

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : Physique Théorique

OPTION : Physique quantique

THEME

Résolution de l'équation de Dirac à (1+1)-dimensions pour quelques modèles de potentiels PT-symétriques et de masses dépendantes de l'espace

Par

Aliane Idir

SOUTENU LE : 07/01/2010

Devant le jury :

Président :	L.Guechi	Prof.	Univ. Mentouri-constantine
Rapporteur :	F.Benamira	Prof.	Univ. Mentouri-constantine
Examineur :	S.R.Zouzou	Prof.	Univ. Mentouri-constantine
	M.T.Meftah	Prof.	Univ. Ouargla

Remerciement

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à achever ce modeste mémoire.

Je remercie ma famille pour le soutien.

Je remercie les membres du centre de calcul du département d'électronique de l'université de Batna (Imad Bennacer, Douak Fouzi, Moulehcen Fateh, Messaadi Lotfi, Smail Toufik) de m'avoir aidé à rédiger ce modeste mémoire.

Table des matieres

Introduction	4
1 Approche de supersymetrie en mécanique quantique	9
1.1 Introduction	9
1.2 Equation aux valeurs propres non relativiste	10
1.3 Construction de potentiels partenaires	11
1.4 Quelques relations utiles	13
1.5 Brisure de symmetrie	14
1.6 Relations entre les valeurs propres et fonctions propres de H_0 et H_1	16
1.7 Factorisation et Hiérarchie d'Hamiltoniens partenaires	17
1.8 Invariance de forme	18
1.8.1 Definition	18
1.8.2 Formules generales	19
1.8.3 Classe de potentiels invariants de forme	20
1.8.4 Remarques	21
2 Quelques notions sur la PT -symétrie en MQ	22
2.1 Introduction	22
2.2 Proprietes des Hamiltoniens PT -symetriques	23
2.2.1 Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT -symetrique	23
2.2.2 Fonctions propres et espace de Hilbert	25
2.3 Nouvelle symétrie pour des Hamiltoniens PT - symetriques	26
2.3.1 Construction de l'operateur C	27

3	Résolution de l'équation de Dirac stationnaire a une dimension avec masse dépendante de la position, en présence d'un potentiel PT -symétrique	30
3.1	Rappels sur l'équation de Dirac stationnaire	30
3.2	Equation de Dirac a (1+1)-dimension a masse variable, en présence d'un potentiel PT -symétrique	32
4	Etude de quelques modèles de potentiels PT -symétriques avec masses dépendantes de l'espace à (1 + 1)-dimensions	37
4.1	Introduction	37
4.2	Modèle avec masse bornée et potentiel de référence constant	38
4.3	Modèle avec masse bornée et. potentiel de référence fonction hyperbolique PT -symétrique	43
4.4	Modele avec masse non bornée et potentiel de référence fonction linéaire PT -symétrique	49
4.5	Modèle avec masse non bornée et potentiel de référence fonction réelle quadratique	55
5	Conclusion	58
	Bibliographie	60

Introduction

La mécanique quantique est un outil indispensable pour décrire et étudier les phénomènes physiques qui se manifestent à l'échelle atomique et subatomique. Elle est communément subdivisée en mécanique quantique non relativiste et mécanique quantique relativiste.

La mécanique quantique non relativiste trouve une large application dans beaucoup de problèmes de physique atomique et chimie moléculaire où les énergies des systèmes ne sont pas trop élevées. Pour les systèmes non stationnaires en interaction, on s'intéresse essentiellement à la détermination de leurs fonctions d'onde qui caractérisent toute l'information sur leurs états quantiques. Dans un système à n degré de liberté, gouverné par un Hamiltonien H , la détermination de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}; t)$ relève de la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{x}; t) = H\Psi(\mathbf{x}; t) \quad (1)$$

En générale, la solution exacte de cette équation n'est connue que pour très peu de systèmes dont l'interaction est relativement simple. Si le phénomène étudié est stationnaire, son opérateur Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas, il est d'usage de mettre la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}; t)$ sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une autre fonction du temps, $\Psi(\mathbf{x}; t) = \Phi(\mathbf{x})\mathcal{E}(t)$, de sorte que la résolution de l'équation (1) se réduit à la résolution d'une équation aux valeurs propres pour la fonction $\Phi(\mathbf{x})$,

$$H\Phi(\mathbf{x}) = E\Phi(\mathbf{x}) \quad (2)$$

qui est appelée aussi équation de Schrödinger stationnaire.

Lorsque le système étudié ne subit pas l'effet d'un champ magnétique extérieur, l'Hamiltonien H est généralement composé d'une partie cinétique et d'un potentiel d'interaction scalaire.

Pour les phénomènes relevant du domaine des hautes énergies, comme les interactions nucléaires, la mécanique quantique non relativiste s'avère non adéquate et il faut faire appel à la théorie quantique relativiste. Ainsi, dans le cadre des hautes énergies, le spectre énergétique d'une particule soumise à une interaction extérieure

s'obtient en résolvant soit l'équation de Klein-Gordon si la particule est sans spin ou l'équation de Dirac si la particule est dotée d'un spin. Dans le cas stationnaire, la différence entre les trois équations, de Schrödinger, de Klein-Gordon et de Dirac, réside non seulement dans la forme des opérateurs Hamiltoniens respectifs mais aussi dans les énergies et les fonctions propres.

Cependant, on peut montrer que dans la plupart des cas, la résolution des équations relativistes stationnaires se réduit à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effectif. Pour cela, les techniques et approches de résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire jouent un rôle primordial en mécanique quantique et sont donc d'un intérêt particulier pour les physiciens aussi bien que pour les mathématiciens. Il existe de nos jours plusieurs techniques différentes de résolution de l'équation de Schrödinger, dont chacune peut être mieux adaptée pour certains types de potentiels. L'approche des intégrales de chemin, qui a été utilisée avec succès pour résoudre une multitude de potentiels connus en physique et en chimie, occupe une place centrale à cause de son interprétation physique et son lien avec la théorie classique. L'autre technique, très utilisée dans la résolution de l'équation de Schrödinger, consiste à transformer cette dernière en une équation de Sturm-Liouville du type hypergéométrique. L'avantage de cette approche est que les fonctions propres et valeurs propres correspondantes sont données sous formes compactes [1].

La méthode de factorisation, connue depuis les travaux de Schrödinger lui-même [2], s'applique notamment pour une certaine catégorie de potentiels du type harmonique. Elle a été considérablement développée dans les années quarante grâce aux travaux de Infeld et Hull [3]. Elle connaît un regain d'intérêt depuis deux décennies [4, 5] et notamment depuis l'introduction par Gendenshtein [6] de la notion d'invariance de forme. Cette méthode est maintenant connue sous le nom de méthode supersymétrique en mécanique quantique. Dans cette technique, qui sera développée en détail dans le chapitre suivant, on construit ce qu'on appelle le superpotentiel, relié au potentiel du problème par l'intermédiaire d'une équation différentielle non linéaire du type Riccati. Ce superpotentiel permet de construire la fonction propre de l'état fondamental du potentiel d'origine et la détermination de son énergie correspondante. Les énergies associées aux états excités peuvent ainsi être déterminées par une approche algébrique très élégante. L'avantage de cette méthode réside surtout dans sa simplicité relativement aux autres méthodes citées plus haut, mais cependant son inconvénient est qu'elle ne permet pas d'exprimer toutes les fonctions propres par une seule fonction génératrice.

Dans la dernière décennie, une nouvelle théorie quantique s'appliquant aux potentiels non hermitiens a vu le jour. Elle concerne spécialement les potentiels qui sont invariants par la réflexion de l'espace-temps et est appelée mécanique quantique PT-symétrique. L'avantage et l'intérêt de ce type de potentiels est que les hamiltoniens associés pourraient avoir des spectres réels, si les fonctions propres correspondantes sont aussi invariants par la réflexion de l'espace-temps [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Il se trouve que la double propriété d'invariance par rapport à la réflexion de l'espace-temps pour un hamiltonien ainsi que pour ses fonctions propres est essentielle pour que cet hamiltonien décrive la dynamique d'un système physique.

Parmi les systèmes qui peuvent être décrits par cette nouvelle théorie quantique on trouve les systèmes dissipatifs dont les potentiels d'interaction sont souvent représentés par des fonctions complexes.

Le travail de ce mémoire de Magister s'articule sur les techniques et approches citées plus haut, dans le cadre de la mécanique quantique PT -symétrique. Dans le chapitre 1, nous donnons un aperçu général sur l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique. Nous présentons les différentes étapes nécessaires, de cette approche, menant au calcul des valeurs propres d'un potentiel à une dimension satisfaisant à la propriété d'invariance de forme.

Le chapitre 2 est consacré à une brève présentation de la nouvelle théorie quantique PT -symétrique. Sans rentrer dans les détails, qu'on trouve dans la littérature, nous présentons les fondements et bases de cette théorie tout en insistant sur les points qui nous intéressent dans l'exposé de notre travail propre.

Le travail original, réalisé dans ce mémoire fait l'objet des chapitres 3 et 4. Dans le chapitre 3, nous présentons en détail la démarche à suivre pour passer des équations couplées pour les deux composantes du spineur de Dirac à $(1 + 1)$ -dimensions aux équations équivalentes du type Schrödinger. Nous commentons aussi, les raisons pour lesquelles un potentiel PT -symétrique est non seulement adéquat mais nécessaire dans ce cas pour obtenir un spectre réel. Dans le chapitre 4, réservé pour quelques applications, nous présentons les solutions exactes de l'équation de Dirac $(1 + 1)$ pour quatre modèles intéressants dans lesquels la particule fermionique est supposée de masse variable dans l'espace et interagissant avec un potentiel non hermitien mais PT -symétrique. Dans chaque cas, le spectre des niveaux d'énergie est obtenu exactement sous forme compacte. Nous donnons aussi, la forme de l'une des composantes du spineur associé et montrons comment obtenir l'autre composante. Nous terminons ce travail par une conclusion générale où nous discutons nos perspectives dans ce domaine.

Chapitre 1

Approche de supersymétrie en mécanique quantique

1.1 Introduction

La supersymétrie en mécanique quantique est la branche de la physique qui essaye de donner une description commune pour toutes les interactions fondamentales dans la nature. Elle combine les degrés de liberté des bosons et fermions dans une description simple et élégante en fonction de superchamps [4]. Elle constitue donc une description de la symétrie entre les bosons et les fermions, en associant à chaque fermion un "superpartenaire" qui est un boson et vice versa, qui mène à une dégénérescence entre les spectres des fermions et bosons dans une théorie commune.

Ce formalisme a vu le jour avec les travaux de *Nicolai* [18] et *Witten* [19] sur l'unification de la théorie de champs dès le début des années (1970). Les idées fondamentales ont stimulé de nouvelles approches dans d'autres branches de la physique quantique, allant de la physique atomique et moléculaire à la physique nucléaire et physique de la matière condensée. En mécanique quantique non relativiste, la supersymétrie est une approche pour la résolution algébrique de l'équation de Schrödinger dans le but, de déterminer les états liés et les énergies correspondantes pour une certaine catégorie de potentiels, dits invariants de forme. Elle est aussi très efficace pour générer de nouveaux potentiels exactement solubles à partir d'un potentiel de référence donné.

L'approche de la supersymétrie en mécanique quantique peut être considérée comme une ramification de la méthode de factorisation qui fut initiée par Schrödinger et développée plus tard par Infeld et Hull [3]. Les fondements de base de cette approche se sont considérablement développés

avec les travaux de Cooper [4], Junker [5] et Khare et al [20] et la découverte de la notion d'invariance de forme par Gendeshstein [6]. Avec cette méthode, on a découvert une multitude de nouveaux potentiels physiques qui sont analytiquement solubles.

De façon générale, dans l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique, on procède par la réalisation d'une algèbre supersymétrique englobant des opérateurs bosoniques et fermioniques, satisfaisant respectivement des relations de commutation et d'anticommutation. Cette algèbre est fermée sous une combinaison de relations de commutation et anti-commutation. On peut donc voir l'approche de supersymétrie comme une méthode algébrique, simple et élégante, de résolution de l'équation de Schrödinger [7].

1.2 Equation aux valeurs propres non relativistes

Considérons une particule de masse constante en mouvement à une dimension sous l'effet d'un potentiel hermitien et stationnaire $V(x)$. Dans le système d'unités $\hbar = 2m = 1$, l'Hamiltonien en mécanique quantique non relativiste de la particule s'écrit

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1.1)$$

Supposons que le potentiel $V(x)$ satisfait aux conditions de confinement. Ainsi, la particule peut avoir des états liés $\Psi_n(x)$, d'énergies quantifiées E_n , qui sont les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire

$$H\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

où N est le nombre de ces états liés, qui peut être fini ou infini selon l'allure du potentiel $V(x)$. On ne tient compte que des solutions physiques, c'est-à-dire pour lesquelles les fonctions propres sont de carré sommable, qui seront choisies normalisées à l'unité. Ainsi

$$\int (\Psi_n(x))^* \Psi_{\hat{n}}(x) dx = \delta_{n\hat{n}} \quad (1.3)$$

Par ailleurs, puisqu'à une dimension les énergies possibles E_n ne sont pas dégénérées, sera bien commode de les classer par ordre croissant, de sorte que l'énergie la plus basse, correspondant à l'état fondamental est E_0 , celle du premier niveau excité est E_1 et ainsi de suite :

$$E_0 < E_1 < E_2 < \dots \quad (1.4)$$

1.3 Construction de potentiels partenaires

Avant d'exposer les ingrédients de l'approche de supersymétrie en mécanique quantique pour résoudre l'équation (1.2), c'est-à-dire pour obtenir l'ensemble des fonctions propres $\Psi_n(x)$ et des énergies propres correspondantes E_n montrons d'abord comment construire le potentiel partenaire d'un potentiel donné, appelé potentiel de référence. Nous allons exposer ici une approche directe, légèrement différente de l'approche standard qu'on trouve abondamment dans la littérature [4].

Partant du potentiel original du problème $V(x)$, on construit d'abord le nouveau potentiel $V_0(x)$ qui diffère de $V(x)$ par la simple soustraction de l'énergie de l'état fondamental E_0 . Ainsi

$$V_0(x) = V(x) - E_0 \quad (1.5)$$

L'Hamiltonien correspondant qui sera dénoté par H_0 est donné par

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) \quad (1.6)$$

L'équation de Schrödinger stationnaire correspondante s'écrit

$$H_0 \Psi_n^{(0)}(x) = E_n^{(0)} \Psi_n^{(0)}(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.7)$$

avec

$$\Psi_n^{(0)}(x) \equiv \Psi_n(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

et

$$E_n^{(0)} = E_n - E_0 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

Ainsi, par construction l'énergie de l'état fondamental de H_0 est nulle et toutes les autres énergies propres sont positives

$$E_0^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad E_n^{(0)} > 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

Signalons ici que le passage du potentiel original $V(x)$ au potentiel déplacé $V_0(x)$ n'est pas vraiment nécessaire pour la suite du raisonnement mais elle permet de simplifier les démarches des calculs et les expressions finales.

Soit $V_1(x)$ un autre potentiel de confinement, dont l'Hamiltonien correspondant est donné par

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (1.11)$$

avec des valeurs propres quantifiées $E_m^{(1)}$ et des fonctions propres $\Psi_m^{(1)}(x)$,

$$H_1 \Psi_m^{(1)}(x) = E_m^{(1)} \Psi_m^{(1)}(x) \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (1.12)$$

où M est le nombre des états propres. Les fonctions propres $\Psi_m^{(1)}(x)$, qui sont orthogonales, sont aussi choisies normées,

$$\int (\Psi_m(x))^* \Psi_{\hat{m}}(x) dx = \delta_{m\hat{m}}$$

Le potentiel $V_1(x)$ est dit partenaire de $V_0(x)$ au sens de l'approche supersymétrique si les Hamiltoniens correspondants H_0 et H_1 satisfont la relation d'entrelacement ("intertwining" en anglais), qui s'écrit :

$$A_0 H_0 = H_1 A_0, \quad (1.13)$$

où A_0 est un certain opérateur linéaire. La question revient donc au choix de l'opérateur linéaire A_0 qui devrait caractériser la forme du partenaire $V_1(x)$.

A partir de (1.13), on voit bien qu'on peut postuler l'existence d'un autre opérateur B tels que H_0 et H_1 seront mis sous les formes

$$H_0 = B A_0 \quad \text{et} \quad H_1 = A_0 B \quad (1.14)$$

D'autre part, l'hermiticité de H_0 et H_1 entraîne que

$$B^+ A_0^+ = A_0 B \quad \text{et} \quad A_0^+ B^+ = B A_0 \quad (1.15)$$

De cette manière, le problème se réduit ainsi à trouver deux opérateurs linéaires A_0 et B satisfaisant aux équations (1.14) et (1.15). Il peut y avoir plusieurs solutions différentes mais la plus simple est sans doute celle où B coïncide avec son adjoint. Ainsi, on a

$$H_0 = A_0^+ A_0 \quad (1.16)$$

et

$$H_1 = A_0 A_0^+ \quad (1.17)$$

Dans ce cas, A_0 doit être nécessairement linéaire par rapport à l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$. Sans perte de généralité il peut être choisi sous la forme

$$A_0 = \frac{d}{dx} + W_0(x) \quad (1.18)$$

dont l'adjoint est donnée par

$$A_0^+ = -\frac{d}{dx} + W_0(x)$$

où $W_0(x)$ est appelé superpotentiel pour la raison que cette fonction caractérise à la fois le potentiel de référence $V_0(x)$ et son partenaire $V_1(x)$. En effet la relation (1.16) entraîne que $W_0(x)$ est obtenu à partir du potentiel en résolvant l'équation de Riccati

$$W_0^2(x) - \dot{W}_0(x) = V_0(x) \quad (1.19)$$

Par ailleurs, la relation (1.17) montre que le partenaire $V_1(x)$ est obtenu par une relation similaire

$$V_1(x) = W_0^2(x) + \dot{W}_0(x) \quad (1.20)$$

De ces deux équations, on voit bien qu'on peut interchanger les rôles des potentiels $V_0(x)$ et $V_1(x)$

Et considérer le premier comme partenaire du second, il suffit pour cela d affecter $W_0(x)$ par le signe $-$. Ainsi, $V_0(x)$ et $V_1(x)$ seront simplement appelés potentiels partenaires.

1.4 Quelques relations utiles

Une relation très importante entre la fonction propre de l'état fondamental et le superpotentiel est donnée par

$$W_0(x) = -\frac{\dot{\psi}^{(0)}_n(x)}{\psi^{(0)}_n(x)} \quad (1.21)$$

Autrement dit, connaissant la fonction propre de l'état fondamental d'un potentiel quelconque, on peut directement calculer le superpotentiel qui conduit à son partenaire par la relation (1.21). Par ailleurs, connaissant le superpotentiel associé à un potentiel donné, on peut obtenir la fonction propre de son état fondamental par intégration des deux membres de (1.26). Elle sera donnée par

$$\psi^{(0)}_0(x) = C_0 \exp\left[-\int^x W(y)dy\right], \quad (1.22)$$

où C est une constante de normalisation.

1.5 Brisure de symétrie

Il est bien clair que les fonctions propres correspondant aux valeurs propres permises d'un Hamiltonien doivent être physiquement acceptables, c'est-à-dire normalisables sur tout l'intervalle permis au mouvement de la particule. Donc, pour pouvoir aller de l'avant il faut s'assurer d'abord que la fonction propre de l'état fondamental donnée par (1.22), est bien normalisable. En général, on doit simplement regarder le comportement de cette fonction aux bornes de l'intervalle permis au mouvement. Par exemple, la fonction doit nécessairement s'annuler pour $x \rightarrow \pm\infty$ pour les mouvements à une dimension de l'espace. Pour un potentiel radial, défini pour $r \geq 0$, on doit aussi exiger que la fonction d'onde s'annule à l'origine et à l'infini. Ainsi, si ces conditions sont satisfaites, la fonction propre $\psi^{(0)}_0(x)$ est alors bien normalisable et on dit que la supersymétrie est non brisée. On procédera pour les étapes suivantes comme ce qui va suivre dans les prochaines sections. En revanche, si les conditions précédentes ne sont pas satisfaites, $\psi^{(0)}_0(x)$ est nécessairement non normalisable. Dans ce cas on regardera tout d'abord la fonction propre de l'état fondamental du partenaire H_1 , qui sera simplement proportionnelle à l'inverse $\psi^{(0)}_0(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)}_0(x) &= C_1 \exp\left[-\int^x W(y)dy\right] \\ &\sim \frac{1}{\Psi^{(0)}_0(x)}\end{aligned}\quad (1.23)$$

Si cette fonction est normalisable, alors la supersymétrie est non brisée. Cependant, dans ce cas il faudra inverser les rôles des Hamiltoniens H_0 et H_1 . On considérera H_1 comme l'Hamiltonien de référence et H_0 comme son partenaire, et poursuivre l'étude comme ce qui va suivre dans les prochaines sections.

Dans le cas où les deux fonctions $\Psi^{(0)}_0(x)$ et $\Psi^{(1)}_0(x)$ sont non normalisables, on dit que la supersymétrie est brisée. Les démarches que nous allons développer dans les sections suivantes ne s'appliqueront pas donc systématiquement de sorte que dans la plupart des cas le problème ne pourra pas être résolu par l'approche de la supersymétrie et il faudra utiliser d'autres méthodes alternatives. Il faut cependant noter qu'il existe certains cas particuliers de supersymétrie brisée qui demeurent traitables par l'approche supersymétrique après avoir éliminé la brisure par des techniques spécifiques [4].

1.6 Relations entre les valeurs propres et fonctions propres de H_0 et H_1

Nous nous intéresserons dorénavant au cas où la supersymétrie entre les Hamiltoniens partenaires H_0 et H_1 n'est pas spontanément brisée.

La relation entre les $E^{(1)}_n$ et $E^{(0)}_n$ est telle que

$$E^{(0)}_{n+1} = E^{(1)}_n \quad \text{pour } n \geq 1, \text{ et } E^{(0)}_0 = 0 \quad (1.24)$$

Les relations simples entre les fonctions propres des deux partenaires sont donnée par

$$\Psi^{(1)}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{E^{(0)}_{n+1}}} A^+_0 \Psi^{(0)}_{n+1}(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (1.25)$$

ou de façon équivalente

$$\Psi^{(1)}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^{(1)}_n}} A^+_0 \Psi^{(1)}_n(x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (1.26)$$

Ainsi, connaissant les fonctions propres de l'un des Hamiltoniens partenaires on peut déterminer celles de l'autre par des applications répétées de A_0 ou A_0^+ selon le cas.

Enfin, la première conclusion qu'on peut tirer de la supersymétrie est qu'elle peut servir comme outil élégant pour construire de nouveaux potentiels physiques et déterminer leurs spectres et fonctions propres à partir de celles de potentiels de référence dont les caractéristiques sont connues d'avance.

1.7 Invariance de forme

1.7.1 Définition

Commençant par définir ce qu'on entend par "invariance de forme". Si les potentiels partenaires supersymétriques $V_0(x)$ et $V_1(x)$ définis précédemment ont une forme similaire et s'ils ne diffèrent que par certains paramètres, on dit d'eux qu'ils sont invariants de forme. Autrement dit, si les potentiels $V_0(x; a_0)$ et $V_1(x; a_1)$ satisfont à la condition

$$V_1(x; a_1) = V_0(x; a_0) + R(a_0) \quad (1.27)$$

où a_0 est un ensemble de paramètres, a_1 est une fonction de a_0 et $R(a_0)$ est une fonction indépendante de x , alors ils sont invariants de forme.

1.8.2 Formules générales

Le spectre complet des valeurs propres de H_1 est donné par

$$E_0^{(0)}(a_0) = 0 \text{ et } E_n^{(0)}(a_0) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \text{ pour } n \geq 1 \quad (1.28)$$

Et la fonction propre du nième état d'énergie $\Psi_n^{(0)}(x; a_0)$ pour l'Hamiltonien $H_1(x; a_0)$ est donnée par

$$\Psi_n^{(0)}(x; a_0) = A^+(x; a_0)\Psi_{n-1}^{(0)}(x; a_1)$$

Chapitre 2

Quelques notions sur la PT-symétrie en mécanique quantique

2.1 Introduction

Il est connu en algèbre que si un opérateur, défini sur un espace de Hilbert, est hermitien, ses valeurs propres sont toutes réelles et les fonctions propres correspondantes forment une base orthogonale. En revanche, s'il est non hermitien, il n'est pas garanti que ses valeurs propres soient réelles mais plutôt elles sont en général complexes.

En mécanique quantique, la dynamique d'un système physique est complètement régie par son opérateur Hamiltonien. Il a toujours été admis que l'Hamiltonien doit être un opérateur linéaire et hermitien (dit aussi auto-adjoint) par rapport à l'espace de Hilbert. Ces deux conditions avaient été considérées comme nécessaires pour l'Hamiltonien d'un système physique afin d'obtenir une évolution unitaire de sa fonction d'onde [21]. En effet, l'évolution unitaire de la fonction d'onde signifie automatiquement que le carré de son module demeure indépendant du temps, ce qui est compatible avec son interprétation probabiliste. En fait, la condition d'hermiticité est généralisée à toutes les observables physiques du système en plus de son Hamiltonien.

Depuis un peu plus d'une décennie, de nouvelles idées commencent à émerger dans la littérature et qui vont dans le sens d'une extension du domaine de validité de la mécanique quantique. En 1998, Bender et al [8] proposèrent pour la première fois une famille d'Hamiltoniens stationnaires à une dimension

$$H = p^2 + x^2(ix)^\mathcal{E} \quad (2.1)$$

et montrèrent que toutes ses valeurs propres sont réelles pour $\mathcal{E} \geq 0$. Pour les valeurs négatives de \mathcal{E} , les calculs numériques montrent que le spectre est complexe. Il est évident que l'Hamiltonien (2.1), qui se réduit à celui d'un oscillateur harmonique dans le cas particulier où $\mathcal{E} = 0$, n'est pas nécessairement hermitien pour toutes les valeurs de \mathcal{E} . Les auteurs avaient attribué la réalité des valeurs propres à son invariance par rapport aux opérations simultanées de réflexion de l'espace, et du renversement du sens du temps. Cette double invariance est alors baptisée PT-symétrie, où P et T désignent respectivement les opérateurs de réflexion de l'espace et du renversement du sens du temps. En terme de mathématique, cette invariance signifie que se transforme en lui-même par l'action du produit PT . On écrit

$$(PT)^\dagger H (PT) = H$$

Un peu plus tard, il s'est avéré que la condition d'invariance d'un Hamiltonien non hermitien par rapport à la réflexion de l'espace-temps n'est pas suffisante pour la réalité de son spectre [9, 10]. En effet, les valeurs propres réelles correspondent aux fonctions propres qui sont elles aussi invariantes par cette double réflexion de l'espace-temps, PT-symétriques. Par contre, il correspond aux fonctions propres non PT-symétriques des valeurs propres complexes.

Depuis cette découverte, on s'intéresse de plus en plus aux propriétés fondamentales des Hamiltoniens PT-symétriques. Le but de ce chapitre est de donner un aperçu sur le développement de cette nouvelle théorie et de faire ressortir les principaux résultats auxquels on est arrivé dans les recherches [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16]. Nous nous limiterons toutefois au cas unidimensionnel, dont les résultats seront utilisés dans les chapitres suivants.

2.2 Propriétés des Hamiltoniens PT-symétriques

2.2.1 Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT-symétrique

La réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT-symétrique est une conséquence de la non-brisure de la symétrie PT , qui signifie que les fonctions propres de H sont simultanément fonctions propres de PT . En fait, même si H et PT commutent, on ne peut pas affirmer qu'ils possèdent les mêmes fonctions propres, comme c'est le cas en mécanique quantique. La raison est que le produit

PT , n'est pas un opérateur linéaire mais anti-linéaire, ce qui ne garantit pas l'existence d'un ensemble de fonctions propres communes.

Ainsi, pour construire une théorie à partir des Hamiltoniens PT -symétriques, on exige de plus que la symétrie ne soit pas brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas évidente car il n'existe aucun moyen pour affirmer a priori que pour un tel Hamiltonien PT -symétrique, la symétrie est brisée ou non. Il faut tout d'abord déterminer ses fonctions propres pour en tirer une conclusion.

Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT -symétrique. En effet, soit donc $\{\Phi_n(x)\}$, pour $n = 1, 2, \dots$, l'ensemble des fonctions propres communes à H et PT , on a

$$H\Phi_n(x) = E_n\Phi_n(x) \quad (2.2)$$

et

$$PT\Phi_n(x) = \lambda_n\Phi_n(x) \quad (2.3)$$

avec

$$[H, PT] = 0 \quad (2.4)$$

avec E_n et λ_n les valeurs propres correspondantes, qui sont a priori complexes.

Cependant, puisque $(PT)^2 = 1$, il résulte que $|\lambda_n|^2 = 1$ pour toutes les valeurs possibles de n . Ainsi λ_n est un facteur de phase qui peut être absorbé dans la fonction propre de sorte que, sans perte de généralité, on peut prendre et écrire

$$PT\Phi_n(x) = \Phi_n(x) \quad (2.5)$$

Par ailleurs, en appliquant PT à gauche sur les deux membres de (2.2) et tenant compte de (2.5), on obtient

$$H\Phi_n(x) = E_n^*\Phi_n(x) \quad (2.6)$$

Cette dernière relation, combinée avec (2.2), entraîne que les valeurs propres sont réelles

$$E_n = E_n^*$$

2.2.2 Fonctions propres et espace de Hilbert

La question qui se pose maintenant est de savoir si les Hamiltoniens possédant une PT -symétrie non brisée peuvent décrire la dynamique de systèmes physiques réels. Autrement dit, il faut savoir si les fonctions propres de tels Hamiltoniens peuvent engendrer des espaces de Hilbert munis de produits scalaires conduisant à des normes positives. En plus, il faut aussi garantir que l'évolution des états propres dans le temps demeure unitaire.

Bien entendu, ces deux exigences sont satisfaites dans la théorie quantique usuelle avec des Hamiltoniens hermitiens. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme une probabilité, qui doit être défini positive, alors que la deuxième condition garantit justement l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps.

Les fonctions propres engendrent donc un espace vectoriel de Hilbert. Le produit scalaire de deux fonctions quelconques $\psi(x)$ et $\varphi(x)$, dans le nouveau espace de Hilbert, a été définie comme

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi)_{PT} &= \int_c dx [PT\psi(x)]\varphi(x) \\ &= \int_c dx \psi^*(-x)\varphi(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

où c est un certain contour dans le plan complexe, appartenant à un domaine contenant l'axe réel.

L'avantage de cette définition du produit scalaire est que, comme en mécanique quantique ordinaire, la norme de toute fonction d'onde est une quantité indépendante de sa phase globale et de plus elle est conservée dans le temps. Cependant, cette définition contient un inconvénient majeur qui réside dans le fait que les normes de certains états propres d'Hamiltoniens PT -symétriques sont négatives.

Les fonctions propres d'un Hamiltonien PT -symétrique vérifient les deux relations suivantes [8, 9, 10]

$$(\psi_n, \psi_m) = (-1)^n \delta_{nm} \quad (2.8)$$

et

$$\sum_n (-1)^n \psi_n(x)\psi_n(y) = \delta(x - y) \quad (2.9)$$

qui ressemblent aux relations d'orthonormalisation et de fermeture.

Ces deux relations présentent des anomalies par rapport à ce qui est admis en mécanique quantique, usuelle. En effet, il découle que les normes de certains états sont négatives et par conséquent ces derniers ne peuvent pas être interprétés comme des probabilités. Par ailleurs, l'espace engendré par les fonctions propres, qui n'est guère un espace de Hilbert usuel, ne peut pas être considéré comme un espace complet. Dans la représentation de Dirac, on peut écrire les relations (2.8) et (2.9) comme

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = (-1)^n \delta_{nm} \quad (2.10)$$

et

$$\sum_n (-1)^n |\psi_n \rangle \langle \psi_n| = I \quad (2.11)$$

où $|\psi_n\rangle$ est le ket de Dirac associé à la fonction propre $\psi_n(x)$ et $\langle\psi_n|$ le bra de Dirac correspondant par rapport au produit scalaire 2.7. Dans la suite, nous appelons ces dernières relations, pseudo relation d'orthonormalisation et pseudo relation de fermeture.

2.3 Nouvelle symétrie pour des Hamiltoniens PT -symétriques

L'inconsistance des relations (2.10) et (2.11) a même poussé certains auteurs à renoncer pendant un certain temps [14, 15, 16] à l'idée de construire une théorie quantique pour ce type d'Hamiltoniens non hermitiens. Cependant, plus tard il a été montré que tous les Hamiltoniens PT -symétriques dont la symétrie n'est pas brisée possèdent une autre symétrie cachée, engendrée par un nouveau opérateur dénoté C . Autrement dit, si un Hamiltonien H est PT -symétrique et si cette symétrie n'est pas brisée il existe un opérateur non trivial C , appelé opérateur de conjugaison de charge, qui commute avec H et PT . Ainsi,

$$[H, C] = 0, [C, PT] = 0 \quad (2.12)$$

et par conséquent H commute avec le produit CPT

$$[H, CPT] = 0 \quad (2.13)$$

On montre alors que les fonctions propres communes à H et CPT sont toutes de normes définies positives. Ainsi, une fois que l'opérateur C est déterminé, il sera possible donc de construire une nouvelle théorie quantique qui satisfait à toutes les contraintes requises. Cependant, jusqu'à présent il n'existe pas de méthodes systématiques pour déterminer l'opérateur C de manière exacte, sauf pour certains cas simple où l'Hamiltonien est de dimension finie. Pour plus de détails sur cette question, je renvoie le lecteur au mémoire de Zeghou [22].

2.3.1 Construction de l'opérateur C

Bien que l'existence de l'opérateur C peut être prouvée facilement, sa détermination explicite n'est pas une chose facile dans le cadre général. En effet, jusqu'à présent il n'existe que des tentatives pour déterminer l'opérateur C au premier ordre par rapport à un paramètre de perturbation. Ici, nous allons suivre brièvement la recette originale de Bender pour prouver l'existence de l'opérateur C . Les détails peuvent être suivis dans les travaux de Bender ([8, 9, '10, 11, 12]).

Le but est alors de chercher un operateur C , représentant une nouvelle symétrie cachée, qui doit commuter simultanément avec H et PT et telles que les nouvelles fonctions propres communes a H et CPT ne présentent pas les anomalies citées plus haut.

Si les $|\psi_n\rangle$ sont les kets associés aux fonctions propres $\psi_n(x)$, l'operateur C doit donc transformer en un nouveau ket $|\|\psi_n(x)\rangle$ dont la norme PT est positive. Ce nouveau vecteur doit satisfaire à

$$\begin{aligned} |\|\psi_n(x)\rangle &= C|\psi_n\rangle \\ &= (-1)^n |\psi_n\rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

De cette manière, la pseudo relation d'orthonormalisation et la pseudo relation de fermeture vont conduire aux relations d'orthonormalisation et de fermeture usuelles.

En utilisant la pseudo relation de fermeture (2.11), on peut représenter C comme

$$C = \sum_n (-1)^n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (2.15)$$

qui s'écrit dans la représentation position comme

$$C(x, y) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(y) \quad (2.16)$$

Ainsi, cet operateur est Bien défini en fonction des état propres PT-symétriques de l'Harniltonien, autrement dit, C est une fonction de H . En effet, en utilisant la pseudo relation de fermeture (2.11), on peut représenter H comme

$$H = \sum_n (-1)^n E_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (2.17)$$

Evidemment,

$$[H, C] = 0 \quad (2.18)$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$C^2 = 1 \quad (2.19)$$

Pour terminer, signalons que puisque C est une fonction de H , il est un operateur spécifique qui dépend particulièrement du système étudié, contrairement, aux operateurs P et T . Cette contrainte conduit à conclure que même si l'operateur C résout l'anomalie de la non positivité de la norme, la théorie quantique qu'il peut engendrer ne peut être globale mais spécifique pour chaque Hamiltonien PT-symétrique. A notre avis, ceci est dû au fait que la relation (2.14) ne peut en fait être considérée comme une définition complète d'un operateur qui représente une réelle symétrie.

Chapitre 3

Résolution de l'équation de Dirac stationnaire à une dimension avec masse dépendante de l'espace de la position, en présence d'un potentiel PT-symétrique

3.1 Rappels sur l'équation de Dirac stationnaire

L'équation pour une particule fermionique relativiste a été historiquement introduite par Dirac en 1928 pour une particule dotée d'un spin $\frac{1}{2}$ en mouvement dans un espace à (3+1)-dimensions. L'idée de Dirac était d'écrire une équation générale ayant une forme semblable à l'équation de Schrödinger mais dont l'Hamiltonien doit tenir en compte l'existence du spin. La contrainte principale imposée par Dirac est que dans le cas d'une particule libre, l'équation doit être compatible avec l'expression de l'énergie E d'une particule relativiste, donnée par

$$\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2 \tag{3.1}$$

où c est la vitesse de la lumière, m représente la masse de la particule au repos et \mathbf{p} son impulsion. Dirac montra alors que dans le cas stationnaire dans un espace à $(n+1)$ -dimensions cette équation doit prendre la forme

$$(\mathbf{c}\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

où $\Psi(\mathbf{r})$ est une matrice colonne de rang N , appelée spinneur, β ,

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont $(n+1)$ matrices $N \times N$ hermitiennes. Pour satisfaire la contrainte de l'énergie (3.1) on montre que les matrices précédentes sont toutes de carré égal à la matrice unité

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Et qu'elles doivent satisfaire les relations d'anticomutations suivante

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

et

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (3.5)$$

Pour satisfaire aux contraintes (3.3), (3.4) et (3.5), on montre que le rang N des matrices α_i et β est un nombre qui dépend de la dimension n de l'espace. A trois dimensions ces matrices sont de rang supérieur ou égal à 4. Ainsi, des matrices 4×4 sont compatibles avec un spin $1/2$ et peuvent être représentées de différentes manières. La représentation standard de Dirac utilise les matrices de Pauli pour construire des matrices $\beta, \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ comme

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad i = x, y, z \quad (3.6)$$

où I est la matrice 2×2 , les σ_i sont les matrices bien connues de Pauli,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour les dimensions inférieures de l'espace, c'est-à-dire à deux dimensions et à une dimension, on a seulement besoin de deux matrices α_i à deux dimensions et une matrice α à une dimension. Il se trouve que, dans ce cas, les contraintes

(3.3), (3.4) et (3.5) peuvent être satisfaites par les matrices de Pauli. A deux dimensions, on aura besoin seulement de deux d'entre elles. Comme les trois matrices de Pauli sont unitaires et forment une base complète avec la matrice unité pour les matrices 2×2 , elles se transforment entre elles par de transformations unitaires. Par conséquent, n'importe quel choix de ces matrices, à $(2+1)$ -dimensions et à $(1+1)$ -dimensions conduit à la même solution pour l'énergie dans l'équation aux valeurs propres (3.2). Autrement dit, le passage d'une

représentation à une autre est équivalente à faire une transformation unitaire sur le spineur, qui laisse invariant le spectre énergétique.

3.2 Equation de Dirac a (1+1)-dimensions a masse variable, en présence d un potentiel PT-symétrique

De façon générale, l'équation de Dirac stationnaire pour une particule en interaction avec un potentiel indépendant du temps est donnée par

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Où $V(\mathbf{r})$ est l'énergie potentiel correspondante à l'interaction. Cette équation demeure valide quelles que soient les natures des fonctions $V(\mathbf{r})$ et de la masse.

Les solutions physiques qu'on doit considérées sont celles qui sont normalisables. Autrement dit, pour un potentiel hermitien, on doit exiger que

$$\int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} (\sum_k \Psi_k^*(\mathbf{r})\Psi_k(\mathbf{r})) = 1 \quad (3.9)$$

où l'intégration est étendue à tout le domaine du mouvement permis par le potentiel d'interaction. Il est donc nécessaire d'imposer que la norme de chaque composante soit normée. Le spineur est représenté par une matrice colonne à quatre composantes à (3+1)-dimensions et a deux composantes à (2+1) et à (1+1)-dimensions. Ainsi, l'équation (3.8) est en fait équivalente à quatre équations couplées du premier ordre, selon la dimension de l'espace, qui sont souvent difficiles voire impossible à résoudre de manière exacte. À trois dimensions, le nombre de problèmes exactement solubles est très réduit et concerne spécialement certains potentiels à symétrie sphérique, comme le potentiel coulombien. La difficulté de résolution de cette équation est considérablement réduite pour les problèmes à une dimension de l'espace ou à deux dimensions avec symétrie radiale.

Depuis l'émergence de la nouvelle théorie quantique PT-symétrique, un grand intérêt a été donné à la résolution de cette équation à (1+1)-dimensions pour les potentiels PT-symétriques avec des particules de masse constante ou variable dans l'espace. Dans le cas de masse constante, il existe un nombre non négligeable de problèmes qui ont été résolus exactement. Cependant, en admettant que la masse est variable dans l'espace et en faisant un choix judicieux pour cette variation, on peut augmenter d'une manière considérable le nombre de problèmes exactement solubles.

Nous allons présenter, dans ce qui suit, la démarche à suivre dans le cas de (1+1)-dimensions afin de transformer les deux équations du premier ordre couplées, relatives aux

composantes du snipeur en équations indépendantes du type Schrödinger. Pour ce faire, choisissons l'axe z comme axe du mouvement de la particule et considérons le cas général où la masse de la particule est une fonction de l'espace. Sans perte de généralité, prenons le choix particulier suivant pour les matrices α_z et β

$$\alpha_z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

L'équation (3.8) s'écrit comme

$$\left[\alpha p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m(z) + V(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \phi(z) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \phi(z) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

où E est l'énergie de la particule, $m(z)$ sa masse, p_z est l'opérateur impulsion.

Du fait que la matrice σ_x n'est pas diagonale, l'équation (3.11) se scinde en deux équations couplées du premier ordre pour les composantes $\psi(z)$ et $\phi(z)$, données par

$$-i\hbar c \frac{d\phi(z)}{dz} + (E - V(z))\phi(z) - m(z)c^2\psi(z) = 0 \quad (3.12)$$

et

$$i\hbar c \frac{d\psi(z)}{dz} + (E - V(z))\psi(z) - m(z)c^2\phi(z) = 0 \quad (3.13)$$

Il faut donc résoudre ces deux équations pour déterminer les énergies possibles et les snipeurs correspondants. Commençant tout d'abord par l'élimination de la composante $\phi(z)$ dans l'équation (3.13). Pour ce faire, dérivons par exemple l'équation (3.13) par rapport à la variable z . Après un réarrangement des termes, on obtient une équation du second ordre par rapport à $\psi(z)$ et du premier ordre par rapport à $\phi(z)$, donnée par

$$i\hbar c \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + i(E - V(z)) \frac{d\psi(z)}{dz} - i \frac{dV(z)}{dz} \psi(z) - ic^2 \frac{dm(z)}{dz} \phi(z) - ic^2 m(z) \frac{d\phi(z)}{dz} = 0 \quad (3.14)$$

Pour éliminer maintenant la composante $\phi(z)$ et sa dérivée $\phi'(z)$ de l'équation (3.14), on utilise de nouveau les équations couplées (3.12) et (3.13) qu'on peut réécrire pour l'occasion de manières équivalentes comme

$$\phi(z) = \frac{i\hbar c}{cm(z)} \frac{d\psi(z)}{dz} + \frac{E - V(z)}{c^2 m(z)} \psi(z) \quad (3.15)$$

et

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{ic}{\hbar} m(z)\psi(z) - \frac{i}{c\hbar} (E - V(z))\phi(z) \quad (3.16)$$

En se servant de (3.15) et (3.16), on obtient une équation différentielle du second ordre pour la composante $\psi(z)$ toute seule, qui s'écrit

$$-\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \frac{m'(z)}{m(z)} \frac{d\psi(z)}{dz} \left[-i \frac{V'(z)}{\hbar c} - \frac{i}{\hbar c} \frac{m'(z)}{m(z)} (E - V(z)) - \frac{(E - V(z))^2 - c^4 m^2(z)}{\hbar^2 c^2} \right] \psi(z) = 0 \quad (3.17)$$

Cette équation est du type Sturm-Liouville dont les coefficients sont des fonctions variables dans l'espace et pourraient, selon le potentiel, prendre des valeurs complexes. Cependant, on ne s'intéresse qu'aux solutions physiques normalisables et correspondant a des énergies réelles. Pour ce faire, le potentiel $V(z)$ et la masse $m(z)$ doivent être judicieusement choisis. Pour mieux voir les différentes possibilités du choix de ces paramètres, il conviendra mieux de transformer l'équation (3.17) en une équation du type Schrödinger. L'astuce, qui est bien connue, consiste a faire une transformation sur la fonction $\psi(z)$ de sorte a éliminer le terme du premier ordre dans l'équation (3.17). Cette transformation doit avoir la forme suivante

$$\psi(z) = \sqrt{m(z)} \varphi(z) \quad (3.18)$$

En insérant l'expression (3.18) dans l'équation (3.17), on obtient une équation du type Schrödinger pour la nouvelle fonction $\varphi(z)$, sous la forme

$$-\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + V_{eff}(z)\varphi(z) = \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^2 \varphi(z) \quad (3.19)$$

Ou $V_{eff}(z)$ est appelé potentiel effectif, et est donne par

$$V_{eff}(z) = \frac{i}{\hbar c} V'(z) + \frac{c^4 m^2(z) - V^2(z) + 2EV(z)}{\hbar^2 c^2} - \frac{i}{\hbar c} \frac{m'(z)}{m(z)} - \frac{i}{\hbar c} \frac{m'(z)}{m(z)} (E - V(z)) - \frac{1}{2} \frac{m''(z)}{m(z)} + \frac{3}{4} \left(\frac{m'(z)}{m(z)}\right)^2 - \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + V_E(z)\varphi(z) = 0 \quad (3.20)$$

Il faut bien préciser ici que l'appellation de (3.17) équation du type Schrödinger veut dire simplement quelle a juste la forme d'une équation de Schrödinger. Il y a cependant une différence taille car le potentiel effectif (3.20) dépend explicitement de l'énergie qu'on veut calculer. Nous avons écrit l'équation (3.19) sous cette forme, juste pour la conformité avec la littérature.

A notre avis, l'écriture adéquate de l'équation (3.19) doit être sous la forme

$$-\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + V_E(z)\varphi(z) = 0 \quad (3.21)$$

avec

$$V_E(z) = -\frac{i}{\hbar c} V'(z) + \frac{c^4 m^2(z) - (E - V(z))^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{i}{\hbar c} \frac{m'(z)}{m(z)} (E - V(z)) - \frac{1}{2} \frac{m''(z)}{m(z)} + \frac{3}{4} \left(\frac{m'(z)}{m(z)}\right)^2 \quad (3.22)$$

L'équation (3.21) est maintenant une équation de Schrödinger pour une particule d'énergie nulle placée dans le potentiel $V_E(z)$. Le problème est alors équivalent à considérer E comme paramètre et résoudre l'équation de Schrödinger usuelle

$$-\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + V_E(z)\varphi(z) = \varepsilon\varphi(z) \quad (3.23)$$

Pour le potentiel $V_E(z)$ pour obtenir toutes les énergies possibles comme fonction de E , $\varepsilon = f(E)$ et ensuite résoudre l'équation

$$\varepsilon = f(E) = 0 \quad (3.24)$$

Dans l'espace des réels, pour déterminer le spectre du problème original.

Pour plus de commodité, introduisons la nouvelle fonction $\tilde{V}(z)$, qu'on appellera potentiel de référence, relie au potentiel $V(z)$ et a la masse $m(z)$ par la relation suivante

$$V(z) = \hbar c \left(\frac{i}{2} \frac{m'(z)}{m(z)} + \tilde{V}(z) \right) \quad (3.25)$$

En insérant (3.25) dans (3.20), le potentiel effectif dans (3.20) s'écrira sous la forme simplifiée suivante

$$V_{eff}(z) = \left(\frac{cm(z)}{\hbar} \right)^2 - \tilde{V}^2(z) + 2 \frac{E}{\hbar c} \tilde{V}(z) - i\tilde{V}'(z) \quad (3.26)$$

et le potentiel $V_E(z)$ prendra la forme

$$V_E(z) = \left(\frac{cm(z)}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{E}{\hbar c} - \tilde{V}(z) \right)^2 - i\tilde{V}'(z) \quad (3.27)$$

Puisqu'on s'intéresse seulement aux valeurs réelles de l'énergie E , alors la nature des potentielles $V_{eff}(z)$ et $V_E(z)$ dépend du potentiel de référence $\tilde{V}(z)$. Si $\tilde{V}(z)$ est une constante réelle, (en particulier nul), $V_{eff}(z)$ et $V_E(z)$ sont hermitiens et par conséquent les valeurs propres ε de (3.23) sont réelles. Le spectre original sera donc par les solutions réelles de (3.24) si elles existent.

Si $\tilde{V}(z)$ est hermitien, alors $V_{eff}(z)$ et $V_E(z)$ sont forcément complexes et par conséquent les valeurs propres ε complexes, de sorte que le spectre original sera déterminé par l'intersection des solutions des deux équations

$$Re f(E) = 0 \quad \text{et} \quad Im f(E) = 0 \quad (3.28)$$

Chacune de ces deux équations est une équation transcendante très compliquée et il sera très difficile, voir même impossible, d'espérer obtenir des solutions acceptables.

Pour que $V_{eff}(z)$ et $V_E(z)$ soient hermitiens, il faut donc choisir impérativement $\tilde{V}(z)$ comme une fonction PT -symétrique ou une constante réelle. Autrement dit, en tenant compte

de la relation (3.25), il faut que le potentiel original $V(z)$ soit lui-même PT -symétrique. Pour cette raison, on trouve dans la littérature uniquement des propositions de modèle avec $V(z)$ une fonction PT -symétrique mais, à notre connaissance, le raisonnement qu'on vient de présenter ici n'a jamais été discuté avant.

Chapitre 4

Etude de quelques modèles de potentiels PT -symétriques avec masses dépendantes de l'espace à $(1 + 1)$ - dimensions

4.1 Introduction

L'objectif de ce travail est la construction de quelque modèle d'équations de Dirac à $(1+1)$ -dimensions, exactement solubles, dont la particule est soumise à un potentiel PT -symétrique et sa masse est une fonction de l'espace. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, il est toujours possible de trouver une masse $m(z)$ qui, combinée avec le potentiel PT -symétrique $V(z)$, conduit à un potentiel effectif exactement soluble. Cependant, même s'il n'existe, à priori, aucune contrainte sur le potentiel, la masse doit

satisfaire certaines contraintes physiques. Entre autre, elle doit être nécessairement toujours positive. Cette contrainte à elle seule nous oblige à fixer la forme de la masse $m(z)$ au préalable et choisir le potentiel PT-symétrique $V(z)$ qui convient pour obtenir une solution exacte du problème. On trouve dans la littérature plusieurs travaux récents dans ce sens avec des choix varies de la masse et du potentiel. Par ailleurs, dans tous les modèles proposés dans la littérature, on trouve que le potentiel et la masse sont indépendants de sorte qu'on ne peut en déduire des cas particuliers intéressants. En outre les fonctions proposées pour la masse $m(z)$ dépendent d'un seul paramètre libre et ne se réduisent pas aux cas particuliers de la masse constante pour n'importe quel choix de ce paramètre. Nous allons proposer quatre nouveaux modèles qui diffèrent de ceux de la littérature par le fait que nos fonctions $m(z)$ dépendent de plus d'un paramètre et se réduisent à une masse constante dans un cas limite. Ainsi, nous pouvons obtenir comme cas particuliers les résultats concernant chaque potentiel dans le cas d'une masse constante.

Pour la résolution de l'équation du type Schrödinger, nous allons utiliser l'approche analytique ainsi que l'approche de la super symétrie en mécanique quantique pour résoudre partiellement le problème aux valeurs propres.

4.2 Modèle avec masse bornée et potentiel de référence constant

Considérons une particule fermionique dont la masse est une fonction de l'espace et deux paramètres libres selon la loi

$$m(z) = \sqrt{\frac{-\lambda^2}{\cosh^2 \alpha z} + \mu^2} \quad (4.1)$$

Soumise à un pseudo-potentiel réel et constant

$$\tilde{V}(z) = \beta \quad (4.2)$$

où α, μ, λ et β sont des paramètres réels. Pour que la masse soit une fonction toujours positive, on doit on doit supposer que

$$|\mu| > |\lambda| \quad (4.3)$$

Pour $\lambda = 0$, la masse est une constante $m=|\mu|$ qui représente aussi la valeur limite lorsque $z \rightarrow \pm\infty$. Donc, dans la limite $\lambda = 0$, les résultats que nous allons obtenir devront coïncider avec celles du même problème avec masse constante.

Cherchons maintenant la forme du potentiel $V(z)$. Insérons les expressions de $m(z)$ et de $\tilde{V}(z)$ données par (4.1) et (4.2) dans (3.25), $V(z)$ prend la forme

$$V(z) = \hbar c \left[\frac{i\lambda^2 \alpha \tanh \alpha z}{2(\mu^2 \cosh^2 \alpha z - \lambda^2)} + \beta \right] \quad (4.4)$$

Qui est bien non hermitien mais PT -symétrique ; i.e. $V^*(-z) = V(z)$.

De même, on tire l'expression du potentiel $V_E(z)$ sous la forme

$$V_E(z) = -\frac{c^2 \lambda^2}{\hbar^2} \frac{1}{\cosh^2 \alpha z} + \left(\frac{c\mu}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2 \quad (4.5)$$

Qui est, a une constante additive près, le potentiel de Poshl-Teller a une dimension, bien connu et largement étudié dans la littérature.

L'équation de Schrödinger (3.23) pour une énergie nulle $\varepsilon = 0$, s'écrit alors

$$-\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - \frac{\delta}{\cosh^2 \alpha z} \varphi(z) = \tilde{E} \varphi(z) \quad (4.6)$$

avec

$$\tilde{E} = \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2 - \left(\frac{c\mu}{\hbar}\right)^2 \quad (4.7)$$

et

$$\delta = \frac{c\lambda}{\hbar} \quad (4.8)$$

On est donc amène à déterminer le spectre d'une particule quantique non relativiste de masse constante (égale à $\frac{1}{2}$), placée dans le potentiel

$$U(z) = -\frac{\delta}{\cosh^2 \alpha z} \quad (4.9)$$

Défini sur tout l'axe réel, $z \in]-\infty, +\infty[$.

Bien que les solutions de ce problème, c'est-à-dire de l'équation (4.6), sont présentées dans différents travaux dans la littérature, en utilisant les différentes techniques mentionnées dans introduction, il convient ici de présenter la technique de l'équation hypergéométrique pour donner un cache pédagogique a ce mémoire. Nous allons nous intéresser seulement au spectre discret, qui, d'après la forme du potentiel, est strictement négatif. Ainsi, en imposant au paramètre \tilde{E} la contrainte $\tilde{E} < 0$, on réduit les solutions acceptables pour les énergies du problème original par la contrainte

$$\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2 - \left(\frac{c\mu}{\hbar}\right)^2 < 0 \quad (4.10)$$

La technique de l'équation hypergéométrique consiste à faire une transformation ponctuelle adéquate sur la variable de l'espace et une transformation similaire sur la fonction propre, pour ramener l'équation (4.6) à une équation du type Hypergéométrique. Considérons donc la nouvelle variable ξ , reliée à z par

$$\xi = \tanh \alpha z \in]-1, 1[\quad (4.11)$$

Et posons

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}(\xi) \quad (4.12)$$

Après quelques calculs algébriques, on obtient l'équation différentielle de $\bar{\varphi}(\xi)$ sous la forme

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \bar{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\bar{\varphi}(\xi)}{d\xi} + \left[\frac{\tilde{E}}{\alpha^2(1-\xi^2)} + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right] \bar{\varphi}(\xi) = 0 \quad (4.13)$$

Afin de simplifier les expressions des formules que nous allons obtenir, posons aussi

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-\tilde{E}}}{\alpha} \quad (4.14)$$

et

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} = s(s+1) \quad (4.15)$$

De sorte que (4.13) se mette sous la forme

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\bar{\varphi}(\xi)}{d\xi} \right] + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1-\xi^2} \right] \bar{\varphi}(\xi) = 0 \quad (4.16)$$

Qui est l'équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de Legendre généralisées. Elle peut être ramenée à la forme à la hypergéométrique en faisant tout d'abord la substitution

$$\bar{\varphi}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \chi(\xi) \quad (4.17)$$

Qui conduit à l'équation suivante pour la nouvelle fonction $\chi(\xi)$

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \chi(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi(\xi + 1) \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1) \chi(\xi) = 0 \quad (4.18)$$

En passant maintenant de la variable ξ à la nouvelle variable

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - \xi) \in]0; 1[$$

Et en posant

$$\chi(\xi) = \bar{\chi}(\eta)$$

On obtient l'équation différentielle satisfaite par $\bar{\chi}(\eta)$ sous la forme

$$\eta(\eta - 1) \frac{d^2 \bar{\chi}(\eta)}{d\eta^2} + (\varepsilon + 1)(1 - 2\eta) \frac{d\bar{\chi}(\eta)}{d\eta} - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1) \bar{\chi}(\eta) = 0 \quad (4.19)$$

Cette dernière équation est du type hypergéométrique dont la solution, finie pour $\eta = 0$ (c'est à dire pour $\xi = 1$, ou bien $z = \infty$) est une fonction géométrique donnée par

$$\bar{\chi}(\eta) = F(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, \eta) \quad (4.20)$$

En rechangeant de nouveau les variables, on obtient

$$\bar{\chi}(\xi) = F(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, \frac{1-\xi}{2}) \quad (4.21)$$

Et

$$\varphi(z) = (1 - \tanh^2 \alpha z)^{\frac{\varepsilon}{2}} F(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, \frac{1 - \tanh \alpha z}{2}) \quad (4.22)$$

Lorsque $z = -\infty$, on a $\frac{1-\tanh\alpha z}{2} \rightarrow 1$ et $\varphi(z)$ diverge à moins que $\varepsilon - s$ ou $\varepsilon + s + 1$ ne coïncide avec un entier négatif. Si on choisie la solution positive par la valeur de s , c'est-à-dire

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\delta}{\alpha} \right)^2} \right) \quad (4.23)$$

La bonne contrainte serait de la forme

$$\varepsilon - s = -n \text{ avec } \varepsilon > 0 \quad (4.24)$$

Dans ce cas la fonction hypergéométrique F est un polynôme de degré n , qui converge vers une valeur finie lorsque $z = -\infty$, de sorte que $\varphi(z)$ prend une valeur nulle dans cette limite.

La contrainte (4.24) donne les valeurs possibles pour le paramètre \tilde{E} sous la forme

$$\tilde{E}_n = -\alpha^2(-n + s)^2 \text{ pour } n < n_{max}$$

Ainsi n prend toutes les valeurs entières entre 0 et n_{max} où ce dernier est obtenu à partir de la contrainte de positivité du paramètre ε . Il vient donc que

$$0 \leq n < \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2} \right) = n_{max} \quad (4.25)$$

Pour $\lambda \neq 0$, on voit qu'au moins la valeur $n = 0$ est possible, et que le nombre de valeurs possibles pour n augmente avec la croissance de $|\lambda|$, qui ne doit pas dépasser la valeur de $|\lambda|$ bien sur. Dans le cas particulier où $\lambda = 0$, correspondant à une particule de masse constante égale à $|\mu|$, on voit que la contrainte (4.25) n'est plus satisfaite et par conséquent il n'existe aucune solution possible. Ceci veut dire que dans ce cas la particule n'a aucun état d'énergie négative, ce qui est logique puisqu'elle est libre.

Conformément à la relation (4.7), on obtient les niveaux d'énergie du problème original par l'expression suivante :

$$E_n = \hbar c \left[\beta \pm \left[\left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1 + 2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.26)$$

Le nombre des énergies possibles sera obtenu en tenant compte des contraintes (4.10) et (4.25). Signalons que la contrainte (4.25) est suffisante pour assurer la positivité du radical dans l'expression de E_n et par conséquent la réalité de cette dernière.

4.3 Modèle avec masse bornée et potentiel de référence fonction hyperbolique PT -symétrique

Pour le deuxième modèle, nous considérons la même masse $m(z)$ que celle du premier modèle mais avec un nouveau potentiel de référence $\tilde{V}(z)$, tels que :

$$m(z) = \sqrt{\frac{-\lambda^2}{\cosh^2 \alpha z} + \mu^2}$$

et

$$\tilde{V}(z) = i\eta \tanh \alpha z + \beta \quad (4.27)$$

Ainsi, si on remplace η par la valeur 0 on recouvre le premier modèle dont les valeurs des énergies ainsi que les fonctions propres qui leurs correspondent ont été déjà déterminées. On doit donc obtenir le même spectre des énergies que celui du premier modèle lorsqu'on remplace, a la fin des calculs, η par la valeur 0. Ici, les paramètres $\alpha, \beta, \eta, \lambda$ et μ sont réels que $|\mu| > |\lambda|$ et $\alpha > 0$.

Les expressions des potentiels $V(z)$ et $V_E(z)$ sont données par :

$$V(z) = i\hbar c \tanh \alpha z \left[\frac{\alpha \lambda^2}{2(\mu^2 \cosh^2 \alpha z - \lambda^2)} + \eta \right] + \hbar c \beta \quad (4.28)$$

et

$$V_E(z) = \left(\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \beta^2 \right) \left(z + \frac{i\beta E}{\hbar c \left(\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \beta^2 \right)} \right)^2 - \frac{E^2 \left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2}{(\hbar c)^2 \left(\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \beta^2 \right)} + \left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 + \beta \quad (4.29)$$

Et qui sont tous les deux PT -symétrique. Dans le cas où $\eta = 0$, ces expressions se réduisent à celle du premier modèle.

L'équation de Schrödinger (3.23), pour ε arbitraire, prend la forme :

$$-\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} + \left[-\frac{\left[\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \eta^2 - \alpha \eta \right]}{\cosh^2 \alpha z} + 2i\eta \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right) \tanh \alpha z - \tilde{E} \right] \varphi(z) = \varepsilon \varphi(z) \quad (4.30)$$

avec

$$\tilde{E} = \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2 - \left[\left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 + \eta^2 \right] \quad (4.31)$$

Pour la résolution de l'équation (4.30), nous allons utiliser le formalisme de la supersymétrie en mécanique quantique que nous avons décrit dans le chapitre 1 que nous allons adapter ici au cas d'un potentiel PT -symétrique.

L'application de ce formalisme, qui pourrait sembler indigeste, est en fait très simple. La première étape consiste à déterminer un superpotentiel $W(z)$ tel que

$$W^2(z) - W'(z) = -\frac{\left[\left(\frac{c\lambda}{\hbar}\right)^2 + \eta^2 - \alpha\eta\right]}{\cosh^2 \alpha z} + 2i\eta \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right) \tanh \alpha z - \tilde{E} - \varepsilon_0 \quad (4.32)$$

où ε_0 est a priori l'énergie de l'état fondamental du potentiel $V_E(z)$.

On cherche $W(z)$ sous la forme

$$W(z) = A + B \tanh \alpha z \quad (4.33)$$

Par identification, on obtient les relations entre les paramètres de $V_E(z)$ et les inconnus A et B , sous les formes

$$\varepsilon_0 + \tilde{E} = -(A^2 + B^2) \quad (4.34)$$

$$B^2 + \alpha B = \left(\frac{c\lambda}{\hbar}\right)^2 + \eta^2 - \alpha\eta \quad (4.35)$$

et

$$2AB = 2i\eta \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right) \quad (4.36)$$

En résolvant l'équation (4.35) par rapport à l'inconnue B , on tire :

$$B = \frac{\alpha}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar}\right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right) \quad (4.37)$$

où la solution négative est écartée car la fonction d'onde qui en découle ne sera pas normalisable.

En insérant cette expression dans (4.36), on obtient l'expression de A , sous la forme

$$A = \frac{i\eta \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)}{\frac{\alpha}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar}\right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha}\right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)} \quad (4.38)$$

On obtient l'énergie de l'état fondamental à partir de la relation (4.34). Elle sera donnée par

$$\varepsilon_0 = -\tilde{E} - (A^2 + B^2) \quad (4.39)$$

En admettant qu'à ε_0 correspond l'énergie E_0 pour le système original, cette dernière est obtenue en remplaçant E par E_0 dans (4.39) et en résolvant l'équation pour $\varepsilon_0 = 0$.

Conformément aux relations (4.31), (4.34), (4.37), (4.38) et (4.39), on obtient l'énergie E_0 sous la forme

$$E_0 = \hbar c \left\{ \beta \pm \frac{\left[\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \frac{\eta^2}{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (4.40)$$

On doit ajouter a cette expression toutes les contraintes nécessaires pour assurer la positivité des expressions sous le signe du radical. On obtient donc deux valeurs symétriques par rapport à $\hbar c\beta$. Pour le cas particulier $\beta = 0$, on aura deux valeurs symétriques par rapport à 0.

Avant daller de lavant dans la détermination des énergies des états excites, constatons que l'expression de E_0 (4.40) coïncide pour $\eta = 0$, avec celle qu'on obtient dans le modèle précédent. A savoir,

$$E_0 = \hbar c \left[\beta \pm \left[\left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.41)$$

La fonction propre $\varphi_0(z)$ qui correspond a l'état fondamental du potentiel $V_{E_0}(z)$ s'obtient par la formule usuelle discutée dans le chapitre 1. Elle est donc donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= N \exp \left(- \int W(z) dz \right) \Big|_{E=E_0} \\ &= N \exp(-Az) \exp \left(-B \int \tanh \alpha z dz \right) \Big|_{E=E_0} \\ &= N \exp(-Az) \exp \left(-\frac{\beta}{\alpha} \ln \cosh \alpha z \right) \Big|_{E=E_0} \\ &= N (\cosh \alpha z)^{-\frac{\beta}{\alpha}} e^{-Az} \Big|_{E=E_0} \end{aligned} \quad (4.42)$$

En reportant les expression de A et B données par (4.37) et (4.38), pour $E = E_0$, dans (4.42), on obtient l'expression la fonction propre de l'état fondamental $\varphi_0(z)$ sous la forme

$$\varphi_0(z) = N (\cosh \alpha z)^{\frac{\left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)}{2}} \exp \left(- \frac{i\eta \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)}{\left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)} z \right) \quad (4.43)$$

où N est une constant de normalisation. Elle doit être choisie réelle de telle sorte à assurer que $\varphi_0(z)$ est PT-symétrique.

Signalons que du fait que E_0 prend deux valeurs distinctes, on obtient aussi deux fonctions différentes mais toutes les deux normalisables.

La fonction d'onde $\varphi_0(z)$ satisfait bien les conditions aux limites ; i.e. $\varphi_0(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \pm\infty$. en effet, comme B et α sont des constantes positives et A est un nombre imaginaire pure, alors le terme assurant la convergence de $\varphi_0(z)$, $(\cosh \alpha z)^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{2}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) \rightarrow 0$.

On est donc assure que la fonction donne de letat fondamental est normalisable dans le sens de la PT – symetrie.

L'ensemble du spectre est tout aussi facilement déduit de la condition d'invariance de forme des partenaires qui s'écrivent, en tenant comte des relations (4.35) et (4.36), comme

$$V_E^-(z) = \frac{-\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{B^2} + B^2 - \frac{(B^2 + \alpha B)}{\cosh^2 \alpha z} + 2i\eta\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right) \tanh \alpha z \quad (4.44)$$

et

$$V_E^+(z) = \frac{-\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{B^2} + B^2 - \frac{(B^2 - \alpha B)}{\cosh^2 \alpha z} + 2i\eta\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right) \tanh \alpha z$$

Ces potentiels partenaires satisfont à la condition d'invariance de forme

$$V_E^+(z, a_0) = V_E^-(z) + R(a_1) \quad (4.45)$$

avec

$$a_0 = B, a_1 = f(a_0) = a_0 - \alpha \quad (4.46)$$

et

$$R(a_1) = \left[-\frac{\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{a^2_0} + a^2_0 \right] - \left[-\frac{\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{a^2_1} + a^2_1 \right] \quad (4.47)$$

On en déduit l'expression des énergies des états excites de $V_E(z)$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(-)}_n &= \sum_{k=1}^n R(a_k) \\ &= \left\{ \left[-\frac{\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{a^2_0} + a^2_0 \right] - \left[-\frac{\eta^2\left(\frac{E}{\hbar c} - \beta\right)^2}{a^2_1} + a^2_1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_0} + a^2_1 \right] - \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_1} + a^2_2 \right] \right\} \\
 & + \dots\dots \\
 & + \left\{ \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_{n-1}} + a^2_0 \right] - \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_n} + a^2_n \right] \right\} \\
 & = \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_0} + a^2_0 \right] - \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E}{\hbar c} - \beta \right)^2}{a^2_n} + a^2_n \right] \\
 & = \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E_n}{\hbar c} - \beta \right)^2}{B^2} + B^2 \right] - \left[-\frac{\eta^2 \left(\frac{E_n}{\hbar c} - \beta \right)^2}{(B - \alpha n)^2} + (B - \alpha n)^2 \right] \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Avec $n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$

Et on a $\varepsilon_n = \varepsilon^{(-)}_n + \varepsilon_0$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\eta^2 \left(\frac{E_n}{\hbar c} - \beta \right)^2}{(B - \alpha n)^2} + (B - \alpha n)^2 - \tilde{E} \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

En admettant qu'à ε_n correspond la valeur E_n comme énergie du problème original, cette dernière est obtenue en résolvant (4.49) pour $\varepsilon_n = 0$ après avoir remplacé E par E_n . Il en découle alors

$$\tilde{E}_n = \frac{\eta^2 \left(\frac{E_n}{\hbar c} - \beta \right)^2}{(B - \alpha n)^2} + (B - \alpha n)^2$$

qui donne, en tenant compte de (4.31) et (4.37) l'expression de l'énergie E_n sous la forme

$$E_n = \hbar c \left\{ \beta \pm \left[\frac{\left(\frac{c\lambda}{\hbar} \right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1+2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)^2}{1 - \frac{\eta^2}{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1+2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{4.50}$$

Le nombre des énergies acceptables est déterminé en imposant la réalité de l'expression (4.50). Pour $\eta = 0$, on obtient

$$E_n|_{\eta=0} = \hbar c \left\{ \beta \pm \left[\left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1+2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2c\lambda}{\alpha\hbar} \right)^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Qui coïncide avec le résultat obtenu dans la section précédente, donne par la relation (4.26).

Si on considère le même problème avec une masse constante, on a juste à remplacer λ par 0 dans l'expression (4.50). Ainsi on obtient

$$E_n|_{\lambda=0} = \hbar c \left\{ \beta \pm \left[\frac{\left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1+2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)^2}{1 - \frac{\eta^2}{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(-(1+2n) + \sqrt{1 + \left(\frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - \frac{4\eta}{\alpha}} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Ce résultat coïncide avec celui de Jia et al.

Ainsi, nous vérifions sur ce modèle le résultat obtenu du premier modèle.

4.4 Modèle avec masse non bornée et potentiel de référence fonction linéaire PT-symétrique

Nous considérons dans ce modèle les formes suivantes pour la fonction de la masse $m(z)$

$$m(z) = \sqrt{\lambda^2 z^2 + \mu^2} \quad (4.51)$$

Et nous choisissons le potentiel de référence comme une fonction linéaire avec un coefficient imaginaire pur

$$\tilde{V}(z) = i\beta z \quad (4.52)$$

avec μ , λ et β des paramètres non nuls.

Le potentiel $V(z)$ correspondant s'écrit

$$V(z) = i\hbar c \left(\frac{2\lambda z}{\lambda^2 z^2 + \mu^2} + \beta z \right) \quad (4.53)$$

qui est bien PT-symétrique

En admettant que λ et β ne s'annulent pas simultanément, on peut mettre le potentiel $V_E(z)$ sous la forme suivante

$$V_E(z) = \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right) \left(z + \frac{i\beta E}{\hbar c \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right)} \right)^2 - \frac{E^2 \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2}{(\hbar c)^2 \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right)} + \left(\frac{c\mu}{\hbar} \right)^2 + \beta \quad (4.54)$$

Ce potentiel, qui est PT-symétrique, coïncide, à une constante additive près, avec celui d'un oscillateur harmonique dans le plan complexe. En passant à la nouvelle variable y , définie par

$$y = z + \frac{i\beta E}{\hbar c \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right)} \quad (4.55)$$

et posant

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}(y)$$

L'équation de Schrödinger pour $\varphi(z)$ se transforme en une équation similaire pour la nouvelle fonction $\bar{\varphi}(y)$, qui s'écrit comme

$$-\frac{d^2 \bar{\varphi}(y)}{dy^2} + \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right) y^2 \bar{\varphi}(y) - \tilde{E} = \varepsilon \bar{\varphi}(y) \quad (4.56)$$

avec

$$\tilde{E} = - \left[\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right] + \frac{E^2 \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2}{(\hbar c)^2 \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right)} \quad (4.57)$$

l'équation (4.56), de par sa forme, coïncide avec l'équation du type Schrödinger pour un oscillateur harmonique à une dimension, nous allons appliquer l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique pour résoudre le problème aux valeurs propres, en mécanique quantique pour résoudre le problème aux valeurs propres. Nous écrivons l'état fondamental $\bar{\varphi}_0(y)$, d'énergie ε_0 , sous la forme :

$$\varphi_0(y) = \exp(-\int W(y)dy) \quad (4.58)$$

où $W(z)$ est le superpotentiel.

Insérant (4.58) dans l'équation (4.56), on obtient

$$W^2(z) - W'(z) = \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar} \right)^2 \right) y^2 - \tilde{E} - \varepsilon_0 \quad (4.59)$$

L'équation (4.59), du type Riccati, peut être résolue en posant

$$W(y) = Ay \quad (4.60)$$

où A est positif pour assurer la convergence de la fonction propre $\varphi_0(y)$.

en reportant (4.60) dans (4.59) et identifiant les termes de même puissances, on obtient

$$A = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} \quad (4.61)$$

et

$$\tilde{E} + \varepsilon_0 = A \quad (4.62)$$

En termes de superpotentiel $W(y)$, donnée par (4.60), on peut construire les potentiels partenaires supersymétriques de la façon suivante :

$$V_E^-(y) = W^2(y) - W'(y) = A^2 y^2 - A \quad (4.63)$$

et

$$V_E^+(y) = W^2(y) + W'(y) = A^2 y^2 + A \quad (4.64)$$

posant $a_0 = A$, il vient que $a_1 = f(a_0) = a_0$, et on peut facilement vérifier que ces deux potentiels partenaires $V_E^-(y)$ et $V_E^+(y)$ sont liés par la relation suivante :

$$\begin{aligned} V_E^+(y, a_0) &= V_E^-(y, a_1) + R(a_1) \\ &= \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right) y^2 - \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} + 2\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$R(a_1) = 2a_1 \quad (4.66)$$

on voit bien que les deux potentiels partenaires $V_E^-(y)$ et $V_E^+(y)$ satisfont à la condition d'invariance de forme.

Pour le potentiel $V_E^-(y)$, on utilise l'approche de l'invariance de forme pour déterminer le spectre des énergies, que est donné par :

$$\varepsilon^{(-)}_0 = 0 \quad (4.67)$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(-)}_n &= \sum_{k=1}^n R(a_k) \\ &= 2na_0 \\ &= 2nA \\ &= 2n\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.68)$$

de sorte que

$$\varepsilon_n = \varepsilon^{(-)}_n + \varepsilon_0$$

$$\begin{aligned}
 &= A + 2nA - \tilde{E} \\
 &= (2n + 1)A - \tilde{E} \\
 &= (2n + 1)\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} - \tilde{E}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

En imposant à ε_n de s'annuler pour $E = E_n$ et en utilisant la relation (4.57), on obtient

$$-\left[\left(\frac{c\mu}{\hbar}\right)^2 + \beta\right] + \frac{E^2\left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2}{(\hbar c)^2\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)} = (2n + 1)\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} \tag{4.70}$$

qui se simplifie pour donner l'expression de E_n sous la forme

$$E_n = \pm \frac{(\hbar c)^2\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)}{\left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} \left[(2n + 1)\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2} + \left(\frac{c\mu}{\hbar}\right)^2 + \beta \right] \tag{4.71}$$

à condition que λ est un paramètre non nul. Pour le cas particulier où $\lambda=0$, qui correspond à une masse constante, il n'existe pas de solutions pour l'équation (4.70) et par conséquent, le spectre discret est absent dans le problème original.

Pour déterminer les fonctions propres, écrivons l'équation de Schrödinger sous la forme

$$-\frac{d^2\bar{\varphi}(y)}{dy^2} + \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)y^2\bar{\varphi}(y) = (2n + 1)\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2}\bar{\varphi}(y) \tag{4.72}$$

où l'on a exploité la relation (4.69).

En passant à la nouvelle variable :

$$u = \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/4} y \tag{4.73}$$

et en posant

$$\bar{\varphi}(y) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H(y) \tag{4.74}$$

on obtient l'équation pour $H(z)$ sous la forme

$$-\frac{d^2}{du^2}H(u) - 2z\frac{d}{du}H(u) + 2nH(u) = 0 \tag{4.75}$$

qui est celle des polynômes d'Hermite.

Les solutions de l'équation (4.72) correspondant à n entiers sont alors données par

$$\varphi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}u^2} H_n(u) \tag{4.76}$$

ou encore

$$\varphi_n(y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/2} y^2} H_n\left(\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/4} y\right) \quad (4.77)$$

Ainsi donc, on a la fonction d'onde correspondant à la première composante du spineur sous la forme

$$\psi_n(z) = \sqrt{\lambda^2 z^2 + \mu^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/2} \left(z + \frac{i\beta E_n}{\hbar c \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)}\right)^2} H_n\left(\left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/4} \left(z + \frac{i\beta E_n}{\hbar c \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)}\right)\right) \quad (4.78)$$

Après avoir substitué l'expression de $\psi_n(z)$ dans la formule donnant $\phi_n(z)$

$$\phi_n(z) = \frac{i\hbar}{cm(z)} \frac{d\psi_n(z)}{dz} + \frac{(E_n - V(z))}{c^2 m(z)} \psi_n(z) \quad (4.79)$$

et utilisé les propriétés des fonctions d'Hermite, on trouve

$$\begin{aligned} \phi_n(z) = & \frac{i\hbar}{c\sqrt{\lambda^2 z^2 + \mu^2}} \left[\frac{\lambda^2 z}{\lambda^2 z^2 + \mu^2} + \frac{(E_n - V(z))}{i\hbar c} - \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/2} \left(z + \frac{i\beta E_n}{\hbar c \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)}\right) \right] \psi_n(z) + \\ & 2n \left(\beta^2 + \left(\frac{\lambda c}{\hbar}\right)^2\right)^{1/4} \psi_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.5 modèle avec masse non bornée et potentiel de référence fonction réelle quadratique

Dans ce modèle, nous choisissons la fonction de la masse sous la forme

$$m(z) = \sqrt{\beta^2 z^4 + \lambda^2 z^2 + \mu^2} \quad (4.81)$$

et le potentiel de référence comme une fonction quadratique

$$\tilde{V}(z) = \frac{\beta c}{\hbar} z^2 \quad (4.82)$$

où β est un paramètre réel.

On obtient alors pour les potentiels $V(z)$ et $V_E(z)$ les expressions suivantes :

$$V(z) = \hbar c \left(\frac{iz(2z^2 + \lambda^2)}{2(\beta^2 z^4 + \lambda^2 z^2 + \mu^2)^2} + \frac{\beta c}{\hbar} z^2 \right) \quad (4.83)$$

$$V_E(z) = \frac{(c\lambda)^2 + 2E\beta}{\hbar^2} \left(z - \frac{i\hbar c\beta}{(c\lambda)^2 + 2E\beta} \right)^2 + \left[\left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 + \frac{(c\beta)^2}{(c\lambda)^2 + 2E\beta} - \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 \right] \quad (4.84)$$

qui sont des fonctions PT symétriques.

Avec le changement de variable

$$y = z - \frac{i\hbar c\beta}{(c\lambda)^2 + 2E\beta} \quad (4.85)$$

le potentiel $V_E(z)$ prend la forme

$$V_E(z) = \frac{(c\lambda)^2 + 2E\beta}{\hbar^2} y^2 + \left[\left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 + \frac{(c\beta)^2}{(c\lambda)^2 + 2E\beta} - \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 \right] \quad (4.86)$$

Après quoi, l'équation de Schrödinger devient

$$-\frac{d^2 \bar{\varphi}(y)}{dy^2} + \frac{(c\lambda)^2 + 2E\beta}{\hbar^2} y^2 \bar{\varphi}(y) - \tilde{E} = \varepsilon \bar{\varphi}(y) \quad (4.87)$$

où

$$\tilde{E} = \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 - \left[\left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 + \frac{(c\beta)^2}{(c\lambda)^2 + 2E\beta} \right] \quad (4.88)$$

Pour pouvoir identifier l'équation (4.87) avec celle d'un oscillateur harmonique comme c'était le cas dans le troisième modèle, il faut imposer la condition

$$(c\lambda)^2 + 2E\beta > 0 \quad (4.89)$$

Ceci donne ainsi une condition très sévère pour obtenir les énergies du problème original.

En se limitant donc aux énergies conditionnées par (4.89), les équations (4.87) et (4.88) deviennent semblables aux équations (4.56) et (4.57) avec seulement un changement adéquat précédent et faire les correspondances nécessaires entre les paramètres. On obtient le spectre à partir de l'égalité

$$\frac{E_n^2}{(\hbar c)^2} - \left[\left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 + \frac{(c\beta)^2}{(c\lambda)^2 + 2E_n\beta} \right] = (2n + 1) \sqrt{\frac{\hbar^2}{(c\lambda)^2 + 2E_n\beta}} \quad (4.90)$$

qui est une équation transcendante assez compliquée, dont la solution peut être obtenue numériquement.

Chapitre 5

Conclusion

Ce mémoire fait partie d'une voie de recherche concernant des sujets d'actualité qui a pour but d'apporter une contribution à l'étude des potentiels PT -symétriques dans le cadre de l'équation de Dirac à $(1 + 1)$ -dimensions avec une masse dépendante de l'espace.

Nous rappelons, dans le premier chapitre, l'essentiel des résultats généraux de la mécanique quantique -supersymétrique, tout en mettant l'accent sur ceux que nous avons utilisés par la suite dans notre travail. Nous rappelons aussi, dans le deuxième chapitre, quelques notions de la mécanique quantique PT -symétrique, une théorie applicable aux systèmes décrits par des Hamiltoniens non hermitiens mais PT -symétriques.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une nouvelle méthode de construction de potentiels PT -symétriques exactement solubles dans l'équation de Dirac à $(1 + 1)$ -dimensions avec une masse dépendante de la position, dont la résolution consiste à la rendre équivalente à une équation du type Schrödinger pour une particule de masse constante soumise à un potentiel effectif.

Notre contribution dans ce domaine est la proposition de quatre modèles de potentiels unidimensionnels et PT -symétriques pour des particules fermioniques avec des masses variables dans l'espace. Nous résolvons exactement l'équation de Dirac pour chaque modèle et nous donnons les spectres sous forme d'expressions compactes.

Dans notre travail, la forme de la masse de la particule qui dépend de l'espace (de la position) joue un rôle central dans la construction des potentiels PT -symétriques exactement solubles. En effet, dans les quatre modèles que nous avons proposés, la forme de la masse n'est pas choisie arbitrairement, mais d'une manière très astucieuse de telle sorte que le potentiel de départ soit PT -symétrique (puisqu'il dépend de la masse) et que le potentiel effectif soit exactement soluble dans l'équation du type Schrödinger.

Dans le premier modèle, le potentiel PT -symétrique de départ, dépend seulement de la masse, puisque le potentiel de référence est, une constante dont l'effet est un simple décalage du spectre des niveaux d'énergies. Nous sommes conduits ainsi à un potentiel effectif bien connu, qui a été déjà, résolu par la méthode analytique faisant appel aux fonctions spéciales. Le caractère de ce modèle

est d'autant plus physique que mathématiques et dont, l'aspect le plus intéressant est la forme de la masse qui fournit un modèle très satisfaisant pour un très grand nombre de systèmes quantiques à une dimension.

Dans le deuxième modèle, nous gardons la même masse que celle du premier modèle, mais cette fois-ci avec un nouveau potentiel de référence PT -symétrique dépendant de trois paramètres réels de sorte que si nous remplaçons le paramètre 17 par la valeur zéro nous recouvrions les résultats du premier modèle. En quelque sorte, le deuxième modèle est, une généralisation du premier. Ici, nous utilisons l'approche de la mécanique quantique supersymétrique pour la résolution de l'équation du type Schrödinger. Dans ce calcul, les résultats obtenus par la méthode supersymétrique concordent avec les prédictions de l'approche analytique utilisée dans le premier modèle. En effet, lorsqu'on remplace le paramètre μ par la valeur zéro, le spectre d'énergies coïncide avec celui trouvé dans le premier modèle. Ainsi, nous vérifions sur ce modèle le résultat obtenu du premier modèle.

Les deux derniers modèles se distinguent par le fait que la masse est une fonction qui n'est pas bornée. Dans le troisième modèle nous choisissons un potentiel de référence PT symétrique et dans le quatrième, il est pris hermitien. Nous avons montré que les équations du type Schrödinger de la première composante du spineur sont similaires, mis à part la différence entre les coefficients. Les spectres sont obtenus de manière exacte pour les deux modèles aussi. Pour le troisième modèle, l'expression du spectre est relativement simple mais celle du quatrième modèle est une fonction transcendante relativement compliquée.

Notre objectif dans un futur proche et de poursuivre ce travail afin de le généraliser à des modèles à deux et trois dimensions de l'espace. Nous pensons qu'il est plus adéquat de considérer des potentiels tridimensionnels ou à défaut bidimensionnels dépendant, de paramètres libres qui, pour un choix particulier de ceux-ci, ils se réduisent à des potentiels unidimensionnels. De cette manière, on doit travailler dès le début avec l'équation de Dirac à trois dimensions ou deux dimensions, on la notion de spin est bien claire, et ensuite en déduire les résultats du cas unidimensionnel par une simple limite sur les paramètres libres.

Bibliographie

- [1] S. Flugge, Practical Quantum Mechanics, Springer-Verlag, 1994.
- [2] E. Schrodinger, Proc. Roy. Irish Acad. 46 A 9 (1940) ; E. Schrodinger, Proc. Roy. Irish Acad. 46 A 183 (1940) ; E. Schrodinger, Proc. Roy. Irish Acad. 47 A, 53 (1940).
- [3] L. Infeld et T. E. Hull. Rev. Mod Phys 23(1951)21 ; L. Infeld, Phys Rev 59(1941)737 ; L. Infeld et. T. E. Hull. Phys. Rev. 74 , 1497 (1948).
- [4] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267 (1995) ; F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Supersymmetry in Quantum Mechanics (Singapore : World Scientific) ; F. Cooper, A. Khare et. U. Sukhatmi, arXiv, hep-th/9405029.
- [5] G. Junker, Supersymmetry Methods in Quantum and Statistical Physics, Berlin, Springer (1996) ; C. V. Sukumar, Supersymmetric quantum mechanics and its applications (Wadharn College, University of Oxford, Oxford OX1 3PN, England).
- [6] L. Gendenshtein, JETP, Lett 38, 356 (1983).
- [7] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, C. Rasinariu and U. Sukhatme : Chin. Jour. Phys. 39, N. 2 (2001).
- [8] C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998) ; M. Znojil, J. Phys. A 36, 7639 (2003).
- [9] C. M. Bender and S. Boettcher, and V. M. Savage, J. Math. Phys. (N.Y) 41, 6381 (2000) ; C. M. Bender and Q Wang, J. Phys. A 34, 3325 (2001).
- [10] C. M. Bender and S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Phys. Lett. A 202, 286 (2002).
- [11] C. M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones ; Phy. Rev. Lett. 89. 270401 (2002). C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Am. J. Phys. 71, 1905 (2003) ; C. M. Bender and H. F. Jones, Phys. Lett. A 328, 102 (2004).
- [12] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett.. 93, 251601 (2004) ; Phys. Rev. D 70, 025001 (2004).

-
- [13] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 43, 2005 (2002) ; A. Mostafazaddeh, J. Math. Phys., 43, 2814 (2002) ; A. Mostafazadeh, J. Phys. A 36, 1125 (2003).
- [14] A. Mostaphazadeh, J.Phys. A39 (2006) 10171-10188.
- [15] A. Mostaphazadeh, Pramana-J. Phys. 73, 269-277 (2009).
- [16] A. Mostaphazadeh, Pseudo-Hermitian Quantum Mechanics, arXiv :0810.5643.
- [17] H. Nicolai, J. Phys, A : Math, Gen. 9,1497 (1976).
- [18] E. Witten, Nucl.phys. B 188 (1981) 513 ; E. Witten, Nucl. Phys. B 202, 253 (1982) ; E.Witten, J.differ. Geom.17, 661 (1982).
- [19] D. T. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta et U. Sukhatme, Phys. Rev. A 48, 2786 (1993). Cohen Tannoudji, Mecanique Quantique tome 1.
- [20] N. Zeghou, Mémoire de Magister realise sous la direction de M. F. Benamira, intitulé, Supersymetrie et PT symêtrie en mkanique quantique, Université de Jijel, 2005.
- [21] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Springer 1987.
- [22] Ling Jiang, Liang-Zhong Yi, Chun-Shen Jia, Physics Letters A, Volume 345, Issues 4-6, 3 October 2005, Pages 279-286.
- [23] Chun-Sheng Jia, Jian-Yi Liu, Ping-Quan Wang, Chao-Shan Che, Physics Letters A, Volume 369, Issue 4, 24 September 2007, Pages 274-279.
- [24] Chun-Sheng Jia, A. de Souza Dutra, Annals of Physics, Volume 323, Issue 3, March 2008, Pages 566-579
- [25] V.G.C.S. dos Santos, A. de Souza Dutra, M.B. Hott, Physics Letters A, Volume 373, Issue 38, 14 September 2009, Pages 3401-3406.

Abstract

We have presented in this paper exact solutions of the Dirac equation in (1 +1)-dimensional for four interesting models where the fermionic particle of variable mass, interacts with a PT - symmetric potential. We showed that in all cases, solving the Dirac equation is equivalent to solving a Schrodinger-like equation for a particle of constant. mass, interacting with a non hermitian but PT -symmetric effective potential. To solve this equation we appealed either to the general method of hypergeometric equations or the approach of supersymmetry in quantum mechanics.

In the first model, we considered a PT -symmetric potential rather unusual since it depends directly on the mass of the particle. The spectrum is obtained in compact form from using a single generator formula.

The potential of the second model is made more general so it does not depend solely on the mass. In this case also, the spectrum is given by a single generator formula which generalizes the formula. of the first model. The essential feature of the first and second model is that the mass is a function of hyperbolic type, which remains finite in space.

In the third and fourth model, we chose masses that. are not. bounded in space and the potentials are linear and quadratic. We calculated the exact energy spectrum for each model and showed that although in both cases we have to solve an Shrodinger-like equation for a harmonic-oscillator potential, the spectra are found different.

Keywords : supersymmetry, shape invariant, non-Hermitian Hamiltonian, PT -symmetry, Dirac equation, Energy, Spinor.

Résumé

Nous avons présenté dans ce mémoire les solutions exactes de l'équation de Dirac à (1+1)-dimensions pour quatre modèles intéressants on la particule fermionique, de masse variable, interagit avec un potentiel PT -symétrique. Nous avons montré que dans tous les cas, la résolution de l'équation de Dirac est équivalente à la résolution d'une équation du type Schrödinger relative à une particule de masse constante, interagissant avec un potentiel effectif hermitien ou PT -symétrique. Pour la résolution de cette équation on a fait appel soit à la méthode générale des équations hypergéométriques ou à l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique.

Dans le premier modèle, nous avons considéré un potentiel PT -symétrique un peu particulier dépend directement de la masse de la particule. Le spectre est obtenu sous forme compacte par l'intermédiaire d'une formule génératrice unique.

Le potentiel du second modèle est pris plus général, de sorte qu'il ne dépend pas uniquement de la masse. Dans ce cas aussi, le spectre est donné par une formule unique génératrice qui généralise la formule du premier modèle. La caractéristique essentielle du premier et second modèle est que la masse est une fonction du type hyperbolique, qui demeure finie dans l'espace.

Dans le troisième et quatrième modèle, nous avons choisi des masses qui ne sont pas bornées dans l'espace et des potentiels, linéaire et quadratique. Nous avons calculé exactement le spectre énergétique pour chaque modèle et montre que malgré que dans les deux cas on est amené résoudre une équation du type Schrödinger pour un potentiel d'oscillateur harmonique, les spectres qu'on trouve sont très différents.

Mots clef : supersymétrie, invariance de forme, Hamiltonien non Hermitien, la symétrie PT , Equation de Dirac, Energie, Spineur.

حل معادلة ديراك في الأبعاد $(1+1)$ لبعض نماذج الكمونات المتناظرة بالنسبة لإنعكاس الفضاء وقلب جهة الزمن من أجل كتل متعلقة بالفضاء

ملخص

قدمنا في هذه المذكرة الحلول الدقيقة لمعادلة ديراك في الأبعاد $(1+1)$ من أجل أربع نماذج مثيرة للاهتمام حيث الجسيمة الفرميونية ذات كتلة متغيرة في الفضاء (متعلقة بالموضع) تتفاعل مع كمون غير هرميتي ولكن متناظر بالنسبة لإنعكاس الفضاء وقلب جهة الزمن. بينا أنه في جميع الحالات حل معادلة ديراك هذه يؤدي إلى حل معادلة من صنف شرودنغر خاصة بجسيمة ذات كتلة ثابتة و تتفاعل مع كمون هرميتي أو متناظر بالنسبة لإنعكاس الفضاء وقلب جهة الزمن. من أجل حل هذه المعادلة إستعملنا إما الطريقة العامة للمعادلات الفوق هندسية أو الطريقة الفوق تناظرية للميكانيك الكوانتي.

النموذج الأول و الثاني يختلفان من حيث الكمون المرجعي، حيث أن هذا الأخير أخذ كثابت في النموذج الأول و مفعوله ما هو إلا إنزياح بسيط لطيف مستويات الطاقة، أما في النموذج الثاني، الكمون المرجعي متناظر بالنسبة لإنعكاس للفضاء وقلب جهة الزمن و يتعلق بثلاث وسائط حقيقية حيث أنه عندما نعوض الوسيط η بالقيمة صفر نرجع إلى النموذج الأول.

في النموذج الأول، إعتبرنا كمون متناظر بالنسبة لإنعكاس الفضاء وقلب جهة الزمن من نوع خاص غير مألوف نوعا ما نظرا لأنه يتعلق مباشرة بكتلة الجسيمة وجدنا الطيف بشكل مكثف بدلالة علاقة مولدة وحيدة.

أخذنا الكمون في النموذج الثاني أكثر عمومية حيث أنه لا يتعلق بالكتلة فقط. في هذه الحالة أيضا، جدنا أن الطيف يعطى بصيغة مولدة وحيدة معممة للصيغة السابقة في النموذج الأول. الخاصية الأساسية في النموذجين الأول و الثاني هي أن الكتلة عبارة عن دالة من صنف الدوال القطعية، تأخذ قيمة محدودة في الفضاء.

طابع النموذجين السابقين فيزيائي أكثر مما هو رياضي إذ أن الخاصية و الميزة الأساسية المهمة هي شكل الكتلة الذي يعطي نموذجا جد ملائما و موافقا لعدد كبير من الجمل الكوانتية ذات بعد واحد.

في النموذجين الثالث و الرابع، اخترنا كتلتين لا محدودتين في الفضاء و كمونين، الأول خطي و الثاني تربيعي. حسبنا بالضبط طيف الطاقة في كل نموذج و أظهرت الحسابات بالرغم من أنه في كلا الحالتين يتوجب علينا حل معادلت شرودنغر من النوع الهزاز التوافقي غير أن الطيفين يختلفان اختلافا كبيرا. بالنسبة للنموذج الثالث عبارة طيف الطاقة نوعا ما بسيطة، بينما في النموذج الرابع معقدة إذ لا مكننا حساب طيف الطاقة بالضبط بل يتوجب علينا إستعمال طرق التحليل العددي.