REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :………….
Série :……………….

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de **Magister**
En Physique
Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

Etude de Systèmes Quantiques Relativistes par l'Intégrale de Chemin

Par
Mohamed Améziane SADOUN

Soutenu le 27 / 02 / 2006

Devant le jury:

Président **:**	**F. BENAMIRA**	M.C., Univ. Mentouri, Constantine
Rapporteur **:**	**L. GUECHI**	Prof., Univ. Mentouri, Constantine
Examinateurs **:**	**O. BENABBES-SAHLI**	M.C., Univ. Mentouri, Constantine
	S. R. ZOUZOU	M.C., Univ. Mentouri, Constantine

خطبة الحاجة

بسم اللّه الرّحمان الرّحيم

إن الحمد لله نحمده و نستعينه ونستغفره ونعوذ بالله من شرور أنفسنا ومن سيئات أعمالنا من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادي له وأشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له وأشهد أن محمدا عبده ورسوله

(يا أيها الذين آمنوا اتقوا الله حق تقاته ولا تموتن إلا وأنتم مسلمون).

(يا أيها الناس اتقوا ربكم الذي خلقكم من نفس واحدة وخلق منها زوجها وبث منهما رجالا كثيرا ونساء واتقوا الله الذي تساءلون به والأرحام إن الله كان عليكم رقيبا).

(يا أيها الذين آمنوا اتقوا الله وقولوا قولا سديدا . يصلح لكم أعمالكم ويغفر لكم ذنوبكم ومن يطع الله ورسوله فقد فاز فوزا عظيما).

أما بعد فإن خير الحديث كتاب الله وخير الهدي هدي محمد صلى الله عليه وسلم وشر الأمور محدثاتها وكل محدثة بدعة وكل بدعة ضلالة وكل ضلالة في النّار.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

En 1933, Dirac a fait l'observation que l'action joue un rôle central en mécanique classique. Il a considéré que la formulation lagrangienne de la mécanique classique est plus fondamentale que la formulation hamiltonienne, mais celle ci semblait n'avoir aucun rôle important en mécanique quantique comme on la connaît à cette époque. Il a pensé sur la façon dont cette situation pourrait être rectifiée, et il est arrivé à la conclusion que (en langage plus moderne) le propagateur de la mécanique quantique est proportionnel à la quantité $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right]$, où S est l'action classique évaluée le long du chemin classique [1].

En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac, et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique, basée sur le fait que le propagateur, solution de l'équation de Schrödinger et qui définit l'amplitude de la probabilité d'évolution d'une particule du point $\vec{r}_1$ à l'instant t_1 au point $\vec{r}_2$ à l'instant t_2, peut être écrit comme une somme d'une infinité d'amplitudes partielles associées à chacun des chemins noté Γ qui relie $(\vec{r}_1, t_1)$ et $(\vec{r}_2, t_2)$. Chaque chemin contribue au propagateur par la quantité $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_\Gamma\right]$, où S_Γ est l'action classique calculée le long du chemin Γ, c'est à dire $S_\Gamma = \int_{(\Gamma)} L\left(\vec{r}, \vec{P}, t\right) dt$, où $L\left(\vec{r}, \vec{P}, t\right)$ est le Lagrangien de la particule. Feynman inclut dans cette action le principe de moindre action [2] pour ignorer les chemins autres que ceux très proches du chemin classique Γ_0 où l'action est minimale. Ainsi, tandis que Dirac considérait seulement le chemin classique, Feynman a prouvé que tous les chemins contribuent, dans un sens où la particule quantique peut suivre tous les chemins, et les amplitudes associées à ces chemins s'ajoutent selon le principe de superposition habituel de la mécanique quantique. Ses idées étaient apparues dans sa première publication [3] en 1948. Elles sont intéressantes en ce qui concerne l'établissement du lien entre la mécanique quantique et la mécanique classique, et puisque le raisonnement a été inscrit dans l'espace-temps, la formulation des intégrales de chemin est devenue un outil indispensable dans divers domaines de la physique [11], tels que la physique des particules, la physique atomique et moléculaire.

En raison de la difficulté bien connue d'obtenir une forme gaussienne pour un grand nombre de systèmes physiques quantiques, cette technique n'a pu connaître un développement appréciable qu'après 1978 quand Duru et Kleinert ont pu donner une solution exacte pour le système coulombien [4], en calculant la fonction de Green à l'aide d'une transformation canonique qui donne la forme Gaussienne dans l'espace des phases en paramétrisant le parcours d'intégration via l'introduction d'un nouveau paramètre temps, et à l'aide de la transformation de Kustaanheimo-Stiefel [5]. Duru et Kleinert ont pu transformer l'intégrale de chemin de l'atome d'hydrogène en coordonnées polaires dans R^3 en une intégrale de chemin dans l'espace R^4 relative à deux oscillateurs harmoniques indépendants à deux dimensions [6]. Depuis, cette technique a permis de résoudre des problèmes plus compliqués dans divers systèmes de coordonnées [7]. Des exemples de problèmes non relativistes résolus exactement par cette transformation de Duru-Kleinert sont donnés dans les références [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Des généralités sur ce formalisme sont présentées dans le deuxième chapitre où nous avons fait un rappel succinct concernant l'introduction d'une transformation spatio-temporelle dans l'écriture du propagateur afin de le rendre calculable. Dans le troisième chapitre, nous abordons le problème d'une particule soumise au potentiel de Coulomb entouré d'un nouveau potentiel en forme d'anneau en appliquant la transformation de Kustaanheimo-Stiefel. La fonction de Green est construite sous une forme compacte. les spectres d'énergie ainsi que les fonctions d'onde correspondant aux états liés et aux états continus sont respectivement obtenus à partir des pôles et des résidus de la fonction de Green. Ensuite, dans le quatrième chapitre, nous donnons un traitement pour le potentiel écranté effectif déformé. A l'aide d'une transformation spatio-temporelle appropriée, et en particulier pour $q \geq 1$, nous construisons la fonction de Green à partir de laquelle le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés sont déduits. Le potentiel de Hulthén est considéré comme un cas particulier. Le cinquième chapitre concerne l'étude d'un potentiel déformé dépendant de quatre paramètres qui sert comme modèle de description des interactions inter-atomiques dans les molécules diatomiques. Suivant les valeurs du paramètre de déformation q, deux cas peuvent se présenter. Pour les valeurs positives de q, nous retrouvons une généralisation du potentiel de Hulthén déformé. En particulier pour $q \geq 1$, et à l'aide de la même transformation spatio-temporelle utilisée dans le chapitre précédent, la fonction de Green est construite. A partir des pôles et des résidus de cette dernière, nous déduisons le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondants aux états liés. Une forme générale du potentiel de Woods-Saxon déformé est obtenue pour $q < 0$. Dans ce cas, en suivant la même procédure que dans le cas précédent avec une autre transformation spatio-temporelle, les fonctions d'onde non normalisées sont déduites de l'expression de la fonction de Green. L'équation donnant le spectre d'énergie relatif au potentiel de Woods-Saxon généralisé est obtenue en imposant aux fonctions d'onde des conditions aux limités bien déterminées. Le sixième chapitre est consacré à la discussion du comportement des solutions pour une particule relativiste sans spin soumise à l'action d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire du type Rosen-Morse déformé. En supposant le potentiel scalaire égal au potentiel vecteur, la fonction de Green est explicitement construite. Le spectre d'énergie discret ainsi que les fonctions d'onde sont obtenus. Le puits de potentiel de Rosen-Morse standard, le potentiel d'Eckart et leurs versions PT-symétriques sont tous considérés comme des cas particuliers. Le septième et dernier chapitre est destiné au traitement exact du problème d'une particule relativiste sans spin dans un potentiel vecteur et un potentiel scalaire du type Hulthén déformé. Nous évaluons d'abord la fonction de Green pour des potentiels réels, en utilisant une transformation de Duru-Kleinert appropriée. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés sont alors déduits. Dans ce cas, les potentiels vecteur et scalaire de Hulthén standard et le potentiel vecteur de Hulthén standard sont traités comme des cas particuliers. Enfin, nous terminons ce chapitre par la discussion des versions complexes du potentiel vecteur de Hulthén déformé.

Chapitre 2

Formalisme des intégrales de chemin

2.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est de familiariser le lecteur avec l'approche des intégrales de chemin qui offre un point de vue alternatif aux méthodes standard de Schrödinger et d'Heisenberg. Une approche qui est devenue essentielle à une compréhension profonde de la théorie quantique des champs et de ses applications qui vont de la physique des interactions fondamentales à la mécanique statistique des transitions de phase ou aux propriétés des gaz quantiques.

L'intégrale de chemin est un outil très puissant pour l'étude de la mécanique quantique. Elle établit un lien très explicite entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

La formulation de la mécanique quantique basée sur l'intégrale de chemin peut paraître plus compliquée du point de vue mathématique, mais elle est bien adaptée à l'étude de systèmes à un grand nombre de degrés de liberté où un formalisme du type équation de Schrödinger est beaucoup moins utile.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la construction d'une intégrale de chemin pour une particule soumise à l'action d'un potentiel $V(x)$ quelconque dans l'espace des phases à l'aide de la procédure de transformation spatio-temporelle.

2.2 Le Propagateur

2.2.1 Définition

Considérons une particule en mouvement sous l'action d'un potentiel $V(x)$ allant du point $A(x', t')$ au point $B(x'', t'')$. Le chemin de la particule est représenté par une fonction du temps $x(t)$ avec $x(t') = x'$ et $x(t'') = x''$. Le mouvement de la particule est régi par le Lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x,t). \tag{2.1}$$

Le chemin classique noté par $\bar{x}(t)$ est celui pour lequel l'action de la particule donnée par

$$S = \int_{t'}^{t''} L(x, \dot{x}, t)\, dt, \tag{2.2}$$

est minimale. En d'autres termes, la variation de l'action

$$\delta S \equiv S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}], \tag{2.3}$$

s'annule au premier ordre en δx. Or

$$\begin{aligned} S[x+\delta x] &= \int_{t'}^{t''} L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)\, dt \\ &= \int_{t'}^{t''} \left(L(x,\dot{x},t) + \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \\ &= S[x] + \int_{t'}^{t''} \left(\delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donc

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} \delta x \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt, \tag{2.5}$$

où le terme $\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t'}^{t''}$ s'annule du fait que $x(t') = x(t'') = 0$. Comme δx est arbitraire, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2.6}$$

qui est l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement de la particule.

Au lieu de considérer seulement la trajectoire classique, nous allons maintenant considérer tous les chemins possibles que peut empreinter la particule pour aller du point A au point B. On associe à chacun de ces chemins une amplitude de probabilité partielle $\phi_\Gamma[x(t)]$ donnée par

$$\phi_\Gamma[x(t)] = N \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_\Gamma[x(t)]\right], \tag{2.7}$$

où N est une constante de normalisation et S_Γ est l'action associée au chemin Γ.

Par définition, l'amplitude totale de la probabilité de transition du point A au point B, dit propagateur et noté par $K(B, A)$, est la somme de toutes les amplitudes partielles associées aux différents chemins. Nous écrivons donc

$$K(B, A) = \sum_\Gamma \phi_\Gamma[x(t)], \tag{2.8}$$

et la probabilité de transition est donnée par

$$P(B/A) = |K(B, A)|^2. \tag{2.9}$$

Comme les chemins sont très proches les uns des autres, la somme peut être remplacée par une intégrale. Ainsi, nous obtenons l'expression du propagateur

$$\begin{aligned} K(B, A) &= \int_\Gamma D_\Gamma \phi_\Gamma[x(t)] \\ &= \int_{x(t')}^{x(t'')} Dx(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_\Gamma[x(t)]\right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

où D_Γ représente la mesure.

2.2.2 Forme discrète du propagateur

Le propagateur qui gouverne l'évolution d'une particule de masse m entre les points $A(x', t')$ et $B(x'', t'')$ a été défini par Feynman de la façon suivante [3] :

$$K(x'', t''; x', t') = \int Dx(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T L(x, \dot{x}, t)\, dt\right], \tag{2.11}$$

où $T = t'' - t'$ et le Lagrangien L est donné par

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x). \tag{2.12}$$

En subdivisant l'intervalle de temps T en $(N+1)$ intervalles élémentaires égaux tel que $\varepsilon = t_n - t_{n-1} = T/(N+1)$, et en utilisant les notations habituelles $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \bar{x} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ et $x'' = x(t_{N+1}), x' = x(t_0)$, l'expression du propagateur (2.11) prend la forme

$$K(x'', t''; x', t') = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N} \left[\int dx_n\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}A_N\right], \tag{2.13}$$

avec l'action

$$A_N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\varepsilon}\Delta x_n^2 - \varepsilon V(x_n)\right] = \int_0^T dt \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right]. \tag{2.14}$$

2.3 Intégrale de chemin dans l'espace des phases

L'évolution d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$, et qui est repérée par les positions x' et x'' aux instants fixés t' et t'' respectivement, peut être décrite en définissant le propagateur comme étant l'amplitude de probabilité de transition exprimée à l'aide de l'opérateur d'évolution [16]

$$K\left(x'',t'';x',t'\right)=\left\langle x'\right|\hat{U}\left(t''-t'\right)\left|x''\right\rangle\Theta\left(t''-t'\right) \tag{2.15}$$

avec

$$\Theta\left(t''-t'\right)=\begin{cases}1 \text{ pour } t''>t'\\ 0 \text{ pour } t'>t''\end{cases}. \tag{2.16}$$

En divisant l'intervalle de temps $T=t''-t'$ en $N+1$ intervalles infinitésimaux égaux, on peut décomposer l'opérateur d'évolution en $N+1$ opérateurs élémentaires

$$\hat{U}\left(t''-t'\right)=\hat{U}\left(t_{N+1}-t_N\right)\hat{U}\left(t_N-t_{N-1}\right)...\hat{U}\left(t_n-t_{n-1}\right)...\hat{U}\left(t_1-t_0\right), \tag{2.17}$$

où $t_{N+1}=t''$, $t_0=t'$ et $T=\varepsilon\left(N+1\right).$

En insérant ensuite N relations de fermeture entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n\left|x_n\right\rangle\left\langle x_n\right|=1;\quad n=1,2,...N, \tag{2.18}$$

le propagateur peut être écrit sous la forme d'un produit de $N+1$ propagateurs élémentaires

$$\begin{aligned}K\left(x'',t'';x',t'\right)&=\left\langle x'',t''\right|x',t'\rangle\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int\prod_{n=1}^{N+1}\left\langle x_n,t_n\right|x_{n-1},t_{n-1}\rangle\prod_{n=1}^{N}dx_n,\end{aligned} \tag{2.19}$$

où

$$\begin{aligned}\left\langle x_n,t_n\right|x_{n-1},t_{n-1}\rangle&=\left\langle x_n\right|\hat{U}\left(t_n-t_{n-1}\right)\left|x_{n-1}\right\rangle\\&=\left\langle x_n\right|\exp\left(i\varepsilon\hat{H}/\hbar\right)\left|x_{n-1}\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.20}$$

$x_0=x'$ et $x_{N+1}=x''$.

L'opérateur Hamiltonien $\hat{H}$ de la particule est donné par

$$\hat{H}\left(x,p,t\right)=\hat{T}\left(p,t\right)+\hat{V}\left(x,t\right), \tag{2.21}$$

où $\hat{T}\left(p,t\right)$ est l'opérateur énergie cinétique et $\hat{V}\left(x,t\right)$ l'opérateur énergie potentielle.

Pour ε très petit, on peut appliquer la formule de Baker-Hausdorff [11]

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}}=e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^{2}\hat{X}}, \tag{2.22}$$

où l'opérateur $\hat{X}$ représente le développement suivant

$$\hat{X}=\frac{1}{2}\left[\hat{V},\hat{T}\right]-\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{1}{6}\left[\hat{V},\left[\hat{V},\hat{T}\right]\right]-\frac{1}{3}\left[\left[\hat{V},\hat{T}\right],\hat{T}\right]\right)+.... \tag{2.23}$$

Si on néglige tous les termes d'ordre supérieur ou égal à ε^{2} et on insère les deux relations de fermeture suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_{n}\left|x_{n}\right\rangle\left\langle x_{n}\right|=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_{n}}{2\pi\hbar}\left|p_{n}\right\rangle\left\langle p_{n}\right|=1, \tag{2.24}$$

dans l'expression (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle x_{n}\right|e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}(t_{n})}\left|x_{n-1}\right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left\langle x_{n}\right|e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}(\hat{x},t_{n})}\left|x\right\rangle\left\langle x\right|e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T}\left(\hat{P},t_{n}\right)}\left|x_{n-1}\right\rangle\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left\langle x_{n}\right|e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}(x,t_{n})}\left|x_{n-1}\right\rangle\\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_{n}}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_{n}\left(x-x_{n-1}\right)-\varepsilon T\left(p_{n},t_{n}\right)\right]\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

En tenant compte de l'élément de matrice

$$\langle x_n | \, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{V}(x,t_n)} \, |x\rangle = \delta\left(x_n - x\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(x_n,t_n)}, \tag{2.26}$$

on aura

$$\begin{aligned}\langle x_n | \, \hat{U}\left(t_n - t_{n-1}\right) |x_{n-1}\rangle \; &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_n\left(x_n - x_{n-1}\right)\right.\right. \\ &\left.\left. - \; \varepsilon\left[T\left(p_n,t_n\right) + V\left(x_n,t_n\right)\right]\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Par substitution de (2.27) dans (2.19) et en définissant la fonction de Green via la transformation de Fourier nous obtenons

$$\begin{aligned} G\left(x'',x';E\right) \; &= \int_{0}^{+\infty} dT \exp\left[\frac{i}{\hbar}ET\right] K\left(x'',t'';x',t'\right) \\ &= \int_{0}^{+\infty} dT \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \left[dx_n\right] \int \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}A_N\right], \end{aligned} \tag{2.28}$$

avec l'action

$$A_N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n\left(x_n - x_{n-1}\right) - \varepsilon\left(T\left(p_n,t_n\right) + V\left(x_n,t_n\right) - E\right)\right]. \tag{2.29}$$

et $T = t'' - t'$.

2.4 Procédure de transformation spatio-temporelle

Considérons une particule repérée par les positions A et B aux instants fixés t' et t'' respectivement. Dans l'espace des phases, le propagateur qui gouverne son évolution dans le potentiel $V(x)$ est défini par l'intégrale de chemin de Feynman

$$K(x'',t'';x',t') = \int Dx(t)Dp(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p\dot{x} - H)dt\right\}, \tag{2.30}$$

avec l'Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{2.31}$$

Supposons que le potentiel $V(x)$ est aussi compliqué qu'une évaluation directe de l'intégrale de chemin ne soit pas possible. Souvent, il est nécessaire d'effectuer une transformation de coordonnée $x \longrightarrow \xi$ représentée par $x = g(\xi)$, accompagnée d'une transformation temporelle $t \longrightarrow s$ définie par $dt = f(x)ds$. Pour mettre en oeuvre une telle transformation spatio-temporelle combinée dans le calcul de l'intégrale de chemin, on commence par écrire l'opérateur résolvante

$$\widehat{R} = \frac{i\hbar}{E - H + i0} = f_r(x)\frac{i\hbar}{f_l(x)(E - H + i0)f_r(x)}f_l(x), \tag{2.32}$$

où $f_l(x)$ et $f_r(x)$ sont des fonctions de la variable x, multipliant à gauche et à droite, respectivement, l'opérateur $(E - H + i0)$ et sont telles que $f_l(x)f_r(x) = f(x)$.

En exprimant l'opérateur $\frac{i\hbar}{f_l(x)(E-H+i0)f_r(x)}$ dans la représentation de Schwinger [17], on peut associer à l'opérateur résolvante (2.32) un élément de matrice appelé amplitude de transition pour une énergie fixée ou fonction de Green

$$G(x'',x';E) = \langle x''|\,\hat{R}\,|x'\rangle = \int_{s'}^{\infty} ds''\,\langle x''|\,\hat{U}_E(s''-s')\,|x'\rangle\,, \tag{2.33}$$

où $\hat{U}_E(S)$ est l'opérateur pseudo-temporel d'évolution défini par :

$$\hat{U}_E(S) = f_r(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Sf_l(x)(H-E)f_r(x)}f_l(x). \tag{2.34}$$

On peut maintenant convertir l'expression (2.33) en une intégrale de chemin en subdivisant la variable temporelle S en $N+1$ intervalles infinitésimaux et en insérant N

relations de fermeture pour arriver à la représentation intégrale approximée de la fonction de Green,

$$G(x'', x'; E) \approx (N+1) \int_0^\infty d\varepsilon_s \, \langle x''| \, \hat{U}_E^N(\varepsilon_s((N+1)) \, |x'\rangle \, , \tag{2.35}$$

avec l'intégrale de chemin pour l'amplitude pseudo-temporelle sous forme discrète donnée par :

$$\langle x''| \, \hat{U}_E^N(\varepsilon_s((N+1)) \, |x'\rangle = f_r(x'')f_l(x')\prod_{j=1}^{N} \left[\int dx_j \right] \prod_{j=1}^{N+1} \left[\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} A_E^N \right\}, \tag{2.36}$$

où A_E^N est l'action exprimée sous forme discrète ainsi

$$A_E^N = \sum_{j=1}^{N+1} \left[p_j \triangle x_j - \varepsilon_s f_l(x_j)(H(p_j, x_j) - E) f_r(x_{j-1}) \right]. \tag{2.37}$$

avec $ds = \varepsilon_s = \varepsilon / f_l(x_j) f_r(x_{j-1}) = dt / f_l(x_j) f_r(x_{j-1})$.

En effectuant l'intégration sur les variables p_j, nous obtenons l'intégrale de chemin dans l'espace des configurations

$$\begin{aligned} \langle x''| \, \hat{U}_E^N(\varepsilon_s((N+1)) \, |x'\rangle \;\; = \;\; & \frac{f_r(x'')f_l(x')}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s f_l(x'')f_r(x')/m}} \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \prod_{j=1}^{N} \left[\int \frac{dx_j}{\sqrt{f(x_j)}} \right] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\frac{m(\triangle x_j)^2}{2\varepsilon_s f_l(x_j) f_r(x_{j-1})} \right.\right. \\ & \left.\left. - \; \varepsilon_s f_l(x_j)(V(x_j) - E) f_r(x_{j-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

En faisant tendre N vers l'infini et en choisissant $f_l(x) = f_r(x) = f^{\frac{1}{2}}(x)$, nous pouvons écrire la fonction de Green comme une intégrale

$$G(x'', x'; E) = \int_0^\infty dS P^E(x'', x'; S), \tag{2.39}$$

avec l'intégrale de chemin

$$\begin{aligned}
P^{E}(x'',x';S) &= \left[f_r(x'')f_l(x')\right]^{\frac{1}{4}}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\prod_{j=1}^{N}\left[\int\frac{dx_j}{\sqrt{f(x_j)}}\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m(\triangle x_j)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{f(x_j)f(x_{j-1})}}\right.\right. \\
&\left.\left.-\ \varepsilon_s(V(x_j)-E)\sqrt{f(x_j)f(x_{j-1})}\right]\right\}. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Ce noyau est calculable moyennant une fonction $f\,(x)$ appropriée.

Chapitre 3

Potentiel coulombien plus un nouveau potentiel en forme d'anneau

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de traiter, par l'intermédiaire de la transformation de Kustaanheimo-Stiefel [5], dans le cadre des intégrales de chemin de Feynman, un système quantique soumis au potentiel de Coulomb plus un nouveau potentiel en forme d'anneau. Ce nouveau potentiel en forme d'anneau est obtenu en remplaçant la partie carrée inverse en forme d'anneau dans l'expression du potentiel de Hartmann [18] par un nouveau terme $\cot^2\theta/r^2$. Ce potentiel physique non central est défini en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) par :

$$V(r,\theta) = -\frac{\alpha}{r} + \beta\frac{\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}, \tag{3.1}$$

où α et β sont des constantes réelles positives. Comme le potentiel de Hartmann, ce potentiel (3.1) se réduit aussi au potentiel de Coulomb dans le cas où $\alpha = Ze^2$ et $\beta = 0$. Ce potentiel appartient à une classe de potentiels avec deux ensembles d'intégrales premières. L'existence de deux paires d'intégrales premières ou constantes de mouvement [19], entrainera la séparation des variables en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et en coordonnées paraboliques rotationnelles (ρ_1, ρ_2, ϕ). Ce potentiel a été récemment discuté dans une formulation basée sur l'équation de Schrödinger [20].

Le plan de notre étude est organisé comme suit : dans le deuxième paragraphe, nous construisons l'intégrale de chemin au moyen des variables de Kustaanheimo-Stiefel (K-S) et d'une transformation temporelle appropriée. Dans une première étape, nous ignorons le potentiel décrivant la barrière centrifuge pour séparer la partie angulaire. Ensuite, cette barrière est réintroduite pour donner l'expression de la fonction de Green sous forme compacte. Dans le troisième paragraphe, nous nous intéressons aux états liés. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées sont extraits respectivement des pôles et des résidus de la fonction de Green. Dans le quatrième paragraphe, l'évaluation de la contribution des états continus à la fonction de Green est obtenue. Les fonctions d'onde normalisées des états de diffusion sont alors déduites. Le dernier paragraphe sera une conclusion.

3.2 Fonction de Green via la transformation (K-S)

La fonction de Green associée au potentiel (3.1) s'écrit

$$G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; E) = \int_0^\infty \exp\left(\frac{i}{\hbar}ET\right) K(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; T)dT. \tag{3.2}$$

Puisque, dans la représentation canonique, le propagateur $K(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; T)$ est donné par l'intégrale de chemin de Feynman, il est facile d'exprimer (3.2) sous la forme d'une intégrale de chemin,

$$G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; E) = \int_0^\infty P(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; T)dT, \tag{3.3}$$

où

$$P(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; T) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} W_j\right] \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{r}_j, \tag{3.4}$$

avec l'action élémentaire modifiée

$$W_j = \frac{\mu}{2\varepsilon}(\triangle\vec{r}_j)^2 - \varepsilon V_j + \varepsilon E. \tag{3.5}$$

Ici, $\vec{r}_j = \vec{r}(t_j); \varepsilon = t_j - t_{j-1}$ et $T = N\varepsilon$. Pour le potentiel de Coulomb plus un nouveau potentiel en forme d'anneau (3.1),

$$V_j = -\frac{\alpha}{(\overline{x}_j^2 + \overline{y}_j^2 + \overline{z}_j^2)^{\frac{1}{2}}} + \beta\frac{\overline{z}_j^2}{(\overline{x}_j^2 + \overline{y}_j^2 + \overline{z}_j^2)(\overline{x}_j^2 + \overline{y}_j^2)}, \tag{3.6}$$

où $\overline{x}_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1})$, etc. La transformation (K-S) : $\{x, y, z\} \longrightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ correspondante à la surjection $R^4 \longrightarrow R^3$ est définie par [5] :

$$\left\{ \begin{array}{r} x = 2(u_1u_3 + u_2u_4), \\ y = 2(u_2u_3 - u_1u_4), \\ z = -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

accompagnée de la condition de contrainte

$$d\xi = 2(-u_2du_1 + u_1du_2 - u_4du_3 + u_3du_4) = 0, \tag{3.8}$$

permettant de définir une variable auxiliaire

$$\xi = 2\int(-u_2\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_2 - u_4\dot{u}_3 + u_3\dot{u}_4)ds. \tag{3.9}$$

Cette variable auxiliaire est introduite en insérant dans (3.4) l'identité suivante

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\int \exp\left(\frac{i\mu}{2\hbar\varepsilon}\xi_j^2\right)d\xi_j = 1 \tag{3.10}$$

pour réécrire (3.4) ainsi

$$P(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; T) = \int \widehat{P}(\vec{r}\,'', \xi'', \vec{r}\,', 0; T)d\xi'' \tag{3.11}$$

où

$$\widehat{P}(\vec{r}\,'', \xi'', \vec{r}\,', 0; T) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} \widehat{W}_j\right] \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^2 \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{r}_j d\xi_j, \tag{3.12}$$

avec

$$\widehat{W}_j = \frac{\mu}{2\varepsilon}\left[(\triangle\vec{r}_j)^2 + \xi_j^2\right] - \varepsilon V_j + \varepsilon E. \tag{3.13}$$

V_j étant donné par (3.6). On remarque que (3.12) est une intégrale de chemin à 4 dimensions, mais l'intégration sur ξ'' dans (3.11) donne la réduction dimensionnelle nécessaire pour la forme finale. Nous appliquons maintenant la transformation (K-S) aux points moyens dans chaque intervalle de l'espace comme il a été fait pour l'atome d'hydrogène [21],

$$\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \\ \triangle z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u}_3 & \overline{u}_4 & \overline{u}_1 & \overline{u}_2 \\ -\overline{u}_4 & \overline{u}_3 & \overline{u}_2 & -\overline{u}_1 \\ -\overline{u}_1 & -\overline{u}_2 & \overline{u}_3 & \overline{u}_4 \\ -\overline{u}_2 & \overline{u}_1 & -\overline{u}_4 & \overline{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \triangle u_2 \\ \triangle u_3 \\ \triangle u_4 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

où $\overline{u}_b^{(j)} = \frac{1}{2}(u_b^{(j)} + u_b^{(j-1)})$ pour $b = 1, 2, 3$ et 4.

En même temps, nous effectuons la transformation temporelle [4, 6, 22]

$$\varepsilon = 4(\overline{u}^{(j)})^2 \sigma_j, \tag{3.15}$$

où $(\overline{u})^2 = (\overline{u}_1)^2 + (\overline{u}_2)^2 + (\overline{u}_3)^2 + (\overline{u}_2)^2 = (\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2)^{\frac{1}{2}} = \overline{r}$.

Comme résultat de la transformation (K-S) et de la transformation temporelle, l'action (3.13) prend la forme :

$$\widehat{W}_j = 4\alpha\sigma_j + W_j^{(1)} + W_j^{(2)} + \frac{4\sigma_j\beta}{(\overline{u}^{(j)})^2}, \tag{3.16}$$

où

$$
\begin{aligned}
W_j^{(1)} &= \frac{\mu}{2\sigma_j}\left[(\triangle u_1^{(j)})^2+(\triangle u_2^{(j)})^2\right]+4\sigma_j E\left[(u_1^{(j)})^2+(u_2^{(j)})^2\right] \\
&\quad -\frac{\sigma_j\beta}{(u_1^{(j)})^2+(u_2^{(j)})^2}
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

et

$$
\begin{aligned}
W_j^{(2)} &= \frac{\mu}{2\sigma_j}\left[(\triangle u_3^{(j)})^2+(\triangle u_4^{(j)})^2\right]+4\sigma_j E\left[(u_3^{(j)})^2+(u_4^{(j)})^2\right] \\
&\quad -\frac{\sigma_j\beta}{(u_3^{(j)})^2+(u_4^{(j)})^2}.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

La mesure dans l'expression de l'intégrale de chemin se transforme alors de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^2\prod_{j=1}^{N-1}d\vec{r}_j d\xi_j &= \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^2\prod_{j=1}^{N-1}(2\overline{u}^{(j)})^4 d^4u^{(j)} \\
&= \frac{1}{4r''}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)^2\prod_{j=1}^{N-1}d^4u^{(j)}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Il est clair que l'intégrale de chemin (3.12) se compose de deux systèmes à deux dimensions, l'un associé aux variables (u_1,u_2) et l'autre aux variables (u_3,u_4) et comprend un potentiel attractif additionnel $\left[-\frac{4\beta}{(\overline{u}^{(j)})^2}\right]$, qui est convenablement paramétrisé sous la forme d'une barrière centrifuge

$$
V_{extra}=\frac{\hbar^2 l_{extra}^2}{2\mu(\overline{u}^{(j)})^2}, \tag{3.20}
$$

où le carré du moment angulaire vaut

$$
l_{extra}^2=-\frac{8\mu\beta}{\hbar^2}. \tag{3.21}
$$

Si nous ignorons, pour un moment, la barrière centrifuge V_{extra}, la solution de l'intégrale de chemin (3.2) peut immédiatement s'écrire sous la forme :

$$G(\vec{r}\,'',\vec{r}\,';E)=\int_0^{+\infty} dS\exp\left(\frac{4i\alpha S}{\hbar}\right)\widetilde{K}(u'',u';S), \tag{3.22}$$

avec l'intégrale de chemin transformée

$$\widetilde{K}(u'',u';S)=\frac{1}{4r''}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{K}_1(u_1'',u_2'',u_1',u_2';S)\widetilde{K}_2(u_3'',u_4'',u_3',u_4';S)d\xi'', \tag{3.23}$$

où les noyaux $\widetilde{K}_{1/2}(S)$ ont la forme :

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_1(u_1'',u_2'',u_1',u_2';S) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}W_j^{(1)}\right]\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)\prod_{j=1}^{N-1}du_1^{(j)}du_2^{(j)}\\ &= \int Du_1(s)\int Du_2(s)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^S\left(\frac{\mu}{2}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\ 4(u_1^2+u_2^2)-\frac{\beta}{u_1^2+u_2^2}\right)ds\right],\end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_2(u_3'',u_4'',u_3',u_4';S) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}W_j^{(2)}\right]\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu}{2i\pi\hbar\sigma_j}\right)\prod_{j=1}^{N-1}du_3^{(j)}du_4^{(j)}\\ &= \int Du_3(s)\int Du_4(s)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^S\left(\frac{\mu}{2}(\dot{u}_3^2+\dot{u}_4^2)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\ 4(u_3^2+u_4^2)-\frac{\beta}{u_3^2+u_4^2}\right)ds\right].\end{aligned} \tag{3.25}$$

Apparemment, chacun des propagateurs $\widetilde{K}_1(S)$ et $\widetilde{K}_2(S)$ peut être identifié avec le propagateur d'un oscillateur harmonique à deux dimensions placé dans un potentiel carré inverse. Pour évaluer ces propagateurs, nous pouvons transformer les variables (K-S) en coordonnées doubles polaires définies par :

$$\begin{cases} u_1 = \rho_1 \cos\phi_1, u_2 = \rho_1 \sin\phi_1; \rho_1 > 0; 0 \leq \phi_1 \leq 2\pi, \\ u_3 = \rho_2 \cos\phi_2, u_4 = \rho_2 \sin\phi_2; \rho_2 > 0; 0 \leq \phi_2 \leq 2\pi. \end{cases} \tag{3.26}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_1(u_1'', u_2'', u_1', u_2'; S) &= \int \rho_1 D\rho_1(s) \int D\phi_1(s) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^S \left(\frac{\mu}{2}(\dot{\rho_1}^2 + \rho_1^2\dot{\phi_1}^2)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \; 4E\rho_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\frac{2\mu\beta}{\hbar^2} - \frac{1}{4}}{\rho_1^2}\right) ds\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1'\rho_1''}} \sum_{\nu_1=-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\nu_1(\phi_1'' - \phi_1')\right] \\ &\quad \times \int D\rho_1(s) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^S \left(\frac{\mu}{2}\dot{\rho}_1^2 + 4E\rho_1^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\frac{2\mu\beta}{\hbar^2} + \nu_1^2 - \frac{1}{4}}{\rho_1^2}\right) ds\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega S)} \sum_{\nu_1=-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\nu_1(\phi_1'' - \phi_1')\right] \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i\mu\omega}{2\hbar}(\rho_1''^2 + \rho_1'^2)\cot(\omega S)\right\} I_{\lambda_1}\left(\frac{\mu\omega\rho_1'\rho_1''}{i\hbar\sin(\omega S)}\right), \end{aligned} \tag{3.27}$$

avec $\omega = 2\sqrt{-\frac{2E}{\mu}}$ et $\lambda_1 = \sqrt{\frac{2\mu\beta}{\hbar^2} + \nu_1^2}$.

Le propagateur $\widetilde{K}_2(S)$ est donné de façon similaire en remplaçant simplement tous les indices 1 par 2.

Pour effectuer l'intégration sur la variable ξ'', nous utilisons les coordonnées polaires

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha+\phi}{2}, u_2 = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha+\phi}{2}, \\ u_3 = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\phi}{2}, u_4 = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\phi}{2}; \\ 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq 4\pi, \end{cases} \tag{3.28}$$

et nous identifions

$$\rho_1 = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \rho_2 = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \phi_1 = \frac{\alpha+\phi}{2}, \phi_2 = \frac{\alpha-\phi}{2}. \tag{3.29}$$

Il est facile de montrer à partir de (3.8) que $d\xi'' = r''d\alpha$ et que l'intégration sur la variable α conduit à $4\pi\delta_{\nu_1,-\nu_2}$. Il s'ensuit que la fonction de Green (3.22) peut s'écrire ainsi

$$G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; E) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left[im(\phi'' - \phi')\right] G_m(r'', \theta'', r', \theta'; E), \tag{3.30}$$

avec

$$\begin{aligned} G_m(r'', \theta'', r', \theta'; E) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu\omega}{i\hbar}\right)^2 \int_0^\infty \frac{dS}{\sin^2(\omega S)} I_\lambda\left(\frac{\mu\omega\sqrt{r''r'}}{i\hbar\sin(\omega S)}\cos\frac{\theta''}{2}\cos\frac{\theta'}{2}\right) \\ &\times I_\lambda\left(\frac{\mu\omega\sqrt{r''r'}}{i\hbar\sin(\omega S)}\sin\frac{\theta''}{2}\sin\frac{\theta'}{2}\right) \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[4\alpha S + \frac{\mu\omega}{2}(r'' + r')\cot(\omega S)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

où $m = \nu_1 = -\nu_2$ et $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Les termes dépendant de la variable angulaire peuvent être séparés de ceux dépendant de la variable radiale à l'aide de la formule de développement de Bateman [23]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z I_\nu(z\sin\alpha\sin\beta) I_\mu(z\cos\alpha\cos\beta) &= (\sin\alpha\sin\beta)^\nu (\cos\alpha\cos\beta)^\mu \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} (\nu + \mu + 2l + 1) \frac{l!\Gamma(\nu + \mu + l + 1)}{\Gamma(\nu + l + 1)\Gamma(\mu + l + 1)} \\ &\times I_{\nu+\mu+2l+1}(z) P_l^{(\nu,\mu)}(\cos(2\alpha)) P_l^{(\nu,\mu)}(\cos(2\beta)). \end{aligned} \tag{3.32}$$

La fonction de Green (3.31) devient alors

$$G_m(r'', \theta'', r', \theta'; E) = \sum_{l=0}^{+\infty} G_l(r'', r'; E) \Psi_l^{(\lambda,\lambda)}(\theta'') \Psi_l^{(\lambda,\lambda)}(\theta'), \tag{3.33}$$

avec

$$\Psi_l^{(\lambda,\lambda)}(\theta) = \left[(2\lambda + 2l + 1)\frac{\Gamma(2\lambda + l + 1)}{l!\Gamma(\lambda + l + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} P_{l+\lambda}^{-\lambda}(\cos\theta), \tag{3.34}$$

où nous avons utilisé les formules suivantes (Ref. [24], p. 1037, Eq. (8.962.4), p. 1031, Eq. (8.936.1)) :

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu)\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})} P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2})}(x), \tag{3.35}$$

$$C_n^{\lambda}(t) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} \left\{\frac{1}{4}(t^2-1)\right\}^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{\lambda+n-\frac{1}{2}}(t). \tag{3.36}$$

La fonction de Green radiale a la forme :

$$\begin{aligned} G_l(r'', r'; E) &= \frac{\mu\omega}{i\hbar\sqrt{r''r'}} \int_0^{\infty} \frac{dS}{\sin(\omega S)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[4\alpha S + \frac{\mu\omega}{2}(r''+r')\cot(\omega S)\right]\right\} \\ &\quad \times I_{2\lambda+2l+1}\left(\frac{\mu\omega\sqrt{r''r'}}{i\hbar\sin(\omega S)}\right). \end{aligned} \tag{3.37}$$

A ce niveau, nous incorporons la barrière centrifuge additionnelle via le remplacement

$$2(\lambda+l)+1 \longrightarrow 2\widetilde{l}+1 \equiv \sqrt{2(((\lambda+l)+1)^2 + l_{extra}^2} \tag{3.38}$$

dans l'expression (3.37) pour représenter la fonction de Green radiale relative au potentiel (3.1),

$$\begin{aligned} G_{\widetilde{l}}(r'', r'; E) &= \frac{\mu\omega}{i\hbar\sqrt{r''r'}} \int_0^{\infty} \frac{dS}{\sin(\omega S)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[4\alpha S + \frac{\mu\omega}{2}(r''+r')\cot(\omega S)\right]\right\} \\ &\quad \times I_{2\widetilde{l}+1}\left(\frac{\mu\omega\sqrt{r''r'}}{i\hbar\sin(\omega S)}\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Pour effectuer l'intégration sur la variable temporelle S, nous utilisons la formule (Ref. [24], p. 729, Eq. (6.699.4))

$$\int_0^{\infty} dq \frac{e^{-2pq}}{\sinh q} \exp\left[-\frac{1}{2}(u+v)\coth q\right] I_{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{uv}}{\sinh q}\right) = \frac{\Gamma(p+\gamma+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\gamma+1)\sqrt{uv}} M_{-p,\gamma}(u) W_{-p,\gamma}(v), \tag{3.40}$$

valable pour $Re(p+\gamma+\frac{1}{2}) > 0, Re(\gamma) > 0$ et $v > u$, où $M_{-p,\gamma}(u)$ et $W_{-p,\gamma}(v)$ sont les fonctions de Whittaker. Ceci donne

$$G_{\tilde{l}}(r'', r'; E) = \frac{1}{i\omega r'' r'} \frac{\Gamma(p + \widetilde{l} + 1)}{\Gamma(2\widetilde{l} + 2)} M_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r'}{\hbar}) W_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r''}{\hbar}), \tag{3.41}$$

où $r'' > r'$ et $p = -\frac{2\alpha}{\hbar\omega}$.

Par conséquent, nous obtenons la fonction de Green pour le système en question

$$\begin{aligned} G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; E) &= \frac{1}{2\pi i\omega r'' r'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[(2\lambda + 2l + 1) \frac{\Gamma(2\lambda + l + 1)}{l!\Gamma(\lambda + l + 1)} \right] \\ &\times \frac{\Gamma(p + \widetilde{l} + 1)}{\Gamma(2\widetilde{l} + 2)} \exp\left[im(\phi'' - \phi')\right] \ P_{l+\lambda}^{-\lambda}(\cos\theta'') P_{l+\lambda}^{-\lambda}(\cos\theta') \\ &\times M_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r'}{\hbar}) W_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r''}{\hbar}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

3.3 Etats liés

Pour déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés, revenons à l'expression (3.39) de la fonction de Green radiale et appliquons la formule de Hille et Hardy (Ref. [24], p. 1038, Eq. (8.976.1)) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y) z^n = \frac{(xyz)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1 - z} \exp\left(-z\frac{x + y}{1 - z}\right) I_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1 - z}\right); |z| < 1, \tag{3.43}$$

où $L_n^{\alpha}(x)$ est un pôlynome de Laguerre (Ref. [24], p. 1037, Eq. (8.970.1)).

A l'aide d'un changement de variables approprié, les pôles de la fonction de Green (3.39) s'obtiennent en effectuant l'intégration sur S, le spectre d'énergie est de la forme :

$$E_{n_r,l} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2(n_r + \widetilde{l} + 1)^2} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}, \tag{3.44}$$

où

$$n = n_r + \widetilde{l} + 1, \tag{3.45}$$

et

$$\widetilde{l} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 4\left[\left(l + \sqrt{\frac{2\mu\beta}{\hbar^2} + m^2}\right)\left(l + \sqrt{\frac{2\mu\beta}{\hbar^2} + m^2} + 1\right) - \frac{2\mu\beta}{\hbar^2}\right]} - 1\right], \tag{3.46}$$

avec $n_r, l, |m| = 0, 1, 2....$

Nous pouvons obtenir les fonctions d'onde convenablement normalisées à partir des résidus de l'expression intégrée de la fonction de Green (3.30) ($a = \frac{\hbar^2}{\mu\alpha}$ est le rayon de Bohr)

$$\begin{aligned}
\Psi_{n_r,l,,m}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a(n_r + \widetilde{l} + 1)^2}\left[\frac{n_r!}{a\Gamma(n_r + 2\widetilde{l} + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\frac{2r}{a(n_r + \widetilde{l} + 1)}\right)^{\widetilde{l}} \exp\left(-\frac{r}{a(n_r + \widetilde{l} + 1)}\right) \\
&\times L_{n_r}^{2\widetilde{l}+1}\left(\frac{2r}{a(n_r + \widetilde{l} + 1)}\right)\Psi_l^{(\lambda,\lambda)}(\theta)e^{im\phi},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

3.4 Etats continus

Pour évaluer la contribution du spectre continu à la fonction de Green, exprimons (3.41) sous la forme :

$$\begin{aligned}
G_{\widetilde{l}}(r'', r'; E) &= \frac{i\hbar}{4\pi r'' r' \Gamma(2\widetilde{l} + 2)} \oint_C \frac{dz}{E + i0 - \frac{\hbar^2 z^2}{2\mu}} \\
&\Gamma(p + \widetilde{l} + 1) M_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r'}{\hbar}) W_{-p,\widetilde{l}+\frac{1}{2}}(\frac{\mu\omega r''}{\hbar}),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

où C est le contour fermé

$$C : \begin{cases} z = k, k \in [-R, R] \,, \\ z = Re^{i\phi}, \phi \in (\pi, 2\pi) \,. \end{cases} \tag{3.49}$$

A la limite $R \longrightarrow \infty$, en tenant compte du comportement asymptotique des fonctions de Whittaker (Ref. [24], p. 1061, Eqs. (8.227) à (8.229)), il est facile de montrer que l'intégrale sur le demi- cercle est nulle. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} G_{\widetilde{l}}(r'', r'; E) \;\; = \;\; & \frac{i\hbar}{4\pi r'' r' \Gamma(2\widetilde{l}+2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{E + i0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}} \\ & \Gamma(p + \widetilde{l} + 1) M_{-p, \widetilde{l}+\frac{1}{2}}(-2ikr') W_{-p, \widetilde{l}+\frac{1}{2}}(2ikr''). \end{aligned} \tag{3.50}$$

En utilisant les formules suivantes (Ref. [24], p. 1061, Eq. (9.231.2), p. 1062, Eq. (9.233.2)) :

$$M_{\lambda,\mu}(z) = e^{-i\pi(\mu+\frac{1}{2})} M_{-\lambda,\mu}(-z); (2\mu \neq -1, -2, -3, ...), \tag{3.51}$$

et

$$M_{\lambda,\mu}(z) = \Gamma(2\mu+1) e^{i\pi\lambda} \left[\frac{W_{-\lambda,\mu}(-z)}{\Gamma(\mu - \lambda + \frac{1}{2})} + e^{-i\pi(\mu+\frac{1}{2})} \frac{W_{-\lambda,\mu}(z)}{\Gamma(\mu + \lambda + \frac{1}{2})} \right], \tag{3.52}$$

valable pour $\arg z \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\mu \neq -1, -2, -3, ...$, et le lien entre la fonction de Whittaker $M_{\lambda,\mu}(z)$ et la fonction hypergéométrique confluente (Ref. [24], p. 1059, Eq.(9.220.2))

$$M_{\lambda,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \quad F(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z), \tag{3.53}$$

l'expression (3.50) devient

$$G_{\widetilde{l}}(r'', r'; E) = i\hbar \int_0^{+\infty} \frac{dE_k}{E + i0 - E_k} \Psi^*_{k,\widetilde{l}}(r') \Psi_{k,\widetilde{l}}(r''), \tag{3.54}$$

avec le spectre d'énergie

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}, \tag{3.55}$$

et les fonctions d'onde radiales

$$\begin{aligned}
\Psi_{k,\widetilde{l}}(r) &= \left(\frac{\mu}{4\pi\hbar^2 k}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left|\Gamma(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})\right|}{\Gamma(2\widetilde{l}+2)} e^{\frac{\pi\mu\alpha}{2\hbar^2 k}} (2kr)^{\widetilde{l}} e^{ikr} \\
&\quad \times F(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}, 2\widetilde{l}+2; -2ikr).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Afin de déterminer le déphasage δ_l', étudions la forme asymptotique de la fonction d'onde (3.54). Le développement asymptotique des fonctions hypergéométriques confluentes est donné par (Ref. [24], p.1059, Eq.(9.220.2) et p.1062, Eq.(9.233.1) et 2)

$$F(\lambda,\gamma;z) \underset{|z|\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\lambda)} e^z z^{\lambda-\gamma} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\lambda)} e^{\pm i\pi\lambda} z^{-\lambda}, \tag{3.57}$$

où les signes " + " et " − " correspondent respectivement à $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$. Quand $z = -2ikr = |z|\, e^{-\frac{i\pi}{2}}$, l'équation (3.56) est alors réexprimée ainsi

$$F(\lambda,\gamma;z) \underset{|z|\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\lambda)} e^z \left|z\right|^{\lambda-\gamma} e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda-\gamma)} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\lambda)} \left|z\right|^{-\lambda} e^{-\frac{i\pi}{2}\lambda}, \tag{3.58}$$

de laquelle, nous avons

$$\begin{aligned}
&F(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}, 2\widetilde{l}+2; -2ikr) \underset{r\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \Gamma(2\widetilde{l}+2) \\
&\times \left(e^{-2ikr} \frac{(2kr)^{-(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})}}{\Gamma(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})} + \frac{(2kr)^{-(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})}}{\Gamma(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})} e^{-\frac{i\pi}{2}(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})} \right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Posons

$$\Gamma(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}) = \left|\Gamma(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})\right| e^{i\delta_{\widetilde{l}}}, \tag{3.60}$$

alors

$$\Gamma(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}) = \left|\Gamma(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})\right| e^{-i\delta_{\widetilde{l}}}, \tag{3.61}$$

où

$$\delta_{\widetilde{l}} = \arg\Gamma(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}) \tag{3.62}$$

est un nombre réel. Il s'ensuit que l'équation (3.59) devient

$$F(1+\widetilde{l}-\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k},2\widetilde{l}+2;-2ikr) \underset{r\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(2\widetilde{l}+2)e^{-\frac{\pi\mu\alpha}{2\hbar^2 k}}e^{-ikr}}{\left|\Gamma(1+\widetilde{l}+\frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k})\right|(2kr)^{\widetilde{l}+1}}$$

$$\times 2\sin\left(kr+\delta_{\widetilde{l}}-\frac{\widetilde{l}\pi}{2}+\frac{\mu\alpha}{\hbar^2 k}\ln(2kr)\right). \tag{3.63}$$

En substituant l'équation (3.63) dans l'équation (3.56) nous obtenons

$$\Psi_{k,\widetilde{l}}(r) \underset{r\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\mu}{4\pi\hbar^2 k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{r}\sin\left(kr+\delta_{\widetilde{l}}-\frac{\widetilde{l}\pi}{2}+\frac{\mu\alpha}{\hbar^2 k}\ln(2kr)\right). \tag{3.64}$$

Nous savons que l'expression asymptotique des fonctions d'onde radiales des états continus pour le potentiel de Coulomb s'écrit

$$R_{k,l}(r) \underset{r\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\mu}{4\pi\hbar^2 k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{r}\sin\left(kr+\delta_l-\frac{l\pi}{2}+\frac{\mu Ze^2}{\hbar^2 k}\ln(2kr)\right). \tag{3.65}$$

Notons que la normalisation des fonctions d'onde est à l'échelle de E_k (voir Eq.(3.56)). Comme le potentiel, dont il est question ici, est le potentiel de Coulomb entouré par le potentiel carré inverse en forme d'anneau à courte portée, l'expression asymptotique des fonctions d'onde radiales pour $r \longrightarrow \infty$ ne sera pas affectée par la présence du terme additionnel carré inverse en forme d'anneau. Il s'ensuit que l'expression asymptotique des fonctions d'onde radiales pour le potentiel (3.1) est égale à celle relative au potentiel de Coulomb quand $r \longrightarrow \infty$, c'est à dire

$$\Psi_{k,\widetilde{l}}(r) \underset{r\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\mu}{4\pi\hbar^2 k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{r}\sin\left(kr+\delta'_l-\frac{l\pi}{2}+\frac{\mu\alpha}{\hbar^2 k}\ln(2kr)\right). \tag{3.66}$$

En comparant (3.63) et (3.65) et compte tenu de (3.62), il vient

$$\delta_l' = \delta_{\widetilde{l}} + (l - \widetilde{l})\frac{\pi}{2} = \arg\Gamma(1 + \widetilde{l} - \frac{i\mu\alpha}{\hbar^2 k}) + (l - \widetilde{l})\frac{\pi}{2}. \tag{3.67}$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un système de potentiels composé du potentiel de Coulomb et d'un nouveau potentiel en forme d'anneau par l'approche des intégrales de chemin de Feynman en utilisant la transformation (K-S) et une transformation temporelle appropriée. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés et des états de diffusion ainsi que les déphasages sont alors obtenus. Il nous semble que cette méthode est une alternative, particulièrement estimable, à la résolution de l'équation de Schrödinger [20] et à la variante de Milshtein et Strakhovenko [25] de l'algèbre de Lie so(2,1).

Chapitre 4

Potentiel effectif écranté déformé

4.1 Introduction

La généralisation par la q-déformation de la classe de potentiels de Pöschl-Teller a été d'abord introduite par Arai [26] dans le cadre de la mécanique quantique supersymétrique. Ensuite, elle a été discutée par Levai [27]. Lemieux et Bose [28] ont étudié cette classe dans le contexte des solutions générales de l'équation hypergéométrique. Recemment, ces potentiels ont été aussi discuté par Egrifes et ses collaborateurs [29]. Grosche [30], en travaillant dans le cadre des intégrales de chemin, a donné le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'onde normalisées d'un ensemble de potentiels hyperboliques q-déformés.

Dans ce chapitre, nous voulons analyser une généralisation d'un potentiel effectif écranté contenant le potentiel de Hulthén standard et le potentiel Coulombien comme cas particuliers. Ce potentiel effectif écranté déformé est défini par :

$$V_{eff}^{q}(r) = \frac{\lambda - \mu}{e^{\alpha r} - q} + \frac{\mu}{(e^{\alpha r} - q)^2}, \tag{4.1}$$

avec λ, μ et α sont des constantes réelles et positives telles que $\lambda = \alpha Z e^2$ et $\mu = \dfrac{\alpha^2 l(l+1)}{2M}$. La charge du noyau étant Ze^2.

Cette généralisation est basée sur une déformation q introduite dans l'expression du potentiel. Nous supposerons sans perte de généralité $q > 0$. L'introduction de ce paramètre q peut servir comme un paramètre additonnel dans la description des interactions inter-atomiques. En étudiant ce problème, nous pouvons voir comment ce paramètre affecte les caractéristiques des niveaux d'énergie du système.

Le plan de notre étude est le suivant : dans le second paragraghe, nous construisons la fonction de Green par l'approche des intégrales de chemin en ramenant, au moyen d'une transformation spatio-temporelle appropriée, le potentiel en question au potentiel général de Rosen-Morse exprimé à l'aide des fonctions hyperboliques q-déformées. Ensuite, dans le troisième paragraphe, nous en déduisons le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés. Enfin, dans le dernier paragraphe, en fixant $l = 0$, nous considérons une généralisation du potentiel de Hulthén standard.

4.2 Fonction de Green

La fonction de Green pour une particule de masse M dans le potentiel écranté déformé (4.1) s'écrit en coordonnées sphériques ainsi

$$G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'; E) = \frac{1}{r''r'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} G_l(r'', r'; E) P_l(\cos\theta), \tag{4.2}$$

où $P_l(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre et $\theta = (\vec{r}\,'', \vec{r}\,')$. La fonction de Green radiale est définie par :

$$G_l(r'', r'; E) = \int_0^\infty dT \, \langle r''| \exp\left[-\frac{iT}{\hbar}(H_l - E)\right] |r'\rangle \,, \tag{4.3}$$

où l'Hamiltonien H_l est donné par :

$$H_l = \frac{P_r^2}{2M} + V_{eff}^q. \tag{4.4}$$

Suivant la procédure décrite dans le paragraphe (2.4) du chapitre 2, la fonction de Green radiale (4.3) se met sous la forme d'une intégrale de chemin ainsi

$$G_l(r'',r';E)=\int_0^\infty dS P_l^E(r'',r';S), \tag{4.5}$$

avec

$$\begin{aligned} P_l^E(r'',r';S) &= [f_r(r'')f_l(r')]^{\frac{1}{4}} \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\left[\frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times\prod_{j=1}^{N}\left[\int\frac{dr_j}{\sqrt{f(r_j)}}\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{M(\triangle r_j)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{f(r_j)f(r_{j-1})}}\right.\right. \\ &\left.\left. -\ \varepsilon_s(V_{eff}^q(r_j)-E)\sqrt{f(r_j)f(r_{j-1})}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Avant de passer à l'évaluation de l'intégrale de chemin (4.6), nous devons examiner la variation du potentiel $V_{eff}^q(r_j)$ suivant les valeurs du paramètre q. Deux cas peuvent se présenter. Si $0<q<1$, $V_{eff}^q(r_j)$ est continu dans tout l'intervalle $[0,\infty[$. Mais si $q\geqslant 1$, $V_{eff}^q(r_j)$ présente une forte singularité au point $r=r_0=\frac{1}{\alpha}\ln q$ et dans ce cas, nous avons deux régions distinctes, l'une définie par l'intervalle $]0,r_0[$ et l'autre par l'intervalle $]r_0,\infty[$. Ceci nous amène à évaluer l'expression (4.6) dans les trois intervalles et suivant les valeurs de q séparément.

Une étude complète de ce potentiel est en cours de réalisation, mais dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où $q\geqslant 1$ et $r\in]r_0,\infty[$.

A l'aide de la transformation spatiale $r\rightarrow\xi$, $r\in]r_0,\infty[$ et $\xi\in]-\infty,+\infty[$, définie par :

$$r=\frac{1}{\alpha}\ln\left[\exp\left(2\alpha\xi\right)+q\right]. \tag{4.7}$$

La fonction de transformation appropriée est alors définie par :

$$f\left[r\left(\xi\right)\right]=\frac{\exp\left(2\alpha\xi\right)}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi\right)}=\left[g'\left(\xi\right)\right]^2. \tag{4.8}$$

Compte tenu des expressions (4.7) et (4.8) nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_l\left(r'',r';S\right) &= \frac{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\left(\xi''+\xi'\right)\right]}{\left[\cosh\left(\alpha\xi''\right)\cosh\left(\alpha\xi'\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\left[\frac{M}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{N}\left[\int d\xi_j\right] \\
&\quad\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{M}{2\varepsilon_s}\left(\Delta\xi_j\right)^2+\frac{M}{8\varepsilon_s}\left(\frac{g''^{\,2}}{g'^{\,2}}-\frac{2}{3}\frac{g'''}{g'}\right)\left(\Delta\xi_j\right)^4\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\varepsilon_s\frac{\lambda-qE}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi_j\right)}+2\varepsilon_s(E+\frac{\mu}{q})\tanh_q\left(\alpha\xi_j\right)+2\varepsilon_s(E-\frac{\mu}{q})\right]\right\}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Dans les équations (4.8) et (4.9), nous avons introduit les fonctions hyperboliques déformées qui sont définies par [26]

$$\cosh_q x=\frac{1}{2}\left(e^x+qe^{-x}\right), \sinh_q x=\frac{1}{2}\left(e^x-qe^{-x}\right), \tanh_q x=\frac{\sinh_q x}{\cosh_q x}, \qquad (4.10)$$

où q est un paramètre réel positif.

Notons que le terme en $\left(\Delta\xi_j\right)^4$ dans (4.9) fournit une correction quantique à l'intégrale de chemin. Celle-ci peut être estimée en utilisant la formule [31]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2+\beta x^4\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2+\frac{3\beta}{4\alpha^2}\right)dx, \qquad (4.11)$$

valable pour $Re\left\{\alpha\right\}>0$ et $|\alpha|$ grand. Ceci conduit à

$$\begin{aligned}
P_l\left(r'',r';S\right) &= \frac{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\left(\xi''+\xi'\right)\right]}{\left[\cosh\left(\alpha\xi''\right)\cosh\left(\alpha\xi'\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\int D\xi\left(s\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^S\left[\frac{M}{2}\dot{\xi}^2\right.\right. \\
&\quad+\left(2(E-\frac{\mu}{q})-\frac{\alpha^2\hbar^2}{4M}\right)+\left(2(E+\frac{\mu}{q})+\frac{\alpha^2\hbar^2}{4M}\right)\tanh_q\left(\alpha\xi\right) \\
&\quad\left.\left.+\left[\lambda-qE-q\frac{\alpha^2\hbar^2}{8M}\right]\frac{1}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi\right)}\right]ds\right\}. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables spatio-temporelles suivant

$$\xi \to \frac{y}{\alpha} \tag{4.13}$$

et

$$s \to \frac{\tau}{\alpha^2} \text{ ou } S = \frac{\Lambda}{\alpha^2} \tag{4.14}$$

et si nous définissons $u = y - \ln\sqrt{q} \in \Re$, nous obtenons pour la fonction de Green l'expression suivante :

$$\begin{aligned} G_l\left(r'', r'; E\right) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\left(u'' + u'\right)\right]}{\left[\cosh u'' \cosh u'\right]^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty d\Lambda \int Du\left(\tau\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\Lambda \left[\frac{M}{2}\dot{u}^2 + \right.\right. \\ &\left(\frac{2(E - \frac{\mu}{q})}{\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{4M}\right) + \left(\frac{2(E + \frac{\mu}{q})}{\alpha^2} + \frac{\hbar^2}{4M}\right) \tanh u \\ &\left.\left. + \left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\lambda}{q} - E\right) - \frac{\hbar^2}{8M}\right] \frac{1}{\cosh^2 u}\right] d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ceci ramène le calcul de la fonction de Green pour le potentiel effectif écranté déformé à celui de la fonction de Green associée au potentiel de Rosen-Morse standard.

L'expression (4.15) prend alors la forme

$$G_l\left(r'', r'; E\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\left(u'' + u'\right)\right]}{\left[\cosh u'' \cosh u'\right]^{\frac{1}{2}}} G_{RM}\left(u'', u'; E\right), \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned} G_{RM}\left(u'', u'; E\right) &= \int_0^\infty d\Lambda \int Du\left(\tau\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\Lambda \left[\frac{M}{2}\dot{u}^2\right.\right. \\ &+ \left(\frac{2(E - \frac{\mu}{q})}{\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{4M}\right) + \left(\frac{2(E + \frac{\mu}{q})}{\alpha^2} + \frac{\hbar^2}{4M}\right) \tanh u \\ &\left.\left. + \left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\lambda}{q} - E\right) - \frac{\hbar^2}{8M}\right] \frac{1}{\cosh^2 u}\right] d\tau\right\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

est la foncton de Green associée au potentiel de Rosen-Morse général [12], dont l'intégrale de chemin a été analysée par plusieurs auteurs [14, 32, 33, 34].

Comme il a été montré dans la littérature [11, 34], la fonction de Green $G_{RM}(u'', u'; E)$ est reliée à la fonction de Green relative au mouvement d'une masse ponctuelle soumise à une barrière angulaire près de la surface d'une sphère à 4-dimensions pour $(\theta'' < \theta')$ par

$$\begin{aligned} G_{RM'}(u'', u'; E) &= \frac{1}{\sqrt{\sin\theta''\sin\theta'}} G(\theta'', \theta'; E_{PT'}) \\ &= \frac{M}{i\hbar}\Gamma(m_1 - l_E)\,\Gamma(l_E - m_1 + 1)\, d^{l_E}_{m_1,-m_2}(\theta'' - \pi) d^{l_E *}_{m_1,m_2}(\theta'), \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec $\tanh u = -\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $u \in \left]\frac{1}{\alpha}\ln\sqrt{\frac{1+q}{q}}, +\infty\right[$ et $u'' > u'$. $E_{PT'}$ est l'énergie d'une particule soumise à un potentiel du type Pöschl-Teller de forme plus générale [34]. De plus, nous avons posé

$$\begin{cases} l_E = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16} + \frac{2M}{\hbar^2}E_{PT'}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ E_{PT'} = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\lambda}{q} - E\right) - \frac{\hbar^2}{32M}, \end{cases} \tag{4.19}$$

et

$$m_1 = \sqrt{\frac{-2ME}{\alpha^2\hbar^2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q}}\,,\ m_2 = \sqrt{\frac{-2ME}{\alpha^2\hbar^2}} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q}} \tag{4.20}$$

Les valeurs de m_1 et m_2 sont retenues par des considérations de convergence de la fonction d'onde du système. Il s'ensuit que la fonction de Green radiale (4.15) s'écrit pour $\theta'' < \theta'$

$$\begin{aligned} G_l(r'', r'; E) &= \frac{M}{i\hbar\alpha}\Gamma(m_1 - l_E)\,\Gamma(l_E - m_1 + 1) \\ &\times \frac{\exp\left[\frac{1}{2}(u'' + u')\right]}{\left[\cosh u''\cosh u'\right]^{\frac{1}{2}}} d^{l_E}_{m_1,-m_2}(\theta'' - \pi) d^{l_E *}_{m_1,m_2}(\theta'), \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.3 Spectre d'énergie et fonctions d'onde

Les pôles de la fonction de Green (4.18) correspondent aux valeurs permises de l'énergie des états liés du système. Ces pôles sont justement ceux de la fonction d'Euler $\Gamma\left(m_1 - l_E\right)$ qui se trouvent quand $m_1 - l_E = -n_r$ pour $n_r = 0, 1, 2, ...$Ils sont donnés par l'équation

$$\sqrt{\frac{-2ME}{\alpha^2\hbar^2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q}} - \sqrt{\frac{2M}{\alpha^2\hbar^2}\left(\frac{\lambda}{q} - E\right)} = -n_r. \tag{4.22}$$

De cette équation (4.22), nous déduisons que le spectre d'énergie relatif au potentiel effectif écranté déformé est de la forme :

$$E^q_{n_r,l} = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8M}\frac{\left\{\left[n_r + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q^2}}\right)\right]^2 - \frac{2M}{\alpha^2\hbar^2}\left(\frac{\lambda-\mu}{q} + \frac{\mu}{q^2}\right)\right\}^2}{\left[n_r + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q^2}}\right)\right]^2}. \tag{4.23}$$

Les fonctions d'onde normalisées correspondantes peuvent être trouvées par approximation près des pôles $m_1 - l_E = -n_r$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(m_1 - l_E\right) &\approx \frac{(-1)^{n_r}}{n_r!}\frac{1}{m_1 - l_E + n_r} \\ &= \frac{(-1)^N}{n_r!}\frac{\hbar^2\alpha^2}{MN}\frac{\sqrt{-a}\left(\sqrt{-a} + N\right)}{E - E^q_{N,l}},\end{aligned} \tag{4.24}$$

avec

$$\sqrt{-a} = \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{\alpha^2\hbar^2 N}\left(\frac{\lambda-\mu}{q} + \frac{\mu}{q^2}\right) - N\right); N = n_r + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8M\mu}{\alpha^2\hbar^2 q^2}}\right). \tag{4.25}$$

En utilisant le comportement (4.24) et la relation de symétrie suivante des fonctions de Wigner [35]

$$d^L_{M_1,M_2}(\theta) = (-1)^{L-M_1} d^L_{M_1,-M_2}(\theta - \pi), \tag{4.26}$$

nous obtenons la contribution des états liés à l'expression de la fonction de Green (4.21) pour $\theta'' < \theta'$:

$$\begin{aligned} G_l\left(r'', r'; E\right) &= i\hbar \sum_{N=1}^{N_{\max}} \frac{\alpha\sqrt{-a}\left(\sqrt{-a}+N\right)}{E-E_{N,l}^q} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\left(u''+u'\right)\right]}{\left[\cosh u'' \cosh u'\right]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times d^{l_E}_{m_1,-m_2}(\theta''-\pi) d^{l_E *}_{m_1,m_2}(\theta'); \\ &= i\hbar \sum_{N=1}^{N_{\max}} \frac{\chi^{q*}_{N,l}(r')\chi^q_{N,l}(r'')}{E-E^q_{N,l}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Les fonctions d'onde normalisées pour le système soumis au potentiel effectif écranté déformé sont alors données par :

$$\chi^q_{N,l}\left(r\right) = \left[\alpha\sqrt{-a}\left(\sqrt{-a}+N\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\exp u}{\cosh u}\right)^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{1}{2}+N+\sqrt{-a}}_{\frac{1}{2}+l+\sqrt{-a},-\frac{1}{2}-l+\sqrt{-a}}\left(\theta\right). \tag{4.28}$$

En utilisant le lien entre les fonctions de Wigner et les fonctions hypergéométriques [35]

$$\begin{aligned} d^L_{M_1,M_2}\left(\theta\right) &= \left[\frac{\Gamma\left(L+M_1+1\right)\Gamma\left(L-M_2+1\right)}{\Gamma\left(L-M_1+1\right)\Gamma\left(L+M_2+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \frac{1}{\Gamma\left(M_1-M_2+1\right)} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1-M_2}{2}} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1+M_2}{2}} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-L+M_1, L+M_1+1, M_1-M_2+1; \frac{1-\cos\theta}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.29}$$

et en transformant les variables θ, u, y, ξ en la variable radiale (4.12), nous pouvons aussi exprimer (4.27) sous la forme :

$$\begin{aligned} \chi^q_{N,l}\left(r\right) &= \left[\frac{2\alpha\sqrt{-a}\left(\sqrt{-a}+N\right)\Gamma\left(N+2\sqrt{-a}+l+1\right)\Gamma\left(N+l+1\right)}{\Gamma\left(N-2\sqrt{-a}-l\right)\Gamma\left(N-l\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \frac{1}{\Gamma\left(2l+2\right)} \left(1-qe^{-\alpha r}\right)^{l+1} \left(qe^{-\alpha r}\right)^{\sqrt{-a}} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(1-N, N+2\sqrt{-a}+1, 2; 1-qe^{-\alpha r}\right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Pour que la solution (4.30) soit acceptable physiquement pour le problème des états liés, elle doit vérifier les conditions aux limites (régularité à l'origine et évanescence à l'infini) :

$$\chi^{q}_{n_r,l}\left(r\right)=0,\ \text{quand } r=0, \tag{4.31}$$

$$\chi^{q}_{n_r,l}\left(r\right)=0,\ \text{quand } r\rightarrow\infty. \tag{4.32}$$

La deuxième condition (4.32) est satisfaite quand $\sqrt{-a}>0$, c'est à dire

$$\frac{2M}{\alpha^2\hbar^2N}\left(\frac{\lambda-\mu}{q}+\frac{\mu}{q^2}\right)-N>0. \tag{4.33}$$

Par conséquent le paramètre q doit être nécessairement positif. Plus exactement, l'équation (4.33) détermine le nombre de ces états liés. La valeur de $N_{\max}$ est donnée par $N_{\max}=\left\{\frac{1}{\alpha\hbar}\sqrt{2M\left(\frac{\lambda-\mu}{q}+\frac{\mu}{q^2}\right)}\right\}$ =le plus grand entier inférieur à $\frac{1}{\alpha\hbar}\sqrt{2M\left(\frac{\lambda-\mu}{q}+\frac{\mu}{q^2}\right)}$.

Nous pouvons remarquer que le nombre des états liés augmente pour $0<q<1$ et diminue pour $q\geq1$. Par ailleurs, on voit que l'introduction du paramètre $q\geq1$ force le mouvement quantique à avoir lieu dans diffèrents intervalles du demi axe $r>0$. Cela ressemble à l'introduction d'un mur fini et inpénétrable au point $r=r_0$.

4.4 Le potentiel de Hulthén déformé

En posant $\mu=0$, c'est à dire $l=0$ dans l'expression (4.1), nous obtenons le potentiel de Hulthén déformé :

$$V_{eff}\left(r\right)=V\left(r\right)=-\frac{\lambda}{e^{\alpha r}-q}. \tag{4.34}$$

Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondant uniquement aux états s sont alors

$$E^{q}_{N,0}=-\frac{\hbar^2\alpha^2}{8M}\left(\frac{2M\lambda}{\hbar^2\alpha^2qN}-N\right)^2;N=1,2,3,...,N_{\max}=\left\{\frac{\sqrt{2M\frac{\lambda}{q}}}{\hbar\alpha}\right\}; \tag{4.35}$$

$$
\begin{aligned}
\chi_{N,l}^{q}(r) &= \left[\frac{2\alpha\sqrt{-a}\left(\sqrt{-a}+N\right)\Gamma\left(N+2\sqrt{-a}+1\right)}{\Gamma\left(N+2\sqrt{-a}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(1-qe^{-\alpha r}\right) \\
&\quad\times\left(qe^{-\alpha r}\right)^{\sqrt{-a}}\ {}_{2}F_{1}\left(1-N,N+2\sqrt{-a}+1,2;1-qe^{-\alpha r}\right). \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Pour la valeur particulière $q=1$, le potentiel de Hulthén déformé se réduit au potentiel de Hulthén standard.

4.5 Conclusion :

Nous avons présenté une solution simple par l'approche des intégrales de chemin pour le potentiel écranté déformé pour $q \geqslant 1$ et $r \in \left]r_0, \infty\right[$, en ramenant ce dernier au problème du potentiel général de Rosen-Morse à l'aide d'une transformation spatio-temporelle appropriée. Nous avons déterminé la fonction de Green sous forme compacte. Le spectre de l'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés ont été évalués de manière directe. La solution du potentiel de Hulthén déformé a été obtenue comme cas particulier. Les résultats obtenus sont en accord parfait avec ceux de la littérature $(q=1)$ [36, 37].

Chapitre 5

Potentiel déformé à quatre paramètres

5.1 Introduction

Parmi les potentiels centraux qui ont toujours joué un rôle particulier dans des traitements exacts ou approximatifs de problèmes d'intérêt physique, plusieurs potentiels exactement résolubles sont des fonctions exponentielles de la coordonnée spaciale et largement utilisés dans différentes branches de la physique. En 1999, Sun [38] a introduit une fonction énergie potentielle dépendant de quatre paramètres pour interpréter les spectres des molécules diatomiques en physique moléculaire et en chimie quantique. L'évaluation des niveaux d'énergie des états de vibration-rotation présente un degré de précision plus élevé avec ce type de potentiel que celle qui est obtenue en utilisant comme modèle le potentiel de Morse.

Par la fonction énergie potentielle à quatre paarmètres, Sun veut dire un potentiel à une dimension de la forme

$$v\left(r\right)=\frac{D_{e}\left(e^{\alpha}-\lambda\right)^{2}}{\left(e^{\eta r}-\lambda\right)^{2}}-\frac{2D_{e}\left(e^{\alpha}-\lambda\right)}{e^{\eta r}-\lambda}, \tag{5.1}$$

où D_e est la profondeur du puits de potentiel, r_e est la distance d'équilibre entre les deux noyaux, $\eta = \frac{\alpha}{r_e}$, α et λ sont des paramètres réels. Ce potentiel est construit de telle sorte qu'il se réduit au potentiel de Morse par élimination de la déformation décrite par le paramètre λ.

Récemment Jia et ses collaborateurs [39] ont tenté d'obtenir le spectre d'énergie exact relatif à ce potentiel en utilisant l'approche de l'invariance de forme et l'approximation WKB supersymétrique. Ce potentiel déformé est plutôt compliqué en ce qui concerne la formulation propre de la condition de quantification. Dans le cas où le paramètre de déformation λ est négatif, l'invariance de forme du potentiel n'est pas vérifiée comme on peut le voir facilement en examinant les équations obtenues par ces auteurs. Dans ce cas il est requis de résoudre une équation transcendante pour déterminer le spectre de l'énergie.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de discuter ce potentiel dans le cadre de l'approche des intégrales de chemin.

Le plan de notre discussion est le suivant : dans le second paragraphe, nous construisons l'intégrale de chemin associée au potentiel de Hulthén général pour $\lambda \geq 1$ et dans l'intervalle $]r_0, +\infty[$. La fonction de Green est donnée sous forme compacte ; à partir de laquelle nous obtenons le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées. Dans le troisième paragraphe, l'intégrale de chemin relative au potentiel de Woods-Saxon général $(\lambda < 0)$ est à son tour construite de façon similaire au cas précédent. La condition qui permet de déterminer le spectre d'énergie et les fonction d'onde non normalisées est aussi obtenue. Enfin, le dernier paragraphe sera une conclusion.

5.2 Potentiel de Hulthén général :

Quand le paramètre de déformation λ est positif, la fonction potentielle (5.1) est une généralisation du potentiel de Hulthén déformé. C'est une combinaison de deux potentiels centraux :

$$V\left(r\right)=\frac{2m}{\hbar^{2}}v\left(r\right)=\frac{a}{\left(e^{\eta r}-\lambda\right)^{2}}-\frac{b}{e^{\eta r}-\lambda}, \tag{5.2}$$

où nous avons introduit les nouvelles constantes $a=\frac{2m}{\hbar^{2}}A$, $b=\frac{2m}{\hbar^{2}}B$ et m est la masse réduite du système physique.

Pour trouver le spectre d'énergie exact et les fonctions d'onde des états s, nous pouvons utiliser le formalisme des intégrales de chemin comme une alternative à la technique de l'invariance de forme et à l'approximation WKB supersymétrique.

On commence par construire la fonction de Green pour $l=0$,

$$G_{0}\left(r'',r';E\right)=\frac{1}{r''r'}\int_{0}^{\infty}dS\ P_{0}\left(r'',r';S\right), \tag{5.3}$$

Suivant la procédure décrite dans le paragraphe (2.4) du chapitre 2, le noyau $P_{0}\left(r'',r';S\right)$ est donné par :

$$\begin{aligned} P_{0}(r'',r';S) &= [f_{r}(r'')f_{l}(r')]^{\frac{1}{4}}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_{s}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\prod_{j=1}^{N}\left[\int\frac{dr_{j}}{\sqrt{f(r_{j})}}\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m(\triangle r_{j})^{2}}{2\varepsilon_{s}\sqrt{f(r_{j})f(r_{j-1})}}\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-\ \varepsilon_{s}(V(r_{j})-E)\sqrt{f(r_{j})f(r_{j-1})}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Avant de passer à l'évaluation de l'intégrale de chemin (5.4), nous devons examiner la variation du potentiel $V(r_{j})$ suivant les valeurs du paramètre λ. Deux cas peuvent se présenter. Si $0<\lambda<1$, $V(r_{j})$ est continu dans tout l'intervalle $[0,+\infty[$. Mais si $\lambda\geqslant1$, $V(r_{j})$ présente une forte singularité au point $r=r_{0}=\frac{1}{\eta}\ln\lambda$ et dans ce cas, nous avons deux régions distinctes, l'une définie par l'intervalle$]0,r_{0}[$ et l'autre par l'intervalle $]r_{0},+\infty[$. Ceci amène à évaluer l'expression (5.4) dans les trois intervalles et suivant les valeurs de λ séparément.

Une étude complète de ce potentiel est en progression, mais dans ce chapitre, nous

nous restreignons au cas où $\lambda \geqslant 1$ et $r \in \left]r_0, +\infty\right[$.

A l'aide de la transformation spatiale $r \rightarrow \xi$, $r \in \left]r_0, +\infty\right[$ et $\xi \in \left]-\infty, +\infty\right[$, définie par :

$$r = \frac{1}{\eta} \ln\left[\exp\left(2\eta\xi\right) + \lambda\right]. \tag{5.5}$$

La fonction de transformation appropriée ou fonction régulatrice est alors définie par :

$$f\left[r\left(\xi\right)\right] = \frac{\exp\left(2\eta\xi\right)}{\cosh_{\lambda}^{2}\left(\eta\xi\right)} = \left[g'\left(\xi\right)\right]^{2}. \tag{5.6}$$

En effectuant le développement de la mesure et de l'action autour du point moyen, le terme en $\left(\Delta\xi_j\right)^4$ peut être évalué et remplacé par :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Delta\xi_j\right)^4 \right\rangle &= \int d\left(\Delta\xi_j\right) \left(\Delta\xi_j\right)^4 \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon_s}\left(\Delta\xi_j\right)^2\right] \\ &= 3\left(\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m}\right)^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Finalement, la fonction de Green (5.3) peut s'écrire ainsi

$$G_0\left(r'', r'; E\right) = \left[f\left(r''\right) f\left(r'\right)\right]^{\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} dS\ \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_{RM} S\right) P_{RM}\left(\xi'', \xi'; S\right), \tag{5.8}$$

où

$$E_{RM} = 2\left[E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{4}\right)\right] \tag{5.9}$$

et

$$\begin{aligned} P_{RM}\left(\xi'', \xi'; S\right) &= \int D\xi\left(S\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^S ds\left[\frac{m}{2}\dot{\xi}^2\right.\right. \\ &\quad +2\left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{4}\right)\right)\tanh_{\lambda}\left(\eta\xi\right) \\ &\quad \left.\left. + \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda} + b - \frac{\eta^2\lambda}{4}\right) - \lambda E\right]\frac{1}{\cosh_{\lambda}^{2}\left(\eta\xi\right)}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ce noyau représente l'intégrale de chemin associée au potentiel de Rosen-Morse [12] dépendant du paramètre de déformation λ. Pour ramener les fonctions hyperboliques λ-déformées aux fonctions hyperboliques habituelles, nous effectuons les transformations spatiale et temporelle suivantes

$$\begin{aligned} \xi = \frac{y}{\eta} &\rightarrow u = y - \ln\sqrt{\lambda}, \\ ds = \frac{d\tau}{\eta^2} &\text{ ou } S = \frac{\Lambda}{\eta^2} . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Sous ces changements de coordonnée et d'echelle temporelle, la fonction de Green (5.7) devient

$$G_0\left(r'', r'; E\right) = \frac{\left[f\left(r''\right) f\left(r'\right)\right]^{\frac{1}{4}}}{\eta r'' r'} G_{RM}\left(u'', u'; \tilde{E}\right), \tag{5.12}$$

avec la fonction de Green $G_{RM}\left(u'', u'; \tilde{E}\right)$ donnée par :

$$\begin{aligned} G_{RM'}\left(u'', u'; \tilde{E}\right) = & \int_0^\infty d\Lambda \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_{RM} \frac{\Lambda}{\eta^2}\right) \int Du\left(\tau\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\Lambda d\tau \left[\frac{m}{2}\dot{u}^2\right.\right. \\ & -\frac{2}{\eta^2}\left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{4}\right)\right) \tanh u \\ & \left.\left. + \frac{1}{\eta^2}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda} - \frac{\eta^2}{4}\right) - E\right] \frac{1}{\cosh^2 u}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec $\tilde{E} = \dfrac{E_{RM}}{\eta^2}$. Sa forme compacte est bien connue dans la littérature [11]

$$G_{RM'}\left(y'', y'; E\right) = \frac{m}{i\hbar}\Gamma(M_1 - L_E)\,\Gamma(L_E - M_1 + 1)\, d^{L_E}_{M_1,-M_2}(\theta'' - \pi) d^{L_E\,*}_{M_1,M_2}(\theta'); \theta'' < \theta', \tag{5.14}$$

où $d^{L_E}_{M_1,M_2}(\theta)$ est la fonction de Wigner [35] avec $\tanh u = -\cos\theta$, $\theta \in (0, \pi)$. Les indices

L_E, M_1 et M_2 sont définis par

$$L_E = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{a}{\eta^2\lambda^2} + \frac{b}{\eta^2\lambda} - \frac{2mE}{\eta^2\hbar^2}}, \tag{5.15}$$

$$M_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4a}{\eta^2\lambda^2}} + \sqrt{-\frac{2mE}{\eta^2\hbar^2}}, \tag{5.16}$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4a}{\eta^2\lambda^2}} + \sqrt{-\frac{2mE}{\eta^2\hbar^2}}. \tag{5.17}$$

Le spectre d'énergie pour les états liés peut être obtenu à partir des pôles de la fonction de Green (5.14). Ces pôles sont justement ceux de la fonction $\Gamma\left(M_1 - L_E\right)$ qui se présentent quand

$$M_1 - L_E = -n_r \tag{5.18}$$

pour $n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

En tenant compte des équations (5.15), (5.16) et (5.18) les niveaux d'énergie s'écrivent ainsi

$$E_{n_r} = -\frac{\hbar^2}{8m\lambda^2}\left(\frac{\left(P + n_r\lambda\eta\right)^2 - a - b\lambda}{\left(P + n_r\lambda\eta\right)}\right)^2, \tag{5.19}$$

où

$$P = \frac{\lambda\eta}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{\lambda^2\eta^2}}\right). \tag{5.20}$$

Pour trouver les fonctions d'onde, effectuons l'approximation de la fonction $\Gamma\left(M_1 - L_E\right)$ au voisinage des pôles (5.18) ainsi

$$\begin{aligned} \Gamma\left(M_1 - L_E\right) &\approx \frac{(-1)^{n_r}}{n_r!}\frac{1}{M_1 - L_E + n_r} \\ &= \frac{(-1)^{n_r}}{n_r!}\frac{\hbar^2\eta}{m}\frac{Q\left(P + n_r\eta\lambda - Q\lambda\right)}{\left(P + n_r\eta\lambda\right)\left(E - E_{n_r}\right)}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

avec

$$Q = \frac{\left(P + \lambda\eta n_r\right)^2 - a - b\lambda}{2\lambda\left(P + \lambda\eta n_r\right)}, \tag{5.22}$$

et utilisons la propriété de symétrie suivante de la fonction de Wigner [35] :

$$d^{L}_{M_1,M_2}(\theta) = (-1)^{L-M_1} d^{L}_{M_1,-M_2}(\theta-\pi). \tag{5.23}$$

Ceci nous permet d'écrire la partie discrète de la fonction de Green (5.12) comme suit

$$\begin{aligned} G_0\left(r'',r';E\right) &= -i\hbar\frac{\left[f\left(r''\right)f\left(r'\right)\right]^{\frac{1}{4}}}{r''r'}\sum_{n=1}^{n_{\max}}\eta\frac{Q\left(P+\lambda\eta n_r-Q\lambda\right)}{n_r!\left(P+\lambda\eta n_r\right)\left(E-E_{n_r}\right)} \\ &\quad\times d^{-\frac{1}{2}+n_r-\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta}}_{-\frac{1}{2}+\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta},\frac{1}{2}-\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta}}(\theta'')d^{-\frac{1}{2}+n_r+\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta}}_{-\frac{1}{2}+\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta},\frac{1}{2}-\frac{P}{\eta\lambda}-\frac{Q}{\eta}}(\theta') \\ &= i\hbar\sum_{n_r=1}^{n_{r\max}}\frac{\chi^{\lambda *}_{n_r}(r')\chi^{\lambda}_{n_r}(r'')}{E-E_{n_r}}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Il en résulte que les fonctions d'onde normalisées correspondantes au spectre d'énergie discret (5.19) sont

$$\chi^{q}_{n_r}\left(r\right) = \left[-\frac{Q\left(P+n_r\lambda\eta-\lambda Q\right)}{n_r!\left(P+n_r\lambda\eta\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{f^{\frac{1}{4}}\left(r\right)}{r}d^{-\frac{1}{2}+\frac{P}{\lambda\eta}-\frac{Q}{\eta}+n_r}_{-\frac{1}{2}+\frac{P}{\lambda\eta}-\frac{Q}{\eta},\frac{1}{2}-\frac{P}{\lambda\eta}-\frac{Q}{\eta}}\left(\theta\right). \tag{5.25}$$

En utilisant la relation entre les fonctions de Wigner et les fonctions hypergéométriques [35]

$$\begin{aligned} d^{L}_{M_1,M_2}\left(\theta\right) &= \left[\frac{\Gamma\left(L+M_1+1\right)\Gamma\left(L-M_2+1\right)}{\Gamma\left(L-M_1+1\right)\Gamma\left(L+M_2+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\frac{1}{\Gamma\left(M_1-M_2+1\right)}\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1-M_2}{2}}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1+M_2}{2}} \\ &\quad\times{}_2F_1\left(-L+M_1,L+M_1+1,\,M_1-M_2+1;\,\frac{1-\cos\theta}{2}\right), \end{aligned} \tag{5.26}$$

et en revenant à la variable initiale, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\chi_{n_r}^{\lambda}(r) &= \left[\frac{-Q\left(P+n_r\lambda\eta-\lambda Q\right)}{\left(P+n_r\lambda\eta\right)}\frac{\Gamma\left(n_r+\frac{2P}{\lambda\eta}\right)\Gamma\left(n_r+\frac{2P}{\lambda\eta}-\frac{2Q}{\eta}\right)}{n_r!\Gamma\left(n_r-\frac{2Q}{\eta}+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2P}{\lambda\eta}\right)}\left(1-\lambda e^{-\eta r}\right)^{\frac{P}{\lambda\eta}}\left(\lambda e^{-\eta r}\right)^{-\frac{Q}{\eta}} \\ &\quad\times\ {}_2F_1\left(-n_r, n_r+\frac{2P}{\lambda\eta}-\frac{2Q}{\eta}, \frac{2P}{\lambda\eta}; 1-\lambda e^{-\eta r}\right). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Afin que $\chi_{n_r}^{\lambda}(r)$ reste finie pour $r\to\infty$, on doit imposer la condition $Q<0$. Alors, compte tenu de (5.22) et (5.20), la valeur de $n_{r\,\max}$ dans (5.24) est fixée par :

$$n_{r\,\max}=\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4a}{\eta^2\lambda^2}}\right)+\frac{1}{\lambda\eta}\sqrt{a+b\lambda}\right\}. \tag{5.28}$$

Ici $\{k\}$ signifie le plus grand entier inférieur à k.

En posant $A=0$, $B=V_0$ et $\lambda=1$ dans l'expression (5.1), nous obtenons le potentiel de Hulthén standard :

$$V(r)=-\frac{V_0}{e^{\eta r}-1}. \tag{5.29}$$

Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde sont alors

$$E_N=-\frac{\hbar^2\eta^2}{8m}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2\eta^2N}-N\right)^2, N=1,2,3,...,\left\{\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar\eta}\right\}, \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\chi_N^1(r) &= \left[\eta P_N\left(N+\frac{1}{2}P_N\right)\left(N+P_N\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(1-e^{-\eta r}\right) \\ &\quad\times e^{-\frac{\eta P_N}{2}r}\ {}_2F_1\left(1-N, N+P_N+1, 2; 1-e^{-\eta r}\right), \end{aligned} \tag{5.31}$$

avec $P_N=\frac{2mV_0}{\hbar^2\eta^2N}-N$.

Ces résultats coincident avec ceux de la littérature [40, 36, 37].

5.3 Potentiel de Woods-Saxon général

Si maintenant nous supposons que le paramètre de déformation λ est négatif, la fonction potentielle (5.1) est cette fois-ci une généralisation du potentiel de Woods-Saxon déformé. Nous réécrivons (5.1) sous la forme

$$V(r) = \frac{2m}{\hbar^2} v(r) = \frac{a}{\left(e^{\eta r} + \lambda\right)^2} - \frac{b}{e^{\eta r} + \lambda}, \tag{5.32}$$

où nous avons fait absorber le signe moins dans le paramètre λ qui devient par conséquent positif. Pour ce type de potentiel, on peut procéder de la même manière que dans le paragraphe précédent pour construire la fonction de Green mais il plus commode d'effectuer les transformations spatiale et temporelle définies par :

$$r = \frac{1}{\eta} \ln \left[\exp(2\eta\xi) - \lambda\right], \tag{5.33}$$

$$\frac{dt}{ds} = f(r(\xi)), \tag{5.34}$$

avec la fonction de stabilisation donnée par :

$$f[r(\xi)] = \frac{\exp(2\eta\xi)}{\sinh_\lambda^2(\eta\xi)}. \tag{5.35}$$

Ces transformations nous permettent, après quelques calculs simples, d'écrire la fonction de Green sous la forme

$$G_0(r'', r'; E) = \left[f(r'') f(r')\right]^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty dS \, \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_{MR} S\right) P_{MR}(\xi'', \xi'; S), \tag{5.36}$$

où

$$E_{MR} = 2\left[E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{4}\right)\right] \tag{5.37}$$

et

$$P_{MR}\left(\xi'',\xi';S\right)=\int D\xi\left(S\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{0}^{S}ds\left[\frac{m}{2}\dot{\xi}^{2}+2\left(E+\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^{2}}+\frac{\eta^{2}}{4}\right)\right)\coth_{\lambda}\left(\eta\xi\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\frac{a}{\lambda}-b-\frac{\eta^{2}\lambda}{4}\right)-\lambda E\right]\frac{1}{\sinh_{\lambda}^{2}\left(\eta\xi\right)}\right]\right\}. \tag{5.38}$$

C'est le propagateur associé au potentiel de Manning Rosen [41] défini en termes des fonctions hyperboliques déformées. Pour simplifier cette intégrale (5.38), nous allons introduire la nouvelle variable y, liée à ξ par la relation :

$$y=\eta\xi-\ln\sqrt{\lambda} \tag{5.39}$$

et nous posons

$$ds=\frac{ds'}{\eta^{2}}\qquad\text{ou encore}\qquad S=\frac{S'}{\eta^{2}}. \tag{5.40}$$

En reportant ces changements dans l'intégrale (5.38), nous obtenons la forme familière pour le propagateur relatif au potentiel de Manning-Rosen

$$P_{MR}\left(y'',y';S'\right)=\int Dy\left(S'\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{0}^{S'}ds'\left[\frac{m}{2}\dot{y}^{2}+\frac{2}{\eta^{2}}\left[E+\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\frac{a}{\lambda^{2}}+\frac{\eta^{2}}{4}\right)\right]\coth y\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\hbar^{2}}{2m\eta^{2}}\left(\frac{a}{\lambda^{2}}-\frac{b}{\lambda}-\frac{\eta^{2}}{4}-\frac{2mE}{\hbar^{2}}\right)\frac{1}{\sinh^{2}y}\right]\right\}. \tag{5.41}$$

La solution par l'intégrale de chemin de ce potentiel est bien connue [11]. Explicitement, la forme compacte de la fonction de Green est donnée par :

$$\begin{aligned} G\left(r'', r'; E\right) &= \frac{m}{i\hbar\eta}\left[\frac{\exp\eta\left(\xi''+\xi'\right)}{sh_\lambda\xi''\ sh_\lambda\xi'}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(M_1-L_E\right)\Gamma\left(L_E+M_1+1\right)}{\Gamma\left(M_1+M_2+1\right)\Gamma\left(M_1-M_2+1\right)} \\ &\times\left(\frac{2}{1+\coth y'}\frac{2}{1+\coth y''}\right)^{\frac{M_1+M_2+1}{2}}\left(\frac{\coth y'-1}{\coth y'+1}\frac{\coth y''-1}{\coth y''+1}\right)^{\frac{M_1-M_2}{2}} \\ &\times\ {}_2F_1\left(M_1-L_E, L_E+M_1+1, M_1+M_2-1; \frac{\coth y'-1}{\coth y'+1}\right) \\ &\times\ {}_2F_1\left(M_1-L_E, L_E+M_1+1, M_1-M_2+1; \frac{2}{1+\coth y''}\right), \end{aligned} \tag{5.42}$$

où nous avons introduit les notations :

$$L_E = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a}{\lambda^2\eta^2}+1}, \tag{5.43}$$

$$M_{1,2} = \sqrt{\frac{a}{\lambda^2\eta^2}-\frac{b}{\lambda\eta^2}-\frac{2mE}{\hbar^2\eta^2}}\pm\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}. \tag{5.44}$$

En tenant compte de la transformation (5.33), il résulte de l'expression de la fonction de Green (5.42) que les fonctions d'onde des états liés s'expriment en termes de la fonction hypergéométrique ainsi :

$$\begin{aligned} \chi\left(r\right) &= N\left(\frac{1}{1+\lambda e^{-\eta r}}\right)^{\tilde{\beta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\left(\frac{\lambda e^{-\eta r}}{1+\lambda e^{-\eta r}}\right)^{\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}} \\ &\times\ {}_2F_1\left(1+\tilde{\beta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-\frac{P}{\eta\lambda}, \tilde{\beta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+\frac{P}{\eta\lambda}; 2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+1; \frac{\lambda e^{-\eta r}}{1+\lambda e^{-\eta r}}\right), \end{aligned} \tag{5.45}$$

où

$$\frac{P}{\eta\lambda} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4a}{\eta^2\lambda^2}}\ , \qquad \tilde{\beta} = \frac{M_1+M_2}{2}, \tag{5.46}$$

et N est une constante de normalisation. Notons que (5.20) et (5.46) sont identiques en ce qui concerne la valeur du paramètre P adopté dans la référence [39]. Ceci montre que P est une quantité positive. Par conséquent la deuxième valeur de P obtenue dans la référence [39] est à écarter. Nous devons vérifier maintenant que ces fonctions satisfont aux conditions aux limites :

$$\chi(r) \to 0 \qquad \text{quand} \qquad r \to \infty \tag{5.47}$$

et

$$\chi(r) = 0 \qquad \text{quand} \qquad r = 0. \tag{5.48}$$

Pour simplifier la vérification, effectuons le changement de variable

$$x = \frac{1}{e^{\eta(r-R)} + q} \tag{5.49}$$

et posons

$$\lambda = qe^{\eta R} \ , \ (q > 0) \, . \tag{5.50}$$

En reportant (5.49) dans (5.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} \chi(r) &= N\,(qx)^{\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\,(1-qx)^{\tilde{\beta}} \\ &\times {}_2F_1\left(1+\tilde{\beta}+\sqrt{\tfrac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-\tfrac{P}{\eta\lambda},\tilde{\beta}+\sqrt{\tfrac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+\tfrac{P}{\eta\lambda};2\sqrt{\tfrac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+1;qx\right). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Lorsque $r \to \infty$, c'est à dire quand $x \to 0$, la fonction d'onde $\chi(r)$ se comporte comme

$$\chi(r=\infty) \to \exp\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}R\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right). \tag{5.52}$$

Ce comportement asymptotique est correct puisque, pour des raisons physiques, la fonction d'onde $\chi(r)$ doit être bornée à l'infini. Comme il n'est pas possible de déterminer les niveaux d'énergie du spectre discret à partir de cette expression, examinons la deuxième condition (5.48). Pour déterminer le comportement de $\chi(r)$ pour $r = 0$ (ce qui correspond à $x = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q}e^{-\eta R}\right) \approx \frac{1}{q}$) nous utilisons la formule de transformation de

Gauss (Ref. [24], p.1043, Eq.(9.131.2))

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\,{}_2F_1(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)\\ &\quad+(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\\ &\quad\times\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)\,.\end{aligned}\tag{5.53}$$

d'où le résultat

$$\begin{aligned}\chi(r=0)\approx &N\Gamma\left(1+2\sqrt{\tfrac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}\right)\left[\frac{\Gamma\left(-2\tilde{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-\frac{P}{\eta\lambda}-\tilde{\beta}\right)\Gamma\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+\frac{P}{\eta\lambda}-\tilde{\beta}\right)}\right.\\ &\left.+\frac{\Gamma\left(2\tilde{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-\frac{P}{\eta\lambda}+\tilde{\beta}\right)\Gamma\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+\frac{P}{\eta\lambda}+\tilde{\beta}\right)}(1-qx)^{-2\tilde{\beta}}\right].\end{aligned}\tag{5.54}$$

Pour discuter cette expression, remarquons que puisque $\tilde{\beta}^2<0$, nous pouvons poser

$$\tilde{\beta}=i\mu,\tag{5.55}$$

et au voisinage de $r=0$, on a, à l'approximation d'ordre zéro

$$1-qx\approx\frac{1}{q}e^{-\eta R}.\tag{5.56}$$

En définissant ϕ_1, ϕ_2 et ψ tels que

$$\left\{\begin{array}{c}\phi_1=\arg\Gamma\left(\frac{P}{\lambda\eta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+i\mu\right),\\ \phi_1=\arg\Gamma\left(-\frac{P}{\lambda\eta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+i\mu\right),\\ \psi=\arg\Gamma(2i\mu)\end{array}\right.\tag{5.57}$$

et en servant de l'expression (5.54), la condition (5.48), qui détermine le spectre d'énergie de notre problème, peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{1}{q}e^{-\eta R}\right)^{i\mu}+\exp\left[2i\psi-2i\phi_1-2i\phi_2-2i\ \arctan\left(\frac{\mu}{-\frac{P}{\lambda\eta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)\right]\left(\frac{1}{q}e^{-\eta R}\right)^{-i\mu} = 0, \tag{5.58}$$

ou aussi bien

$$\cos\left[\mu\left(\eta R+\ln q\right)+\psi-\phi_1-\phi_2-\arctan\left(\frac{\mu}{-\frac{P}{\lambda\eta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)\right]=0. \tag{5.59}$$

Autrement

$$\mu\left(\eta R+\ln q\right)+\psi-\phi_1-\phi_2-\arctan\left(\frac{\mu}{-\frac{P}{\lambda\eta}+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)=\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}, \tag{5.60}$$

avec $n=0,\pm1,\pm2,...$. Ainsi établie, cette équation nous fournit la relation entre l'énergie E et les paramètres A, B, et q du potentiel.

En particulier, en posant $a=0$, $b=V_0$ et $q=1$ ou $\lambda=e^{\eta R}$ dans l'expression (5.32), nous obtenons le potentiel de Woods-Saxon

$$V\left(r\right)=\frac{-\tilde{V}_0}{e^{\eta(r-R)}+1}. \tag{5.61}$$

avec $\tilde{V_0}=V_0e^{-\eta R}$.

D'après (5.46), (5.44) et (5.55), on a

$$\frac{P}{\eta\lambda}=1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\beta}=\frac{1}{\eta}\sqrt{-\tilde{V}_0-\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}=i\mu_0, \tag{5.62}$$

et dans ce cas l'équation (5.54) devient

$$(1-x)^{i\mu_0}+\frac{\Gamma\left(2i\mu_0\right)\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-i\mu_0\right)\Gamma\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}-i\mu_0\right)}{\Gamma\left(-2i\mu_0\right)\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+i\mu_0\right)\Gamma\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+i\mu_0\right)}\left(1-x\right)^{-i\mu_0}=0. \quad (5.63)$$

En définissant les constantes ϕ et ψ telles que

$$\begin{cases}\phi=\arg\Gamma\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}+i\mu_0\right), \\ \psi=\arg\Gamma\left(2i\mu_0\right),\end{cases} \quad (5.64)$$

nous pouvons écrire l'équation (5.63) ainsi

$$\exp\left[i\psi-2i\phi-i\ \arctan\left(\frac{\mu_0}{\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)\right]\cos\left[\eta\mu_0R+\psi-2\phi-\arctan\left(\frac{\mu_0}{\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)\right]=0. \quad (5.65)$$

ou encore

$$\eta\mu_0R+\psi-2\phi-\arctan\left(\frac{\mu_0}{\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2\eta^2}}}\right)=\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2};n=0,\pm1,\pm2,.... \quad (5.66)$$

Ceci représente en effet la relation entre l'énergie E et la profondeur du potentiel V_0, pour des valeurs données des paramètres R et η. Remarquons que ce résultat est en parfait accord avec celui obtenu par Flugge [42].

5.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons traité une fonction énergie potentielle dépendant de quatre paramètres dans le cadre de l'approche des intégrales de chemin de Feynman. Nous avons présenté une étude rigoureuse qui nous a permis d'obtenir les énergies et les fonctions d'onde du spectre discret. Le traitement de ce potentiel est rendu possible en distinguant le cas où $\lambda > 0$ de celui où $\lambda < 0$ contrairement à ce qui est affirmé par Jia et ses collaborateurs dans l'étude qu'ils ont réalisée en utilisant l'approche de l'invariance de forme et l'approximation WKB supersymétrique. La solution obtenue par ces derniers ne peut pas être considérée comme correcte dans le cas où le paramètre λ est négatif. Le superpotentiel défini par Jia et ses collaborateurs dépend de deux paramètres P et Q. Au paramètre $\lambda < 0$ correspond une valeur négative du paramètre P et la condition que la fonction d'onde $R(r)$ reste finie pour $r \to \infty$ entraine que Q doit être négatif quelque soit le signe de λ. Il s'ensuit que P et Q de signe négatif ne vérifiient pas la deuxième expression des équations (10) de Jia et ses collaborateurs. Par conséquent la valeur négative de P n'est pas valable. Ceci signifie qu'un superpotentiel dépendant d'un paramètre P négatif n'existe pas. On voit de cette façon que la méthode supersymétrique ne s'applique pas dans le cas du potentiel de Woods-Saxon général ($\lambda < 0$).

Chapitre 6

Particule de Klein-Gordon dans des potentiels vecteur et scalaire du type Rosen-Morse déformé

6.1 Introduction

Il est bien connu que les équations de Klein-Gordon et de Dirac admettent des solutions exactes pour un nombre limité de potentiels composés d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire tels que le potentiel de Coulomb et le potentiel scalaire de Lorentz [43], le potentiel de Coulomb, un potentiel scalaire en $\frac{1}{r}$ et le potentiel d'un monopôle magnétique [44], le potentiel vecteur et le potentiel scalaire du type du potentiel de Hulthèn [45].

Durant ces dernières années, la recherche des solutions exactes des équations de Klein-Gordon et de Dirac a reçu un regain d'intérêt. En supposant que le potentiel scalaire soit égal au potentiel vecteur, plusieurs auteurs avaient déterminé les états liés pour les ondes s à travers la résolution de l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac avec des potentiels typiques [46, 47], parmi lesquels on peut citer le potentiel de Rosen-Morse déformé [48] défini par :

$$V(x) = V_1 \tanh_q \alpha x - \frac{V_2}{\cosh_q^2 \alpha x}, \tag{6.1}$$

où le paramètre sans dimension q est $-1 \leq q < 0$ ou $q > 0$ et α est une constante positive.

A notre connaissance, seul le système relativiste constitué par une particule de Klein-Gordon dans un potentiel vecteur plus un potentiel scalaire du type Hulthèn a été traité récemment par l'approche des intégrales de chemin de Feynman [37].

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre l'application de l'approche des intégrales de chemin à l'étude du problème d'une particule relativiste sans spin soumise à l'action d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire égaux du type défini par l'expression (6.1). Dans le second paragraphe, nous évaluons la fonction de Green. Ensuite, dans le troisième paragraphe, nous déduisons le spectre et les fonctions d'onde des états liés. Dans le quatrième paragraphe, nous considérons le potentiel de Rosen-Morse standard, le potentiel d'Eckart standard, la version PT-symétrique du potentiel de Rosen-Morse déformé et celle du potentiel d'Eckart déformé comme des cas particuliers. Enfin, le dernier paragraphe sera une conclusion.

6.2 Fonction de Green

Considérons la fonction de Green $G(x'', x')$ qui obéit à l'équation de Klein-Gordon

$$\left[\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 - (S + M)^2\right] G\left(x''_\mu, x'_\mu\right) = \delta^2\left(x''_\mu - x'_\mu\right), \tag{6.2}$$

où $e\vec{A} = \binom{V(x)}{0}$ et M est la masse d'une particule de charge e dans l'espace-temps plat de Minkowski muni de la métrique $g_{\mu\nu} = diag(1, -1)$. En utilisant la représentation intégrale de Schwinger [17] , la solution de l'équation différentielle (6.2) peut s'écrire comme suit :

$$G\left(x''_\mu, x'_\mu\right) = \frac{1}{2i} \int_0^\infty d\lambda \left\langle x''_\mu \right| \exp\left\{\frac{i}{2}\left[\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)^2 - (S + M)^2\right]\lambda\right\} \left|x'_\mu\right\rangle. \tag{6.3}$$

ou encore

$$\begin{aligned} G\left(x'',t'';x',t'\right) &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty d\lambda \left\langle x'',t''\right| \exp\left\{\frac{i}{2}\left[-P_x^2+\left(P_0-V\right)^2\right.\right. \\ &- \left.\left.\left(S+M\right)^2\right]\lambda\right\}\left|x',t'\right\rangle . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Notre but est de trouver l'énergie E_n et la fonction d'onde $\chi_n^q(x)$ en évaluant (6.4) par l'intégrale de chemin. Dans cette représentaton, la fonction de Green est

$$G\left(x'',t'';x',t'\right)=\frac{1}{2i}\int_0^\infty d\lambda P\left(x'',t'';x',t';\lambda\right), \tag{6.5}$$

avec $P\left(x'',t'';x',t';\lambda\right)$ le propagateur donné sous forme canonique compacte par :

$$\begin{aligned} P\left(x'',t'';x',t';\lambda\right) &= \left\langle x'',t''\right|\exp\left\{\frac{i}{2}\left[-P_x^2+\left(P_0-V\right)^2-\left(S+M\right)^2\right]\lambda\right\}\left|x',t'\right\rangle \\ &= \int Dx\left(\tau\right)Dt\left(\tau\right)\int\frac{DP_x\left(\tau\right)DP_0\left(\tau\right)}{\left(2\pi\right)^2}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_0^\infty\left[-P_x\dot{x}\right.\right. \\ &+ \left.\left. P_0\dot{t}+\frac{1}{2}\left[-P_x^2+\left(P_0-V\right)^2-\left(S+M\right)^2\right]\right]d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Sous forme discrète, il s'écrit

$$P\left(x'',t'';x',t';\lambda\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left[dx_j dt_j\right]\prod_{j=1}^{N+1}\left[\int\frac{d\left(P_x\right)_j d\left(P_0\right)_j}{\left(2\pi\right)^2}\right]\exp\left[i\sum_{j=1}^{N+1}A_j\right], \tag{6.7}$$

où l'action élémentaire est

$$\begin{aligned} A_1\left(j\right) &= -\left(P_x\right)_j\Delta x_j+\left(P_0\right)_j\Delta t_j \\ &+\varepsilon_\tau\left[-\left(P_x\right)_j^2+\left(\left(P_0\right)_j-V\left(x_j\right)\right)^2-\left(S\left(x_j\right)+M\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{6.8}$$

En intégrant tout d'abord par rapport aux variables t_j, nous obtenons N distributions de Dirac $\delta\left((P_0)_j-(P_0)_{j+1}\right)$. Ensuite, l'intégration sur les variables $(P_0)_j$ nous donne

$$(P_0)_1=(P_0)_2=...=(P_0)_{N+1}=E. \tag{6.9}$$

Le propagateur $P\left(x'',t'',x',t';\lambda\right)$ devient alors

$$P\left(x'',t'';x',t';\lambda\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dE\exp\left[iE\left(t''-t'\right)\right]P\left(x'',x';\lambda\right), \tag{6.10}$$

où le noyau $P\left(x'',x';\lambda\right)$ est donné par :

$$P\left(x'',x';\lambda\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left[\int dx_j\right]\prod_{j=1}^{N+1}\left[\int\frac{d\left(P_x\right)_j}{2\pi}\right]\exp\left[i\sum_{j=1}^{N+1}A_2\left(j\right)\right], \tag{6.11}$$

avec

$$A_2\left(j\right)=-\left(P_x\right)_j\Delta x_j+\frac{\varepsilon_\tau}{2}\left[-\left(P_x\right)_j^2+\tilde{E}^2+\frac{\tilde{V}_1}{\cosh_q^2\left(\alpha x_j\right)}+\tilde{V}_2\tanh_q\left(\alpha x_j\right)\right] \tag{6.12}$$

et

$$\tilde{E}^2=E^2-M^2,\quad \tilde{V}_1=2\left(E+M\right)V_1,\quad \tilde{V}_2=2\left(E+M\right)V_2. \tag{6.13}$$

En substituant (6.10) dans (6.5), nous remarquons que le terme dépendannt du temps ne contient pas la variable pseudo-temporelle λ. Donc, nous pouvons réécrire la fonction de Green (6.5) sous la forme

$$G\left(x'',t'',x',t'\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dE\exp\left[iE\left(t''-t'\right)\right]G\left(x'',x'\right), \tag{6.14}$$

avec

$$G\left(x'',x'\right)=\frac{1}{2i}\int\limits_{0}^{\infty}d\lambda P\left(x'',x';\lambda\right). \tag{6.15}$$

En intégrant par rapport aux variables $(P_x)_j$, l'expression du noyau $P\left(x'',x';\lambda\right)$ est donnée dans l'espace des configurations par :

$$
\begin{aligned}
P\left(x'', x'; \lambda\right) \quad = \quad & \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \left[\int dx_j\right] \prod_{j=1}^{N+1} \left(\frac{1}{2i\pi\varepsilon_\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N+1} \left[\frac{\Delta x_j^2}{2\varepsilon_\tau} \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{\varepsilon_\tau}{2} \left(\tilde{E}^2 + \frac{\tilde{V}_1}{\cosh_q^2\left(\alpha x_j\right)} + \tilde{V}_2 \tanh_q\left(\alpha x_j\right) \right) \right] \right\}. \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

En changeant $(\alpha x, \varepsilon_\tau)$ en $\left(u, \frac{\varepsilon_s}{\alpha^2}\right)$ et en posant $y = u - \ln\sqrt{q}$ dans le noyau $P\left(x'', x'; \lambda\right)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
G\left(x'', x'\right) \quad = \quad & \frac{1}{2i\alpha} \int_0^\infty dS \int D\left(s\right) \exp\left\{ i \int_0^S \left[\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\tilde{E}^2}{2\alpha^2} + \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha} \tanh y \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{\tilde{V}_1}{2\alpha^2 q} \frac{1}{\cosh^2 y} \right] ds \right\}, \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

avec le paramètre $S = \alpha^2 \lambda$.

La forme (6.17) représente la fonction de Green associée au potentiel de Rosen-Morse général [12] étudié par plusieurs auteurs dans le cadre des intégrales de chemin [14, 32, 33, 11].

$$
G\left(x'', x'\right) = \frac{1}{2i\alpha} G_{RM'}\left(y'', y'; E_{RM'}\right). \qquad (6.18)
$$

Suivant l'expression de $G_{RM'}\left(y'', y'; E_{RM'}\right)$ donnée dans la littérature [11, 22], la forme compacte de (6.18) s'écrit pour $\theta'' < \theta'$,

$$
G\left(x'', x'\right) = -\frac{1}{2\alpha} \Gamma\left(M_1 - L_E\right) \Gamma\left(L_E - M_1 + 1\right) d^{L_E}_{M_1, -M_2}\left(\theta'' - \pi\right) d^{L_E *}_{M_1, M_2}\left(\theta'\right), \qquad (6.19)
$$

avec $\tanh y = -\cos\theta, \theta \in (0, \pi)$. Compte tenu du lien entre la fonction de Green relative au potentiel de Pöschl-Teller de forme plus générale [11], nous avons posé

$$\left\{\begin{array}{c} L_E=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16}+2E_{PT'}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ E_{PT'}=\frac{\tilde{V}_1}{2\alpha^2 q}+\frac{3}{32} \end{array}\right. \tag{6.20}$$

et

$$M_1=\frac{1}{2\alpha}\left(\sqrt{\tilde{V}_2-\tilde{E}^2}+\sqrt{-\tilde{V}_2-\tilde{E}^2}\right), \quad M_2=\frac{1}{2\alpha}\left(\sqrt{-\tilde{V}_2-\tilde{E}^2}-\sqrt{\tilde{V}_2-\tilde{E}^2}\right). \tag{6.21}$$

Le choix des valeurs de M_1 et M_2 est dicté par la condition de convergence de la fonction d'onde puisque les fonctions de Wigner $d^L_{M_1,M_2}(\theta)$ sont reliées aux fonctions hypergéométriques par la formule :

$$\begin{aligned} d^L_{M_1,M_2}(\theta) &= \left[\frac{\Gamma(L+M_1+1)\,\Gamma(L-M_2+1)}{\Gamma(L-M_1+1)\,\Gamma(L+M_2+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(M_1-M_2+1)} \\ &\quad\times\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1-M_2}{2}}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{M_1+M_2}{2}} \\ &\quad\times\,{}_2F_1\left(-L+M_1, L+M_1+1, M_1-M_2+1; \frac{1-\cos\theta}{2}\right), \end{aligned} \tag{6.22}$$

6.3 Spectre d'énergie et fonctions d'onde

Le spectre de l'énergie pour les états liés peut être obtenu à partir des pôles de la fonction de Green (6.19), c'est à dire, quand $M_1 - L_E = -n$ dans la fonction d'Euler $\Gamma(M_1 - L_E)$, où $n = 0, 1, 2, \ldots$.

En tenant compte de (6.20) et (6.21), les valeurs de l'énergie sont alors données par :

$$\begin{aligned} M^2-E_n^2 &= \alpha^2\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8(E_n+M)V_1}{q\alpha^2}}\right)^2 \\ &\quad+\frac{(E_n+M)^2V_2^2}{\alpha^2}\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8(E_n+M)V_1}{q\alpha^2}}\right)^{-2}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

C'est une équation du cinquième degré en E_n où le nombre quantique $n = 0, 1, 2, ...$.

Les fonctions d'onde non normalisées sont

$$\begin{aligned}\chi_n^q(x) &= (\cosh_q(\alpha x))^{p+w} \exp[\alpha(w-p)x] \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-n, 1-n-2\eta, -2w+1; \frac{q}{q+e^{2\alpha x}}\right),\end{aligned} \tag{6.24}$$

avec

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}\left[n + \eta + \dfrac{(E_n + M)V_2}{\alpha^2}\dfrac{1}{n+\eta}\right], \\ w = \frac{1}{2}\left[n + \eta - \dfrac{(E_n + M)V_2}{\alpha^2}\dfrac{1}{n+\eta}\right], \end{cases} \tag{6.25}$$

où

$$\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{8(E_n + M)V_1}{\alpha^2 q}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.26}$$

En utilisant le lien entre les fonctions hypergéométriques et les polynômes de Jacobi (Ref. [24], p. 1043, Eq. (8.962.1))

$${}_2F_1\left(l + \alpha + \beta + 1, -l, 1 + \alpha; \frac{1-t}{2}\right) = P_n^{(\alpha,\beta)}(t), \tag{6.27}$$

nous pouvons aussi exprimer (6.24) sous la forme

$$\chi_n^q(x) = (\cosh_q(\alpha x))^{p+w} \exp[(w-p)\alpha x]\, P_n^{(-2w,-2p)}(\tanh_q(\alpha x)). \tag{6.28}$$

Notons qu'avec les conditions aux limites :

$$\chi_n^q(x) \to 0 \qquad \text{quand} \qquad x \to \pm\infty \tag{6.29}$$

les paramètres p et w doivent être négatifs.

6.4 Cas particuliers :

6.4.1 Potentiel de Rosen-Morse standard

En choisissant $q = 1$ et en changeant V_2 en $(-V_2)$ dans l'expression (6.1), nous obtenons le potentiel de Rosen-Morse standard

$$V(x) = -\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha x)} + V_2 \tanh(\alpha x), \tag{6.30}$$

où V_1, V_2 et α sont des constantes positives. Ce potentiel était introduit à l'origine par Rosen-Morse pour discuter les états vibrationnels des molécules polyatomiques [12].

Dans ce cas, les valeurs de l'énergie sont données par l'équation

$$M^2 - E_n^2 = \frac{(E_n + M)^2 V_2^2}{\alpha^2} \frac{1}{(n+\delta)^2} + \alpha^2 (n+\delta)^2, \tag{6.31}$$

avec

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8(E_n + M) V_1}{\alpha^2}}. \tag{6.32}$$

De l'équation (6.28), nous pouvons déduire les fonctions d'onde non normalisées correspondantes aux niveaux d'énergie définis par l'équation (6.31) :

$$\chi_n^1(x) = [\cosh(\alpha x)]^{(p+w)} \exp[(w-p)\alpha x] P_n^{(-2w,-2p)}(\tanh(\alpha x)), \tag{6.33}$$

où

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}\left[n + \delta + \frac{(E_n + M) V_2}{\alpha^2} \frac{1}{n+\delta}\right], \\ w = \frac{1}{2}\left[n + \delta - \frac{(E_n + M) V_2}{\alpha^2} \frac{1}{n+\delta}\right]. \end{cases} \tag{6.34}$$

6.4.2 Potentiel d'Eckart

En posant $q = -1$ et en changeant V_1 en $(-V_1)$, le potentiel (6.1) se ramène au potentiel d'Eckart standard [49]

$$V(x) = \frac{V_1}{\cosh^2(\alpha x)} - V_2 \tanh(\alpha x). \tag{6.35}$$

Le spectre de l'énergie se déduit directement à partir de l'équation (6.24)

$$M^2 - E_n^2 = \frac{(E_n + M)^2 V_2^2}{\alpha^2} \frac{1}{(n+\delta)^2} + \alpha^2 (n+\delta)^2, \tag{6.36}$$

et les fonctions d'onde non normalisées (6.28) deviennent dans ce cas :

$$\chi_n^{-1}(x) = [\sinh(\alpha x)]^{(p+w)} \exp[(w-p)\alpha x] P_n^{(-2w,-2p)}(\coth(\alpha x)). \tag{6.37}$$

6.4.3 Version PT-symétrique du potentiel de Rosen-Morse déformé

Avant d'aborder l'étude de cette version, rappelons brièvement les propriétés de la symétrie PT. Un potentiel $V(x)$ est dit PT-symétrique quand

$$PT\ V(x) = V(x)\ \ PT. \tag{6.38}$$

Ici P est l'opérateur parité ou reflexion spatiale et T représente l'opérateur renversement du sens du temps. Leurs actions sur les opérateurs associés à la position et à la quantité de mouvement sont données par :

$$P : \begin{cases} x \to -x \text{ ou } x \to \xi - x, \\ \qquad p \to -p, \end{cases} \tag{6.39}$$

$$T:\begin{cases} x \to -x, \\ p \to -p, \\ i \to -i. \end{cases} \tag{6.40}$$

D'où, explicitement, la condition pour qu'un potentiel soit PT-symétrique est

$$V(-x) = V^*(x) \qquad \text{ou} \qquad V(\xi - x) = V^*(x). \tag{6.41}$$

Revenons maintenant au potentiel (6.1) et remplaçons V_2 par iV_2, nous obtenons la version PT-symétrique du potentiel de Rosen-Morse déformé :

$$V(x) = -\frac{V_1}{\cosh_q^2(\alpha x)} - iV_2 \tanh_q(\alpha x), \tag{6.42}$$

où V_1, α et q sont des constantes positives.

Dans ce cas, le spectre de l'énergie s'obtient directement à partir de l'équation (6.23)

$$M^2 - E_n^2 = -\frac{(E_n + M)^2 V_2^2}{\alpha^2} \frac{1}{(n+\delta)^2} + \alpha^2 (n+\delta)^2. \tag{6.43}$$

De l'équation (6.24), nous pouvons déduire les fonctions d'onde non normalisées pour la version PT-symétrique du potentiel de Rosen-Morse déformé correspondant aux niveaux d'énergie définis par l'équation (6.43),

$$\chi_n^q(x) = [\cosh_q(\alpha x)]^{(p+w)} \exp[(w-p)\alpha x]\, P_n^{(-2w,-2p)}(-\tanh_q(\alpha x)), \tag{6.44}$$

où

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}\left[n + \delta + i\frac{(E_n + M)V_2}{\alpha^2}\frac{1}{n+\delta}\right], \\ w = \frac{1}{2}\left[n + \delta - i\frac{(E_n + M)V_2}{\alpha^2}\frac{1}{n+\delta}\right]. \end{cases} \tag{6.45}$$

6.4.4 Version PT-symétrique du potentiel d'Eckart déformé

En changeant V_1 en $(-V_1 q_c)$, V_2 en (iV_2) et en posant $q = -q_c$ et $q_c = e^{2\alpha\varepsilon}$, dans l'expression (6.1), nous obtenons la version PT-symétrique du potentiel d'Eckart [49]

$$V(x) = \frac{V_1 q_c}{\sinh^2_{q_c}(\alpha x)} - iV_2 \coth_{q_c}(\alpha x), \tag{6.46}$$

où V_1 est une constante réelle positive et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4} < \varepsilon < 0$.

Dans ce cas, le spectre de l'énergie et les fonctions d'onde peuvent être déduits des équations (6.23) et (6.24),

$$M^2 - E_n^2 = -\frac{(E_n + M)^2 V_2^2}{\alpha^2} \frac{1}{(n+\delta)^2} + \alpha^2 (n+\delta)^2, \tag{6.47}$$

$$\chi_n^{q_c}(x) = [\sinh_{q_c}(\alpha x)]^{(p+w)} \exp[(w-p)\alpha x] P_n^{(-2w,-2p)}(-\coth_{q_c}(\alpha x)), \tag{6.48}$$

avec p et w définis par les expressions (6.45).

6.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons calculé exactement la fonction de Green relative à une particule relativiste sans spin soumise à l'action d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire égaux du type du potentiel de Rosen-Morse déformé dans le cadre de l'approche des intégrales de chemin de Feynman. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde non normalisées correspondantes à l'état s sont obtenus. La correction due à la variation relativiste de la masse est incluse dans l'énergie de manière non perturbative. Nos résultats sont en accord avec ceux obtenus à travers la résolution de l'équation de Klein-Gordon [48]. Le potentiel de Rosen-Morse standard, le potentiel d'Eckart standard et leurs versions PT-symétriques déformées ont été tous considérés comme des cas particuliers.

Chapitre 7

Particule de Klein-Gordon dans des potentiels vecteur et scalaire de Hulthén déformés

7.1 Introduction

Durant ces dernières années, les systèmes quantiques caractérisés par des Hamiltoniens non hermitiens ont été l'objet d'un intérêt considérable pour leur importance pratique dans des domaines variés de la physique tels que la physique nucléaire [50, 51, 52], la théorie des champs [53], la matière condensée [54, 55], la physique du solide [56] et la biologie [57]. Récemment, plusieurs auteurs [58, 59, 60, 61, 62] ont étudié l'équation de Schrödinger à une dimension pour des systèmes gouvernés par des Hamiltoniens avec des potentiels complexes invariants sous une transformation PT où P dénote l'opérateur parité (reflexion d'espace) et T représente le renversement du sens du temps. Ils ont montré que cette invariance est un critère suffisant pour obtenir un spectre d'énergie réel et positif.

Pour un potentiel complexe non hermitien, la symétrie PT n'est pas une condition nécessaire pour la réalité du spectre d'énergie [63]. Par la suite, la η-pseudo-hermiticité,

$\eta H\eta^{-1} = H^{+}$, où η est un automorohisme linéaire hermitien, est un concept proposé comme condition nécessaire, mais non suffisante pour assurer la réalité du spectre d'énergie pour les potentiels complexes non hermitiens [64]. Suivant Mostafazadeh [65] tout Hamiltonien qui admet un ensemble complet de vecteurs propres biorthonormaux constitue une condition nécessaire et suffisante pour la réalité du spectre d'énergie. Depuis lors, de nombreux potentiels complexes ont été analysés en utilisant différentes méthodes. Comme exemple, nous pouvons citer le potentiel de Hulthén général étudié récemment à l'aide de la méthode de Nikiforov-Uvarov [66]. Les solutions obtenues à travers la résolution de l'équation de Klein-Gordon ne sont pas satisfaisantes. Par conséquent, nous nous proposons de réexaminer ce problème dans le cadre des intégrales de chemin.

7.2 Potentiel vecteur et scalaire de Hulthén déformés

Les potentiels vecteur et scalaire de Hulthén déformés sont définis par

$$V_q\left(x\right) = -\frac{V_0}{e^{\alpha x} - q} \qquad , \qquad S_q\left(x\right) = -\frac{S_0}{e^{\alpha x} - q}, \tag{7.1}$$

où α est la portée des potentiels et q est un parmètre de déformation. Pour V_0, S_0 et α réels et des valeurs particulières de q, ces potentiels se réduisent à des types bien connus. Ainsi pour $q = 1$, on a des potentiels de Hulthén standard et pour $q = -1$, des potentiel de Woods-saxon.

7.3 Evaluation de l'intégrale de chemin

Pour obtenir la solution par l'intégrale de chemin des potentiels (7.1), nous considérons la fonction de Green qui obéit à l'équation de Klein-Gordon

$$\left[\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2-\left(M+S_q\right)^2\right]G\left(x''_\mu,x'_\mu\right)=\delta^2\left(x''_\mu-x'_\mu\right), \tag{7.2}$$

où $e\vec{A}=\binom{V_q(x)}{0}$ et M est la masse d'une particule de charge e sur l'espace-temps plat de Minkowski muni de la métrique $g_{\mu\nu}=diag\left(1,-1\right)$.

Pour résoudre ce problème, nous remarquons qu'il est possible d'utiliser la formulation de l'intégrale de chemin relativiste appliquée récemment au problème de Kepler sans spin. Suivant cette procédure la fonction de Green est exprimée ainsi [67]

$$G\left(x''_\mu,x'_\mu\right)=\frac{1}{2}\lambda_c\int\limits_0^\infty dL\int D_\rho\Phi\left[\rho\right]\int\frac{D^dx}{\left(\sqrt{\rho}\right)^d}e^{-A}, \tag{7.3}$$

où A est l'action définie en fonction d'un certain paramètre $\rho\left(\lambda\right)$ de telle sorte que, dans le contexte classique, elle coïncide avec l'action classique A_{cl}.

L'intégration sur tous les chemins dépend de la longueur

$$L=\int\limits_{\lambda_a}^{\lambda_b}\rho\left(\lambda\right)d\lambda \tag{7.4}$$

qui est invariante suivant un certain choix de jauge. Pour fixer la jauge arbitraire, la fonction $\Phi\left(\rho\right)$ peut être prise simplement égale à $\delta\left(\rho-1\right)$.

Cependant, ce calcul peut être simplement fait en partant de la représentation intégrale de Schwinger pour exprimer la fonction de Green, ainsi [17, 68, 15, 69]

$$G\left(x''_\mu,x'_\mu\right)=\frac{1}{2i}\int\limits_0^\infty dS'\left\langle x''_\mu\right|\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2-\left(M+S_q\right)^2\right]S'\right\}\left|x'_\mu\right\rangle. \tag{7.5}$$

Avant d'entreprendre le calcul de la fonction de Green (7.5), nous devons examiner la variation des potentiels $V_q(x)$ et $S_q(x)$ suivant les valeurs du paramètre q. Pour $q < 0$, $V_q(x)$ et $S_q(x)$ sont continus sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$ et pour $q > 0$, deux cas peuvent se présenter. Si $0 < q < 1$, $V_q(x)$ et $S_q(x)$ sont continus sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. Mais si $q \geqslant 1$, $V_q(x)$ et $S_q(x)$ présentent une forte singularité au point $x = x_0 = \frac{1}{\alpha}\ln q$ et dans ce cas, nous avons deux régions distinctes, l'une définie par l'intervalle $]0, x_0[$ et l'autre par l'intervalle $]x_0, +\infty[$. Ceci nous amène à évaluer l'expression (7.5) dans les quatre intervalles et suivant les valeurs de q séparemment.

Une étude complète de ce potentiel est en cours de réalisation, mais dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où $q \geqslant 1$ et $x \in]x_0, +\infty[$. Notre but est de trouver les valeurs de l'énergie E_n et les fonctions d'onde normalisées $\psi_n(x)$ en évaluant (7.5).

A cause de la singularité au point $x = x_0 = \frac{1}{\alpha}\ln q$, la forme discrète de l'expression (7.5) n'est pas définie. En ce point il se produit un affaissement des chemins. Pour obtenir une intégrale de chemin stable, nous introduisons une fonction régulatrice appropriée [11] et nous écrivons (7.5) sous la forme :

$$G(x'', t'', x', t') = \frac{1}{2i}\int_0^\infty dS' P(x'', t'', x', t'; S'), \tag{7.6}$$

où l'intégrale de chemin transformée est explicitement donnée sous la forme canonique par :

$$\begin{aligned} P(x'', t'', x', t'; S') &= f_R(x'') f_L(x') \langle x'', t''| \exp\left\{\frac{i}{2} s' f_L(x) \left[-P_x^2 + \right.\right. \\ &\left.\left. + (P_0 - V_q)^2 - (M + S_q)^2\right] f_R(x)\right\} |x', t'\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_R(x'')f_L(x')\int Dx(s')Dt(s') \\
&\times\int\frac{DP_x(s')DP_0(s')}{(2\pi)^2}\exp\left\{i\int_0^{S'}\left[-P_x\dot{x}+P_0\dot{t}\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{1}{2}f_L(x)\left[-P_x^2+(P_0-V_q)^2-(M+S_q)^2\right]f_R(x)\right]ds'\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_R(x'')f_L(x')\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left[\int dx_j dt_j\right] \\
&\times\prod_{j=1}^{N+1}\left[\int\frac{d(P_x)_j\,d(P_0)_j}{(2\pi)^2}\right]\exp\left[iA_1^N\right], \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

avec l'action discrète

$$
\begin{aligned}
A_1^N &= \sum_{j=1}^{N+1}\left\{-(P_x)_j\,\Delta x_j+(P_0)_j\,\Delta t_j+\frac{\varepsilon_{s'}}{2}f_L(x_j)\left[-(P_x)_j^2\right.\right. \\
&\left.\left.+\left((P_0)_j-V_q(x_j)\right)^2-(M+S_q(x_j))^2\right]f_R(x_{j-1})\right\} \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

et

$$
\varepsilon_{s'}=\frac{S'}{N+1}=ds'=\frac{d\tau}{f_L(x_j)\,f_R(x_{j-1})}\ ,\ d\tau=\varepsilon_\tau=\frac{\lambda}{N+1}. \qquad (7.9)
$$

La fonction régulatrice a été définie par Kleinert [11] ainsi

$$
f(x)=f_L(x)\,f_R(x)=f^{1-\lambda'}(x)\,f^{\lambda'}(x)\,. \qquad (7.10)
$$

Nous remarquons d'abord que les intégrations sur les variables t_j donnent N distributions de Dirac $\delta\left((P_0)_j-(P_0)_{j+1}\right)$. En intégrant ensuite sur les variables $(P_0)_j$ nous trouvons

$$
(P_0)_1=(P_0)_2=...=(P_0)_{N+1}=E. \qquad (7.11)
$$

Le propagateur $P\left(x'',t'',x',t';S'\right)$ devient alors

$$P\left(x'',t'',x',t';S'\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dE\exp\left[iE\left(t''-t'\right)\right]P\left(x'',x';S'\right), \tag{7.12}$$

où le noyau $P\left(x'',x';S'\right)$ est donné par

$$P\left(x'',x';S'\right)=f_R\left(x''\right)f_L\left(x'\right)\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left[\int dx_j\right]\prod_{j=1}^{N+1}\left[\int\frac{d\left(P_x\right)_j}{2\pi}\right]\exp\left[iA_2^N\right], \tag{7.13}$$

avec

$$\begin{aligned}A_2^N &= \sum_{j=1}^{N+1}\Big[-\left(P_x\right)_j\Delta x_j+\frac{\varepsilon_{s'}}{2}f_L\left(x_j\right)\Big[-\left(P_x\right)_j^2+\left(E-V_q\left(x_j\right)\right)^2\\ &\quad-\left(M+S_q\left(x_j\right)\right)^2\Big]f_R\left(x_{j-1}\right)\Big].\end{aligned} \tag{7.14}$$

Par substitution de l'expression (7.12) dans (7.6), nous remarquons que le terme dépendant du temps t ne contient pas S'. Donc nous pouvons réécrire la fonction de Green (7.6) sous la forme

$$G\left(x'',t'',x',t'\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dE\exp\left[iE\left(t''-t'\right)\right]G\left(x'',x'\right), \tag{7.15}$$

avec

$$G\left(x'',x'\right)=\frac{1}{2i}\int\limits_{0}^{\infty}dS'P\left(x'',x';S'\right). \tag{7.16}$$

Pour simplifier le calcul du noyau $P\left(x'',x';S'\right)$, nous posons $\lambda'=\frac{1}{2}$, c'est à dire, nous choisissons un développement autour du point moyen. Le résultat final ne dépend d'aucun point. Alors, en effectuant l'intégration par rapport aux variables $\left(P_x\right)_n$, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
P\left(x'',x';S'\right) &= \frac{\left[f\left(x''\right)f\left(x'\right)\right]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2i\pi\varepsilon_{s'}}}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\left[\int\frac{dx_j}{\sqrt{2i\pi\varepsilon_{s'}f\left(x_j\right)}}\right] \\
&\quad\times\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{\left(\Delta x_j\right)^2}{2\varepsilon_{s'}\sqrt{f\left(x_j\right)f\left(x_{j-1}\right)}}-\frac{\varepsilon_{s'}}{2}\left[\left(M+S_q\left(x_j\right)\right)^2\right.\right.\right. \\
&\quad-\left.\left.\left.\left(E-V_q\left(x_j\right)\right)^2\right]\sqrt{f\left(x_j\right)f\left(x_{j-1}\right)}\right]\right\}. \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

7.4 Potentiels de Hulthén déformés

Les potentiels de Hulthén déformés sont obtenus en choisissant q positif. Comme nous nous limitons ici à l'étude de ces potentiels avec $q \geq 1$ et uniquement dans l'intervalle $]x_0,+\infty[$, et afin d'écrire une intégrale de chemin stable, nous opérons la transformation $x \to \xi$ définie par

$$
x = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\exp\left(2\alpha\xi\right)+q\right] \qquad (7.18)
$$

qui permet d'étendre l'intervalle $]x_0,+\infty[$ de la variable x en l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ de lavariable ξ et nous introduisons la fonction régulatrice appropriée

$$
f\left(x\left(\xi\right)\right) = \frac{\exp\left(2\alpha\xi\right)}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi\right)} = g'^2\left(\xi\right). \qquad (7.19)
$$

Sous ces transformations, le noyau (7.17) devient

$$
\begin{aligned}
P\left(x'',x';S'\right) &= \frac{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\left(\xi''+\xi'\right)\right]}{\left[\cosh_q\left(\alpha\xi''\right)\cosh_q\left(\alpha\xi'\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\left[\frac{1}{2i\pi\varepsilon_{s'}}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\prod_{j=1}^{N}\left[\int d\xi_j\right]\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{\left(\Delta\xi_j\right)^2}{2\varepsilon_{s'}}+\frac{1}{8\varepsilon_{s'}}\left[\left(\frac{g''}{g'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{g'''}{g'}\right]\left(\Delta\xi_j\right)^4\right.\right. \\
&-\varepsilon_{s'}\alpha^2\left(\frac{\nu^2}{q^2}+\mu^2\right)+\frac{\varepsilon_{s'}\alpha^2}{2}\left(\frac{\nu^2}{q}+q\mu^2+\beta^2\right)\frac{1}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi_j\right)} \\
&+\left.\left.\varepsilon_{s'}\alpha^2\left(\frac{\nu^2}{q^2}-\mu^2\right)\tanh_q\left(\alpha\xi_j\right)\right]\right\}, \qquad (7.20)
\end{aligned}
$$

où nous avons posé

$$\mu=\frac{1}{\alpha}\sqrt{M^2-E^2},\quad \beta=\frac{1}{\alpha}\sqrt{2EV_0+2MS_0}\ \text{ et }\ \nu=\frac{1}{\alpha}\sqrt{S_0^2-V_0^2}. \tag{7.21}$$

Dans les équations (7.19) et (7.20), nous avons introduit les fonctions hyperboliques déformées qui sont définies par [26]

$$\sinh_q x=\frac{1}{2}\left(e^x-qe^{-x}\right)\ ,\ \cosh_q x=\frac{1}{2}\left(e^x+qe^{-x}\right)\ ,\ \tanh_q x=\frac{\sinh_q x}{\cosh_q x}, \tag{7.22}$$

où q est un paramètre reel. Quand q est complexe, les fonctions hyperboliques déformées définies ci-dessus sont appelées fonctions hyperboliques déformées généralisées.

Notons que le terme en $(\Delta\xi_n)^4$ dans le noyau (7.20) contribue significativement à l'intégrale de chemin. Il peut être évalué en utilisant la formule [31]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2+\beta x\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2+\frac{3\beta}{4\alpha^2}\right)dx \tag{7.23}$$

valable pour $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ et $|\alpha|$ supposé trés grand. L'intégrale de chemin transformée (7.20) prend alors la forme :

$$\begin{aligned}P\left(x'',x';S'\right) &= \frac{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\left(\xi''+\xi'\right)\right]}{\left[\cosh_q\left(\alpha x''\right)\cosh_q\left(\alpha x'\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\int D\xi\left(s'\right)\exp\left\{i\int_0^{S'}\left[\frac{\dot{\xi}^2}{2}\right.\right.\\ &\quad -\alpha^2\left(\frac{\nu^2}{q^2}+\mu^2+\frac{1}{4}\right)+\alpha^2\left(\frac{\nu^2}{q^2}-\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tanh_q\left(\alpha\xi\right)\\ &\quad \left.\left.+\ \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\nu^2}{q}+\mu^2 q+\beta^2-\frac{q}{4}\right)\frac{1}{\cosh_q^2\left(\alpha\xi\right)}\right]ds'\right\}\ .\end{aligned} \tag{7.24}$$

En effectuant le changement $(\alpha\xi,\varepsilon_{s'})$ en $(u,\alpha^2\sigma)$ et en insérant (7.24) dans (7.16), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
G\left(x'',x'\right) \;=\;& \frac{1}{2i\alpha}\frac{\exp\left[\frac{1}{2}\left(u''+u'\right)\right]}{\left[\cosh_q u''\cosh_q u'\right]^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} dS''\int Du\left(S''\right)\exp\left\{i\int_0^{S''}\left[\frac{\dot{u}^2}{2}\right.\right. \\
& -\left(\frac{\nu^2}{q^2}+\mu^2+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{\nu^2}{q^2}-\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tanh_q u \\
& \left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\nu^2}{q}+\mu^2 q+\beta^2-\frac{q}{4}\right)\frac{1}{\cosh_q^2 u}\right]ds''\right\}\;, \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

avec $s''=\alpha^2 s'$.

En posant $y=u-\ln\sqrt{q}$, nous obtenons

$$
G\left(x'',x'\right)=\frac{1}{2i\alpha}\frac{\exp\left[\frac{1}{2}\left(y''+y'\right)\right]}{\left[\cosh y''\cosh y'\right]^{\frac{1}{2}}}G_{RM'}\left(y'',y';E\right) \qquad (7.26)
$$

où

$$
\begin{aligned}
G_{RM'}\left(y'',y';E\right) \;=& \int_0^{\infty} dS''\int Dy\left(S''\right)\exp\left\{i\int_0^{S''}\left[\frac{\dot{y}^2}{2}+\left(\frac{\nu^2}{q^2}-\mu^2+\frac{1}{4}\right)\tanh y\right.\right. \\
& \left.\left.-\frac{1}{2q}\left(\frac{\nu^2}{q}+\mu^2 q+\beta^2-\frac{q}{4}\right)\frac{1}{\cosh^2 y}-\left(\frac{\nu^2}{q^2}+\mu^2+\frac{1}{4}\right)\right]ds''\right\} \qquad (7.27)
\end{aligned}
$$

est la fonction de Green associée au potentiel général de Rosen-Morse dont l'intégrale de chemin a été analysée par differents auteurs [32, 33, 14, 34]. Comme il a été montré dans la littérature [11, 34], la fonction de Green $G_{RM}\left(y'',y';E\right)$ est reliée à la fonction de Green relative au mouvement d'une masse ponctuelle soumise à une barrière angulaire près de la surface d'une sphère à 4 dimensions par

$$
\begin{aligned}
G_{RM}\left(y'',y';E\right) &= \frac{1}{\sqrt{\sin\theta''\sin\theta'}}G\left(\theta'',\theta';E_{PT'}\right) \\
&= -i\frac{\Gamma\left(m_1-l_E\right)\Gamma\left(m_1+l_E+1\right)}{\Gamma\left(m_1+m_2+1\right)\Gamma\left(m_1-m_2+1\right)} \\
&\times\left(\frac{1+\tanh y'}{2}\right)^{\frac{m_1-m_2}{2}}\left(\frac{1+\tanh y''}{2}\right)^{\frac{m_1-m_2}{2}} \\
&\times\left(\frac{1-\tanh y'}{2}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}\left(\frac{1-\tanh y''}{2}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}} \\
&\times {}_2F_1\left(-l_E+m_1,l_E+m_1+1,m_1-m_2+1;\frac{1+\tanh y'}{2}\right) \\
&\times {}_2F_1\left(-l_E+m_1,l_E+m_1+1,m_1+m_2+1;\frac{1-\tanh y''}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

avec $\tanh y=-\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $y\in\left]-\infty,+\infty\right[$ et $y''>y'$.

Ici la masse ponctuelle et la constante de Planck sont considérées égales à l'unité. En plus, nous avons posé

$$l_E=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16}+2E_{PT'}\right)^{\frac{1}{2}}\ , \tag{7.29}$$

$$E_{PT'}=\frac{1}{2}\left(\mu^2+\frac{\beta^2}{q}+\frac{\nu^2}{q^2}\right)-\frac{1}{32} \tag{7.30}$$

et

$$m_1=\mu+\tilde{\delta}+\frac{1}{2}\ \ ,\ \ m_2=\mu-\tilde{\delta}-\frac{1}{2} \tag{7.31}$$

avec

$$\tilde{\delta}_\pm=-\frac{1}{2}\pm\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{7.32}$$

Dans la suite, nous allons prendre $\tilde{\delta}=\tilde{\delta}_+$ pour éviter la chute de la masse sur le centre [70].

7.5 Etats liés

En considérant le cas où les paramètres V_0, S_0 et α qui interviennent dans la définition des potentiels (7.1) sont tous réels, les pôles de la fonction de Green (7.28) correspondent aux valeurs permises de l'énergie pour les états liés du système. Ces pôles sont ceux de la fonction d'Euler $\Gamma\left(m_1 - l_E\right)$ qui se présentent quand $m_1 - l_E = -n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ils sont donnés par

$$\mu = \frac{\frac{\beta^2}{q} - (n+1)^2 - \tilde{\delta}\,(2n+1)}{2\left(n + \tilde{\delta} + 1\right)}. \tag{7.33}$$

Ensuite, de (7.33) et en utilisant (7.21), nous trouvons le spectre d'énergie relatif aux potentiels de Hulthén déformés

$$E_n^q\left(\alpha, V_0, S_0\right) = \frac{1}{2}\frac{V_0(\alpha^2 qN - 2S_0 M) \pm \alpha\kappa\sqrt{qMNS_0 + q^2M^2N - \frac{\alpha^2q^2N^2}{4}}}{\alpha^2q^2N + S_0^2}, \tag{7.34}$$

où

$$\kappa = \alpha q\,(2n+1) + \sqrt{\alpha^2q^2 + 4\,(S_0^2 - V_0^2)}, \tag{7.35}$$

et

$$N = (n+1)^2 + \tilde{\delta}\,(2n+1)\,. \tag{7.36}$$

Des états liés existent si κ est réel, c'est à dire si

$$V_0^2 - S_0^2 \leq \frac{\alpha^2 q^2}{4} \tag{7.37}$$

et le nombre $n_{\max}$ des états liés est égal au plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$n_{\max} < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4\nu^2}{q^2}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha q}\left[(2Mq + S_0 + V_0)\,(2Mq + S_0 - V_0)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.38}$$

qui est obtenue en imposant la condition

$$MS_0 + qM^2 - \frac{\alpha^2 qN}{4} > 0. \tag{7.39}$$

L'existence des deux signes dans l'expression (7.34) est une caratéristique des énergies en mécanique quantique relativiste. Son interprétation est évidente dans le cadre de la théorie quantique des champs.

D'autre part, il est évident que, pour les états liés, nous devons imposer la condition que seules les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ qui sont proportionnelles à ${}_2F_1\left(-l_E + m_1, l_E + m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1; \frac{1}{2}(1 - \tanh y)\right)$, avec

$$l_E = -\frac{1}{2} + \left(\mu^2 + \frac{\beta^2}{q} + \frac{\nu^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } m_1 \in R \tag{7.40}$$

sont permises. Il s'ensuit alors que

$$-M - \frac{S_0}{q} < E_n - \frac{V_0}{q} < M + \frac{S_0}{q} \text{ et } -M < E_n < M. \tag{7.41}$$

Les fonctions d'onde correspondantes peuvent être trouvées par approximation au voisinage des pôles $m_1 - l_E \approx -n$;

$$\begin{aligned} \Gamma(m_1 - l_E) &\approx \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{m_1 - l_E + n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{2\mu_n(\mu_n + \tilde{n})\alpha^2}{\tilde{n}(A^2+1)\left[\bar{E}^2 - E^2\right]}, \end{aligned} \tag{7.42}$$

où

$$\mu_n = \frac{1}{\alpha}\sqrt{M^2 - E_n^2}\ , \quad A = \frac{V_0}{\alpha q \tilde{n}}\ , \quad \tilde{n} = n + \tilde{\delta} + 1, \tag{7.43}$$

et

$$\bar{E} = E + \frac{AM}{(A^2+1)\tilde{n}}\left(\frac{S_0}{\alpha q} - \frac{\alpha N}{2M}\right). \tag{7.44}$$

En utilisant le comportement (7.40), nous obtenons la contribution des états liés à la fonction de Green (7.28)

$$\begin{aligned}
G_{RM'}^{bound}\left(y'',y';E\right) \;&=\; 2i\alpha^2\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mu_n\left(\mu_n+\tilde{n}\right)}{\tilde{n}\left(A^2+1\right)\left(\bar{E}^2-E_n^2\right)}\frac{\Gamma\left(\tilde{n}+2\mu_n+\tilde{\delta}+1\right)}{\Gamma\left(2\mu_n+1\right)\Gamma\left(2\tilde{\delta}+2\right)} \\
&\times\left(\frac{1-\tanh y'}{2}\right)^{\mu_n}\left(\frac{1+\tanh y'}{2}\right)^{\tilde{\delta}+\frac{1}{2}} \\
&\times\left(\frac{1-\tanh y''}{2}\right)^{\mu_n}\left(\frac{1+\tanh y''}{2}\right)^{\tilde{\delta}+\frac{1}{2}} \\
&\times\ {}_2F_1\left(-n,\tilde{n}+2\mu_n+\tilde{\delta}+1,2\tilde{\delta}+2;\frac{1+\tanh y'}{2}\right) \\
&\times\ {}_2F_1\left(-n,\tilde{n}+2\mu_n+\tilde{\delta}+1,2\mu_n+2;\frac{1-\tanh y''}{2}\right). \qquad (7.45)
\end{aligned}$$

En insérant (7.43) dans (7.26), nous arrivons à

$$G\left(x'',x'\right)=\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{\psi_n\left(x''\right)\psi_n^*\left(x'\right)}{\left(A^2+1\right)\left(\bar{E}^2-E_n^2\right)}\quad . \qquad (7.46)$$

Nous pouvons déduire les fonctions d'onde normalisées des états liés en revenant à la variable initiale x en considérant les transformations inverses $y\to u\to\xi\to x$ et en utilisant la formule de transformation de Gauss (Ref. [24], p. 1043, Eq.(9.131.2))

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,b,c;z\right) \;&=\; \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}\ {}_2F_1\left(a,b,a+b-c+1;z\right) \\
&+\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(a+b-c\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}\left(1-z\right)^{c-a-b}\ {}_2F_1\left(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z\right). \qquad (7.47)
\end{aligned}$$

Sachant que le second terme de la dernière relation est nul du fait que la fonction d'Euler $\Gamma\left(a\right)$ est infinie ($a=-n\leq 0$) et compte tenu du lien entre les fonctions hypergéométriques et les polynômes de Jacobi (Ref. [24], p. 952, Eq.(8.406.1))

$$P_l^{(\alpha,\beta)}\left(t\right)=\frac{\Gamma\left(l+\alpha+1\right)}{l!\Gamma\left(\alpha+1\right)}F\left(l+\alpha+\beta+1,-l,\alpha+1;\frac{1-t}{2}\right)\ , \qquad (7.48)$$

et de la propriété

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=F(\beta,\alpha,\gamma;z) \tag{7.49}$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\psi_{n,q}(x) &= \left[\frac{2\alpha\mu_n(\tilde{n}+\mu_n)\,n!\Gamma(\tilde{n}+2\mu_n+1)}{\tilde{n}\Gamma\left(\tilde{n}+\tilde{\delta}+1\right)\Gamma(n+2\mu_n+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times q^{\mu_n}\left(1-qe^{-\alpha x}\right)^{\tilde{\delta}+1}e^{-\mu_n\alpha x}P_n^{\left(2\mu_n,2\tilde{\delta}+1\right)}\left(1-2qe^{-\alpha x}\right) \end{aligned}\tag{7.50}$$

Notons que la fonction d'onde $\psi_{n,q}(x)$ satisfait le comportement asymptotique $\psi_{n,q}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} e^{-\mu_n x}$ lorsque n satisfait la condition de restriction (7.38).

7.6 Cas particuliers

7.6.1 Premier cas : Potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén

En posant $q=1$ dans les expressions (7.1), nous obtenons les potentiels vecteur et scalaire de Hulthén :

$$V(x)=-\frac{V_0}{e^{\alpha x}-1} \quad , \quad S(x)=-\frac{S_0}{e^{\alpha x}-1}. \tag{7.51}$$

Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde convenablement normalisées correspondants seulement aux états s peuvent être déduits des expressions (7.34) et (7.50),

$$\begin{aligned}E_n^1(\alpha,V_0,S_0) &= \frac{MV_0}{\alpha^2N+S_0^2}\left(\frac{\alpha^2N}{2M}-S_0\right)\pm\frac{\alpha^2M\sqrt{N+\nu^2}}{\alpha^2N+S_0^2} \\ &\quad\times\sqrt{\frac{N}{M}\left(M+S_0-\frac{\alpha^2N}{4M}\right)}, \end{aligned}\tag{7.52}$$

$$\begin{aligned}\psi_{n,q=1}(x) &= \left[\frac{2\alpha\mu_n(n+\delta_1+\mu_n+1)\,n!\Gamma(n+\delta_1+2\mu_n+2)}{(n+\delta_1+1)\,\Gamma(n+2\delta_1+2)\,\Gamma(n+2\mu_n+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\left(1-e^{-\alpha x}\right)^{\delta_1+1}e^{-\mu_n\alpha x}P_n^{(2\mu_n,2\delta_1+1)}\left(1-2e^{-\alpha x}\right), \end{aligned}\tag{7.53}$$

où

$$\begin{cases} N=(n+1)^2+\delta_1(2n+1), \\ \delta_1=-\dfrac{1}{2}+\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\alpha^2}\left(S_0^2-V_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{cases}\tag{7.54}$$

avec

$$V_0^2-S_0^2\leq\frac{1}{4\alpha^2}\tag{7.55}$$

et

$$\begin{aligned} n_{\max} &< -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\frac{4}{\alpha^2}\left(S_0^2-V_0^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad+\frac{1}{\alpha}\left[(2M+S_0+V_0)(2M+S_0-V_0)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\tag{7.56}$$

Ces résultats coïncident avec ceux obtenus par l'intégrale de chemin [37].

7.6.2 Deuxième cas : Potentiel vecteur de Hulthén déformé

Quand $V_0\neq 0$ et $S_0=0$, nous avons un potentiel vecteur pur dit potentiel de Hulthén déformé. Pareillement, les fonctions d'onde normalisées et le spectre de l'énergie des états liés peuvent être déduits des expressions (7.50) et (7.34),

$$\begin{aligned}\psi_{n,q}^{Hulth\grave{e}n}(x) &= \left[\frac{2\alpha\mu_n(n+\delta_2+\mu_n+1)\,n!\Gamma(n+\delta_2+2\mu_n+2)}{(n+\delta_2+1)\,\Gamma(n+2\delta_2+2)\,\Gamma(n+2\mu_n+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times q^{\mu_n}\left(1-qe^{-\alpha x}\right)^{\delta_2+1}e^{-\mu_n\alpha x}P_n^{(2\mu_n,2\delta_2+1)}\left(1-2qe^{-\alpha x}\right), \end{aligned}\tag{7.57}$$

$$E_n^q(\alpha, V_0) = \frac{V_0}{2q} \pm \kappa \sqrt{\frac{M^2}{4V_0^2 + \kappa^2} - \frac{1}{16q^2}}\ , \tag{7.58}$$

où

$$\begin{cases} \kappa = \alpha q (2n+1) + \sqrt{\alpha^2 q^2 - 4V_0^2}, \\ \delta_2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2 q^2} \right), \end{cases} \tag{7.59}$$

avec

$$V_0^2 \leq \frac{q^2}{4\alpha^2} \tag{7.60}$$

et

$$n_{\max} < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4}{\alpha^2} V_0^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha}\left[\left(2M + \frac{V_0}{q}\right)\left(2M - \frac{V_0}{q}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.61}$$

Notons que nous retrouvons le spectre d'énergie et les fonctions d'onde normalisées associés au potentiel de Hulthén standard pour $q = 1$.

7.7 Potentiels complexes

Le potentiel de Hulthén déformé prend une forme complexe si au moins l'un des paramètres est complexe ou imaginaire pur. Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons à l'étude du potentiel vecteur.

7.7.1 Premier cas : α est purement imaginaire

Dans le changement du paramètre $\alpha \to i\alpha$, l'expression du potentiel vecteur dans (7.1) devient

$$V_q(x) = V_0 \frac{q - \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)}{q^2 - 2q\cos(\alpha x) + 1}, \tag{7.62}$$

qui est non-hermitienne, mais invariante sous une transformation PT où P est l'opérateur parité ou reflexion d'espace et T représente l'opérateur renversement du sens du temps.

Compte tenu de la propriété de symétrie PT du potentiel, l'expression spectrale de la fonction de Green redéfinie ainsi

$$G\left(x'', x'\right) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\psi_n^{PT}\left(x'\right)\psi_n\left(x''\right)}{\left(A^2+1\right)\left(\bar{E}^2 - E_n^2\right)} \tag{7.63}$$

permet de déterminer les fonctions d'onde correspondantes aux niveaux d'énergie E_n. Cependant, en substituant directement α par $i\alpha$ dans les expressions (7.57) et (7.58), nous obtenons les fonctions d'onde et le spectre de l'énergie des états liés pour le potentiel complexe (7.62),

$$\begin{aligned} \psi_{n,q}(x) &= \left|\frac{2\alpha\mu_n\left(n+\delta_a - i\mu_n + 1\right) n!\Gamma\left(n+\delta_a-2i\mu_n+2\right)}{\left(n+\delta_a+1\right)\Gamma\left(n+2\delta_a+2\right)\Gamma\left(n-2i\mu_n+1\right)}\right|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times q^{-i\mu_n}\left(1-qe^{-i\alpha x}\right)^{\delta_a+1} e^{-\mu_n\alpha x} P_n^{\left(-2i\mu_n, 2\delta_a+1\right)}\left(1-2qe^{-i\alpha x}\right), \end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned} E_n^q\left(i\alpha, V_0\right) &= \frac{V_0}{2q} \pm \left[\alpha q\left(2n+1\right) + \sqrt{\alpha^2 q^2 + 4V_0^2}\right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1}{16q^2} - \frac{M^2}{4V_0^2 - \left[\alpha q\left(2n+1\right)+\sqrt{\alpha^2q^2+4V_0^2}\right]^2}}, \end{aligned} \tag{7.65}$$

où

$$\delta_a = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{V_0^2}{\alpha^2 q^2}\right), \tag{7.66}$$

et $n = 1, 2, 3, ..., n_{\max} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha q}\left(\sqrt{V_0^2 - 4q^2M^2} - \sqrt{\frac{\alpha^2 q^2}{4} + V_0^2}\right)\right\}$. Ici $\{k\}$ dénote le plus grand entier inférieur à k. Nous remarquons que le spectre du potentiel non hermitien (7.62) est réel avec un nombre infini de niveaux d'énergie. La réalité du spectre est une conséquence de l'invariance par reflexion d'espace et renversement du sens du temps (PT).

7.7.2 Deuxième cas : V_0 et q sont purement imaginaires

En remplaçant $V_0 \to iV_0$ et $q \to iq$ dans l'expression du potentiel vecteur $V_q(x)$, nous obtenons la forme complexe suivante

$$V_q(x) = \frac{e^{2\alpha x} - ie^{\alpha x}}{1 + q^2 e^{2\alpha x}}. \tag{7.67}$$

Il est clair que cette version du potentiel de Hulthén déformé ne possède pas la symétrie PT. En effectuant la transformation $x \to x + i\frac{\pi}{\alpha}$ au moyen de l'opérateur linéaire $\eta = e^{-\frac{\pi}{\alpha}p}$ où α est réel et $p = -i\frac{d}{dx}$ avec $\hbar = 1$, nous remarquons que le potentiel défini par l'équation (7.67) satisfait la relation

$$e^{-\frac{\pi}{\alpha}p} V_q(x)\, e^{\frac{\pi}{\alpha}p} = V_q\left(x + i\frac{\pi}{\alpha}\right) = V_q^*(x). \tag{7.68}$$

Ceci signifie que le potentiel complexe (7.67) est un potentiel η-pseudo-hermitien pour lequel on peut prédire un spectre d'énergie réel.

En faisant les changements des paramètres correspondants dans l'équation (7.57), nous obtenons les fonctions d'onde des états liés relatives au potentiel (7.67),

$$\begin{aligned} \psi_{n,q}(x) &= \left[\frac{2\alpha\mu_n (n + \delta_2 + \mu_n + 1)\, n!\Gamma(n + \delta_2 + 2\mu_n + 2)}{(n + \delta_2 + 1)\Gamma(n + 2\delta_2 + 2)\Gamma(n + 2\mu_n + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times (iq)^{\mu_n} \left(1 - iqe^{-\alpha x}\right)^{\delta_2 + 1} e^{-\mu_n \alpha x} P_n^{(2\mu_n, 2\delta_2 + 1)}\left(1 - 2iqe^{-\alpha x}\right), \end{aligned} \tag{7.69}$$

Le spectre réel du potentiel (7.67) est identique à celui donné par l'équation (7.58).

7.7.3 Troisième cas : V_0, q et α sont imaginaires

Si $V_0 \to iV_0$, $q \to iq$ et $\alpha \to i\alpha$ dans la définition du potentiel vecteur (7.1), nous obtenons le potentiel suivant :

$$V_q(x) = V_0 \frac{q - \sin(\alpha x) - i\cos(\alpha x)}{q^2 - 2q\sin(\alpha x) + 1}. \tag{7.70}$$

Cette forme de potentiel a une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$ par rapport au potentiel défini par l'expression (7.62). Si nous définissons ainsi $PxP^{-1} = \frac{\pi}{\alpha} - x$, alors nous avons $PV_q(x)P^{-1} = V_q^*(x)$ pour le potentiel complexe donné dans l'équation (7.70). Donc, la version complexe particulière (7.70) du potentiel vecteur de Hulthén déformé est bien P-pseudo-hermitienne.

Sous l'action jointe de la reflexion spatiale $\left(P : x \to \frac{\pi}{\alpha} - x\right)$ et du renversement du sens du temps $(T : i \to -i)$, nous avons $PTV_q(x)(PT)^{-1} = V_q(x)$ pour le potentiel complexe (7.70). Donc, la version complexe particulière (7.70) du potentiel vecteur de Hulthén déformé possède la symétrie PT.

Les fonctions d'onde et le spectre discret réel de l'énergie des états liés peuvent être déduits des équations (7.57) et (7.58),

$$\begin{aligned} \psi_{n,q}(x) &= \left|\frac{2\alpha\mu_n(n+\delta_a - i\mu_n + 1)\, n!\,\Gamma(n+\delta_a - 2i\mu_n + 2)}{(n+\delta_a+1)\,\Gamma(n+2\delta_a+2)\,\Gamma(n-2i\mu_n+1)}\right|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times (iq)^{-i\mu_n}\left(1 - iqe^{-i\alpha x}\right)^{\delta_a+1} e^{-\mu_n \alpha x} P_n^{(-2i\mu_n, 2\delta_a+1)}\left(1 - 2iqe^{-i\alpha x}\right), \end{aligned} \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned} E_n^{iq}(i\alpha, iV_0) &= \frac{V_0}{2q} \pm \left[\sqrt{\alpha^2 q^2 + 4V_0^2} - \alpha q(2n+1)\right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1}{16q^2} - \frac{M^2}{4V_0^2 - \left[\sqrt{\alpha^2 q^2 + 4V_0^2} - \alpha q(2n+1)\right]^2}}, \end{aligned} \tag{7.72}$$

avec $n = 1, 2, 3, ..., n_{\max} < \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha q}\left(\sqrt{V_0^2 - 4q^2M^2} - \sqrt{\frac{\alpha^2 q^2}{4} + V_0^2}\right)\right\}$.

7.8 Conclusion

Nous avons explicitement évalué la fonction de Green pour une particule de Klein-Gordon soumise à l'action de potentiels vecteur et scalaire du type Hulthén déformé dans le cadre du formalisme des intégrales de chemin. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés sont alors déduits. Les résultats obtenus sont exactes et plus généraux. Nous avons d'abord considérer des potentiels réels, c'est à dire tous les paramètres (V_0, S_0, q, α) sont réels. Dans ce cas, le traitement de ce type de potentiels nous a permis d'obtenir de manière unifiée les solutions relatives à un ensemble de potentiels tels que le potentiel vecteur de Hulthén déformé $(S_0 = 0)$, les potentiels vecteur et scalaire de Hulthén standard $(q = 1)$, le potentiel de Hulthén standard $(S_0 = 0, q = 1)$. Nous nous sommes ensuite limité à l'étude du potentiel vecteur de Hulthén déformé pour discuter des versions complexes de ce potentiel avec au moins un des paramètres (V_0, q, α) imaginaire. Dans le cas où α est purement imaginaire, nous avons une forme de potentiel non hermitienne qui possède la symétrie PT. Pour V_0 et q complètement imaginaires, nous avons montré que la version complexe obtenue du potentiel de Hulthén déformé n'admet pas la symétrie PT mais elle est η-pseudo-hermitienne. Enfin, dans le cas où tous les paramètres sont imaginaires, la version complexe particulière obtenue est P-pseudo-hermitienne et possède la symétrie PT.

Bibliographie

[1] Dirac P. M. A., The Principles of Quantum Mechanics (Oxford Clarendon Press, London, 1958).

[2] Feynman R. P. et Hibbs A. : *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Mc Graw Hill, New York, 1965).

[3] Feynman R. P., Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.

[4] Duru I. H. et Kleinert H., Phys. Lett. **B 84** (1979) 185.

[5] Kustaanheimo P. et Stiefel E., J. Reine Angew. Math., **218** (1965) 204.

[6] Duru I. H. et Kleinert H., Fortschr. Phys. **30** (1982) 401.

[7] Chetouani L., Guechi L. et Hammann T. F., Phys. Lett. **A 125** (1987) 277 ; Il Nuovo Cimento **B 101** (1988) 547 ; Phys. Rev. **A 40** (1989) 1157.

[8] Chetouani L. et Hammann T. F., Il Nuovo Cimento. **B 98** (1987) 1.

[9] Morse P. M., Phys. Rev. **70** (1946) 222.

[10] Chetouani L., Guechi L., Hammann T. F. et Letlout M., Il Nuovo Cimento **B 105** (1990) 387 ; J. Math. Phys. **35** (1994) 1185 ; Boudjedaa T., Chetouani L., Guechi L. et Hammann T. F., J. Math. Phys. **32** (1991) 441 ; Chetouani L., Guechi L., Hammann T. F. et Lecheheb A., J. Math. Phys. **34** (1993) 1257 ; Czech J. Phys. **45** (1995) 669.

[11] Kleinert H., *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics* (World Scientific, Singapore, 1990).

[12] Rosen N. et Morse P. M., Phys. Rev. **42** (1932) 210.

[13] Pöschl G. et Teller E., Z. Phys. **83** (1933) 143.

[14] Grosche C., J. Phys. A. : Math. Gen. **22** (1989) 5073.

[15] Schulman L. S., *Techniques and Applications of Path Integrals.* (J. Wiley and Sons, NewYork, 1981).

[16] Messiah A. *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1964) ; Landau L. et Lifchitz E. *Mécanique Quantique (*Editions Mir, Moscou, 1967) TomeIII.

[17] Schwinger J., Phys. Rev. **82** (1951) 664 .

[18] Hartmann H., Theor. Chim. Acta **24** (1972) 201.

[19] Makarov A. A., Smorodinsky Ya A., Valiev Kh. et Winternitz P., Nuovo Cimento **A 52** (1967) 1061.

[20] Chen C. Y. et Dong S. H., Phys. Lett. **A 335** (2005) 374.

[21] Ho R.et Inomata A., Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 231.

[22] Kleinert H., Phys. Lett. **A 120** (1987) 361.

[23] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. et Tricomi F. G., *Higher Transcendental Functions* (Mc Graw-Hill, New York, 1953) Vol. 2.

[24] Gradshtein I. S. et Ryzhik I. M., *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).

[25] Milshtein A. I. et Strakhovenko V. M., Phys. Lett. **A 90** (1982) 447.

[26] Arai A., J. Math. Anal. Appl. **158** (1991) 63, *Ibid* J. Phys. A : Math. Gen. **34** (2001) 4281.

[27] Levai G., J. Phys. A : Math. Gen. **25** (1992) L 521.

[28] Lemieux A. et Bose A. K., Ann. Inst. Henri Poincaré **10** (1969) 259.

[29] Egrifes H., Demirhan D. et Büyükkihc F., Physica Scripta **60** (1999) 195.

[30] Grosche C., J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005) 2947.

[31] Mc Laughlin D. W. et Schulman L. S., J. Math. Phys. **12** (1971) 2520.

[32] Junker G. et Inomata A , *in Path Integrals from meV to MeV ,eds. M. C. Gutzwiller, A. Inomata, J. R. Klauder and L.Streit* (World Scientific, Singapore, 1986).

[33] Böhm M. et Junker G., J. Math. Phys. **28** (1987) 1978.

[34] Kleinert H. et Mustapic I., J. Math. Phys. **33** (1992) 643.

[35] Edmonds A. R. , *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1974).

[36] Boudjedaa T., Chetouani L., Guechi L. et Hammann T. F., J. Math. Phys. **32** (1991) 441.

[37] Chetouani L., Guechi L., Lecheheb A., Hammann T. F. et Messouber A., Nuovo Cimento **B113** (1998) 81.

[38] Sun J. X., Acta Phys Sin. **48** (1992) 1999.

[39] Jia C. S., Wang J. Y., He S. et Sun L. T. J. Phys. A : Math. Gen. **33** (2000) 6993.

[40] Cai J. M., Cai P. Y. et Inomata A., Phys. Rev. **A 34** (1986) 4621.

[41] Manning M. F. et Rosen N., Phys. Rev. **44** (1933) 953.

[42] Flugge S., *Pracrical Quantum Mechanics* (Springer Verlag, Berlin, 1974)162.

[43] Vaidya A. N. et Silva Souza L. E., hep-th/0203133.

[44] Torres del Castillo G. F. et Cortés-Cuanti L. C., J. Math. Phys. **38** (1997) 2996.

[45] Dominguez-Adame F., Phys. Lett. **A 136** (1989) 175.

[46] Qiang W. C., Chin. Phys. **12** (2003) 1054.

[47] Mustapha O., Czech. J. Phys. **54** (2004) 529.

[48] Yi L. Z., Diao Y. F., Liu J. Y. et Jia C. S., Phys. Lett. **A 333** (2004) 212.

[49] Eckart C., Phys. Rev. **35** (1930) 1303.

[50] Bohr A. et Mottelson B. R., (W. A. Benjamin Inc., New York, 1969) Vol. 1.

[51] Baye D., Levai G. et Sparenberg J. M., Nucl. Phys. **A 599** (1996) 435.

[52] Deb R. N., Khare A. et Roy B. D., Phys. Lett. **A 307** (2003) 215.

[53] Itzykson C. et Drouffe J. M., *Statistical field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989) Vol. 1.

[54] Feinberg J. et Zee A., Con-mat / 9706218.

[55] Hatano N. et Nelson D. R., Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 570 ; Phys. Rev. **B 56** (1997) 8651.

[56] Berry M. V. et O'Dell D. H. J., J. Phys. A : Math. Gen. **31** (1998) 2093.

[57] Nelson D. R. et Shnerb N. M., Phys. Rev. **E 58** (1998) 1383.

[58] Bender C. M. et Boettcher S., Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 5243.

[59] Bender C. M. et Boettcher S. et Meissenger P. N., J. Math. Phys. **40** (1999) 2201.

[60] Bender C. M. et Boettcher S., J. Phys. A : Math. Gen. **31** (1998) L 273.

[61] Bender C. M. et Dume G. V. et Meissenger P. N., Phys. Lett. **A 252** (1999) 272.

[62] Bender C. M. et Milton K. A., physics / 9802184.

[63] Bagchi B. et Quesne C., Phys. Lett, **A 273** (2000) 285.

[64] Mostafazadeh A., J. Math. Phys. **43** (2002) 205.

[65] Mostafazadeh A., math-phys/0110016.

[66] Simsek M. et Egrifes H., J. Phys. A : Math. Gen. **37** (2004) 4379.

[67] Kleinert H., Phys. Lett. **A 212** (1996) 15.

[68] Feynman R. P., Phys. Rev. **80** (1950) 440.

[69] Boudjedaa T., Chetouani L., Guechi L. et Hammann T. F., Physica Scripta **46** (1992) 289 ; Bentag B., Chetouani L., Guechi L. et Hammann T. F., Nuovo Cimento **B 111** (1996) 99.

[70] Landau L. D. et Lifshitz E. M., *Quantum Mechanics (*Pergamon, Oxford, 1958*).*