}{i\hbar} c_2 c_2^* e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} E(t) e^{-ik_c z} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} - \\ \frac{2N\mu^2}{i\hbar} c_1 c_1^* e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} E(t) e^{-ik_c z} e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} \end{array} \right]$$

Donc :

$$\dot{P}_0 = -i(\omega_a - \omega_c)P_0 - 2i \frac{N \mu^2}{\hbar} [|c_2|^2 - |c_1|^2] E(t) e^{-i(k_c z - \omega_c t)} \quad (1.26)$$

De (1.3a) on a :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} [E_0(t) e^{i(k_c z - \omega_c t)} + c.c] \implies E_0 = 2E(t) e^{-i(k_c z - \omega_c t)}$$

Donc l'équation (1.26) devient :

$$\dot{P}_0 = -i(\omega_a - \omega_c)P_0 - i \frac{N \mu^2}{\hbar} [|c_2|^2 - |c_1|^2] E_0 \quad (1.27)$$

Dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique, le champ E est évalué à la position du noyau atomique [12]. L'enveloppe du champ E_0 qui se trouve dans (1.27) est

défini par (1.3a). Les grandeurs $|c_1|^2$ et $|c_2|^2$ représentent la probabilité pour que l'atome se trouve dans l'état φ_1 et φ_2 respectivement. $N|c_2|^2$ et $N|c_1|^2$ mesurent le nombre moyen par unité de volume. De l'équation (1.27), on tire la grandeur D [13] :

$$D = N [|c_2|^2 - |c_1|^2] \quad (1.28)$$

qui représente la différence d'occupation entre les niveaux hauts et bas de la transition laser ou bien l'inversion de population. L'équation différentielle de D est déduite par les équations (1.23) comme :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= N(c_2c_2^* - c_1c_1^*)' = N(c_2'c_2^* + c_2c_2'^* - c_1'c_1^* - c_1c_1'^*) \\ \dot{D} &= N \left[\begin{aligned} &-\frac{\mu}{i\hbar}c_1c_2^*e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}E(t) + \frac{\mu}{i\hbar}c_2c_1^*e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}E(t) + \\ &\frac{\mu}{i\hbar}c_2c_1^*e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}E(t) - \frac{\mu}{i\hbar}c_1c_2^*e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}E(t) \end{aligned} \right] \\ \dot{D} &= N \left[\frac{2i\mu}{\hbar}c_2c_1^*e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar} - c.c \right] E(t) = \frac{2i}{\hbar}pE(t) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\dot{D} = \frac{i}{\hbar} (P_0e^{i(k_cz-\omega_ct)} - c.c) E(t).$$

Où :

$$P(z, t) = \frac{1}{2} [P_0(t) e^{i(k_cz-\omega_ct)} + c.c]$$

Ou encore de (1.3a) :

$$E^*(t) = \frac{1}{2}E_0^*(t) e^{-i(k_cz-\omega_ct)} \implies \frac{1}{2}E_0^*(t) = E^*(t)e^{i(k_cz-\omega_ct)}$$

On obtient donc :

$$\dot{D} = -\frac{i}{\hbar}(P_0E_0^* - P_0^*E_0) \quad (1.29)$$

On a déduit alors les équations différentielles de P_0 et D données par :

$$\begin{aligned}\dot{P}_0 &= -i(\omega_a - \omega_c)P_0 - i\frac{N\mu^2}{\hbar} [|c_2|^2 - |c_1|^2] E_0. \\ \dot{D} &= -\frac{i}{\hbar}(P_0E_0^* - P_0^*E_0)\end{aligned}$$

qui portent le nom des "*Equations de Bloch*" du laser.

1.4 Couplage des équations de Maxwell avec les équations de Bloch :

Le couplage des équations de Maxwell avec les équations de Bloch déduites précédemment, nous fournissent les équations de Maxwell-Bloch. Ces équations forment un système décrivant la dynamique temporelle du champ E_0 et des variables atomique \dot{P}_0 et \dot{D} dans lesquelles, on doit ajouter, de manière phénoménologique, des termes de relaxations $k_c, \gamma_{//}$ et γ_{\perp} associés respectivement au champ électrique E_0 , à l'inversion de population D et à la polarisation P_0 et aussi le terme $\gamma_{//}\hat{D}$ qui représente l'inversion réalisée par unité de volume et par unité de temps qui lui est construite par le pompage du milieu. On obtient cependant les équations de Maxwell-Bloch [12, 13] sous la forme :

	Terme de gain	
$\dot{E}_0 = -k_c E_0$	$+ i\frac{\omega_c}{2\varepsilon_0} P_0$	
$\dot{D} = -\gamma_{//} D$	$-\frac{i}{2\hbar}(P_0E_0^* - E_0P_0^*)$	$+ \gamma_{//}\hat{D}.$
$\dot{P}_0 = -\gamma_{\perp} P_0$	$-(\omega_a - \omega_c)P_0$	$-i\frac{\mu^2}{\hbar} D E_0 \dots \dots \dots (1.30)$
Relaxation	Différence de fréquence	Couplage Atome-champ Pompage

Ces taux $k_c, \gamma_{//}$ et γ_{\perp} déterminent le temps d'approche de l'équilibre du système. La dynamique du laser dépend fortement de ces paramètres ce qui nous permet de distinguer différentes classes du laser en fonction de ces paramètres [16] :

⊗ **Laser de classe A :**

(Laser $He - Ne$, à Ar^+ , laser à colorant), dans lesquels :

$$\gamma_{\perp}, \gamma_{//} \gg k_c$$

Ceci, nous donne :

$$\dot{D} \approx 0, \quad P_0 = \epsilon_0 \chi E_0$$

À la résonance ($\omega_c = \omega_a = \omega_L$), on obtient :

$$\dot{E}_0 = \frac{\omega_c \mu^2}{2 \epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} D E_0 - k_c E_0 \Rightarrow \dot{E}_0 = -k_c E_0 + \frac{\omega_c \mu^2}{2 \epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \frac{\hat{D}}{1+S} E_0$$

Où : $D = \frac{\hat{D}}{1+S}$, S est une intensité normalisée définie dans (1.35).

⊗ **Laser de classe B :**

(Laser à Rubis, $Nd : YAG, CO, CO_2$, laser à semi-conducteur), dans lesquels :

On a :

$$\gamma_{\perp} \gg \gamma_{//}, k_c$$

Ceci, nous donne :

$$\dot{P}_0 \approx 0$$

Par exemple pour le laser à CO_2 ($\gamma_{\perp} = 10^8 s^{-1}, \gamma_{//} = 10^4 s^{-1}, k_c = 10^7 s^{-1}$)

⊗ **Laser de classe C :**

(Laser NH_3). Dans ce cas, aucune simplification ne peut être apportée et la dynamique du laser est correctement décrite par le système complet (1.30). L'exemple d'un laser à NH_3 ($\gamma_{\perp} = 10^6 s^{-1}, \gamma_{//} = 10^6 s^{-1}, k_c = 10^7 s^{-1}$).

1.5 *Solutions stationnaires des équations de Maxwell-Bloch :*

L'étude des solutions stationnaires des équations de Maxwell-Bloch, nous fournit quelques propriétés du laser, pour déterminer les solutions des équations (1.30), nous considérons que les amplitudes des champ E et la polarisation P qui oscillent à la fréquence ω_L (inconnue pour le moment) s'écrivent sous la forme :

$$E_0 = E' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} \quad (1.31a)$$

$$P_0 = P' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} \quad (1.31b)$$

Reportant ces expressions dans (1.30), nous obtenons les valeurs stationnaires des variables matérielles P_0 et D comme :

$$\dot{P}_0 = -\gamma_{\perp} P_0 - i(\omega_a - \omega_c) P_0 - i \frac{\mu^2}{\hbar} D E_0 = P' \{-i(\omega_L - \omega_c)\} e^{-i(\omega_L - \omega_c)t}$$

Donc :

$$-\gamma_{\perp} P' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} - i(\omega_a - \omega_c) P' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} - i \frac{\mu^2}{\hbar} D E' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} = -i(\omega_L - \omega_c) P' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t}$$

$$\implies -P' \{ \gamma_{\perp} + i(\omega_a - \omega_c) - i(\omega_L - \omega_c) \} = i \frac{\mu^2}{\hbar} D E'$$

$$\implies -P' \{ \gamma_{\perp} - i(\omega_L - \omega_a) \} = i \frac{\mu^2}{\hbar} D E'$$

$$\implies -iP' \{-i \gamma_{\perp} - (\omega_L - \omega_a)\} = i \frac{\mu^2}{\hbar} D E' \implies P' = \frac{(\mu^2 / \hbar) D}{\{i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}} E'.$$

Ainsi :

$$P' \equiv \varepsilon_0 \chi E' \quad (1.32a)$$

Et si on remplace P' et E' par leurs valeurs trouvées dans (1.32a), on trouve :

$$\dot{D} = -\gamma_{//} D - \frac{i}{2 \hbar} (P_0 E_0^* - E_0 P_0^*) + \gamma_{//} \hat{D} \implies 0 = -\gamma_{//} D - \frac{i}{2 \hbar} (P' E'^* - E' P'^*) + \gamma_{//} \hat{D}$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= -\gamma_{//} D - \frac{i}{2 \hbar} \left\{ \frac{(\mu^2 / \hbar) D}{\{i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}} |E'|^2 - \frac{(\mu^2 / \hbar) D}{\{-i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}} |E'|^2 \right\} + \gamma_{//} \hat{D} \\ \implies \gamma_{//} D &\left[1 + i \frac{(\mu^2 / \hbar) 2i \gamma_{\perp}}{2 \hbar \gamma_{//}} |E'|^2 \left(\frac{1}{\gamma_{\perp}^2 + (\omega_L - \omega_a)^2} \right) \right] = \gamma_{//} \hat{D} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$D = \hat{D} \left(1 + \frac{\mu^2 \gamma_{\perp}}{\hbar^2 \gamma_{//}} \frac{|E'|^2}{\gamma_{\perp}^2 + (\omega_L - \omega_a)^2} \right)^{-1} \quad (1.32b)$$

Le champ E' si on tient compte de (1.30) et (1.32a) s'écrit :

$$\dot{E}_0 = -k_c E_0 + i \frac{\omega_c}{2 \varepsilon_0} P_0 \implies -i(\omega_L - \omega_c) E' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} = -k_c E' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t} + \frac{i \omega_c}{2 \varepsilon_0} P' e^{-i(\omega_L - \omega_c)t}$$

Donc :

$$E' [k_c - i(\omega_L - \omega_c)] = \frac{i \omega_c}{2 \varepsilon_0} P' \quad (1.33)$$

Où : $P' \equiv \varepsilon_0 \chi E'$

Les expressions (1.32) et (1.33) sont riches en renseignements sur le comportement du laser. Elles permettent cependant d'obtenir la susceptibilité du milieu, le gain du laser et aussi la fréquence optique du laser.

1.5.1 Détermination de la susceptibilité diélectrique $\chi(\omega)$:

On peut écrire l'expression (1.32b) sous la forme :

$$D = \hat{D} \left(\frac{\hbar^2 \gamma_{//} (\omega_L - \omega_a)^2 + \hbar^2 \gamma_{//} \gamma_{\perp}^2}{\hbar^2 \gamma_{//} (\omega_L - \omega_a)^2 + \hbar^2 \gamma_{//} \gamma_{\perp}^2 + \mu^2 \gamma_{\perp} |E'|^2} \right)$$

Si on divise sur $\hbar^2 \gamma_{//} \gamma_{\perp}^2$; on obtient :

$$D = \hat{D} \left(\frac{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2}{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + S} \right) \quad (1.34)$$

Où S est une intensité normalisée donnée par [13] :

$$S = \frac{|E'|^2}{\hbar^2 \gamma_{//} \gamma_{\perp} / \mu^2} \quad (1.35)$$

On remarque qu'il existe l'effet de saturation en présence du champ E_0 . A la résonance ($\omega_L = \omega_a$), la saturation de D [13] est donnée par l'expression :

$$D = \frac{\hat{D}}{1 + S} \quad (1.36)$$

Le paramètre de saturation pour l'onde plane d'intensité : $I = |E'|^2$ est donné par [13] : $S = I / I_S$; où I_S est l'intensité de saturation. On compare avec (1.35) et on trouve :

$$I_S = \hbar^2 \gamma_{//} \gamma_{\perp} / \mu^2 \quad (1.37)$$

La susceptibilité diélectrique du milieu d'après la figure (1. 3) [13] est via (1.32a) égale

à :

$$\varepsilon_0 \chi = \frac{P'}{E'} = \frac{(\mu^2 / \hbar) D}{\{i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}} \implies \chi = \frac{(\mu^2 / \hbar) D \{-i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}}{\varepsilon_0 \{i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\} \{-i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}}$$

Ainsi :

$$\chi(\omega) = \frac{\mu^2 \{-i \gamma_{\perp} + (\omega_L - \omega_a)\}}{\varepsilon_0 \hbar \{\gamma_{\perp}^2 + (\omega_L - \omega_a)^2\}} D \quad (1.38)$$

Reportant (1.34) dans (1.38), nous avons :

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{\mu^2 \{-i + (\omega_L - \omega_a) / \gamma_{\perp}\}}{\varepsilon_0 \hbar \{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2\}} \left(\frac{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2}{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + S} \right) \hat{D} \\ &= \hat{D} \frac{\mu^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left(\frac{(\omega_L - \omega_a) / \gamma_{\perp} - i}{(\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + 1} \right) \left(\frac{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2}{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + S} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\chi(\omega) = \frac{\mu^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left[\frac{(\omega - \omega_a) / \gamma_{\perp} - i}{1 + (\omega - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + S} \right] \hat{D} \quad (1.39)$$

Sachant que : $\chi = \chi' + i\chi''$, et si on compare avec (1.39), on obtient :

$$\chi''(\omega) = -\hat{D} \frac{\mu^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left[\frac{1}{1 + (\omega - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2} \right] \quad (1.40)$$

qui présente une résonance pour $\omega = \omega_a$, elle est proportionnelle au gain (voir l'équation (1.11)) et à D (lorsque $D \succ 0$; χ'' prend des valeurs négatives, nous remarquons alors que l'effet d'amplification n'est obtenu que dans le cadre d'une description quantique puisque toute approche classique donne $\chi'' \succ 0$).

On parle aussi de courbure de gain ou de forme de raie associée à la transition atomique considérée, supposant que tous les atomes sont identiques entre eux c'est à dire qui ont les mêmes caractéristiques. On obtient à partir des équations de Bloch :

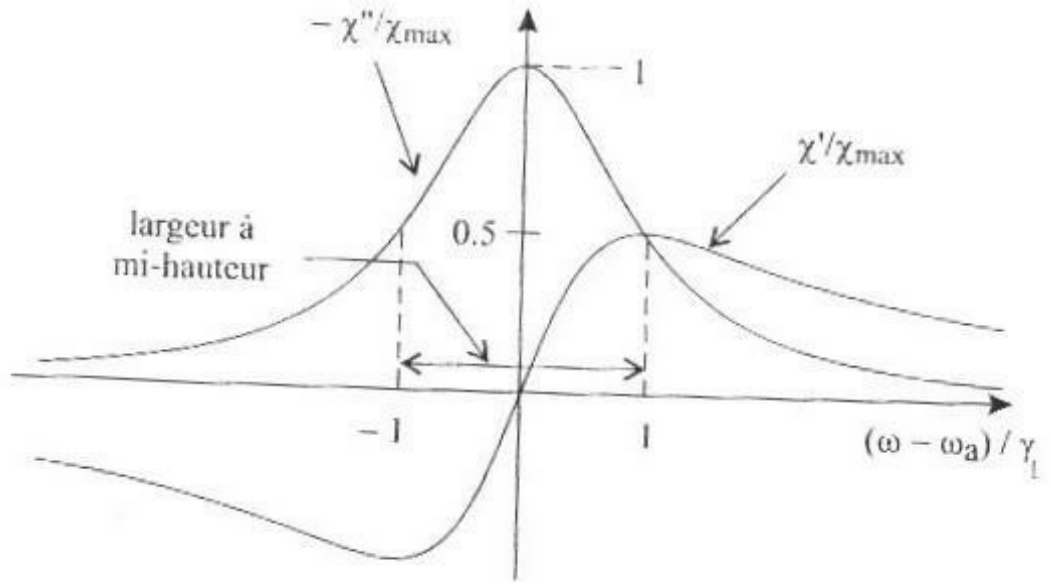


FIG. 1-3 – Susceptibilité diélectrique. A la résonance χ'' prend sa valeur maximum et les effets de dispersion χ' sont nuls.

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\pi\gamma_{\perp}} \left(\frac{1}{1 + (\omega - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2} \right) \quad (1.41)$$

$\mathcal{L}(\omega)$ est normée ($\int \mathcal{L}(\omega) d\omega = 1$). Cette courbure de gain a pour demi-largeur à mi-hauteur le taux de relaxation γ_{\perp} . La grandeur $2\gamma_{\perp}$ est appelée largeur naturelle du milieu [17].

Interprétation de la courbe de la figure (1. 3) :

On remarque sur cette figure que pour une résonance $\omega_c = \omega_a$: lorsque la fréquence laser est identique à celle du milieu alors le gain est optimum.

$\chi'' \rightarrow \chi''_{\max} \Rightarrow$ les effets de dispersion en $\chi' \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ le champ est intense ($D \rightarrow 0$).

Pour les faibles intensités ($S \rightarrow 0$), la réponse du milieu est linéaire, nous obtenons alors la réponse linéaire $\chi''(1.40)$ sous une forme d'une lorentzienne.

1.5.2 Détermination de la fréquence d'oscillation du laser :

Les équations de Maxwell-Bloch permettent aussi de déterminer la fréquence ω_L que va prendre le champ laser. L'expression ω_L obtenue en utilisant la relation (1.33) avec : $P' \equiv \varepsilon_0 \chi E' = \varepsilon_0 (\chi' + i \chi'') E' (E' \neq 0)$:

$$E' [k_c - i(\omega_L - \omega_c)] = \frac{i \omega_c}{2 \varepsilon_0} P' = \frac{i \omega_c}{2} \chi E' = \frac{i \omega_c}{2} (\chi' + i \chi'') E' \implies [k_c - i(\omega_L - \omega_c)] = \frac{i \omega_c}{2} \chi' - \frac{\omega_c}{2} \chi''.$$

On trouve donc :

$$-i(\omega_L - \omega_c) = \frac{i \omega_c}{2} \chi'(\omega_L) \implies \omega_L = \omega_c \left(1 - \frac{\chi'(\omega_L)}{2} \right) \quad (1.42a)$$

$$k_c = -\frac{\omega_c}{2} \chi'' \implies \chi''(\omega_L) = -\frac{2k_c}{\omega_c} \quad (1.42b)$$

On remarque ici que la réponse du milieu est évaluée à la fréquence du champ laser ω_L qui lui est appliquée (c'est à dire χ' et χ'' sont évaluées à ω_L dans les équations (1.42)). L'équation (1.42a) donne ω_L en fonction de ω_c . Sa résolution numérique permet d'obtenir la courbure de dispersion illustrée par la figure (1.4) [12].

L'équation (1.42b) traduit la condition gain=perte qui est nécessaire au fonctionnement du laser. Pour obtenir la partie réelle χ' en fonction de ω_L , on utilise la relation de Kramers-Kröing [18] :

$$\chi'(\omega_L) = -\frac{-(\omega - \omega_a)}{\gamma_\perp} \chi''(\omega)$$

Obtenons ainsi :

$$\chi'(\omega_L) = -\frac{-(\omega_a - \omega_L)}{\gamma_\perp} \chi''(\omega) \quad (1.42)'$$

et de (1.42b) :

$$\chi'(\omega_L) = -\frac{2k_c(\omega_a - \omega_L)}{\gamma_\perp \omega_c} \quad (1.43)$$

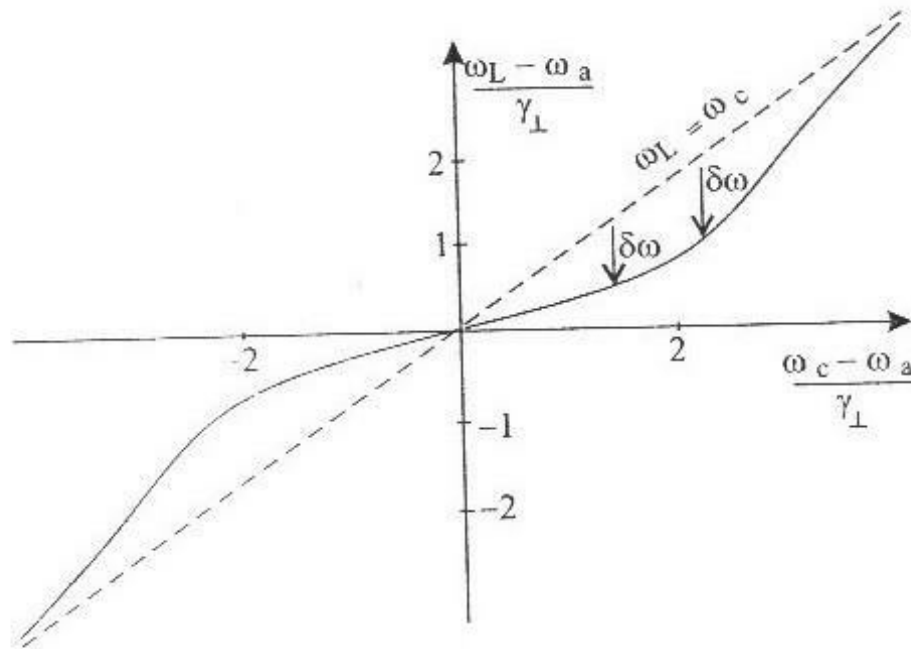


FIG. 1-4 – Fréquence ω_L en fonction de la fréquence de cavité vide ω_c .

en la remplaçant dans (1.42a) comme :

$$\begin{aligned}
 \omega_L &= \omega_c \left(1 - \frac{\chi'(\omega_L)}{2} \right) \Rightarrow \omega_L = \omega_c \left(1 + \frac{k_c(\omega_a - \omega_L)}{\gamma_{\perp} \omega_c} \right) = \omega_c + \frac{k_c(\omega_a - \omega_L)}{\gamma_{\perp}} = \omega_c + \frac{k_c(\omega_a - \omega_L)}{\gamma_{\perp}} \\
 &= \omega_c + \frac{k_c \omega_a - k_c \omega_L}{\gamma_{\perp}} \Rightarrow \omega_L = \frac{\gamma_{\perp} \omega_c + k_c \omega_a - k_c \omega_L}{\gamma_{\perp}} \Rightarrow \omega_L + \frac{k_c \omega_L}{\gamma_{\perp}} = \frac{\gamma_{\perp} \omega_c + k_c \omega_a}{\gamma_{\perp}} \\
 &\Rightarrow \frac{\gamma_{\perp} \omega_L + k_c \omega_L}{\gamma_{\perp}} = \frac{\gamma_{\perp} \omega_c + k_c \omega_a}{\gamma_{\perp}} \Rightarrow \gamma_{\perp} \omega_L + k_c \omega_L = \gamma_{\perp} \omega_c + k_c \omega_a
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\omega_L = \frac{\gamma_{\perp} \omega_c + k_c \omega_a}{\gamma_{\perp} + k_c} \quad (1.44)$$

Interprétation de la courbe de la figure (1. 4) :

Cette figure représente la fréquence laser ω_L en fonction de la fréquence de cavité

ω_c , dans laquelle, on voit que : Lorsque $\chi' = 0$, la fréquence laser devient identique à celle de cavité : $\omega_L = \omega_c$ (trait pointillé), et on remarque aussi que la fréquence ω_L comme l'indiquent les flèches est tirée d'une quantité $\delta\omega$ vers la fréquence atomique ω_a : $\omega_L = \delta\omega + \omega_c$.

Si : $\omega_c = \omega_a$, il existe ce que l'on appelle "Tirage en fréquence" voir la figure (1. 5) [13].

La fréquence laser ω_L apparaît ici comme la moyenne pondérée par les relaxations des fréquences du système ω_a et ω_c .

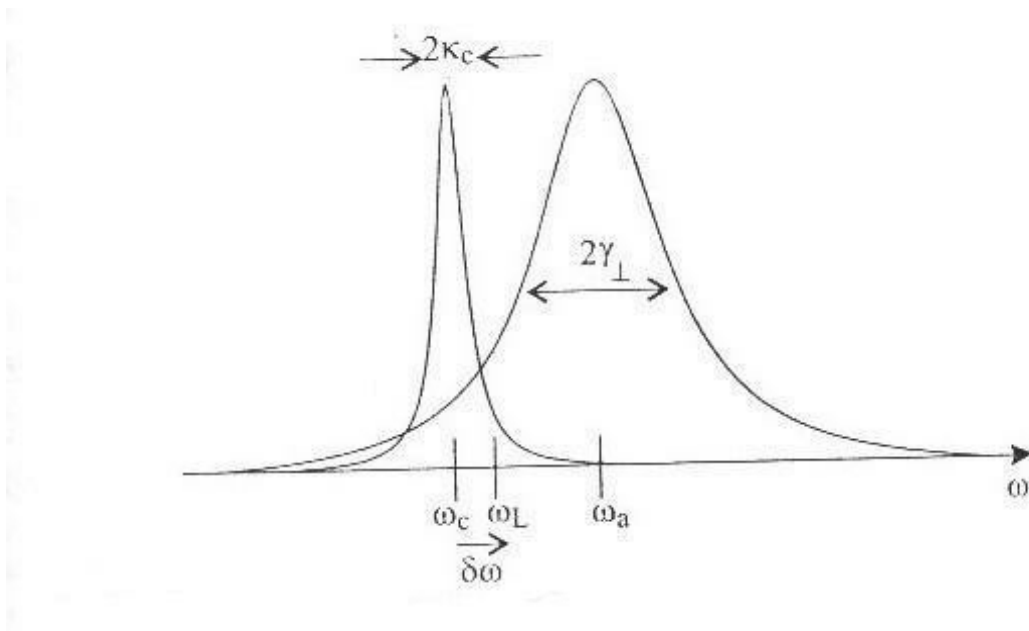


FIG. 1-5 – Courbe de résonance de la cavité et courbe de gain du milieu atomique.

Interprétation de la courbe de la figure (1. 5) :

Sur cette figure, comme nous l'avons mentionnée, il se passe un phénomène appelé "tirage en fréquence" qui se manifeste lorsque $\omega_c = \omega_a$ (à la résonance). Par exemple, les lasers à C_{O_2} ont typiquement des relaxations $\gamma_{\perp} \sim 10^8 s^{-1}$, $k \sim 10^7 s^{-1}$ [19], les effets de tirage en fréquence sont alors négligeables : $\omega_L \approx \omega_c$.

On note aussi que les lasers vérifiant $\gamma_{\perp} \gg k_c$ oscillent à la fréquence ω_c et comme nous

avons remarqué sur la figure (1.4) que la fréquence laser ω_L est tirée, comme l'indique la flèche, de la fréquence de référence ω_c vers la fréquence atomique ω_a : $\omega_L = \omega_c + \delta\omega$.

Et on peut finalement obtenir l'indice du milieu donné par [16] sous la forme :

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi'(\omega)} \approx 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2} \quad (1.45)$$

Et si on tient compte de (1.40) et (1.42)', on obtient :

$$\chi'(\omega) = \frac{\mu^2}{\epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left[\frac{(\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}}{1 + (\omega - \omega_a)^2/\gamma_{\perp}^2} \right] \hat{D} \implies n(\omega) = 1 + \frac{\mu^2}{2 \epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left[\frac{(\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}}{1 + (\omega - \omega_a)^2/\gamma_{\perp}^2} \right] \hat{D} \quad (1.46)$$

Où l'on a supposé : $\chi' \ll 1$ (milieu dilué) [13].

1.5.3 Détermination du gain :

Le gain par unité de longueur α est défini par [13] :

$$\alpha(\omega_L) = \frac{-\omega_c}{c} \chi''(\omega_L)$$

Et de (1.40) :

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{-\omega_c}{c} \left(-\hat{D} \frac{\mu^2}{\epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \left[\frac{1}{1 + (\omega - \omega_a)^2/\gamma_{\perp}^2 + S} \right] \right) \\ \alpha(\omega) &= \frac{\omega_c}{c} \left(\frac{\mu^2}{\epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \right) \left[\frac{1}{1 + (\omega - \omega_a)^2/\gamma_{\perp}^2 + S} \right] \hat{D} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Et de là, on obtient la section efficace d'émission stimulée et d'absorption donnée par [13] :

$$\sigma(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{D} = \frac{-\omega_c}{c D} \chi''(\omega) \implies \sigma(\omega) = \left(\frac{\omega_c \mu^2}{c \epsilon_0 \hbar \gamma_{\perp}} \right) \left[\frac{1}{1 + (\omega - \omega_a)^2/\gamma_{\perp}^2} \right] \quad (1.48)$$

On note que la section efficace σ est une fonction de la fréquence ω_L et à la réso-

nance : $\omega_L = \omega_a$; elle prend sa valeur maximale, hors résonance σ diminue : la condition d'oscillation laser <gain=perte> peut être réalisée au sein du milieu par une augmentation du pompage et par suite de l'inversion de population. Cette relation nous informe aussi que lorsque le moment dipolaire $\mu(1.15)$ est grand dans lequel, les deux niveaux sont fortement couplés, σ est alors élevée et les processus d'émission et d'absorption induites deviennent importants [13].

1.5.4 Détermination de l'intensité stationnaire du laser :

La détermination de l'intensité du laser en fonction de ω_L est obtenue en utilisant la relation (1. 48) :

$$\sigma = \frac{\alpha}{D} = \left(\frac{-\omega_c}{c D}\right)\left(\frac{-2k_c}{\omega_c}\right); \text{ où : } \alpha = \frac{-\omega_c}{c} \chi'' \text{ et : } \chi'' = -\frac{2k_c}{\omega_c}$$

D'autre part, la relation : $E' = P' = 0$ correspond à $D \leq D_S$, ainsi :

$$D = D_S = \frac{2k_c}{c \sigma} = \frac{2 k_c c \hbar \varepsilon_0 \gamma_{\perp}}{c \omega_c} \left(1 + \left(\frac{\omega_L - \omega_a}{\gamma_{\perp}}\right)^2\right) \quad (1.49)$$

L'intensité laser est obtenue à partir de (1.36) :

$$D = D_S = \hat{D} \left(\frac{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2}{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + \frac{I}{I_s}} \right)$$

Où :

$$S = \frac{I}{I_s},$$

Et :

$$\frac{\hat{D}}{D_s} = \frac{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2 + \frac{I}{I_s}}{1 + (\omega_L - \omega_a)^2 / \gamma_{\perp}^2} = 1 + \frac{\frac{I}{I_s}}{1 + \left(\frac{\omega_L - \omega_a}{\gamma_{\perp}}\right)^2}$$

Ainsi :

$$\frac{\hat{D}}{D_s} - 1 = \frac{\frac{I}{I_s}}{1 + \left(\frac{\omega_L - \omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2}$$

Alors :

$$\frac{I}{I_s} = \left(1 + \left(\frac{\omega_L - \omega_a}{\gamma_\perp}\right)^2\right) \frac{\hat{D} - D_s}{D_s} \quad (1.50)$$

D_s : est le seuil d'oscillation laser qu'il prend une valeur plus élevée si on s'éloigne de la condition de résonance $\omega_L = \omega_a$.

1.6 *Description des équations du bilan par les équations de Maxwell-Bloch :*

Pour déduire les équations du bilan à partir des équations de Maxwell-Bloch, nous supposons que $\omega_c = \omega_a$ (la fréquence de la cavité est identique à la fréquence atomique) et que les relaxations de la polarisation γ_\perp soient très supérieure à la relaxation du champ k_c et de l'inversion de population $\gamma_{//}$: $\gamma_\perp \gg k_c, \gamma_{//}$, et on pose aussi :

$$\dot{P} \approx 0 \quad (1.51)$$

De (1.30) on tire la polarisation qui est donnée par :

$$P_0 \approx -i \frac{\mu^2}{\hbar \gamma_\perp} D E_0 \quad (1.52)$$

Puisque : $\omega_a = \omega_c$.

Remplaçant ce résultat dans les équations de Maxwell-Bloch, on obtient :

$$\dot{E}_0 = \frac{\omega_c \mu^2}{2 \varepsilon_0 \hbar \gamma_\perp} D E_0 - k_c E_0 \quad (1.52a)$$

$$\dot{D} = -\frac{\mu^2}{\hbar^2 \gamma_\perp} D |E_0|^2 - \gamma_{//}(D - \hat{D}) \quad (1.52b)$$

L'intensité : $I = |E_0|^2$ est obtenue sous la forme : $I = E_0^2 \implies \dot{I} = 2\dot{E}_0 E_0$, et de (1.52a) :

$$\dot{I} = 2 \left(\frac{\omega_c \mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar \gamma_\perp} D |E_0|^2 - k_c |E_0|^2 \right) = \frac{\omega_c \mu^2}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_\perp} DI - kI \quad (1.53)$$

Où $k = 2k_c$: est le taux de relaxation de l'intensité.

1.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a déterminé les équations de Maxwell-Bloch qui forment un système d'équations couplant de manière non linéaire les variables essentielles pour la description du laser qui sont : le champs laser, l'inversion de population et la polarisation.

La validité de cette description repose sur un certain nombre d'hypothèses, notamment : la transition est de type dipolaire électrique, les fréquences atomiques et du mode cavité restent proches et aussi l'enveloppe est lentement variable spatialement et temporellement.

La description semi-classique ne permet donc pas de donner une description satisfaisante des lasers.

Chapitre 2

Description du champ électromagnétique et de sa quantification :

2.1 Introduction :

Le champ électromagnétique est constitué par deux champs de vecteurs : Le champ électrique E et le champ magnétique B . Nous allons, dans ce chapitre, rappeler quelques notions de la théorie électromagnétique avant de passer à la quantification du champ électromagnétique. Ce chapitre est ainsi divisé comme :

- Le premier paragraphe est consacré à la description du champ électromagnétique, nous débuterons par quelques rappels sur la théorie électromagnétique [20], où nous déterminons la densité d'énergie dans le cas de l'espace non libre, puis dans le cas de l'espace libre et terminons par les équations de potentiels en jauge de coulomb.

- Dans le deuxième paragraphe, nous allons montrer comment le champ dans l'espace libre peut être décomposé en oscillateurs ou modes propres [20]. Nous allons dénombrer ces modes et montrer l'application de ce concept au traitement statistique classique du rayonnement du corps noir [21] qui impose la quantification du champ. Nous allons

montrer qu'elle répond également à une nécessité théorique.

· Le troisième paragraphe est consacré à la quantification du champ électromagnétique. On va commencer par la description de la procédure de quantification et obtenir les expressions des opérateurs associés à l'énergie et aux champs. Nous allons étudier ensuite quelques états quantiques du champ électromagnétique, dont les états dits "cohérents".

· Enfin nous donnerons dans le cinquième paragraphe, une description quantique du rayonnement du corps noir et conclurons ce paragraphe par quelques considérations sur les "photons".

2.2 *Rappels sur la théorie électromagnétique :*

2.2.1 *Détermination de la densité d'énergie électromagnétique dans l'espace non libre :*

Le champ électromagnétique est évolué dans le temps et dans l'espace par les équations de Maxwell données par [11] :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} \right\} \quad (2.1d)$$

Où ρ et \vec{j} sont respectivement, les densités de charge et du courant électrique.

Le champ électrique possède une densité d'énergie obtenue à partir des équations (2.1c) et (2.1d) de Maxwell, nous multiplions la première par $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ et la seconde par $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{B}}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \frac{\vec{E}}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \frac{\vec{E}}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} \right\}\end{aligned}$$

Retranchant membre à membre les expressions ainsi obtenues qui sont homogènes entre elles :

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

Utilisant [15] : $x \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (x^2)$ et de façon générale : $\vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$.

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0 \quad (*)$$

La conservation de l'énergie se traduit par la relation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

On tire :

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \text{ est la densité d'énergie électromagnétique.} \quad (2.2)$$

$$\vec{S} = \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \text{ est le vecteur de Poynting.} \quad (2.3)$$

La densité d'impulsion du champ électromagnétique donnée par [24] :

$$\frac{\vec{S}}{c^2} = \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \quad (2.4)$$

2.2.2 Détermination de la densité d'énergie électromagnétique dans l'espace libre :

Dans le cas de l'espace libre (le vide) : $\rho = \vec{j} = 0$. L'élimination de \vec{B} entre les deux équations (2.1c) et (2.1d) et l'utilisation de la relation obtenue par [24] :

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ conduit à l'équation d'onde :

$$-\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ainsi :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) admet pour solution des ondes planes monochromatiques de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (2.6)$$

Où \vec{k} et ω sont réels et \vec{E}_0 est un vecteur complexe indépendant de \vec{r} et de t .

De l'équation (1.a) : Nous déduisons : $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$, c'est à dire que le champ électrique est transverse.

Posant $\vec{E}_0 e^{-i\psi} = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2$; où \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont réels.

L'équation (2.6) devient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ (\vec{E}_1 + i\vec{E}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (2.7)$$

Prenons un système de coordonnées orthogonales telles que (x, y, z) associés respectivement aux \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et \vec{k} , on obtient :

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_1 \cos(\omega t - k z - \psi) \\ E_y(z, t) &= E_2 \cos(\omega t - k z - \psi) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que l'extrémité de \vec{E} en un point donné décrit une ellipse d'axe ox , oy , on peut dire ainsi que (2.7) représente une polarisation elleptique.

De l'équation (2.1c) nous déduisons :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E}_0 = -i \omega \vec{B}_0$$

Où $\frac{\partial}{\partial t} = i \omega$ et $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$.

On trouve donc :

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (2.8)$$

Qui détermine \vec{B} lorsque l'on connaît \vec{E}_0 . Et si on remplace k par $\frac{\omega}{c}$ dans (2.8), on obtient :

$$|\vec{B}_0| = \frac{1}{c} |\vec{E}_0|.$$

La densité d'énergie associé à (2.7) est :

$$W = \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 = \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2) \quad (2.9)$$

Le vecteur de Poynting (2.3) devient :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \wedge \frac{1}{c} \vec{E}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \hat{k} = c W \hat{k} \quad (2.10)$$

Où \hat{k} est le vecteur unitaire suivant \vec{k} , et : $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

La densité d'impulsion étant :

$$\frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{W^2}{c} \hat{k} \quad (2.11)$$

2.2.3 Equations de potentiels en jauge de Coulomb :

Les champs peuvent être écrits en terme du potentiel vecteur A et un potentiel scalaire ϕ donnés par [20] :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (2.12)$$

Posant (2.12) dans (2.1c), on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \phi$$

Ainsi :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad (2.13)$$

On peut transformer les potentiels A et ϕ aux :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} u \quad (2.14)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.15)$$

u étant une fonction quelconque de la position r et du temps t .

Cette transformation est appelée *transformation de Jauge* [25]. Le choix de la fonction

u permet d'imposer une condition aux potentiels qui est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

Qui définit une classe de jauges appelées *jauges de Lorentz* [25].

Et comme nous sommes dans le cas de l'espace libre et en absence des charges, supposons que : $\phi = 0$, (2.16) se réduit alors à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.17)$$

Qui définit la classe des *jauges de Coulomb* [26].

2.2.4 Représentation du champ par un ensemble d'oscillateurs harmoniques :

Nous allons ici considérer que le champ dans un volume v de l'espace libre et montrer qu'on peut le représenter par un ensemble d'oscillateurs harmoniques. Pour cela nous allons, tout d'abord, étudier la décomposition du potentiel vecteur et des champs.

Décomposition du potentiel vecteur et des champs :

Supposons qu'on a un rectangle, de côtés L_x, L_y, L_z . Dans ce volume nous pouvons décomposer A_x, A_y, A_z en série triple de Fourier [20]. Ainsi :

$$A_x = \sum_{k_x, k_y, k_z} A_x(k_x, k_y, k_z) t e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (2.18)$$

Avec :

$$k_x = 2\pi \frac{n_x}{L_x}, k_y = 2\pi \frac{n_y}{L_y}, k_z = 2\pi \frac{n_z}{L_z} \quad (2.19)$$

n_x, n_y, n_z sont des entiers positifs ou négatifs. $\vec{A}(r, t)$ est ainsi comme un produit de la partie spatiale et temporelle :

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_k(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.20)$$

Où :

$$\vec{A}_k(t) = \frac{1}{v} \int_v d^3 \vec{r} \vec{A}(\vec{r}, t) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.21)$$

Notons que les \vec{A}_k vont satisfaire quelques conditions [20]. Ainsi, \vec{A} étant réel :

$$\vec{A}_{-k} = \vec{A}_k^* \quad (2.22)$$

De plus \vec{A} est transverse, c'est-à-dire : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. On aura donc :

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.23)$$

Donc \vec{A} satisfait une équation d'ondes :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.24)$$

Posant (2.20) dans (2.24), on obtient :

$$(i\vec{k})^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{A}_k}{dt^2} + \omega_k^2 \vec{A}_k = \vec{0} \quad (2.25)$$

La fréquence ω_k et le vecteur d'onde \vec{k} sont reliés comme : $\omega_k = c \left| \vec{k} \right|$; c'est la relation de dispersion.

Cette équation détermine la variation temporelle des \vec{A}_k . Ainsi on trouve :

$$\vec{A}_k = \vec{\lambda}_k e^{-i \omega_k t} + \vec{\mu}_k e^{+i \omega_k t}$$

Nous pouvons regrouper ces termes dans (2.20) pour obtenir :

$$\vec{A} = \sum_k \vec{\varepsilon}_k u_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{\varepsilon}_k^* u_k^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.26)$$

Où les u_k sont des fonctions du temps proportionnelles à $e^{+i\omega_k t}$ et les $\vec{\varepsilon}_k$ des vecteurs unitaires tels que $\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{k} = 0$. Le choix de $\vec{\varepsilon}_k$, est fait en supposant que le vecteur \vec{k} est associé à deux vecteurs orthogonaux $\vec{\varepsilon}_{k_1}$ et $\vec{\varepsilon}_{k_2}$ et que deux coefficients u_{k_1} et u_{k_2} sont associés à ces vecteurs [20], c'est ce que nous adoptons ici, pour ne pas compliquer l'écriture, on ne fait pas apparaître les termes associés aux vecteurs \vec{k} .

Dans l'expression (2.26), \vec{A} est apparu comme un projeté sur un ensemble d'ondes planes monochromatiques, de vecteurs d'onde \vec{k} , de fréquence ω_k et de polarisation $\vec{\varepsilon}_k$ c'est ce que l'on appelle *modes propres du champ* [20]. À partir de cette expression, on peut écrire :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \sum_k \vec{\varepsilon}_k \omega_k \left(u_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - u_k^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.27)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i \sum_k \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(u_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - u_k^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.28)$$

La connaissance, d'une part des modes propres constituant la base de notre décomposition, d'autre part des coefficients u_k détermine complètement le potentiel \vec{A} et les champs \vec{E} et \vec{B} dans le volume v .

L'expression de l'énergie électromagnétique à l'aide des u_k :

Nous obtenons cette énergie à partir de l'expression (2.2) de la densité d'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \int_v d^3\vec{r} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (2.29)$$

De (2.27) :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_{k,k'} \omega_k \omega_{k'} \left(\vec{\varepsilon}_k u_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{\varepsilon}_k^* u_k^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \left(\vec{\varepsilon}_{k'} u_{k'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} - \vec{\varepsilon}_{k'}^* u_{k'}^* e^{+i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.30)$$

Les valeurs de \vec{k} permises par les relations (2.19) sont telles que :

$$\int_v d^3\vec{r} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} = v \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.31)$$

L'intégration de (2.30) en tenant compte de (2.31) nous donne pour la partie électrique de l'énergie :

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} E^2 = \frac{v}{2}\varepsilon_0 \sum_k \omega_k^2 \{ 2u_k u_k^* - (\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_{-k})(u_k u_{-k} + u_k^* u_{-k}^*) \} \quad (2.32)$$

De même :

$$\frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r} B^2 = \frac{v}{2\mu_0} \sum_k \left\{ \begin{array}{l} 2 \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) u_k u_k^* + \\ \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{-k} \right) \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{-k} \right) (u_k u_{-k} + u_k^* u_{-k}^*) \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

Si on tient compte de : $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_k = 0$ qui entraîne : $\left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \cdot \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{-k} \right) = k^2 (\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_{-k})$, et de la relation $c^2 k^2 = \omega_k^2$, on obtient :

$$W = 2\varepsilon_0 v \sum_k \omega_k^2 u_k u_k^* \quad (2.34)$$

On voit que les termes en $u_k u_{-k}$ disparaissent de cette expression.

Pour préparer la quantification du champ que nous traiterons au prochain paragraphe ; nous allons réécrire cette expression, en substituant aux $u_k, \vec{\varepsilon}_k$ deux nouveaux vecteurs réels [20] définis de la façon suivante :

$$\vec{Q}_k = \sqrt{\varepsilon_0 v} (u_k \vec{\varepsilon}_k + u_k^* \vec{\varepsilon}_k^*) \quad \text{où : } \vec{\varepsilon}_k = e^{i \omega_k t} \quad (2.35)$$

$$\vec{P}_k = \frac{d}{dt} \vec{Q}_k = -i \omega_k \sqrt{\varepsilon_0 v} (u_k \vec{\varepsilon}_k - u_k^* \vec{\varepsilon}_k^*), \quad \text{où : } \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} = i \omega_k \vec{\varepsilon}_k \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\varepsilon}_k^*}{dt} = -i \omega_k \vec{\varepsilon}_k^* \quad (2.36)$$

L'expression de W devient :

$$W = \sum_k \frac{1}{2} \left(\vec{P}_k^2 + \omega_k^2 \vec{Q}_k^2 \right) \quad (2.37)$$

On remarque qu'il existe une analogie entre les termes de (2.37) et l'énergie d'un oscillateur harmonique de position \vec{Q}_k et d'impulsion \vec{P}_k . L'énergie est apparue comme la somme des énergies associées aux modes propres correspondant à chacune des valeurs propres de k . Cette situation est complètement analogue à celle de la représentation d'un système mécanique par ses coordonnées normales [20].

Dénombrement des modes propres :

Le dénombrement des modes nécessaires pour représenter un champ électromagnétique donné, nous incite à définir un intervalle de fréquence $\nu, \nu + d\nu$. Les modes associés à sa représentation ont des vecteurs d'ondes de modules compris entre k et $k + dk$ où $k = \frac{2\pi\nu}{c}$.

Pour dénombrer ces modes, on considère un réseau rectangulaire dont la maille élémentaire est un parallélépipède de côtés $\frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_y}$ et $\frac{2\pi}{L_z}$, respectivement suivant k_x, k_y et k_z . Le problème se ramène à déterminer le nombre de noeuds de ce réseau contenus dans le volume délimité par les sphères de rayon k et $k + dk$. Ce nombre est ainsi donné par [20] :

$$N(\nu, \nu + d\nu) = 2 * \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} * 4\pi k^2 dk = 2 \frac{v}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = v * 8\pi * \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (2.38)$$

Où $v = \frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \frac{2\pi}{L_z}$ représente le volume de la maille élémentaire, $4\pi k^2 dk$ représente le volume de la couronne sphérique. Le tout multiplié par 2 pour tenir compte des polarisations attachées à chaque vecteur \vec{k} .

On remarque que N est proportionnel au volume v . On peut aussi le réécrire considérant qu'un champ représenté par des modes dont les vecteurs \vec{k} soient contenus dans un volume v_k :

$$N(\vec{k} \in v_k) = 2 * \frac{v}{(2\pi)^3} * \int_{\vec{k} \in v_k} d^3\vec{k} \quad (2.39)$$

Le nombre des modes ayant une pulsation ω comprise entre ω et $\omega + d\omega$ et un vecteur d'onde contenu dans l'angle solide $d\Omega$ est :

$$N(d\omega, d\Omega) = v \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d\Omega \quad (2.40)$$

On peut s'appliquer les mêmes résultats à un champ contenu dans une cavité de forme quelconque dont le volume $v \gg \lambda^3$.

Pour conclure ce paragraphe, on va appliquer ces résultats au calcul classique de l'énergie du rayonnement du corps noir, considérant comme précédemment que le champ est un ensemble d'oscillateurs harmoniques, chacun d'eux est attribué à une énergie kT , donc l'énergie par unité de volume et par intervalle spectral $d\nu$ est donnée par [21] :

$$W(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 kT}{c^3} d\nu \quad (2.41)$$

Ce qui nous donne pour la densité d'énergie par intervalle de longueur d'onde $d\lambda$:

$$p(\lambda)d\lambda = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4} d\lambda \quad (2.42)$$

La relation (2.41) porte le nom de la formule de Rayleigh-Jeans détaillée dans [27, 28]. Elle est en désaccord profond avec l'expérience comme le montre la figure (2.1) [28]. Nous avons ici un premier exemple de l'insuffisance du traitement classique du champ

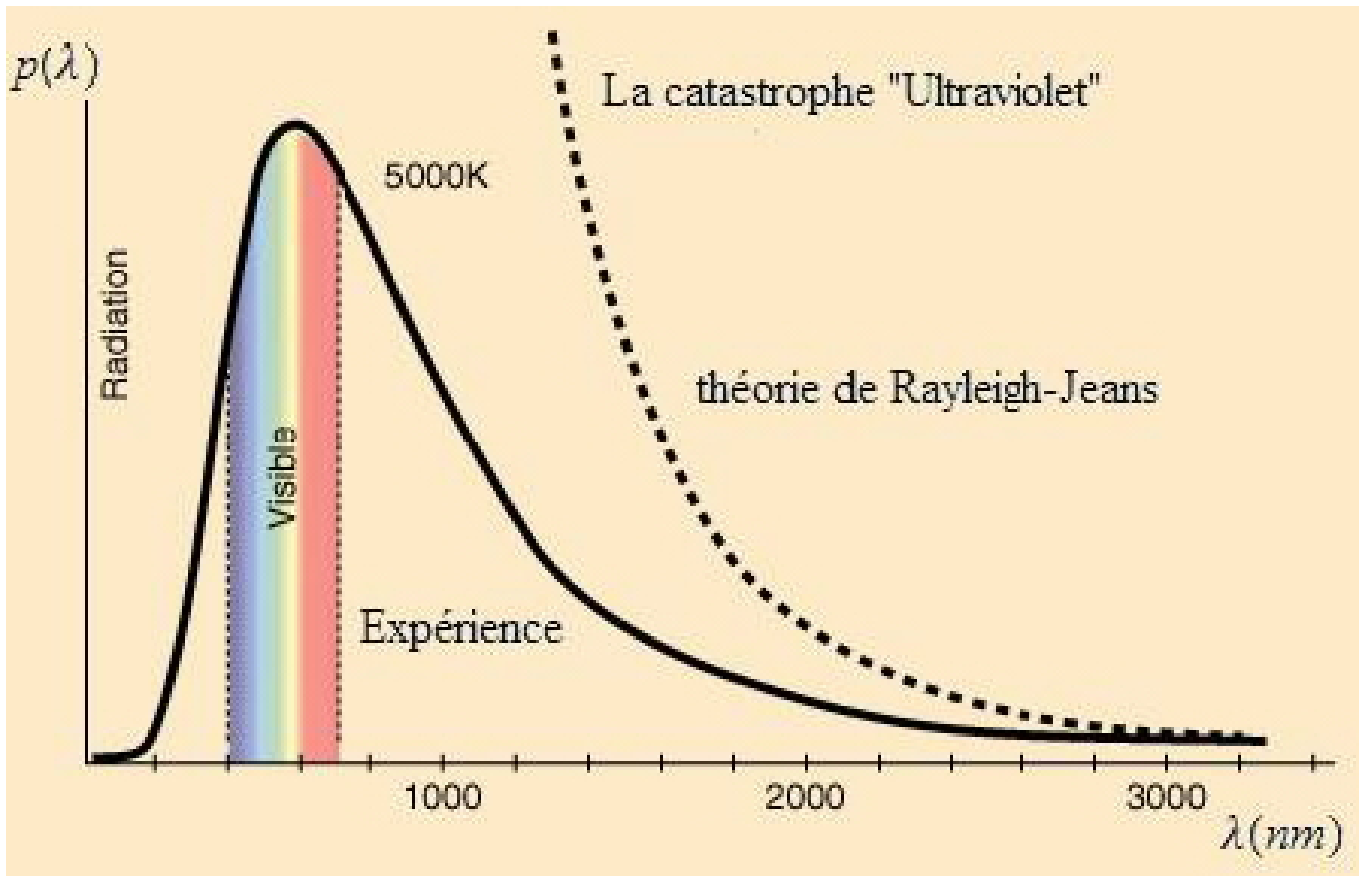


FIG. 2-1 – Le désaccord entre la théorie classique et l’expérience du rayonnement du corps noir.

électromagnétique ce qui nous conduira à la quantification.

Interprétation de la courbe de la figure (2. 1) :

Cette figure représente la comparaison entre la théorie de Rayleigh-Djeans et l’expérience, l’expression (2.42) montre que λ est inversement proportionnelle à $p(\lambda)$, mais on note sur sa courbe qu’aux basses fréquences (grand λ), ses prédictions sont sans rapport avec l’expérience aux fréquences élevées. On dit qu’il ya un désaccord profond entre la théorie et l’expérience et la théorie classique est alors incapable de traiter correctement les modes de fréquences les plus élevées et conduit à une expression de la densité d’énergie du rayonnement qui diverge comme : $\int_0^\infty W(\nu) d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu$.

2.3 Description de la quantification du champ électromagnétique :

Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent, un exemple de l'insuffisance de la description classique du champ électromagnétique, celà, nous conduit à la quantification du champ électromagnétique que nous allons décrire dans ce paragraphe.

Classiquement le hamiltonien H est égal à l'énergie électromagnétique donnée par la relation (2.37) :

$$H = \sum_k H_k = \sum_k \frac{1}{2} \left(\vec{P}_k^2 + \omega_k^2 \vec{Q}_k^2 \right) \quad (2.43)$$

Les variables \vec{P}_k et \vec{Q}_k sont conjuguées [20], en effet :

$$\frac{\partial H}{\partial P_{k,i}} = P_k = \frac{dQ_{k,i}}{dt} \text{ et } \frac{\partial H}{\partial Q_{k,i}} = \omega_k^2 Q_{k,i} = -\frac{dP_{k,i}}{dt}$$

Nous associons à Q_k et P_k des opérateurs \hat{Q}_k et \hat{P}_k soumis aux règles de commutations [20] :

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}_k, \hat{Q}_{k'} \right] &= 0 \\ \left[\hat{P}_k, \hat{P}_{k'} \right] &= 0 \\ \left[\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'} \right] &= i\hbar \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'opérateur hamiltonien devient :

$$\hat{H} = \sum_k \hat{H}_k = \sum_k \frac{1}{2} \left(\hat{P}_k^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_k^2 \right) \quad (2.45)$$

apparaît comme une somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants.

Nous définissons les opérateurs création \hat{a}^+ et annihilation \hat{a} par les relations [26] :

$$\hat{a}_k^+ \varepsilon_k^* = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{Q}_k - i \frac{\hat{P}_k}{\omega_k} \right) \quad (2.46)$$

$$\hat{a}_k \varepsilon_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{Q}_k + i \frac{\hat{P}_k}{\omega_k} \right) \quad (2.47)$$

Ils satisfont aux règles de commutation :

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] = 0$$

Les équations (2.46) et (2.47) nous donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_k^+ = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} \left(\hat{P}_k + i\omega_k \hat{Q}_k \right) \\ \hat{a}_k = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} \left(\hat{P}_k - i\omega_k \hat{Q}_k \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_k = \frac{\hat{a}_k^+ - \hat{a}_k}{\sqrt{2}} \\ \hat{P}_k = \frac{\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k}{i\sqrt{2}} \end{array} \right\}$$

A l'aide de ces opérateurs \hat{H} s'exprime sous la forme :

$$\hat{H} = \sum_k \hat{H}_k = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2.48)$$

Posons : $\hat{n}_k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$

Les états propres de l'oscillateur harmonique sont les états $|n_k\rangle$ tels que :

$$\hat{H}_k |n_k\rangle = \hbar\omega_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right) |n_k\rangle \quad (2.49)$$

Où : $n=0,1,2,\dots$

On montre immédiatement que :

$$\hat{a}_k^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.50)$$

$$\hat{a}_k |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.51)$$

\hat{a}_k et \hat{a}_k^+ ne sont pas hermétiques et ne représentent pas des quantités physiques observables. Leur rôle est néanmoins apparu dans la création et la destruction des quantas du champ.

L'espace de \hat{H} est le produit tensoriel des espaces des \hat{H}_k et \hat{H} a pour états propres les états $|n\rangle$:

$$|n\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \dots \otimes |n_k\rangle \otimes \dots \quad (2.52)$$

que nous noterons $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$ ou plus simplement encore $\{|n_k\rangle\}$ qui correspond à l'énergie :

$$E_n = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

L'action des \hat{a}_k, \hat{a}_k^+ devient dans le nouvel espace :

$$\hat{a}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle \quad (2.53)$$

$$\hat{a}_k^+ |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle \quad (2.54)$$

La description quantique des champs découle de ce qui précède. Nous avons donc :

De (2.47) :

$$\hat{a}_k \vec{\varepsilon}_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{Q}_k + i \frac{\hat{P}_k}{\omega_k} \right) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} [\sqrt{\varepsilon_0 v} (u_k \vec{\varepsilon}_k + u_k^* \vec{\varepsilon}_k^*) + \sqrt{\varepsilon_0 v} (u_k \vec{\varepsilon}_k - u_k^* \vec{\varepsilon}_k^*)]$$

$$\hat{a}_k \vec{\varepsilon}_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \sqrt{4\varepsilon_0 v} u_k \vec{\varepsilon}_k.$$

Ainsi :

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{2\omega_k \varepsilon_0 v}{\hbar}} u_k$$

Effectuons cette même opération dans les expressions classiques (2.27) et (2.28), nous obtenons les opérateurs $\vec{\hat{E}}, \vec{\hat{B}}$ représentant les champs :

$$\vec{\hat{E}} = i \sum_k \vec{\varepsilon}_k \omega_k \left(u_k e^{i\vec{k}\vec{r}} - u_k^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)$$

En remplaçant u_k par sa valeur donnée précédemment, on obtient :

$$\vec{\hat{E}} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 v}} \sum_k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k \left(\hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (2.55)$$

De même pour :

$$\vec{\hat{B}} = i \sum_k \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(u_k e^{i\vec{k}\vec{r}} - u_k^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)$$

Ainsi :

$$\vec{\hat{B}} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 v}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(\hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (2.56)$$

À partir des relations (2.55) et (2.56) et des relations d'orthogonalité (2.31), on déduit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_v d^3r \left(\varepsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2 \right) \quad (2.57)$$

On remarque que (2.48) et (2.57) sont identiques :

De (2.55), on a :

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \hat{E}^2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 v} \sum_{k,k'} \omega_k^{\frac{1}{2}} \omega_{k'}^{\frac{1}{2}} \left[\vec{\varepsilon}_k \hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_k^* \hat{a}_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right] \left[\vec{\varepsilon}_{k'} \hat{a}_{k'}^+ e^{-i\vec{k}'\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_{k'}^* \hat{a}_{k'} e^{i\vec{k}'\vec{r}} \right]$$

L'intégration de cette relation en tenant compte de la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_v d^3\vec{r} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} = v \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Nous donne :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_v d^3\vec{r} \hat{E}^2 = \frac{v}{2}\varepsilon_0 \sum_{k,k'} \omega_k^2 [2\hat{a}_k\hat{a}_k^+ - (\vec{\varepsilon}_k\vec{\varepsilon}_{-k}) (\hat{a}_k\hat{a}_{-k} + \hat{a}_k^+\hat{a}_{-k}^+)]$$

De même pour (2.56) :

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_v d^3r \hat{B}^2 = \frac{v}{2\mu_0} \sum_k \left[2 \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \hat{a}_k\hat{a}_k^+ + \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{-k} \right) (\hat{a}_k\hat{a}_{-k} + \hat{a}_k^+\hat{a}_{-k}^+) \right]$$

En tenant compte de : $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_k = 0$, qui entraîne :

$$\left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_k \right) \left(\vec{k} \wedge \vec{\varepsilon}_{-k} \right) = k^2 (\vec{\varepsilon}_k \wedge \vec{\varepsilon}_{-k})$$

Et de la relation : $c^2k^2 = \omega_k^2$, ainsi :

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^+\hat{a}_k + \frac{1}{2} \right)$$

2.3.1 *Etude des états quantiques du champ électromagnétique :*

Nous allons maintenant décrire les états quantiques du champ électromagnétique, notons que dans un état propre de l'énergie $|n\rangle$; les valeurs moyennes des champs \vec{E}, \vec{B} sont nulles [20]. Ceci résulte directement :

$$\langle n_k | \hat{a}_k | n_k \rangle = \langle n_k | \hat{a}_k^+ | n_k \rangle = 0$$

Ceci $\forall n$ et à tout instant t.

Néanmoins $\langle \hat{E}_k^2 \rangle = (n_k + \frac{1}{2}) \frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon_0 v}$ et l'énergie du champ n'est pas nulle, on note ainsi que les états $|n_k\rangle$ n'ont pas d'équivalent classique. On peut évidemment imaginer d'autres

états du champ électromagnétique représentés par des combinaisons linéaires $|n\rangle$. Nous avons indiqué précédemment au §2.3 que a n'est pas hermétique donc les valeurs propres de a sont a priori complexes. Soit α l'une de ces valeurs propres et $|\alpha\rangle$ le vecteur propre d'où :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (*)$$

α est un nombre complexe quelconque $\alpha = |\alpha| e^{i\psi}$

Déterminer le ket $|\alpha\rangle$, c'est trouver son développement sur une base de l'espace des états, par exemple l'ensemble des $|n\rangle$. Introduisant ce développement donné par [21] :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

Dans l'équation des valeurs propres, on a :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.b)$$

De : (*), (2.a) et (2.b) on trouve :

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle, (\alpha c_0 = c_1 \sqrt{1}, \dots, \alpha c_{n-1} = c_n \sqrt{n})$$

Nous en déduisons la récurrence : $c_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) c_{n-1}$; pour $n > 0$, qui se résout explicitement en :

$$c_n = \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right) c_0. \text{ Puisqu'on a : } (\alpha^n c_0 c_1 c_2 \dots c_{n-1} = c_1 c_2 c_3 \dots c_n \sqrt{n!})$$

Les kets propres de \hat{a} sont donc de la forme :

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Pour trouver c_0 , on doit normaliser $|\alpha\rangle$ pour avoir :

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \langle n|n\rangle = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}, \text{ puisque : } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ici posons : $x = |\alpha|^2$, donc : $c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$. Nous obtenons ainsi l'expression :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.58)$$

Ces états quantiques de l'opérateur d'annihilation sont appelés *états cohérents*.

Propriétés des états cohérents :

***Propriétés algébriques :** Parmi les propriétés des états cohérents [21, 29] : Le produit scalaire de deux états cohérents $\langle\alpha|\beta\rangle$ n'est pas nul :

Posons :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ \langle\beta| &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n| \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_n \sum_l \frac{\alpha^n \beta^{*l}}{\sqrt{n!l!}} \langle l|n\rangle$$

Si : $n=l$:

$$\sum_n \frac{\alpha^n \beta^{*n}}{\sqrt{n!n!}} = e^{\alpha\beta^*} \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle = e^{\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*\right]} \neq 0$$

Et si : $\alpha = \beta$:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = e^{\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\alpha|^2) + |\alpha|^2\right]} = 1$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux mais normalisés à 1.

L'action de l'opérateur \hat{a} sur $|\alpha\rangle$ s'exprime simplement :

$$\begin{aligned} \hat{a} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (2.59)$$

De même :

$$\langle \alpha | \hat{a}^+ = \langle \alpha | \alpha^* \quad (2.60)$$

La valeur de n dans un état $|\alpha\rangle$ n'est pas définie de façon précise :

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

Il nous reste donc d'aller voir si le champ électrique est bien déterminé autour de sa valeur moyenne; et pour cela à calculer l'écart quadratique (la variation du nombre de photons) [21] :

$$(\Delta n)_\alpha^2 = \langle \alpha | (n - \langle \alpha | n | \alpha \rangle)^2 | \alpha \rangle = \langle n^2 \rangle_\alpha - \langle n \rangle_\alpha^2 \quad (2.61)$$

Où :

$$\langle n^2 \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ (1 + \hat{a}^+ \hat{a}) \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

Ainsi :

$$(\Delta n)_\alpha^2 = |\alpha|^2, \text{ et la dispersion : } (\Delta n)_\alpha = |\alpha|$$

La dispersion du nombre de photons relative à sa valeur moyenne [21, 23] :

$$\frac{(\Delta n)_\alpha}{\langle n \rangle_\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle_\alpha}} \quad (2.62)$$

Tend vers 0 lorsque le paramètre $\alpha \rightarrow \infty$ de l'état cohérent ($\langle n \rangle_\alpha \rightarrow \infty$).

***Propriétés physiques :** Considérons maintenant la valeur moyenne de \vec{E} . A l'instant t l'état du système est représenté par le vecteur : $|\alpha(t)\rangle$:

L'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = \hat{H} |\alpha(t)\rangle$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\alpha\rangle \\ |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} [\hbar\omega(n+\frac{1}{2})] t} * e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ |\alpha(t)\rangle &= e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} * e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned}$$

La moyenne de \vec{E} dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ est donnée par [21] :

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\vec{E}|\alpha\rangle &= i\vec{\varepsilon}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}}\left(\frac{\alpha e^{i(kr-\omega t)}-\alpha^* e^{-i(kr-\omega t)}}{2i}\right)\langle\alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle &= -2\vec{\varepsilon}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}}|\alpha|\sin(kr-\omega t+\psi)\end{aligned}\quad (2.63)$$

De même :

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle &= \langle\alpha|4\varepsilon^2\left(\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}}|\alpha|\sin(kr-\omega t+\psi)\right)^2|\alpha\rangle \\ &= 4\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}\right)|\alpha|^2\sin^2(kr-\omega t+\psi)\langle\alpha|\alpha\rangle+\langle\alpha|\varepsilon^2|\alpha\rangle \\ &= 4\left[\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}\right)|\alpha|^2\sin^2(kr-\omega t+\psi)\right]+\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}\end{aligned}$$

$$\langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle=\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}\{1+4|\alpha|^2\sin^2(kr-\omega t+\psi)\}$$

Et l'écart quadratique [21] :

$$(\Delta E)^2=\langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle-\left(\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle\right)^2=\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}\quad (2.64)$$

est indépendant de α . On voit que si $|\alpha|\rightarrow\infty$, l'incertitude dans la mesure de \vec{E} décroît comme $\frac{1}{|\alpha|}$. Le champ devient de mieux défini lorsque l'amplitude de sa valeur moyenne croît par rapport à $\Delta E=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}}$.

A la limite $|\alpha|\rightarrow\infty$, on retrouve la situation classique dans laquelle, amplitude et phase sont simultanément déterminées [21]. Notons que $\Delta E=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0v}}=\left(\langle 0|\hat{E}^2|0\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$, peut être considéré comme la fluctuation de champ électrique associé à un mode donné dans l'état du vide $|0\rangle$.

2.3.2 Description quantique du rayonnement du corps noir :

Nous avons précédemment considéré des états purs du champ électromagnétique représentés par un ket $|n\rangle$ ou $|\alpha\rangle$. De même il faut décrire des situations où l'état du champ électromagnétique est indéterminé et où l'on connaît seulement la probabilité pour qu'il soit dans tel ou tel état. Pour décrire cet état, on utilise l'opérateur densité qui est donné par [21, 30] :

$$\hat{D} = \sum_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle q_{\lambda} \langle\psi_{\lambda}|$$

Où q_{λ} est la probabilité pour que le système soit représenté par le vecteur $|\psi_{\lambda}\rangle$.

Considérons un mode j du champ électromagnétique en équilibre thermique à la température T . Pour un tel état [21] :

$$D_j = \frac{1}{Z_j} \exp \left\{ -\frac{H_j}{KT} \right\}$$

Où :

$$\hat{H}_j = \hbar\omega_j \left(a_j^+ a_j + \frac{1}{2} \right)$$

Et :

$$Z_j = Tr \exp \left\{ -\frac{H_j}{KT} \right\}$$

Dans la base $|n\rangle$ des états propres de l'énergie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\hat{D}_j &= \sum_n |n\rangle \langle n| \hat{D}_j |n\rangle \langle n| \\
\hat{D}_j &= \sum_n |n\rangle \left(\frac{1}{Z_j} \right) \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega_j}{KT} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \langle n| \\
\hat{D}_j &= \sum_n |n\rangle \left(\frac{1}{Tr \exp \left\{ -\frac{H_j}{KT} \right\}} \right) \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega_j}{KT} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \langle n|
\end{aligned}$$

Utilisant d'après [15] :

$$\sum x^m = (1 - x)^{-1}, \text{ d'où : } x = \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega_j}{KT} \right\}$$

Soit :

$$\hat{D}_j = \sum_n |n\rangle \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega_j}{KT} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{n\hbar\omega_j}{KT} \right\} \langle n| \quad (2.65)$$

Les divers modes du champ constituent un ensemble de systèmes indépendants représenté par l'opérateur densité :

$$\hat{D} = \hat{D}_1 \otimes \hat{D}_2 \otimes \dots \otimes \hat{D}_j \otimes \dots$$

L'énergie moyenne d'un tel ensemble est :

$$\begin{aligned}
W &= Tr \left(\hat{D} \hat{H} \right) = \sum_j Tr \hat{D}_j \hat{H}_j = \sum_j \sum_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_j \exp \left\{ -\frac{n\hbar\omega_j}{KT} \right\} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\hbar\omega_j}{KT} \right\} \right) \\
W &= \sum_j \hbar\omega_j \left\{ \frac{1}{\left(\exp \left\{ \frac{\hbar\omega_j}{KT} \right\} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \right\} \quad (2.66)
\end{aligned}$$

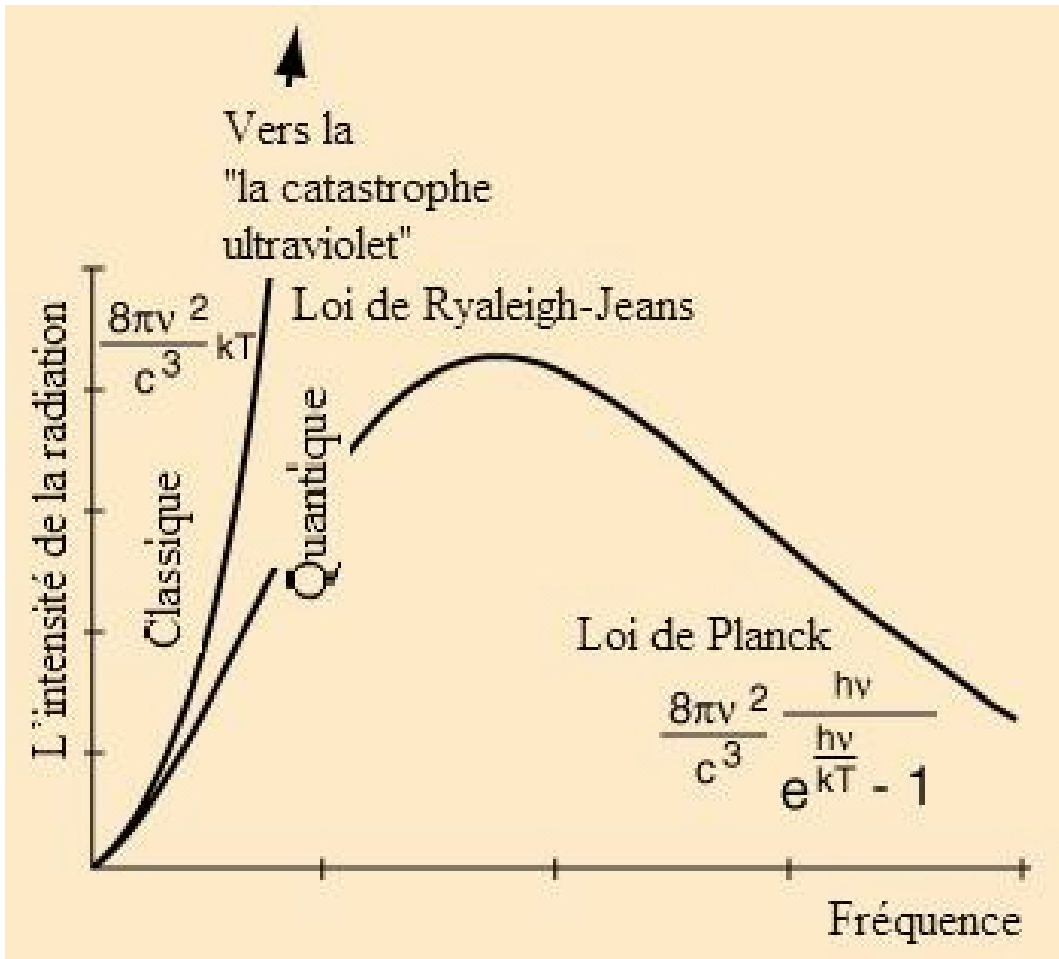


FIG. 2-2 – L'accord parfait entre la théorie quantique et l'expérience du rayonnement du corps noir.

Où la somme j porte sur tous les modes de champ électromagnétique contenus dans le volume v .

Si on néglige le terme qui correspond aux fluctuations de vide $\frac{\hbar\omega_j}{2}$, on obtient pour la densité d'énergie du rayonnement thermique par unité de volume, et par unité de fréquence :

$$W_j = \sum_j \hbar\omega_j \left\{ \frac{1}{\left(\exp\left\{\frac{\hbar\omega_j}{kT}\right\} - 1\right)} \right\}.$$

Et d'autre part, on a : $p(\nu) = 2 * W * \frac{dN}{d\nu}$, où N est la densité de modes, égale à :

$\frac{4\pi(\frac{\nu}{c})^3}{3}$, dans ce cas : $\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}$ Ainsi :

$$p(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (\exp\{\frac{h\nu}{KT}\} - 1)} \quad (2.67)$$

Qui est l'expression due à Planck de la densité d'énergie du corps noir [31].

Soit encore pour la densité d'énergie par unité de longueur d'onde :

$$p(\lambda) d\lambda = p(\nu) d\nu, \text{ où : } \nu = \frac{c}{\lambda} \implies d\nu = \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right| d\lambda \text{ et : } p(\lambda) = p(\nu) \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right|$$

Ainsi :

$$p(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (\exp\{\frac{hc}{\lambda KT}\} - 1)} \quad (2.68)$$

Interprétation de la courbe de la figure (2. 2) :

La figure (2.2) [31] représente les résultats expérimentaux et le graphe de l'expression (2.68) qui est la densité d'énergie du corps noir. La longueur d'onde λ est inversement proportionnelle à la densité d'énergie $p(\lambda)$, on dit qu'il ya un accord parfait entre la théorie et l'expérience ce qui fournit une confirmation essentielle de la théorie quantique du champ électromagnétique.

2.3.3 Considérations sur les photons :

Nous avons montré précédemment que le champ électromagnétique pouvait se décomposer en un ensemble d'oscillateurs harmoniques : les modes propres dont l'énergie est quantifiée. On appelle photon le quantum d'énergie d'un tel mode propre. Ainsi on dira que dans l'état $|n_k\rangle$ le mode k possède n_k photons. D'après ce qui précède, on note que la description du champ en terme de photons exclut toute information sur la phase du champ. Il est parfois commode de traiter les photons comme des corpuscules et de faire ainsi apparaître une dualité onde-corpuscule [14] pour le champ électromagnétique

comme pour la matière. Considérons comme précédemment un volume v et les modes propres sont des ondes planes monochromatiques de vecteur d'onde \vec{k} et de fréquence $\nu_k = \frac{|\vec{k}|c}{2\pi}$.

L'énergie W_k d'un tel mode est quantifiée :

$$W_k = h\nu_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

De même pour l'impulsion :

$$\begin{aligned} \vec{S}_k &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{W_k}{c} \\ &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{h\nu_k}{c} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{h|\vec{k}|c}{2\pi c} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\vec{S}_k = \hbar \vec{k} \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

Ainsi les photons du mode \vec{k} possèdent l'énergie :

$$E = h\nu_k \tag{2.69}$$

Et l'impulsion :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \tag{2.70}$$

Ces quantités satisfont à la relation : $\vec{E} = h \frac{|\vec{k}|c}{2\pi} = \hbar c |\vec{k}| = c |\vec{p}|$ [25] ; qui implique que la masse au repos du photon, considérée comme un corpuscule, soit nulle.

On voit que ces photons apparaissent comme les quantas des oscillations du champ, ils doivent ainsi obéir à la statistique de Bose-Einstein [21], chaque mode du champ électromagnétique constitue une cellule dans l'espace de phase. Il lui correspond donc un volume de cet espace donné par [21] :

$$V * (\Delta p_X) * (\Delta p_Y) * (\Delta p_Z) = V (\Delta k_X \Delta k_Y \Delta k_Z) * \hbar^3 = h^3$$

On peut accumuler dans cette cellule de l'espace de phase autant de photons qu'on le désire. Ces propriétés sont bien celles des bosons.

Montrons finalement que les photons considérés comme corpuscules satisfont les relations d'incertitude d'Heisenberg. Cela, nous conduit à localiser transversalement le photon au moyen d'une fente de largeur Δx , voir la figure (2.3) [22].

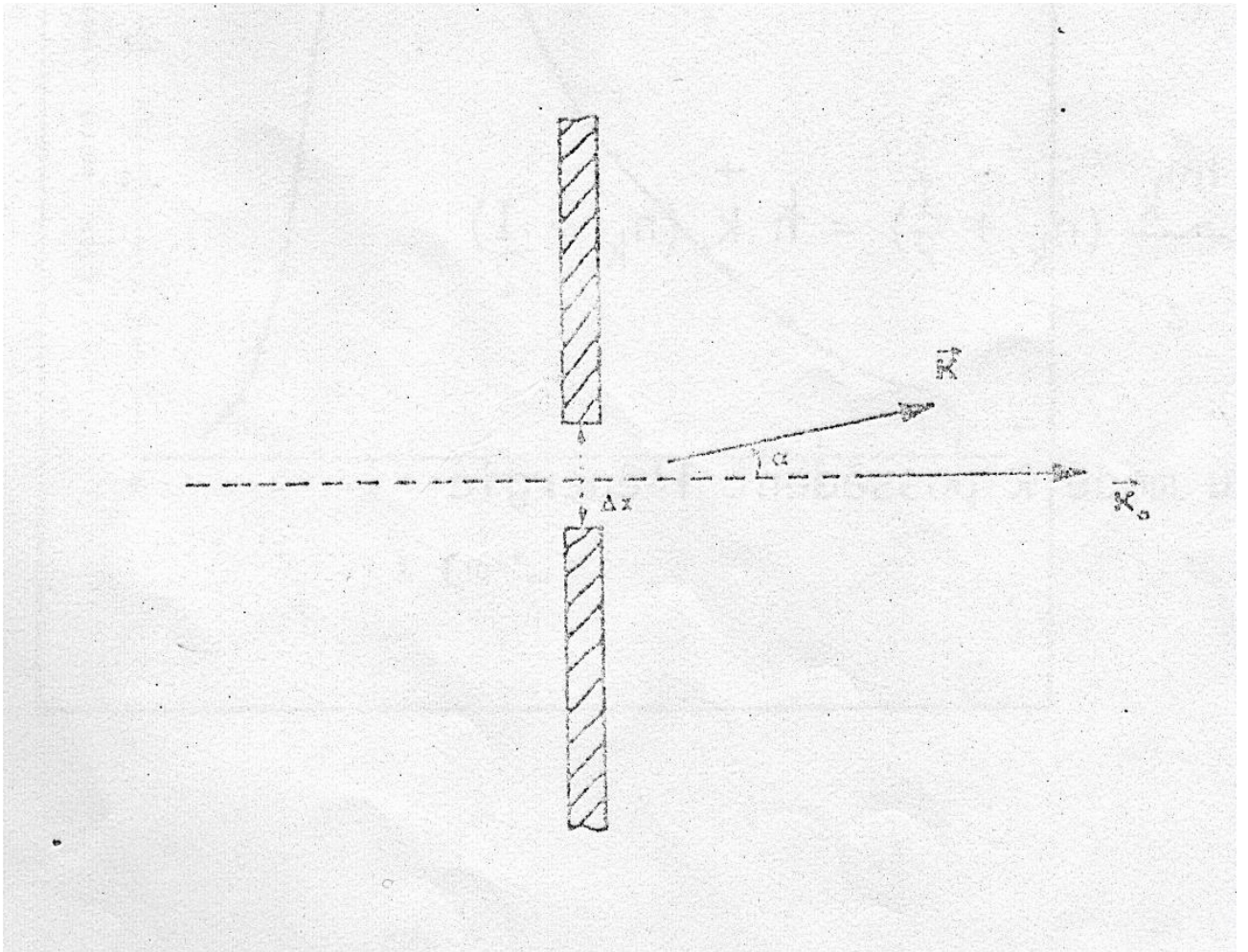


FIG. 2-3 – Localisation transversale du photon au moyen d'une fente de largeur Δx .

Le mode correspondant sera déformé par la diffraction. Il se présentera comme une

superposition d'ondes planes dont les vecteurs d'ondes font un angle α avec la direction \vec{k}_0 . La largeur à mi-intensité de cette distribution d'après la théorie de la diffraction est donnée par [31] :

$$\theta = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

qui correspond à une incertitude sur la composante transversale de l'impulsion du photon déduite comme :

$$\Delta p_x = \theta p = \theta \left(\frac{h}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\Delta x} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\Delta x}$$

2.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé l'un des faits expérimentaux qui imposent la quantification du champ électromagnétique, nous avons montré qu'elle répond également à une nécessité théorique, puis nous décrivons la procédure de quantification dans laquelle, nous avons étudié des états quantiques dit "états cohérents" et nous avons donné une description quantique du rayonnement du corps noir.

Chapitre 3

Traitement quantique de l'interaction atome-champ :

3.1 *Introduction :*

Nous allons, dans ce chapitre, donner une autre description des échanges d'énergie entre les atomes et le champ. Ce sujet a été déjà abordé dans le premier chapitre de façon semi-classique. Nous adoptons ici, au contraire un point de vue entièrement quantique dans lequel le milieu atomique et le champ seront traités quantiquement. Ce chapitre est ainsi divisé en cinq paragraphes principaux :

- Un mode du champ électromagnétique peut, en interagissant avec un atome, perdre ou gagner des quanta. L'atome, initialement dans un état $|i\rangle$, absorbe ou émet des photons en effectuant des transitions vers des états $|f\rangle$ tels que l'énergie totale du système (atome+champ) soit conservée. Ce sont ces processus d'absorption et d'émission que nous allons étudier dans le premier paragraphe, en rappelant quelques résultats de la théorie des perturbations [22].

- Dans le deuxième paragraphe, nous allons appliquer cette théorie à l'étude des processus élémentaires : émission spontanée, émission stimulée et absorption [22].

- Le troisième paragraphe est consacré à l'étude de l'émission spontanée dans laquelle,

on va trouver sa probabilité de transition.

- De même pour le quatrième paragraphe qui est consacré à l'étude de l'émission stimulée et d'absorption.

- Enfin, nous terminerons ce chapitre par une étude des divers mécanismes qui déterminent le profil spectral d'une transition [23, 31].

3.2 *Rappels sur la théorie des perturbations :*

Nous considérons un champ électromagnétique contenu dans un volume v et décrit, comme nous l'avons précédemment indiqué, par sa décomposition suivant les modes propres $(\hat{\epsilon}_k, \vec{k})$. Son hamiltonien est :

$$\hat{H}_R = \sum_{\vec{k}} h\nu_k \left(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1)$$

Où la notion est celle du chapitre précédent. Nous avons vu que les états propres de \hat{H}_R étaient les états $|\{n_k\}\rangle$ définis par la relation (2.52). Dans tel état, le nombre n_k de quanta de chaque mode est bien défini, ainsi que l'énergie totale du champ :

$$E_{\{n_k\}} = \sum_{\vec{k}} h\nu_k \left\{ n_k + \frac{1}{2} \right\} \quad (3.2)$$

Le système atomique est décrit par un hamiltonien \hat{H}_A , possédant des états propres $|j_a\rangle$ d'énergie E_{j_a} . Le hamiltonien de système total comporte un terme représentant l'interaction du champ avec l'atome H_I . Classiquement, on montre que l'énergie d'un système atomique neutre placé dans un champ $\vec{E}(t)$ est donné par l'expression :

$$W = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

Où \vec{p} est le moment dipolaire du système :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \quad (3.3)$$

Où q_i et \vec{r}_i désignent respectivement la charge et la position des diverses particules. En théorie quantique, nous définirons un opérateur moment dipolaire :

$$\vec{\hat{p}} = \sum_i q_i \vec{\hat{r}}_i \quad (3.3')$$

Et nous postulerons que le hamiltonien représentant l'interaction peut s'écrire, par analogie avec l'expression classique :

$$\hat{H}_I = -\vec{\hat{E}} \cdot \vec{\hat{p}} \quad (3.4)$$

En exprimant le champ à l'aide des opérateurs a et a^+ (L'équation (2.55)) :

$$\hat{H}_I = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 v}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\omega_k} \left(\vec{\hat{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_k \right) (\hat{a}_k - \hat{a}_k^+) = \sum_{\vec{k}} \hat{H}_{I,\vec{k}} \quad (3.5)$$

Le hamiltonien du système total s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_A + \hat{H}_I \quad (3.6)$$

Considérons un système fictif dans lequel il n'y aurait pas d'interaction entre le champ et l'atome. Un tel système est représenté par le hamiltonien :

$$\hat{H}_O = \hat{H}_R + \hat{H}_A \quad (3.7)$$

Ses états propres sont de la forme :

$$|j_a\rangle \otimes |\{n_k\}\rangle$$

Placé à l'instant : $t=0$ dans un de ces états, le système total va évoluer. Sous l'influence de l'interaction représentée par \hat{H}_I , il effectuera des transitions vers les autres états propres de \hat{H}_O . Nous pouvons déterminer les probabilités de ces transitions en utilisant la méthode de perturbations [22]. Ainsi, supposons le système placé dans un état propre $|1\rangle$ d'énergie E_1 et de \hat{H}_O , la probabilité pour qu'il se trouve au bout du temps t dans un autre état propre $|2\rangle$ d'énergie E_2 de \hat{H}_O , est donnée par [21] :

$$p_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle 2 | \hat{H}_I | 1 \rangle \right|^2 \left(\frac{\sin(E_2 - E_1) t / 2\hbar}{(E_2 - E_1) / 2\hbar} \right)^2 \quad (3.8)$$

Nous supposons que $\left| \langle 2 | \hat{H}_I | 1 \rangle \right|^2$, c'est-à-dire l'intensité du champ, est suffisamment faible pour que la condition $p_{1 \rightarrow 2} \ll 1$ soit satisfaisante.

3.3 La probabilité de la désexcitation d'un atome :

Dans la désexcitation du système, c'est-à-dire le cas où l'énergie de l'atome dans l'état $|2\rangle$ est inférieure à celle qu'il possède dans l'état $|1\rangle$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |i\rangle \otimes |\{n_k\}\rangle \\ |2\rangle &= |f\rangle \otimes |\{n'_k\}\rangle \end{aligned}$$

Avec : $E_{ia} \succ E_{fa}$. Considérons maintenant l'élément de matrice :

$$\left| \langle 2 | \hat{H}_I | 1 \rangle \right| = \sum_{\vec{k}} \left| \langle 2 | \hat{H}_{I,\vec{k}} | 1 \rangle \right|$$

Il est non nul si un seul mode du champ possède des nombres d'occupation dans les états $|1\rangle$ différents de ceux qui se trouvent dans l'état $|2\rangle$. Ainsi, une transition de désexcitation comporte une émission de photons dans un seul mode au premier ordre de

perturbation. Dans ce cas et si on néglige l'indice \vec{k} , on obtient :

$$\left| \langle 2 | \hat{H}_I | 1 \rangle \right| = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \varepsilon_0 v}} \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} | f \rangle \left\{ \sqrt{n} \delta_{n, n'+1} - \sqrt{n+1} \delta_{n, n'-1} \right\} \quad (3.9)$$

L'émission correspond à $n'=n+1$, avec $E_2 - E_1 = E_f + \hbar \omega - E_i$ et :

$$p_{1 \rightarrow 2} = \frac{\omega}{2 \hbar \varepsilon_0 v} \left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} | f \rangle \right|^2 (n+1) \left(\frac{\sin(E_2 - E_1) t / 2 \hbar}{(E_2 - E_1) / 2 \hbar} \right)^2 \quad (3.10)$$

Où $\left\{ \sqrt{n} \delta_{n, n'+1} - \sqrt{n+1} \delta_{n, n'-1} \right\}^2 = n \delta_{n, n+2}^2 + (n+1) \delta_{n, n}^2 - 2 \sqrt{n} \sqrt{n+1} \delta_{n, n+2} \delta_{n, n} = n+1$.

L'expression (3.10) appelle quelques remarques :

a) Tout d'abord notons que $p_{1 \rightarrow 2}$ est proportionnelle à $\left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} | f \rangle \right|^2$. La désexcitation d'un état $|i\rangle$ ne pourra s'accompagner d'une transition vers un état $|f\rangle$ que si l'élément de la matrice correspondant n'est pas nul. C'est ce que l'on appelle *la règle de sélection*.

b) $p_{1 \rightarrow 2}$ est maximum pour $E_2 - E_1 \forall t$. L'énergie totale est conservée à la relation d'incertitude $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ près, et la fréquence du photon émis est : $\omega = \frac{E_i - E_f}{\hbar} = \omega_{if}$

c) La probabilité de transition est proportionnelle à $(n+1)$, c'est-à-dire à peu près au nombre du photons qui comprend le mode et à l'intensité du champ. L'absence du n donne alors lieu à un autre phénomène dans lequel, la désexcitation d'un atome est faite en absence du champ électromagnétique c'est ce que l'on appelle *l'émission spontanée d'un photon* que nous allons l'étudier au suivant .

3.4 L'étude de l'émission spontanée :

Supposant un atome plongé dans le vide en l'absence du champ électromagnétique : $\vec{n}_k = 0, \forall \vec{k}$, et se trouve dans l'état $|i\rangle$. Il a une probabilité pour se désexciter vers un état $|f\rangle$ en émettant un photon dans le mode $(\vec{\varepsilon}_k, \vec{k})$. Cette probabilité $p_{1 \rightarrow 2}$ s'obtiendra en sommant l'expression (3.10) où l'on fait $n=0$, $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_k$ sur tous les modes du champ. Sup-

posant comme précédemment qu'à un \vec{k} donné sont associés $2\vec{\varepsilon}_k$ unitaires et orthogonaux, elle est donnée par :

$$p_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2\hbar\varepsilon_0 v} \left| \langle i | \vec{\hat{p}} | f \rangle \right|^2 \sum_{\vec{k}} \sin^2 \theta_k \omega_k \left(\frac{\sin(\omega_k - \omega_{if}) t / 2}{(\omega_k - \omega_{if}) / 2} \right)^2$$

Où $\left| \langle i | \vec{\hat{p}} | f \rangle \right|$ est le vecteur de transition, θ est l'angle trouvé entre \vec{k} et le vecteur de transition.

À $v \rightarrow \infty$ nous pouvons remplacer cette sommation par une intégration en utilisant l'expression (2.39) :

$$N(\vec{k} \in v_k) = 2 * \frac{v}{(2\pi)^3} * \int_{(\vec{k} \in v_k)} d^3 \vec{k}$$

(Sans facteur 2, puisque nous avons déjà tenu compte des polarisations) :

$$\begin{aligned} p_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{16\pi^3 \hbar \varepsilon_0} \left| \langle i | \vec{\hat{p}} | f \rangle \right|^2 \int d^3 k \sin^2 \theta_k \omega_k \left(\frac{\sin(\omega_k - \omega_{if}) t / 2}{(\omega_k - \omega_{if}) / 2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^3 \hbar \varepsilon_0} \left| \langle i | \vec{\hat{p}} | f \rangle \right|^2 \int d\Omega \sin^2 \theta \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{c^3} \left(\frac{\sin(\omega_k - \omega_{if}) t / 2}{(\omega_k - \omega_{if}) / 2} \right)^2 \end{aligned}$$

D'où $\int_{(\vec{k} \in v_k)} d^3 \vec{k} = \frac{\omega^3}{c^3} d\omega d\Omega$. [20]

À ($t\omega_{if} \gg 1$) [23], on peut montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\omega_k - \omega_{if}) t / 2}{(\omega_k - \omega_{if})^2 / 4} = 2\pi t \delta(\omega - \omega_{if}) \quad (3.11)$$

D'où :

$$p_{i \rightarrow f} = \frac{\omega_{if}^3}{3\pi \hbar \varepsilon_0 c^3} \left| \langle i | \vec{\hat{p}} | f \rangle \right|^2 t \quad (3.12)$$

Nous avons jusqu'ici supposé que les niveaux E_i et E_f n'étaient pas dégénérés. Pour tenir compte de la dégénérescence, introduisons les indices s_i et s_f correspondants res-

pectivement aux états i et f . La probabilité pour qu'un atome trouvé dans le niveau i se désexcite vers le niveau f s'écrit :

$$p_{i \rightarrow f} = \frac{\omega_{if}^3}{3\pi\hbar\epsilon_0 c^3} \frac{1}{g_i} \sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} | f, s_f \rangle \right|^2 t \quad (3.13)$$

Les formules (3.12) et (3.13) permettent de définir une probabilité de transition par unité de temps :

$$A_{i \rightarrow f} = \frac{\omega_{if}^3}{3\pi\hbar\epsilon_0 c^3} \frac{1}{g_i} \sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} | f, s_f \rangle \right|^2 \quad (3.14)$$

$A_{i \rightarrow f}$ est appelé coefficient A d'Einstein [15]. On suppose que l'on ait à l'instant t : $n(t)$ atomes dans l'état i . La probabilité totale de désexcitation d'un atome dans l'intervalle $t, t+dt$ est $dt \times \sum_f A_{i \rightarrow f}$. Ainsi :

$$n(t + dt) = n(t) - dt \left(\sum_f A_{i \rightarrow f} \right) \times n(t)$$

D'où $\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\tau_R} n$ et : $n = n_0 e^{-t/\tau_R}$, où :

$$\tau_R = \left(\sum_f A_{i \rightarrow f} \right)^{-1} \quad (3.15)$$

τ_R appelée durée de vie radiative du niveau i . On notera que $A_{i \rightarrow f}$ est proportionnel au carré du module de l'élément de matrice $\langle i | \vec{p} | f \rangle$ aussi l'état $|i\rangle$ se désexcitera facilement. $A_{i \rightarrow f}$ est aussi proportionnel à ω_{if}^3 ce que implique que la durée de vie radiative dépend fortement de la fréquence des transitions de désexcitation.

L'émission spontanée n'est pas directive, elle affecte tous les modes du champ. L'intensité d'émission dans un mode donné sera déterminée par :

$$\sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_k | f, s_f \rangle \right|^2$$

Les phénomènes de fluorescence [30, 31] nous fournissent quotidiennement des exemples

d'émission spontanée. Ainsi l'éclairage en "lumière noire" où un rayonnement ultraviolet porte les atomes dans des états excités à partir des quels ils rayonnent dans le visible. L'excitation peut également être fournie par une décharge électrique comme dans les lampes néon utilisées pour l'éclairage public. Elle peut aussi résulter des processus chimiques.

3.5 *L'étude de l'émission stimulée et d'absorption :*

La probabilité de désexcitation obtenue par l'expression (3.9) contenue un terme proportionnel au nombre de photons du mode considéré. Ce terme représente une désexcitation induite par le champ. L'émission correspondante à cette désexcitation est appelée émission stimulée (ou parfois induite) que nous l'examinons maintenant dans laquelle, nous considérons un mode déterminé du champ et un ensemble d'atomes. la fréquence de transition ω_{if} ne l'est jamais de façon précise, donc il faut faire définir une distribution $p(\omega_{if})$ (normalisée) [22] qui représente le profil spectral de la transition. Cette distribution permet de trouver des divers mécanismes étudiés au paragraphe suivant, l'émission spontanée nous fournit un exemple d'un tel mécanisme dans : elle impose une limite supérieure τ_R à la durée de vie de l'état $|i\rangle$ dont l'énergie est supérieure à $\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau_R}$. Ceci est valable pour une transition ayant l'état $|i\rangle$ pour état supérieur dont la demi-largeur minimum : $\Delta\omega = \frac{\hbar}{2\tau_R}$.

Dans ce cas, tous les atomes possèdent le même profil spectral : C'est ce que l'on appelle *l'élargissement homogène* [23, 31]. Il ya même des atomes différents possèdent des fréquences de transition différentes, c'est le cas des gaz, c'est ce que l'on appelle l'élargissement inhomogène par effet Doppler [23, 31]. Dans ce cas, la probabilité $P_{e,\vec{k}}$ d'émission d'un photon dans le mode considéré par l'ensemble des atomes s'obtient en intégrant l'expression (3.11) où : $E_2 - E_1 = \hbar(\omega - \omega_{if})$ et en introduisant le nombre $V.N_i$ d'atomes dans l'état $|i\rangle$ et contenus dans V , nous obtenons pour $P_{e,\vec{k}}$:

$$P_{e,\vec{k}} = \frac{V.N_i}{2\hbar^2\varepsilon_0} \left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2 \left(\frac{n_k \hbar \omega_k}{V} \right) \int_0^\infty d\omega_{if} p(\omega_{if}) \left(\frac{\sin(\omega_{if} - \omega_k) t / 2}{(\omega_{if} - \omega_k) / 2} \right)^2$$

Pour des temps suffisamment longs, tels que $p(\omega_{if})$ varie peu dans un intervalle de fréquence $\approx \frac{2}{t}$ ceci donne :

$$P_{e,\vec{k}} = \frac{\pi}{\hbar^2\varepsilon_0} (V.N_i) \left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2 \frac{n_k \hbar \omega_k}{V} p(\omega_k).t \quad (3.16)$$

Où nous avons utilisé la relation [15] :

$$\int_0^\infty dx \left(\frac{\sin(x - x_0) t / 2}{(x - x_0) / 2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\sin xt / 2}{x / 2} \right)^2 = 2\pi t$$

La probabilité de création d'un photon dans le mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon}_k)$ par émission stimulée est proportionnelle au temps et à $(\frac{n_k \hbar \omega_k}{V})$ qui représente la densité d'énergie électromagnétique présente dans le mode. Elle est également proportionnelle à $\left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2$, ce qui introduit, comme nous l'avons vu pour l'émission spontanée, des règles de sélection.

Nous avons considéré l'émission d'un photon, c'est à dire le cas où l'état atomique initial avait une énergie supérieure à l'état final. Nous pouvons traiter de façon identique le processus dans lequel un photon du champ est absorbé, l'atome étant excité. Il suffit échanger les rôles des états $|i\rangle$ et $|f\rangle$, donc pour la probabilité d'absorption d'un photon du mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon}_k)$ où les atomes passent de l'état f vers i :

$$P_{a,\vec{k}} = \frac{\pi}{\hbar^2\varepsilon_0} N_f \left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2 n_k \hbar \omega_k p(\omega_k).t \quad (3.17)$$

L'hermiticité de l'opérateur, nous permet d'écrire :

$$\left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2 = \left| \langle f | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | i \rangle \right|^2$$

C'est maintenant le nombre d'atomes dans l'état d'énergie inférieure $|f\rangle$ qui intervient. Les états $|i\rangle$ et $|f\rangle$ seront tous deux peuplés, il existera une compétition entre les processus

d'absorption et d'émission stimulée dont le bilan sera donné par le taux de création par unité de temps d'un photon dans le mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon}_k)$:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{\pi}{\hbar^2 \varepsilon_0} (N_i - N_f) \left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2 n_k \hbar \omega_k p(\omega_k) \quad (3.18)$$

Considérons enfin le cas où $|i\rangle$ et $|f\rangle$ appartiennent à des niveaux E_i, E_f dégénérés. Nous introduisons à nouveau les indices s_i et s_f , les dégénérescences g_i et g_f . N_i et N_f sont les densités de populations des niveaux E_i et E_f , les densités de populations des états $|i, s_i\rangle$ et $|f, s_f\rangle$ sont respectivement $\frac{N_i}{g_i}$ et $\frac{N_f}{g_f}$. Nous obtenons immédiatement la généralisation des expressions (3.17), (3.18) en remplaçant N_i et N_f par $\frac{N_i}{g_i}$ et $\frac{N_f}{g_f}$ et $\left| \langle i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f \rangle \right|^2$ par $\sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f, s_f \rangle \right|^2$. Le taux de création par unité de temps d'un photon dans le mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon}_k)$ devient :

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{\pi}{\hbar^2 \varepsilon_0} \left(\frac{N_i}{g_i} - \frac{N_f}{g_f} \right) \sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_k | f, s_f \rangle \right|^2 n_k \hbar \omega_k p(\omega_k) \quad (3.19)$$

Et pour un système atomique à l'équilibre thermique :

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{N_f}{g_f} e^{-(E_i - E_f)/KT} \prec \frac{N_f}{g_f} \text{ et } \frac{dn_k}{dt} \prec 0$$

Remarque :

Si le nombre de photons décroît : l'absorption domine. On peut, toutefois, en plaçant le système hors d'équilibre et modifier les populations pour obtenir $\left(\frac{N_i}{g_i} - \frac{N_f}{g_f} \right) \succ 0$. On dit qu'il y a alors inversion de population. Dans ce cas : $\frac{dn_k}{dt} \succ 0$, le système atomique transfère son énergie au champ électromagnétique. L'émission spontanée représentait déjà un tel transfert est d'autant plus intense que n_k est plus élevée. On remarque aussi dans la relation (3.19) que si les populations seront constantes, le nombre de photons du mode k croît exponentiellement avec le temps. On peut également introduire la densité d'énergie W_k dans $(\vec{k}, \vec{\varepsilon}_k)$, à l'aide de laquelle l'expression (3.19) devient :

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} \left(\frac{N_i}{g_i} - \frac{N_f}{g_f} \right) \sum_{s_i, s_f} \left| \langle i, s_i | \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_k | f, s_f \rangle \right|^2 \omega_k p(\omega_k) \cdot W_k \quad (3.20)$$

3.6 Mécanismes d'élargissement spectral :

Dans ce paragraphe, nous allons décrire quelques mécanismes d'élargissement et déterminer la fonction $p(\omega_{if})$ correspondante, c'est un problème fort complexe. Les différents mécanismes de l'élargissement peuvent être classifiés comme nous avons les défini en deux catégories : élargissement homogène et élargissement inhomogène. Dans le cas d'élargissement homogène ; on trouve l'élargissement naturel ou l'élargissement par collisions, alors que dans le cas d'élargissement inhomogène, on traite l'élargissement par effet Doppler.

3.6.1 Description de l'élargissement naturel :

C'est l'élargissement dû à l'émission spontanée, dans ce cas, nous négligeons le déplacement de l'atome et nous supposons qu'un mode \vec{l} du champ électromagnétique est occupé. Sa fréquence ω_L est voisine d'une fréquence ω_{if}^0 de transition entre un niveau excité i et le niveau de base f du système atomique. Celui-ci est en interaction non seulement avec le mode k mais avec tous les autres modes du champ électromagnétique. L'hamiltonien \hat{H}'_A de ce système s'écrit :

$$\hat{H}'_A = \hat{H}_A + \hat{H}'_I + \hat{H}'_R$$

Où \hat{H}'_I et \hat{H}'_R sont donnés respectivement par les expressions (3.4) et (3.1) où le mode $\vec{k} = \vec{l}$ a été exclu de la sommation.

La diagonalisation de \hat{H}'_A fournit les états propres de l'atome habillé [23] par le champ électromagnétique. Aux niveaux discrets de l'atome isolé correspondent pour l'atome habillé une distribution continue de niveaux i et f qui détermine une distribution de

fréquences de transition :

$$p(\omega_{if}) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(\omega_{if})}{(\omega_{if} - \Omega)^2 + (\gamma(\omega_{if}))^2}$$

Où :

$$\gamma(\omega_{if}) = \frac{1}{2} A_{i \rightarrow f} \quad (3.21)$$

$A_{i \rightarrow f}$ est donné par l'équation (3.15). La fréquence [23] : $\Omega = \omega_{if}^0 + \Delta$ où ω_{if}^0 est relatif à l'atome nu et Δ représente un déplacement des niveaux de l'atome habillé (Lamb shift) [11, 23]. Ce déplacement est faible et dans tous les cas que nous considérons peut être négligé. De plus dans le cas d'une transition atomique la largeur spectrale est suffisamment faible pour que l'on néglige également la variation de la fréquence dans l'expression de γ . Nous sommes ainsi conduit à l'expression de la distribution définissant le profil spectral :

$$p(\omega_{if}) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_{if} - \omega_{if}^0)^2 + \gamma^2} \quad (3.22)$$

qui a une forme dite *Lorentzienne* [11, 31]. La demi largeur : $\Delta\omega = \gamma = \frac{1}{2} A_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2\tau_R}$. De même dans le cas général où i peut se désexciter d'autres niveaux et f n'est pas l'état de base la demi largeur spectrale sera donnée par :

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{Ri}} + \frac{1}{\tau_{Rf}} \right) \quad (3.23)$$

3.6.2 Description de l'élargissement par collisions :

Dans un gaz, il se passe des collisions aléatoires entre les atomes, en réalité l'atome n'interagit non seulement avec le champ électromagnétique mais également avec les autres atomes, dans tel processus; des perturbations aléatoires apportées par ces atomes vont faire ce qu'on appelle *les fluctuations des niveaux d'énergie*, ce qui nous conduira à un élargissement de la transition, nous l'examinons maintenant en utilisant le modèle clas-

sique ou nous allons supposer que lorsqu'un atome est en interaction avec les autres atomes dans lequel, l'oscillation se trouve soit interrompue, soit déphasée de façon arbitraire comme le montre la figure (3.1) [22]. Dans les deux cas, le champ émis par le gaz sera une superposition d'impulsions de durée τ_R n'ayant aucune relation de phase entre elle, il est donnée par [32] :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega_{if}^0 t} \Gamma(t)$$

Où :

$$\Gamma(t) = e^{-i\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq \tau' \\ 0 \text{ pour } t \text{ quelconque} \end{array} \right\}$$

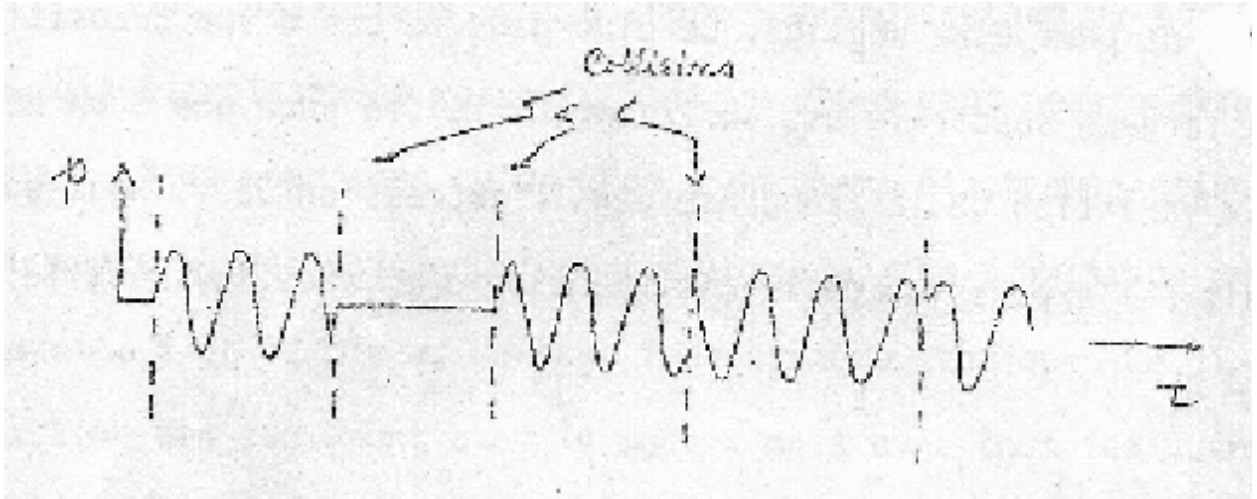


FIG. 3-1 – Collisions déphasées et collisions interrompues.

Introduisons la représentation de Fourier de $\vec{E}(t)$:

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{E}(t) e^{i\omega t}$$

L'intensité détectée $I(\omega, \tau')$ sera proportionnelle à $|\tilde{E}(\omega)|^2$:

$$\tilde{E}(\omega) = \int_0^{\tau'} dt \vec{E}_0 e^{-i\omega_{if}^0 t} \Gamma(t) e^{i\omega t}$$

Et :

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\omega) &= \int_0^{\tau'} E_0 e^{-i(\omega_{if}^0 - \omega)t} dt \\ \tilde{E}(\omega) &= E_0 \left[\frac{e^{-i(\omega_{if}^0 - \omega)t}}{-i(\omega_{if}^0 - \omega)} \right]_0^{\tau'} \\ \tilde{E}(\omega) &= \frac{E_0}{-i(\omega_{if}^0 - \omega)} \left[e^{-i(\omega_{if}^0 - \omega)\tau'} - 1 \right]\end{aligned}$$

Donc :

$$\left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 = 4 \frac{E_0^2 \sin^2(\omega_{if}^0 - \omega)\tau'/2}{(\omega_{if}^0 - \omega)^2}$$

L'intensité détectée $I(\omega, \tau')$ sera proportionnelle à $\left| \tilde{E}(\omega) \right|^2$, ainsi :

$$I(\omega, \tau') = I_0 \frac{\sin^2(\omega_{if}^0 - \omega)\tau'/2}{(\omega_{if}^0 - \omega)^2}$$

Pour obtenir l'intensité totale, il faut connaître la densité de probabilité correspondante à la durée τ' . Soit $\frac{dt}{\tau}$ la probabilité pour qu'un atome subisse une collision durant l'intervalle dt . On peut montrer que la probabilité pour que l'intervalle entre deux collisions successives soit compris entre τ' et $\tau' + d\tau'$ est $\pi(\tau')$ où :

$$\pi(\tau') = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau'}{\tau}} \quad (3.24)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \pi(\tau') d\tau' = 1 \\ \int_0^\infty \tau' \pi(\tau') d\tau' = \tau \end{array} \right\}$$

Où τ est le temps moyenne entre deux collisions, ainsi l'intensité totale détectée [32]

sera :

$$I(\omega) \propto \int d\tau' e^{-\frac{\tau'}{\tau}} I(\omega, \tau') \propto \frac{1}{(\omega_{if}^0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} \quad (3.25)$$

Nous déduisons finalement l'expression de la distribution spectrale normalisée comme :

$$p(\omega_{if}) = \frac{1}{\pi\tau} \frac{\gamma}{(\omega_{if} - \omega_{if}^0)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \quad (3.26)$$

Nous retrouvons comme dans le cas précédent un profil de Lorentz de demi-largeur à mi hauteur $\frac{1}{\tau}$. Notons aussi que le profil spectral est inversement proportionnel à la densité du gaz, le facteur de proportionnalité dépendra de l'atome et de la transition considérée, de la nature des partenaires de collision (mélange avec un gaz étranger), et de la température. Notons enfin que le profil spectral de tous les atomes du gaz est affecté de la même façon par les collisions. Selon la définition introduite dans §3.5 de ce chapitre, l'élargissement dû aux collisions est donc *un élargissement homogène*.

3.6.3 Description de l'élargissement par effet Doppler :

Dans un gaz, les atomes se déplacent de façon aléatoire, quand un atome au mouvement interagit avec un champ électromagnétique, la fréquence apparante est différente de celle "vue" par un atome fixe c'est ce que l'on appelle *l'effet Doppler* et c'est la cause de *l'élargissement par effet Doppler*.

Nous avons dans ce qui précède négligé l'influence de la vitesse d'un atome sur sa fréquence d'émission (ou d'absorption) dans le repère du laboratoire. Nous l'étudions maintenant. Raisonnons comme précédemment en émission. Soit un atome isolé, de masse M , se trouvant initialement dans le niveau i avec une impulsion $\vec{\pi}_i$, il émet un photon de fréquence ω , d'impulsion $\hbar\vec{k}$, et passe dans le niveau f avec une impulsion $\vec{\pi}_f$. Au cours de ce processus, l'énergie et l'impulsion doivent être conservées. Ceci nous fournit les relations :

$$E_i + \frac{1}{2M}\vec{\pi}_i^2 = E_f + \frac{1}{2M}\vec{\pi}_f^2 + \hbar\omega \quad (3.27)$$

$$E_i = E_f + \hbar\omega \quad (3.28)$$

Auxquelles il faut adjoindre :

$$E_i - E_f = \hbar\omega_{if}^0$$

Où ω_{if}^0 est la fréquence d'émission de l'atome dans un repère lié à son centre de masse. En éliminant $\vec{\pi}_f$ entre (3.27) et (3.28) nous obtenons :

$$\hbar(\omega - \omega_{if}^0) = \frac{1}{2M} \left(2\hbar\vec{\pi} \cdot \vec{k} - \hbar^2 \vec{k}^2 \right)$$

Définissant l'axe z suivant la direction de propagation \vec{k} du photon émis, nous obtenons :

$$\omega = \omega_{if}^0 + v_{iz} \frac{\omega}{c} - \frac{\hbar\omega^2}{2Mc^2}$$

Dans les situations que nous aurons à étudier, posant : $\frac{v_{iz}}{c} = 10^{-5}$, $\frac{\hbar\omega}{2Mc^2} = 10^{-9}$ et le dernier terme peut être négligé. La relation entre fréquence émise ω et fréquence naturelle ω_{if}^0 prend ainsi la forme bien connue [23] :

$$\omega = \omega_{if}^0 \left(1 + \frac{v_{iz}}{c} \right) \quad (3.29)$$

Si nous considérons maintenant le rayonnement émis par l'ensemble des atomes du gaz nous devons tenir compte de la distribution statistique de Maxwell [33] et la probabilité pour qu'un atome ait une vitesse v_z comprise entre v_z et $v_z + dv_z$ est :

$$dv_z \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \exp - \frac{M}{2kT} v_z^2$$

On déduit à l'aide de (3.29) la probabilité d'émission d'un photon dans l'intervalle $\omega, \omega + d\omega$ c'est-à-dire, la distribution spectrale du rayonnement émis :

De (3.29) :

$$\omega = \omega_{if}^0 \left(1 + \frac{v_{iz}}{c} \right) \Rightarrow v_z = \frac{(\omega - \omega_{if}^0) c}{\omega_{if}^0} \text{ et } dv_z = \frac{c}{\omega_{if}^0} d\omega$$

$$p(\omega) = \frac{1}{\omega_{if}^0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2\pi kT}} \exp - \frac{Mc^2}{2kT} \left(\frac{\omega - \omega_{if}^0}{\omega_{if}^0} \right)^2 \quad (3.30)$$

Qui représente un profil *gaussien* [31] centré à la fréquence naturelle ω_{if}^0 et de demi-largeur à mi-hauteur [23] :

$$\Delta\omega_D = \omega_{if}^0 \sqrt{(2 \log 2) \frac{kT}{Mc^2}} = \omega_{if}^0 \times 3.56 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{\text{masse atomique}}} \quad (3.30')$$

Définissons une vitesse thermique moyenne [23] : $v_t = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$: $\frac{\Delta\omega_D}{\omega_{if}^0} = \sqrt{\log 2} \frac{v_t}{c} = 0.83 \frac{v_t}{c}$

Remarque :

Notons que le profil Doppler dépend de la température mais non de la densité du gaz, donc tous les atomes du gaz ne sont pas affectés de la même façon. Des atomes possédants des vitesses différentes émettent à des fréquences différentes. L'élargissement Doppler est alors inhomogène.

Nous avons précédemment négligé l'influence des collisions et ignoré l'effet Doppler, en pratique les trois causes d'élargissement se manifesteront simultanément. Pour déterminer le profil spectral de ce cas, supposons que l'élargissement naturel soit négligeable, et il nous reste de déterminer le profil spectral résultant des collisions et de l'effet Doppler. Nous allons d'abord déterminer le profil spectral d'une famille d'atomes de vitesse v_z . Il est donné par (3.26) où ω_{if}^0 est remplacé par la fréquence d'émission $\omega = \omega_{if}^0 \left(1 + \frac{v_{iz}}{c}\right)$. Pour obtenir le profil spectral de l'ensemble des atomes il nous suffit d'intégrer sur la distribution des vitesses c'est-à-dire de ω (3.29) :

$$p(\omega_{if}) = \frac{1}{\omega_{if}^0 \pi \tau} \sqrt{\frac{Mc^2}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega_{if} - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \exp - \frac{Mc^2}{2kT} \left(\frac{\omega - \omega_{if}^0}{\omega_{if}^0} \right)^2 \quad (3.31)$$

Généralement, un des effets dominera les autres et imposera sa forme au profil spec-

tral. Dans les situations que nous considérons ce ne sera jamais la largeur naturelle, parfois les collisions et le plus souvent l'effet Doppler. Pour fixer les idées considérons une transition de vibration rotation HF entre les niveaux $v=0$, $j=2$ et $j=3$ dénotée par $R(2)$ et située à 4030cm^{-1} . Sa demi-largeur Doppler à 300°K est d'après (3.30)' :

$$\Delta\omega_D = \omega_{if}^0 \times 3,56.10^{-7} \sqrt{\frac{T}{\text{masse atomique}}} = 4030 \times 3,56.10^{-7} \sqrt{\frac{300 + 273}{M(HF)}} = 5,5.10^{-3}\text{cm}^{-1}$$

La demi-largeur due aux collisions est proportionnelle à la pression et donnée par :

$$\Delta\omega_c = \frac{1}{\tau} = 5,3.10^{-4}\text{cm}^{-1}/\text{torr}$$

Nous voyons qu'au dessus de 10 torr l'élargissement par collision dominera, l'effet Doppler détermine le profil spectral pour les faibles pressions [22].

3.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons traité les processus d'absorption et d'émission (stimulée et spontanée) par la théorie quantique où nous avons déterminé la probabilité de transition de chaque processus, de même, nous avons étudié les mécanismes d'élargissement spectral, on peut donc conclure qu'on peut pas traiter l'interaction rayonnement-matière d'une manière satisfaisante qu'avec une théorie entièrement quantique.

Conclusion générale :

Dans ce mémoire, nous avons traité l'interaction rayonnement-matière de manière semi classique : la matière était quantifiée et le rayonnement traité classiquement. Nous avons pu ainsi décrire un grand nombre des phénomènes, en particulier le fonctionnement des lasers. Nous nous sommes cependant heurtés aux limites de ce modèle : il ne peut pas rendre compte de façon rigoureuse du phénomène aussi important que l'émission spontanée, que l'on ne peut déduire des premiers principes que dans le cadre d'une théorie quantique du rayonnement (il en est de même de certains processus de diffusion).

Cependant, il est possible d'introduire de façon phénoménologique la durée de vie des niveaux atomiques, et le formalisme semi classique est alors capable de rendre compte de façon simple d'un très grand nombre d'aspects de l'interaction atome-rayonnement, y compris ceux à la base de l'effet laser, même si certains effets associés à l'émission spontanée, ainsi que les domaines nouveaux des "états non classiques de la lumière" et de " l'électrodynamique quantique en cavité" échappent au traitement semi-classique (par exemple les états comprimés [21]) de la lumière.

De manière plus fondamentale, l'approche semi-classique ne peut effectuer que la moitié du chemin vers une théorie cohérente de l'interaction rayonnement-matière, qui ne peut être que complètement quantique.

Au-delà de cet intérêt important, l'approche totalement quantique nous a permis de traiter le problème fondamental de l'émission spontanée de lumière par un atome, et d'obtenir la distribution statistique du photon....etc ; comme nous avons montré dans ce mémoire. Le tableau ci-dessous permet de conclure les principales descriptions du laser avec ses avantages et aussi ses inconvénients.

		Rayonnement		
		Classique	Quantique	
Matière	Classique	Microscopique	<p><u>Théorie de l'oscillateur harmonique classique :</u> <u>Avantages :</u> Description de l'interaction En termes d'indice de réfraction et d'absorption. <u>Inconvénients :</u> Description ne contenant pas l'émission stimulée et ne conduisant pas à l'effet laser.</p>	
		Phénoménologique	<p><u>Théorie d'instein :</u> <u>Avantages :</u> Simplicité et efficacité. <u>Inconvénients :</u> Nécessité de postuler l'existence de coefficients d'interaction onde-matière. Aucun renseignement concernant le contenu physique de ces coefficients.</p>	
	Quantique	<p><u>Théorie semi classique:</u> <u>Avantages :</u> Description correcte de l'émission stimulée variation temporelle de l'intensité laser saturation, compétition inter-modes. <u>Inconvénients :</u> L'émission spontanée et ses conséquences concernant le démarrage de l'oscillation sa largeur spectrale ultime ne sont pas traitées.</p>	<p><u>Théorie quantique :</u> <u>Avantages :</u> Description très complète de l'ensemble de la physique du laser. <u>Inconvénients :</u> Lourdeur du formalisme.</p>	
		<u>Source classique :</u> Emission spontanée.	<u>Source Laser :</u> Emission stimulée.	
		<u>Forme de l'onde classique :</u> $E(x, y, z) = \frac{E_0}{z} \exp\left[-2i\pi\nu\left(\frac{z}{v} + \frac{1}{v} \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right]$ superposition d'onde sphérique issue des points différents de la source et de phase aléatoire.	<u>Forme de l'onde laser :</u> $E(x, y, z) = \frac{E_0}{z} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left[-2i\pi\nu\left(\frac{z}{v} + \frac{1}{v} \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right] e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}}$ Onde quasi sphérique = onde sphérique × terme Gaussien.	

Principales descriptions du laser

Références :

- [1] T.H. Maiman, Stimulated optical radiation in ruby, *Nature*, 187 493-494 (1960)
- [2] R. Ignatius, M. Ignatius, Diode sources make cancer treatments cost effective, *Laser Focus World* 34(7) 139-143 (1998)
- [3] Industrial Laser Review: Laser solutions for manufacturing *Laser Focus World* 34(9) (1998)
- [4] B. Craig, Ultrafast pulses promise better processing of fine structures, *Laser Focus World* 34(9) 79-88 (1998)
- [5] E. Wiener Avnear, Laser micromachining creates precise 3-D structures, *Laser Focus World* 34(11) 105-112 (1998)
- [6] J.W. Scott, Vertical cavity lasers facilitate gigabit communications, *Laser Focus World* 34(10) 75-78 (1998)
- [7] D. Hargis, A. Earman, Diode pumped microlasers promise portable projectors, *Laser Focus World* 34(5) 243-251 (1998)
- [8] D. Hargis, A. Earman, Lasers replace conventional technology in display designs, *Laser Focus World* 34(7) 145-149 (1998)
- [9] R.D. Mead, C.I. Miyake, Lithography offers market for UV solid state lasers, *Laser Focus World* 34 (1) 113-120 (1998)
- [10] JR. Lalanne, A. Ducasse et S. Kielich, *Interaction Laser-Molécule Physique du laser et optique non linéaire moléculaire*, Polytechnica, Paris (1994)
- [11] H. Weber, G. Herziger, R. Poprawe, *Laser Fundamentals part 2, quantum optics*, springer, Berlin Heidelberg (2005)
- [12] German J. de Valcarcel, Eugenio Roldan and F. Prati, *Revista Mexicana de Fisica*, v1 E 52 pp 198-214(May 2006)
- [13] D. Dangoisse, D. Hennequin et V. Zehnlé-Dhaoui, *Les Lasers : Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris (1998)
- [14] K. Kröber, C. Kulik, *Excimer laser technology, Some fundamentals of laser physics Part 1*(2005)
- [15] Peter W. Milonni, Joseph H. Eberly, *Lasers*, Wiley, New York (1988)
- [16] C. Fabre et J.P. Pocholle, *Les lasers et leurs applications médicales*, EDP sciences, France (1996-2002)
- [17] P. Meystre and M. Sargent, *elements of quantum optics, CW Field Interaction*, Springer, Berlin Heidelberg (2007)
- [18] S. Mukherjee, Robutness of baryon-strangeness correlation and related ratios of susceptibilities, arXiv: hep-lat/0606018 v2 (3 Oct 2006)
- [19] Orazio Svelto and David C. Hanna, *Principles of Lasers*, Springer (1988)

- [20] P. Lambropoulos, D. Petrosyan, Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information, Springer Berlin Heidelberg (2006)
- [21] Michel Le Bellac, Physique Quantique, Editions CNRS (2003)
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Processus d'interaction entre photons et atomes, Editions CNRS, Paris (1998)
- [23] Grynberg, spectre Claude Fabre Introduction aux lasers et à l'optique quantique, Edition Marketing S.A, Paris (1997)
- [24] Faroux et Renault Cours de l'électromagnétisme2, Dunod, Paris (1998)
- [25] Dietrich Stauffer, H. E. Stanley, Annick Lesne, Cours de Physique: De Newton à Mandelbrot, Springer (1999)
- [26] D. F. Walls and Gerard J. Milburn, Quantum optics, Quantum theory of the laser, Berlin Heidelberg (2006)
- [27] Y. H. Yuan, On the scientific method from Albert Einstein in 2005, ArXiv: physics/0510124 v1 (13 Oct 2005)
- [28] Peter William Atkins, Julio de Paula, Chimie Physique, université Boeck (2004)
- [29] . Russel L'argument Einstein odols y Rosen r iv : quant-ph/0308170 v1 (29 Aug 2003)
- [30] A. Ratchov, Etude du couplage de petits systèmes quantiques avec leur environnement : fluctuations et décohérence à basse température, thèse, université Joseph-Fourier-Grenoble (Juillet 2005)
- [31] Mohamed Krifa, Introduction à la physique des lasers, centre de publication universitaire, Tunisie (2001)
- [32] B. Cagnac, Jean-P Farroux, Lasers: interaction lumière-atomes, CNRS Editions (2002)
- [33] K. Singer, Statistical Mechanics, New Age Publishers (1968)

Abstract:

The aim of this memory is to treated the operation of laser in the theoretical way, in particular the interaction radiation-matter, one started with the semi classical approach, in which the radiation is described classically by the Maxwell's equations, Whereas the matter is described quantiquement by the Bloch's equations, the coupling between the two provides us the equations of Maxwell-Bloch; who are rich in information on the behaviour of the laser.

Nevertheless; the semi classical formalism is able to give an account of a simple way for a very great aspects number of the radiation-matter interaction, including those at the base of the laser effect, even if certain effects associated with the spontaneous emission and also statistical distribution of the photons, and only a very quantum approach in which the radiation and the matter are quantified; allows to give an account of these phenomena and to study the various mechanisms of spectral broadening.

Key words: laser, interaction atom-field, semi classical theory, quantum theory, spontaneous emission.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو معالجة مبدأ عمل الليزر بطريقة نظرية، وبالضبط التفاعل إشعاع – مادة، حيث بدأنا بالنظرية الشبه كلاسيكية، و التي يتم فيها وصف الإشعاع كلاسيكيا بمعادلات ماكسوال، أما المادة فيتم وصفها كوانتيا بمعادلات بلوك، التزاج بين الاثنين يعطينا معادلات ماكسوال بلوك وهي غنية بمعلومات عن سلوك الليزر.

ومع ذلك؛ النظرية الشبه كلاسيكية قادرة على دراسة بسيطة لعدد كبير جدا من مظاهر التفاعل إشعاع – مادة، بما فيها تلك المتعلقة بالإرسال التلقائي وأيضا التوزيع الإحصائي للفوتونات، فقط النظرية الكوانتية أين يتم تكميم كل من الإشعاع و المادة، فتعطي اعتبارا لدراسة هذه الظواهر ودراسة مختلف آليات التوسيع الطيفي.

الكلمات المفتاحية: ليزر، تفاعل إشعاع – مادة، النظرية الشبه كلاسيكية، النظرية الكوانتية، الإرسال التلقائي.

Résumé :

Le but de ce mémoire est de traiter le fonctionnement du laser de façon théorique, en particulier l'interaction rayonnement-matière, on a commencé par l'approche semi classique, dans laquelle le rayonnement est décrit classiquement par les équations de Maxwell, alors que la matière est décrite quantiquement par les équations de Bloch, le couplage entre les deux nous fournit les équations de Maxwell-Bloch; qui sont riches en renseignements sur le comportement du laser.

Néanmoins; le formalisme semi classique est capable de rendre compte de façon simple d'un très grand nombre d'aspects de l'interaction rayonnement-matière, y compris ceux à la base de l'effet laser, même si certains effets associés à l'émission spontanée et aussi la distribution statistique des photons, et seule une approche tout quantique dans laquelle le rayonnement et la matière sont quantifiés; permet de rendre compte de ces phénomènes et d'étudier les différents mécanismes d'élargissement spectral.

Mots clés : laser, interaction atome-champ, théorie semi classique, théorie quantique, émission spontanée.