

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :

N° d'ordre :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER EN PHYSIQUE

Spécialité : ENERGIES RENOUVELABLES

THEME

**PROCESSUS DE LA CONVECTION NATURELLE LAMINAIRE DANS
UNE CHEMINEE SOLAIRE**

Par

TAYEBI TAHAR

Soutenu le : 06 / 07 /2010

Devant le jury :

Présidente	:	A. CHAKER	Professeur	Univ. Mentouri Cne
Rapporteur	:	M. DJEZZAR	M. de Conférence	Univ. Mentouri Cne
Examineur	:	A. ZAATRI	Professeur	Univ. Mentouri Cne
Examineur	:	N. BELLEL	M. de Conférence	Univ. Mentouri Cne

Dédicace

Je dédie cet humble travail

À la mémoire de mon père

À ma mère qui m'est toujours la plus chère

À mon frère et mes sœurs

À ma femme

À tous les membres de ma famille, grands et petits.

À tous mes amis.

Tahar

Remerciements

A Monsieur DJEZZAR Mahfoud, maitre de conférence à l'université Mentouri de Constantine, qui a accepté de diriger ce mémoire. Pour l'intérêt porté à mon travail, sa disponibilité, ses conseils précieux, et surtout sa grande patience, qu'il veuille bien trouver ici mes vifs remerciements, l'expression de ma profonde reconnaissance et de ma sincère considération.

A Madame CHAKER Abla, professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury malgré ses nombreuses occupations, qu'elle trouve ici mes hommages respectueux.

A Monsieur ZAATRI Abd El Ouahab, professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui a bien accepté d'examiner ce mémoire, qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je ne saurais pas oublier Monsieur BELLEL Nadir, maitre de conférence à l'université Mentouri de Constantine, que je remercie beaucoup également pour avoir accepté de participer à mon jury d'examen.

Mes sincères remerciements à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail

SOMMAIRE

<i>Nomenclature</i>	i
<i>Introduction Générale</i>	9

CHAPITRE 1:

Synthèse Bibliographique

1.1. Historique	13
1.2. Description et principe de fonctionnement d'une tour solaire	13
1.2.1. Définition	13
1.2.2. Description de différentes composantes du système	14
1.3. Développement de la filière	15
1.3.1. Méthodologie	15
1.3.2. Les différentes technologies	15
1.4. Besoins Et Usages	17
1.5. Les avantages et les inconvénients	18
❖ Les avantages	18
❖ Les inconvénients	18
1.6. Les projets	19
1.7. Revue Bibliographique	21

CHAPITRE 2:

Formulation Mathématique

2.1. Description du problème physique	25
2.2. Simplification du système d'équations	25
2.3. Equations générales	26
2.3.1. Formulation vectorielle	26
2.3.2. Formulation Indicielle	27
2.3.3. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes	27

2.3.4. Elimination du terme de pression des équations du mouvement	28
2.3.5. Formulation des équations en coordonnées hyperboliques	29
2.3.6. Adimensionnement des équations	31
2.3.7. Les conditions initiales et aux limites adimensionnelles	32
2.4. Généralisation du modèle mathématique	33

CHAPITRE 3:

Formulation Numérique

3.1. Introduction	36
3.2. Représentation de la méthode des volumes finis	36
3.2.1. Maillage	36
3.3. La discrétisation des équations de transport	38
3.3.1. Schémas de Discrétisation Spatiale	41
3.4. Discrétisation de l'équation d'énergie	42
3. 4.1. Discrétisation des conditions aux limites	46
3.5. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement	47
3. 5.1. Discrétisation des conditions aux limites	48
3.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	49
3. 6.1. Discrétisation des conditions aux limites	49
3.7. Discrétisation des composantes de la vitesse	50
3.8. Processus de calcul	51

CHAPITRE 4:

Résultats Et Discussions

4.1. Introduction	54
4.2. Effet du maillage	54
4.3. Validation du code de calcul	55
4.4. Discussion des résultats	57
4.4. 1. Les isothermes et les lignes de courant	57
4.4. 1.1. Première géométrie	57
4.4.1.2. Deuxième géométrie	61

4.4.1.3. Troisième géométrie	65
4.4.2. Champs de vitesse	68
4.4.3. Distribution de la température dans la cheminée	70
<i>Conclusion</i>	74
<i>ANNEXE</i>	76
<i>Références Bibliographiques</i>	79

NOMENCLATURE

Lettres latines

- a : Diffusivité thermique. [$m^2.s^{-1}$]
 b : Terme de source dans le système d'équation algébrique discrétisées.
 C_p : Capacité calorifique massique à pression constante du fluide. [$J/kg.K$]
 D_h : La longueur caractéristique.[m]
 \vec{g} : Accélération de la pesanteur.[m/s^2]
 h : Coefficient métrique dimensionnel.[m]
 H : Coefficient métrique adimensionnel.
 K : Tenseur des contraintes.
 NI : Le nombre total des nœuds suivant θ .
 NN : Le nombre total des nœuds suivant η .
 P : Pression.[$N.m^{-2}$]
 S_ϕ : Terme source.
 t : Temps.[s]
 T : Température.[K]
 T_0 : Température de référence. [K]
 T_d : Ecart de Température. $T - T_0$ [K]
 T_c : Température du sol.[K]
 T_f : Température du toit du collecteur. [K]
 ΔT : Ecart de température dimensionnel.
 \vec{V} : Vecteur vitesse.[m/s]
 u, v : Composantes de vitesses en coordonnée cartésiennes.[m/s]
 V_η, V_θ : Composantes de vitesses suivant η, θ . [m/s]
 x, y : Coordonnées cartésiennes.[m]

Lettres grecques

- α : Coefficient de sous-relaxation.
 λ : Conductivité thermique. [$W.m^{-2}.K^{-1}$]
 β : Coefficient de dilatation du fluide à pression constante.[K^{-1}]
 μ : Viscosité dynamique. [$kg.m^{-2}.s^{-1}$]
 ν : Viscosité cinématique. [$m^2.s^{-1}$]

- ρ : Masse volumique. [$kg.m^{-3}$]
 ρ_0 : Masse volumique à T_0 . [$kg.m^{-3}$]
 Φ : Variable dépendante.
 Γ_Φ : Coefficient de diffusion de Φ . [$m^2.s^{-1}$]
 τ_{ij} : Tenseur des contraintes visqueuses.
 η, θ : Coordonnées hyperboliques.
 ω : Vorticité. [s^{-1}]
 ψ : Fonction de courant. [$m^2.s^{-1}$]

Nombres adimensionnels

- Pr : Nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
 Ra : Nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g \beta \Delta T D_h^3}{\nu \alpha}$

Indices

- I : indice des nœuds suivant η
 J : indice des nœuds suivant θ
 η : suivant la coordonnée η .
 θ : suivant la coordonnée θ .

Exposant

- * : Paramètres adimensionnels.

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

L'augmentation brutale du prix du pétrole survenue en 1973 a conduit une première fois l'homme à s'intéresser à des sources d'énergie renouvelables au premier rang desquelles l'énergie solaire. Les principales caractéristiques de l'énergie solaire ayant suscité l'intérêt qu'on lui a porté à l'époque, étaient sa gratuité (nous y reviendrons), sa disponibilité sur une grande partie du globe terrestre et l'absence du risque d'épuisement connu par les sources d'énergie fossile.

On s'est vite aperçu que l'énergie solaire, contrairement à une idée répandue, n'est pas tout à fait gratuite : son utilisation nécessite un investissement de départ souvent plus lourd que pour les sources d'énergie conventionnelles et nombre d'installations solaires sont aujourd'hui à l'arrêt faute d'avoir prévu un budget pour la maintenance des équipements.

Toutefois, sans être totalement gratuite, l'énergie solaire présente des coûts de fonctionnement réduits et offre dans certains cas une alternative économiquement rentable par rapport aux sources d'énergie conventionnelles. Le développement de l'utilisation de l'énergie solaire sera lié non seulement à ses avantages économiques (qui grandiront au fur et à mesure que les réserves d'énergie fossile diminueront) mais surtout à des considérations liées à la protection de l'environnement : pas de rejets polluants (fumées contenant du CO₂ et des NO_x par les centrales thermiques), pas de danger radioactif et de déchets encombrants (centrales nucléaires),

La cheminée solaire est un générateur naturel de puissance qui utilise la radiation solaire pour augmenter l'énergie interne de l'air circulant dans le système, ce qui permet de transformer le gain utile du capteur solaire en énergie cinétique d'écoulement qui peut être transformée en énergie électrique au moyen d'une turbine appropriée. L'étude de l'influence de la forme de la cheminée solaire sur les transferts de chaleur s'avère donc très intéressante car elle permet de comprendre les mécanismes qui régissent les phénomènes naturels et d'améliorer les performances de ces systèmes solaires.

Sur le plan physique, la cheminée solaire est un système énergétique complexe dans lequel tous les différents modes d'échange thermique et massique interviennent. S'ils sont relativement simples et bien connus, leur couplage entraîne des difficultés dans la modélisation du système.

La convection naturelle est un mécanisme particulièrement important pour l'échange d'énergie et de la masse, entre l'air inclus dans la cheminée et l'extérieur. Elle détermine les modèles aérodynamiques et thermiques à l'intérieur d'une cheminée solaire.

Dans la présente étude nous avons simulé numériquement les transferts de chaleur par convection naturelle laminaire dans une cheminée solaire. Nous analysons l'influence de la géométrie sur les transferts dans la cheminée. Le sol est maintenu à une température constante supérieure à celle du collecteur.

Les simulations numériques ont été réalisées pour des nombres de Rayleigh allant de 10^2 jusqu'à 10^5 .

Le travail sera présenté comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons exposé une synthèse bibliographique sur les travaux effectués dans le domaine des cheminées solaires.

Ensuite, le deuxième chapitre est consacré au modèle physique utilisé pour décrire les phénomènes de convection-diffusion. Pour cela, nous avons rappelé les différentes équations qui décrivent le phénomène de la convection utilisant la formulation vorticité-fonction de courant. Des hypothèses simplificatrices ont été introduites pour faciliter le traitement de nos équations, et pour permettre l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une transformation des coordonnées.

Après avoir décrit les phénomènes physiques à étudier, le troisième chapitre traite d'une part la méthode numérique basée sur des intégrales locales sur des volumes finis et d'autre part les principes de la discrétisation des équations de bilan.

Dans le quatrième chapitre, nous avons exposé les résultats de la simulation sous forme de champs dynamiques et thermiques pour la visualisation de la structure de l'écoulement et la compréhension du comportement thermique du système de la cheminée solaire.

Enfin, nous avons résumé en conclusion les principaux résultats obtenus, et en perspective, nous avons proposé certaines études qui peuvent être réalisées.

Chapitre 1 :

Synthèse Bibliographique

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Historique

Le concept de la tour solaire fut formalisé en 1968 par Joorg Schlaich ingénieur et chercheur de nationalité allemande. En 1981 et 1982, un prototype, financé par le Ministère Allemand de la Recherche et des Technologies (BMFT) et réalisé par la société d'ingénierie Schlaich Bergermann und Partner (SBP), fut construit à Manzanares (Espagne) et fonctionna jusqu'à son arrêt en 1989. La centrale a pu fournir une puissance de 50 kW en pointe. La turbine a fonctionné 3067h de jour et 244h de nuit (grâce au stockage thermique du sol) en 1987, réalisant ainsi une moyenne de plus de 8h45 par jour. A la suite de cette série d'essais, de nombreuses recherches publiques et privées ont été menées jusqu'à aujourd'hui. Le bureau d'ingénierie d'OTH baptisé Elioth a breveté au début de l'année 2006 le concept de Montagnes Solaires. Fondé sur le même principe, la cheminée est ici remplacée par un conduit qui épouse le relief montagneux. [1]

1.2. Description et principe de fonctionnement d'une tour solaire

1.2.1. Définition

La cheminée solaire est un moyen de production électrique à partir de l'énergie solaire. Elle repose sur l'idée d'utiliser les mouvements de convection naturelle de l'air chauffé par le soleil. Une immense serre appelée "collecteur" contient et guide l'air chauffé par le rayonnement solaire. Cet air chaud, naturellement aspiré par la cheminée, est continûment renouvelé par l'air situé à la périphérie de la serre. Equipé de ballons d'eau qui absorbent la chaleur la journée pour la restituer la nuit, un vent régulier se met alors en place. L'énergie cinétique de l'air est ensuite prélevée par un système de turbines et de générateurs. Cette simplicité confère des avantages majeurs en termes de coûts de construction, de maintenance, de robustesse, de durée de vie et d'accessibilité aux pays en voie de développement.

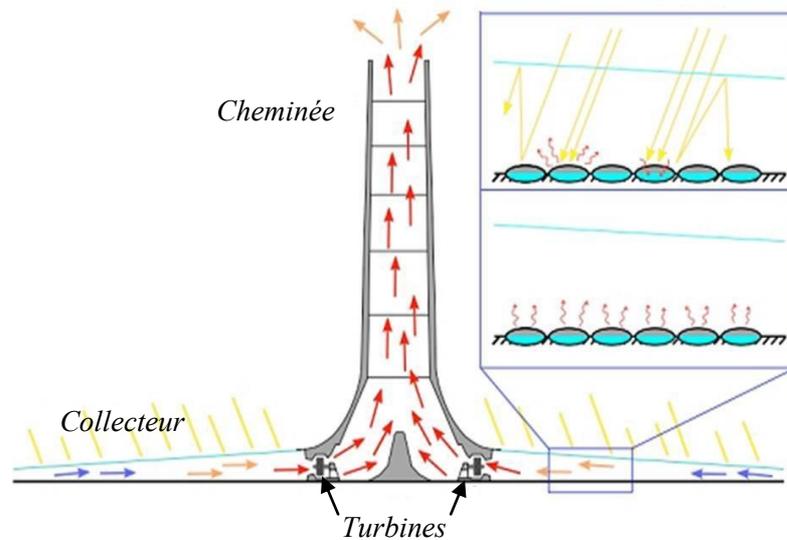


Figure 1.1 Principe de fonctionnement d'une cheminée solaire

1.2.2 Description des différentes composantes du système

❖ Collecteur

Le collecteur est composé du sol comme un système de stockage de la chaleur, d'une surface transparente située quelques mètres au-dessus du sol et d'un domaine de circulation de l'air. Celui-ci, ouvert aux deux extrémités, récupère l'énergie solaire incidente en réchauffant et en contenant l'air qui y circule.

L'air est réchauffé par l'absorption du flux solaire, lequel traverse la surface supérieure transparente du collecteur. Il circule au sein du collecteur soumis à des phénomènes de convection.

❖ Cheminée :

La cheminée est délimitée par une paroi au centre de laquelle se situe la zone d'écoulement du fluide. Celle-ci crée un appel d'air en sortie collecteur et le potentiel de pression entre le haut et le bas de cette dernière entraîne le fluide dans un mouvement ascendant.

❖ Turbine

La turbine est située sur le parcours de l'écoulement du fluide. Elle transforme l'énergie cinétique du fluide en énergie mécanique. Celle-ci sera ensuite transformée en énergie électrique par le biais d'un générateur.

Le tableau (1.1) ci-dessous résume les différents paramètres

Fonctions					
composantes	Vitrage	Air	Sol	Paroi	Turbine
Collecteur	-Conduire l'air. -Conserver la chaleur dans le système. -Permettre l'entrée du flux solaire.	Porter l'énergie (cinétique et thermique).	-Capter le rayonnement solaire. -Stocker la chaleur. -Transmettre la chaleur. -Conduire l'air		
Cheminée		Porter l'énergie (cinétique).		Conduire l'air.	
Turbine					Récupérer l'énergie

Tableau 1.1 Echanges entre les différents domaines [2]

1.3. Développement d'une filière de cheminée solaire

1.3.1. Méthodologie

Il existe des méthodes normalisées afin de comparer différents systèmes. La méthode MASIT (Multicriteria Analysis for Sustainable Industrial Technologies) [3] par exemple, donne sept critères comparatifs afin d'identifier les filières et technologies durables :

- ✓ réglementation
- ✓ fonction
- ✓ technique
- ✓ environnement
- ✓ risques
- ✓ économie
- ✓ social

1.3.2. Les différentes technologies

➤ *Pour la cheminée*

- ✓ Classique (A)
- ✓ Supportée par le relief (B)
- ✓ Intégrée en falaise, creusée (C1) ou appuyée (C2)

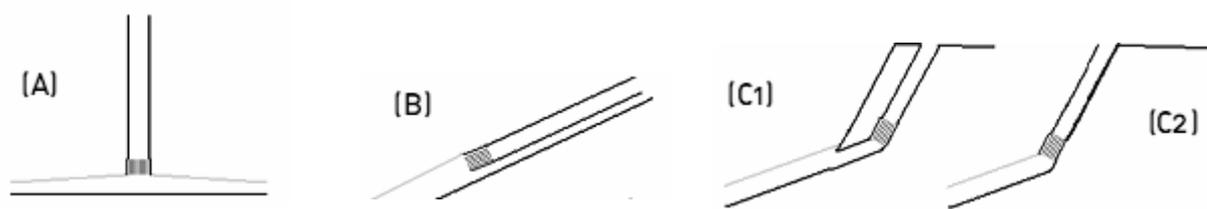


Figure 1.2 Les différentes technologies pour la cheminée

	Avantages(+)	Inconvénients(-)	incertitudes
Cheminée classique	Réalisable partout ++	-Impact visuel sur l'environnement -- -Contraintes de la structure --	-Faisabilité en régions cycloniques -Coûts financiers
Cheminée appuyée	Soutenue par la falaise +	-Dégradation paysagère - -Sites d'accueil limités --	Coûts financiers
Cheminée creusée	-Soutenue par la falaise + -Pas d'impact visuel ++	Sites d'accueil limités --	-Risques géotechniques -Coûts financiers
Conduit sur relief	Simplicité de mise en œuvre ++	-Impact visuel sur l'environnement - -Sites d'accueil limités --	

Tableau 1.2 Technologies pour la cheminée [3]

➤ **Pour le collecteur**

Deux types de technologies existent actuellement :

- ✓ Les collecteurs « en dur » : des plaques de vitrage plastique soutenues par une structure métallique.
- ✓ Les collecteurs gonflables (concept OTH): plastique souple gonflé par de l'eau ou de l'air.

	Avantages(+)	Inconvénient(-)	incertitudes
Collecteurs en dur	Résistance +	Démontage -	-Démarche en cas d'alerte cyclonique. -Coûts financiers
Collecteurs souples	-Stockage intégré + « Posée » sur le sol + -Impact +	Résistance -	-Coûts financiers -Démarche en cas d'alerte cyclonique.

Tableau 1.3 Technologies pour le collecteur [3]

➤ **Pour la turbine**

- ✓ Turbine unique à axe vertical.
- ✓ Turbines multiples à axe vertical.
- ✓ Turbines multiples à axe horizontal.
- ✓ Turbine à rotor unique.
- ✓ Turbine contre rotative.
- ✓ Turbine avec ou sans stator

	Avantages(+)	Inconvénient(-)	incertitudes
turbine unique à axe vertical	Rendement ⁺⁺	Faisabilité ⁻⁻	
Turbines multiples à axe vertical	Mise en œuvre ⁺	Faisabilité ⁻	Rendement
Turbine à rotor unique.	Simplicité ⁺		Rendement
Turbine contre rotative.			Rendement
Turbine sans stator	Simplicité ⁺		Rendement
Turbine avec stator	Mise en rotation de l'air ⁺	Charge de frottement ⁻	Rendement
Turbines multiples à axe horizontal	Mise en œuvre ⁺⁺		Rendement

Tableau 1.4 Technologies pour les turbines [3]

1.4. Besoins et usages

Plusieurs utilisations ont été identifiées. Ces utilisations se regroupent en deux grandes catégories : celles aux objectifs *d'autonomie électrique* horizon 2025 et celles répondant aux objectifs *d'autonomie énergétique* horizon 2050 [4].

Une troisième catégorie regroupe les usages correspondant à des opportunités présentées par l'installation d'une centrale de ce type.

- Dans le cadre de l'autonomie électrique (objectif 2025) :
 - ✓ Alimentation du réseau moyenne tension ou haute tension .
 - ✓ Alimentation de sites isolés .
 - ✓ Alimentation des réseaux en bout de ligne .

- Dans le cadre de l'autonomie énergétique (objectif 2050) :
 - ✓ Production de l'hydrogène pour les réseaux de transport en commun .
 - ✓ Alimentation des infrastructures de transport .

Une filière cheminée solaire pourrait également répondre par la même occasion aux utilisations secondaires que sont :

- ✓ La production agricole (maraîchère, sucrière, etc.)
- ✓ La récupération des eaux de pluie .
- ✓ L'attraction touristique .
- ✓ Le support d'habitations.

1.5. Les avantages et les inconvénients

❖ *Les avantages*

- Les centrales électriques de cheminée solaires utilisent la radiation solaire (direct et diffus), donc peut fonctionner dans les conditions nuageuses.
- Le sol au-dessous du collecteur d'une cheminée solaire agit comme un mécanisme de stockage d'énergie naturel. Cela signifie qu'elle continue à produire la puissance pendant la nuit.
- Des matériaux de construction (principalement le verre et le béton) et aisément disponibles.
- Utilisation de la technologie simple (sauf le turbogénérateur).
- N'exige pas des carburants non-renouvelables pour le fonctionnement et ne produit pas n'importe quelles émissions.
- Elle a une longue durée de vie (au moins 80 à 100 ans). La technologie d'une centrale électrique de cheminée solaire ne deviendra pas périmée facilement.
- Les centrales électriques de cheminée Solaires n'exigent pas d'eau de rafraîchissement.
- Mécanique simple, peu d'entretien nécessaire

❖ *Les inconvénients*

- Investissement de départ
- La production n'est pas constante pendant le jour ou l'année.
- Aucune structure d'échelle semblable n'a été construite auparavant.
- La construction de la cheminée demande des quantités énormes de matériels. Ces quantités peuvent causer des problèmes logistiques appartenant à la disponibilité et le transport des matériels.
- Impact visuel négatif (certains y voient une dégradation du paysage).

1.6. Les projets

➤ Le projet australien

Un projet de tour solaire, appelé Projet de Buronga, prévu pour 2011, est actuellement développé en Australie par la société « EnviroMission ». La cheminée aurait 990 mètres de hauteur, 70 mètres de diamètre. La centrale fournirait 200 MW de puissance électrique, de quoi approvisionner en électricité environ 200 000 logements. Il s'agit d'un des projets les plus ambitieux de la planète pour la production d'énergie renouvelable sûre et propre, les centrales solaires existantes ou en projet sont plutôt de l'ordre de 10 MW, soit 20 fois moins. L'énergie produite reste largement inférieure à celle d'un réacteur nucléaire moderne (soit encore 7 fois plus), mais soutient la comparaison [5].

Le coût d'investissement serait d'environ 400 millions d'euros, ce qui implique un coût d'investissement de 2 €/W. Par comparaison, un système photovoltaïque de 2008 coûte environ le triple, tandis que la récente centrale solaire thermodynamique (11 MW) a coûté 3,2 €/W, soit 1,6 fois plus. Le kWh fourni resterait néanmoins toujours cinq fois, plus cher que l'électricité de charbon, qui représente 95% de la production en Australie.

❖ *Spécifications du projet*

- ✓ Une cheminée de 990 m de haut.
- ✓ Un collecteur de 7 km de diamètre, soit 38,5 km² de verre et de plastique.
- ✓ Température de l'air chauffé dans la cheminée : 70 °C.
- ✓ Vitesse de l'air dans la cheminée : 15 m/s (54 km/h).
- ✓ 32 turbines.
- ✓ Puissance produite : 200 MW.

Ce projet peut paraître incroyable mais ses concepteurs le disent réaliste. Les études de faisabilité par le bureau d'ingénieurs allemand SBP, basée à Stuttgart, arrivent à leur terme. Cette tour solaire serait donc construite par l'entreprise « EnviroMission » dans le désert de Nouvelle-Galles du Sud, dans le comté de Wentworth. Si le financement est trouvé, sa construction devrait commencer avant 2011.

Aux dernières nouvelles, « EnviroMission » se lance dans le développement d'une première version plus petite et moins coûteuse (50 MW) avec une cheminée en béton précontraint haute résistance. On s'inquiète tout de même de la lenteur du projet au vu des sommes mises en jeu et des investissements déjà réunis.

➤ **Le projet espagnol**

Un autre projet de tour solaire, prévu pour arriver à échéance avant 2011, si le financement est trouvé, est actuellement développé en Espagne dans la localité de Fuente el Fresno, un village de la Province de Ciudad Real. Les travaux devraient être menés en collaboration avec les entreprises espagnoles Campo3 et Imasa, et la compagnie allemande Schlaich Bergermann. Cette tour de 750 mètres de hauteur serait dès lors la plus haute en Europe.

❖ *Spécifications du projet*

- ✓ Une cheminée de 750 m de haut.
- ✓ Un collecteur de 3 km de diamètre, couvrant 350 hectares, dont 250 hectares pourraient être utilisés pour la culture de légumes sous serre.
- ✓ Vitesse de l'air dans la cheminée : 43 km/h.
- ✓ Puissance de l'installation : 40 MW, soit la demande en électricité d'environ 120 000 personnes.
- ✓ Coût du projet : 240 millions d'euros.

Comme tous les autres, ce projet produit un kWh beaucoup trop cher pour rendre le projet rentable sans source de revenu annexes: en l'occurrence, l'installation d'équipements de télécommunication et de surveillance contre les incendies, et tourisme [5].

➤ **Autres projets**

Il existe actuellement deux projets de construction de tour solaire : une tour en forme de tuyère de Laval par la société française Sumatel en Savoie qui a déjà construit en 1997 une maquette de 6 m de haut et envisage de passer à 60 m ou plus, et la tour cylindrique de 500 m de haut. A hauteur égale, les puissances prévues pour ces deux projets sont très différentes et le modèle expérimental, construit par Sumatel sur le site de Bouillante aux Antilles, n'est pas à proprement parler une tour solaire, car il tire ses calories d'un gisement géothermique et non du soleil.

Pour une éventuelle tour de 500 m, Sumatel annonce plus de 1500 MW alors que le projet australo-allemand avance le chiffre de 50 MW. Cette différence de performance s'explique par la différence de hauteur du phénomène atmosphérique exploité. Le procédé français permet de générer un tourbillon atmosphérique qui peut atteindre 20 km de haut, alors que le procédé australo-allemand se contente d'exploiter l'effet de tirage d'une simple cheminée. Telle une trombe ou une tornade, la cheminée virtuelle de 20 km de haut a un tirage, donc un rendement, beaucoup plus important qu'une construction humaine, même de très grande hauteur.

La différence de température entre les couches basses et hautes de l'atmosphère est simplement beaucoup plus importante dans le projet français. L'inventeur Nazare, et avec lui la société Sumatel, estime que c'est à partir d'une tour de 300 m minimum que l'on peut espérer générer un tourbillon de 20 km de hauteur et obtenir les puissances annoncées. Contrairement à la tour australo-allemande, la tour française n'est utilisée que pour amorcer le phénomène atmosphérique. [5]

1.7. Revue bibliographique

Une revue de la littérature montre que la recherche basée sur la modélisation du système a pour but d'améliorer sa connaissance et d'optimiser ses différents éléments.

X. Zhou, J. Yang, G. Hou [6] ont étudié expérimentalement une cheminée solaire (8m de hauteur et 10m de diamètre du collecteur). La distribution de température dans l'installation a été mesurée.

A.J. Gannon, T.W.Von Backström [7] ont mené une étude concernant l'optimisation de la forme de la cheminée.

T.W, von Backström et A.J. Gannon, [8] ont proposé une étude sur l'optimisation des paramètres des turbines, trois types de turbine sont comparées (turbine à axe simple vertical, à axe multiple vertical et turbine à axe multiple horizontal), ils ont trouvé que la turbine d'axe simple vertical a un certain avantage concernant l'efficacité et le rendement d'énergie car certaines pertes mécaniques ne sont pas présentes, mais son moment de torsion est énorme.

Dans le même contexte E. Bilgen et F. Denantes [9] présentent une étude sur les paramètres des turbines.

M.A.dos S.Bernardes, A.VoB et G.Weinrebe [10] ont développé un modèle mathématique qui décrit la performance de la cheminée solaire. Ce modèle a été développé pour examiner l'effet des conditions ambiantes et les dimensions structurelles sur la puissance. Les résultats montrent que la hauteur de la cheminée, le facteur de chute de la pression de la turbine, le diamètre et les propriétés optiques du collecteur sont des paramètres importants pour la conception d'une cheminée solaire.

M. Tingzhen, L.Weii,Yanbin, G. Xuhu, P.Yuanb [11] ont présenté une méthode de simulation numérique pour le système de centrale électrique de la cheminée solaire avec la turbine, ils ont trouvé pour une cheminée solaire avec une cheminée de 400m de hauteur et 30m

de rayon, un collecteur 1500 m de rayon et une turbine à 5 lames , la puissance maximale et l'efficacité de turbine est de 10MW et 50 %, respectivement.

A.J. Gannon T.W.et von Backström [12] ont fait un travail concernant la description thermo-hydrodynamique du système, ils ont utilisé une méthode analytique pour décrire les transferts thermiques par convection dans la cheminée solaire. La même étude a été faite par J.P. Pretorius et D.G. Kröger [13].

E. Bilgen et J. Rheault [14] ont présenté des études sur les cheminées solaires aux hautes latitudes. Pour les évaluer, ils ont développé un modèle mathématique calculé sous MATLAB, basé sur les données mensuelles moyennes météorologiques et un cycle thermodynamique, la performance thermique de la production nominale d'une centrale de 5 MW à trois emplacements au Canada, a été étudiée. Les résultats ont montré que la performance thermique complète pour des cheminées solaires aux hautes latitudes est environ 0.48 %, qui est légèrement meilleure que celle avec des collecteurs horizontaux aux emplacements du sud avec le climat favorable.

A. Koonsrisuk, T. Chitsomboon [15] ont proposé une étude d'une variable de similitude simple sans dimensions pour la cheminée solaire qui s'est avérée être valable pour un cas entièrement semblable et un cas partiellement semblable. Ceci doit rendre l'étude expérimentale d'une cheminée solaire plus simple et plus économique.

La littérature disponible concernant l'étude numérique de la convection naturelle proprement dite dans la cheminée solaire est rare, car la recherche se concentre surtout sur l'évaluation de la performance globale de ces systèmes.

Dans ce contexte, R.M.Valle et M.F.Cortez [16] ont conduit la première simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une tour solaire. Pour la prédiction du comportement thermo-hydrodynamique du système, le modèle mathématique (équations de bilan de la quantité de mouvement et de l'énergie) a été exploité en utilisant la méthode des volumes finis en coordonnées généralisées. La solution est obtenue pour un domaine de calcul fixe, indépendant de la forme géométrique du système physique. Cette méthodologie permet une visualisation détaillée des effets géométriques sur les champs de vitesse et de température qui sont très importants pour la définition de la géométrie et des caractéristiques opérationnelles optimales de tels systèmes. Ils ont proposé un système d'équations différentielles elliptiques pour la génération de maillage pour un système bidimensionnel, et une méthode pour la transformation du système de coordonnées.

T. Ming, W. Liu, Y. Pan, G. Xu [17] ont exécuté des simulations numériques pour analyser les caractéristiques du flux et le transfert de chaleur du système qui inclut une couche de stockage d'énergie. Les modèles mathématiques du collecteur, la cheminée et le moyen de stockage ont été établis et les effets des différentes radiations solaires sur la caractéristique de stockage de chaleur de la couche de stockage d'énergie ont été analysés.

T. Chergui, S. Larbi, A. Bouhdjar [18] ont modélisé numériquement le processus de la convection naturelle laminaire dans une cheminée solaire. Ils ont précisé les équations du transfert thermique, qui sont des équations différentielles aux dérivées partielles "équations de continuité et des quantités de mouvements de Navier-Stokes" et leurs conditions aux limites, la résolution a été obtenue en utilisant la formulation en variables primitives (vitesse-pression) avec la méthode des volumes finis. Ils ont analysé l'effet de la géométrie et le nombre de Rayleigh sur le phénomène.

Chapitre 2 :

Formulation Mathématique

FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1. Description du problème

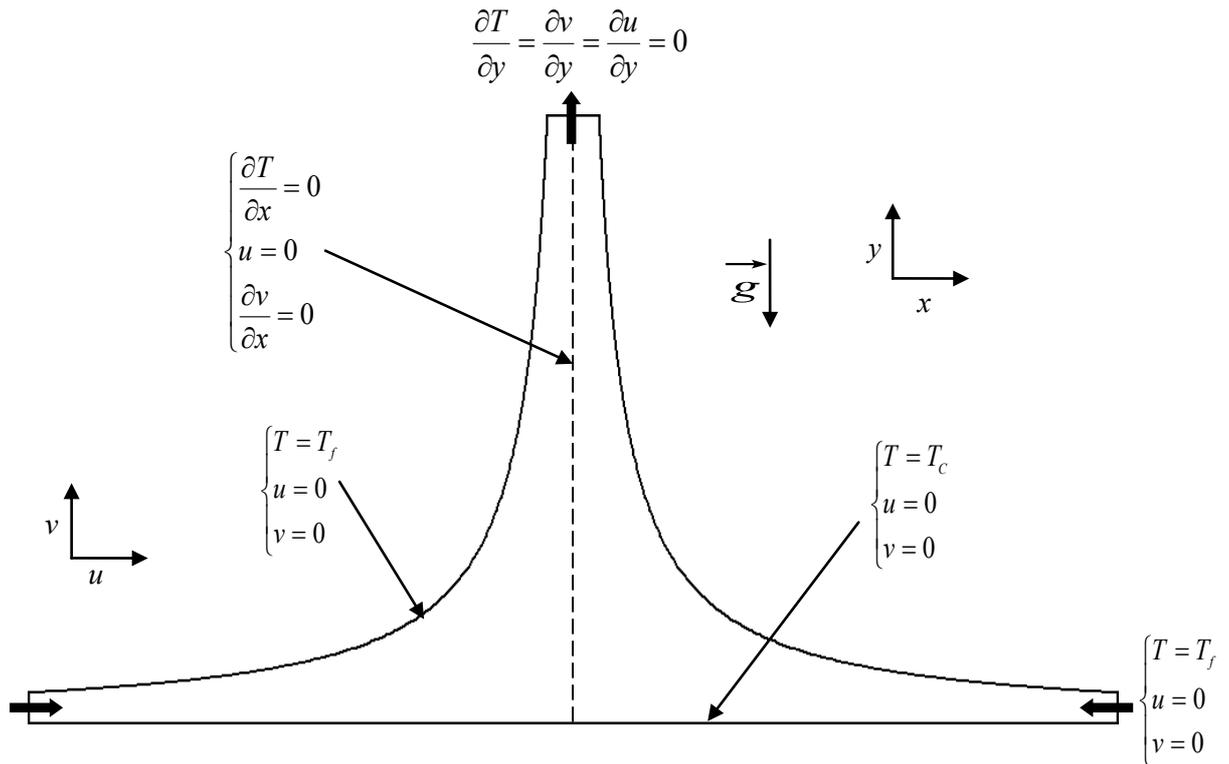


Figure 2.1 Présentation physique du problème et conditions aux limites

2.2. Simplification du système d'équations

Pour construire des modèles suffisamment détaillés et précis, il faut parfois tenir compte d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Pour cela, on considère :

1. Un écoulement de fluide *incompressible*.
2. Nous supposons être dans le cadre de *l'approximation de Boussinesq*, qui consiste à considérer que la masse volumique (ρ) du fluide ne varie que dans le terme des forces de volume (pesanteur), dont les variations avec la température, supposées linéaires engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc :

$$\rho = \rho(P, T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

Où:

β : est le coefficient de dilatation à pression constante.

T_0 : est la température de référence.

ρ_0 : est la masse volumique à T_0 .

Au niveau de tous les autres termes la masse volumique est constante est égale à ρ_0 .

3. Les propriétés physiques du fluide sont supposées *constantes*
4. La puissance volumique dissipée est négligeable
5. Le flux de dissipation visqueuse de la chaleur est négligeable
6. Pas d'échange par rayonnement au sein du fluide
7. Le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire

2.3. Equations générales

Les équations exprimant les phénomènes d'écoulements sont principalement celles des dérivées des lois physiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

2.3.1. Formulation vectorielle

Après introduction des hypothèses données ci-dessus, on peut considérer que les équations suivantes décrivent le phénomène de la convection naturelle à l'intérieur de la cheminée solaire:

➤ **Equation de continuité**

C'est l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (2.2)$$

➤ **Equation du mouvement**

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement et les causes qui le produisent. Où on peut indiquer que le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Elle s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\Delta K}{\rho_0} \quad (2.3)$$

➤ **Equation de la chaleur**

L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

Avec:

- \vec{V} : vitesse du fluide.
- \vec{g} : accélération de la pesanteur.
- K: tenseur des contraintes.
- λ : conductivité thermique du fluide.
- C_p : capacité calorifique massique à pression constante du fluide.
- T: température du fluide.
- t: temps

2.3.2. Formulation indicielle

➤ Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.5)$$

➤ Equation du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i \quad (2.6)$$

➤ Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (T V_j) = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \right) \quad (2.7)$$

Avec :

- P: la pression du fluide.
- τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses

2.3.3. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Exprimons les équations en coordonnées cartésiennes telles qu'elles sont définies sur la figure (2.1).

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g\beta T_d + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

2.3.4. Elimination du terme de pression des équations de mouvement

Pour obtenir les équations en fonction de la vorticité il faut éliminer le terme de pression dans les équations de mouvement. En dérivant (2.9.a) et (2.9.b) respectivement par rapport à y et à x , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.11.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g\beta T_d) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.11.b)$$

En soustrayant l'équation (2.11.a) de l'équation (2.11.b), nous obtenons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} (g\beta) + v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

Avec:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.b)$$

2.3.5. Formulation des équations en coordonnées hyperboliques

Pour résoudre ces problèmes, la solution généralement adoptée consiste à effectuer un changement de coordonnées tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées.

Dans ce travail nous utilisons une transformation pour le passage des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées hyperboliques (η, θ) .

Ce passage s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{r + \eta}{2}} \\ y &= \sqrt{\frac{r - \eta}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Avec: $r = \sqrt{\eta^2 + \theta^2}$

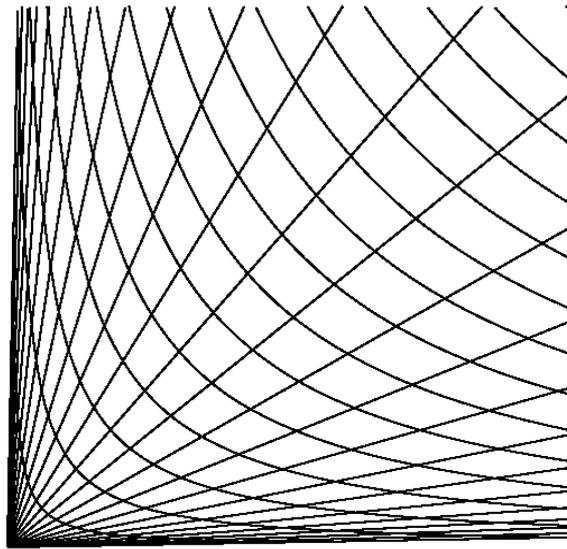


Figure 2.2 Représentation schématique des coordonnées hyperboliques

Les équations (2.8), (2.10) et (2.12) s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{h} \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) + \frac{g\beta}{h} \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (2.19)$$

Où:

$$\begin{cases} h = 2\sqrt{r} \\ F(\eta, \theta) = \sqrt{\frac{r + \eta}{2r}} \\ G(\eta, \theta) = \sqrt{\frac{r - \eta}{2r}} \end{cases}$$

V_η et V_θ : sont les composantes de la vitesse suivant les directions η, θ .

h : coefficient métrique dimensionnel.

En introduisant la fonction de courant ψ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\left. \begin{aligned} V_\eta &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Nous en déduisons :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.21)$$

2.3. 6. Adimensionnement des équations

On écrit les équations précédentes sous forme adimensionnelle ce qui nous permet de faciliter leur simplification et de généraliser les résultats.

En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 D_h &= \sqrt{r} & H &= \frac{h}{D_h} \\
 V_\eta^* &= V_\eta \frac{D_h}{a} & V_\theta^* &= V_\theta \frac{D_h}{a} \\
 \psi^* &= \frac{\psi}{a} & \omega^* &= \omega \frac{D_h^2}{a} \\
 T^* &= \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \text{ (paroi isotherme)} & t^* &= t \frac{a}{D_h^2}
 \end{aligned}$$

Avec:

$\frac{a}{D_h}$: vitesse caractéristique.

$\frac{D_h^2}{a}$: temps caractéristique

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (2.17), (2.18) et (2.19), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^*) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + V_\eta^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + V_\theta^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + V_\eta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} + V_\theta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} = \frac{P_r}{H} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^2} \right) + R_a P_r \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \quad (2.24)$$

L'équation de la chaleur (2.23) et l'équation de mouvement (2.24), elles s'écrivent aussi compte tenu de l'équation de continuité (2.22) :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_\eta^* T^* - \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_\theta^* T^* - \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_\eta^* \omega^* - P_r \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_\theta^* \omega^* - P_r \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right) \\ = P_r R_a H \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Où:

$$V_\eta^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \quad (2.27.a)$$

$$V_\theta^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \quad (2.27.b)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.28)$$

$$R_a = \frac{g \beta \Delta T D_h^3}{\nu a} : \text{est le nombre de } \mathbf{Rayleigh}.$$

$$P_r = \frac{\nu}{a} : \text{est le nombre de } \mathbf{Prandtl}.$$

2.3.7. Les conditions initiales et aux limites adimensionnelles

➤ *Les conditions initiales* ($t^* = 0$)

$$T^* = 0$$

$$V_\eta^* = V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\omega^* = 0$$

➤ *Le toit du collecteur* ($\theta = \theta_{NN}$)

$$V_\eta^* = V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

$$T^* = 0$$

➤ *L'axe de symétrie* ($\theta = \theta_1$)

$$V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial V_\eta^*}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\omega^* = 0$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right| = 0$$

➤ **Le sol** ($\theta = \theta_1$)

$$V_\eta^* = V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

$$T^*=1$$

➤ **L'entrée** ($\eta = \eta_{NI}$)

$$V_\eta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = 0$$

$$V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

$$T^*=0$$

➤ **La sortie** ($\eta = \eta_1$)

$$\left. \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right| = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta \partial \theta} = 0$$

$$\left. \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \eta} \right| = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right| = 0$$

2.4. Généralisation du modèle mathématique

L'équation de transport d'une grandeur intensive ϕ telle que T^* , ω^* est d'abord mise sous une forme générale de convection-diffusion. Cette équation générale de transport s'écrit pour un écoulement d'un fluide incompressible et bidimensionnel comme suit:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t^*}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_\eta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_\theta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}_{(b)} = \underbrace{S_\phi}_{(c)} \quad (2.29)$$

Où:

ϕ : est la variable transportée.

Γ_ϕ : le coefficient de diffusion.

S_ϕ : le terme de source de la grandeur considérée.

Les termes de l'équation (2.29) sont respectivement:

(a) : le terme transitoire.

(b) : le taux de transport de ϕ par *convection* et par *diffusion*.

(c) : le terme de source.

Dans le tableau (2.1), chaque terme ϕ permet de décrire les équations de conservation.

Equation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
(2-25)	T^*	1	0
(2-26)	ω^*	P_r	$P_r R_a H \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right)$

Tableau 2.1 Présentation des différents termes de l'équation de transport considérée

Chapitre 3 :

Formulation Numérique

FORMULATION NUMERIQUE

3.1. Introduction

La résolution des équations du phénomène physique de la convection naturelle peut se faire par l'utilisation d'une méthode numérique. Il existe plusieurs méthodes à savoir :

- ✓ La méthode des éléments finis;
- ✓ La méthode des différences finies;
- ✓ La méthode des volumes finis.

3.2. Méthode numérique de résolution

Dans notre travail nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis présentée par Patankar [19], c'est une technique de discrétisation qui transforme les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste en l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur ce volume de contrôle (V.C).

Pour la résolution du système d'équations (2.23), (2.24) et les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Alors que pour l'équation (2.28), nous considérons une solution numérique par la méthode des différences centrées.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts, et sont bien exposées par S.V. Patankar [19], E.F. Nogotov [20] et E. Saatajian [21].

3.2.1. Maillage

Le volume de contrôle est illustré par la figure (3.1). Pour un nœud principal P, les points E et W (E = Est, W = Ouest) sont pris dans la direction θ , tandis que N et S (N = Nord, S = Sud) sont pris dans la direction η . Le volume de contrôle entourant P est représenté par des lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points e et w dans la direction θ , n et s dans la direction η .

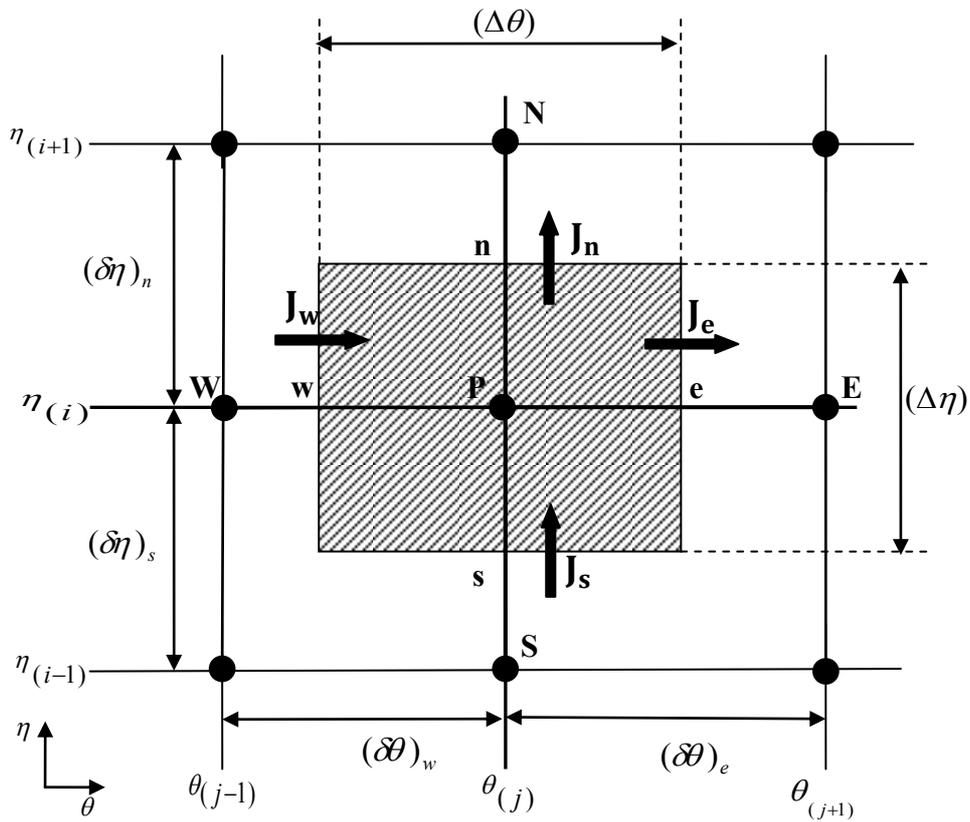


Figure 3.1 Volume de contrôle principal bidimensionnel

Soit:

i: indice des nœuds suivant η

j: indice des nœuds suivant θ

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

NI : le nombre de nœuds suivant η

NN : le nombre de nœuds suivant θ

La figure (3.2) représente le domaine physique et le domaine de calcul

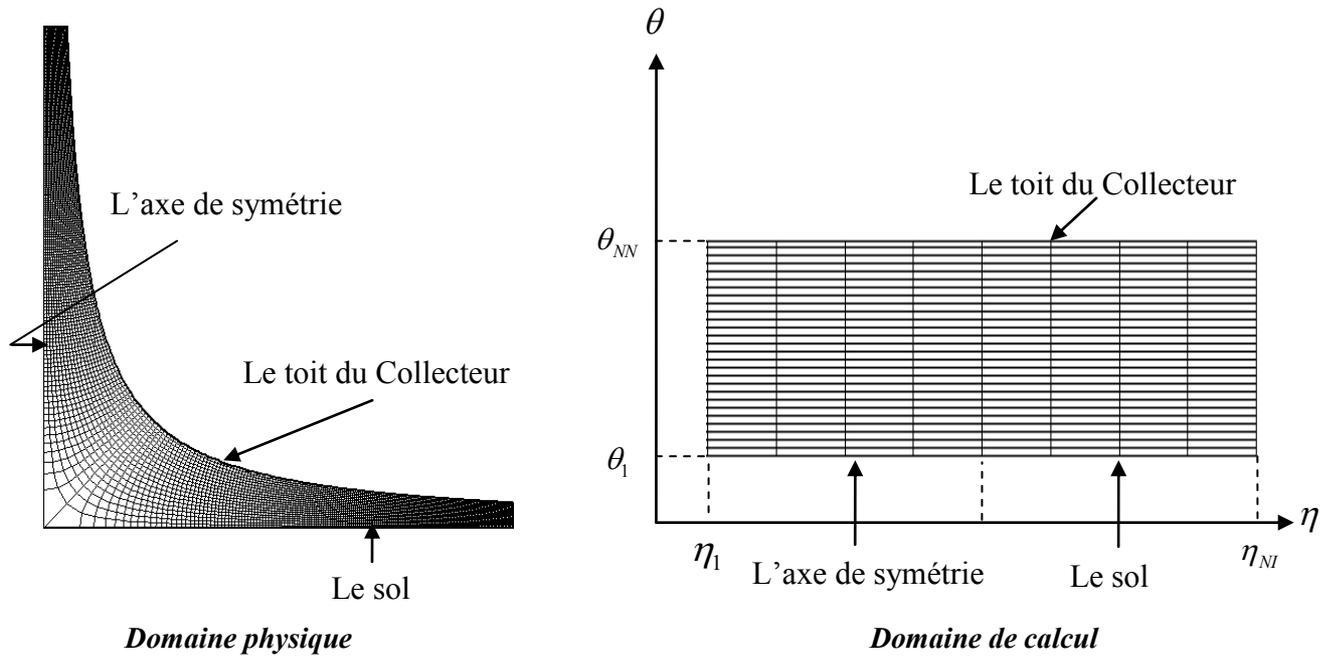


Figure 3.2 Le domaine physique et le domaine de calcul

3.3. La discrétisation des équations de transport

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un système d'équations algébriques. L'équation (2.29) est intégrée sur le volume de contrôle:

$$\begin{aligned} \iint_{w s} \int_{t^*}^{e n t^* + \Delta t^*} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} d\eta d\theta dt + \iint_{w s} \int_{t^*}^{e n t^* + \Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\eta d\theta dt \\ + \iint_{w s} \int_{t^*}^{e n t^* + \Delta t^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\eta d\theta dt = \iint_{w s} \int_{t^*}^{e n t^* + \Delta t^*} S_{\phi} d\eta d\theta dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

a) Intégration du flux total

L'intégration du terme convectif et diffusif pour tout le volume de contrôle est:

$$J_n - J_s + J_e - J_w \quad (3.2)$$

Les $J_i(e, w, n, s)$ sont les flux totaux à travers les faces *est*, *ouest*, *nord* et *sud* du volume de contrôle. Ce flux est composé de deux parties convectif et diffusif.

$$\left. \begin{aligned} J_e &= (H V_\eta^* \phi)_e - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e \\ J_w &= (H V_\eta^* \phi)_w - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w \\ J_n &= (H V_\theta^* \phi)_n - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_n \\ J_s &= (H V_\theta^* \phi)_s - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

b) Intégration du terme source

L'intégration du terme de source pour tout le volume de contrôle est:

$$\overline{S_\phi} \Delta V \quad (3.4)$$

ΔV : le volume du volume de contrôle

$\overline{S_\phi}$: la source moyenne

Le terme de source linéarisé en fonction de ϕ_P sous la forme suivante:

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_P \phi_P \quad (3.5)$$

Avec:

$$S_P < 0$$

ϕ_P : la variable au nœud P

c) Intégration du terme transitoire

$$\frac{(\phi_P^{t^*} - \phi_P^0) \Delta \eta \Delta \theta}{\Delta t^*}$$

L'équation (3.1) devient:

$$\frac{(\phi_P^{t^*} - \phi_P^0) \Delta \eta \Delta \theta}{\Delta t^*} + J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_P \phi_P) \Delta V \quad (3.6)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (2.22) dans le volume de contrôle, on obtient:

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.7)$$

F_n, F_s, F_e, F_w sont les débits massiques à travers les faces e, w, s, n du volume de contrôle.

$$\left. \begin{aligned} F_e &= (H V_\theta^*)_e \Delta \eta \\ F_w &= (H V_\theta^*)_w \Delta \eta \\ F_n &= (H V_\eta^*)_n \Delta \theta \\ F_s &= (H V_\eta^*)_s \Delta \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

En multipliant l'équation (3.7) par la fonction ϕ_P , on pose ($\phi_P = \phi_P^{t^*}$) et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.6), il vient:

$$\begin{aligned} & \frac{(\phi_P - \phi_P^0)\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^*} + (J_n - F_n\phi_P) - (J_s - F_s\phi_P) + (J_e - F_e\phi_P) - (J_w - F_w\phi_P) \\ & = (S_0 + S_P\phi_P)\Delta V \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les termes entre parenthèse de l'équation (3.9) peuvent être mis sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (J_n - F_n\phi_P) &= a_N(\phi_P - \phi_N) \\ (J_s - F_s\phi_P) &= a_S(\phi_S - \phi_P) \\ (J_e - F_e\phi_P) &= a_E(\phi_P - \phi_E) \\ (J_w - F_w\phi_P) &= a_W(\phi_W - \phi_P) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En introduisant ces relations dans l'équation (3.9) on obtient une discrétisée de la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{(\phi_P - \phi_P^0)\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^*} + a_N(\phi_P - \phi_N) - a_S(\phi_S - \phi_P) + a_E(\phi_P - \phi_E) - a_W(\phi_W - \phi_P) \\ & = (S_0 + S_P\phi_P)\Delta V \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'équation de discrétisation est donc :

$$a_P\phi_P = a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_E\phi_E + a_W\phi_W + b \quad (3.12)$$

Avec:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_P\Delta V \quad (3.13)$$

$$a_P^0 = \frac{\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^*}$$

$$b = S_0\Delta V + a_P^0\phi_P^0 \quad (3.14)$$

3.3.1. Schémas de discrétisation spatiale

L'approximation de la variable généralisée ϕ aux interfaces du volume de contrôle se fera donc avec le choix du schéma de discrétisation approprié. Le rôle du schéma intervient pour expliquer comment évaluer les flux de diffusion et de convection sur les faces du volume de contrôle après intégration.

Les différents schémas proposés par Patankar [19] permettent d'exprimer la fonction $A(|P|)$. La fonction $A(|P|)$ est choisie d'après le tableau suivant :

Schéma	La fonction $A(P)$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, 1 - 0.5 P \ $
Exponentiel	$\frac{ P }{e^{ P } - 1}$
Loi de puissance	$\ 0, (1 - 0.1 P)^5\ $

Tableau 3.1 La fonction $A(|P|)$ pour différents schémas

Une meilleure approximation de la solution exacte est donnée par le schéma de puissance “Power Law” développé par Patankar [19], et aussi présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, et de plus ne coûte pas cher comparé aux autres schémas. C'est pour quoi notre choix basé sur ce schéma, qui s'écrit pour les coefficients comme suit:

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n \|0, (1 - 0.1|P_n|)^5\| + \|-F_n, 0\| \\ a_S &= D_s \|0, (1 - 0.1|P_s|)^5\| + \|F_s, 0\| \\ a_E &= D_e \|0, (1 - 0.1|P_e|)^5\| + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w \|0, (1 - 0.1|P_w|)^5\| + \|F_w, 0\| \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Le symbole $\|A, B\|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Ou:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

P_n, P_s, P_e, P_w sont les nombres de **Péclet** définis par :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Nous considérons que les interfaces e, w, n et s sont les milieux de $(P, E), (P, W), (P, N)$ et (P, S) respectivement, et les pas d'intégration $(\delta\eta)_e, (\delta\eta)_w, (\delta\eta)_s$ et $(\delta\eta)_n$ sont choisis constants et égaux aux $\Delta\eta, \Delta\theta$. Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

3.4. Discrétisation de l'équation d'énergie

Remplaçons la variable ϕ aux nœuds P, E, W, N, S dans l'équation (3.12) par la température adimensionnelle, il vient :

$$a_P T_P^* = a_N T_N^* + a_S T_S^* + a_E T_E^* + a_W T_W^* + S_T \quad (3.19)$$

Le coefficient a_P devient:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + S_T \quad (3.20)$$

Avec :

$$S_T = \frac{\Delta\eta\Delta\theta}{\Delta t^*} T_P^*$$

Où a_N, a_S, a_E et a_W sont respectivement les mêmes expressions que celles données dans le système (3.15).

En introduisant la fonction de courant adimensionnelle dans le système (3.8), il vient:

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \left(-\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right)_e \Delta\eta \\ F_w &= \left(-\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right)_w \Delta\eta \\ F_n &= \left(+\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right)_n \Delta\theta \\ F_s &= \left(+\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right)_s \Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

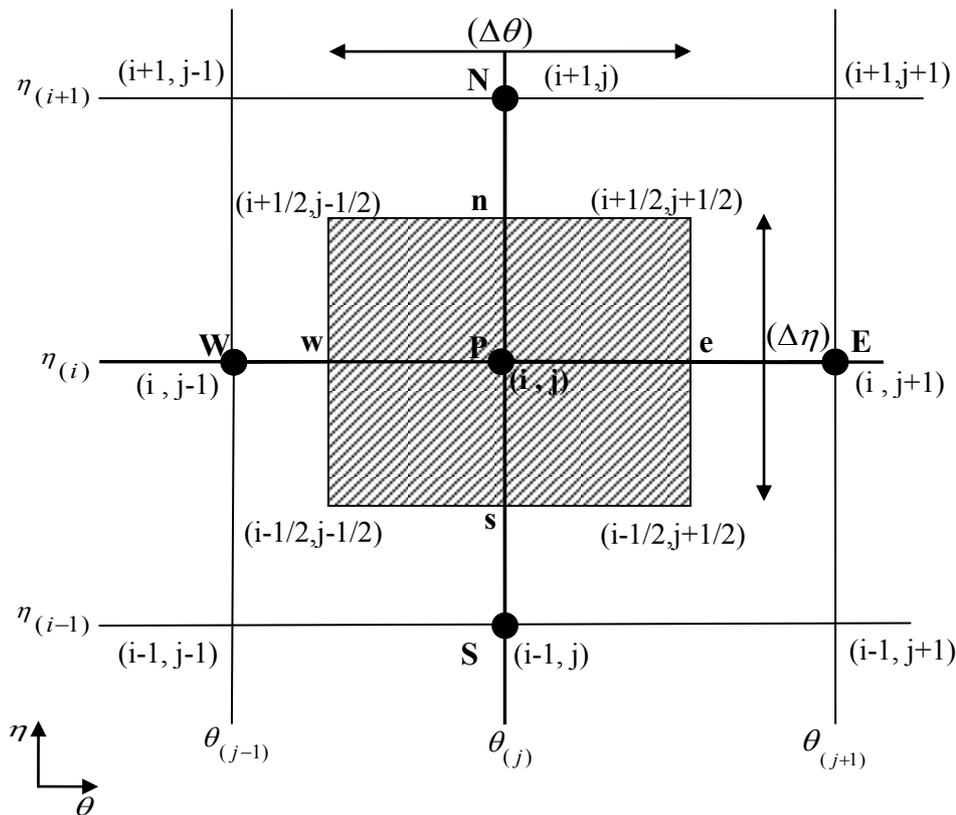


Figure 3.3 Représentation des nœuds dans le maillage

L'équation (3.19) peut s'écrire sous la forme :

$$a_P T^*(i, j) = a_N T^*(i + 1, j) + a_S T^*(i - 1, j) + a_E T^*(i, j + 1) + a_W T^*(i, j - 1) + S_T \quad (3.22)$$

Les fonctions ψ^* s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi_n^* &= \frac{\psi^*(i + 1, j) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_s^* &= \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i - 1, j)}{2} \\ \psi_e^* &= \frac{\psi^*(i, j + 1) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_w^* &= \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j - 1)}{2} \end{aligned}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de E.F. Nogotov [20], comme suit :

➤ *A l'interface « e »*

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - \psi^*\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i + 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j + 1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i - 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j + 1)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i + 1, j) - \psi^*(i - 1, j + 1) - \psi^*(i - 1, j)}{4\Delta \eta}$$

➤ *A l'interface « w »*

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^*\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) - \psi^*\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j - 1) + \psi^*(i + 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j - 1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i - 1, j - 1) + \psi^*(i - 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j - 1)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^*(i + 1, j - 1) + \psi^*(i + 1, j) - \psi^*(i - 1, j - 1) - \psi^*(i - 1, j)}{4\Delta \eta}$$

➤ *A l'interface « n »*

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_n = \frac{\psi^*\left(i + \frac{1}{2}, j + 1/2\right) - \psi^*\left(i + \frac{1}{2}, j - 1/2\right)}{\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_n = \frac{1}{2\Delta\theta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i + 1, j)}{2} \right] - \frac{1}{2\Delta\theta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j - 1) + \psi^*(i, j - 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i + 1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_n = \frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1) - \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i, j - 1)}{4\Delta\theta}$$

➤ *A l'interface « s »*

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_s = \frac{\psi^*\left(i - \frac{1}{2}, j + 1/2\right) - \psi^*\left(i - \frac{1}{2}, j - 1/2\right)}{\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_s = \frac{1}{2\Delta\theta} \left[\frac{\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i - 1, j)}{2} \right] - \frac{1}{2\Delta\theta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j - 1) + \psi^*(i, j - 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i - 1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)_s = \frac{\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1) - \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i, j - 1)}{4\Delta\theta}$$

Et les expressions F_e, F_w, F_n, F_s deviennent :

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i - 1, j) - \psi^*(i + 1, j + 1) - \psi^*(i + 1, j)] \quad (3.23.a)$$

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^*(i - 1, j - 1) + \psi^*(i - 1, j) - \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i + 1, j)] \quad (3.23.b)$$

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1) - \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i, j - 1)] \quad (3.23.c)$$

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1) - \psi^*(i - 1, j - 1) - \psi^*(i, j - 1)] \quad (3.23.d)$$

Lorsque le coefficient Γ_ϕ est égal à l'unité comme nous l'avons montré précédemment dans tableau (2.1), les coefficients D_n, D_s, D_w, D_e dans le système d'équations (3.18) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= D_s = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= D_w = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Et les nombres de **Péclet** P_n, P_s, P_e, P_w dans le système (3.17) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

3.4.1. Discrétisation des conditions aux limites

➤ **Le toit du collecteur**

$$\begin{aligned} a_p &= 1 \\ a_N &= a_S = a_E = a_W = 0 \\ S_T &= 0 \end{aligned}$$

➤ **L'axe de symétrie**

$$\begin{aligned} a_p &= a_E = 1 \\ a_N &= a_S = a_W = 0 \\ S_T &= 0 \end{aligned}$$

➤ **Le sol**

$$\begin{aligned} a_p &= 1 \\ a_N &= a_S = a_E = a_W = 0 \\ S_T &= 1 \end{aligned}$$

➤ **L'entrée**

$$\begin{aligned} a_p &= 1 \\ a_N &= a_S = a_E = a_W = 0 \\ S_T &= 0 \end{aligned}$$

➤ **La sortie**

$$a_P = a_S = 1$$

$$a_N = a_E = a_W = 0$$

$$S_T = 0$$

3.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

Remplaçons la variable ϕ dans l'équation (3.12) par ω^* , il vient sous la forme :

$$a_P \omega_P^* = a_N \omega_N^* + a_S \omega_S^* + a_E \omega_E^* + a_W \omega_W^* + b \quad (3.26)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta V$$

$$S_P \Delta V = 0$$

Les coefficients D_n, D_s, D_w, D_e dans le système d'équations (3.18) en posant $\Gamma_\phi = P_r$ s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s = P_r \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = P_r \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Par la suite, les nombres de **Peclet** P_n, P_s, P_e, P_w s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{1}{P_r} F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= \frac{1}{P_r} F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= \frac{1}{P_r} F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= \frac{1}{P_r} F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

L'équation de mouvement discrétisée s'écrit finalement :

$$a_P \omega^*(i, j) = a_N \omega^*(i + 1, j) + a_S \omega^*(i - 1, j) + a_E \omega^*(i, j + 1) + a_W \omega^*(i, j - 1) + b \quad (3.29)$$

Le terme constant S_0 du terme de source est donné par :

$$S_0 = P_r R_a H \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \quad (3.30)$$

Par conséquent, le coefficient b devient:

$$b = S_0 \cdot \Delta V$$

Puisque le problème est bidimensionnel, on prend l'unité comme épaisseur dans la 3^{ème} direction, le volume de contrôle ΔV s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V &= H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ b &= H^3 \left(F(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \Delta\eta \cdot \Delta\theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i+1, j) - T^*(i-1, j)}{2\Delta\eta} \quad (3.32.a)$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i, j+1) - T^*(i, j-1)}{2\Delta\theta} \quad (3.32.b)$$

3.5.1. Discrétisation des conditions aux limites

On détermine la vorticité ω^* sur les parois et l'axe de symétrie, nous utilisons la méthode élaborée par ROACHE [22], qui a exprimé ω^* en fonction de ψ^* et utilisé un développement en série de Taylor:

➤ **La sortie**

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right)$$

Le développement en série Taylor de la fonction de courant au voisinage du sol:

$$\psi^*(2, j) = \psi^*(1, j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^*(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^*(1, j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

La vorticité s'écrit donc:

$$\omega^*(1, j) = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{7\psi^*(1, j) - 8\psi^*(2, j) + \psi^*(3, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right] \quad (3.33.a)$$

➤ **L'entrée**

$$\omega^*(NI, j) = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{7\psi^*(NI, j) - 8\psi^*(NI-2, j) + \psi^*(NI-3, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right] \quad (3.33.b)$$

➤ **Le sol**

$$\omega^*(i, 1) = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{7\psi^*(i, 1) - 8\psi^*(i, 2) + \psi^*(i, 3)}{2(\Delta\theta)^2} \right] \quad (3.33.c)$$

➤ **Le toit du collecteur**

$$\omega^*(i, NN) = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{7\psi^*(i, NN) - 8\psi^*(i, NN-2) + \psi^*(i, NN-3)}{2(\Delta\theta)^2} \right] \quad (3.33.d)$$

➤ *L'axe de symétrie*

$$\omega^*(i, 1) = 0 \quad (3.33.e)$$

3.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

On réécrit l'équation (2.28) sous la forme:

$$-H^2 \omega^* = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right) \quad (3.34)$$

La discrétisation de cette équation en utilisant les différences centrées donne:

$$-H^2(i, j) \omega^*(i, j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} \quad (3.35)$$

Avec:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2}$$

Nous en utilisons:

$$-H^2(i, j) \omega^*(i, j) = \left[\frac{\psi^*(i+1, j) - 2\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\psi^*(i, j+1) - 2\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j-1)}{(\Delta \theta)^2} \right]$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, E, N, et S comme suite:

$$\psi^*(i, j) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \right]^{-1} \left[\frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j)}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1)}{(\Delta \theta)^2} + H^2(i, j) \omega^*(i, j) \right]$$

3.6.1. Discrétisation des conditions aux limites

➤ *La sortie*

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \right|_{1,j} = \frac{7\psi^*(1, j) - 8\psi^*(2, j) + \psi^*(3, j)}{2(\Delta \eta)^2} = 0$$

$$\psi^*(1, j) = \frac{8\psi^*(2, j) - \psi^*(3, j)}{7}$$

➤ *L'entrée*

$$\left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{NI,j} = \frac{-3\psi^*(NI, j) + 4\psi^*(NI - 1, j) - \psi^*(NI - 2, j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^*(NI, j) = \frac{4\psi^*(NI - 1, j) - \psi^*(NI - 2, j)}{3}$$

➤ *Le sol*

$$\left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{i,1} = \frac{-3\psi^*(i, 1) + 4\psi^*(i, 2) - \psi^*(i, 3)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^*(i, 1) = \frac{4\psi^*(i, 2) - \psi^*(i, 3)}{3}$$

➤ *Le toit du collecteur*

$$\left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{i,NN} = \frac{-3\psi^*(i, NN) + 4\psi^*(i, NN - 1) - \psi^*(i, NN - 2)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^*(i, NN) = \frac{4\psi^*(i, NN - 1) - \psi^*(i, NN - 2)}{3}$$

➤ *L'axe de symétrie*

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right|_{i,1} = \frac{7\psi^*(i, 1) - 8\psi^*(i, 2) + \psi^*(i, 3)}{2(\Delta\theta)^2} = 0$$

$$\psi^*(i, 1) = \frac{8\psi^*(i, 2) - \psi^*(i, 3)}{7}$$

3.7. Discrétisation des composantes de la vitesse

L'expression discrétisée des composantes de la vitesse présent dans les équations (2.27.a) et (2.27.b), en utilisant les différences centrées, est donnée par:

$$V_\eta^*(i, j) = \frac{1}{H(i, j)} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^*(i, j + 1) + \psi^*(i, j - 1)}{2\Delta\theta} \right] \quad (3.36.a)$$

$$V_\theta^*(i, j) = \frac{-1}{H(i, j)} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{-1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j) + \psi^*(i - 1, j)}{2\Delta\eta} \right] \quad (3.36.b)$$

$$i = 2, NI - 1$$

$$j = 2, NN - 1$$

3.8. Processus de calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.22), (3.29) et (3.33) nous utilisons une méthode proposée par E.F.NGOTOV [20].

Dans les méthodes itératives pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires nous utilisons des procédés de relaxation, la sous-relaxation est très pratique pour les problèmes non-linéaires car elle permet d'éviter la divergence des méthodes itératives utilisées pour les résoudre. Les équations discrétisées peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$T^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_T)T^n(i,j) + \left(\frac{\alpha_T}{\alpha_P}\right) [a_N T^n(i+1,j) + a_S T^{n+1}(i-1,j) + a_E T^n(i,j+1) + a_W T^{n+1}(i,j-1)] \quad (3.37)$$

$$\omega^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_\omega)\omega^n(i,j) + \left(\frac{\alpha_\omega}{\alpha_P}\right) [a_N \omega^n(i+1,j) + a_S \omega^{n+1}(i-1,j) + a_E \omega^n(i,j+1) + a_W \omega^{n+1}(i,j-1)] \quad (3.38)$$

$$\psi^{n+1}(i,j) = (1 - \alpha_P)\psi^n(i,j) + \frac{\alpha_P}{2} \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} \right]^{-1} \left[\frac{\psi^n(i+1,j) + \psi^{n+1}(i-1,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i,j+1) + \psi^{n+1}(i,j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i,j)\omega^{n+1}(i,j) \right] \quad (3.39)$$

Avec:

n : ordre de l'intégration.

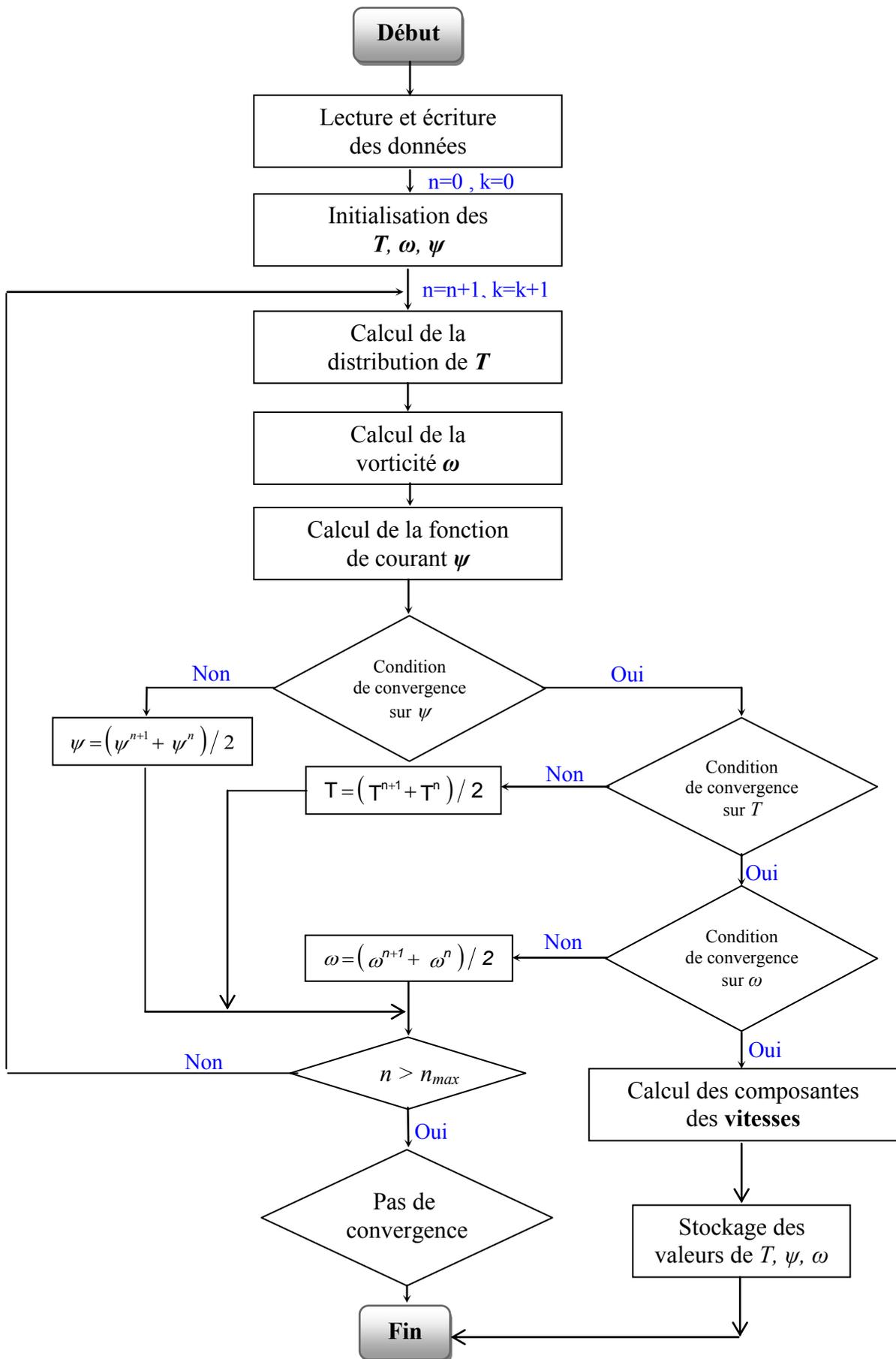
$\alpha_T, \alpha_\omega, \alpha_P$: sont les **facteurs de relaxation**. Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Rayleigh (Ra).

Le code de calcul permet de résoudre les équations de la façon suivante :

1. Initialisation des valeurs de chaque variable au sein du maillage.
2. Calcul de la distribution de la température.
3. Calcul de la vorticité.
4. Calcul de la distribution de la fonction de courant.
5. Le processus itératif répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de ψ par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

6. Le même critère est utilisé pour la température.
7. Le même critère est utilisé pour la vorticité.
8. Calcul des composantes de la vitesse.
9. Stockage des valeurs de T, ω et ψ .



Chapitre 4 :

Résultats et Discussions

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1. Introduction

Arrivé au terme de cette étude, rappelons brièvement nos objectifs initiaux. Nous avons présenté les équations qui décrivent le phénomène de la convection naturelle en régime permanent dans la cheminée solaire, puis la méthode de résolution numérique de ces équations. Dans ce chapitre, nous discuterons les résultats obtenus que nous avons simulés. Il s'agit des écoulements d'air au sein d'une cheminée solaire chauffée.

Nous avons présenté nos résultats pour des nombres de Rayleigh (Ra) variant de 10^3 à 10^5 (Ra est considéré comme étant le paramètre principal dans cette étude). Les résultats sont présentés sous forme de graphiques et de champs d'écoulements et de température.

4.2. Effet du maillage

Dans ce travail plusieurs maillages ont été utilisés pour des nombres de Rayleigh (Ra) variant de 10^3 à 10^5 , pour voir leurs effets sur les résultats. Pour différents maillages (tableau 4.1) la solution de ψ_{max} ne change pas de manière significative. On peut conclure que la solution est indépendante du maillage.

	$\eta_{NI} \times \theta_{NN}$	75 × 9	90 × 11	109 × 13	131 × 15	155 × 17	187 × 21	223 × 25	269 × 31	323 × 37	387 × 43
$Ra=10^2$	E_r (%)		17.24	26.087	0	0	0	0	0	0	0
	ψ_{max}	0.024	0.029	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
$Ra=10^3$	E_r (%)		19.76	22.76	0.37	0.74	1.82	0.72	1.08	0.36	0.36
	ψ_{max}	0.264	0.329	0.268	0.267	0.269	0.274	0.276	0.279	0.280	0.279
$Ra=10^4$	E_r (%)		12.13	10.40	11.28	1.54	5.57	7.31	1.32	0.29	0.4
	ψ_{max}	4.832	5.499	4.981	4.476	4.408	4.668	4.350	4.293	4.302	4.319
$Ra=5 \cdot 10^4$	E_r (%)		11.82	8.69	30.72	18.26	1.15	3.35	0.88	0.92	0.11
	ψ_{max}	14.003	12.523	11.522	8.814	10.783	10.908	11.286	11.187	11.085	11.072
$Ra=10^5$	E_r (%)		1.63	1.41	1.12	6.80	5.14	1.09	0.61	0.5	0.1
	ψ_{max}	16.341	16.612	16.850	16.664	17.879	17.005	17.193	17.088	17.079	17.081

Tableau 4.1 Variation du nombre de Rayleigh et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre des nœuds

4.3. Validation du code de calcul

Le programme numérique développé dans la présente étude a été validé en comparant les résultats obtenus avec ceux de X. Zhou, J. Yang et G. Hou [6], pour la distribution de la température dans une installation expérimentale d'une cheminée solaire (8m de hauteur et 10m de diamètre du collecteur). Nous avons comparé le profil de la température issu de nos calculs le long de la cheminée avec leurs résultats.

Les figures (4.1) et (4.2) illustrent bien cette comparaison et nous remarquons que qualitativement nos résultats et les leurs sont en bon accord.

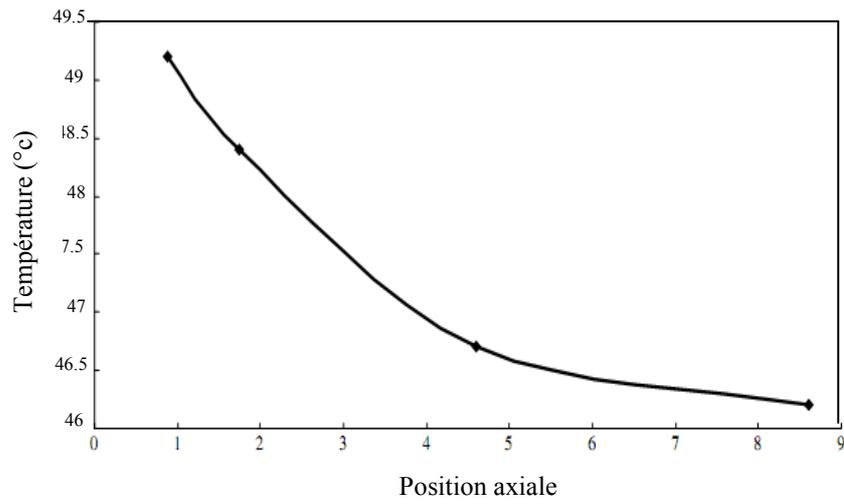


Figure 4.1 La distribution de température le long de la cheminée ref. [6]

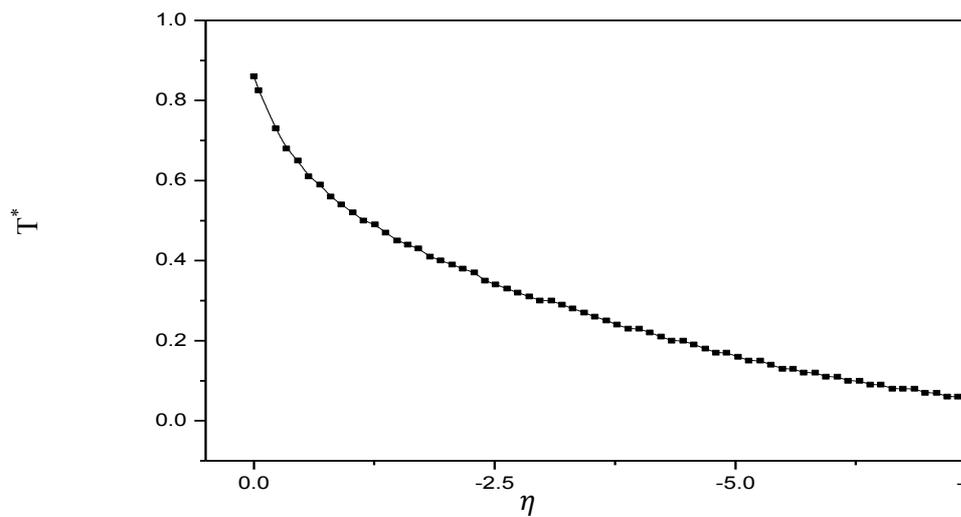


Figure 4.2 La distribution de température le long de la cheminée pour nos calculs

4.4. Discussion des résultats

On rappelle que notre objectif est d'analyser l'effet de la géométrie sur le transfert de chaleur et l'écoulement d'air dans la cheminée. Pour cette raison, nous avons présenté les isothermes et les lignes de courants dans trois cas de géométries différentes pour trois nombres de Rayleigh différents.

4.4. 1. Les isothermes et les lignes de courant

4.4. 1.1. Première géométrie

❖ *Isothermes*

Les figures (4.3), (4.4) et (4.5) représentent les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh pour la première géométrie.

Pour $Ra=10^3$ et $Ra=10^4$ les isothermes sur ces figures là sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois. Dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante du sol vers le toit à l'intérieur du collecteur, On peut dire que les transferts thermiques se font par pseudo conduction au niveau du sol.

Cependant la valeur $Ra=10^5$ les lignes isothermes se modifient sensiblement, ce qui traduit la dominance du transfert convectif. Le transfert de chaleur devient intense dans la région centrale de la cheminée.

❖ *lignes de courants*

Les figures (4.6), (4.7) et (4.8) représentent les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh pour la première géométrie.

Pour $Ra=10^3$, on remarque la présence de deux vortex contrarotatifs au centre du collecteur à cause de la structure symétrique de la cheminée favorisant l'écoulement vers le haut et deux autres, de tailles petites situées à l'entrée. On observe une légère modification de cette structure pour une valeur de Rayleigh proche de 10^4 .

Quand $Ra=10^5$, l'écoulement est caractérisé par un ensemble de cellules contrarotatives situées le long du collecteur, et les deux cellules du centre se déplacent vers le haut de la cheminée. Cette structure est expliquée par le fait que l'air froid qui s'échauffe près du sol monte vers le haut et s'écoule le long de la cheminée.

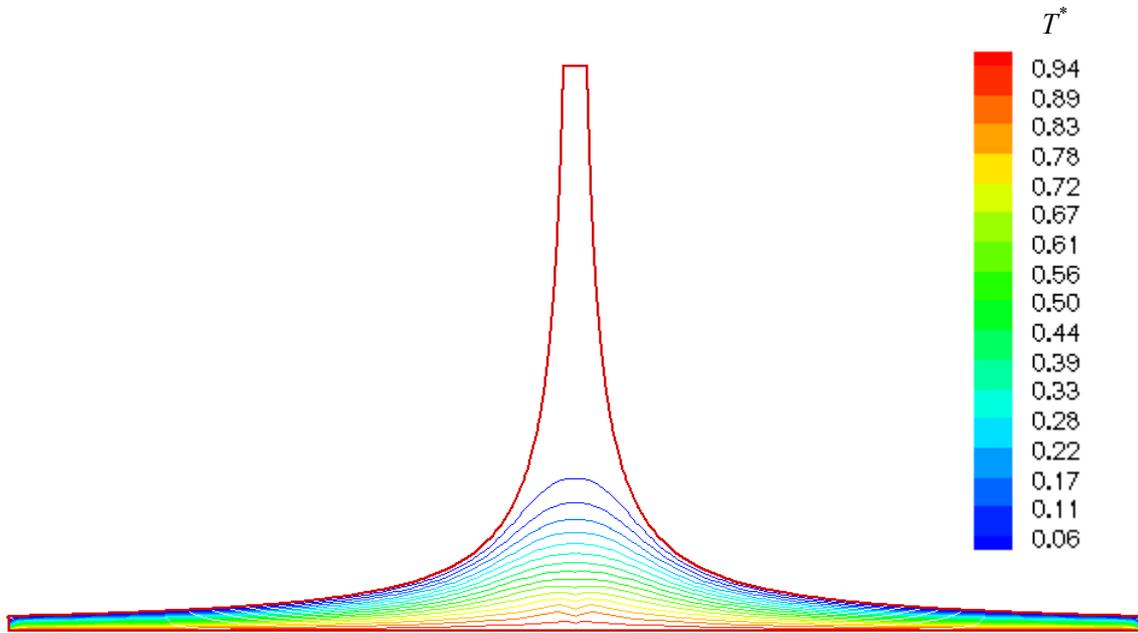


Figure 4.3 Isothermes pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^3$

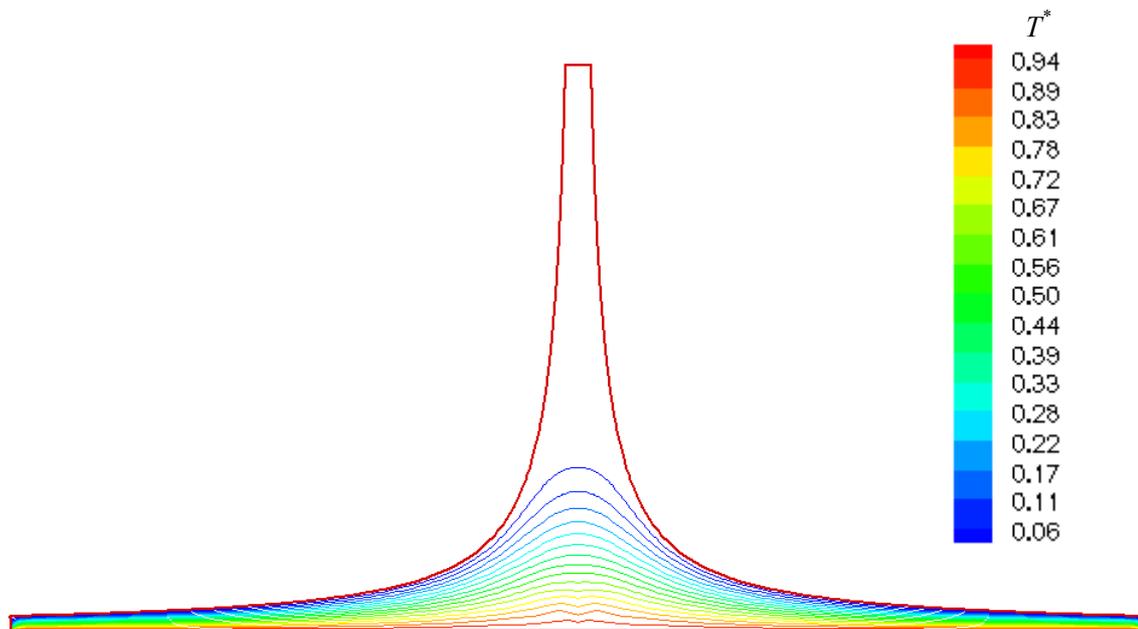


Figure 4.4 Isothermes pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^4$

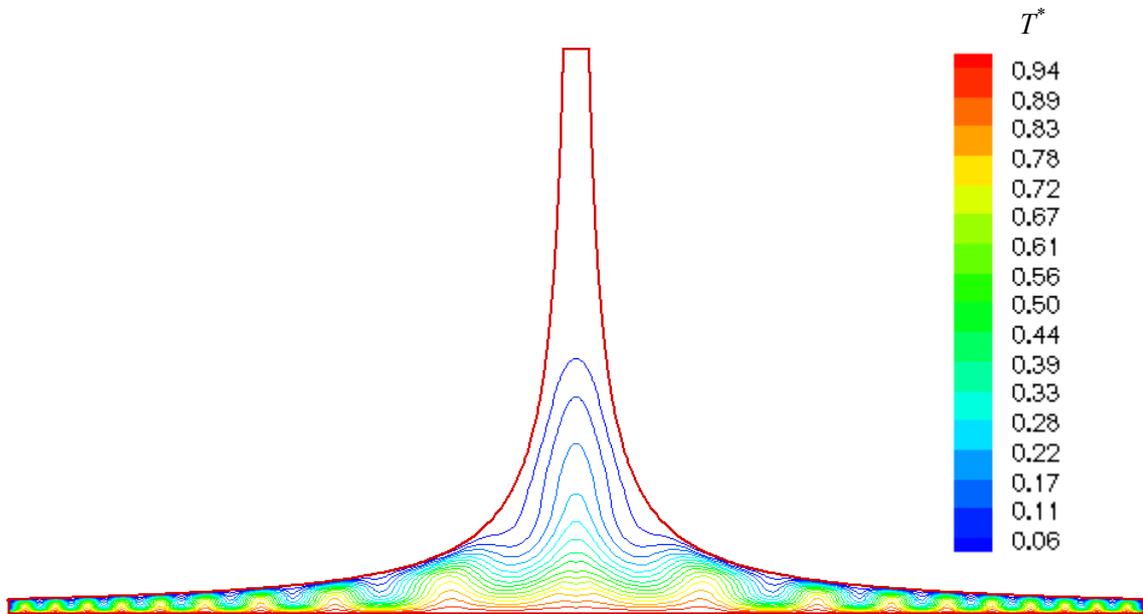


Figure 4.5 Isothermes pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^5$

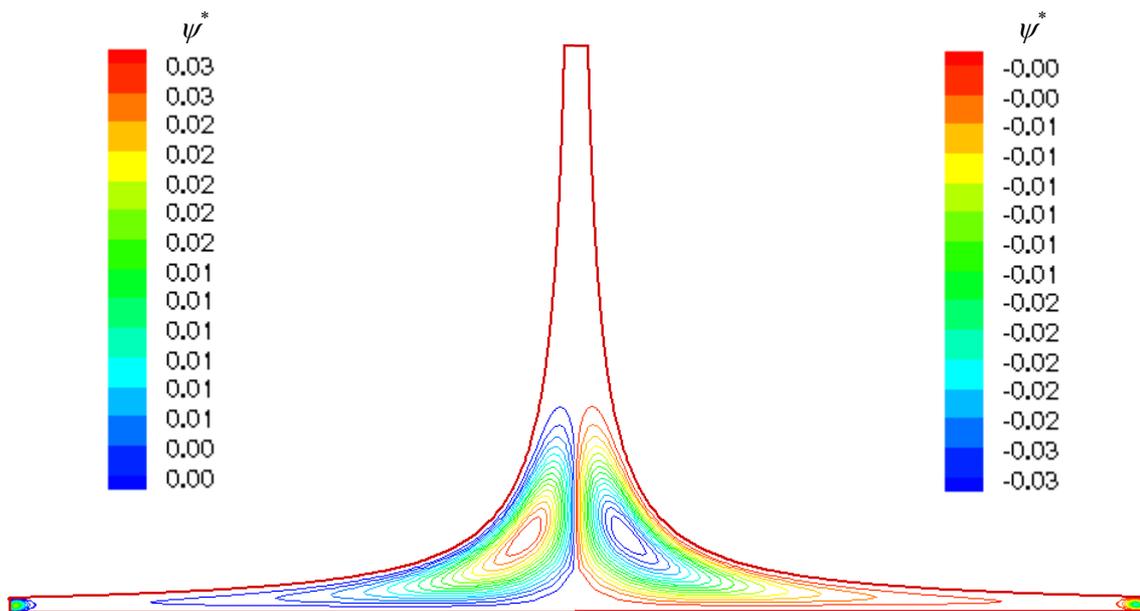


Figure 4.6 lignes de courant pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^3$

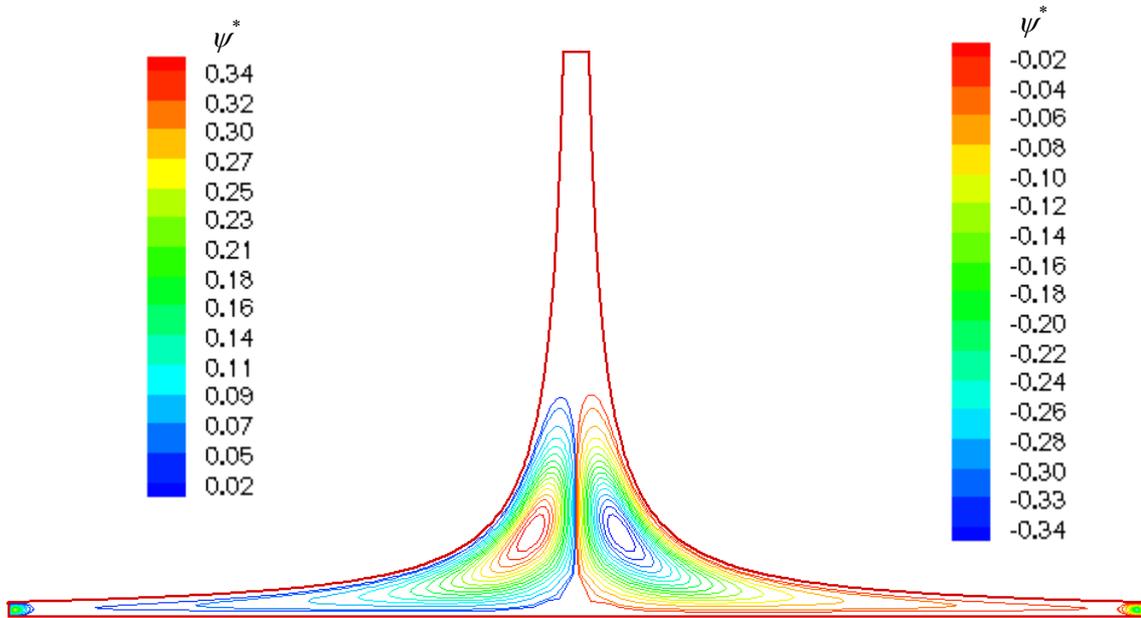


Figure 4.7 lignes de courant pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^4$

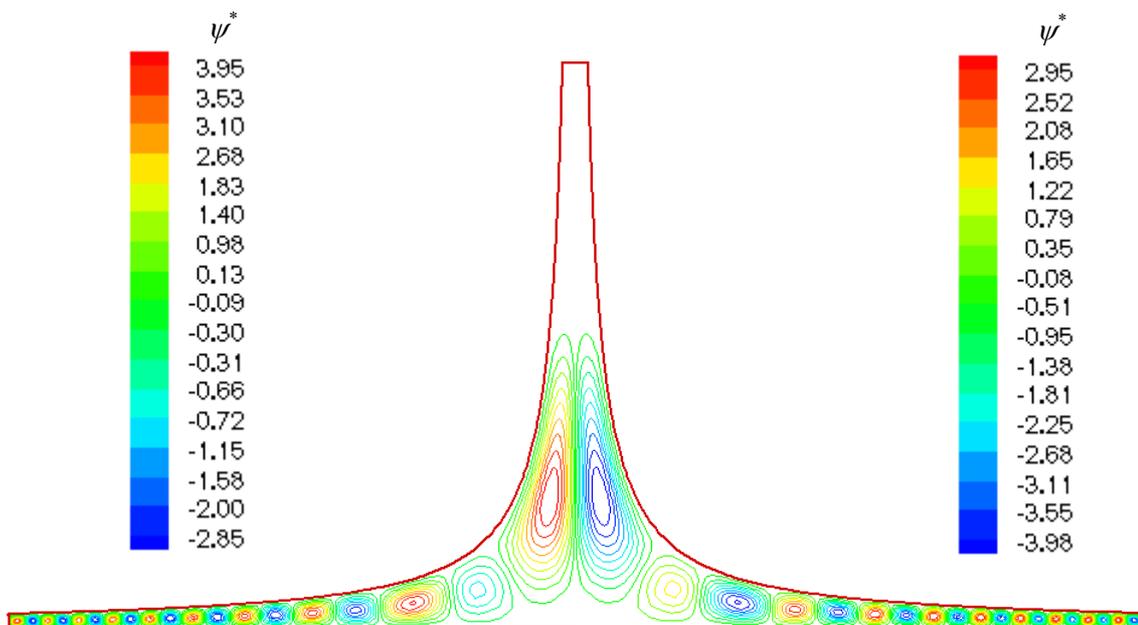


Figure 4.8 lignes de courant pour la 1^{ère} géométrie et $Ra=10^5$

4.4.1.2. Deuxième géométrie

❖ *Isothermes*

Les isothermes de l'écoulement pour les différentes valeurs du nombre de Rayleigh pour la deuxième géométrie sont représentées sur les figures (4.9), (4.10) et (4.11).

Pour $Ra=10^3$, les isothermes sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois, où les transferts s'effectuent essentiellement par conduction, et sont plus espacées au centre de la cheminée (plus larges par rapport à la première géométrie). La distribution de la température est décroissante du sol vers le toit.

Pour cette géométrie quand le nombre de Rayleigh atteint 10^4 la structure est rapidement déstabilisée, donc il y a naissance de la convection naturelle dans la cheminée à cause de l'espace libre plus large dans ce cas, qui la favorise, en comparaison avec la première géométrie, et de plus en plus lorsque $Ra=10^5$.

❖ *lignes de courants*

Les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh pour la deuxième géométrie sont présentées sur les figures (4.12), (4.13) et (4.14).

Pour $Ra=10^3$, on remarque la présence de deux vortex de grande taille situés dans le centre, les particules de la cellule gauche tournent dans le sens trigonométrique et les particules de la cellule droite se déplacent dans le sens horaire, et deux autres vortex de taille moindre se trouvent à l'entrée de la cheminée.

Quand Rayleigh augmente progressivement ($Ra=10^4$ et $Ra=10^5$), les vortex du centre augmentent de taille et se déplacent vers le haut en occupant presque la totalité de la cheminée ceci permet le dégagement d'une plus grande quantité de chaleur vers la sortie. En plus, on remarque l'apparition de petites cellules de formes irrégulières et qui ont des sens de rotation différents le long du collecteur

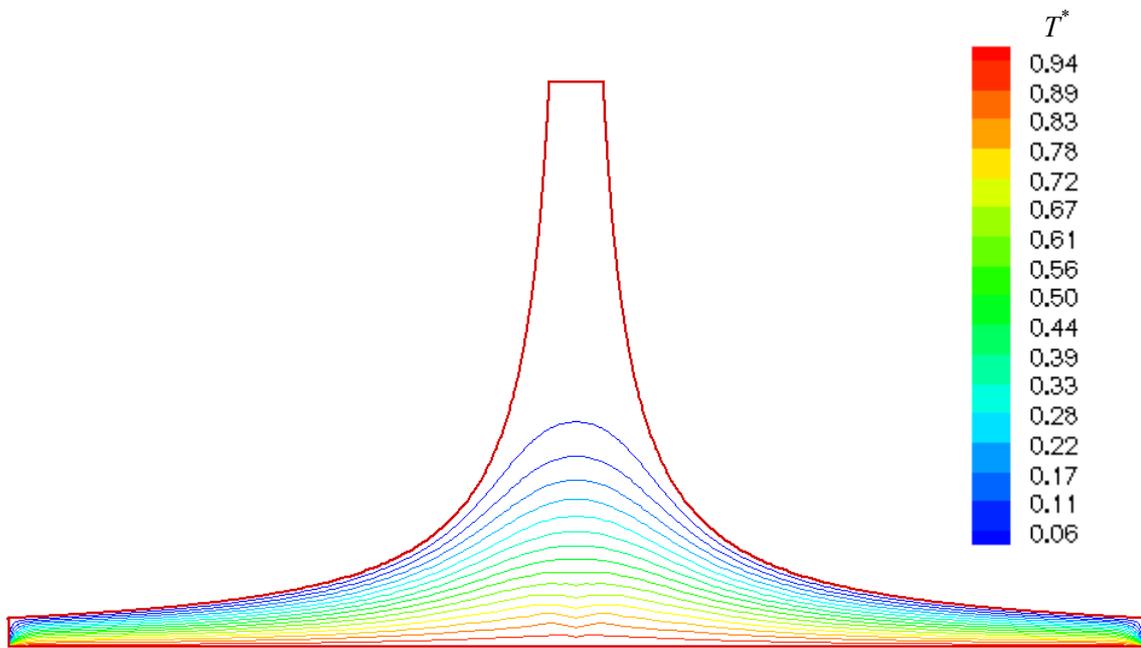


Figure 4.9 Isothermes pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^3$

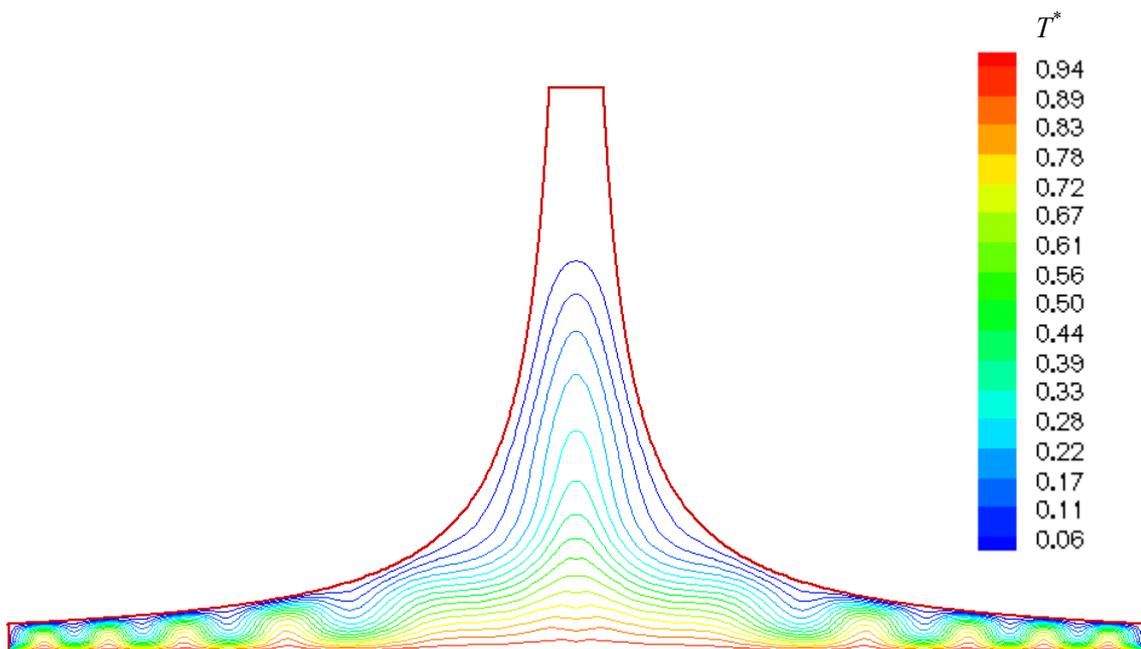


Figure 4.10 Isothermes pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^4$

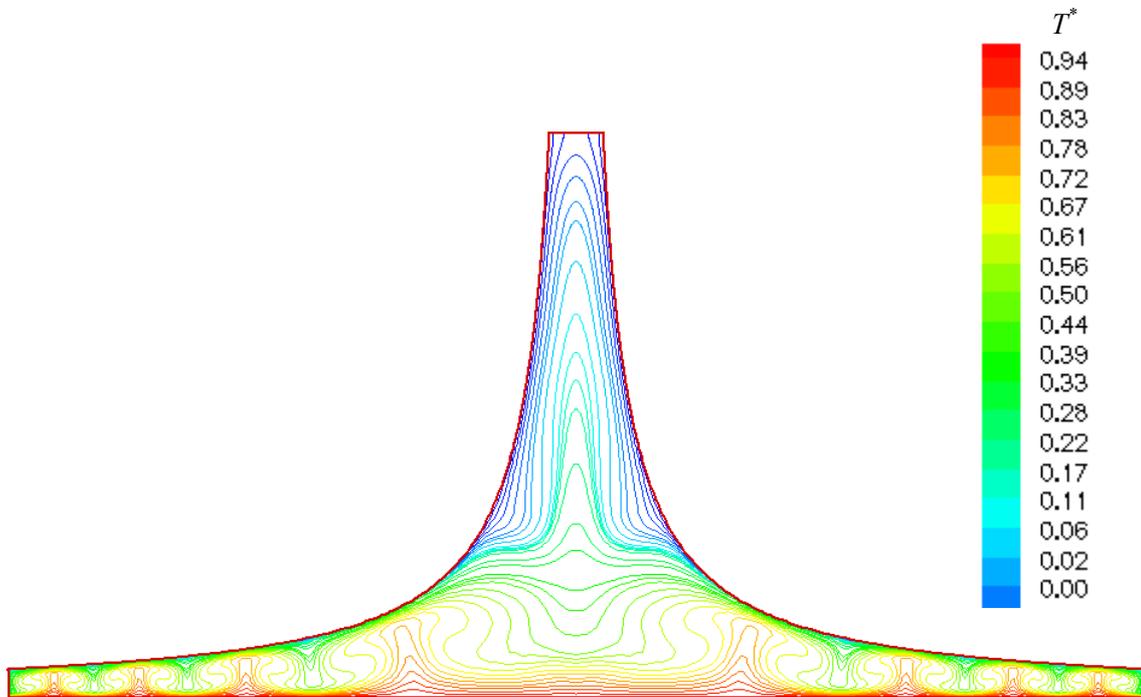


Figure 4.11 : Isothermes pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^5$

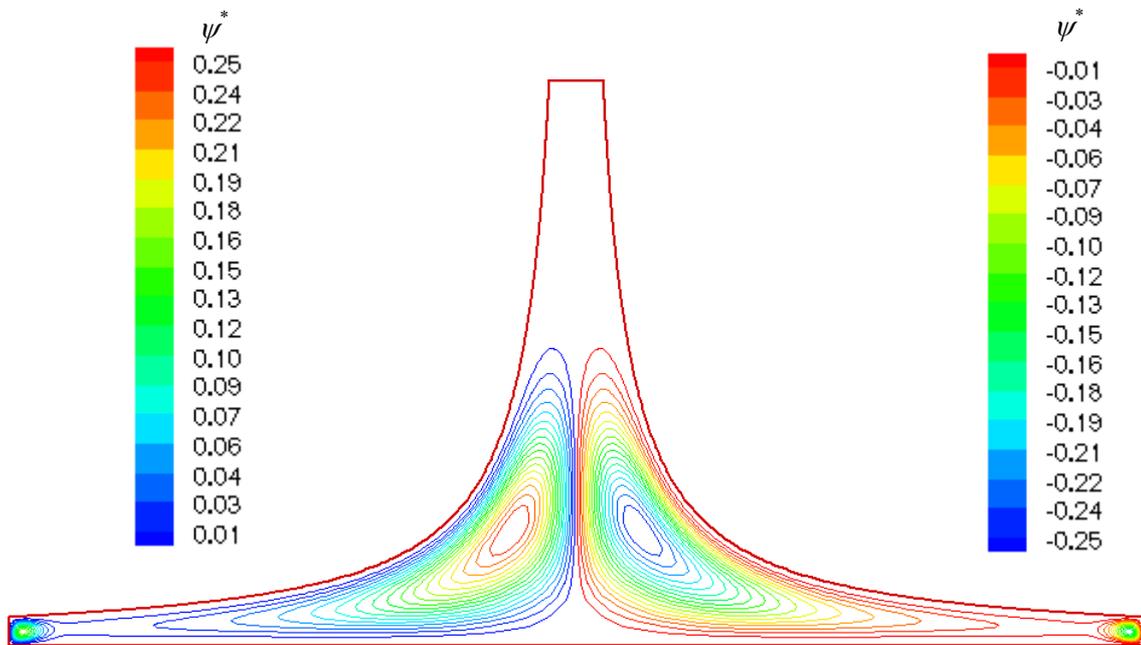


Figure 4.12 lignes de courant pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^3$

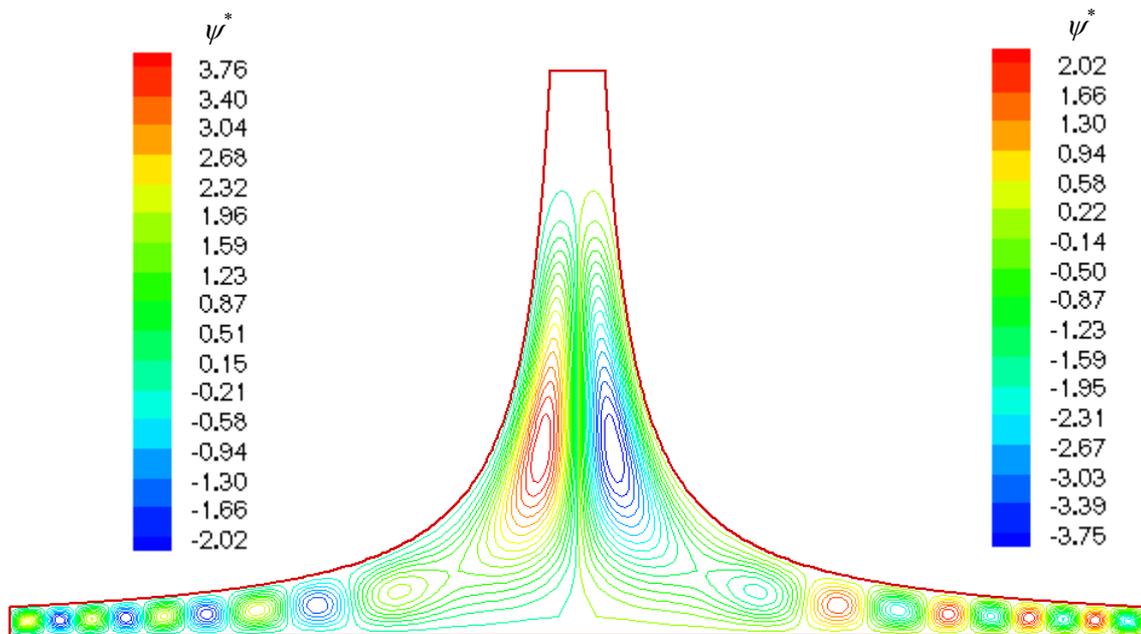


Figure 4.13 lignes de courant pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^4$

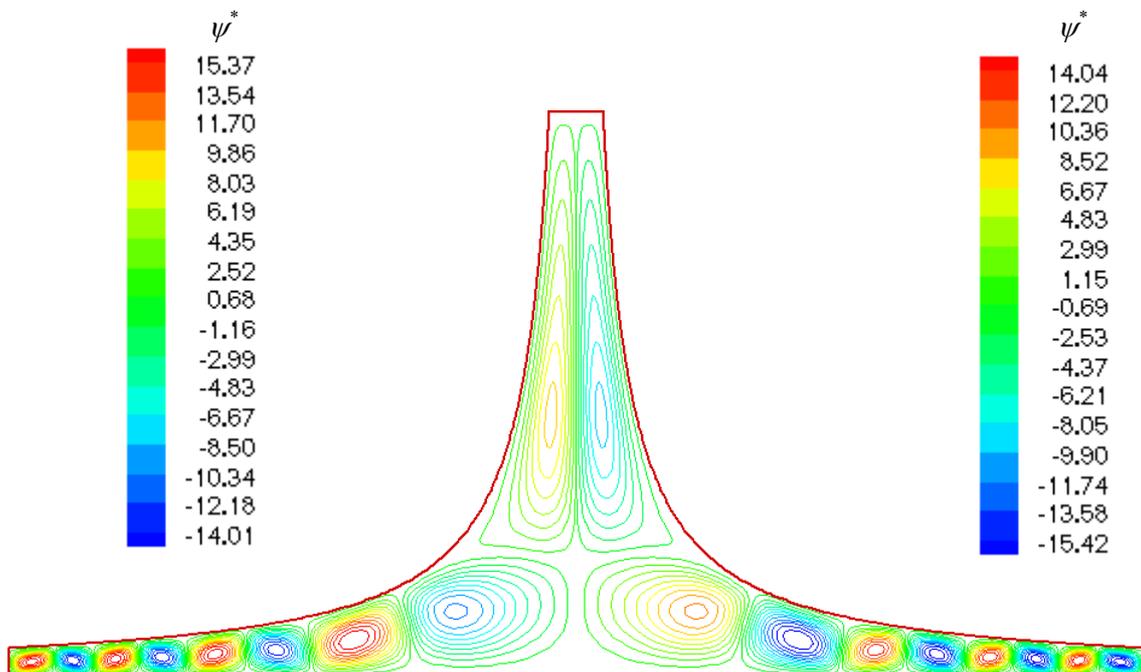


Figure 4.14 lignes de courant pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^5$

4.4.1.3. Troisième géométrie

❖ Isothermes

Lorsqu'on effectue les calculs pour la troisième géométrie, les figures (4.15), (4.16) et (4.17) représentent les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Dans ce cas là, l'effet de la géométrie apparaît nettement, l'espace entre la paroi chaude (le sol) et la paroi froide (le toit) augmente.

Quand $Ra=10^3$ la conduction reste le mode de transfert de chaleur dominant, mais les isothermes sont évidemment très décollés vers le haut de la cheminée, on constate également que la distance séparant deux isothermes successives augmente avec l'augmentation de l'espace entre le sol et le toit.

Cependant l'augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh $Ra=10^4$ et $Ra=10^5$, entraîne un transfert de chaleur par convection plus important. En effet, plus le nombre de Rayleigh est grand plus la vitesse du fluide s'accélère vers le haut de la cheminée.

❖ lignes de courants

Globalement, pour $Ra=10^3$ les contours de la fonction de courant sont quasiment semblables au cas précédent, sauf pour la taille des cellules, qui deviennent plus grandes.

Quand c'est la convection naturelle qui prédomine pour $Ra=10^4$ et $Ra=10^5$, on remarque l'apparition de cellules secondaires de formes irrégulières et qui ont des sens de rotation différents, mais de tailles plus grandes par rapport aux deux cas précédents pour les mêmes nombres de Rayleigh.

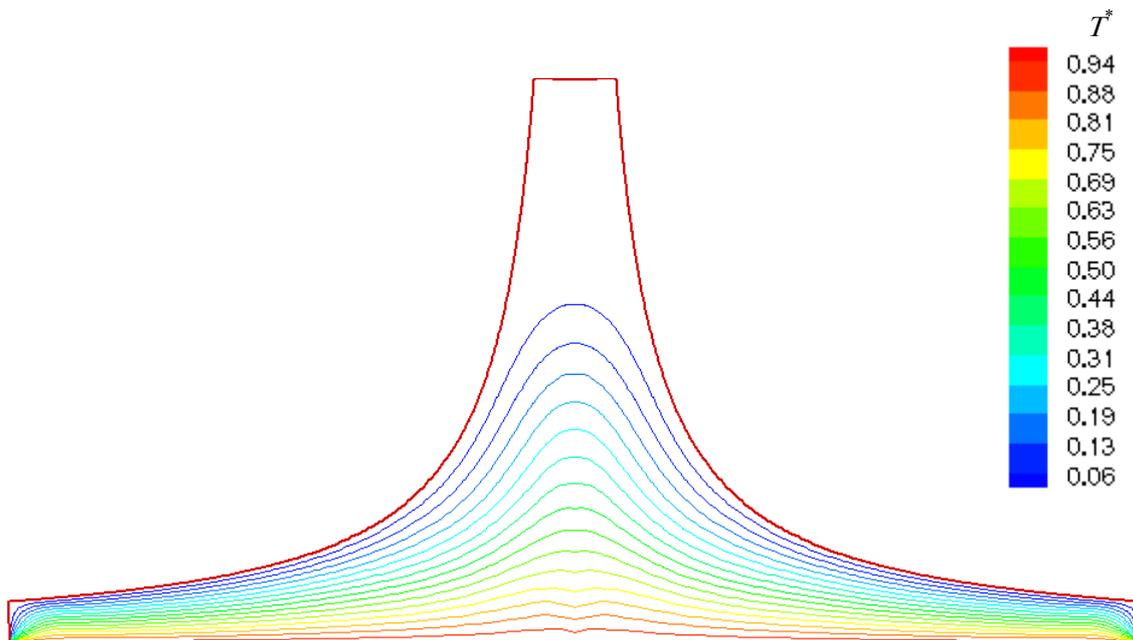


Figure 4.15 Isothermes pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^3$

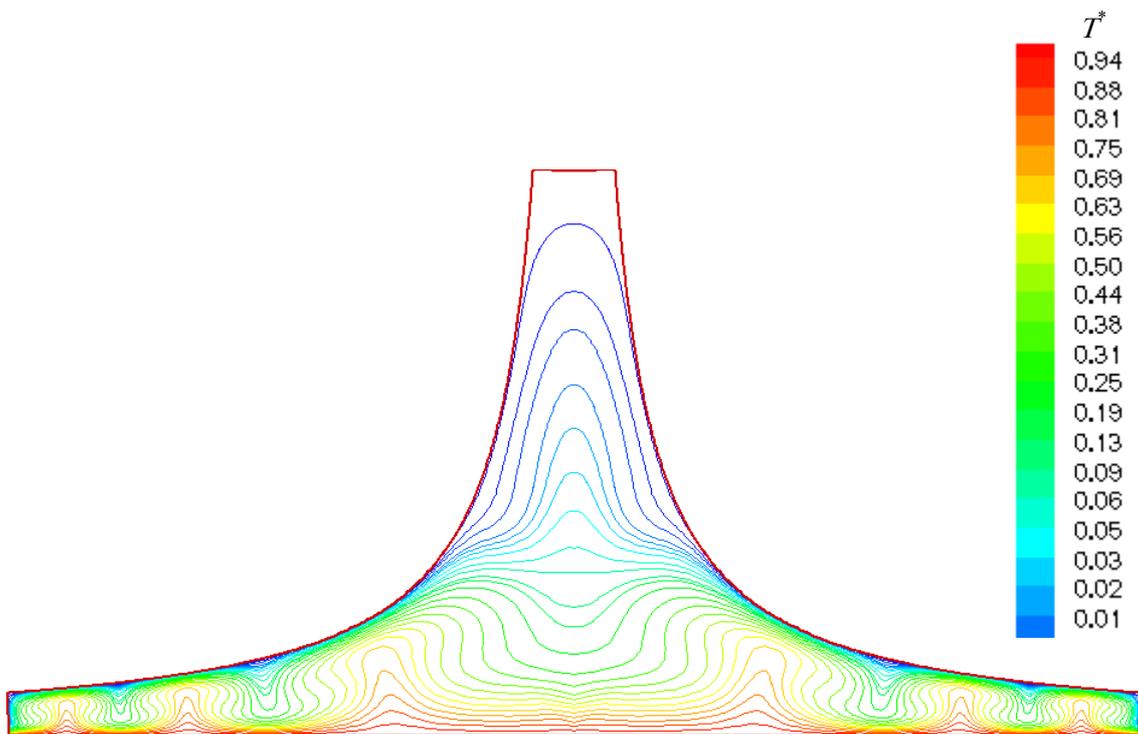


Figure 4.16 Isothermes pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^4$

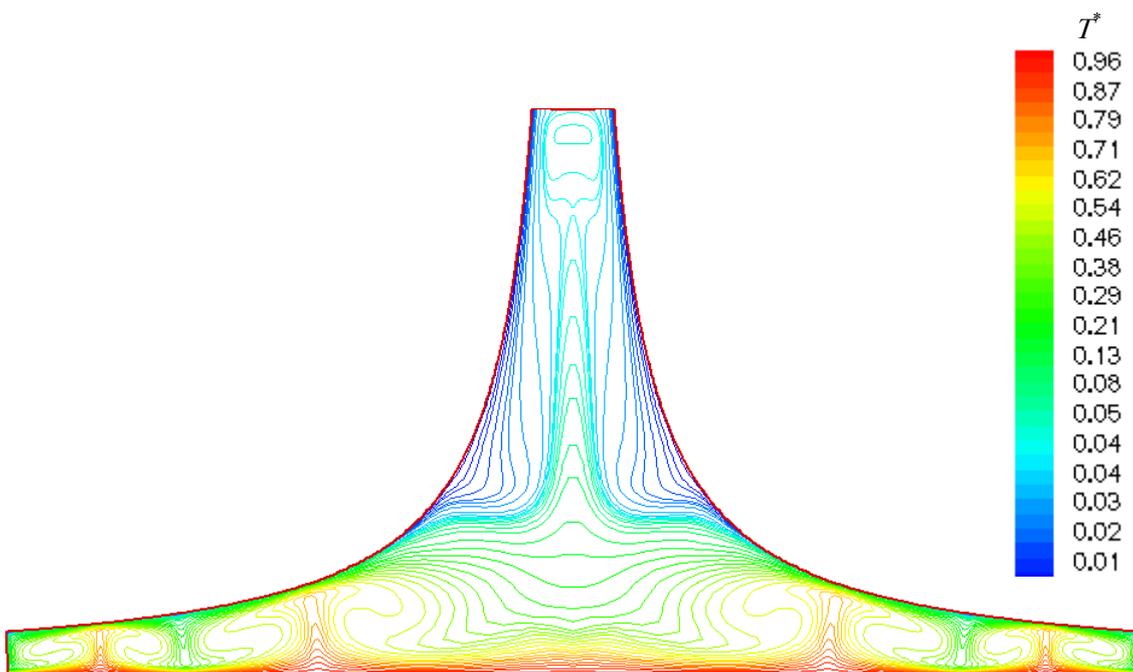


Figure 4.17 Isothermes pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^5$

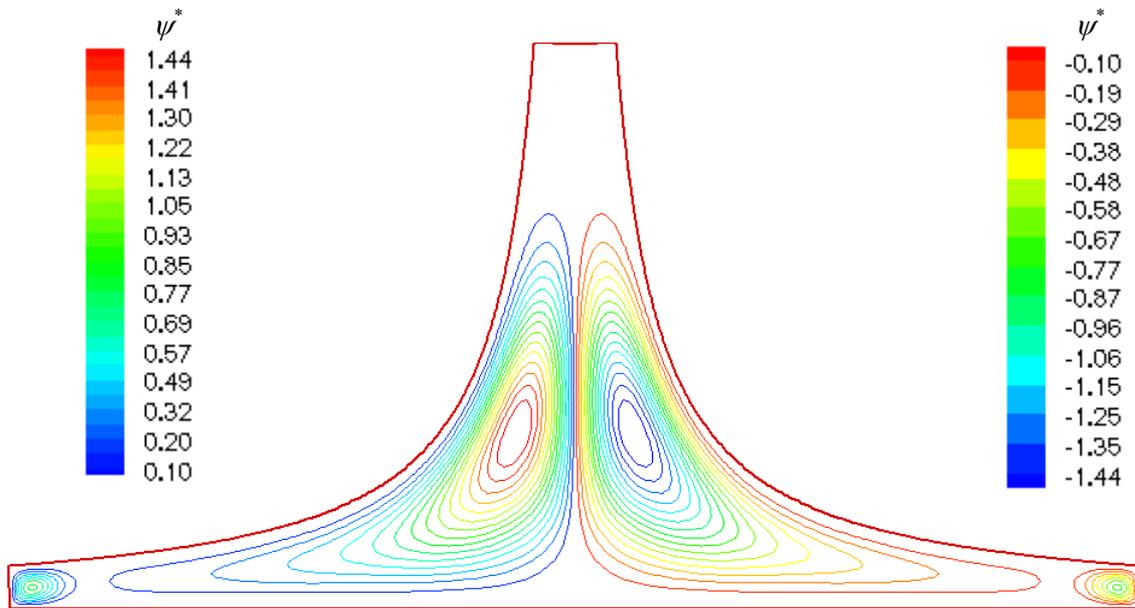


Figure 4.18 lignes de courant pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^3$

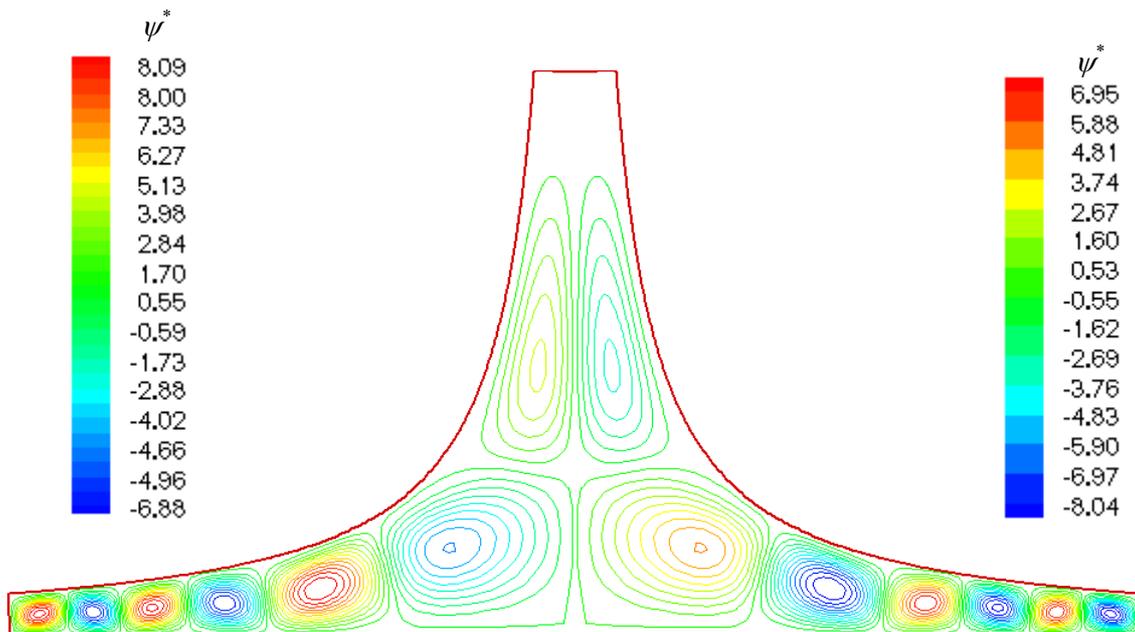


Figure 4.19 lignes de courant pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^4$

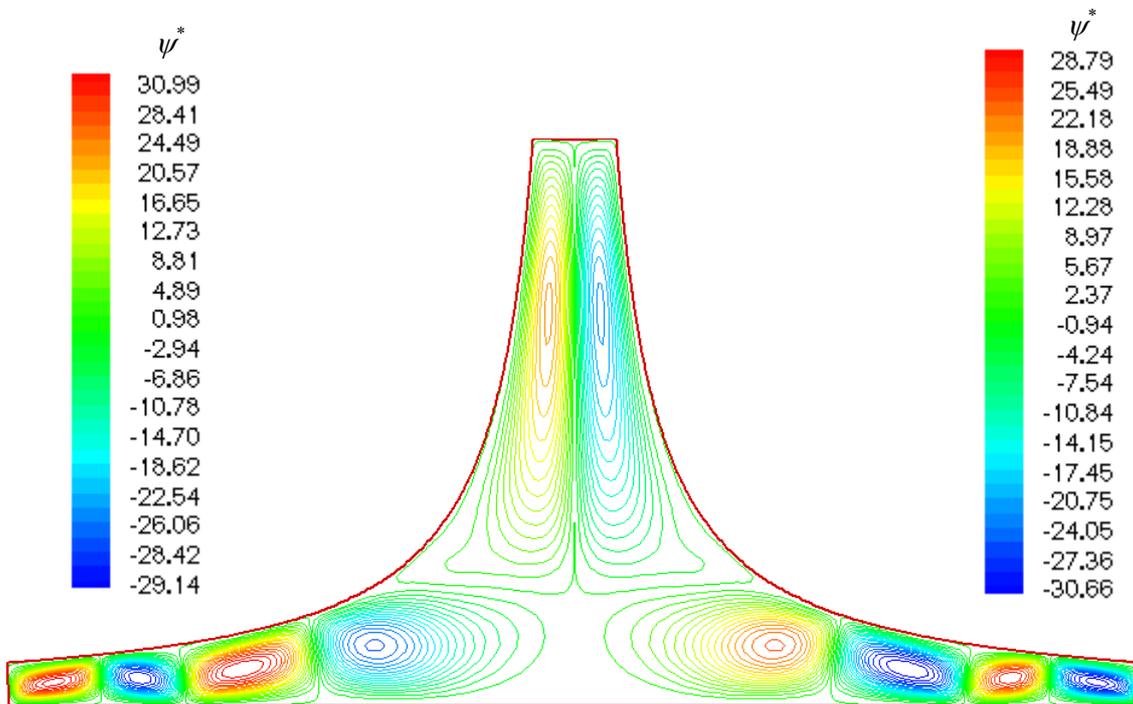


Figure 4.20 lignes de courant pour la 3^{ème} géométrie et $Ra=10^5$

4.4.2. Champs de vitesse

L'évolution de la vitesse à l'intérieur de la cheminée solaire dans la deuxième configuration géométrique considérée pour les différents nombres de Rayleigh choisis est représentée sur les figures (4.21), (4.22) et (4.23). On remarque que cette vitesse est importante au centre de la cheminée. On observe même des vitesses négatives sur la moitié supérieure du collecteur du côté du toit, ces vitesses négatives sont caractéristiques de la zone de recirculation observée dans le collecteur.

Le profil de vitesse indique une forte accélération du fluide au centre de la cheminée quand le nombre de Rayleigh augmente progressivement.

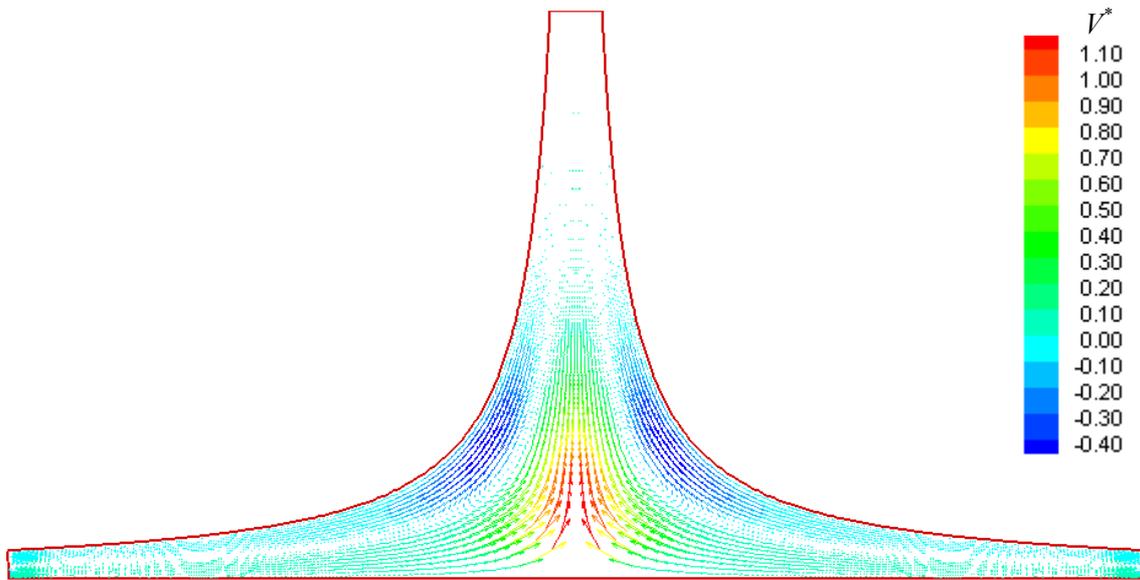


Figure 4.21 Vecteur vitesse pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^3$

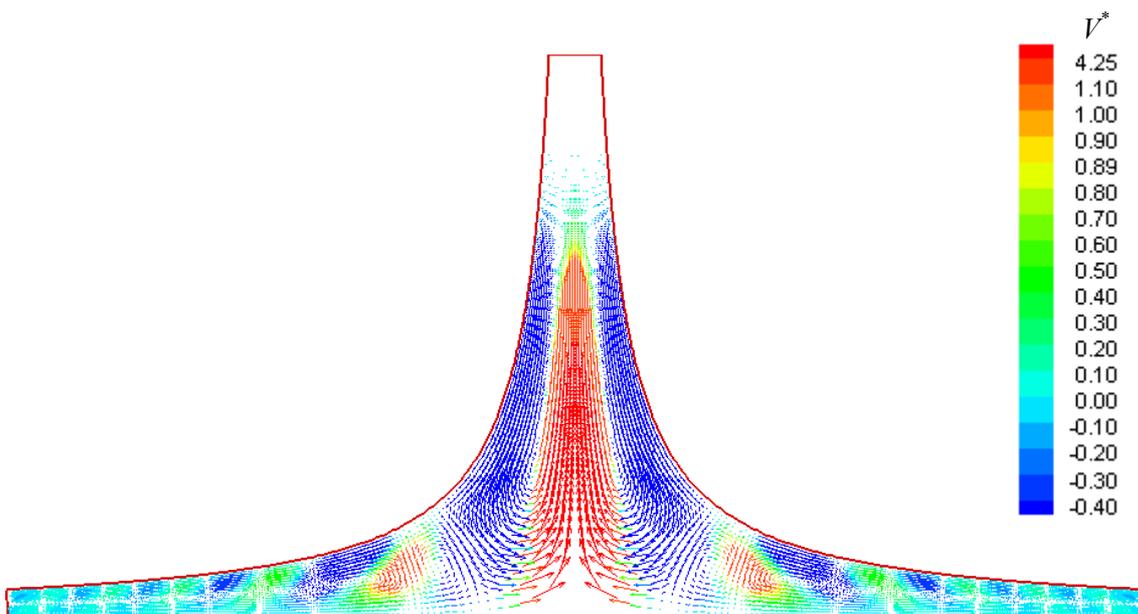


Figure 4.22 Vecteur vitesse pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^4$

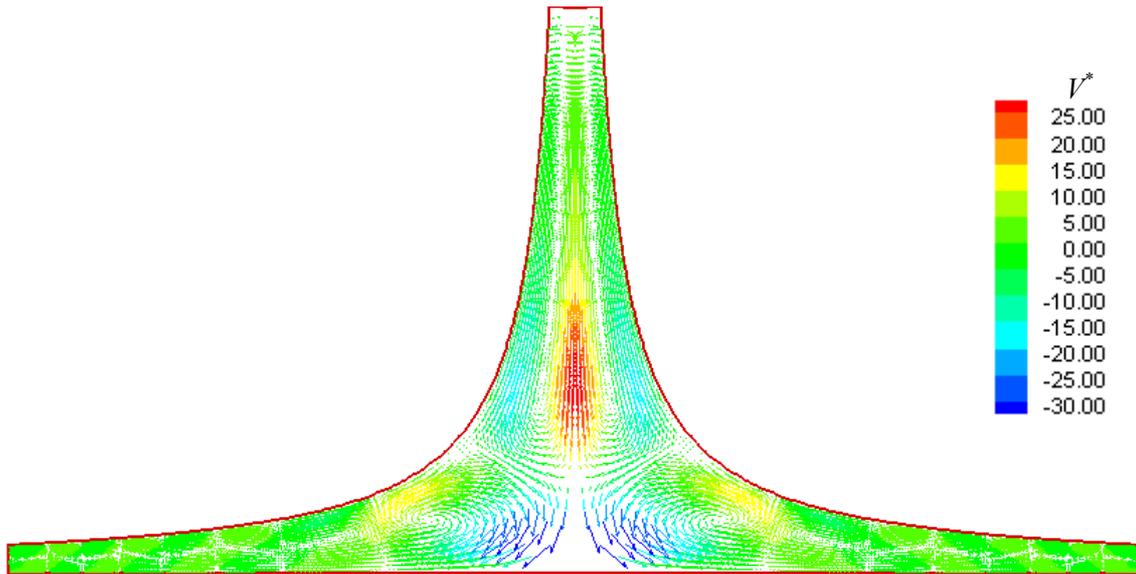


Figure 1.23 Vecteur vitesse pour la 2^{ème} géométrie et $Ra=10^5$

4.4.3. Distribution de la température dans la cheminée solaire

Les figures (4.24), (4.25) et (4.26) illustrent le profil de la température de l'air à différentes hauteurs du sol dans le collecteur et le long de la cheminée.

La température augmente dans le collecteur de l'entrée vers le centre, ceci est expliqué par le fait que l'air dans celui-ci s'échauffe près du sol et s'élève vers le toit pour se refroidir, comme l'illustre bien les trois niveaux de température bien distincts sur les figures susmentionnées. Et elle diminue dans la partie cheminée en allant vers la sortie.

Sur ces trois mêmes figures relatives aux trois géométries considérées, nous remarquons aussi que la température de l'air est plus importante dans la cheminée pour la troisième géométrie que dans les deux autres géométries.

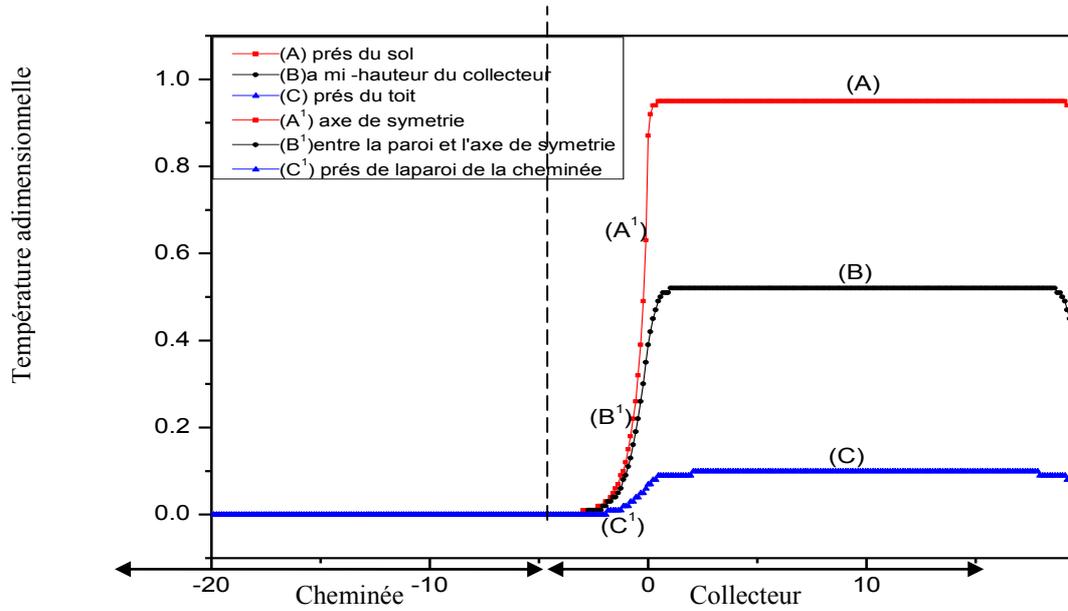


Figure 4.24 Le profil de température le long du collecteur et le long de la cheminée de la 1^{ère} géométrie pour $Ra = 10^3$

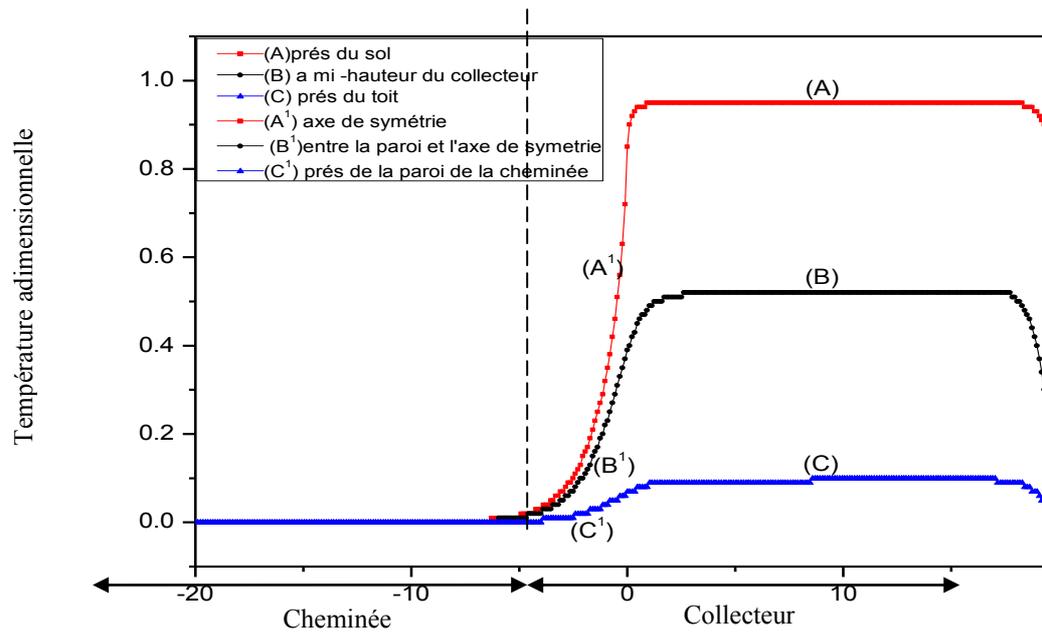


Figure 4.25 Le profil de température le long du collecteur et le long de la cheminée de la 2^{ème} géométrie pour $Ra = 10^3$

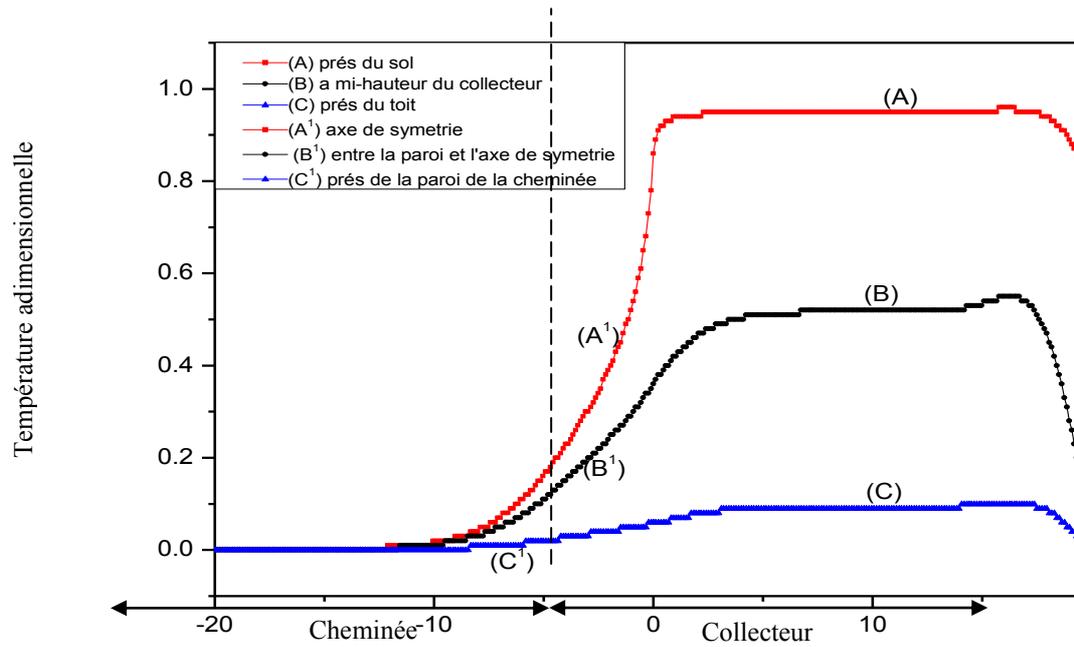


Figure 4.26 Le profil de température le long du collecteur et le long de la cheminée de la 3^{ème} géométrie pour $Ra = 10^3$

Conclusion

CONCLUSION

Nous avons étudié numériquement la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans une cheminée solaire, l'effet de la géométrie sur la convection naturelle a été analysé.

Pour cela nous avons opté pour un modèle basé sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur en utilisant la formulation vorticité-fonction de courant en coordonnées hyperboliques, ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement qui permet de déterminer les champs de températures et la distribution de la fonction de courant dans la cheminée, pour des conditions de chauffage isothermes pour les parois du collecteur (T_c pour le sol et T_f pour le toit, avec $T_c > T_f$).

Les résultats des simulations numériques ont montré, que la conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 10^4 pour la première configuration géométrique, et inférieurs à 10^3 pour la deuxième et la troisième configuration géométrique. La convection devient toujours prépondérante pour des nombres de Rayleigh supérieurs à 10^4 pour tous les cas traités.

Les résultats ont montré aussi que pour un nombre de Rayleigh et une température du sol uniforme donnés, les caractéristiques géométriques de la cheminée étudiée influent beaucoup sur le transfert, ce dernier est donc meilleur quand nous avons considéré le plus grand espace entre le sol et le collecteur.

Avec le développement des moyens de calculs la simulation numérique devient de plus en plus un outil très intéressant pour la prédiction des phénomènes pouvant se produire à l'intérieur des cheminées solaires, nous pouvons donc à ce titre envisager pour des investigations futures des études de situations plus intéressantes et plus proches de la réalité, telles que :

- Etude numérique tridimensionnelle des transferts thermiques dans ces systèmes, en utilisant la formulation en variables primitives (vitesse-pression)
- Analyse thermo-hydrodynamique en utilisant les modèles de turbulence
- Simulation numérique des champs dynamique et thermique au sein d'une cheminée solaire en présence des plantes
- Etude des transferts de chaleur et de masse en présence du rayonnement solaire
- Etude de l'optimisation thermo-économique des systèmes
- Analyse des effets climatiques extérieurs sur le fonctionnement d'une cheminée solaire

ANNEXE

ANNEXE

Méthode itérative pour la résolution des systèmes linéaires

1. Généralités

On s'intéresse à la solution du système linéaire de n équation à n inconnues:

$$y = Ax$$

➤ Notations

On désignera par A_{ij} l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A , et par y_i (resp. x_j) la $i^{\text{ème}}$ (resp. $j^{\text{ème}}$) composante de y (resp. x).

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

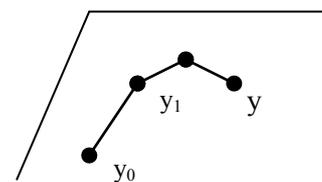
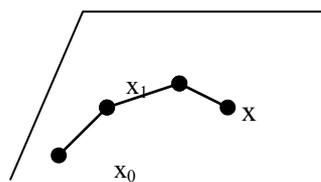
➤ Méthode

Il n'existe pas de méthode universelle pour déterminer numériquement la solution: le choix est guidé par la nature de la matrice, la mémoire et le nombre d'opérations nécessaires pour l'atteindre.

- 1) les méthodes directes donnent la solution exacte en un nombre fini d'opérations (en l'absence d'erreurs d'arrondi).
- 2) les méthodes itératives engendrent une suite finie ou infinie de vecteurs qui tend vers la solution.

L'idée des méthode itératives est de former une suite $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ telle que les erreurs successives $\|x - x^{(k)}\|^2$ forment une suite décroissante convergeant vers zéro:

\overline{A}



On engendre alors une suite image $\{y^{(k)}\}_{k \geq 0}$ convergeant vers y .

Dans le cas des méthodes itératives linéaires, $x^{(k+1)}$ est une fonction affine de $x^{(k)}$ à travers l'itération (point fixe):

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + d$$

Une manière assez générale d'obtenir une telle suite est d'utiliser un splitting de la matrice A sous la forme:

$$A = M - N$$

De sorte que $y = Ax$ s'écrit alors $Mx = Nx + y$ auquel on associe l'itération :

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + y$$

C'est-à-dire :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}y$$

Ce qui suppose que M soit inversible.

2. Gauss-Seidel

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & 0 \\ M & M & M & O & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$-L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & K & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & K & 0 \\ M & M & M & O & M \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & K & 0 \end{pmatrix} \quad -U = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & K & A_{1n} \\ 0 & 0 & A_{23} & K & A_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & K & A_{3n} \\ M & M & M & O & M \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel est associée au splitting:

$$A = D - L - U$$

Avec:

$$M = D - L \text{ et } N = U$$

De sorte que l'itération $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + y$ s'écrit ici:

$$Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + y$$

C'est-à-dire :

$$\forall i=1, 2, 3, \dots, n \quad A_{ii} x_i^{(k+1)} = \left(- \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} + y_i \right)$$

A partir d'un vecteur $x^{(0)}$ on construit la suite $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ de la manière suivante:

$$\forall i=1, 2, \dots, n \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Cette méthode n'est définie que si les A_{ii} sont non nuls !

3. SOR

On peut généraliser les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel en introduisant un paramètre de relaxation ω pour former une combinaison linéaire:

Jacobi: $\forall i=1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

Gauss-Seidel: $\forall i=1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

La généralisation de Jacobi n'est pas utilisée.

La généralisation de Gauss-Seidel donne la méthode de SOR.

Le paramètre de relaxation doit être compris entre 0 et 2:

$\omega < 1$ sous-relaxation

$\omega > 1$ sur-relaxation

Son optimum est:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_j^2}}$$

Où ρ_j est le rayon spectrale de la matrice $J = D^{-1}(L+U)$ de la méthode de Jacobi.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] W. Haaf, K. Friedrich, G. Mayr, and J. Schlaich, Solar Chimneys: Part I: Principle and Construction of the Pilot Plant in Manzanares, *International Journal of Solar Energy*, 2, No. 1, pp 3–20, (1984).
- [2] L.B. Padki, M.M., Sherif, S.A., Solar chimney for medium-to large scale power generation, *Proceedings of the Manila International Symposium on the Development and Management of Energy Resources*, Manila, (1989).
- [3] W. Haaf, Preliminary Test Results from the Manzanares Pilot Plant, *International Journal of Solar Energy*, 2, No. 2, pp. 141–161, (1983)
- [4] L.B. Mullett, The solar chimney overall efficiency, design and performance. *International Journal Ambient Energy* 8 (1), pp. 35–40, (1987).
- [5] Sherif, S.A, L.B. Padki , Solar chimney for power generation in rural areas, *Seminar on Energy Conservation and Generation Through Renewable Resources*, Ranchi, India, pp. 91–96.
- [6] X. Zhou , J. Yang , B. Xiao , G. Hou, Experimental study of temperature field in a solar chimney power setup, *Applied Thermal Engineering* 27, pp. 2044–2050, (2007).
- [7] A.J. Gannon, T.W. von, Backström, Compressible flow through solar power plant chimneys, *International Journal of Solar Energy Engineering*, vol 122-3, (2000).
- [8] T.W. von, Backström A.J. Gannon, Solar chimney turbine characteristics, *Solar Energy* 76, (2004).
- [9] E. Bilgen F. Denantes, Counter-rotating turbines for solar chimney power plants, *Solar Energy* 79, (2005)
- [10] M.A. dos S. Bernardes, A. Vob et G. Weinrebe, Thermal and technical analyses of solar chimneys, *Solar Energy* 75, pp. 511–524, (2003).
- [11] M. Tingzhen, L. Wei, Yanbin, G. Xuhu, P. Yuanb, Numerical simulation of the solar chimney power plant systems coupled with turbine, *Renewable Energy* 33, 897–905, (2008).

- [12] A.J. Gannon T.W.et von Backström, Solar Chimney Cycle Analysis With Loss and Solar Collector Performance , Journal of Solar Energy Engineering, vol1, pp.122-3,(2000).
- [13] J.P. Pretorius, D.G. Kröger, Critical evaluation of solar chimney power plant performance, Solar Energy, Volume 80, Issue 5, May 2006, pp.535-544, (2005).
- [14] E.Bilgen et J.Rheault, Solar chimney power plants for high latitudes, Solar Energy 79, pp. 449–458,(2005)
- [15] A.Koonsrisuk, T.Chitsomboonont, A single dimensionless variable for solar chimney power plant modeling, Solar Energy (2009).
- [16] R.M.Valle et M.F.Cortez, numerical analysis of natural laminar convection in a radial solar heater,Int.J.Therm.Sci.38,pp.42-50,(1999).
- [17] T. Ming, W. Liu, Y.Pan, G. Xu. Numerical simulation of the solar chimney power plant systems coupled with turbine Renewable Energy 33, pp.897–905, (2008).
- [18] T. Chergui, S. Larbi, A. Bouhdjar Thermo-hydrodynamic aspect analysis of flows in solar chimney power plants — A case study. Renewable and Sustainable Energy Reviews. (2010)
- [19] S.V. Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere, Washington, D, C. (1980)
- [20] E.F. Nogotov, Applications of Numerical Heat Transfer, McGraw-Hill book company, New York, (1978).
- [21] E. Saadjan, Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques, Polytechnica, Paris, (1998)
- [22] P.J. Roache, Computational Fluid Dynamics, Hermosa (1982).

Sites Web

- Enviromission www.enviromission.com.au
- Schlaich Bergerman and Partners www.sbp.de
- Solar Mission Technologies Inc. www.solarmissiontechnologies.com
- Australian Institute of Energy www.aie.org.au

INTITULE

Processus de la convection naturelle laminaire dans une cheminée solaire

RESUME

L'auteur propose dans ce travail l'étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une cheminée solaire. Le fluide véhiculé est l'air ($P_r = 0.702$), considéré comme un fluide newtonien et incompressible, en utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant en coordonnées hyperboliques. Nous avons pris comme conditions de chauffage des parois isothermes pour notre collecteur (T_c pour le sol et T_f pour le toit, avec $T_c > T_f$).

La résolution de ces équations est basée sur un schéma de discrétisation aux volumes finis. Nous avons examiné l'effet de la géométrie du système sur le phénomène de la convection naturelle dans la cheminée. Finalement, les résultats de la simulation ont été donnés sous forme, de champs de température et de vitesse.

Mots-clés: convection naturelle, cheminée solaire, formulation vorticité-fonction de courant.

TITLE

Laminar natural convection process in a solar chimney

ABSTRACT

The author proposes in this work, the numerical study of natural convection in a solar chimney. The Transported fluid is the air ($Pr = 0.702$), it is considered as a Newtonian and incompressible fluid, by using the Boussinesq approximation, the governing equations are taken to be in the vorticity-stream function formulation in hyperbolic coordinates. For heating conditions we suppose an isothermal walls of the collector (T_c for the ground and T_f for the roof, with $T_c > T_f$).

Solution of the defined equations has been done with numerical control volume method. We examined the effect of the system geometry on the natural convection phenomenon in the solar chimney. Finally, the simulation results have been given as airflows and temperature patterns.

Key words: natural convection, solar chimney, vorticity-stream function formulation.

العنوان

ظاهرة الحمل الحراري الطبيعي الرقائقي داخل البرج الشمسي

ملخص

عملنا يتعلّق بالدراسة العددية لانتقال الحرارة بواسطة الحمل الطبيعي داخل برج شمسي المائع المحمول هو الهواء ($Pr=0.702$) الذي نعتبره نيوتوني غير قابل للإنضغاط يتدفق بصفة رقائقي . المعادلات المتحكممة في هذا السريان تُأخذ بصيغ: التدويم - دوال التيارات في جملة للإحداثيات ، باستعمال تقر ب بوسنسك' بالنسبة لشروط التسخين افترضنا درجات حرارة ثابتة لجدران مجمع البرج (Γ_c) بالنسبة للأرض و Γ_f بالنسبة لسقف المجمع حيث: $T_c > T_f$.

لحل هذه المعادلات استعملنا طريقة الهجوم المنتهي ، فحسنا تأثير هندسة النظام على ظاهرة الحمل الحراري الطبيعي داخل البرج . أخيرا نتائج المحاكاة أعطيت كمخططات للحرارة و التيارات .

المفاتيح الحمل الطبيعي ، البرج الشمسي ، صيغة التدويم - دوال التيارات