

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**N° d'ordre :  
Série**

**MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE**

**SPECIALITE : ENERGETIQUE**

**OPTION : PHOTOTHERMIQUE**

**THEME**

**ETUDE DYNAMIQUE D'UNE PALE D'EOLIENNE  
EFFILEE**

**PAR**

**CHELIREM TAYEB**

**SOUTENU LE : 04 / 07 /2010**

**Devant le jury :**

<b>Président</b>	<b>: M.AFRID</b>	<b>Prof</b>	<b>Université M.Constantine</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>: L.BAHI</b>	<b>Prof</b>	<b>Université M.Constantine</b>
<b>Examineur</b>	<b>: N.ATTAF</b>	<b>Prof</b>	<b>Université M.Constantine</b>

## Remerciements

Avant tout nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour qu'on puisse accomplir ce travail.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Monsieur L.BAHI Professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour m'avoir soutenu pour ce sujet de recherche, et pour la modestie qui le caractérise malgré le grand savoir scientifique qu'il possède, choses qui m'ont permis de mener à bien cette étude.

Je tiens également à remercier Monsieur M.AFRID Professeur à l'Université Mentouri de Constantine d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Monsieur N.ATTAF Professeur à l'Université Mentouri. Constantine d'avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je n'oublie pas de remercier les enseignants du département de physique énergétique pour leurs savoirs qui m'ont donné durant ma formation.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et à mes amis pour leurs encouragements et leur soutien inestimable.

## SOMMAIRE

### Remerciements

### Sommaire

### Nomenclature 01

### Chapitre 1 : Introduction générale

1.1 Introduction 03

1.2 Problématique 04

1.3 Objectif de la thèse 04

1.4 Organisation du mémoire 05

### Chapitre 2 : Dynamique du mouvement vibratoire

2.1 Différentes méthodes d'analyse 07

2.2 Méthode des éléments finis 08

2.2.1 Principe de la méthode 08

2.2.2 Modèle élémentaire 09

2.2.2.1 Calcul des coefficients élastiques et dynamiques 12

2.2.2.2 Forces nodales équivalentes 17

2.2.3 Formulation globale de la pale 18

### Chapitre 3 : Etude des vibrations libres

3.1 Calcul des formes propres et des fréquences propres 20

3.2 Propriété des modes propres 21

3.3 Conditions aux limites 21

3.4 Résultats et analyses 21

### Chapitre 4 : Etude des vibrations forcées

4.1 Force aérodynamique élémentaire 26

4.1.1 Pale non déformée 26

4.1.1.1 Théorie de l'élément de pale 26

4.1.1.2 Relation entre la vitesse du vent et la vitesse angulaire 27

4.1.1.3 Calcul des forces aérodynamiques 28

4.1.2 Pale déformée 30

4.2 Résolution de l'équation du mouvement forcé 31

4.2.2 Solution des équations modales 33

4.3	Contraintes et déflexion	35
4.3.1	Déflexion de la pale	35
4.3.2	Contraintes	35
4.3.2.1	Introduction	35
4.3.2.2	Poutre en flexion	36
4.3.2.2.1	Effort tranchant et moment fléchissant	36
4.3.2.2.2	Contraintes dans une poutre en flexion	37
	• Contrainte normale	37
	-Contrainte normale due au moment fléchissant	37
	-Contrainte normale due à l'effort de tension	38
	• Contraintes de cisaillement	38
4.4	Résultats et analyses	39
4.4.1	Déplacement du bout libre de la pale	39
4.4.2	Déflexion totale	41
4.4.3	Distribution des contraintes normales	44
4.4.4	Contrainte normale maximale à l'encastrement	47
	<b>Chapitre 5 : Etude de la fatigue</b>	
5.1	Introduction à la fatigue	53
5-2	Prévision de durée de vie en fatigue	53
5-4	Application	56
	<b>Conclusion générale</b>	57
	<b>Références</b>	59
	<b>Annexe</b>	
	<b>Résumés</b>	

## Nomenclature

- $V$  : Vitesse du vent à l' infini
- $v_d$  : Vitesse du vent dans le plan du rotor
- $v_r$  : Vitesse relative du vent
- $R$  : Rayon de l'extrémité' de la pale
- $r$  : Rayon local
- $d$  : distance à la fibre neutre de la poutre
- $C_x$  : Coefficient de trainée
- $C_z$  : Coefficient de portance
- $A$  : Section de la pale
- $C$  : longueur de la corde du profil
- $E$  : Module de Young
- $df$  : Chargement élémentaire de la pale
- $D$  : Dommage cumulé totale
- $f$  : Force aérodynamique
- $I$  : Moment d'inertie quadratique
- $G$  : Force centrifuge
- $M_f$  : Moment fléchissant
- $m$  : Masse par unité de longueur
- $M$  : Matrice de masse
- $K$  : Matrice de raideur
- $L$  : Longueur de la pale
- $l$  : Longueur d'un élément de pale
- $x$  : Distance de l'axe de rotation

$T$  : Energie cinétique

$t$  : Temps

$U$  : Energie potentielle totale

$U_B$  : Energie potentielle de flexion

$U_G$  : Energie de déformation due a la force centrifuge

### Lettres grecques

$\beta$  : angle d'incidence

$\gamma$  : angle de calage

$\alpha$  : angle du vent apparent

$\lambda$  : Constante de fréquence

$\Omega$  : vitesse de rotation angulaire de la pale

$\rho$  : Masse volumique

$\omega$  : pulsation

$\tau$  : Contrainte de cisaillement

$\sigma$  : Contrainte normale

## 1-1 introduction

Afin de lutter contre les changements climatiques, on prône de plus en plus l'utilisation d'énergie propre et durable. Ceci aura pour but de réduire les émissions de gaz à effet de serre. Celles ci sont principalement produites par les énergies fossiles (pétroles, gaz et charbon).

De plus, l'exploitation excessive des énergies fossiles par les pays industrialisés va provoquer, d'ici moins d'un siècle, leur raréfaction, voire leur disparition. Afin de pallier à toute éventualité; il est donc indispensable, et même vital d'exploiter plus les énergies renouvelables et plus particulièrement l'énergie éolienne qui est moins couteuse et plus rentables que les autres énergies renouvelables dans les nombreuses régions ventées du globe [1].

Depuis quelques années, et afin de répondre à un besoin de plus en plus croissant dans le domaine énergétique, la taille des éoliennes destinées à la production d'électricité n'a cessé de croître. Les effets de l'augmentation de la taille des machines et plus particulièrement des pales a pour conséquence l'apparition de phénomènes vibratoires et d'instabilités d'origine aéroélastique (vibrations, bruit).



**Fig.1.1** Eolienne à axe horizontale

## 1-2 problématique

Le point nodal sur lequel je vais axer mon travail concerne les pales, du fait qu'elles sont les véritables capteurs d'énergie, influençant fortement les performances de l'installation.

Les effets qui s'exercent sur eux sont de deux types :

- Les effets aérodynamiques.
- Les effets d'origines inertielles et élastiques.

L'étude du comportement dynamique des pales, prenant en compte les différents efforts, est indispensable pour la détermination de leur durée de vie. En effet, l'ensemble des sollicitations dynamiques produit des vibrations entretenues qui peuvent affecter fortement leur tenue en fatigue.

## 1-3 objectif de la thèse

L'étude a pour objectif la mise en évidence des phénomènes dynamiques sollicitant les pales en vue de leur dimensionnement à la fatigue.

Pratiquement, le travail aboutit à un outil de simulation qui met en évidence les effets dynamiques sur une pale lors de sa rotation en tenant compte d'une part des efforts mécaniques (effet centrifuge, inertiel) et d'autre part, des effets aérodynamiques. Pour les modéliser, nous utiliserons la méthode aux éléments finis appliquée aux poutres. L'écoulement sera supposé stationnaire. Le code est rédigé en langage Matlab.

Des travaux antérieurs sur le sujet ont été réalisés [2] mais en considérant une pale de section constante.

Le premier a utilisé la méthode des éléments finis basée sur le second principe de la dynamique pour le calcul des modes propres, et le second a utilisé la méthode des modes supposées.

Leowy et Stoddard [3] ont utilisé des méthodes approximatives pour déterminer les fréquences de flexion ainsi que les contraintes agissant sur une pale.

Serge Samper [4], en utilisant la méthode des éléments finis a calculé les fréquences et modes propres de poutres en rotation uniforme.

Le cas qu'on étudiera concerne une pale effilée (de section variable) ce qui nous permettra de faire une étude comparative avec le cas de la pale de section constante.



**Fig.1.2 pale effilée****Fig. 1.3 pale à section constante**

#### 1-4 organisation du mémoire

Ce mémoire comprend cinq chapitres :

##### **Chapitre I:**

Dans le premier chapitre il sera question de voir quels sont les travaux qui ont été réalisés dans ce domaine.

##### **Chapitre II:**

On s'intéresse à l'étude dynamique du mouvement vibratoire de la pale en rotation uniforme en nous appuyant sur la méthode des éléments finis.

La pale en mouvement subissant trois types de déformations : longitudinale, latérale, et de torsion. En séparant les trois modes, on s'est intéressé à l'étude du mouvement longitudinal qui s'avère le mode le plus important.

##### **Chapitre III:**

Il sera consacré à la détermination des fréquences propres et des modes de formes correspondantes.

**Chapitre VI :**

Il traite le mouvement forcé de la pale c'est-à-dire le mouvement de la pale sous l'effet des charges aérodynamiques .On procède dans un premier temps a la détermination de ces efforts en utilisant la théorie de l'élément de pale puis la résolution de l'équation des vibrations forcées en utilisant la méthode de superposition modale .Ce qui nous permet de trouver la déflexion au bout libre de la pale et aussi les contraintes agissant sur la pale.

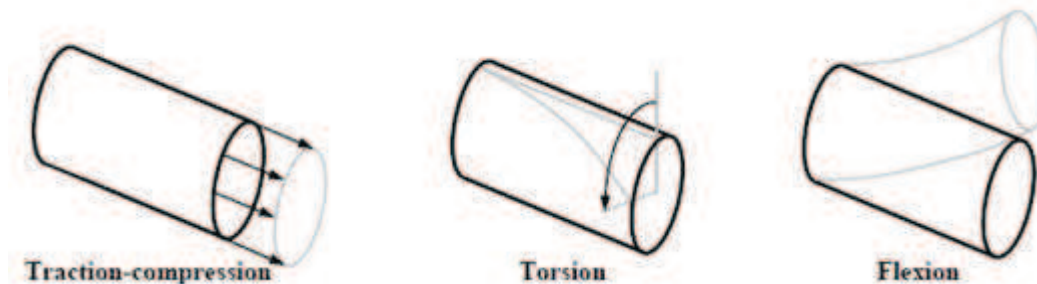
**Chapitre V :**

Etude de la fatigue : connaissant les contraintes agissant sur la pale on peut faire une estimation de la durée de vie de la pale par la fatigue.

**Conclusion générale**

### 2-1 Différentes Méthodes d'Analyse :

La pale en mouvement subit 3 types de déformations fondamentales [3] (Figure 2.1). Ce type de milieu continu peut être classé en 4 catégories selon le mode de déformation subi :



**Figure 2.1 – Déformations fondamentales des poutres continues**

- système en traction-compression,
- système en torsion,
- système en flexion,
- système dont le mouvement est régi par un couplage des trois types précédents.

Pour une pale en traction-compression, les sections droites se déplacent uniquement dans la direction de la fibre neutre, elles ne subissent qu'un effort normal (la contrainte normale est alors constante sur chaque section droite).

Pour une pale en torsion, les sections droites font un mouvement de rotation qui dépend de la position axiale, seul un moment de torsion s'applique sur celles-ci (la contrainte normale est nulle sur la section droite).

Pour la flexion, comme pour la traction compression, la déformation provient de la contrainte normale.

Cependant, dans ce mode de déformation, la courbure de la poutre est prise en compte, la contrainte normale n'est alors plus constante sur les sections droites qui subissent un moment de torsion et un effort tranchant.

Ce dernier mode est le plus important, vu qu'elle présente une plus faible fréquence et de plus grand moment et déformation [2] c'est pour cette raison que notre étude s'est limité à ce mode.

Les équations différentielles du mouvement d'un système continu peuvent être déterminées, soit en se servant des techniques employées dans la théorie de la mécanique des solides déformables (2ème principe de la dynamique), soit en appliquant le principe de Hamilton.

Des études antérieures sur le sujet [2] ont montrés en appliquant le second principe de newton à l'élément de pale en rotation on aboutit à une équation différentielle du 4<sup>ème</sup> ordre de la forme :

$$\frac{\partial^2 \left( EI \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \right)}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( G \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + m \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \partial F / \partial r \quad (2-1)$$

La résolution analytique de cette équation est impossible même pour une pale à section constante [2]. Dans notre cas où la section est variable (pale effilée) le problème se complique encore.

Face à un tel problème, on est conduit à chercher la solution par des méthodes approximatives :

**-méthode de Lagrange**

**-méthode des modes supposées**

Cette méthode consiste à choisir une suite de fonctions finie qui satisfait les conditions aux limites, et puis utiliser les équations de Lagrange pour déterminer les coefficients inconnus.

**-méthode des éléments finis** : qui sera détaillée par la suite, et c'est cette dernière qu'on choisira pour les raisons suivantes :

- la première et la deuxième méthode ont été déjà utilisées dans d'autres thèses [2].
- la méthode des éléments finis est plus précise. (En augmentant le nombre d'éléments l'erreur sur la solution tend vers zéros) .

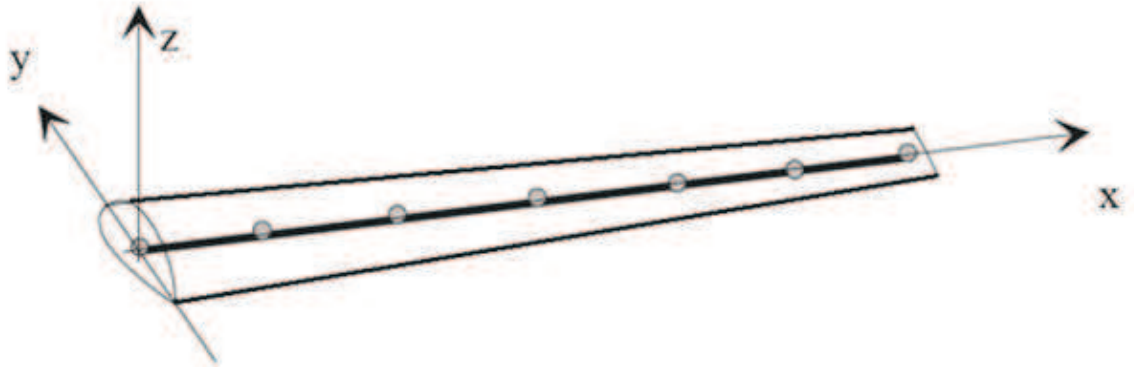
## 2-2 Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (de type déplacements) permet de considérer une structure complexe comme un assemblage d'éléments finis ou chaque élément est une partie de la structure continue. On subdivise la structure en un nombre fini de morceaux élémentaires, mono, bi, ou tridimensionnels, et on retient comme variables lagrangiennes que les déplacements aux nœuds du réseau de discrétisation ainsi obtenu. La structure discrétisée n'a plus qu'un nombre fini de degrés de liberté ce qui permet un traitement algébrique du calcul des modes de forme et fréquences propres. Il ne s'agit pas ici d'entrer dans les détails de la méthode ; nous en exposerons simplement les grandes lignes. L'ouvrage de référence a été [6].

### 2-2-1 Principe de la méthode :

#### Discrétisation :

La pale en rotation soumise aux efforts aérodynamiques est assimilée à une poutre droite de longueur L encastrée à une extrémité en (0) vibrant transversalement [Figure 2-2].



**Fig.2.2 pale divisée en éléments**

On divise la structure en un nombre fini de morceaux élémentaires de forme géométrique simple, appelés « éléments finis ». Une fois ce maillage réalisé on se donne, à l'intérieur de chaque élément un champ de déplacement approché, relié aux déplacements aux nœuds par des fonctions d'interpolations. Aussi pour chaque élément (e), le champ de déplacement à l'intérieur de(e) sera donné par :

$$u(x, t) = A_e(x) q_e(t) \quad (2-2)$$

Où

$q_e$  est le vecteur colonne des déplacements aux nœuds de l'élément (e)

$A_e$  la matrice d'interpolation pour l'élément (e).

Ainsi,  $A_e^i(x)$  représente le champ de déplacement de l'élément lorsque le déplacement du  $i^{\text{ème}}$  nœud vaut 1 et les autres 0.

### 2-2-2 Modèle élémentaire

Le modèle éléments finis de la pale a été réalisé à partir d'une poutre de Bernoulli à deux dimensions. La structure étant fortement élancée, l'influence des efforts de cisaillement n'est pas prise en compte dans ce modèle. La figure (2.3) présente les degrés de liberté du modèle de poutre de Bernoulli: on distingue les déplacements nodaux notés  $q_i$  et les rotations notées  $\theta_i$ .

Cherchons à exprimer le déplacement  $u(x, t)$  et déterminer les fonctions d'interpolation pour un élément de pale en flexion.

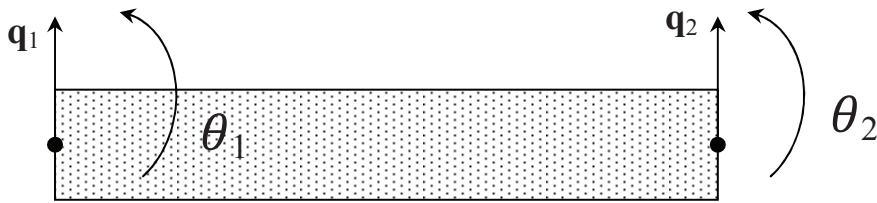


Figure- 2-3 Elément de poutre en flexion

L'équation différentielle représentative du déplacement  $u(x)$ , pour la rigidité uniforme à la flexion d'une poutre dans le cas statique, est

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4}(x) = 0 \quad \text{pour } x \text{ variant de } 0 \text{ à } l.$$

En intégrant successivement quatre fois cette équation, nous obtenons :

$$u(x) = 1/6 C_1 x^3 + 1/2 C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

où  $C_i$ , pour  $i$  variant de 1 à 4, sont les constantes d'intégrations.

Afin de les déterminer, les conditions décrites dans la [Figure 2-3] sont utilisées :

$$u(0) = q_1, \quad \frac{du}{dx}(0) = \theta_1, \quad u(l) = q_2, \quad \frac{du}{dx}(l) = \theta_2 \quad \text{ou } q_1 \text{ et } q_2 \text{ sont les déplacements nodaux et } \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ les rotations nodales.}$$

Ainsi les coefficients sont déterminés et valent :

$$C_1 = 6/l^3 (2q_1 + l\theta_1 - 2q_2 + l\theta_2), \quad C_2 = 2/l^2 (-3q_1 - 2l\theta_1 + 3q_2 - l\theta_2), \quad C_3 = \theta_1, \quad C_4 = q_1$$

En remplaçant les coefficients  $c_i$ , l'expression du déplacement  $u(x)$  devient :

$$\begin{aligned} u(x) &= [1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3] q_1 + [(\frac{x}{l}) - 2(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3] l \theta_1 + [3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3] q_2 + [-(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3] l \theta_2 \\ &= A_1(x) q_1 + A_2(x) l \theta_1 + A_3(x) q_2 + A_4(x) l \theta_2 \end{aligned}$$

où  $A_i(x)$ , pour  $i$  variant de 1 à 4, sont les fonctions d'interpolations

$u(x, t)$  peut être mis sous la forme suivante :

$u(x, t) = \{A(x)\}^T \{w(t)\}$  ou  $\{A(x)\}$  est le vecteur des fonctions d'interpolation de composantes :

$$A_1(x) = 1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3$$

$$A_2(x) = [(\frac{x}{l}) - 2(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3]$$

$$A_3(x) = 3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3$$

$$A_4(x) = -[(\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3]$$

et  $\{w(t)\}$  est le vecteur des déplacements nodaux de composantes :

$$w = \{q_1, \theta_1, q_2, \theta_2\}$$

Pour que l'approximation ainsi réalisée représente de façon non erronée la structure complète il faut satisfaire deux conditions aux éléments finis :

- 1- **la complétude** : à la limite en réduisant la taille de l'élément l'interpolation faite doit permettre de représenter n'importe quelle déformation.
- 2- **la compatibilité** : le champ des déplacements, ainsi que les dérivées premières des déplacements pour le problème de flexion, doivent être continus aux interfaces entre éléments.

Les éléments conformes sont des éléments possédant ces deux propriétés.

L'étape suivante consiste à appliquer Le principe de Hamilton qui affirme que la fonctionnelle :

$$J = J(q, \dot{q}) = \int_{t_i}^{t_f} (T - U) dt + \int_{t_i}^{t_f} w dt \quad (2-3)$$

est minimum le long de la trajectoire de phase décrivant la structure.

Les équations d'Euler expriment cette optimalité :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2-4)$$

avec  $L = T - U + W$

Il faut donc calculer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle de déformation U en fonction respectivement des vitesses et des déplacements aux nœuds :

$$T = T(\dot{q}) \quad U = U(q)$$

Supposons que le travail élémentaire des forces extérieures puisse s'écrire :

$$dw_e = F^T \cdot dq \quad F: \text{force généralisée}$$

Et qu'il n'y ait pas de forces dissipatives à l'intérieur de la structure.

(2-4) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial U}{\partial q} = F \quad (2-5)$$

Pour de petites déformations dans le domaine élastique, dans le cadre de la méthode des éléments finis, on peut écrire :

$$T_e = 1/2 \dot{q}^T M_e \dot{q} \quad M_e \text{ matrice de masses élémentaire généralisée}$$

$$U_e = 1/2 q^T K_e q \quad K_e \text{ matrice de raideur généralisée}$$

$$dw = F_e dq^T \quad F_e \text{ vecteur force généralisée}$$

L'équation du mouvement [3] s'écrit donc pour un élément de la pale:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e \mathbf{q} = \mathbf{F}_e \quad (2-6)$$

Le problème est maintenant de calculer les coefficients  $\mathbf{M}_e$ ,  $\mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{F}_e$

### 2-2-2-1 Calcul des coefficients élastiques et dynamiques :

Pour calculer ces coefficients appelés aussi matrice de masse et matrice de raideur on doit exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des coordonnées nodales.

On a vu que les déplacements des points d'un élément sont donnés en fonction des déplacements aux nœuds par la formule d'interpolation :

$$u(x, t) = \mathbf{A}_e(x) \mathbf{w}_e(t)$$

Ceci nous permet de calculer l'énergie cinétique de l'élément (e) :

#### -Calcul de la matrice masse associée à l'énergie cinétique de l'élément.

L'énergie cinétique associée au modèle poutre est de la forme :

$$T_e = 1/2 \int_e m \dot{u}^2 dx = 1/2 \int_e m \dot{q}^2 dx + \int_e m l \dot{\theta}^2 dx \quad (2-7)$$

Le premier terme est relatif à la translation et le deuxième à la rotation.

Pour les poutres longues [  $l / (A * L^2)$  est petit ] l'énergie cinétique de rotation des sections droites est très petite devant celle associée au mouvement de translation de la section. Nous négligerons le terme de rotation [7].

Utilisons l'approximation du champ des déplacements pour calculer l'énergie cinétique :

$$T_e = 1/2 \int_e m \dot{q}_e(t) \mathbf{A}_e^T(x) \mathbf{A}_e(x) \dot{q}_e(t) dx$$

L'indice(e) signifie que l'on intègre sur la surface de l'élément (e)

Soit :

$$T_e = 1/2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}$$

Avec

$$\mathbf{M}_e = \int_e m \mathbf{A}_e^T(x) \mathbf{A}_e(x) dx$$

On a fait l'hypothèse que la section d'un élément reste constante, mais elle change d'un élément à un autre. Ce qui fait que la matrice de masse diffère d'un élément à un autre.

$$\mathbf{M}_e = \rho s(x) \int_e \mathbf{A}_e^T(x) \mathbf{A}_e(x) dx \quad (2-8)$$



En utilisant les expressions de  $A_e$  et on effectuant les calculs des intégrales avec Matlab on trouve pour la matrice de masse élémentaire l'expression suivante:

$$M_e = \frac{\rho \cdot s(x) \cdot l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

où  $s(x)$  est la section de chaque élément. Dans le cas où les deux dimensions de la section varient On a utilisé une expression quadratique pour le calcul de  $s(x)$  [8] :

$$s(x) = s_1 \left[ 1 + \left( \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} - 1 \right) \frac{x}{L} \right]^2 = s_1 \left[ 1 + (\sqrt{r} - 1) \frac{x}{L} \right]^2 \quad (2-10)$$

$S_1$  est la section à l'encastrement

$S_2$  est la section au bout libre de la pale

$X$  est l'abscisse au centre de chaque élément

$r = S_2 / S_1$  : rapport d'aspect

### Calcul de la matrice raideur associée à l'énergie de déformation de l'élément.

L'énergie potentielle de déformation de l'élément (e) est formée de deux termes :

- L'énergie potentielle  $U_B$  due au fléchissement et l'énergie de déformation  $U_G$  due à la force centrifuge

#### Expression de $U_B$ :

En supposant que la déformation due à l'effort tranchant est négligée, la déformation d'une fibre située à la distance (d) de la fibre neutre (fig.2.4) s'exprime par [8] :

la relation :  $\varepsilon = \frac{d}{R}$

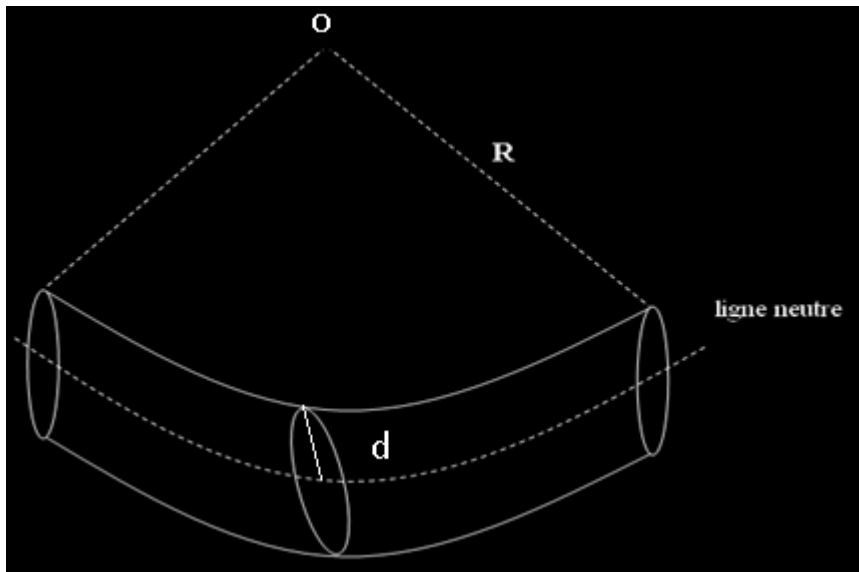


Figure-2-4- Représentation de la flexion d'une poutre

Soit en approximant la courbure  $1/R$  par la dérivée seconde de la flèche  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  :

$$\varepsilon = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où la contrainte :

$$\sigma = E \varepsilon = E d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Le potentiel élastique de déformation s'exprime par

$$W_e = 1/2 \sigma \varepsilon = 1/2 E [d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]^2$$

D'où l'expression de l'énergie de déformation.

$$U_B = \int W_e dv = 1/2 \int_v W_e dv = 1/2 \int_0^l E (\int_s d^2 ds) (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 dx$$

$$\text{Soit } U_B = \int_0^l EI/2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 dx$$

où  $I = \int_s d^2 ds$  en tenant compte de l'expression de  $u(x,t)$

$$\begin{aligned} U_B &= 1/2 \int_0^l EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ &= 1/2 \int_0^l EI q^T \frac{\partial^2 A_e^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} q dx \\ &= 1/2 (q^T K_{1e} q) \end{aligned}$$

Avec

$$K_{1e} = 1/2 \int_0^l EI \frac{\partial^2 A_e^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} dx \quad (2-11)$$

**Expression de  $U_G$  :**

L'énergie de déformation  $U_G$  due à la force centrifuge dans la pale peut être calculée de la façon suivante :

L'augmentation de l'élément de pale de  $dx$  provoque une augmentation de la longueur  $l$  de

l'élément de la quantité :  $\sqrt{dx^2 + du^2} \cdot dx$

Si la force centrifuge est désignée par  $G$  alors :

$$U_G = \int_0^l (G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - G) dx$$

En utilisant un développement limité au voisinage de  $x$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$U_G = \frac{1}{2} \int_0^l G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

En utilisant l'expression de  $u(x,t)$  comme précédemment on obtient pour  $U_G$  l'expression suivante

$$U_G = \frac{1}{2} \int_0^l G q^T \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} q dx$$

Soit :

$$U_G = \frac{1}{2} q^T K_{2e} q$$

$$\text{Avec } K_{2e} = \int_0^l G(x) \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx$$

L'énergie potentielle totale est :  $U_D = U_B + U_G$  s'écrira sous la forme

$$U_D = \frac{1}{2} q^T K_e q \quad \text{avec} \quad K_e = K_{1e} + K_{2e}$$

$K_e$  matrice de raideur de l'élément (e).

**Calcul de la matrice de raideur élémentaire :**

La matrice de raideur est formée comme nous l'avons vu de deux parties

La première est :

$$K_{1e} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \frac{\partial^2 A_e^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} dx$$

En faisant l'hypothèse que  $I(x)$  est constant pour un élément donné et qu'il varie d'un élément à un autre d'une manière quadratique [8]:

$$I(x) = I_1 \left[ 1 + \left( \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} - 1 \right) \frac{x}{L} \right]^4$$

$I_1$  est le moment quadratique de la section à l'encastrement

$I_2$  est le moment quadratique de la section libre de la pale

En utilisant les expressions de  $A_e$  et on effectuant les calculs des intégrales avec Matlab on trouve pour la matrice de raideur élémentaire  $K_{1e}$  l'expression suivante :

$$K_{1e} = (E I) / l^3 \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

La deuxième partie est :

$$K_{2e} = \int_0^l G(x) \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx \quad G \text{ c'est la force centrifuge agissant sur}$$

chaque élément de la pale.

Nous définissons, dans cette partie, une discrétisation adaptée à l'introduction des forces centrifuges [9]

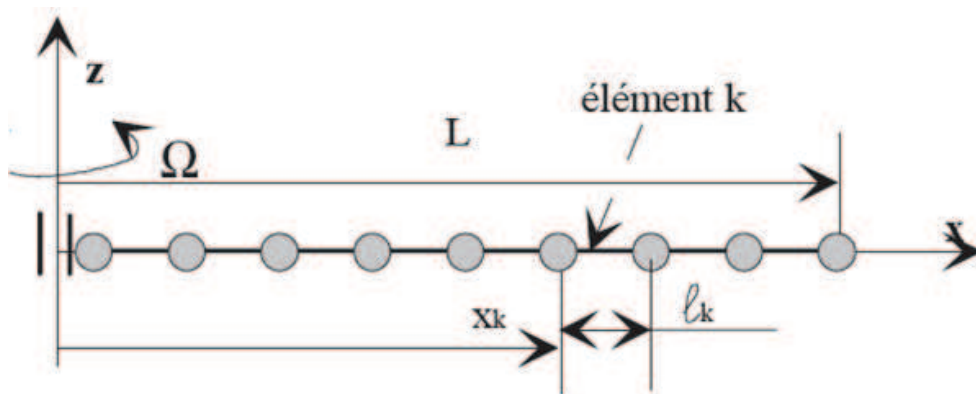


Figure 2-5 – Modèle de poutre en rotation

On s'intéresse à l'expression de l'effort normal dans le cas d'une poutre en rotation autour d'un axe fixe orthogonal à son axe.

L'équilibre dynamique local s'écrit:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + P(x) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Or, nous examinons, ici, l'équilibre relatif de la poutre sous l'action des forces centrifuges.

L'équation précédente prend alors la forme de l'équilibre statique local :

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0$$

Avec  $p(x) = - \int_V \rho \Omega^2 x dV = \int_0^l (\int_D - \rho \Omega^2 x ds ) dx = - \rho s \Omega^2 x dx$

Il vient  $N(x) = 1/2m \Omega^2 [L^2 - x^2]$

On prendra cette expression comme effort centrifuge a une distance x de l'axe de rotation :

$$G(x) = 1/2m \Omega^2 [L^2 - x^2] \tag{2-14}$$

On considère que G est constant le long d'un élément de pale.

On peut écrire donc que  $K_{2e} = G(x) \int_0^1 \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx = G(x).b$

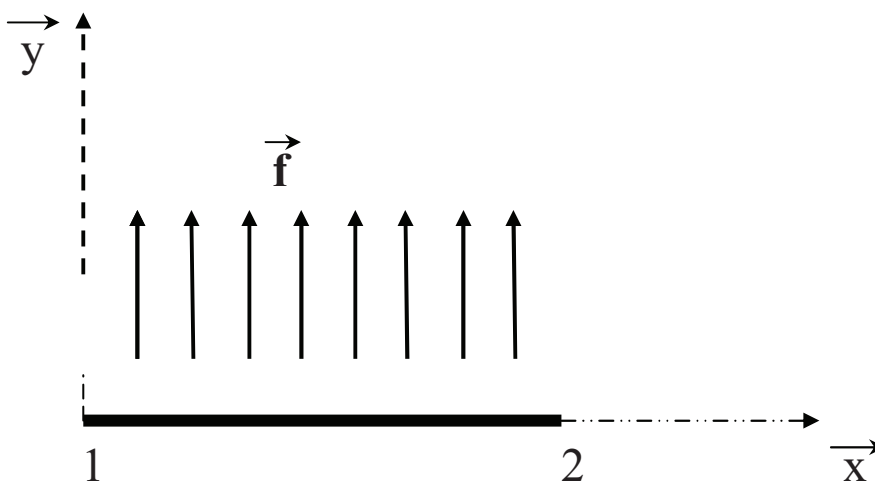
où  $b = \int_0^1 \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx$

b est une matrice identique pour tous les éléments de la pale dont les éléments sont calculés avec Matlab :

$$b = \begin{pmatrix} 6/5/l & 1/10/l^2 & -6/5/l & 1/10/l^2 \\ 1/10/l^2 & 2/15/l^3 & -1/10/l^2 & -1/30/l^3 \\ -6/5/l & -1/10/l^2 & 6/5/l & -1/10/l^2 \\ 1/10/l^2 & -1/30/l^3 & -1/10/l^2 & 2/15/l^3 \end{pmatrix} \tag{2-15}$$

**2-2-2-2 Forces nodales équivalentes**

Soit un élément de poutre sur lequel est appliquée une densité linéique d'efforts transversaux  $f \rightarrow$



**Fig.2-6 efforts sur un élément**

Exprimons le travail virtuel de ces efforts

$$\delta T_{ext} = \int_0^l \vec{f} \cdot \vec{\delta u} \, dx = \{\delta w\}_e^T \int_0^l [Ae]^T f \, dx \Rightarrow \{F\}_e = \int_0^l f \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} dx$$

Le vecteur force généralisé  $F_e$  est exprimé sur les variables relatives au repère local de l'élément.

Si la densité de charge est uniforme l'intégrale est simple à évaluer nous obtenons :

$$\{F\}_e = f \int_0^l A^T \, dx = f \begin{Bmatrix} l/2 \\ l/12 \\ l/2 \\ -l/12 \end{Bmatrix}$$

Les composantes de ce vecteur représentent des efforts et moments fictifs appliqués aux nœuds de l'élément, qui au sens de l'approximation, fournissent le même travail virtuel que la densité de charge

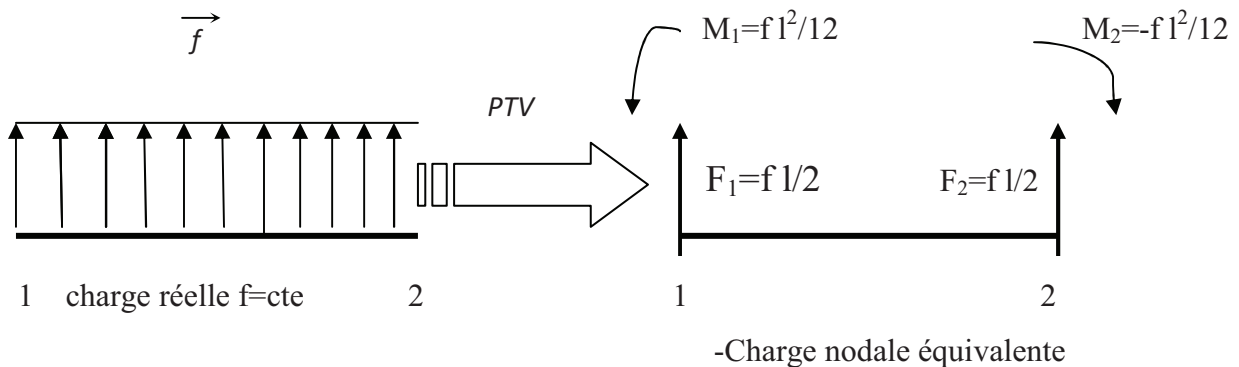


Fig. 2-7 charge élémentaire

**2-2-3-Formulation globale de la pale :**

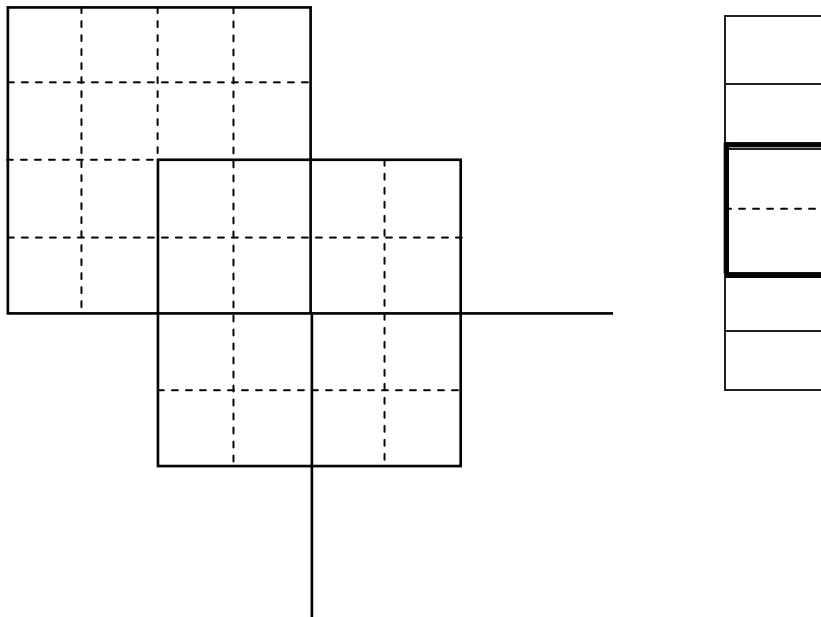
Pour que l'étude de la pale avec la méthode des éléments finis donne des résultats acceptables il faut considérer plusieurs éléments le nombre dépend de la précision que l'on veut atteindre, mais prendre un seul élément serait absolument inexact.

Ayant fixé le nombre d'éléments on calcul pour chacun d'eux  $M_e$  et  $K_e$ , puis on procède au calcul des matrices de masse et de raideur globales. On réalise donc un assemblage des éléments du maillage. Le principe de ceci consiste à sommer les énergies cinétiques élémentaires ce qui conduit à assembler les matrices de masses élémentaires pour obtenir la matrice de masse globale et à sommer les énergies potentielle élémentaires ce qui conduit a assembler les matrices de raideur élémentaires pour obtenir la matrice de raideur globale.

Les matrices globales M et K résultent de l'ajout « en diagonale » des matrices élémentaires.

De façon analogue, les travaux virtuels s'additionnent et le vecteur de force généralisée se construit donc par assemblage.

La procédure est montrée suivant le schéma ci dessous :



### 2-8 -Assemblage des matrices élémentaires

Ayant calculé les matrices globales on écrira l'équation de mouvement de la pale en l'absence d'amortissement par une équation de la même forme que celle d'un élément [10] :

$$M \ddot{q} + K q = F \quad (2-16)$$

Avec :

M c'est la matrice de masse globale

K c'est la matrice de raideur globale

F c'est le vecteur force globale s'exerçant sur toute la pale

Dans le domaine des vibrations mécaniques, il est nécessaire de calculer la valeur des premières fréquences propres et des modes propres d'un système continu pour les raisons suivantes :

- ☑ Il nous fournit des informations sur les résonnances qui ont lieu autour des modes
- ☑ Les modes de formes ainsi déterminées vont nous servir comme base à l'analyse modale lors de l'étude des vibrations forcées.

Les vibrations sont dites libres lorsqu'elles ne sont pas imposées par des efforts extérieurs (i.e.) ce ci revient à poser  $F=0$  dans l'équation (2-16) qui devient :

$$M \ddot{q} + K q = 0 \quad (3-1)$$

### 3-1 Calcul des formes propres et des fréquences propres

Les modes propres de vibrations sont ceux pour lesquels tous les points vibrent en phase

On cherche donc la solution sous la forme :

$$q(t) = \underline{x} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-2)$$

en remplaçant dans (3-1) on obtient :

$$(K - \omega^2 M) \underline{x} = 0 \quad (3-3)$$

C'est l'équation aux valeurs propres.

Les  $\underline{x}_i$  ainsi définis sont les formes propres de la structure, ils représentent les déplacements aux nœuds du maillage en éléments finis lors d'une vibration propre de la pale.

Le système matriciel (3-3) n'a de solution non triviale ( $\underline{x} \neq 0$ ) que si, et seulement si son déterminant est nul

$$\text{Det}(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3-4)$$

Les matrices  $K$  et  $M$  étant définies positives, il en résulte que l'équation (3-4) possède  $N$  racines réelles  $\omega_i^2$  ou  $N$  est la dimension des matrices  $K$  et  $M$ . Ces racines sont les valeurs propres du système.

A Chaque valeur propre  $\omega_i^2$  est associée un vecteur propre  $\underline{x}_i$  solution de l'équation :

$$(K - \omega_i^2 M) \underline{x}_i = 0$$

$\underline{X}_i^T = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n\}$ . Le système d'équations (3-4) possède  $N$  vecteurs propres associés aux valeurs propres.



La solution générale de l'équation (3-3) s'écrit alors :

$$Q = \sum_{i=1}^N x_i (\sin \omega_i t + \varphi_i) \quad (3-5)$$

### 3-2 Propriété des modes propres

Les modes propres possèdent la propriété fondamentale d'être orthogonaux 2 par 2 par rapport aux matrices de masse et de rigidité.

C'est-à-dire :

$$X_m^T M X_n = \delta_{mn} \quad \text{et} \quad X_m^T K X_n = \delta_{mn} \quad (3-6)$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{mn} = 0$  si  $m \neq n$  et  $\delta_{mn} = 1$  si  $m = n$ ).

Cette propriété d'orthogonalité des modes sera exploitée dans le prochain chapitre lors de l'étude des vibrations forcées.

### 3-3 Conditions aux limites :

Le cas étudié concernant une pale encastrée-libre.

La condition d'encastrement d'une extrémité implique l'annulation des énergies potentielle et cinétique en ce point, ceci revient à éliminer les 2 lignes et les 2 colonnes concernant ce nœud des matrices de masse et de raideur.

### 3-4 Résultats et analyses

Les calculs des valeurs propres et vecteurs propres ont été effectués par Matlab pour les deux cas suivants :

- pour une pale encastrée de section constante
- une pale encastrée effilée (de section variable)

### - Comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec ceux obtenus par la méthode des modes supposés [2]

Dans un premier temps, les résultats numériques obtenus, par la MEF, pour une pale de section constante encastrée -libre sont comparés à ceux obtenus avec la méthode des modes supposés. Le Tableau. I donne les trois premières pulsations propres obtenues, pour le cas d'une poutre de section constante encastrée, par la méthode des modes supposés et par la MEF. Pour les résultats donnés ci-dessous, la pale est décomposée en 10 éléments ( $N_e = 10$ ).

$\Omega$  : vitesse de rotation de la pale

Pale de section constante (Eléments finis)	Pale de section constante Modes supposées[4]	erreur
1.10 $\Omega$	1.073 $\Omega$	3%
3.10 $\Omega$	2.910 $\Omega$	6%
5.96 $\Omega$	6.052 $\Omega$	1,5%

Tableau I – Les trois pulsations propres obtenues par la méthode des modes supposées et la MEF

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont très proches ce qui donne une validation à la méthode (MEF) qu'on a utilisée.

#### - Comparaison des résultats pour une pale encastrée de section constante et une pale effilée

Le Tableau II donne les trois premières fréquences propres obtenues, pour le cas d'une pale encastrée de section constante et pour une pale encastrée de section variable.

Pour cette comparaison, on a tenu à ce que la masse de la pale de section constante soit égale à la masse de la pale de section variable, pour que ceci se réalise on a utilisé la relation suivante entre les sections[9]:

$$S_{eq} = \sqrt{S_1 S_2}$$

$S_{eq}$  : la section constante

$S_1$  : section à l'encastrement de la pale effilée

$S_2$  : section au bout de la pale effilée

$r = S_2 / S_1$  (rapport d'aspect)

On prend  $r = 0.2$

Pale de section constante	Pale effilée (de section variable)	$\Omega_v/\Omega_c$
1.11 $\Omega$	1.45 $\Omega$	1.48
3.11 $\Omega$	3.27 $\Omega$	1.05
5.96 $\Omega$	5.54 $\Omega$	0.90
9.91 $\Omega$	8.60 $\Omega$	0.81
15.02 $\Omega$	12.46 $\Omega$	0.75

Tableau II – Les cinq premières pulsations propres obtenues pour une pale encastree de section constante et variable.

Nous pouvons constater que les deux premières fréquences propres obtenues pour la pale de section variable sont plus importantes que celles de la pale de section constante. Pour les deux dernières fréquences propres, c'est l'inverse qui se produit.

**- Comparaison des modes de formes d'une pale encastree de section constante et une pale effilée**

Ci-dessous les modes formes correspondants (les trois premiers modes) pour une pale effilée et pour une pale de section constante .Ne=10,  $\Omega = 11\text{rd/s}$  et  $r = 0.2$

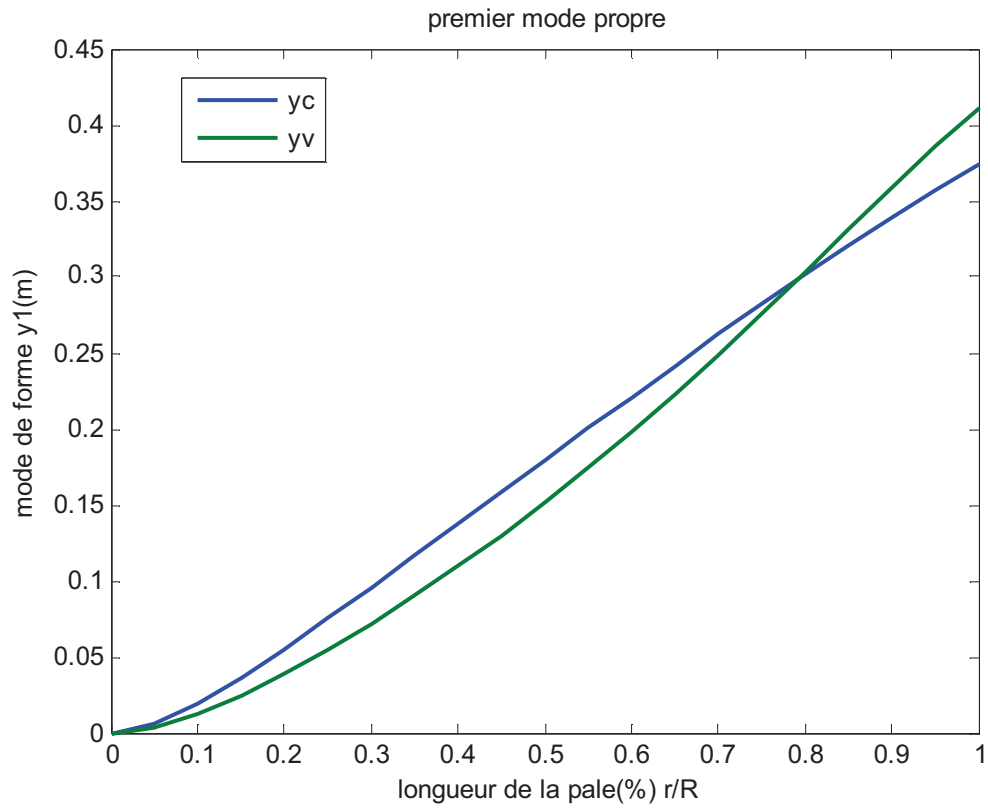


Fig. 1 : 1<sup>er</sup> mode de forme

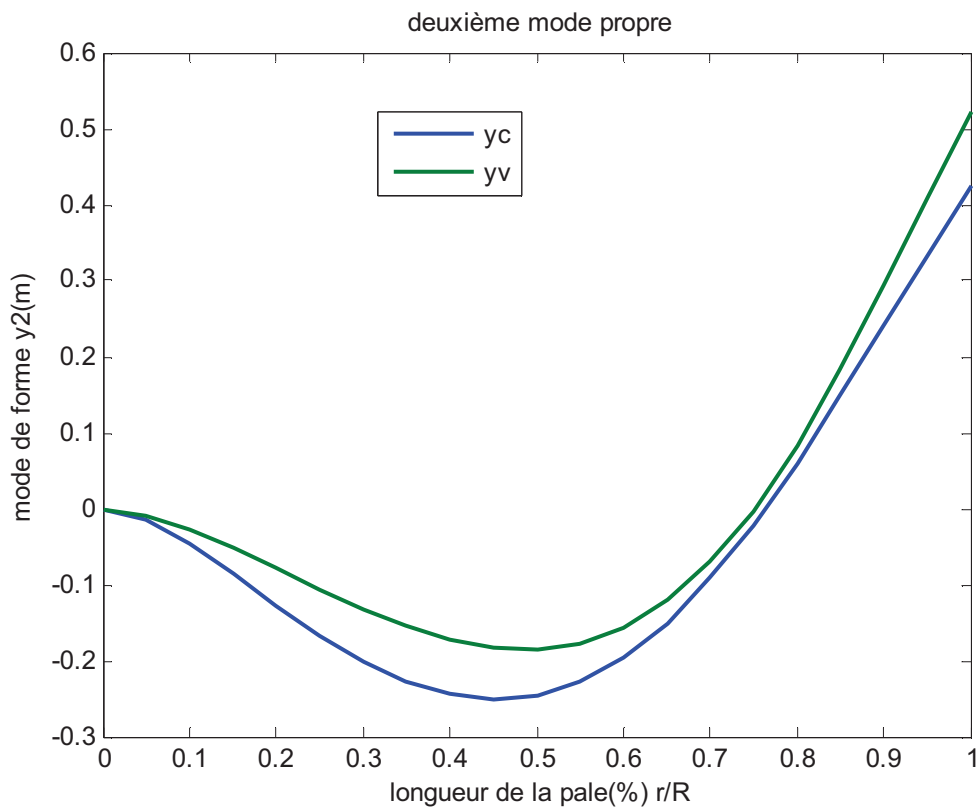
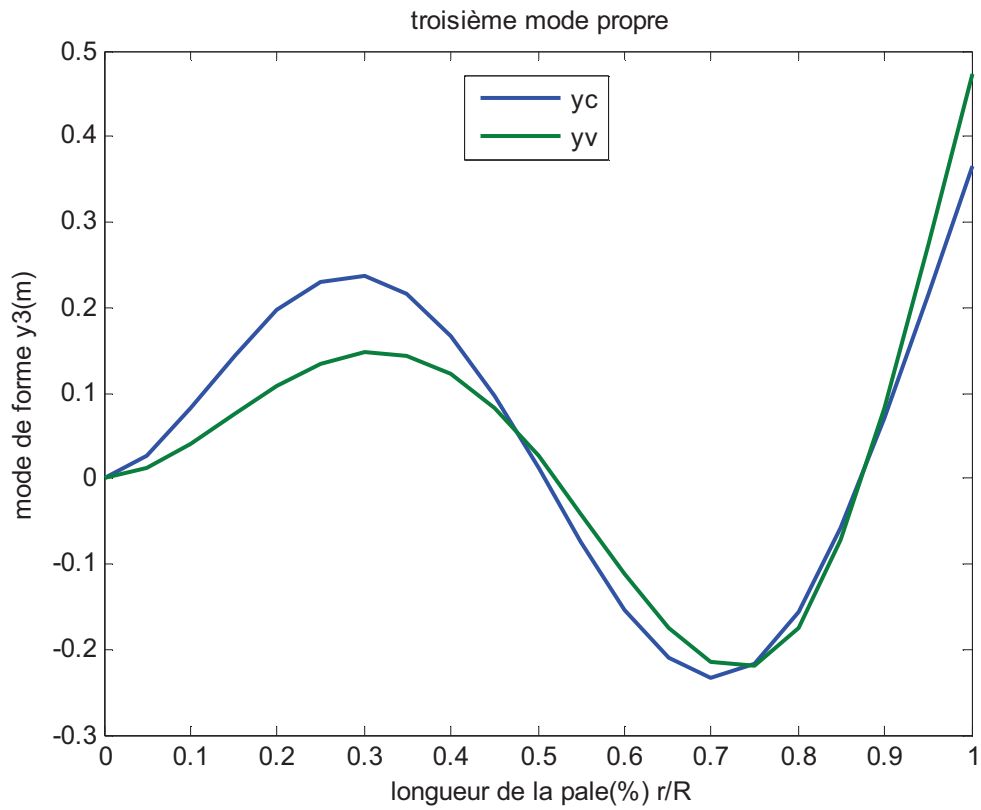


Fig. 2 : 2<sup>ème</sup> mode de forme

Fig. 3 : 3<sup>ème</sup> mode de forme

On remarque que l'amplitude de vibration de la pale de section constante est constante et que celle de la pale effilée est variable, et que cette amplitude de la pale effilée est inférieure à celle de la pale uniforme sur les trois quarts de la longueur de la pale et y supérieure sur le dernier quart.

Dans ce chapitre on va étudier le mouvement vibratoire de flexion de la pale sous les sollicitations aérodynamiques.

Cette étude va nous permettre de déterminer la variation en fonction du temps des contraintes auxquelles est soumise la pale et par là étudier la tenue à la fatigue en fonction du temps.

On va essayer de résoudre l'équation (2-16) :

$$M \ddot{q} + K q = F$$

Les matrices M et K ont été déterminées dans le chapitre précédent, et il reste à déterminer le vecteur force F.

On suppose que la charge aérodynamique agissant sur un élément de pale est uniforme.

Dans ce cas le vecteur force élémentaire  $F_e$  a pour expression :

$$F_e = f \begin{pmatrix} 1/2 \\ l^2/12 \\ 1/2 \\ -l^2/12 \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

où «  $f$  » est la densité de charge appliquée sur un élément.

Le vecteur force globale F est obtenue en assemblant les vecteurs forces élémentaires  $F_e$ .

Pour déterminer le vecteur force globale, on doit d'abord trouver la densité de charge aérodynamique «  $f$  » appliquée à un élément de pale.

#### 4-1 : Force aérodynamique élémentaire

##### 4-1-1 : Pale non déformée

##### 4-1-1-1 : Théorie de l'élément de pale

Pour simplifier l'étude on va appliquer la théorie de l'élément de pale qui consiste à diviser la pale en une série d'éléments (profils aérodynamiques) qui fonctionnent indépendamment c'est-à-dire on néglige l'interaction entre les tubes d'écoulement correspondant aux éléments voisins. Ainsi, il est possible d'obtenir indépendamment les forces de la trainée et de la portance appliquées sur chaque élément, sans tenir compte de l'écoulement dans les éléments voisins [10].

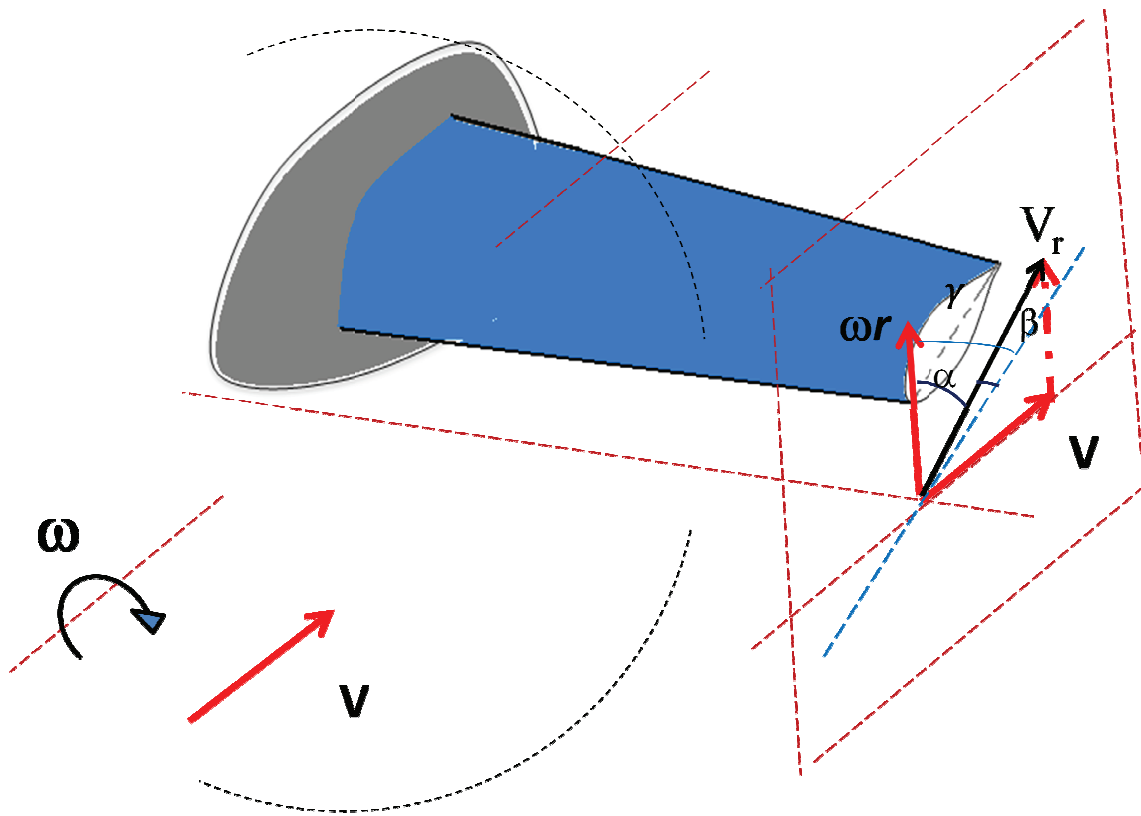


Fig.4-1 : vitesse relative du vent

**4-1-1-2 : Relation entre la vitesse du vent et la vitesse angulaire de la pale**

Pour obtenir les forces élémentaires, chaque élément de la pale est représenté comme une aile cylindrique avec une surface  $ds = c dr$ . Cet élément est soumis au vent résultant de vitesse  $W$  qui est une composition de la vitesse du vent à l'infini  $V$  et de celle de rotation  $v_d = \Omega r$

$$W^2 = V^2 + \Omega^2 r^2 \tag{4-12}$$

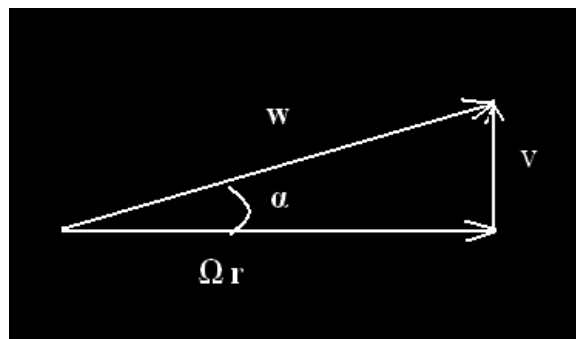


Fig. 4-2 : Triangle des vitesses

**4-1-1-3- Calcul des forces aérodynamiques**

Le champ de pression sur un profil de corde  $c$  donne naissance à une force aérodynamique élémentaire  $dF$ . Elle se décompose en deux forces élémentaires d'intensités respectives  $dF_x$  et  $dF_z$  où :

$dF_x$  est la force élémentaire de trainée parallèle à  $W$

$dF_z$  est la force élémentaire de portance normale à la direction de  $w$

L'angle d'incidence  $\beta$  est calculé à partir de l'angle d'écoulement  $\alpha = \arctg\left(\frac{V}{\Omega r}\right)$

et l'angle de calage  $\gamma$  :

$$\beta = \alpha - \gamma \quad (4-13)$$

La portance et la trainée, (fig.4.4) s'expriment à l'aide des coefficients de portance et de trainée tels que [11] :

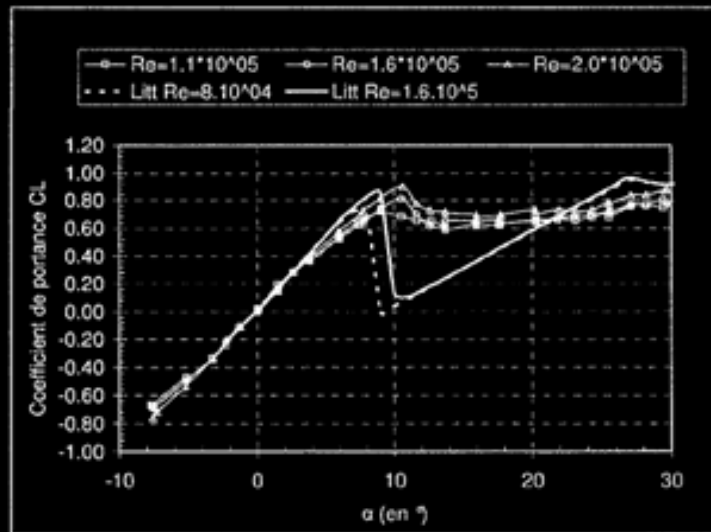
$$dF_z = 0.5\rho W^2 C_z(\beta).c.dr \quad (4-14)$$

$$dF_x = 0.5\rho W^2 C_x(\beta).c.dr \quad (4.15)$$

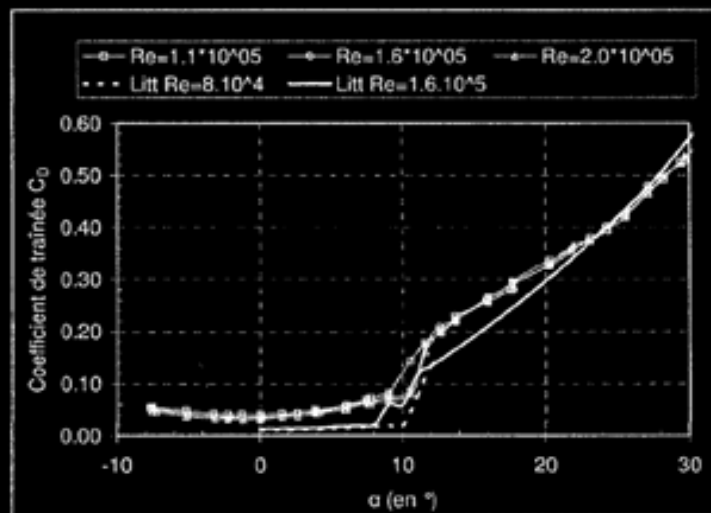
Dans ces formules  $C_z$  et  $C_x$  sont les coefficients de portance et de trainée du profil de la pale.les valeurs de ces coefficients dépendent de l'angle d'incidence entre la corde du profil et la vitesse résultante.ces coefficients sont obtenus à partir des essais de profils ou des simulations numériques.

Sur la figure (4-3) on a les caractéristiques aérodynamiques d'un profil NACA 0012 [12]





Coefficients de portance sur profil NACA 0012 à différents nombres de Reynolds.



Coefficients de traînée sur profil NACA 0012 à différents nombres de Reynolds.

**Fig. 4-3 : Caractéristiques aérodynamique du NACA 0012**

Ainsi si on connaît l'angle d'incidence du vent sur la section de la pale au rayon  $r$  d'après la courbe des polaires, on en déduit les coefficients aérodynamiques.

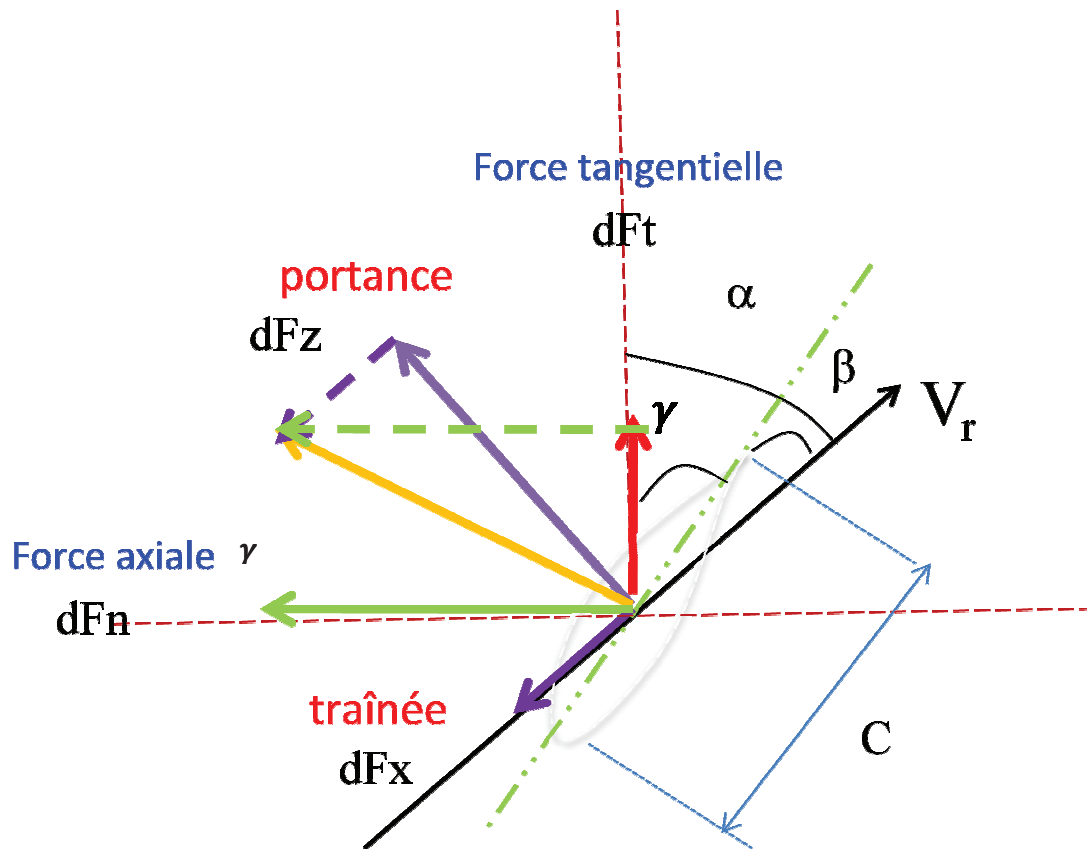


Fig. 4-4 : Aérodynamique d'une section de pale

Afin d'obtenir la force normale (axiale) et la force tangentielle appliquée à chaque élément de pale on projette les forces élémentaires  $dF_x$  et  $dF_z$  dans la direction normale au plan de rotation selon l'axe  $n$ , ce qui donne la force élémentaire normale  $dF_n$  appliquée sur l'élément de pale  $dr$ .

$$dF_n = dF_x \sin \alpha + dF_z \cos \alpha = 0.5 \rho W^2 \cdot c(r) \cdot dr [C_x(\beta) \sin \alpha + C_z(\beta) \cos \alpha] \quad (4.16)$$

Seule cette composante normale intervient dans le cas de la flexion.

#### 4-1-2 Pale déformée

la déformation de flexion d'un élément de la pale suivant l'axe des  $z$  d'une quantité  $dz$  introduit une variation sur l'angle d'incidence d'une valeur  $u$  telle que  $u = \text{tg}(dz/dx)$ ,

(Voir figure), L'angle d'incidence  $\beta$  devient alors  $\beta' = \alpha - \gamma - u$ .

Les expressions trouvées précédemment dans le cas de la pale non déformée seront remplacées par les expressions suivantes :

$$V' = V \cos u \quad \text{avec } u = \arctg dz/dx \quad (4-17)$$

$$V'_d = V_d \cos u \quad (4-18)$$

$$w'^2 = v'^2 + v_d'^2 = (v^2 + v_d^2) \cos^2 u \tag{4-19}$$

Les forces de portances et de trainée deviennent :

$$dF_z = 0.5 \rho W'^2 C_z c dr \tag{4.20}$$

$$dF_x = 0.5 \rho W'^2 C_x c dr \tag{4.21}$$

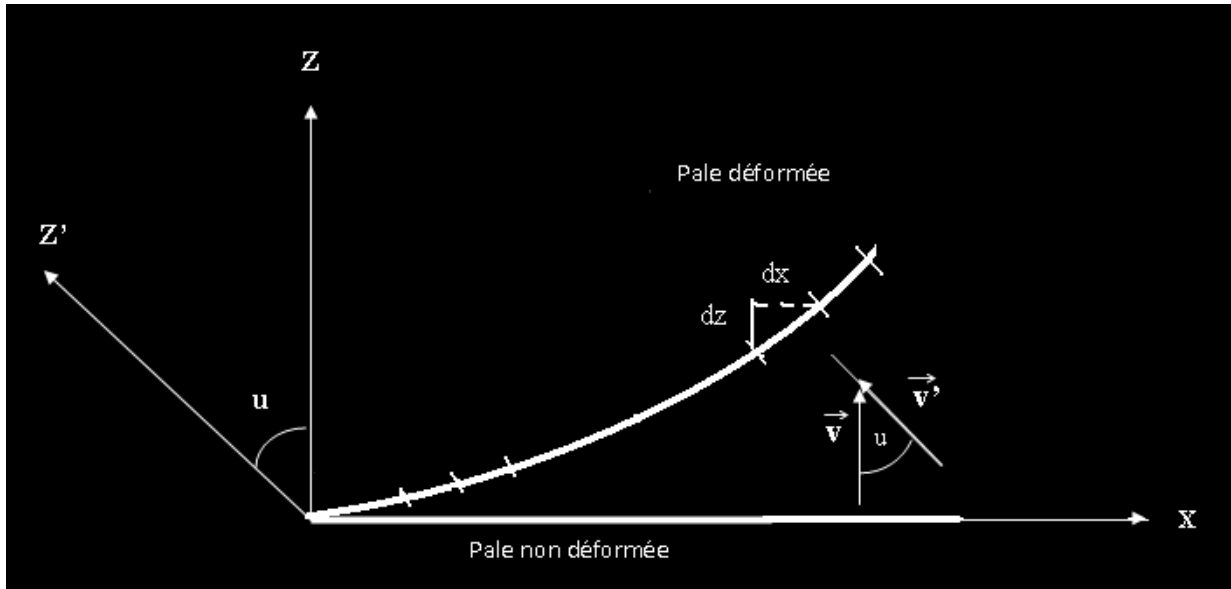


Fig. 4-5 forces sur une pale déformée

## 4-2- Résolution de l'équation du mouvement forcé

### 4-2-1- Méthode de superposition modale [13]

Dans l'équation du mouvement forcé de la pale  $M \ddot{q} + K q = F$ , M et F ont pour dimensions  $2n \times 2n$  et les vecteurs q et F pour dimensions n où n représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

Du fait de la structure non diagonale de la matrice K, et bien que la matrice M puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang i du système (4-11) fait intervenir non seulement le degré de liberté  $q_i$  mais également des degrés de liberté  $q_j$  ( $j \neq i$ ).

Pour découpler les équations de ce système, on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. Il est donc intéressant de réécrire cette équation dans la base des modes propres [14].

le déplacement  $q(x,t)$  s'exprime dans cette base sous la forme suivante :

$$q(x,t) = V_1 \phi_1(t) + V_2 \phi_2(t) + V_3 \phi_3(t) + \dots + V_n \phi_n(t) + \dots + V_{2n} \phi_{2n}(t) \tag{4-22}$$

ou sous forme matricielle  $q(t) = V \varphi(t)$

où  $V = [V_1, V_2, V_3, \dots, V_{2n}]$  est la matrice des modes propres précités.

$\varphi = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \}^T$  représente le vecteur des coordonnées modales.

avec les conditions initiales sur les  $\varphi_i$ .

En substituant (4-2-4) dans l'équation en régime forcé (4-2-1), en la multipliant par  $V^T$  et avec prise en compte des conditions d'orthogonalité, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & M_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{\varphi}_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & K_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{2n} \end{pmatrix}$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$M_i \ddot{\varphi}_i(t) + K_i \varphi_i(t) = f_i \quad i=1,2,3,\dots,2n \tag{4-23}$$

$$\text{où } M_i = V_i^T M V_i \quad K_i = V_i^T K V_i \quad f_i = V_i^T F$$

En posant  $\lambda_i = \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}$

$$\text{L'équation devient : } \ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = \frac{1}{M_i} f_i \quad i=1, 2, 3, \dots, 2n \tag{4-24}$$

On obtient donc un système de 2n équations découplées où chaque équation modale représente un système à un degré de liberté. On voit que la méthode de superposition modale est extrêmement rentable en termes de temps de calcul.

Une fois les valeurs propres extraites, elle se résume à résoudre le système à un degré de liberté associé à chaque mode représenté. Dans la plupart des cas, on n'ira pas au-delà de l'extraction d'une dizaine de modes. L'efficacité de cette méthode est bonne pour autant que les modes fondamentaux soient dominants dans la réponse [15]. Par contre, dans le cas où le contenu

fréquentiel de la réponse est tel qu'un grand nombre de modes doit être pris en compte, la superposition modale est avantageusement remplacée par les méthodes directes d'intégration temporelle.

#### 4-2-2 Solution des équations modales

On remarque que les termes du premier membre de l'équation pour un mode donné sont indépendantes des autres modes, alors que le deuxième membre (la charge aérodynamique) dépend de tous les modes puisque la déformation totale  $q(x,t)$  de la pale est exigée pour déterminer l'angle d'incidence. En d'autres termes cela veut dire que le membre de droite est fonction de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  etc. Par conséquent, l'équation ne peut pas être résolue indépendamment pour chaque mode.

#### Procédure de résolution

On suppose une forme initiale quelconque, ce qui nous permet de calculer le second membre de l'équation pour chaque mode. Soit  $C_n$  cette valeur calculée pour le  $n$ ème mode.

On va supposer que ces valeurs  $C_n$  restent constantes pendant un petit intervalle de temps  $dt$ , et le problème à résoudre sera une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{\varphi}_k(t) + \omega_k^2 \varphi_k(t) = C_k \quad k=1, 2, 3, \dots, 2n \quad (4-25)$$

dont la solution est de la forme :

$$\varphi_k = \frac{C_k}{\omega_k^2} (1 - \cos(\omega_k t)) + \varphi_0 \cos(\omega_k t) + \dot{\varphi}_0 / \omega_k \sin(\omega_k t) \quad (4-26)$$

Où  $\varphi_0$  et  $\dot{\varphi}_0$  sont les valeurs initiales. Mais puisque le premier membre est fonction de  $t$  :

( $\varphi = f(t)$ ) et le second membre est fonction de  $\varphi$ , pour résoudre l'équation on utilise la méthode des approximations successives :

On se donne une forme initiale quelconque ( $\varphi_{0(n)}, \dot{\varphi}_0(n)$ ), on calcule le second membre pour chaque mode, on fixe un pas de temps  $dt$  (au cours duquel le second membre reste constant), et on calcule les valeurs de  $\varphi_n$  et  $\dot{\varphi}_n$  en utilisant l'équation (4-26)

Ces valeurs de  $\varphi_n$  nous permettent de trouver une nouvelle forme  $q(x,t)$  avec laquelle on recalcule le second membre de l'équation (4-24) et puis les nouvelles valeurs de  $\varphi_n$  (pour le même  $dt$ ). Cette procédure se poursuit jusqu'à l'obtention d'une convergence acceptable: ce sont ces dernières valeurs de  $\varphi_n$  qui représentent la forme initiale correcte (corrigée).

Une fois que la forme initiale corrigée est obtenue, on continue la résolution de la même façon pour obtenir les valeurs de  $\varphi_i$  et  $\dot{\varphi}_i$  en incrémentant cette fois-ci le temps d'un pas  $dt$ .

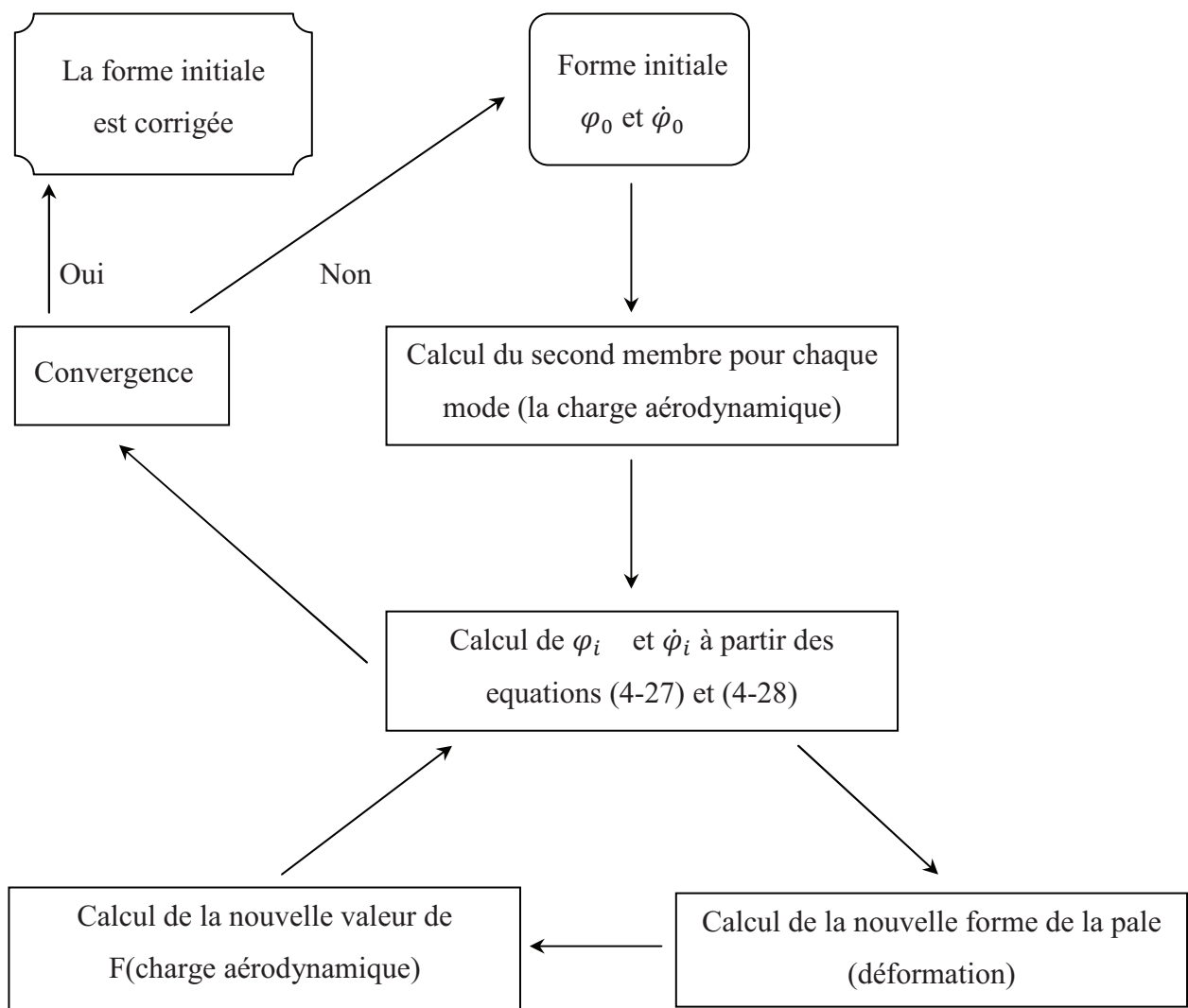
$$\varphi_{i+1} = \frac{c_n}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n dt)) + \varphi_i \cos(\omega_n t) + \dot{\varphi}_i / \omega_n \sin(\omega_n dt) \quad (4-27)$$

$$\dot{\varphi}_{i+1} = \frac{c_n}{\omega_n^2} \sin(\omega_n dt) - \omega_n \varphi_i \sin(\omega_n dt) + \dot{\varphi}_i \cos(\omega_n dt) \quad (4-28)$$

Les valeurs  $\varphi_i$  et  $\dot{\varphi}_i$  représentent les valeurs initiales pour le pas suivant  $\varphi_{i+1}$

On incrémente le pas de temps et on calcule les nouvelles valeurs de  $\varphi$  et ainsi de suite.

### Organigramme résumant la méthode décrite ci-dessus



### 4-3-Contraintes et déflexion

Les données utiles au dimensionnement sont généralement les valeurs extrêmes (des efforts internes, contraintes ou déplacements).

Les évolutions temporelles des déformations et efforts internes peuvent être déterminés en utilisant les lois de comportement matérielles nécessaires.

Un programme **Matlab** est établi pour calculer la déflexion de la pale en fonction du temps ainsi que les contraintes appliquées à la pale.

#### 4-3-1-Déflexion de la pale

la déflexion de la pale  $q(x,t)$  est donnée en fonction des vecteurs propres par :

$$q(x,t) = V_1 \varphi_1(t) + V_2 \varphi_2(t) + V_3 \varphi_3(t) + \dots + V_n \varphi_n(t) + \dots + V_{2n} \varphi_{2n}(t) \quad (4-29)$$

où  $V_1, V_2, V_3, \dots$  sont les vecteurs propres (qui correspondent aux fréquences propres).

Pour tous les problèmes de vibration mécanique, ce sont les fréquences les plus basses qui présentent en général le plus d'intérêt [16]. On a pris en considération les trois premiers modes.

La déflexion de n'importe quel point de la pale sera calculée par l'expression :

$$q(x,t) = V_1 \varphi_1(t) + V_2 \varphi_2(t) + V_3 \varphi_3(t) \quad (4-30)$$

#### 4-3-2-Contraintes appliquées à la pale

##### 4-3-2-1 Introduction

Pour les besoins de cette étude, il est nécessaire d'aborder les notions de base de la résistance des matériaux sur les poutres en flexion. La pale est assimilée à une poutre, constituée de matériaux satisfaisant aux hypothèses suivantes [17]:

- a) La pale est droite avant le chargement.
- b) Le matériau est élastique, possédant les mêmes propriétés en traction et en compression.
- c) La flexion se produit dans un seul plan qui coïncide avec l'axe principal de la section.

##### 4-3-2-2 Poutre en flexion

###### 4-3-2-2-1 Effort tranchant et moment fléchissant

Soit la pale représentée à la figure (4-6-a) Cette dernière est soumise à un chargement quelconque, noté  $F(x)$  (positif par convention), qui est distribué sur toute sa longueur. On considère maintenant un élément de la pale de longueur  $dx$  situé à la distance  $x$  de l'encastrement. Son diagramme du corps libre est représenté à la figure (4-6-b).

L'équilibre des forces selon l'axe vertical sur l'élément s'écrit

$$V + dV - V + F(x) dx = 0 \quad (4-31)$$

et donc

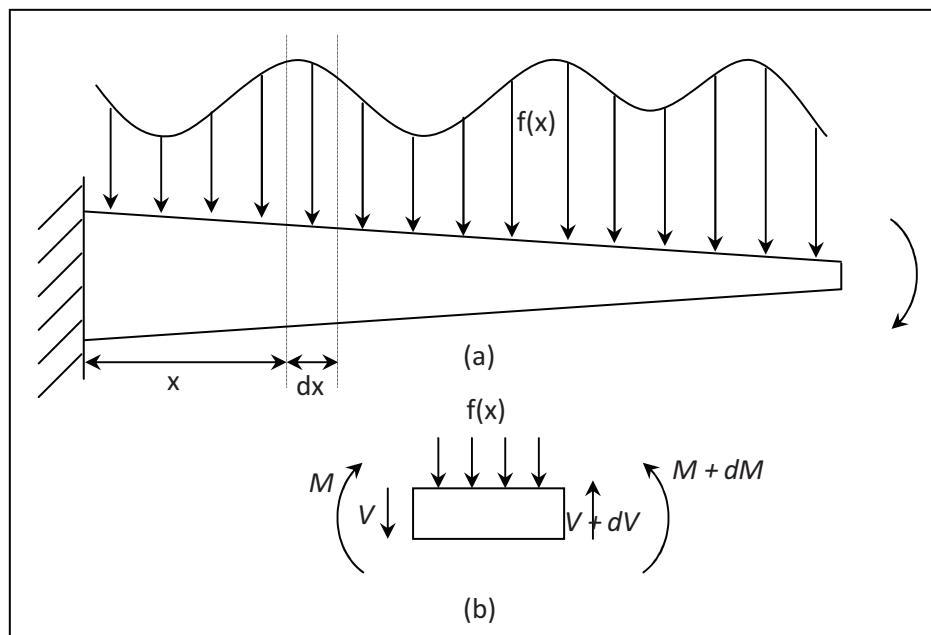
$$dV/dx = -F(x)$$

De même l'équilibre des moments s'écrit

$$dM + Vdx + dVdx/2 = 0 \quad (4-32)$$

En négligeant le second ordre dans l'équation (4.35), il reste

$$dM/dx = -V \quad (4-33)$$



**Figure 4-6. Diagramme du corps libre d'un élément de pale**

Lorsqu'une charge  $F$  concentrée s'exerce sur l'élément, l'effort tranchant varie d'une quantité  $F$  lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. En ce point, la pente du moment fléchissant varie brusquement.

De même, lorsqu'un moment  $M$  s'exerce sur l'élément, le moment fléchissant varie d'une quantité  $M$ , lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge.



### 4-3-2-2-2 Contraintes dans une poutre en flexion

- **Contraintes normales**

#### 1 - Contrainte normale due au moment fléchissant

On considère encore la poutre de la figure 4.6 pour en étudier les contraintes agissant sur sa section transversale.

La contrainte normale à la section transversale A, en un point situé à une distance  $y$  de l'axe neutre, s'écrit [18] :

$$\sigma_x = - \frac{My}{I} \quad (4-34)$$

avec  $M_f = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  on aura  $\sigma_x = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} y$  (4-35)

La contrainte normale maximale est  $\sigma_{max} = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} y_{max}$

avec  $I$  le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre et  $M$  le moment fléchissant auquel elle est soumise .  $y_{max}$  : La demi-épaisseur de la section de la pale.

En utilisant l'expression de  $u$  :  $u(x, t) = A_e(x) w_e(t)$  on obtient pour la contrainte l'expression

suivante :  $\sigma_{max} = -E y_{max} \cdot 2/l^2 [ 6x/l - 3, 1 (3x/l - 2), 3 - 6x/l, 1 (3x/l - 1) ]$   $\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \\ q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Calculons la contrainte au milieu de l'élément ( $x=l/2$ ) on trouve :

$$\sigma_{max} = E y_{max} / l (\theta_1 - \theta_2) = E y_{max} / l [w(2) - w(4)] \quad (4-36)$$

La distribution des contraintes normales à la section ainsi obtenue est représentée sur la figure (4-7). On peut montrer que la somme de toutes les contraintes sur la section est nulle :

$$\int_A \sigma_x dA = 0$$

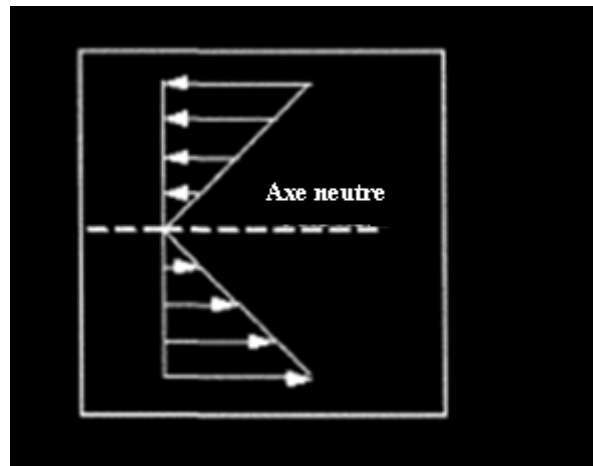


Figure 4-7: Distribution des contraintes normales

## 2- Contrainte normale due à l'effort de tension

$$\sigma_G = \frac{G}{A}$$

G : la force centrifuge  $G = 1/2 m \Omega^2 L^2 (1-x^2)$

A : section de la pale

On aura :

$$\sigma_G = 1/2 m \Omega^2 L^2 (1-x^2) / A \quad (4-37)$$

Contrainte normale résultante

$$\sigma_N = \sigma_x + \sigma_G \quad (4-38)$$

- **Contrainte de cisaillement**

Dans la plupart des cas, le moment fléchissant s'accompagne d'un effort tranchant (V). Cela génère une contrainte de cisaillement ( $\tau_{xz}$ ). Cette contrainte de cisaillement ne génère que peu de risque de rupture et est donc généralement négligée (modèle de Bernoulli).

Pour une poutre dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transversales les contraintes tangentielles sont négligeables par rapport aux contraintes normales de flexion(19).

#### 4-4 Résultats et analyses

Pour les simulations numériques présentées ci-dessous, nous allons prendre une pale qui a les caractéristiques suivantes :

Profil NACA 0012 creux

Longueur de la corde  $c = 0.4\text{m}$  (pour la pale de section constante)

Moment quadratique de la section  $I_0 = 9.5 \cdot 10^{-7} \text{m}^4$

Masse linéique (m) :  $6.69 \text{kg/m}$

Longueur de la pale  $L = 8\text{m}$

Paramètre de fonctionnement (vitesse spécifique) :  $\frac{\Omega L}{V} = 8$

Matériau utilise : alliage d'aluminium  $E = 7.1 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$

Pour la pale effilée on a supposé une variation linéaire de la corde

$$c(r) = c_1 * (1 - (1 - r_1))$$

$c_1$  : la corde à l'encastrement

$c_2$  : la corde au bout du pale

$$r_1 = c_2 / c_1$$

#### 4.4.1 Déflexion et contrainte normale obtenues pour une pale encadrée de section constante et de section variable

##### 4.4.1.1 Déplacement du bout libre de la pale

#### Résultats

Les 3 Figures 4.8 , 4-9 et 4-10 présentent respectivement les vibrations transversales obtenues au cours de la première période (T) de rotation de la pale pour les pales encadrées de section constante et variable pour des vitesses de rotation de  $6 \text{rd/s}$  et  $12 \text{rs /s}$  et un rapport d'aspect de 0.05 et 0.5.

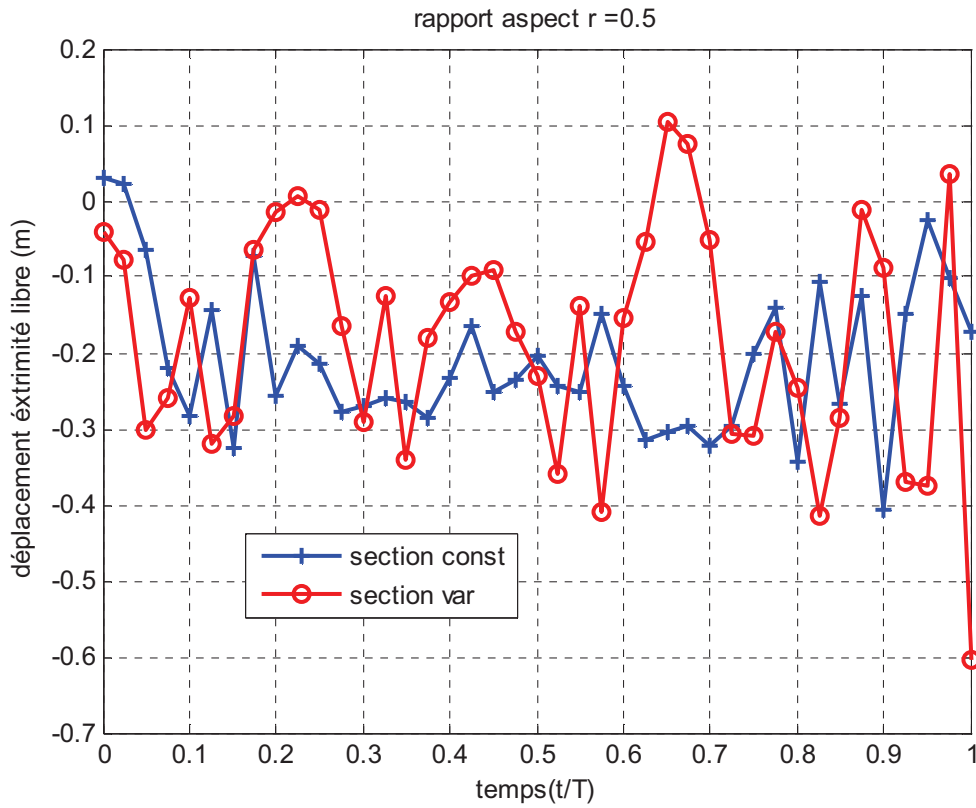


FIG.4.8 – les vibrations transversales de la pale, vitesse de rotation 6rd/s,  $r=0.05$

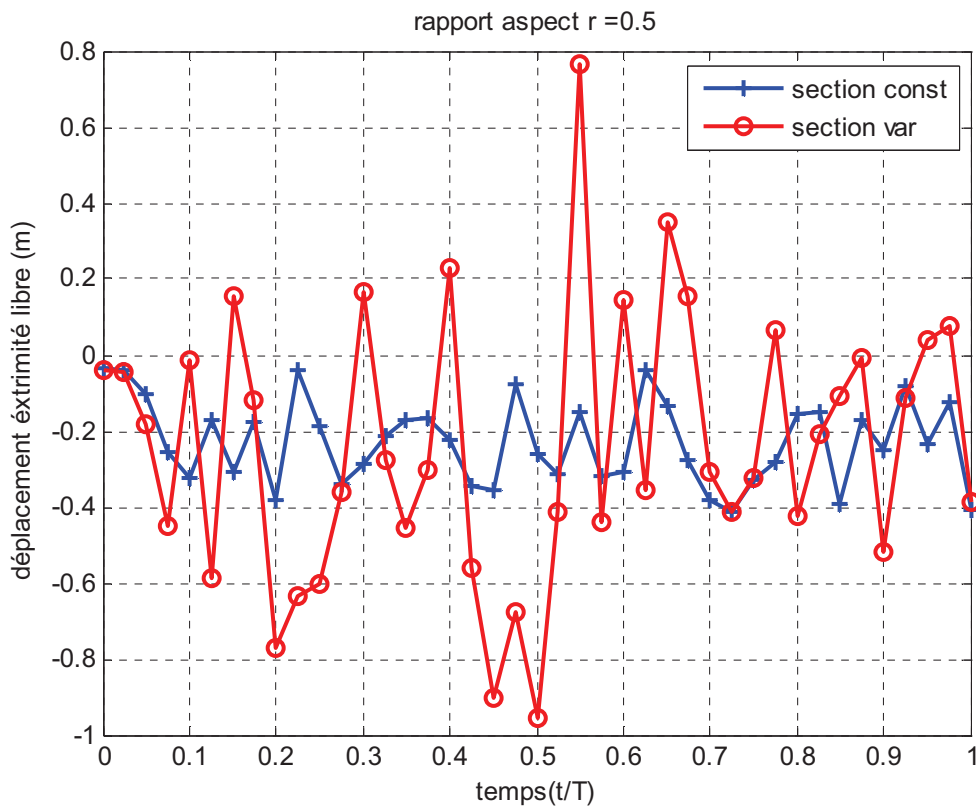
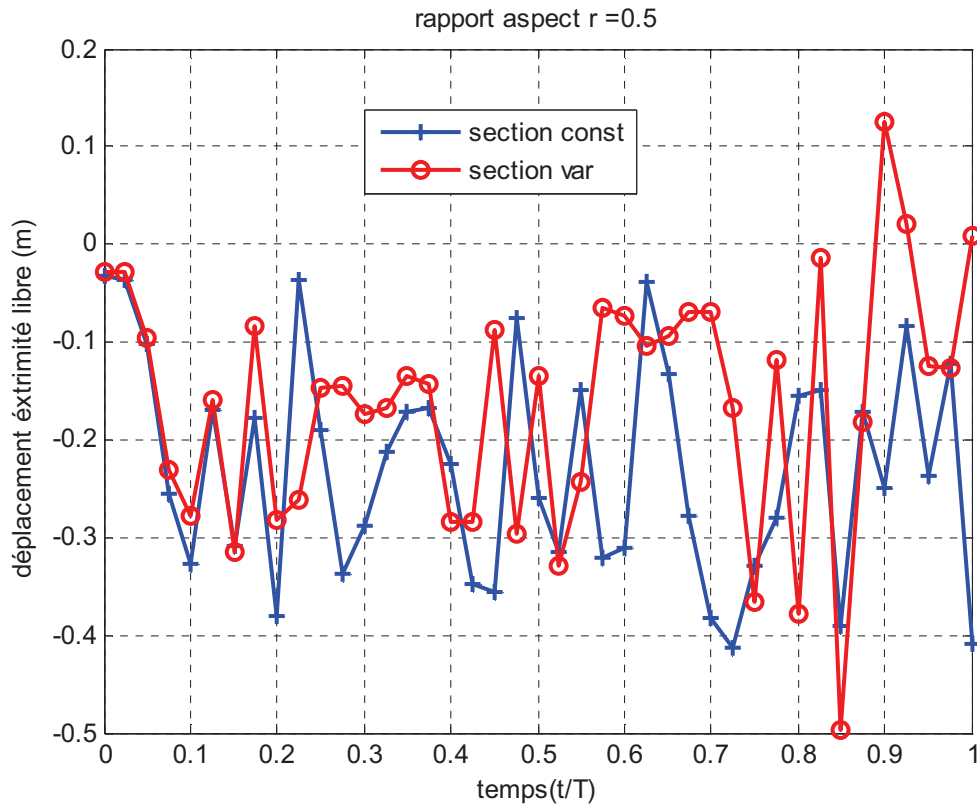


FIG.4.9 – les vibrations transversales de la pale, vitesse de rotation 12rd/s,  $r=0.05$



**FIG.4.10 – les vibrations transversales de la pale, vitesse de rotation 12rd/s,  $r=0.5$**

**Analyse**

Le déplacement maximal, de l’extrémité libre obtenue est d’environ 0,60 m pour la pale de section constante et de 1.0m pour la pale de section variable (pour une vitesse de rotation de 12rd/s et un rapport d’aspect de 0.05).

La différence est d’autant plus grande que le rapport d’aspect est petit.

**4.4.1 .2. Déflexion totale**

**Résultats**

Les figures 4-11, 4-12 et 4-13 présentent les variations de la deflexion totale en fonction de la longueur de la pale ( $x/L$ ) à divers instants  $T/4, T/2, 3T/4, T$  pour une vitesse de rotation de 12rd/s et un rapport d’aspect de 0.05

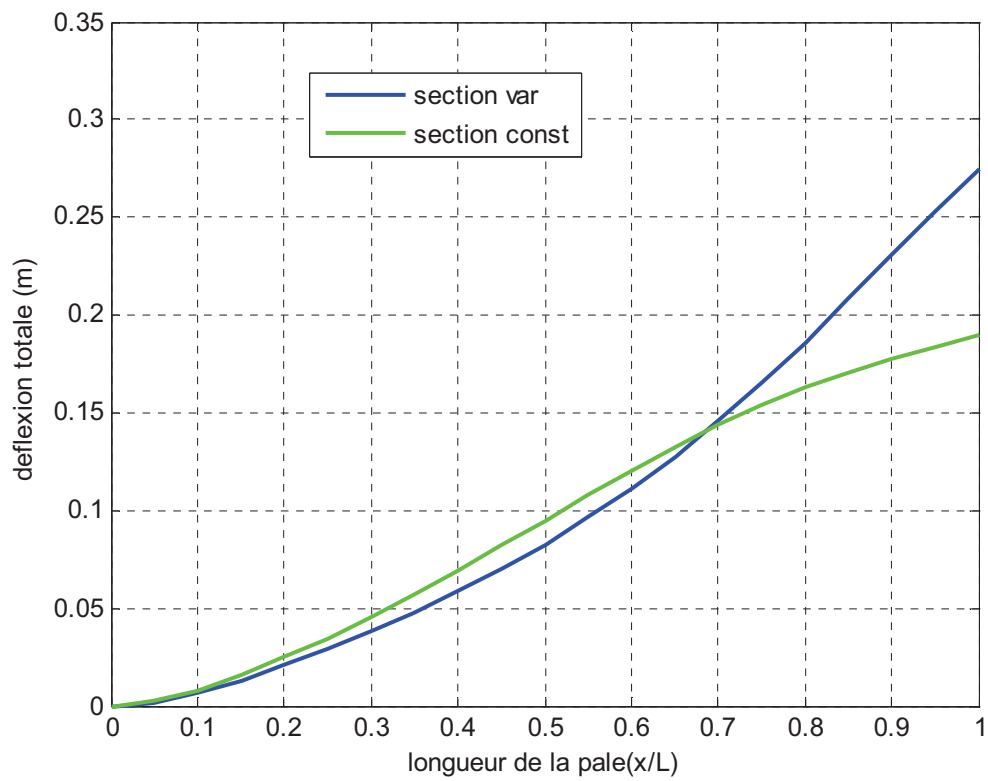


Fig. 4-11 Déflexion totale,  $t=T/4$ ,  $\Omega =12rd/s$ ,  $r=0.4$

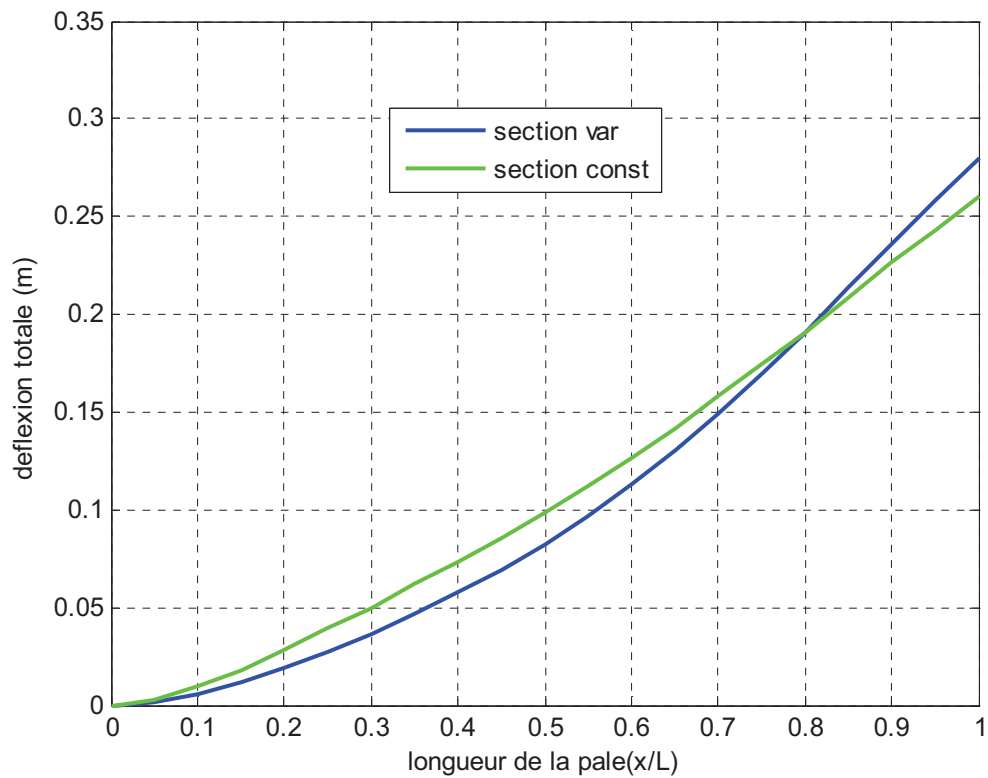


Fig. 4-12 Déflexion totale,  $t=T/2$ ,  $\Omega =12rd/s$ ,  $r=0.4$

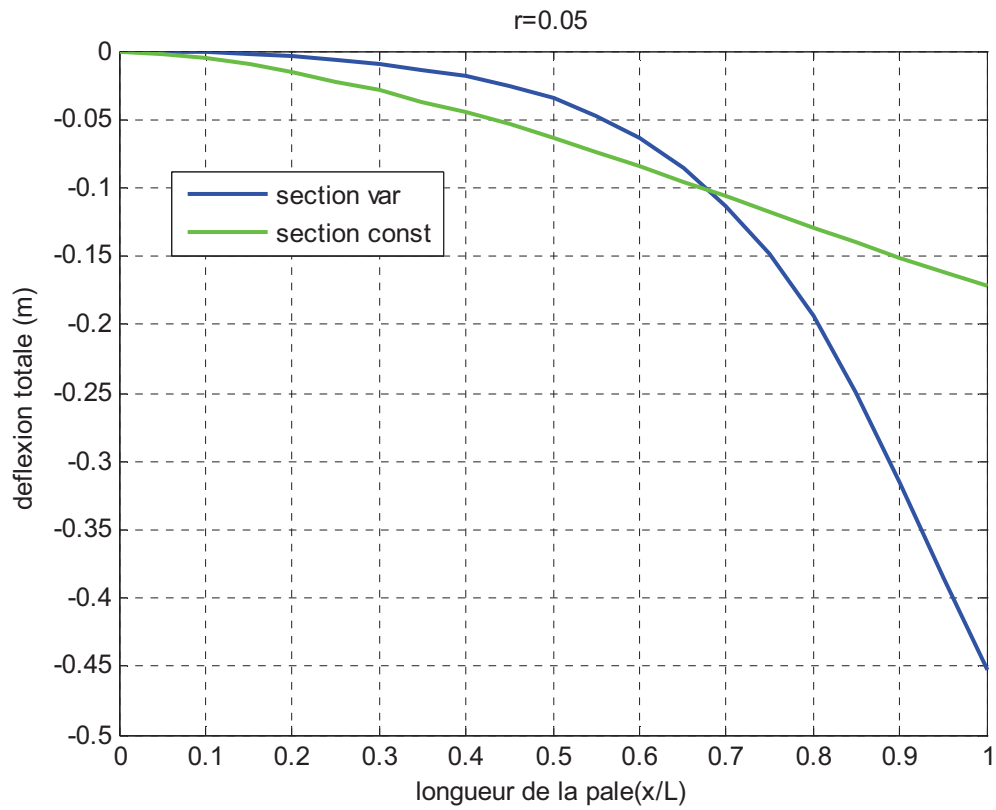


Fig. 4-14 Déflexion totale,  $t=3T/4$ ,  $\Omega = 12\text{rd/s}$ ,  $r=0.05$

### Analyse

on remarque que la deflexion de la pale de section constante est superieure à celle de la pale éfilée sur une longueur de  $3/4 L$  et que sur le dernier  $1/4$  de la longueur c'est l'inverse qui se produit.

### 4.4.1.3 Distribution des contraintes normales

#### Résultats

Les figures 4-14, 4-15 et 4-16 présentent les variations de la contrainte normale maximale le long de la pale à différents instants  $T/4, 3T/4$ , pour  $w=6\text{rd/s}$  et pour différents rapports d'aspects 0.5, 0.25 et 0.05.

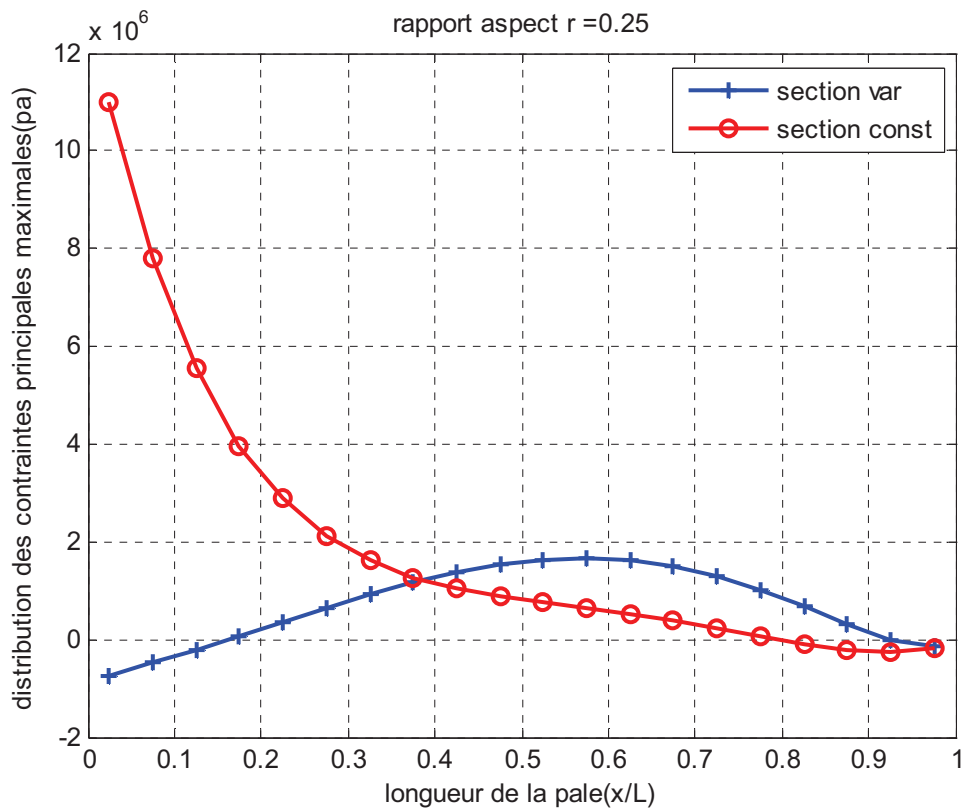


Fig. 4-14 contrainte normale,  $t=T/4$ ,  $\Omega =6\text{rd/s}$ ,  $r=0.25$



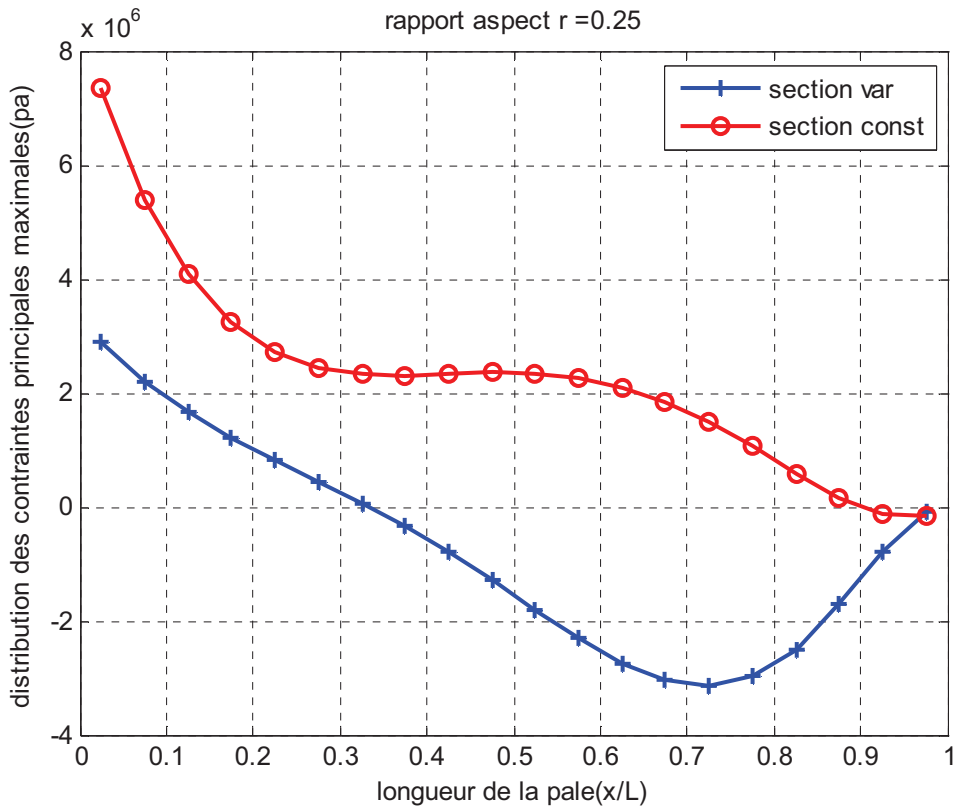


Fig. 4-15 contrainte normale,  $t=3T/4$ ,  $\Omega = 6\text{rd/s}$ ,  $r=0.25$

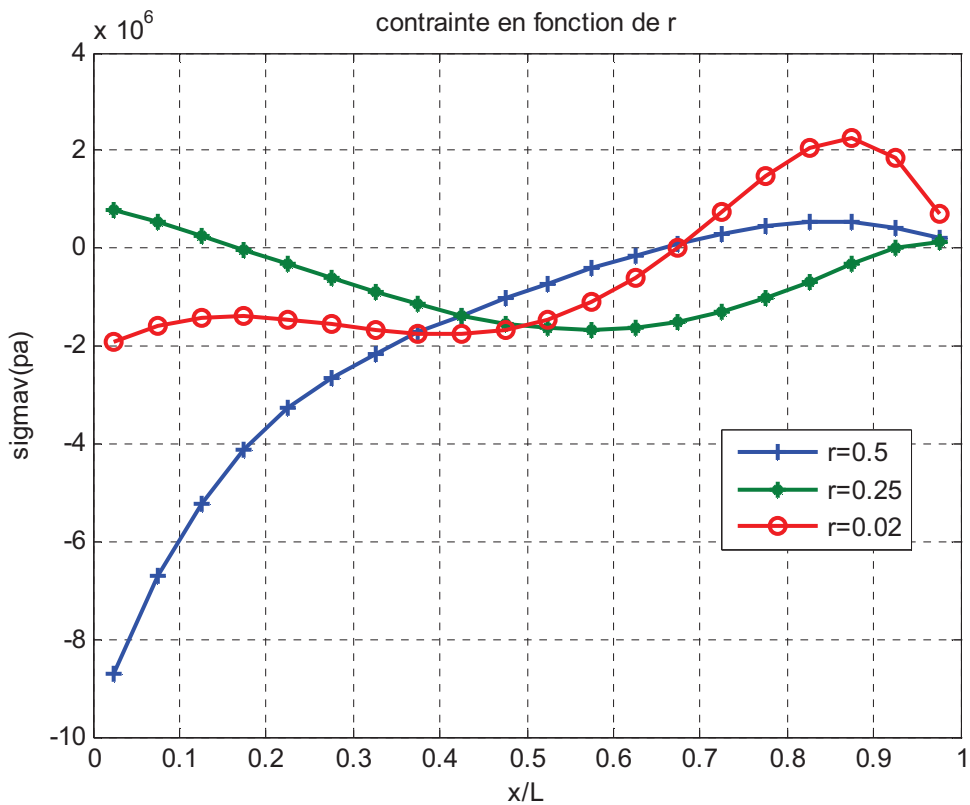
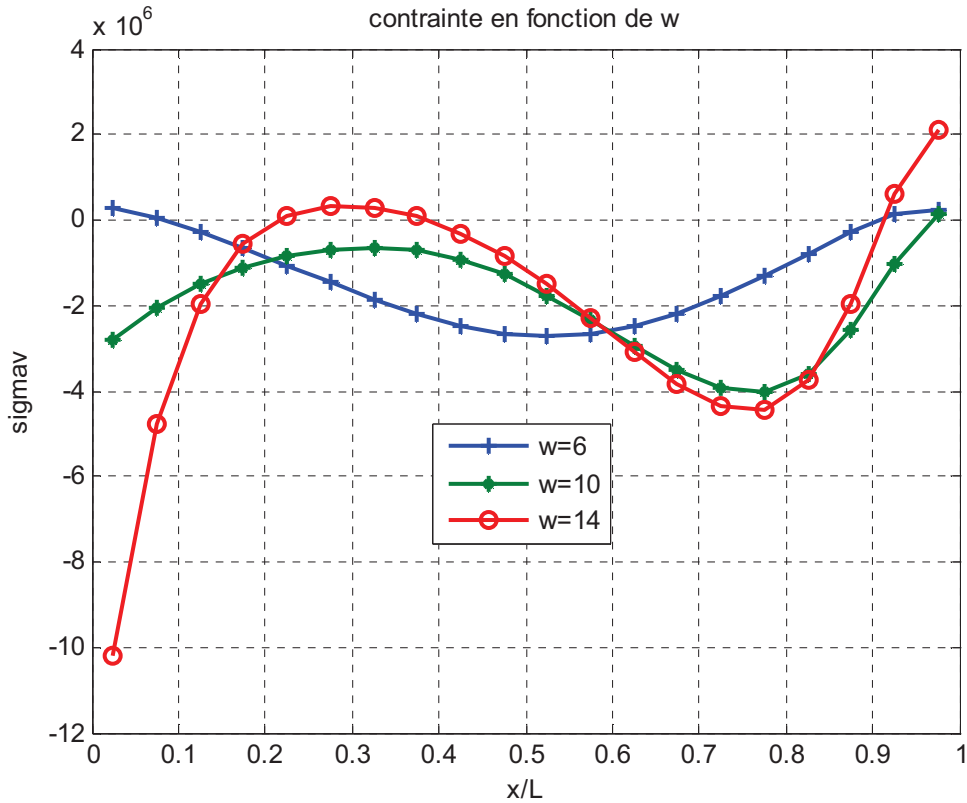


Fig. 4-16 contrainte normale,  $t=T/4$ ,  $\Omega = 6\text{rd/s}$



4-17- Variation de la contrainte normale en fonction de la longueur de la pale (L) pour différentes vitesses de rotation( $\Omega$ )

**Analyse**

Pour la pale de section constante la contrainte maximale est localisée à l’encastrement et supérieure que la contrainte maximale à l’encastrement pour la pale à section variable dans les memes conditions (vitesse de rotation, masse, longueur).

Pour la pale de section variable la contrainte maximale est localisée non pas à l’encastrement mais au niveau du  $\frac{3}{4}$  de la longueur de la pale.

Cette dernière résultat est surtout valable pour un faible rapport d’aspect ( r )et pour des petits vitesses de rotations de la pale ( $\Omega < 10$ ).

**Validation : ce resultat à été troué par [24] en utilisant un autre code de calcul**

#### 4.4.1.4 Contrainte normale maximale à l'encastrement

##### Résultats

Les figures 4-17, 4-18, 4-19, 4-20 et 4-21 présentent les variations de la contrainte normale maximale à l'encastrement en fonction du temps, pour différentes vitesses de rotations de la pale  $\Omega = 3,6, 9, 12, 15 \text{rd/s}$  et pour différents rapports d'aspects 0.25 et 0.1 et 0.5

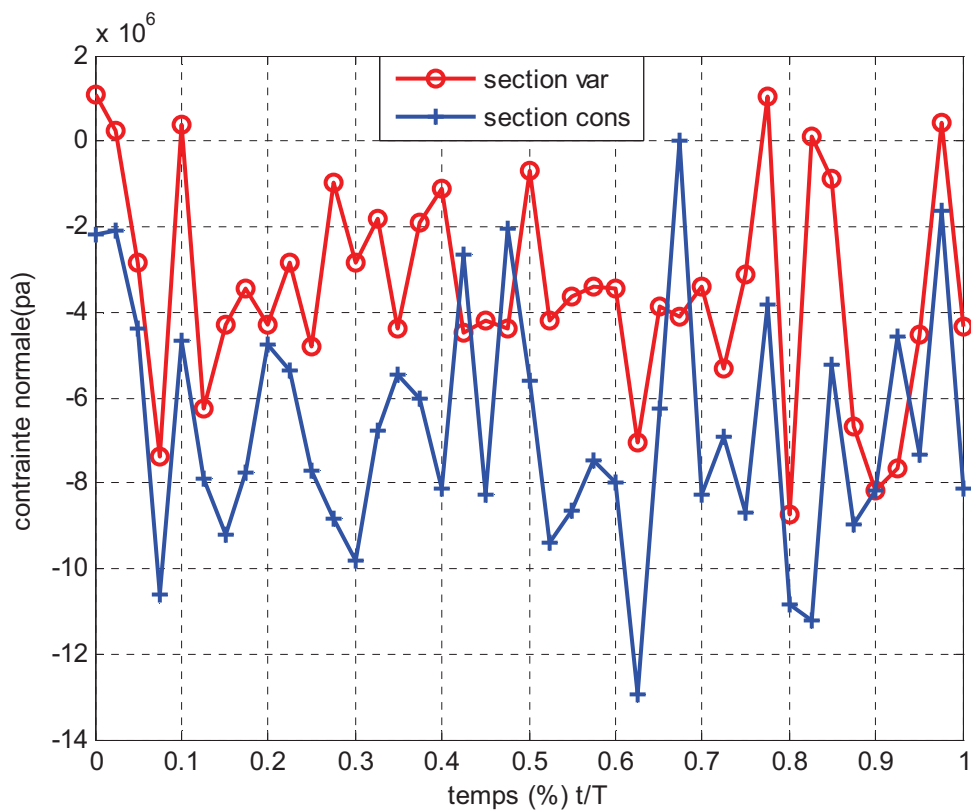


Fig. 4-18 contrainte normale à l'encastrement  $\Omega = 3 \text{rd/s}$ ,  $r = 0.25$

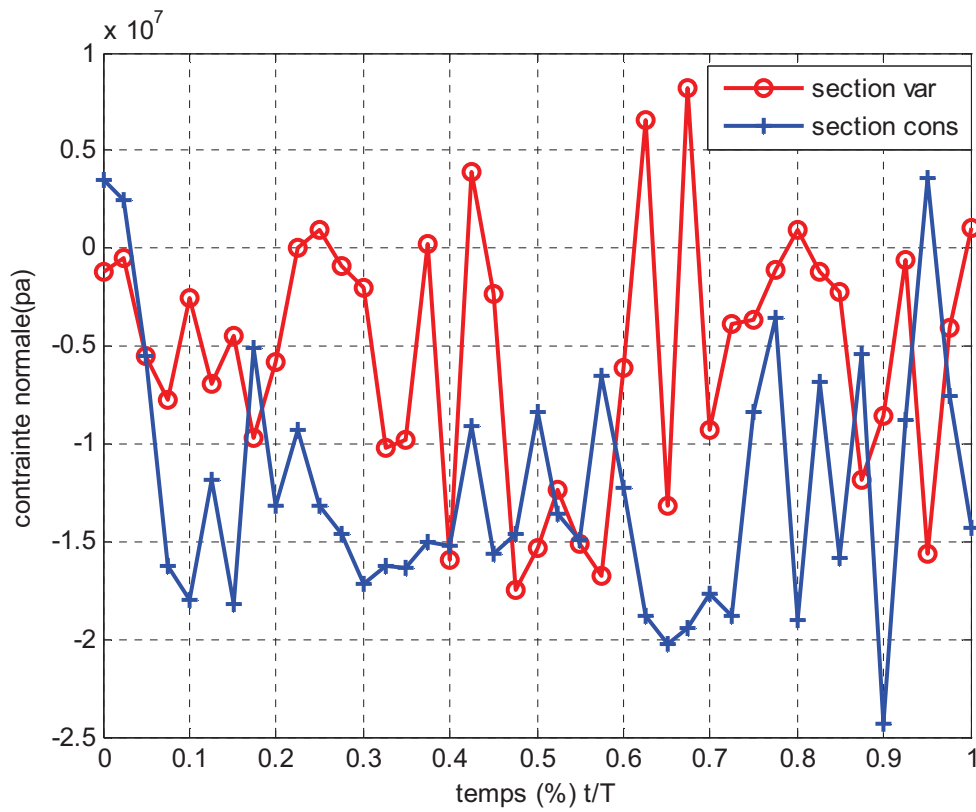


Fig. 4-19 contrainte normale à l'encastrement  $\Omega=6\text{rd/s}$ ,  $r = 0.25$

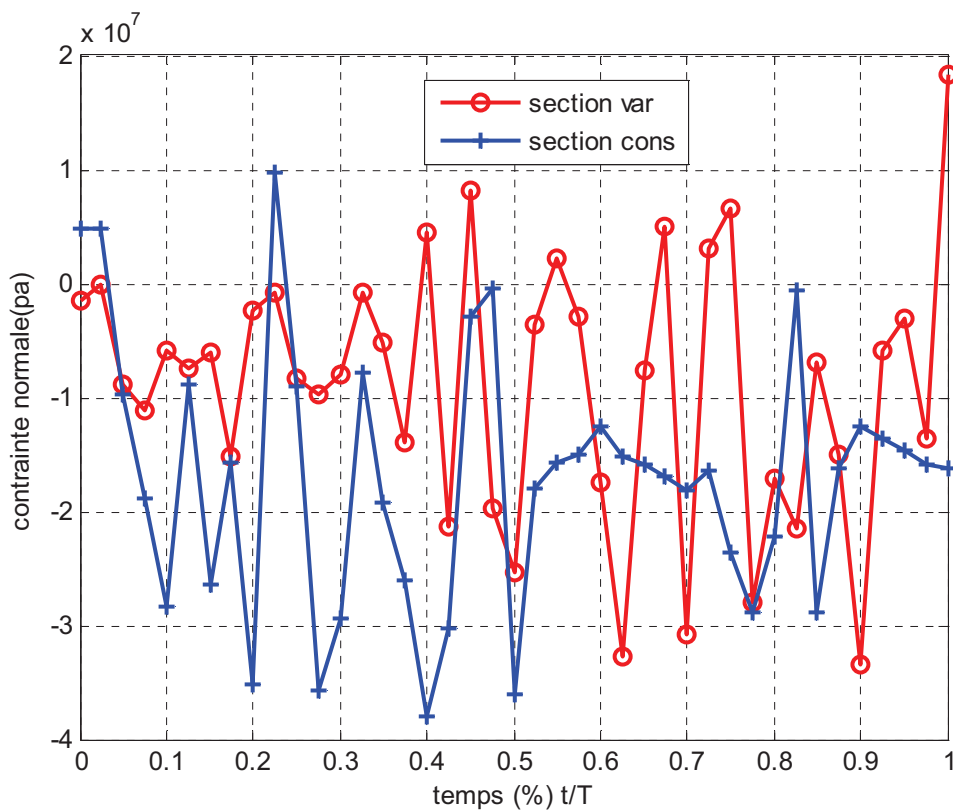


Fig. 4-20 contrainte normale à l'encastrement,  $\Omega =9\text{rd/s}$ ,  $r=0.25$

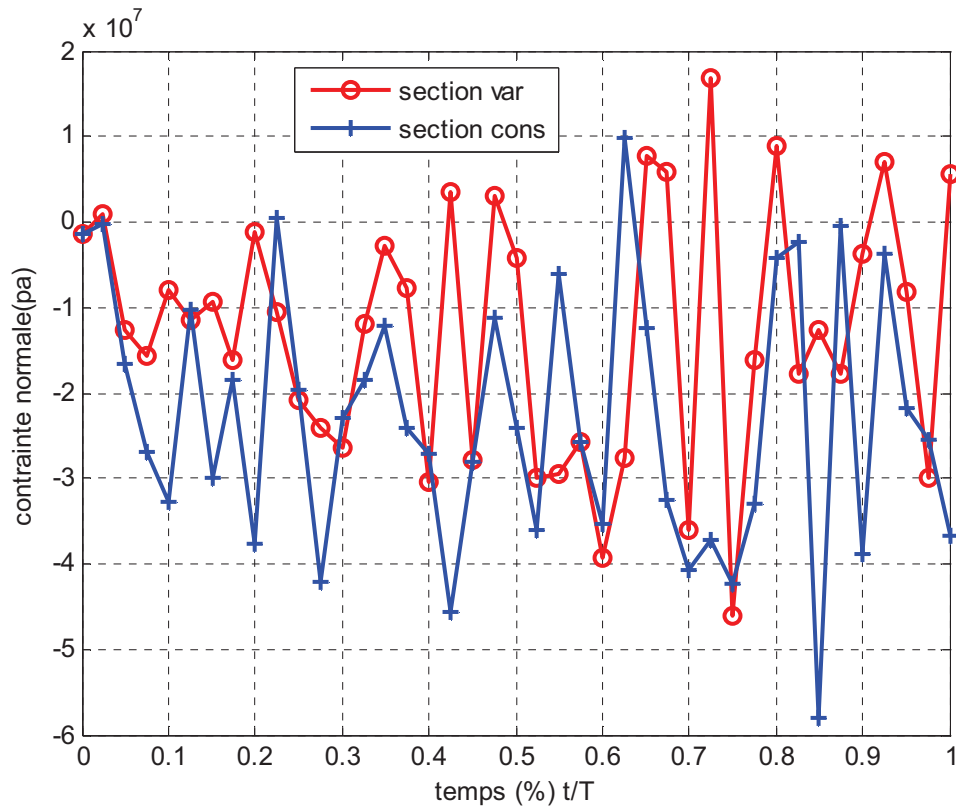


Fig. 4-21 contrainte normale à l'encastrement,  $\Omega = 12\text{rd/s}$ ,  $r=0.25$

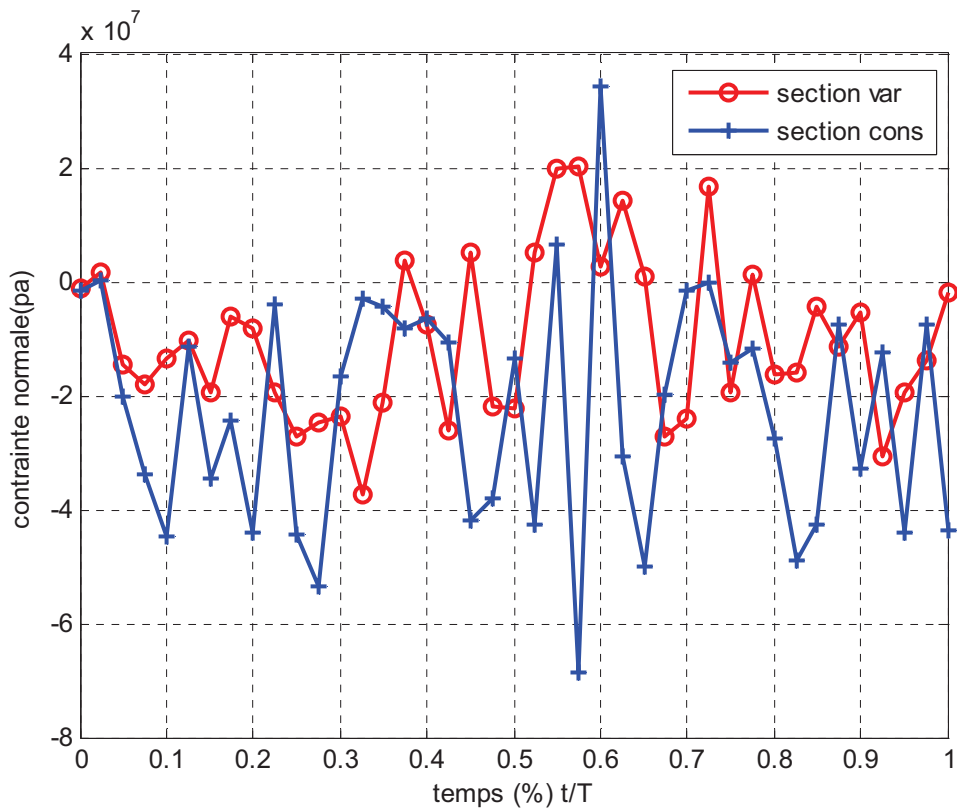


Fig. 4-22 contrainte normale à l'encastrement,  $\Omega = 15\text{rd/s}$ ,  $r=0.25$

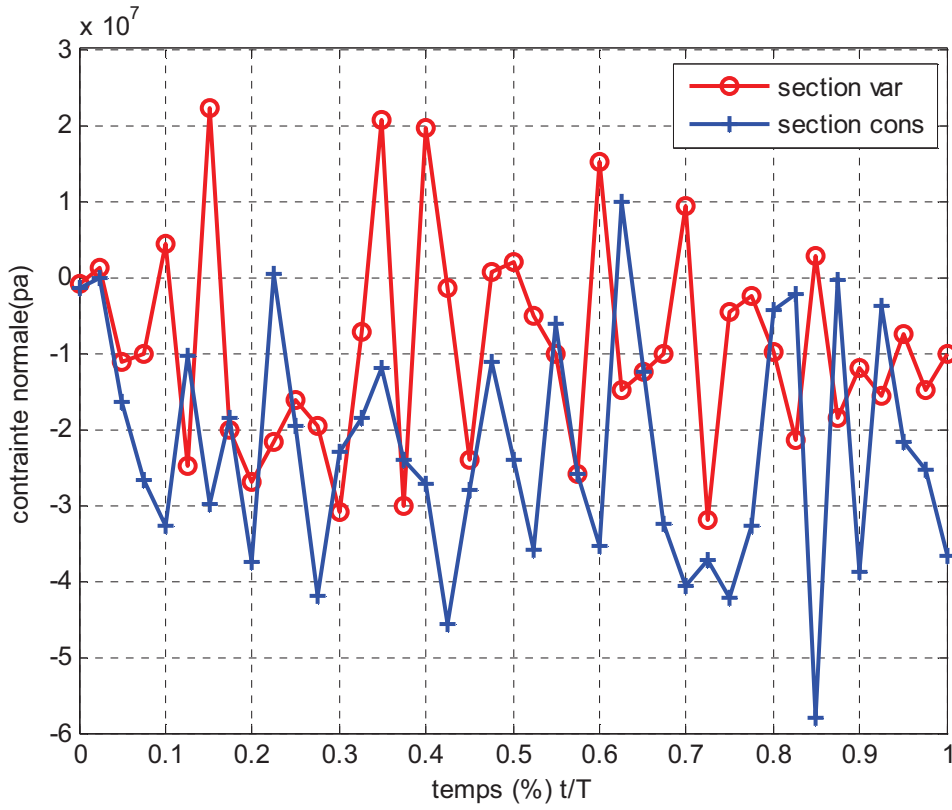


Fig. 4-23 contrainte normale à l'encastrement,  $\Omega = 12\text{rd/s}$ ,  $r=0.1$

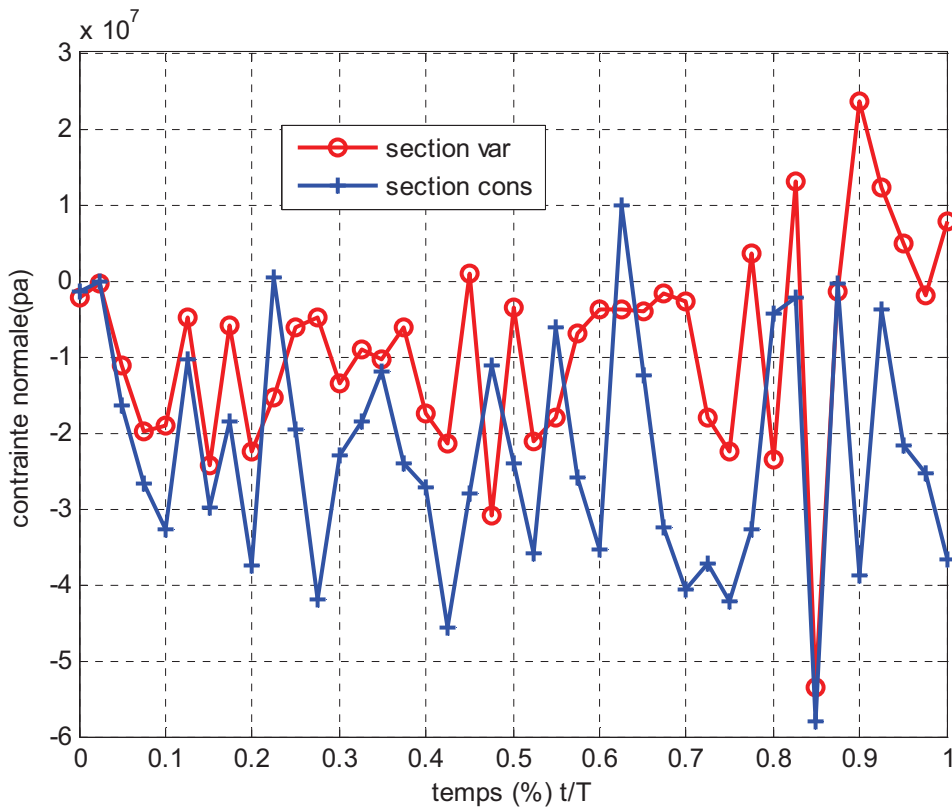


Fig. 4-24 contrainte normale à l'encastrement,  $\Omega = 12\text{rd/s}$ ,  $r=0.5$

## Analyse

La contrainte normale maximale à l'encastrement pour la pale à section constante est supérieure à celle de la poutre encastree de section variable dans tous les cas de figure.

Cette différence est d'autant plus importante que le rapport d'aspect est petit.

### -visualisation des variations des contraintes normales en fonction de la longueur de la pale et du temps pour $w=3rd/s$

On presente sur les figures suivantes une variation en 3Dimensions de la contrainte normale maximale pour les deux cas étudiés : section constante et section variable

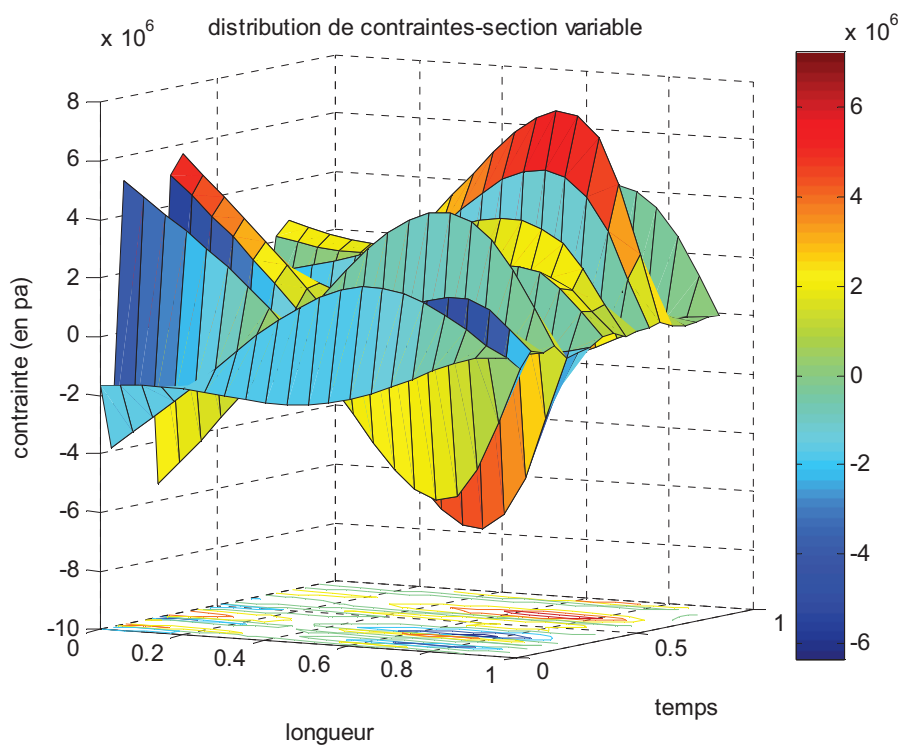
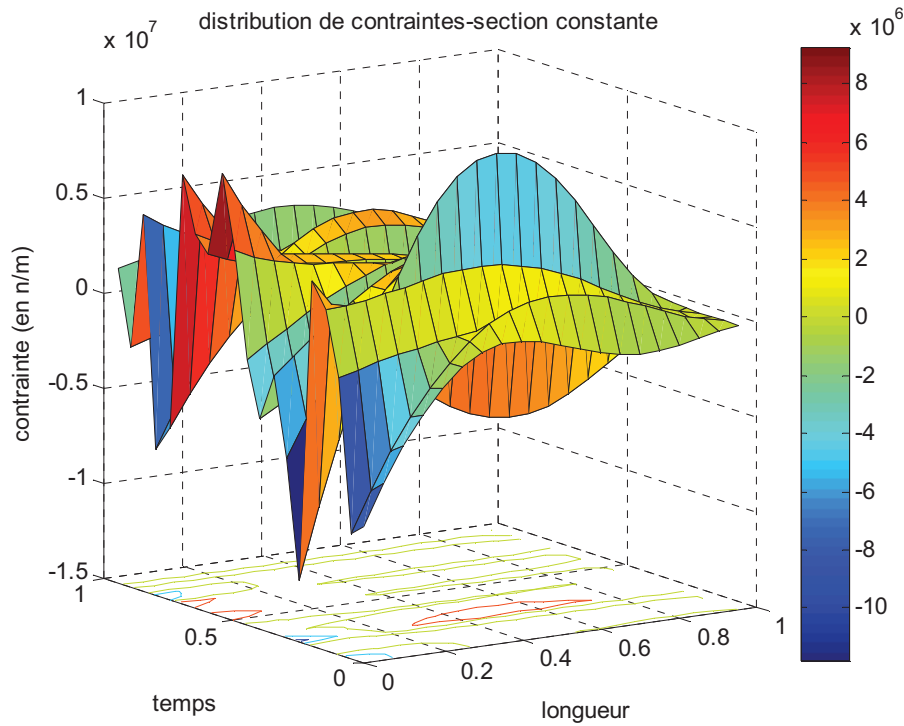


Fig.4-23 Section variable



**Fig.4-24** Section constante

On remarque que la contrainte normale maximale présente un maximum :

- à l'encastrement pour la pale à section constante et vaut  $1.5 \cdot 10^7 \text{ pa}$

- à  $0.8 L$  pour la pale à section variable et vaut  $8 \cdot 10^6 \text{ pa}$



### 5-1- Introduction à la fatigue

Les éoliennes, avec leurs pales de plusieurs mètres sont des structures élastiques, de plus, elles opèrent dans des environnements transitoires et instables en haut d'une tour.

Le vent n'est jamais vraiment constant mais plutôt pulsatoire et turbulent. Pour ces raisons, les éoliennes et leurs tours tendent à être sujet aux vibrations.

Les vibrations génèrent un chargement cyclique. C'est-à-dire que les forces appliquées augmentent puis diminuent dans le temps et ce, de façon répétitive.

Ce type de chargement crée des bris par « fatigue » des matériaux. Dans certain cas extrêmes, le système qui vibre peut entrer en résonance, c'est-à-dire que la fréquence d'excitation imposée, entraîne une augmentation de l'amplitude du mouvement qui peut contribuer à la destruction du système.

### 5-2- prévision de durée de vie en fatigue

On entend par fatigue la modification consécutive des propriétés des matériaux à l'application de cycles d'efforts, cycles dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées avec ces matériaux [20].

Ce phénomène a été étudié dès le XXIVème siècle, par Wohler, qui a caractérisé pour la première fois les matériaux en fatigue en établissant une courbe donnant la durée de vie ou le nombre N de cycles à rupture en fonction de l'amplitude des cycles parcourus par la contrainte. Cette courbe est souvent utilisée pour caractériser un matériau soumis à une traction alternée sinusoïdale.

Les modèles de prédiction de durée de vie reposent sur l'historique des déformations dans les zones critiques où se concentrent les contraintes (entailles, congés de raccordement, encastrement, etc...).

L'approche généralement utilisée pour la prévision de la durée de vie de pièces soumises à un chargement aléatoire se compose généralement de trois éléments [21] :

- Une méthode de comptage de cycle.
- Une loi de cumul d'endommagement.
- Une courbe de Wöhler.

**La méthode de comptage :**

C'est une méthode permettant de recenser un "évènement\_statistique" dans une histoire aléatoire de chargement. Cet évènement peut être, par exemple, des extremas, ou des "cycles" de la sollicitation. Une méthode de comptage de cycles de contrainte détermine donc le nombre des cycles de contrainte dans le chargement. Ces cycles recensés sont généralement répartis par niveaux d'amplitude. La méthode de comptage de cycles adoptée aujourd'hui par les auteurs des méthodes de calcul de durée de vie est la méthode Rainflow (23).

**Méthode RCC\_M :**

Cette méthode consiste à former les cycles élémentaires de sollicitation en commençant par ceux qui provoquent les plus grandes variations.

Ainsi pour une histoire de chargement comportant  $N$  points, on détermine  $N/2$  cycles élémentaires si  $N$  est pair et  $N/2+1$  si  $N$  est impair.

L'algorithme se décompose en deux étapes. La première étape consiste à ordonner l'histoire de chargement de la plus petite à la plus grande valeur de la contrainte, ou de la déformation.

La seconde étape consiste, quant à elle, à former les cycles élémentaires avec la plus grande variation de la valeur de la contrainte, ou de la déformation.

**Cumul du dommage :**

Une loi de cumul d'endommagement est une règle permettant d'accumuler une variable d'endommagement, elle-même définie par une loi d'endommagement. Pour les chargements cycliques, la variable d'endommagement, est généralement calculée grâce aux caractéristiques d'un cycle de chargement (amplitude de contrainte, contrainte moyenne, contrainte maximum, etc...). Fatemi et Yang[22], ont recensé dans la littérature plus d'une cinquantaine de lois de cumul d'endommagement. La plus utilisée aujourd'hui est la loi de cumul d'endommagement linéaire de Palmgren-Miner qui reste le meilleur compromis entre la simplicité d'application et la qualité des prévisions pour de grandes durées de vie.

La formulation mathématique sous laquelle elle est actuellement connue a été proposée par Miner en 1945, le dommage total  $D$  produit par le chargement est donnée par : Dans le cas général, il y a plusieurs événements endommageant, qui diffèrent les uns des autres par la grandeur des contraintes subies et par d'autres paramètres. Miner a proposé deux principes qui permettent de cumuler les dommages.

La formulation mathématique sous laquelle elle est actuellement connue a été proposée par Miner en 1945, le dommage total  $D$  produit par le chargement est donnée par : Dans le cas général, il y a plusieurs événements endommageant, qui diffèrent les uns des autres par la grandeur des contraintes subies et par d'autres paramètres. Miner a proposé deux principes qui permettent de cumuler les dommages.

Le dommage causé par une occurrence d'un événement est mesuré par l'inverse  $1/N$  du nombre  $N$  de fois qu'il faut répéter cet événement pour mener la pièce de l'état neuf jusqu'à la défaillance. Le dommage causé par une succession d'événements est la somme des dommages causés par chacun d'eux.

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

où  $n$  est le nombre de cycles effectués et  $N$  le nombre de cycles à rupture pour le chargement considéré.

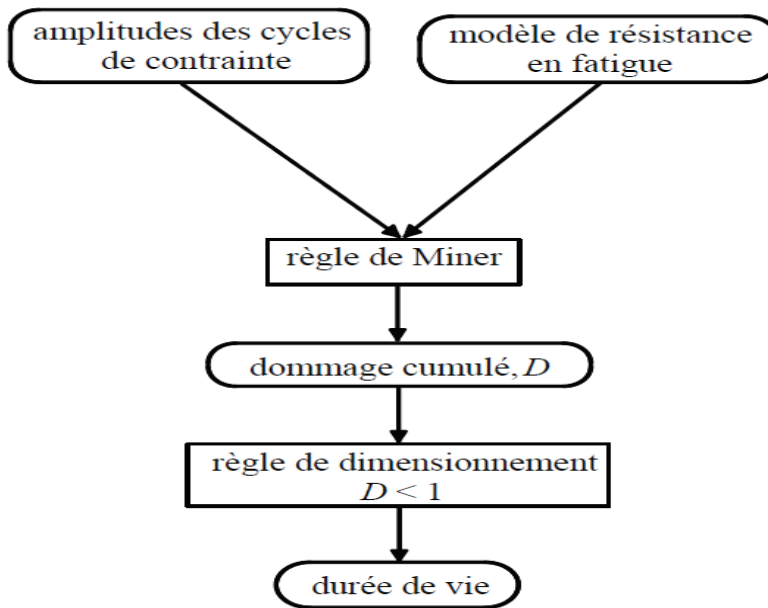
### **Courbe de fatigue :**

L'évaluation du dommage se fonde sur l'utilisation de courbes de fatigue du matériau (Wöhler ou Manson-Coffin),

La courbe de Wöhler définit une relation entre la contrainte appliquée  $\sigma$  (parfois notée  $S$ ) et le nombre de cycles à la rupture  $N_R$  (en fait nombre de cycles pour lequel on observe  $P\%$  de ruptures).

Pour la tracer, on réalise généralement des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement constante fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée, et à noter le nombre de cycles au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observé, appelé ici nombre de cycles à rupture  $N_R$ .

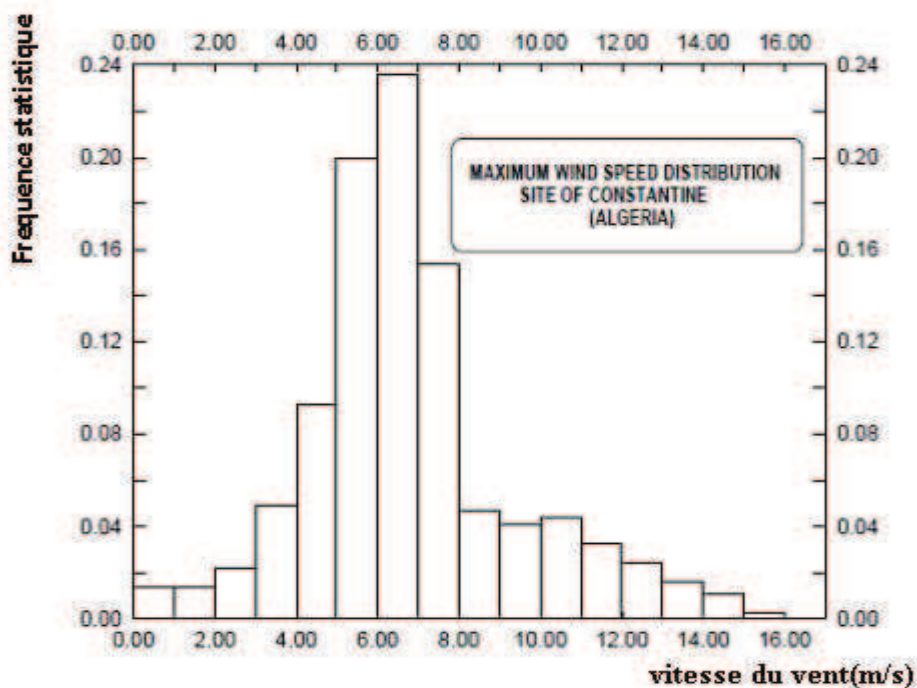
### Organigramme de calcul de la durée de vie



#### 5-3Application :

On va appliquer les étapes citées ci-dessus pour estimer la durée de vie de notre pale dans les deux cas étudiés (pale à section constante et pale effilée).

Pour ce faire on va utiliser comme paramètre la contrainte normale moyenne à l'encastrement. Mais comme la contrainte varie en fonction de la vitesse du vent et que cette dernière n'est pas constante pour une longue période (la figure ci-dessous montre une distribution en fréquence de la vitesse du vent-région de Constantine).



Distribution en fréquence de la vitesse du vent (Région Constantine)

On a pris en considération quelques vitesses 3, 6, 9, 12,15 m/s, chacune avec sa contribution pour la période d'utilisation.

Les tableaux suivants donnent les contraintes normales maximales moyennes pour ces différentes vitesses ainsi que le nombre de cycles à rupture et le nombre de cycles n subi pendant la période d'utilisation.

#### Pale de section constante

Vitesse du vent [m/s]	3	6	9	12	15
Contrainte maximale moyenne [N/m <sup>2</sup> ]	3.8 10 <sup>6</sup>	5.5 10 <sup>6</sup>	7.6 10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	1.35 10 <sup>7</sup>
Durée de vie N[cycles]	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>9</sup>
Nombre de cycles n subi en 10 ans	1.5 10 <sup>8</sup>	15 10 <sup>8</sup>	9 10 <sup>8</sup>	9.12 10 <sup>7</sup>	3.75 10 <sup>8</sup>

#### Pale de section variable

Vitesse du vent [m/s]	3	6	9	12	15
Contrainte maximale moyenne [N/m <sup>2</sup> ]	1.84 10 <sup>6</sup>	3.34 10 <sup>6</sup>	4.15 10 <sup>6</sup>	6.62 10 <sup>6</sup>	8.38 10 <sup>6</sup>
Durée de vie N[cycles]	10 <sup>11</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>9</sup>
Nombre de cycles n subi en 10 ans	1.5 10 <sup>8</sup>	15 10 <sup>8</sup>	9 10 <sup>8</sup>	9.12 10 <sup>7</sup>	3.75 10 <sup>8</sup>

En appliquant la formule de Miner on trouve :

Pour la pale de section constante :

$$D = n_1/N_1 + n_2/N_2 + n_3/N_3 + n_4/N_4 + n_5/N_5 = 0.72$$

Pour la pale effilée :

$$D = 0.5$$

On conclut que les deux types de pale résistent à la fatigue vu la valeur de D inférieure à l'unité. Cependant, la pale effilée, présentant une valeur de D plus petite, résiste mieux encore qu'une pale à section constante dans les mêmes conditions.

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal de cette étude consistait à développer un modèle mathématique d'analyse et d'étude des vibrations des pales d'éoliennes soumises à des sollicitations aérodynamiques.

Pour cela, nous avons élaboré un modèle analytique et numérique pour simuler le comportement dynamique d'une pale en vibration et de déterminer l'état de contraintes.

En utilisant la courbe expérimentale de Whôler, il fut possible de déterminer la durée de vie de la pale pour ensuite optimiser sa forme en agissant sur le rapport d'aspect en vue d'augmenter sa durée de vie.

La pale de l'éolienne est assimilée à une poutre. Seule le mode de déformation de flexion longitudinale a été étudié vu sa dominance par rapport aux autres modes de déformation.

Les équations décrivant le mouvement de flexion (en négligeant l'amortissement) sont traitées en utilisant la méthode de Lagrange.

La méthode des éléments finis a été retenue pour discrétiser les équations différentielles régissant le phénomène physique étudié.

Dans une première étape, on a procédé à l'étude des vibrations libres, sans charge aérodynamique en calculant les fréquences propres et les modes de forme correspondants pour une pale à section constante et pour une pale de section variable.

Les résultats montrent que les premières fréquences propres de la pale effilée sont supérieures à celles de la pale de section constante. Ceci démontre une meilleure flexibilité de la pale effilée.

Dans une deuxième étape, l'étude est consacrée au mouvement forcé dont la résolution des équations a nécessité l'utilisation de la méthode de la superposition modale dont la solution est une combinaison linéaire des modes de forme déjà déterminés dans l'étude du mouvement libre.

A partir de cette solution, on détermine les déplacements du bout de pale et les distributions de contraintes le long de la pale. On trouve que la contrainte normale maximale présente un maximum à l'encastrement pour la pale de section constante alors qu'elle est plus faible pour la pale effilée et située au trois quarts de la longueur, et plus la pale est effilée, et plus la

différence est grande. Encore une fois, la pale effilée supporte mieux les charges aérodynamiques.

Pour l'étude de la fatigue, on a utilisé la méthode simple de calcul des durées de vie en se basant sur la courbe standard de Wöhler.

On trouve qu'une pale effilée a une durée de vie plus longue que la pale à section constante pour une même masse de la pale.

En conclusion, la pale effilée présente des avantages de structure par rapport à la pale de section constante pour une même masse.

Nous rappelons que les modes de déformation de flexion longitudinale, latérale et de torsion ont été découplés dans cette étude et que seule la flexion longitudinale a été étudiée.

En réalité les trois modes sont couplés.

Comme perspectives des travaux futurs, le développement d'un modèle complet est suggéré pour étudier les autres modes de déformations latérales et de torsion, d'une part et d'autre part faire l'étude d'une pale effilée avec une variation de l'angle de calage tout le long de la pale représentant une pale vrillée.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Munif Jourieh « Développement d'un modèle représentatif d'une éolienne afin d'étudier l'implantation de plusieurs machines sur un parc éolien », thèse de doctorat, l'ENSAM-Paris 2007.
- [2] Z. Mehri « Etude des vibrations des vibrations des pales d'un aérogénérateur », Thèse de Magister, Université de Constantine, Janvier 1991.
- [3] F.S. Stoddard « Dynamic rotor loads of wind turbine via hand-held calculators », J. of Energy, vol 5, N°2, 1981.
- [4] S. Samber « Comportement dynamique des poutres composites pré chargées : modélisation par éléments finis », Thèse de doctorat. Université Paul Sabatier toulouse3, 1994.
- [5] J. H. Ginsberg « Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications » John Wiley & Sons, Inc, New York 2001.
- [6] Imbert J.F « Analyse des structures par éléments finis », ENSAE-CEPADUES Ed 1979.
- [7] [https:// web2.ec.nantes.fr/sites/mef/mef/portiques/seq3/cours3, html](https://web2.ec.nantes.fr/sites/mef/mef/portiques/seq3/cours3.html).
- [8] J.M. Proix, P. Mialon et M.T. Bourdeix « Eléments exactes de poutres) », Documentation de Référence du Code\_Aster [R3.08.01], Décembre 1996.
- [9] S .p Timoshenko « Vibration problem in engineering », Edition John Wiley 1974.
- [10] A. Derkaoui « Dimensionnement pour des critères dynamiques et énergétiques de systèmes mécatroniques comportant des sous-systèmes à paramètres réparties », Thèse de Doctorat- INSA-Lyon, Novembre 2005.
- [11] J. M. Jonkman « Modeling of the UAE Wind Turbine for Refinement of FAST-AD », Technical report, NREL/TP-500-34755, 2003.
- [12] Andre Ferrand « Aérodynamique des rotors d'éoliennes », INSA Toulouse, 2009.
- [13] Berlu P. « Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance » 2<sup>ème</sup> rapport d'avancement de thèse, ONERA Lille, 1996.
- [14] Thomas Gmur « Dynamique des structures: Analyse modale numérique », Presses polytechniques et Universitaires Romandes 1997.
- [15] D. Combescure « Eléments de dynamique des structures », Masson 1996.



- [16] Gerardin M., Rixen D «Théorie des vibrations - application à la dynamique des structures», Masson 1993.
- [17] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. Melntyre et C. Laberge « Résistance des matériaux », 2ème édition, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada 1993.
- [18] Clough R.W et Penzien J « Dynamics of Structures », McGraw Hill inc, New-York, 1975.
- [19] M.Boivin,G.Fantozzi « Problèmes d'élasticité », INSA de Lyon , 2001.
- [20] Jean-Louis Fanchon « Guide de mécanique », Nathan 2001.
- [21] C. Bathias, J.P. Bailon « La fatigue des matériaux et des structures », 2ème Edition Hermes 1997.
- [22] Alexis Banvillet « Prévion de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels», Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre de Bordeaux, décembre 2001.
- [23] Xavier Pitoiset « Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux », Thèse de doctorat en sciences appliquées, Département des constructions mécaniques et de robotique, Université Libre de Bruxelles, mars 2001.
- [24] M.Nadjah,M.Khechana,et C.Mahfoudi « Etude de l'hélice d'une éolienne de 5 kW », Revue des Energies Renouvelables CISM08, 2008.

**Calcul des matrices de masse et de raideur élémentaire :****Matrice de masse :**

$$M_e = \int_e m A_e^T(x) A_e(x) dx$$

$$M_e = \rho s(x) \int_e A_e^T(x) A_e(x) dx$$

Avec :  $A_e(x) = [ A_1(x) \ A_2(x) \ A_3(x) \ A_4(x) ]$

$$A_1(x) = 1 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$A_2(x) = \left[ \left(\frac{x}{l}\right) - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

$$A_3(x) = 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$A_4(x) = - \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

$$M_e = \rho s(x) \int_e \begin{pmatrix} A_1(x) \cdot A_1(x) & A_1(x) \cdot A_2(x) & A_1(x) \cdot A_3(x) & A_1(x) \cdot A_4(x) \\ & A_2(x) \cdot A_2(x) & A_2(x) \cdot A_3(x) & A_2(x) \cdot A_4(x) \\ & & A_3(x) \cdot A_3(x) & A_3(x) \cdot A_4(x) \\ \text{sym} & & & A_4(x) \cdot A_4(x) \end{pmatrix} dx$$

ce qui donne après le calcul de ces intégrales :

$$M_e = \frac{\rho \cdot s(x) \cdot l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

**Matrice de raideur :**

**La matrice de raideur est formée de deux parties :  $K_{1e}$  et  $K_{2e}$**

$$K_{1e} = 1/2 \int_0^l EI \frac{\partial^2 A_e^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} dx$$

En supposant que  $I(x)$  est constant pour un élément on peut écrire :

$$K_{1e} = 1/2EI \int_0^l \frac{\partial^2 A_e^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} dx$$

$$K_{1e} = (EI)/l^3 \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

Le deuxième terme

$$K_{2e} = \int_0^l G(x) \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx$$

En supposant que  $G(x)$  est constant pour un élément on peut écrire :

$$K_{2e} = G(x) \int_0^l \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx = G(x) \cdot b$$

$$b = \int_0^l \frac{\partial A_e^T}{\partial x} \frac{\partial A_e}{\partial x} dx$$

$$b = \begin{pmatrix} 6/5/l & 1/10/l^2 & -6/5/l & 1/10/l^2 \\ 1/10/l^2 & 2/15/l^3 & -1/10/l^2 & -1/30/l^3 \\ -6/5/l & -1/10/l^2 & 6/5/l & -1/10/l^2 \\ 1/10/l^2 & -1/30/l^3 & -1/10/l^2 & 2/15/l^3 \end{pmatrix}$$

# Résumé

L'exploitation de l'énergie éolienne en tant qu'énergie renouvelable et non polluante, nécessite des machines appelées éoliennes dont le choix dépend de plusieurs paramètres. D'un côté, on cherche à maximiser l'énergie captée, en augmentant la taille des pales, d'un autre côté, on doit minimiser les problèmes de structure engendrés par l'apparition de phénomènes vibratoires et d'instabilités d'origine aéroélastique. Le but de ce travail est donc d'étudier le comportement vibratoire des pales, en déterminant les modes de forme et les fréquences associées, ainsi que la distribution des contraintes et la détermination de leur durée de vie en utilisant le principe d'Hamilton et la méthode des éléments finis.

L'étude est faite pour une pale de section constante et pour une pale effilée avec une comparaison entre les deux.

A cet effet, un code de calcul a été établi en langage Matlab et les résultats obtenus validés par comparaison à ceux obtenus par d'autres méthodes.

## Mots clés

Éolienne à axe horizontal, pale, vibrations, modes de forme, fréquences propres, contraintes, durée de vie, éléments finis, code Matlab.

## **Abstract**

The exploitation of wind energy as a renewable and clean energy requires machines called wind turbines, where their choice depends on several parameters. On the one hand, we aim to maximize the energy captured by increasing the size of the blades; on the other hand, we should minimize the structural problems produced by vibration phenomena and aeroelastic instabilities. The objective of this work is to study the behavior of the rotor blades by determining the mode shapes and the corresponding frequencies, and also the stress distribution to evaluate the lifetime of the blades. We used the Hamilton principle and the finite element method. The study has been done for the case of a constant section blade and a tapered one with a comparison between them. For this purpose, a numerical code has been developed based on matlab language and the obtained results have been validated.

### **Keywords**

Horizontal axis wind turbine, blade, vibration, mode shapes, frequencies, stresses, lifetime, finite elements, Matlab code

## ملخص

استغلال طاقة الرياح كطاقة متجددة ونظيفة، يتطلب آلات تدعى توربينات الرياح، ويتوقف الاختيار على عدة معايير. من ناحية، فإننا نسعى إلى تحقيق أقصى قدر من الطاقة وذلك بزيادة حجم الجناح، من ناحية أخرى، لا بد علينا التقليل من المشاكل الهيكلية الناجمة عن وجود ظواهر الاهتزاز وعدم الاستقرار. الهدف من هذا العمل هو دراسة السلوك الاهتزازي للجناح، وذلك بتحديد أنماط شكل الاهتزازات و الترددات الموافقة، وتوزيع الجهد وتحديد مدة صلاحيتها باستخدام مبدأ هاميلتون و طريقة العناصر المحدودة.

هذه الدراسة تمت على جناح دو مقطع ثابت و جناح دو مقطع متغير مع مقارنة بينهما. لهذا الغرض، تم وضع برنامج كمبيوتر ماتلاب و تم تصديق النتائج بالمقارنة مع تلك التي تم الحصول عليها بطرق أخرى.

### كلمات مفاتيح

التوربينات الريحية الأفقية المحور، جناح، نمط الشكل، التردد الذاتي، الإجهاد، العناصر المحدودة، برنامج ماتلاب (Matlab).