

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de série : .....

N° d'ordre : .....

## **MEMOIRE**

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE**

**SPECIALITE : PHYSIQUE ENERGETIQUE**

**OPTION: PHOTO-THERMIQUE**

**Thème :**

**ETUDE NEMURIQUE D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE  
AUTOUR D'UN PROFIL BIDIMENSIONNEL**

**Par**

**ABDOU AMEL**

**SOUTENU LE : ...../...../ 2011**

**Devant le jury :**

<b>Président :</b>	<b>A.MOKHNACHE</b>	<b>M.C. Univ. Mentouri Constantine</b>
<b>Rapporteur :</b>	<b>L. BAHI</b>	<b>Prof. Univ. Mentouri Constantine</b>
<b>Examineurs :</b>	<b>N.ATTAF</b>	<b>Prof Univ. Mentouri Constantine</b>
	<b>T. BOUFENDI</b>	<b>M. C Univ. Mentouri Constantine</b>

## *DEDICAC*

*A mes parents pour leur soutien et leur affection ;  
A mes frères et mes sœurs ;  
A mes amis.*

*AMEL ABDOU*

## *Remerciement*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à **Mr. L. Bahi**, professeur à l'université Mentouri, qui m'a proposé ce sujet et n'a pas cessé de me guider pour la réalisation, jusqu'à la phase finale de rédaction de ce manuscrit.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à **Mr. A.Mokhnech**, maitre de conférence à l'université Mentouri pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse,*

*Je tiens à remercier également le docteur **N. Attaf**, professeur à l'université Mentouri, et le docteur **T.Boufendi**, maitre de conférence à l'université Mentouri, d'avoir accepter d'être membre de jury.*

*Je remercie Mr : **Abderhafid Bouncer** pour son aide considérable et sa générosité et pour son temps précieux qui m'a consacré.*

*En fin, je remercier tous ceux qui m'ont aidée et soutenue de près ou loin.*

**Sommaire****Sommaire****Nomenclature**

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

**Chapitre I  
Généralités et synthèse bibliographique**

I.1	Généralités.....	3
I.1.1	Structure de la couche limite turbulente.....	3
I.1.2	Simulation des écoulements turbulents.....	6
I.1.3	Notions aérodynamiques.....	7
I.1.3.1	Caractéristiques géométriques d'un profil.....	7
I.1.3.2	Forces aérodynamique.....	9
I.2	Synthèse bibliographique.....	12

**Chapitre II  
Formulation mathématique**

II.1	Description du problème physique.....	16
II.2.	Equations gouvernantes.....	16
II.2.1.	Hypothèses simplificatrices.....	16
II.2.2.	Equation de continuité.....	16
II.2.3	Equation de quantité de mouvement suivant x.....	17
II.2.4	Equation de quantité de mouvement suivant y.....	17
II.3	Modèle k –epsilon.....	18
II.3.1	Equation d'énergie cinétique turbulente.....	19
II.3.2	Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.....	19
II.4	Conditions aux limites.....	21
II.5	Adimensionnalisation des équations.....	22
II.5.1	Equation de continuité.....	23
II.5.2	Equation de quantité de mouvement suivant x.....	23
II.5.3	Equation de quantité de mouvement suivant y.....	23

II.5.4	Equation de l'énergie cinétique turbulente.....	23
II.5.5	Equation de la dissipation d'énergie cinétique turbulente.....	23
II.6	Traitement de la paroi .....	24
II.6.1	Fonction du paroi .....	25

### **Chapitre III**

#### **Procédure numérique**

III.1	Introduction .....	28
III.2	Le maillage.....	28
III.3	Transformation des équations.....	29
III.3.1	Equation de continuité.....	30
III.3.2	Equation de quantité de mouvement suivant $\zeta$ .....	30
III.3.3	Equation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	30
III.3.4	Equation d'énergie cinétique turbulente $K$ .....	31
III.3.5	Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente $\varepsilon$ .....	31
III.4	Méthode de résolution numérique.....	31
III.4.1	Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\Phi$ .....	32
III.4.1.1	Discrétisation de l'équation de continuité .....	33
III.4.1.2	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\zeta$ .....	34
III.4.1.3	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	38
III.4.1.4	Discrétisation de l'équation de l'énergie cinétique turbulente $K$ .....	42
III.4.1.5	Discrétisation de l'équation de la dissipation d'énergie cinétique turbulente $\varepsilon$ ....	46
III.4.1.5	Discrétisation des conditions aux limites.....	47
III.5	Traitement de la pression (algorithme de SIMPLER).....	49
III.5.1	L'algorithme de SIMPLER.....	50
III.6	Technique numérique de résolution.....	50
III.6.1	Technique de balayage.....	50
III.6.2	Résolution des équations par la méthode de TDMA.....	51
III.6.3	La methode de sous-relaxation.....	52
III.7	Structure du Code de Calcul.....	53
III.8	Présentation des logiciels de calcul.....	54
III.8.1	Le pré-processeur Gambit.....	54
III.8.2	Le solveur Fluent.....	59

**Chapitre IV****Interprétation des résultats**

IV.1	Génération de maillage.....	62
IV.2	Validation du code de calcul.....	64
IV.3	Champ de pression.....	64
IV.3.1	L'effet de nombre de Reynolds sur le coefficient de pression.....	66
IV.3.2	L'effet de l'angle d'attaque sur le coefficient de pression.....	68
IV.3.3	L'effet de l'épaisseur sur le coefficient de pression.....	69
IV.4	Distribution de vitesse sur un profil.....	70
IV.4.1	Evolution du profil de vitesse sur le profil NACA 0012.....	70
IV.4.2	Effet de nombre de Reynolds.....	71
IV.4.3	Effet de l'angle d'attaque.....	72
IV.4.4	Effet de l'épaisseur.....	73
IV.5	Coefficient de frottement.....	74
IV.5.1	L'effet de l'angle d'attaque sur le coefficient de frottement.....	75
IV.5.2	L'effet de nombre de Reynolds sur le coefficient de frottement.....	76
IV.5.3	L'effet de l'épaisseur sur le coefficient de frottement.....	77
IV.6	Décollement de la couche limite turbulente.....	78
IV.7	Comparaison entre la couche limite laminaire et turbulente.....	81
	<b>Conclusion.....</b>	<b>87</b>
	<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>89</b>
	<b>Résumé en anglais</b>	
	<b>Résumé en arabe</b>	
	<b>Résumé en français</b>	

## Nomenclature

### Notations latines

$(x,y)$	Coordonnées cartésiennes.
<b>J</b>	Jacobien.
<b>C</b>	Corde du profil.
$C_p$	Coefficient de pression.
$C_f$	Coefficient de frottement.
<b>C<sub>x</sub></b>	Coefficient de traînée.
<b>C<sub>z</sub></b>	Coefficient de portance.
<b>U, V</b>	Composantes de la vitesse dans le plan (x, y).
<b>U<sup>C</sup>, V<sup>C</sup></b>	Composantes de la vitesse dans le plan (ξ, η).
$U_\infty$	La vitesse de l'écoulement à l'infini.
<b>P</b>	Pression.
<b>K</b>	énergie cinétique de la turbulence.
<b>y<sup>+</sup></b>	la distance à la paroi normalisée.
<b>u'</b>	fluctuations de vitesse suivant l'axe x.
<b>v'</b>	fluctuations de vitesse suivant l'axe y.
<b>δ</b>	épaisseur de la couche limite.

### Notation Grecque

$\varepsilon$	taux de dissipation de la turbulence.
$\nu_t$	viscosité cinématique turbulente.
<b>ρ</b>	Masse volumique.
<b>α</b>	Angle d'incidence.
<b>(ξ,η)</b>	Coordonnées du plan transformé.
<b><math>\sigma_k ; \sigma_\varepsilon</math></b>	Nombres de Prandtl turbulents associés à $k$ et $\varepsilon$ respectivement.

## **Indices**

<b>P</b>	Fait référence au nœud P d'un volume fini typique.
<b>n, s, e, w</b>	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest.
<b>N, S, E, W</b>	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest.



# **Introduction Générale**

## **Introduction générale**

La plupart des écoulements naturels ou rencontrés dans l'industrie sont turbulents [1]. Les écoulements turbulents bornés par une paroi sont l'un des problèmes le plus compliqué dans l'industrie. En présence d'une paroi, une couche très mince s'établit au voisinage de celle-ci appelée couche limite. Dans cette région, la vitesse varie rapidement, d'une valeur nulle à la paroi à une valeur de l'écoulement externe et en dehors de laquelle, les effets de la viscosité ne sont négligeables [2]. Le concept de la couche limite introduit par L. Prandtl en 1904, joue un rôle majeur dans la mécanique des fluides [1], en particulier dans l'aérodynamique où elle intervient notamment dans la conception des ailes d'avion et les turbomachines pour améliorer leurs performances. Elle est le siège de forts gradients des champs conservatifs [3]. L'étude de la couche limite turbulente, dans les écoulements pariétaux, occupe une place prépondérante dans la compréhension des différents mécanismes de transport et de transfert effectués au voisinage de la paroi. Elle a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. Les résultats de ces études ont permis d'importantes améliorations de systèmes industriels notamment dans les domaines aéronautiques et aérospatiaux [3].

Par contraste à la couche limite laminaire, qui est constituée d'une seule région où l'effet de viscosité est dominant, la couche limite turbulente est beaucoup plus complexe et est constituée de plus d'une région selon le degré d'importance de l'effet de la viscosité [4]. En général, la couche limite turbulente se compose de deux régions ; l'une loin de paroi contrôlée par la turbulence nommée la région externe et l'autre près de la paroi dominée par l'effet visqueux nommée la région de paroi [5] et [6]. Dans cette dernière région, l'expérience rencontrait les difficultés pour mesurer les différents paramètres tels que la vitesse moyenne, l'énergie cinétique et la dissipation avec précision, et particulièrement la mesure de la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds dans la couche limite à faible nombre de Reynolds [7].

L'approche pratique industrielle des calculs des écoulements turbulents fait appel aux équations de Navier-Stokes moyennées ou équations de Reynolds. Ces équations contiennent des termes nécessitant d'être modélisés. La modélisation consiste essentiellement en la représentation des tensions de Reynolds nécessaire pour résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées.

Parmi les modèles les plus utilisés dans l'industrie, on cite les modèles à viscosité turbulente qui reposent sur des équations de transport de certaines grandeurs caractéristiques de turbulence. En effet, ces modèles de turbulence jouent un rôle important pour décrire correctement les écoulements [8].

### **Objectif du présent travail :**

L'objectif de la présente étude est double. D'une part, établir un code de calcul numérique basé sur les équations de Navier-Stokes stationnaires moyennées avec un modèle de turbulence, basé sur le concept de viscosité turbulente à deux équations de transport  $k-\epsilon$ , pour étudier la couche limite turbulente incompressible autour d'un profil d'aile bidimensionnelle. D'autre part, nous cherchons une maîtrise avancée du code de calcul FLUENT. Différents profils de type de NACA sont utilisés dans le but de rechercher l'effet des différents paramètres géométriques et dynamiques sur le comportement de la couche limite turbulente pour chaque type de ces profils.

Ce travail est décomposé en 4 chapitres :

- Dans le premier chapitre, on présente une brève description de la couche limite turbulente ainsi que les différents modèles de turbulence. On présente une synthèse des travaux scientifiques concernant la couche limite turbulente.
- Au deuxième chapitre, la modélisation mathématique du problème est présentée. Il s'agit donc de l'établissement des équations de Navier-Stokes moyennées sous forme adimensionnelle. Ces équations seront complétées par les conditions initiales et aux limites appropriées au problème.
- La résolution numérique de ce système sera l'objet du troisième chapitre. On y abordera les différentes étapes passées pour modéliser le problème,
- Dans le dernier chapitre, nous évaluerons et discuterons les résultats des simulations.
- Enfin, des conclusions sur les résultats seront présentées.

# **Chapitre I**

## **Généralités et synthèse bibliographique**

## I. Généralités et synthèse bibliographique

### I.1 Généralités

Lorsqu'un fluide s'écoule autour d'une aile d'avion, une couche limite se développe sur l'extrados et l'intrados de l'aile. Près du bord d'attaque, la couche limite est laminaire ; l'écoulement s'effectue de façon régulière et donnant l'apparence de « lamelle » de fluide glissant les unes sur les autres. Plus en aval, dans une région dite de transition, l'écoulement devient irrégulière, chaotique et la couche limite perd son état laminaire pour devenir complètement turbulente. Au bord de fuite, les couches limites de l'extrados et l'intrados fusionnent pour former le sillage, figure (I-1).

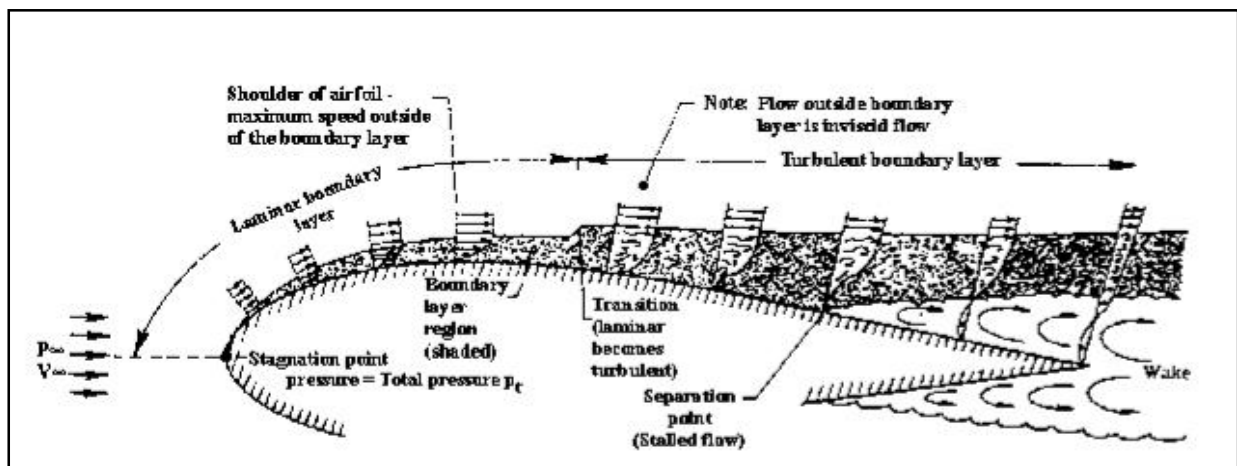


Figure (I-1) : développement de la couche limite sur un profil d'aile

#### I.1.1. Structure de la couche limite turbulente

Les observations concernant les couches limites dynamiques turbulentes permettent de distinguer deux zones au sein de celles-ci : tout d'abord une région interne dépendant fortement des conditions à la paroi et elle-même divisible en deux (sous-couche visqueuse et zone logarithmique) puis une région externe.

**a. Région interne :**

Région très proche de la paroi, est dominée par la viscosité moléculaire [5 ,6]. Son épaisseur est de l'ordre de  $0.2 \delta$ , et dans cette zone, la loi de vitesse est dénommée loi de paroi [9].

La région près de la paroi peut être sub-divisée en trois zones différentes [2] :

- **Sous-couche visqueuse** : est une zone très proche de la paroi et très mince où les effets des forces de viscosité sont prépondérants devant les effets des forces d'inertie. On fait l'hypothèse que, dans cette zone, le profil de vitesse suit la relation :

$$U^+ = y^+$$

La sous-couche visqueuse s'étend entre  $0 < y^+ < 3$  à  $5$

- **Région de tampom (buffer layer)** : c'est la couche intermédiaire où se mélange la couche entièrement turbulente et la sous couche visqueuse. Dans cette région ; les contraintes visqueuses ont le même ordre de grandeur que les contraintes turbulentes.

$$5 < y^+ < 30$$

- **Région inertielle logarithmique** : ou la zone logarithmique, séparée de la sous-couche visqueuse par une zone tampon, constitue la partie extérieure de la couche interne. Comme son nom l'indique, la vitesse varie proportionnellement à  $\log y^+$ . Dans cette zone, les effets turbulents sont devenus prépondérants par rapport aux effets moléculaires et le profil de vitesse est bien décrit par la loi de paroi :

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B$$

Où  $k$  : constante de Von- Karman tel que  $k=0.41$ ,  $B = 5.5$  pour les écoulements limités par des parois lisses. Pour les parois rugueuses, cette constante diminue jusqu'à  $5$ . Cette loi est valable pour  $30 < y^+ < 200$ .

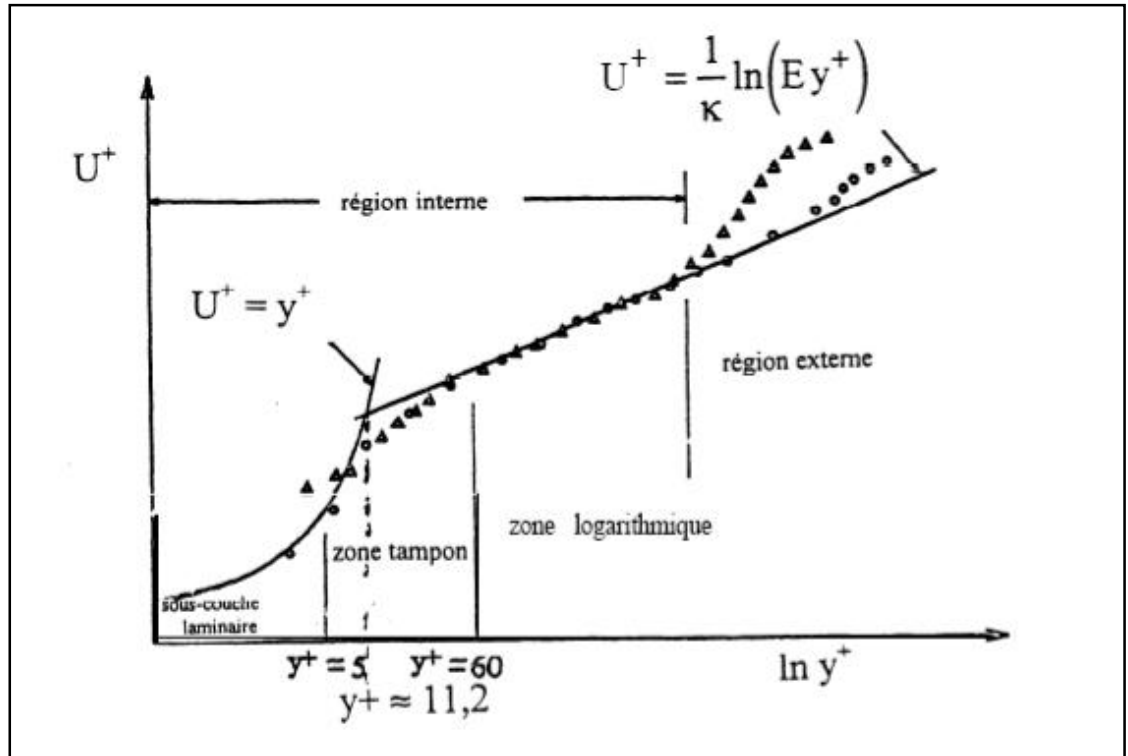


Figure (I-2) : subdivision de la couche limite turbulente

**b. Région externe :**

Loin de la paroi, est contrôlée par la turbulence [5,6]. Celle-ci représente 80% de l'épaisseur totale  $\delta$ . Le gradient de vitesse  $y$  est faible et la distribution de vitesse n'est guère influencée par les conditions à la paroi : elle dépend essentiellement du fluide et l'écoulement extérieur [9]. L'échelle de longueur de la turbulence est donnée par l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  et l'échelle de la vitesse est fournie par la vitesse de frottement  $U_\tau$ .

La région externe est décrite par des lois semi-empiriques dites "loi de sillage" ou encore "loi déficitaire" :

$$\frac{U_{\max} - U(y)}{U_\tau} = \frac{1}{k} \left( \frac{y}{\delta} \right) + A$$

A : est une constante

$\delta$  : étant l'épaisseur de la couche limite.

Cette dernière équation est valable à partir de  $y^+ = 300$  à  $500$

### I.1.2 Simulation des écoulements turbulents

Il existe trois principales méthodes de modélisation d'un écoulement turbulent:

La Simulation Numérique Directe (**DNS**), dans laquelle on cherche à représenter la totalité des phénomènes physiques, la Simulation des Grandes Echelles (**LES**), dans laquelle on représente seulement les plus gros tourbillons en fonction du temps, et la simulation moyenne dans laquelle on représente seulement l'écoulement moyen [10].

- **La Simulation Numérique Directe (DNS)** : propose la résolution directe des équations de Navier- Stokes instationnaires, tridimensionnelles. Cette résolution consiste à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. On montre toutefois que le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les petites échelles de la turbulence atteint des valeurs extraordinaires. Ainsi cette approche nécessite de puissants moyens informatiques. Elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés. Elle n'est, donc, pas abordable pour la prévision numérique d'écoulements dans l'industriel.
- **La Simulation des Grandes Echelles (LES)** : représente une technique intermédiaire entre le calcul directe et l'approche statistique. Elle consiste à calculer l'écoulement à partir des équations de Navier- Stokes sur un maillage moins dense et à modéliser les mouvements d'échelles inférieures aux dimensions de la maille. Il s'agit donc d'une simulation des grosses structures turbulentes. Cette méthode est coûteuse du point de vue de l'ampleur des calculs numériques et devrait être particulièrement utile pour les écoulements dans lesquels les grandes structures jouent un rôle déterminant.
- **La simulation RANS** : résolve les équations de Navier- Stokes moyennées (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations). C'est une modélisation statistique de la turbulence dans laquelle on peut distinguer deux grands groupes d'approche, l'un des deux utilise la statistique en deux ou plusieurs points, l'autre concerne seulement les statistiques en un point. Les équations moyennées résultantes, de ce dernier, comportent de nouveaux termes qui traduisent la production des fluctuations des vitesses et constituent le transfert d'un mouvement convectif dû aux fluctuations de la vitesse. Ces nouveaux termes sont appelés les contraintes de Reynolds. Celles-ci posent un problème de fermeture des



équations gouvernantes, dont la solution actuelle passe par des "modèles de turbulence" souvent semi-empiriques.

### I.1.3. Notions aérodynamique

L'aérodynamique est la science qui étudie les phénomènes accompagnant tout mouvement relatif entre un corps et l'air qui le beigne. Dans son utilisation en aérodynamique, en particulier en aérodynamique externe, une caractéristique fondamentale est que le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement est toujours beaucoup plus grand que l'unité.

#### I.1.3.1 Caractéristiques géométriques d'un profil

Le profil désigne la surface résultant de la coupe de l'aile suivant un plan parallèle au plan de symétrie de l'avion. Plan lui même perpendiculaire au plan de la surface alaire, figure (I-3).

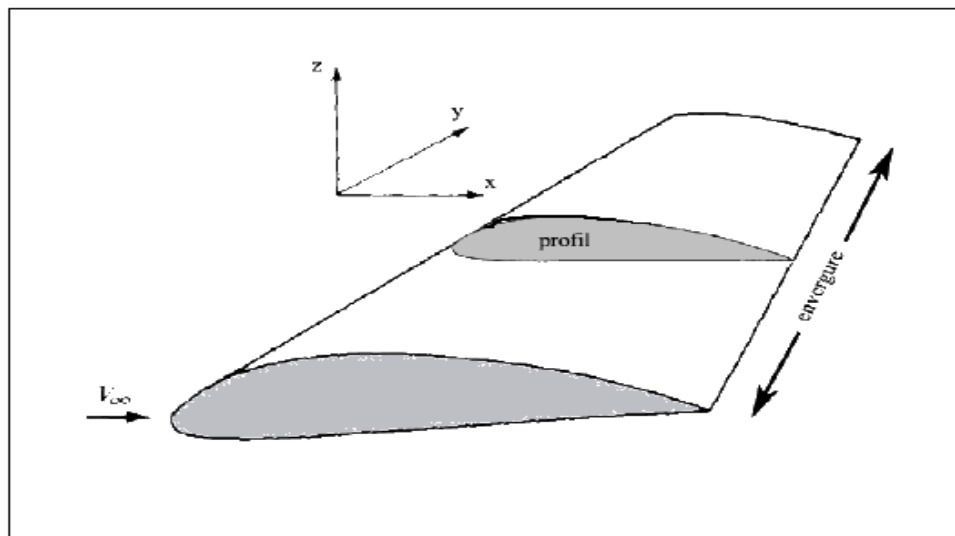


Figure (I-3) : profil d'aile

Les paramètres aérodynamiques des profils dépendent fortement des Caractéristiques géométriques des profils qui se présentent selon la figure (I-4) .

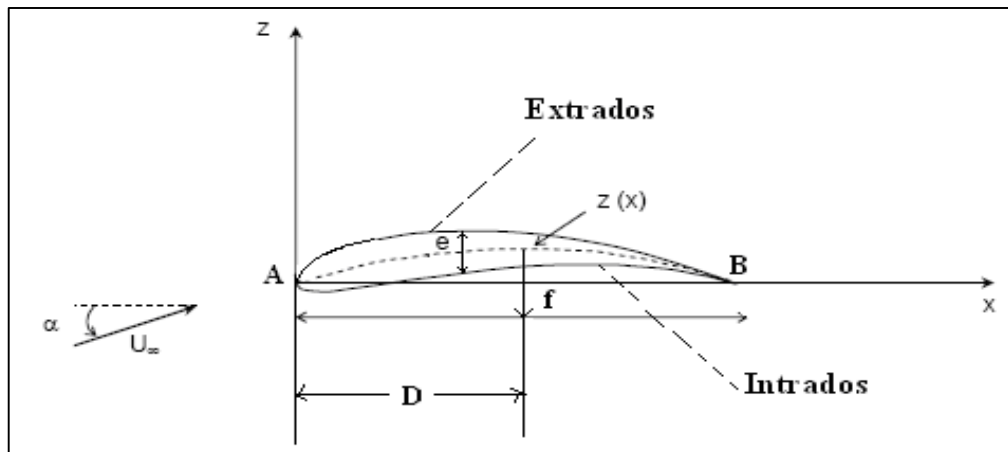


Figure (I-4) : Caractéristiques géométriques de profil

- **A** : bord d'attaque
- **B** : bord de fuite.
- **C** : corde de profil : Droite reliant le bord d'attaque au bord de fuite (segment AB)
- **D** : la distance entre le bord d'attaque et la flèche maximale
- **La flèche maximale f** : L'écart maximum entre la corde et la ligne moyen
- **Epaisseur relative(E)** : est le rapport de l'épaisseur maximum à la corde de profil.
- **Intrados** : est la partie de l'aile située au dessous.
- **Extrados** : est le dessus de l'aile.
- **$\alpha$  : Angle d'incidence** (angle d'attaque) : angle formé par la corde de profil et la direction d'écoulement à l'infinie.

La fonction d'une aile, dans le cadre d'applications aéronautiques, est de générer une portance, c'est à dire une force verticale permettant d'équilibrer la pesanteur de l'avion. Cette force est due à la différence de pression qui s'établit entre les deux côtés de l'aile, figure (I-5) [11].

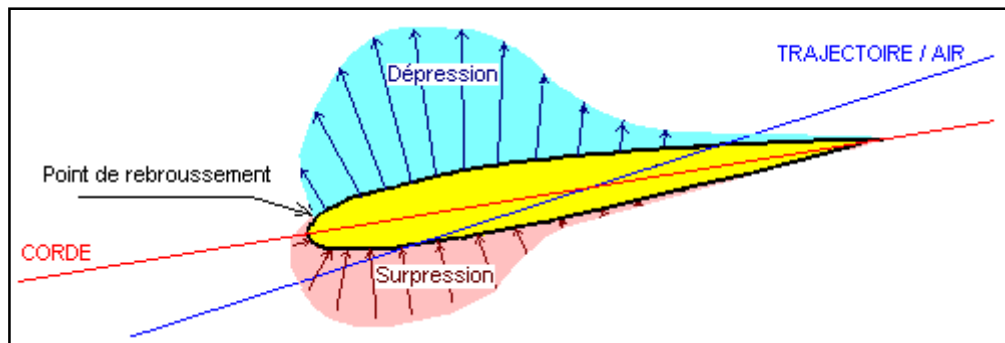
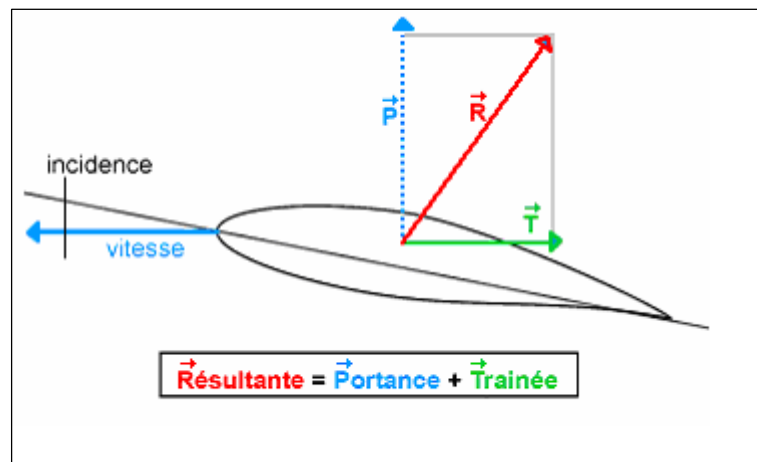


Figure (I-5) : les forces de surpression –dépression exercée sur un profil

### I.1.3.2 Forces aérodynamique

Les forces aérodynamiques exercées sur un profil dépendent de la distribution de pression autour de celui-ci. Ces forces sont fonction de nombre de Mach, de la forme de profil d'aile, de l'angle d'attaque et de l'effet de la couche limite [12].

Un profil qui a un certain angle d'incidence par rapport à la direction de l'écoulement d'air subit des forces de surpression à l'intrados et des forces de dépression à l'extrados. Ces forces se résument globalement en une résultante aérodynamique notée  $\mathbf{R}$ , qui elle-même peut se décomposer en deux forces, une force de portance notée  $\mathbf{F}_z$ , et une force de frottement qui freine l'objet, appelée traînée, notée  $\mathbf{F}_x$  (figure I-6).



**Figure (I-6): La force de portance et de traînée**

**a. La portance :** est la force, due à la suppression –dépression, exercée sur le profil lors de son vol, qui est orienté perpendiculairement à la direction de l'écoulement. C'est cette force qui assure la sustentation de l'avion. Elle est proportionnelle au coefficient de portance  $C_Z$ . Ce coefficient est la caractéristique principale du profil d'aile. Il est proportionnel à l'angle d'incidence. Son intensité est donnée par :

$$F_Z = 1/2 \rho V^2 S C_Z$$

**b. La traînée :** elle constitue la principale source de la résistance à l'avancement [13]: est une composante parallèle à la direction de déplacement de la force générée par l'écoulement autour d'un profil. La traînée est une source de performances aérodynamiques. Pour l'avion, la traînée est compensée par la poussée des moteurs. La traînée est donc un obstacle à la vitesse de l'aile car elle le ralentit. Elle est proportionnelle à un coefficient de traînée  $C_X$  son intensité est donnée par :

$$F_x = 1/2 \rho V^2 S C_x$$

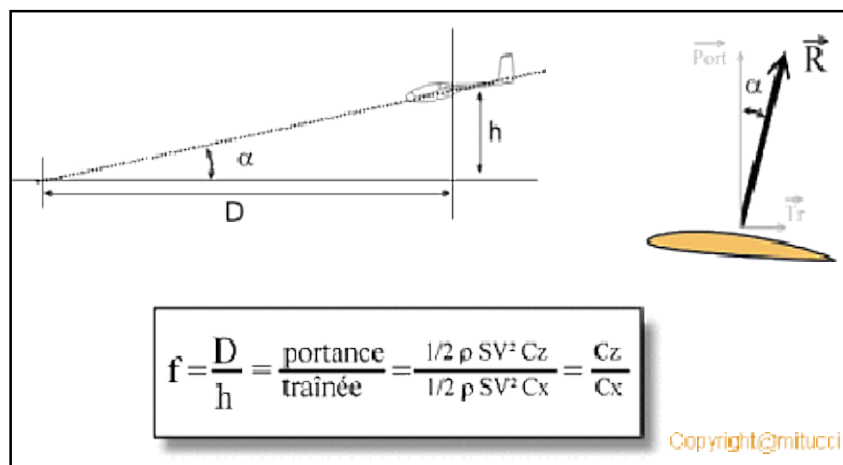
La traînée totale se compose de quatre traînées élémentaires :

- **La traînée de forme** : est liée à la forme des profils : différents profils engendrent des écoulements différents. Les différences de pression entre l'avant et l'arrière ne sont donc pas identiques. La traînée est donc influencée par la forme de profil.
- **La traînée de sillage** : est liée au décollement des filets d'air sur l'arrière du profil. Plus les filets se décollent et plus la traînée de sillage est importante. Elle est influencée par la vitesse et l'incidence de vol de l'avion.
- **La traînée induite** : est liée à la différence de pression entre l'intrados et l'extrados de l'aile.

**c. La finesse aérodynamique**

La finesse aérodynamique caractérise la qualité du profil. C'est le rapport entre la portance et la traînée ( $F_z / F_x$ ). Plus la finesse est grande, plus sont meilleures les performances de l'avion.

, Figure (I-7).



**Figure (I-7): finesse aérodynamique**

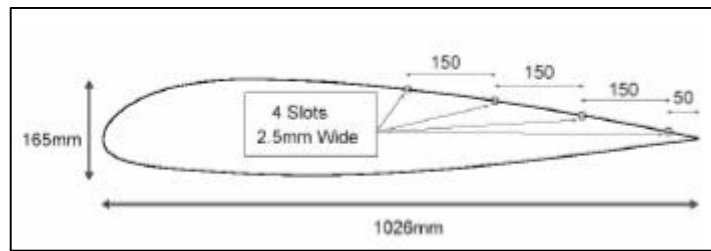
## I.2 Synthèse bibliographique

**J. Cousteix et J. Mauss [14]**, ont fait une étude de la couche limite turbulente en faisant appel à une méthode d'analyse asymptotique appelée «Méthode des approximations successives complémentaires (MASC). Ils ont utilisé comme un modèle de turbulence, la longueur de mélange. A partir de cette méthode, un profil de vitesse uniformément valable dans la couche limite turbulente est construit. Ils ont observé, en particulier, que l'évolution logarithmique de vitesse disparaît aux plus faibles nombres de Reynolds

**V.I.Kornilov [15]** : Il a examiné expérimentalement l'efficacité de BLADs (Boundary Layer Alteration Devices) pour le contrôle passif de la couche limite turbulente développée sur un corps de révolution axisymétrique. Il a montré que le schéma tandem, qui consiste en deux éléments circulaires, est plus avantage en terme de réduction de traînée que celui à un seul élément. Il a trouvé que ce schéma est capable de réduire le coefficient de frottement local dans la région avale et, en addition, permettre de réduire la traînée de 10% de traînée initial.

**C. Sarraf, H. Djeridi, J.Y. Billard [16]** : ils ont analysé expérimentalement l'effet de l'épaisseur relatif du profil sur la couche limite turbulente et les coefficients de portance et de traînée. Les profils utilisés sont NACA0015, NACA0025 et NACA0035. Ils ont trouvé que, pour les trois profils, à même incidence, le coefficient de portance décroît avec l'épaisseur et que le décrochage se produit à  $\alpha = 21^\circ$ ,  $\alpha = 35^\circ$  et  $\alpha = 40^\circ$  pour NACA0015, NACA0025 et NACA0035 respectivement. Ce qui met en évidence que l'augmentation de l'épaisseur retarde l'apparition de décrochage. Ainsi, ils ont constaté que, pour des incidences faibles, la traînée de profil varie comme son épaisseur. Les profils de vitesses tracés pour  $Re=5.10^5$  et  $\alpha = 10^\circ$  ont montré que le décollement de la couche limite turbulente n'est plus observable qu'au voisinage du bord de fuite sur les profils NACA0015 et Naca0025 et que sur NACA0035 le décollement se produit à partir d'une valeur de  $x/c$  comprise entre 0.8 et 0.9.

**M.H. Shojaefard, A.R. Noorpoor, A. Avanesians and M. Ghaffarpour [17]** : ont fait une étude numérique sur le contrôle de la couche limite turbulente par la technique aspiration et injection. Ils ont utilisés, pour la simulation numérique, le code commercial FLUENT. L'étude été fait sur un profil d'aile avec quatre fentes d'aspiration et d'injection à différentes angle d'attaque et à nombre de Mach 0.15. Les résultats obtenus ont montré que l'aspiration augmente le coefficient de portance et l'injection diminue le coefficient frottement.



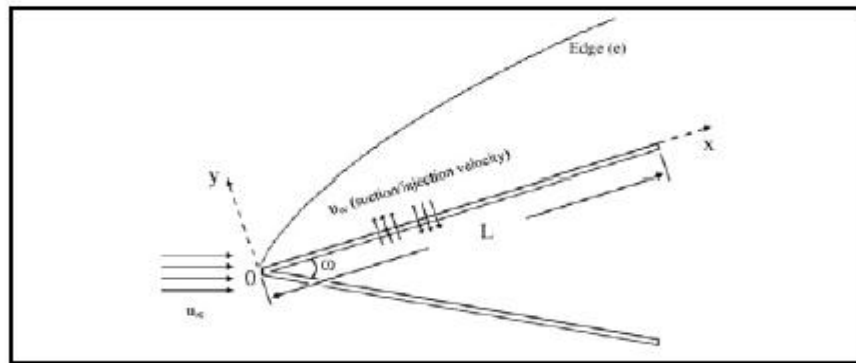
**Figure (I-8) : Configuration des fentes d'aspiration et d'injection.**

**P. d'Espiney, P. Champigny, D. Baudin, J.A. Pilon [18]** : ont effectué, d'une part, des mesures aérodynamiques détaillées (valeur et angle du frottement pariétal, profils de couche limite,...) dans les souffleries S2MA et S3MA de l'ONERA sur un fuselage ogive-cylindre à Mach 2 à  $0^\circ$  et  $10^\circ$  d'incidence. Le régime de l'écoulement est turbulent et le nombre de Reynolds est de  $1.2 \cdot 10^6$  et d'autre part, ils ont réalisé des calculs Navier Stokes en écoulement turbulent avec le code FLU3M développé par l'ONERA, avec utilisation des modèles de turbulence de Baldwin-Lomax et k- $\epsilon$ . Les comparaisons calcul - expérience montrent globalement un bon accord.

**J.Favier, S.Bourgois [19]** : Dans leur étude, ils ont proposés de contrôler expérimentalement le décollement de la couche limite sur un profil d'aile symétrique ONERA D à l'aide des actionneurs fluidiques actifs qui sont des microjets à soufflage continu. D'après les résultats, ils ont trouvés que le contrôle par microjets permet des gains en portance de l'ordre de 20% pour le cas d'une couche limite laminaire. Par contre dans le cas d'une couche limite turbulente, les effets du contrôle sont moins importants où le gain en portance est plus faible que dans le cas laminaire pour un même coefficient de soufflage  $C_\mu = 0.7\%$ . Ainsi ils ont trouvés, d'après les visualisations pariétales, que le recollement de couche limite turbulente est possible même aux grandes incidences.

**M.Xenos, E.Tzirtzilakis, N.Kafoussias [20]** ont examinés, numériquement, l'effet de l'aspiration et le soufflage sur la couche limite turbulente compressible, développée autour d'un wedge, avec un gradient de pression adverse et sur le transfert thermique. Ils ont considéré que l'écoulement est compressible et que la vitesse de aspiration/injection est constante. Ils ont fait, d'abord, la transformation compressible de Falkner-Skan sur les équations de couche limite moyennée. Pour la fermeture, ils sont employés deux modèles algébriques de turbulence pour la viscosité turbulente ; modèle de Cebci-Smith (C-S) et

modèle de Baldwin-Lomax (B - L), et le modèle de Kays-Growford pour le nombre de Prandtl. Ensuite, pour la résolution, ils ont utilisés la méthode de Keller Box. Ils ont obtenu des résultats pour le cas d'une paroi adiabatique, froide et chaude et pour différentes valeurs de  $m$  (paramètre de gradient de pression). Les résultats ont montrés que lorsque le paramètre de gradient de pression  $m$  augmente les coefficients de frottement et de traîné augmente aussi. Ainsi que le décollement de la couche limite turbulente se produit pour  $m \geq 0.1$ .



**Figure (I-9) : Configuration de l'écoulement**

**R.B. Kotapati-Apparao, K.D. Squires [21]** ont appliqués deux approches, RAN et DES, à la prédiction de l'écoulement sur le profil-A à incidence élevé  $\alpha = 13.3^\circ$ ,  $Re = 2.10^6$ . Ils ont employé deux modèles de turbulence ; Spalart-Allmaras et SST. Ils ont affirmé que l'écoulement est caractérisé par une séparation laminaire avec rattachement turbulent suivi par une séparation d'une couche limite turbulente à proximité du bord de fuite. Ils trouvés dans le cas d'un écoulement supposé pleinement turbulent, que le modèle Spalart-Allmaras prédit le décollement à  $x/c=0.88$  et le modèle SST à  $x/c=92$ .

**C. Sarraf, H. Djeridi, J.Y. Billard, [22]** Leur travail concerne l'étude expérimentale des modifications d'une couche limite sur un profil NACA symétrique d'épaisseur relative 15 % à Reynolds  $0,5 \cdot 10^6$ , en présence d'une cavité de vapeur stable se développant sur l'extrados du profil près du bord d'attaque, pour un angle d'incidence de  $10^\circ$ . Une comparaison systématique des grandeurs intégrales et des grandeurs moyennes et fluctuantes a été réalisée avec et sans poche de cavitation afin de mettre en évidence les mécanismes d'interaction entre la phase dispersée et la phase liquide. Les résultats obtenus montrent que la présence de la poche contribue à un épaissement de la couche limite et à une augmentation de la vitesse en très proche paroi. On observe une stabilisation de la couche limite turbulente sur le profil



et un retard au décollement. L'analyse des moments d'ordre supérieur montre un décalage des maxima de production d'énergie cinétique et de cisaillement vers des distances à la paroi plus grande, une amélioration du mélange turbulent dans la zone logarithmique de la couche limite et a permis de comprendre les mécanismes de transfert et d'échange en présence de la poche.

## **Chapitre II**

### **Formulation mathématique**

## II. Formulation mathématique

### II.1 Description du problème physique :

La couche limite turbulente développée sur un profil sera décrite par les équations de Navier-Stokes complète. Par l'application de la décomposition de Reynolds, des termes supplémentaires apparaissent, dites tenseurs de Reynolds, et le système devient ouvert. Pour la fermeture, nous allons utiliser le modèle  $k-\epsilon$ . Ce dernier, donne une description plus réaliste des phénomènes d'interaction turbulente en suivant l'évolution de chaque paramètre turbulente par des équations de transport.

### II.2. Equations gouvernantes :

Les équations régissant le problème sont les équations de continuité, qui expriment la conservation de masse, et de quantité de mouvement. Pour une formulation simple du problème, nous allons supposer quelques hypothèses.

#### II.2.1. Hypothèses simplificatrices :

Nous supposons, alors, que :

- ▶ l'écoulement est permanent.
- ▶ l'écoulement est bidimensionnel.
- ▶ l'écoulement est incompressible
- ▶ le fluide est visqueux.
- ▶ absence de transfert de chaleur.

Compte tenu des hypothèses précédentes, les équations de base régissant l'écoulement sont données respectivement par :

#### II.2.2. Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

**II.2.3. Equation de quantité de mouvement suivant x :**

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

**II.2.4. Equation de quantité de mouvement suivant y :**

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.3})$$

Pour résoudre le système d'équations (II.1), (II.2) et (II.3), une approche statistique sera utilisée. Elle consiste à décomposer chaque grandeur des équations de Navier-Stokes en une grandeur moyenne et une fluctuation [6].

$$\Phi = \bar{\Phi} + \dot{\Phi}$$

Ou'  $\Phi$  représente  $p$ ,  $u$  et  $v$ .

Le système d'équations (II.1), (II.2) et (II.3) devient :

- $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial(\bar{uu})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{vu})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{-u \dot{u}}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{-u \dot{v}})$  (II.4)
- $\frac{\partial(\bar{uv})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{vv})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{-u \dot{v}}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{-v \dot{v}})$

Les équations moyennées font apparaître des termes de corrélations doubles des fluctuations. Ils proviennent de la non-linéarité des équations de bilans. Ces termes, appelés tensions de Reynolds, traduisent l'effet de la turbulence sur l'évolution du mouvement moyen et rendent les systèmes d'équations ouverts (plus d'inconnues que de relations). C'est la conséquence de la prise de moyenne des équations instantanées qui introduit une perte d'information. Se pose alors le problème de la fermeture du système, c'est-à-dire du lien entre les corrélations doubles et le champ moyen [23].

Il existe plusieurs modèles de fermeture. On utilise le modèle k-epsilon.

**II.3 Modèle k –epsilon :**

Le modèle k-ε est un des modèles les plus utilisés pour la modélisation de la turbulence. C’est un modèle à deux équations de transport proposé par Jones et Launder (1972) qui se base sur le concept Boussinesq (1877) [24].

Il utilise la viscosité turbulente pour relier les contraintes de Reynolds et les termes de flux turbulents aux variables moyennes de l’écoulement, et emploie l’hypothèse du gradient de diffusion pour relier les contraintes de Reynolds aux gradients de vitesse moyennes et à la viscosité turbulente :

Concept de Boussinesq :

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \nu_t \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

(II.5)

La viscosité turbulente est modélisée en fonction d’une échelle de longueur turbulente  $l_t$  et d’une échelle de vitesse turbulente  $V_t$ .

$$\nu_t = c_\mu l_t V_t \tag{II.6}$$

Dans ce modèle l’échelle de vitesse  $V_t$  est calculée à partir de l’énergie cinétique turbulente k. L’échelle de longueur de turbulence est estimée à partir de l’énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation ε.

Echelle de vitesse :  $V_t = \sqrt{k}$  (II.7)

Echelle de longueur de turbulence :  $l_t = \frac{\sqrt{k^3}}{\varepsilon}$  (II.8)

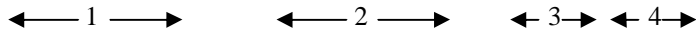
En effet, la viscosité turbulente est :

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \tag{II.9}$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{II.10}$$

**II.3.1 Equation d'énergie cinétique turbulente :**

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \tag{II.11}$$

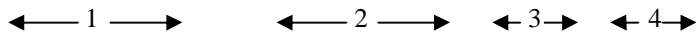


$$P_k = \mu_t 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2$$

- (1) représente le taux de variation de l'énergie cinétique K.
- (2) représente le transport par diffusion de l'énergie cinétique.
- (3) représente la production de l'énergie cinétique turbulente par cisaillement.
- (4) représente la dissipation de l'énergie cinétique turbulente K.

**II.3.2 Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente :**

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{C_1 \varepsilon}{k} P_k - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{II.12}$$



- (1) représente le taux de variation de  $\varepsilon$ .
- (2) représente le transport par diffusion de la dissipation de l'énergie cinétique.
- (3) représente le taux de production de  $\varepsilon$ .
- (4) représente la dissipation  $\varepsilon$ .

Où les constantes du modèle ci-dessous, d'après Launder et Spalding (1974), sont réunies dans le tableau suivant :

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.33

**Tableau II.1 : constantes du modèle de turbulence k-  $\varepsilon$  standard**

L'inconvénient de ce type de modèle, est l'introduction de constantes empiriques, déterminées en réalisant des expériences particulières. Ce modèle permet d'étudier de façon satisfaisante un certain nombre d'écoulements mais n'est applicable qu'assez loin des parois. C'est pourquoi, il est souvent associé à une loi de paroi qui permet de ne pas mener la résolution des équations de bilan jusqu'à cette paroi .

Donc le système devient :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.13})$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant x :**

$$\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (v + v_t) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant y :**

$$\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + (v + v_t) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

- **Equation d'énergie cinétique turbulente :**

$$\frac{\partial uk}{\partial x} + \frac{\partial vk}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \varepsilon \quad (\text{II.16})$$

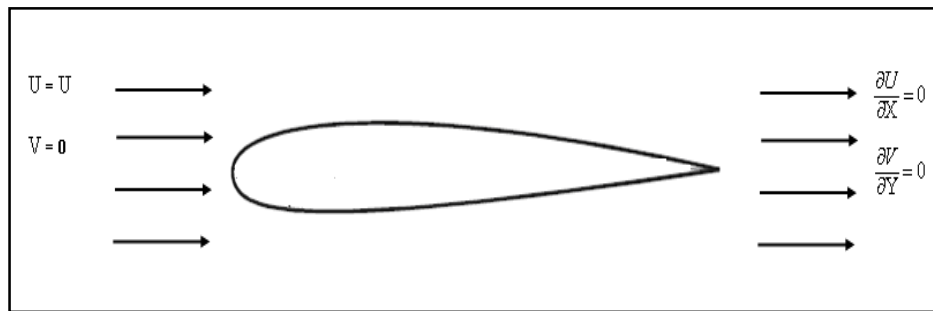
- **Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulent :**

$$\frac{\partial u\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{c_1}{k} \varepsilon P_k - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.17})$$

Avec :  $v_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$

**II.4 Conditions aux limites :**

Dans des calculs avec le système des équations de mouvement d'un fluide, on rencontre principalement trois types de frontières différentes: les parois solides, les frontières libres et des plans de périodicité. Pour chacune de ces frontières, les conditions aux limites doivent fournir de l'information sur l'état des champs à l'extérieur du domaine d'intégration au calcul dans le domaine [25].pour notre cas les conditions de périodicité n'interviennent pas.



**Figure (II-1) : Conditions aux limites**

- **Conditions à l'entrée :**

Généralement les conditions à l'entrée sont déduites des données expérimentales. Des conditions de type de Dirichlet sont imposées pour les composantes de vitesse et pour les grandeurs turbulentes k et ε.

La vitesse longitudinale U est imposée uniforme et égale à la vitesse potentielle U<sub>∞</sub>, la vitesse transversale est nulle.

$$U = U_\infty, \quad (\text{II-18})$$

$$V = 0,$$



Les valeurs de  $k$  et  $\varepsilon$  sont fixées par l'intermédiaire de la longueur caractéristique de la turbulence  $L_\varepsilon$  et l'intensité turbulente  $I$  :

$$k_{\text{entrée}} = \frac{3}{2} I^2 U^2 \quad (\text{II-19})$$

$$\varepsilon_{\text{entrée}} = \frac{k_{\text{entrée}}^{3/2}}{l_\varepsilon}$$

➤ **Conditions à la sortie :**

Les conditions de Neuman sont appliquées à la sortie. Toutes les grandeurs ont un gradient normal nul.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-20})$$

➤ **Condition à la paroi :**

En régime laminaire, les vitesses moyennes sur la paroi sont nulles. Dans le cas d'écoulement turbulent, il faut un traitement spécial pour les régions près de ces parois .

### II.5. Adimensionnalisation des équations:

Les équations (2.13)-(2.17) sont adimensionnalisées à l'aide des variables et grandeurs adimensionnelles suivantes:

- $X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L},$

- Les vitesses suivant x et y :  $U = \frac{\bar{u}}{u_\infty}, \quad V = \frac{\bar{v}}{u_\infty},$

- La pression :  $P = \frac{\bar{p}}{\rho u_\infty^2},$

- Le nombre de Reynolds :  $Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu},$

- L'énergie cinétique :  $K^* = \frac{K}{U_\infty^2},$

▪ Le taux de dissipation : 
$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\frac{U_\infty^3}{L}},$$

L : longueur de corde

$U_\infty$  : Vitesse à l'infini

On aboutit au modèle mathématique suivant :

### II.5.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II-21})$$

### II.5.2 Equation de quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re_{el}} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \quad (\text{II-22})$$

### II.5.3 Equation de quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re_{el}} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) \quad (\text{II-23})$$

### II.5.4 Equation de l'énergie cinétique turbulente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial UK^*}{\partial X} + \frac{\partial VK^*}{\partial Y} = & \frac{1}{Re} \frac{v_t}{\nu} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 \right] - \varepsilon^* \\ & + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \frac{\partial K^*}{\partial X} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \frac{\partial K^*}{\partial Y} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

### II.5.5 Equation de la dissipation d'énergie cinétique turbulente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U \varepsilon^*}{\partial X} + \frac{\partial V \varepsilon^*}{\partial Y} = & \frac{1}{Re} \frac{v_t}{\nu} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 \right] \frac{C_1}{K^*} \varepsilon^* + \\ & \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial X} \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial Y} \right] - C_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{K^{*2}} \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

L'adimensionnalisation de ces équations avec une échelle de vitesse  $U$  et une longueur  $L$  implique que l'écoulement dépend du nombre de Reynolds et des conditions aux limites et initiales [26].

Avec les conditions aux limites adimensionnalisées suivantes :

- Sur le profil :  $U=0, V=0$
- A l'amont:  $U=1, V=0,$
- A l'infini aval:  $\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$

## II.6 Traitement de la paroi

Du fait que le modèle  $k-\varepsilon$  est mal adapté au nombre de Reynolds faible, un traitement spécifique de paroi est nécessaire [3].

La présence de la paroi, au sein d'un écoulement turbulent, cause deux effets importants [2]:

- l'écoulement devient anisotropique
- l'augmentation de la production de turbulence à travers des mécanismes de cisaillement de l'écoulement.

Du fait de l'existence dans la couche limite turbulente d'une zone au voisinage de la paroi où les effets visqueux sont prédominants, deux types de modèles de turbulence peuvent être utilisés pour spécifier (incorporer) les conditions à la limite de la paroi. Le premier est le modèle à faible nombre de Reynolds; plus complexe, qui prennent en compte les effets visqueux à proximité de la paroi. Le deuxième est le modèle à grand nombre de Reynolds; qui ne calcule pas l'écoulement jusqu'à la paroi mais qui peut être couplé avec des lois semi-logarithmiques, figure(II-2).

Pour les modèles à faible nombre de Reynolds, qui prennent en compte les effets visqueux, le premier point intérieur de maillage près de la paroi doit être situé dans la sous-couche visqueuse; pour ceux-ci au nombre de Reynolds élevé, le premier point intérieur de maillage près de la paroi doit être situé dans la zone logarithmique [3].

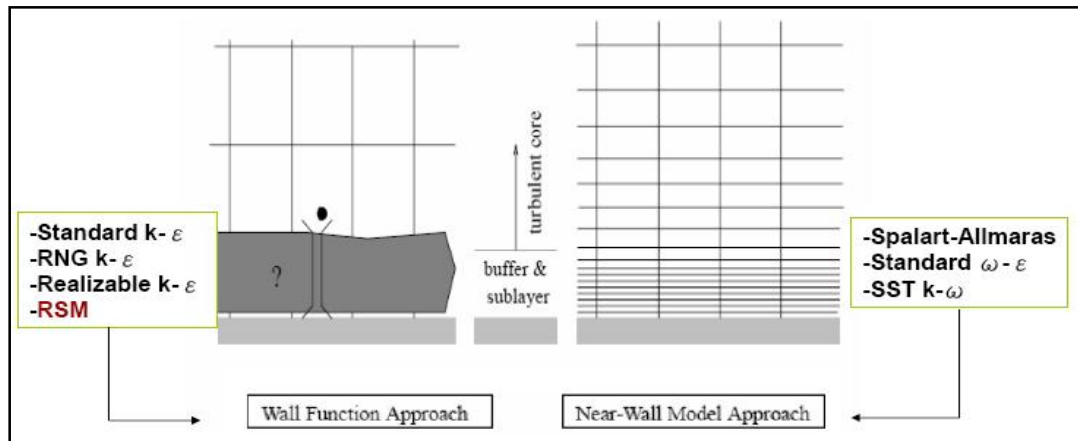


Figure (II.2): Traitement de la paroi

II.6.1 Fonction du paroi:

Comme le modèle  $k-\epsilon$  s’adapte bien aux nombre de Reynolds élevée, on emploie donc une fonction du paroi basée sur la loi logarithmique.[27]

L’approche de la loi du paroi basée sur trois hypothèses:

- Le profil de vitesse est logarithmique.
- La contrainte totale est uniforme.
- L’écoulement est en équilibre local, c’est- à- dire que la production d’énergie cinétique turbulente est égale à la dissipation.

Considérons un élément de volume de controle près de la paroi suivant , figure(II-3).

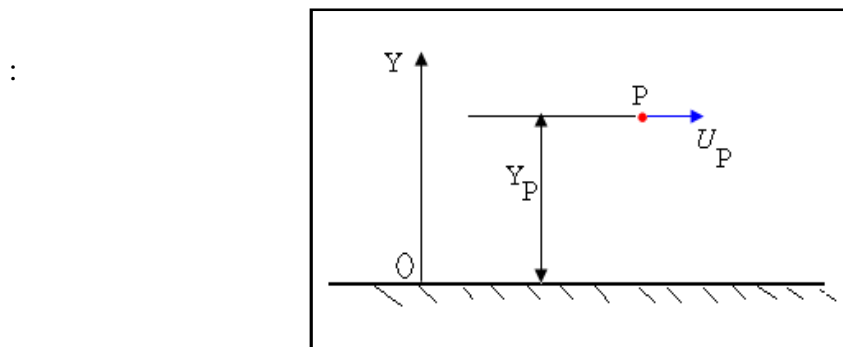


Figure (II.3): volume de controle près de la paroi

La vitesse tangentielle à la paroi varie suivant la loi universelle suivante:

$$u^+ = \begin{cases} Y^+ & \text{si } Y^+ \leq 11.63 \\ \frac{1}{\kappa} \log(E Y^+) & \text{si } Y^+ > 11.63 \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

$$u^+ = \frac{u^t}{u_\tau}, \quad Y^+ = \frac{\rho Y_p u_\tau}{\mu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\text{II-27})$$

Avec:

$\kappa$  : constante de Van-Karman (= 0.42).

E: facteur de rugosité.

$u_\tau$ : vitesse de frottement.

$u^t$ : La vitesse tangentielle à la paroi ;  $U_p$  dans la figure (II-3).

$Y^+$  : distance adimensionnelle à la paroi.

$\tau_w$ : la contrainte de cisaillement à la paroi.

Deux cas peuvent se présenter (découlent de la loi universelle donnée en deux fonctions) :

➤  **$Y^+ \geq 11.63$**

C'est la couche limite turbulente. On peut donc supposer que l'écoulement est en équilibre local où la contrainte de cisaillement pariétale peut s'exprimer en fonction de l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \sqrt{c_\mu k} \quad (\text{II-28})$$

En substituant (II-28) dans (II-27), on obtient les relations suivantes :

$$u_\tau = c_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (\text{II-29})$$

$$Y^+ = \frac{\rho Y_p c_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\mu} \quad (\text{II-30})$$

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa c_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\log(E Y^+)} u^t \quad (\text{II-31})$$

Le terme de production dans l'équation gouvernant le transport de l'énergie cinétique de turbulence peut se réduire à la production dans un écoulement de couette ; c'est-à-dire :

$$P_k = \mu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II-32})$$

$$P_k = \left( \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{II-33})$$

Où on remplace  $\tau$  par  $\tau_w$  donnée par la relation (II-31).

L'équilibre local permet d'écrire :  $P_k = \rho \varepsilon$  où  $\rho \varepsilon$  est le terme de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence.

$$\rho \varepsilon = \frac{\rho c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa Y_p} \quad (\text{II-34})$$

En ce qui concerne le taux de dissipation, sa valeur à la paroi, comme condition à la limite, est donnée par:

$$\varepsilon_p = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa Y_p} \quad (\text{II-35})$$

### ➤ $Y^+ < 11.63$

C'est la zone définie comme étant une zone où les forces de viscosité ne peuvent pas être négligées. La contrainte de cisaillement à la paroi se réduit dans ce cas à sa valeur laminaire.

## **Chapitre III**

### **Procédure numérique**

### III. Procédure numérique

#### III.1. Introduction

La modélisation de la couche limite turbulente par un système d'équations différentielles aux dérivées partielles est déjà faite dans le chapitre précédent. Pour un certain problème, l'usage d'un système de coordonnées non cartésiennes peut être d'un grand intérêt, pour calculer des écoulements autour de géométries complexes telles que les profils d'ailes. En effet, on procédera à une transformation du plan physique  $(x, y)$  au plan de calcul  $(\zeta, \eta)$ . Cette transformation est appliquée aux équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie cinétique  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$ , et les équations transférées sont alors discrétisées et résolues par la méthode des volumes finis.

#### III.2. Le maillage :

Le développement des méthodes numériques en mécanique des fluides, ne cesse d'accorder une importance de plus en plus grande au problème du maillage de l'espace autour d'obstacles de formes plus ou moins complexes [28].

La résolution d'un système d'équations différentielles, n'est possible que lorsque les conditions aux limites sont conjointement appliquées aux frontières du domaine d'étude, et peut être grandement simplifiées par un maillage bien construit [29].

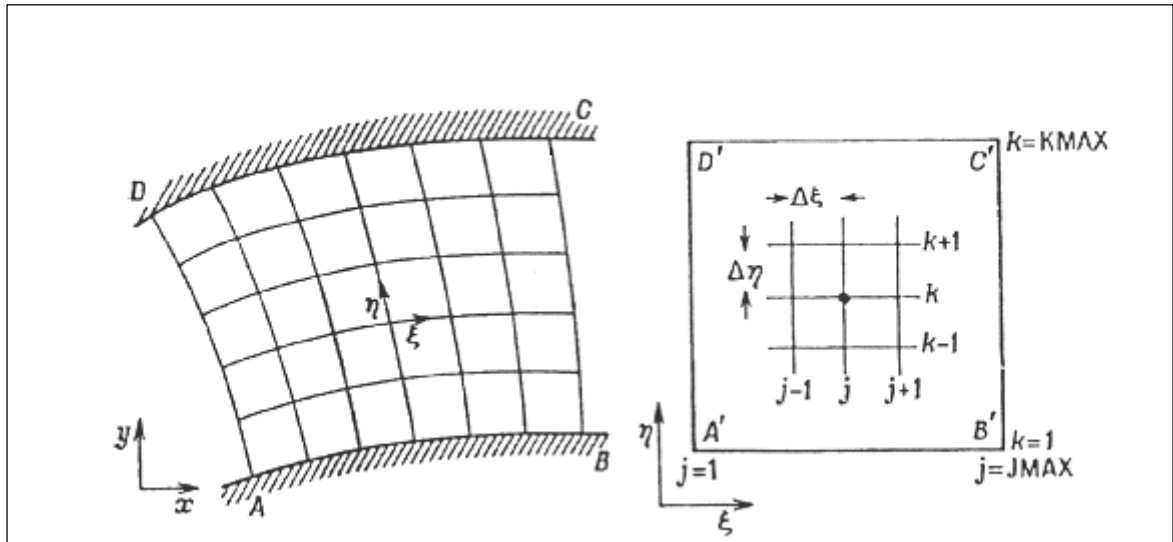
Les géométries complexes et courbées sont relativement faciles à simuler grâce à des méthodes non structurées, mais souvent impossible à représenter par un maillage cartésien, ou du fait que les frontières ne sont pas confondues avec les lignes de maillage, sans avoir recours à des procédés d'extrapolation qui peut engendrer des instabilités difficiles à contrôler, et rendre problématique l'établissement d'une condition de paroi robuste.

L'utilisation de coordonnées curvilignes  $(\zeta, \eta)$  permet d'éviter ce problème. Un maillage structuré de forme curviligne, épousant la géométrie de la forme à simuler, est construit [30]. Ce maillage est composé de deux familles de lignes qui sont orthogonales entre elles. Une des lignes  $\zeta$  représente le contour de profil, et l'autre  $\eta$  représente la ligne perpendiculaire [29].

Chaque type de maillage, contient une série de lignes de coordonnées qui s'enroulent autour de profil et celle de coordonnée qui se prolonge à l'extérieur.



Il s'agit donc d'effectuer un changement de variables sur les équations que l'on cherche à résoudre. Cette approche permet de bénéficier à la fois des avantages d'un maillage parallèle à la paroi, et de ceux de la résolution sur un maillage cartésien.



Figure(III.1): transformation du plan physique (x,y) au plan de calcul (xi,eta)

III.3. Transformation des équations

Puisque les équations gouvernantes (II. 21)-(II-25) sont avantageusement résolues dans le domaine de calcul, figure (III.1), elles doivent être transformées. Ceci s'applique en utilisant un différentiel partiel.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta_y + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_y \tag{III.1}$$

$$\zeta_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad , \quad \zeta_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad , \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Où  $\zeta_x, \eta_x, \zeta_y$  et  $\eta_y$  sont nommées « paramètres métriques » de la transformation que l'on peut l'écrire :

$$\zeta_x = J Y \eta \quad , \quad \zeta_y = -J X \eta$$

$$\eta_x = -J Y_\zeta \quad , \quad \eta_y = J X_\zeta$$

Où J est le jacobien de la transformation donné par :

$$\begin{bmatrix} \zeta_x & \zeta_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} Y_\eta & -X_\eta \\ -Y_\zeta & X_\zeta \end{bmatrix} \tag{III.2}$$

$$J = \frac{\partial(\zeta, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \zeta_x & \zeta_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \zeta_x \eta_y - \zeta_y \eta_x$$

On introduit ces transformations (III.1) et (III.2) dans chaque terme du système d'équations (II.21)-(II-25) pour aboutir, après calculs, à la forme suivante des équations :

### III.3.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial U^c}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^c}{\partial \eta} = 0 \tag{III-3}$$

### III.3.2. Equation de quantité de mouvement suivant $\zeta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U^c U)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(V^c U)}{\partial \eta} = & -\frac{\partial P}{\partial \zeta} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\zeta + \frac{1}{R_{el}} \left(1 + \frac{v_{tv}}{v}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{11}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{22}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \tag{III-4}$$

### III.3.3. Equation de quantité de mouvement suivant $\eta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U^c V)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(V^c V)}{\partial \eta} = & -\frac{\partial P}{\partial \zeta} x_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\zeta + \frac{1}{R_{el}} \left(1 + \frac{v_t}{v}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{11}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{22}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \tag{III-5}$$

**III.3.4. Equation d'énergie cinétique turbulente K**

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^c K}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^c K}{\partial \eta} = \frac{1}{R_e} \frac{v_i}{\nu} \left[ \left( \frac{f_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{f_{22}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \right]^2 + 2 \left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \\ + 2 \left( \frac{f_{12}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{f_{22}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 - \varepsilon + \frac{1}{R_e} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma_k \frac{q_{11}}{J} \frac{\partial K}{\partial \zeta} + \Gamma_k \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_k \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial K}{\partial \zeta} + \Gamma_k \frac{q_{22}}{J} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (III-6)$$

**III.3.5. Equation de dissipation d'énergie cinétique turbulente ε**

$$\frac{\partial U^c \varepsilon}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^c \varepsilon}{\partial \eta} = \frac{1}{R_e} \frac{v_i}{\nu} C_1 \frac{\varepsilon P_k}{K} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K^2} + \frac{1}{R_e J} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{q_{11}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} + \Gamma_\varepsilon \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} + \Gamma_\varepsilon \frac{q_{22}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] \quad (III-7)$$

Avec :

$$U^c = U \cdot y_\eta - V \cdot x_\eta \quad , \quad V^c = V \cdot x_\zeta - U \cdot y_\zeta \quad \text{les vitesses contravariantes}$$

$$q_{11} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad , \quad q_{22} = x_\zeta^2 + y_\zeta^2$$

$$q_{12} = -x_\zeta x_\eta - y_\zeta y_\eta \quad , \quad q_{21} = -x_\zeta x_\eta - y_\zeta y_\eta$$

$$f_{11} = y_\eta \quad , \quad f_{22} = x_\zeta$$

$$f_{12} = -x_\eta \quad , \quad f_{21} = -y_\zeta$$

$$J = x_\zeta y_\eta - x_\eta y_\zeta$$

**III.4. Méthode de résolution numérique**

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires. Par conséquent elles ne peuvent être résolues analytiquement. Des méthodes numériques sont donc employées pour représenter le problème continu de façon discrète [31]. Comme par exemple les approximations par différences finis, par éléments finis, par volumes finis et par des méthodes spectrales [29]. La méthode des volumes finie, sans doute la plus employée actuellement, est caractérisée par son avantage de satisfaire la conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Elle consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes élémentaires ou' chaque volume élémentaire entoure un nœud.

III.4.1. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable  $\Phi$

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle générale de transport en un système d'équations algébriques qui peuvent être résolues en chaque point du maillage par la méthode numérique convenable.

Les équations du modèle mathématique peuvent être représentées par l'équation générale de transport suivante :

$$\frac{\partial(U^c \phi)}{\partial \zeta} + \frac{\partial(V^c \phi)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma_{\phi_\zeta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_{\phi_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + S_\phi \quad \text{(III-8)}$$

Les sources et les coefficients de diffusion sont spécifiés dans le tableau (III-1)

Equation	$\Phi$	$\Gamma_{\phi_\zeta}$	$\Gamma_{\phi_\eta}$	$S_\phi$
continuité	1	0	0	0
quantité de mouvement suivant $\zeta$	U	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \frac{q_{11}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \frac{q_{22}}{J}$	$-\frac{\partial P}{\partial \zeta} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\zeta + \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right]$
quantité de mouvement suivant $\eta$	V	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \frac{q_{11}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \frac{q_{22}}{J}$	$-\frac{\partial P}{\partial \zeta} x_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\zeta + \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right]$
Energie cinétique	K	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \frac{q_{11}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right) \right] + P_k - \varepsilon$
Taux de dissipation	$\varepsilon$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_\varepsilon}\right) \frac{q_{11}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J}$	$\frac{1}{Re} \left(1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{1}{Re} \frac{v_t}{\nu} C_1 \frac{\varepsilon P_k}{k} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2}$

Tableau (III.1.) : Les sources et les coefficients de diffusion du variable  $\Phi$

Pour discrétiser ces équations, nous avons utilisés la méthode des volumes finies proposée moyenne et Patankar Splinding [32]. Cette méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini de volumes jointifs à faces rectangulaires où chaque volume élémentaire entoure un nœud. Les variables scalaires P, K et  $\epsilon$  sont stockées aux nœuds de maillage et les variables vectorielles U et V sont stockées au milieu des interfaces des volumes, figure (III-2).

L'équation générale de transport est intégrée sur le volume de contrôle associé à la variable scalaire et les équations de quantité de mouvement sont intégrées sur les volumes de contrôle associé aux variables vectorielles.

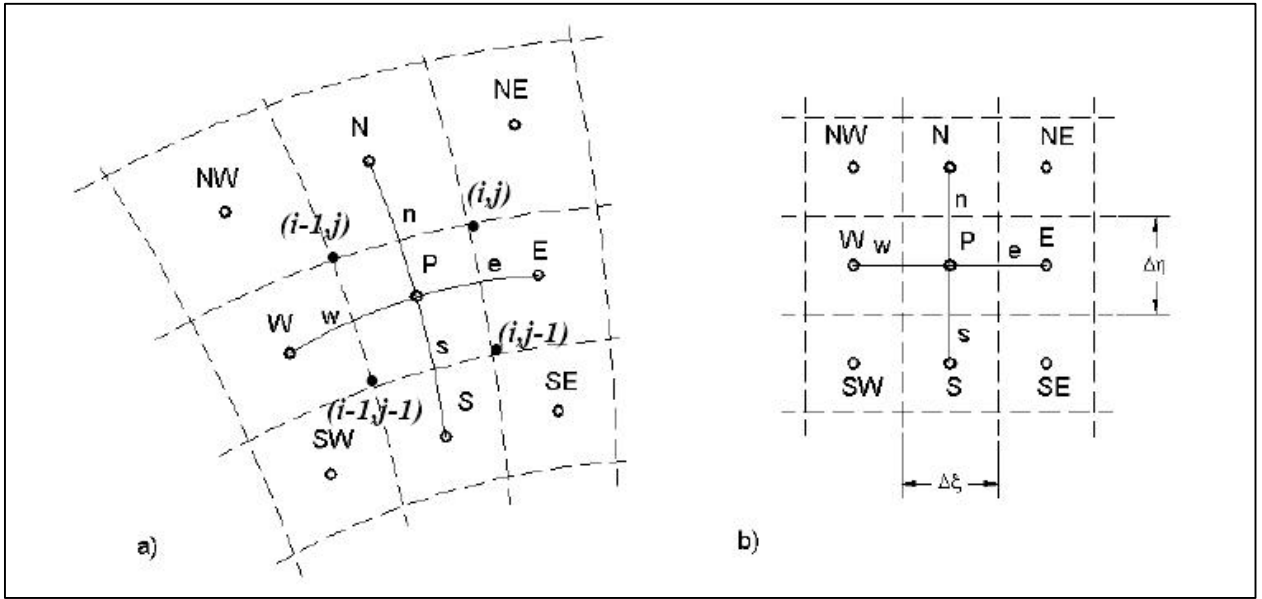


Figure (III-2) : Représentation schématique du maillage avec un volume de contrôle typique

### III.4.1.1. Discrétisation de l'équation de continuité

Les termes de l'équation de continuité sont intégrés dans le volume de contrôle typique figure (III-3) comme suite :

$$\begin{aligned}
 \int_w^e \int_s^n \left( \frac{\partial U^c}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^c}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta &= (U_e^c - U_w^c) \Delta\eta_p + (V_n^c - V_s^c) \Delta\zeta_p \\
 &= \left[ \left( \frac{U_E^c + U_P^c}{2} \right) - \left( \frac{U_P^c + U_W^c}{2} \right) \right] \Delta\eta_p + \left[ \left( \frac{V_N^c + V_P^c}{2} \right) - \left( \frac{V_P^c + V_S^c}{2} \right) \right] \Delta\zeta_p \\
 &= (U_E^c - U_W^c) \Delta\eta_p + (V_N^c - V_S^c) \Delta\zeta_p
 \end{aligned}$$

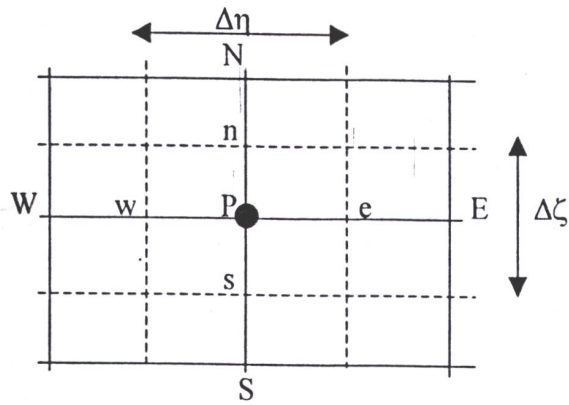


Figure (III-3) : volume de contrôle typique

III.4.1. 2. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant  $\zeta$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\zeta$  est intégré dans le volume de contrôle décalé dans la direction  $\zeta$ , figure (III-4)

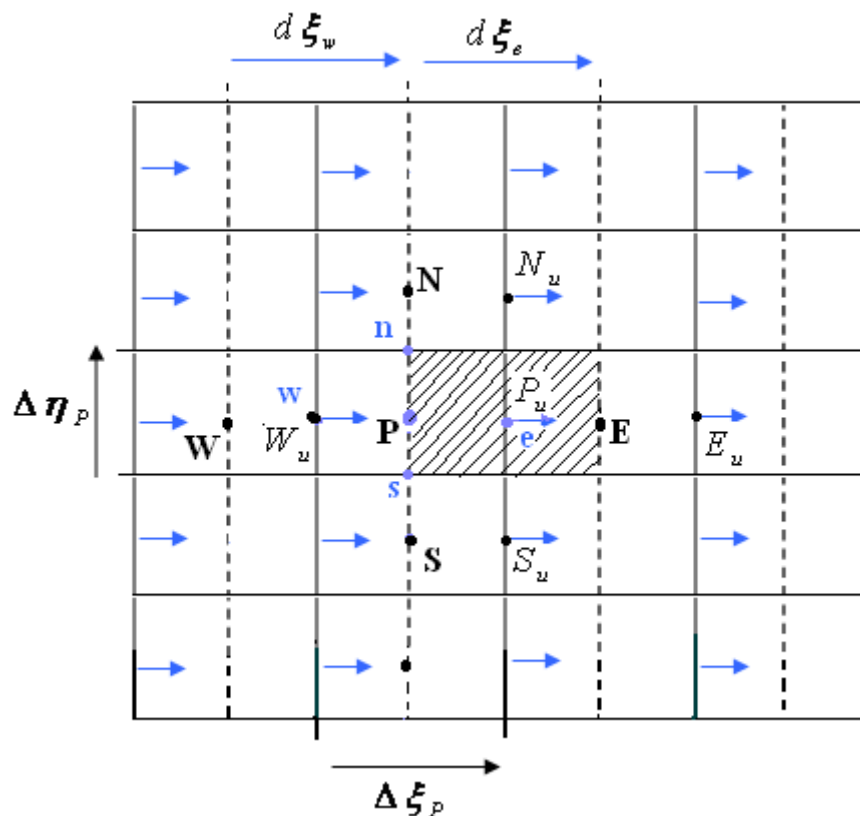


Figure (III-4) : le maillage décalé suivant  $\zeta$

**Discrétisation des termes convectifs :**

Les termes convectifs sont discrétisés par le schéma upwind d'ordre 2

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(U^c U)}{\partial \zeta} d\zeta d\eta &= [U_{P_u} + \frac{1}{2}(U_{P_u} - U_{W_u})] \|F_{e, 0}\| - [U_{E_u} + \frac{1}{2}(U_{E_u} - U_{EE_u})] \|F_{e, 0}\| \\ &+ [U_{P_u} + \frac{1}{2}(U_{P_u} - U_{E_u})] \|F_{w, 0}\| - [U_{W_u} + \frac{1}{2}(U_{W_u} - U_{WW_u})] \|F_{e, 0}\| \\ \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(V^c U)}{\partial \eta} d\zeta d\eta &= [U_{P_u} + \frac{1}{2}(U_{P_u} - U_{S_u})] \|F_{n, 0}\| - [U_{N_u} + \frac{1}{2}(U_{N_u} - U_{NN_u})] \|F_{n, 0}\| \\ &+ [U_{P_u} + \frac{1}{2}(U_{P_u} - U_{N_u})] \|F_{s, 0}\| - [U_{S_u} + \frac{1}{2}(U_{S_u} - U_{SS_u})] \|F_{s, 0}\| \end{aligned}$$

**Discrétisation des termes diffusifs :**

Les termes diffusifs sont discrétisés par le schéma des différences centrés

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) d\zeta d\eta &= \left[ \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{e_u} - \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{w_u} \right] \Delta \eta_{P_u} \\ &= \left( \Gamma_{e_u} \left( \frac{U_{E_u} - U_{P_u}}{\Delta \zeta_E} \right) - \Gamma_{w_u} \left( \frac{U_{P_u} - U_{W_u}}{\Delta \zeta_P} \right) \right) \Delta \eta_{P_u} \\ \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta &= \left[ \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{n_u} - \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{s_u} \right] \Delta \zeta_{P_u} \\ &= \left( \Gamma_{n_u} \left( \frac{U_{N_u} - U_{P_u}}{d\eta_{n_u}} \right) - \Gamma_{s_u} \left( \frac{U_{P_u} - U_{S_u}}{d\eta_{s_u}} \right) \right) \Delta \zeta_{P_u} \end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned} \Gamma_{eu} &= \frac{1}{\text{Re} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu} \right)} \frac{q_{11}}{J} \Big|_{eu} = \frac{1}{\text{Re} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu} \right)} \frac{q_{11}}{J} \Big|_E \\ \Gamma_{wu} &= \frac{1}{\text{Re} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu} \right)} \frac{q_{11}}{J} \Big|_{wu} = \frac{1}{\text{Re} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu} \right)} \frac{q_{11}}{J} \Big|_P \end{aligned}$$

$$\Gamma_{nu} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{nu} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{nu}}}{v} \right) \frac{q_{22_{nu}}}{J_{nu}}$$

$$\Gamma_{su} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{su} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{su}}}{v} \right) \frac{q_{22_{su}}}{J_{su}}$$

$$v_{t_{nu}} = \left( \frac{v_{t_E} + v_{t_P} + v_{t_N} + v_{t_{NE}}}{4} \right)$$

$$q_{22_{nu}} = \left( \frac{q_{22_E} + q_{22_P} + q_{22_N} + q_{22_{NE}}}{4} \right)$$

$$J_{nu} = \left( \frac{J_E + J_P + J_N + J_{NE}}{4} \right)$$

$$v_{t_{su}} = \left( \frac{v_{t_E} + v_{t_P} + v_{t_S} + v_{t_{SE}}}{4} \right)$$

$$q_{22_{su}} = \left( \frac{q_{22_E} + q_{22_P} + q_{22_S} + q_{22_{SE}}}{4} \right)$$

$$J_{su} = \left( \frac{J_E + J_P + J_S + J_{SE}}{4} \right)$$

### Discretisation des termes de source

$$\int_{wu}^{enu} \int_{su} S_u d\zeta d\eta = \int_{wisu}^{enu} \left( -\frac{\partial P}{\partial \zeta} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\zeta + \frac{1}{R_{el}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] \right) d\zeta d\eta$$

### Termes de pression

$$\begin{aligned} \int_{wisu}^{enu} \int \left( -\frac{\partial P}{\partial \zeta} f_{11} + \frac{\partial P}{\partial \eta} f_{21} \right) d\zeta d\eta &= \int_{wisu}^{enu} \left( -\frac{\partial P}{\partial \zeta} f_{11} - \frac{\partial P}{\partial \eta} f_{21} \right) d\zeta d\eta \\ &= \int_{wisu}^{enu} \left( -f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) d\zeta d\eta + \int_{wisu}^{enu} \left( -f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta \\ &= f_{11} (p_p - p_E) + f_{21} (p_p - p_N) \end{aligned}$$



Termes diffusifs :

$$s_d = \int \int_{w_u s_u}^{e_u n_u} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta + \int \int_{w_u s_u}^{e_u n_u} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) d\zeta d\eta$$

$$= \left[ \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{e_u} - \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{w_u} \right] \Delta \eta_{P_U} + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{n_u} - \left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{s_u} \right] \Delta \zeta_{P_U}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{eu} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{eu}}}{\nu} \right) \frac{q_{12}}{J} \Big|_{eu} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{eu}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{wu} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{wu}}}{\nu} \right) \frac{q_{12}}{J} \Big|_{wu} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{wu}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{nu} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{nu}}}{\nu} \right) \frac{q_{21}}{J} \Big|_{nu} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{nu}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{su} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{su}}}{\nu} \right) \frac{q_{21}}{J} \Big|_{su} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_{su}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P U_P = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S + S$$

Avec:

$$A_E = D_E + \max(F_e, 0)$$

$$A_W = D_W + \max(F_w, 0)$$

$$A_N = D_N + \max(F_n, 0)$$

$$A_S = D_S + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$D_e = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_e \frac{\Delta \eta_p}{\Delta \zeta_E}$$

$$D_w = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_w \frac{\Delta \eta_p}{\Delta \zeta_P}$$

$$D_n = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_w \frac{d\zeta_e}{d\eta_n}$$

$$D_s = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_s \frac{d\zeta_e}{d\eta_s}$$

$S = S_c + S_d + S_p$  où

$$S_c = \frac{1}{2} (U_{P_u} - U_{W_u}) \|F_{e_u}, 0\| - \frac{1}{2} (U_{E_u} - U_{EE_u}) \|F_{e_u}, 0\| + \frac{1}{2} (U_{P_u} - U_{E_u}) \|F_{w_u}, 0\| - \frac{1}{2} (U_{W_u} - U_{WW_u}) \|F_{e_u}, 0\|$$

$$+ \frac{1}{2} (U_{P_u} - U_{S_u}) \|F_{n_u}, 0\| - \frac{1}{2} (U_{N_u} - U_{NN_u}) \|F_{n_u}, 0\| + \frac{1}{2} (U_{P_u} - U_{N_u}) \|F_{s_u}, 0\| - \frac{1}{2} (U_{S_u} - U_{SS_u}) \|F_{s_u}, 0\|$$

**III.4.1.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant  $\eta$**

Chaque terme d'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$  est intégré dans le volume de contrôle décalé dans la direction  $\eta$ , figure (III-4).

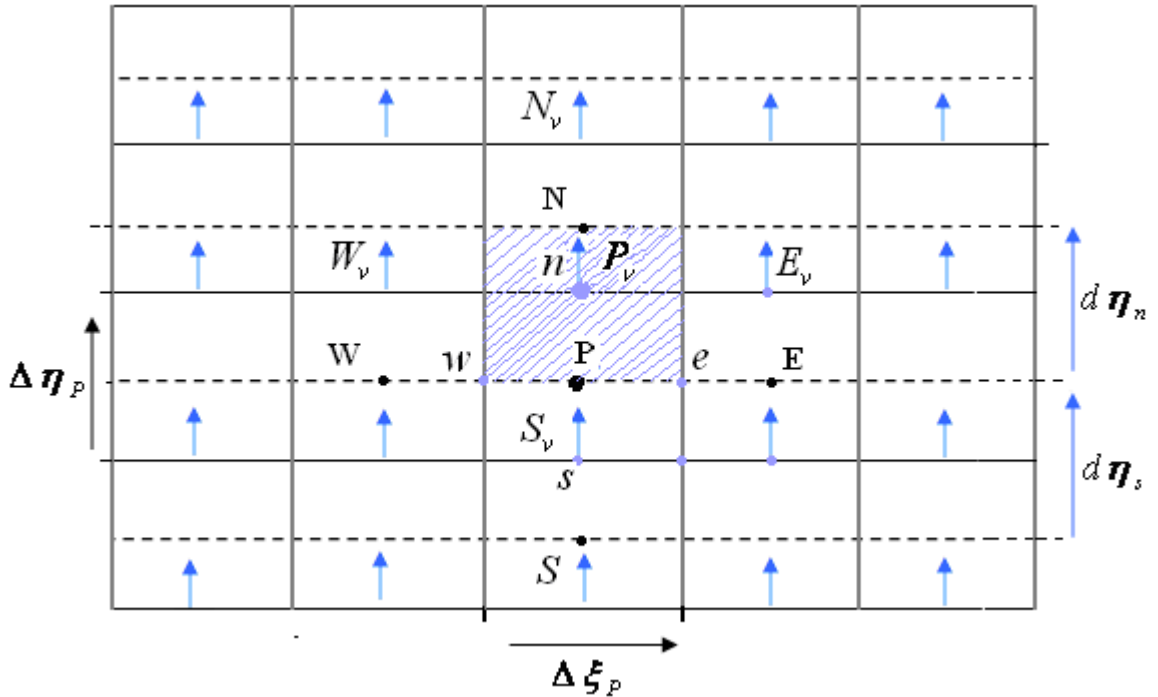


Figure (III-4) : le maillage décalé suivant  $\eta$

**Discrétisation des termes convectifs :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(U^c V)}{\partial \zeta} d\zeta d\eta = [V_{P_v} + \frac{1}{2}(V_{P_v} - V_{W_v})] \|F_{ev}, 0\| - [V_{E_v} + \frac{1}{2}(V_{E_v} - V_{EE_v})] \|F_{ev}, 0\|$$

$$+ [V_{P_v} + \frac{1}{2}(V_{P_v} - V_{E_v})] \|F_{wv}, 0\| - [V_{W_v} + \frac{1}{2}(V_{W_v} - V_{WW_v})] \|F_{ev}, 0\|$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(V^c V)}{\partial \eta} d\zeta d\eta = [V_{P_v} + \frac{1}{2}(V_{P_v} - V_{S_v})] \|F_{nv}, 0\| - [V_{N_v} + \frac{1}{2}(V_{N_v} - V_{NN_v})] \|F_{nv}, 0\|$$

$$+ [V_{P_v} + \frac{1}{2}(V_{P_v} - V_{N_v})] \|F_{sv}, 0\| - [V_{S_v} + \frac{1}{2}(V_{S_v} - V_{SS_v})] \|F_{sv}, 0\|$$

**Discrétisation des termes diffusifs :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta}) d\zeta d\eta = [(\Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta})_{e_v} - (\Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta})_{w_v}] \Delta \eta_{p_v}$$

$$= (\Gamma_{e_v} (\frac{V_{E_v} - V_{P_v}}{d\zeta_e}) - \Gamma_{w_v} (\frac{V_{P_v} - V_{W_v}}{d\zeta_w})) \Delta \eta_{p_v}$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta}) d\zeta d\eta = [(\Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta})_{n_v} - (\Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta})_{s_v}] \Delta \zeta_{p_v}$$

$$= (\Gamma_{n_v} (\frac{V_{N_v} - V_{P_v}}{\Delta \eta_N}) - \Gamma_{s_v} (\frac{V_{P_v} - V_{S_v}}{\Delta \eta_P})) \Delta \zeta_{p_v}$$

Avec:

$$\Gamma_{ev} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_{ev} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{ev}}}{v} \right) \frac{q_{11_{ev}}}{J_{ev}}$$

$$\Gamma_{wv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_{wv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{wv}}}{v} \right) \frac{q_{11_{wv}}}{J_{wv}}$$

$$\Gamma_{nv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{nv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_N$$

$$\Gamma_{sv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{sv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_P$$

$$v_{t_{ev}} = \left( \frac{v_{t_p} + v_{t_N} + v_{t_{NE}} + v_{t_E}}{4} \right)$$

$$q_{22_{ev}} = \left( \frac{q_{22_p} + q_{22_N} + q_{22_{NE}} + q_{22_E}}{4} \right)$$

$$J_{ev} = \left( \frac{J_p + J_N + J_{NE} + J_E}{4} \right)$$

$$v_{t_{wv}} = \left( \frac{v_{t_p} + v_{t_N} + v_{t_{WN}} + v_{t_W}}{4} \right)$$

$$q_{22_{wv}} = \left( \frac{q_{22_p} + q_{22_N} + q_{22_{WN}} + q_{22_W}}{4} \right)$$

$$J_{wv} = \left( \frac{J_p + J_N + J_{WN} + J_W}{4} \right)$$

### Discrétisation des termes de source

$$\int_{wv,sv}^{ev,nv} S_V d\zeta d\eta = \int_{wv,sv}^{ev,nv} \left( \frac{\partial P}{\partial \zeta} x_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\zeta + \frac{1}{R_{el}} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right] \right) d\zeta d\eta$$

### Termes de pression

$$\begin{aligned} \int_{wv,sv}^{ev,nv} \left( \frac{\partial P}{\partial \zeta} x_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\zeta \right) d\zeta d\eta &= \int_{wv,sv}^{ev,nv} \left( -\frac{\partial P}{\partial \zeta} f_{12} - \frac{\partial P}{\partial \eta} f_{22} \right) d\zeta d\eta \\ &= \int_{wv,sv}^{ev,nv} \left( -\frac{\partial P}{\partial \zeta} f_{12} \right) d\zeta d\eta + \int_{wv,sv}^{ev,nv} \left( -\frac{\partial P}{\partial \eta} f_{22} \right) d\zeta d\eta \\ &= f_{12}(p_p - p_E) + f_{22}(p_p - p_N) \end{aligned}$$

### Termes diffusifs

$$s_d = \int_{w_v, s_v}^{e_v, n_v} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta + \int_{w_v, s_v}^{e_v, n_v} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) d\zeta d\eta$$

$$\iint_{wv,sv}^{ev,nv} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \right) d\zeta d\eta = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{ev} - \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{wv} \right] \Delta \eta_{pv}$$

$$\iint_{wv,sv}^{ev,nv} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \right) d\zeta d\eta = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{nv} - \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{sv} \right] \Delta \zeta_{pv}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{ev} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{ev}}}{v} \right) \frac{q_{12}}{J} \bigg|_{ev} \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{ev}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{wv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{wv}}}{v} \right) \frac{q_{12}}{J} \bigg|_{wv} \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{wv}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{nv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{nv}}}{v} \right) \frac{q_{21}}{J} \bigg|_{nv} \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{nv}$$

$$\left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{sv} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{v_{t_{sv}}}{v} \right) \frac{q_{21}}{J} \bigg|_{sv} \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{sv}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme suivante:

$$A_P U_P = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S + S$$

Avec:

$$A_E = D_E + \max(F_e, 0)$$

$$A_W = D_W + \max(F_w, 0)$$

$$A_N = D_N + \max(F_n, 0)$$

$$A_S = D_S + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$D_e = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \bigg|_{ev} \frac{d\eta_n}{d\zeta_e}$$

$$D_w = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_{w_v} \frac{d\eta_n}{d\zeta_w}$$

$$D_n = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{n_v} \frac{\Delta\zeta_p}{\Delta\eta_N}$$

$$D_s = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_{s_v} \frac{\Delta\zeta_p}{\Delta\eta_p}$$

$$S = S_c + S_d + S_p$$

$$S_c = \frac{1}{2} (U_{P_v} - U_{W_v}) \Big|_{F_{ev}, 0} - \frac{1}{2} (U_{E_v} - U_{EE_v}) \Big|_{-F_{ev}, 0} + \frac{1}{2} (U_{P_v} - U_{E_v}) \Big|_{-F_{w_v}, 0} - \frac{1}{2} (U_{W_v} - U_{WW_v}) \Big|_{F_{ev}, 0} \\ + \frac{1}{2} (U_{P_v} - U_{S_v}) \Big|_{F_{n_v}, 0} - \frac{1}{2} (U_{N_v} - U_{NN_v}) \Big|_{-F_{n_v}, 0} + \frac{1}{2} (U_{P_v} - U_{N_v}) \Big|_{-F_{s_v}, 0} - \frac{1}{2} (U_{S_v} - U_{SS_v}) \Big|_{F_{sv}, 0}$$

#### III.4.1.4. Discrétisation de l'équation d'énergie cinétique turbulente $K^*$

Chaque terme de l'équation d'énergie cinétique turbulente  $k$  est intégré dans le volume de contrôle non décalé.

##### Discrétisation des termes convectifs :

Les termes convectifs sont discrétisés par le schéma upwind d'ordre 2

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial(U^C K)}{\partial\zeta} d\zeta d\eta = [K_P + \frac{1}{2}(K_P - K_W)] \Big|_{F_e, 0} - [K_E + \frac{1}{2}(K_E - K_{EE})] \Big|_{-F_e, 0} \\ + [K_P + \frac{1}{2}(K_P - K_E)] \Big|_{-F_w, 0} - [K_W + \frac{1}{2}(K_W - K_{WW})] \Big|_{F_w, 0}$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V^C K)}{\partial\eta} d\zeta d\eta = [K_P + \frac{1}{2}(K_P - K_S)] \Big|_{F_n, 0} - [K_N + \frac{1}{2}(K_N - K_{NN})] \Big|_{-F_n, 0} \\ + [K_P + \frac{1}{2}(K_P - K_N)] \Big|_{-F_s, 0} - [K_S + \frac{1}{2}(K_S - K_{SS})] \Big|_{F_s, 0}$$

**Discrétisation des termes diffusifs :**

Les termes diffusifs sont discrétisés par le schéma des différences centrés

$$\int_{w_s}^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right) d\zeta d\eta = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right)_w \right] \Delta \eta_P$$

$$= \left[ \left( \Gamma_e \frac{K_E - K_P}{d\zeta_e} \right) - \left( \Gamma_w \frac{K_P - K_W}{d\zeta_w} \right) \right] \Delta \eta_P$$

$$\int_{w_s}^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) d\zeta d\eta = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)_s \right] \Delta \zeta_P$$

$$= \Gamma_n \left( \frac{K_N - K_P}{d\eta_n} \right) - \Gamma_s \left( \frac{K_P - K_S}{d\eta_s} \right) \Delta \zeta_P$$

$$\Gamma_e = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_e = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \right)_P + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \right)_E}{2}$$

$$\Gamma_w = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_w = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \right)_P + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{11}}{J} \right)_W}{2}$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_n = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \right)_P + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \right)_N}{2}$$

$$\Gamma_s = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_s = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \right)_P + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \frac{q_{22}}{J} \right)_S}{2}$$

**L'intégration de terme de source**

Le terme de source dans l'équation d'énergie cinétique est:

$$S_K = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{v\sigma_k} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) \right] + P_K - \varepsilon$$

## Termes de production d'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n P_k d\zeta d\eta &= \int_w^e \int_s^n \left( \frac{f_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{f_{22}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + 2 \left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + \\ & 2 \left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 \Big) d\zeta d\eta \\ &= P_k \Big|_p \Delta\zeta_p \Delta\eta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$\left( \frac{f_{12}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_p = \frac{f_{12p}}{J_p} \frac{U_p - U_w}{\Delta\zeta_p}$$

$$\left( \frac{f_{22}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_p = \frac{f_{22p}}{J_p} \frac{U_N + U_{WN} - U_S - U_{WS}}{4\Delta\eta_p}$$

$$\left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_p = \frac{f_{11p}}{J_p} \frac{V_E + V_{ES} - V_W - V_{WS}}{4\Delta\zeta_p}$$

$$\left( \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_p = \frac{f_{21p}}{J_p} \frac{V_P - V_S}{\Delta\eta_p}$$

$$\left( \frac{f_{11}}{J} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_p = \frac{f_{11p}}{J_p} \frac{U_p - U_w}{\Delta\zeta_p}$$

$$\left( \frac{f_{21}}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_p = \frac{f_{21p}}{J_p} \frac{U_N + U_{WN} - U_S - U_{WS}}{4\Delta\eta_p}$$

$$\left( \frac{f_{12}}{J} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_p = \frac{f_{12p}}{J_p} \frac{V_E + V_{ES} - V_W - V_{WS}}{4\Delta\zeta_p}$$

$$\left( \frac{f_{22}}{J} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_p = \frac{f_{22p}}{J_p} \frac{V_P - V_S}{\Delta\eta_p}$$



**Termes de dissipation d'énergie cinétique turbulente**

$$\int_w^e \int_s^n \varepsilon \, d\zeta \, d\eta = \varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta\zeta_p$$

**Termes diffusifs**

$$S_d = \int_w^e \int_s^n \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right) \right) d\zeta d\eta = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)_w \right] \Delta\eta_p + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right)_s \right] \Delta\zeta_p$$

Avec

$$\Gamma_e = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \Big|_e = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \right)_p + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \right)_E}{2}$$

$$\Gamma_w = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \Big|_w = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \right)_p + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{12}}{J} \right)_W}{2}$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \Big|_n = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \right)_p + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \right)_N}{2}$$

$$\Gamma_s = \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \Big|_s = \frac{\left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \right)_p + \left( \frac{1}{R_e} \left( 1 + \frac{v_t}{\nu \sigma_k} \right) \frac{q_{21}}{J} \right)_S}{2}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme suivant:

$$A_p K_p = A_E K_E + K_W A_W + A_N K_N + A_S K_S + S_K$$

Avec:

$$A_E = D_e + \max(F_e, 0)$$

$$A_W = D_w + \max(F_w, 0)$$

$$A_N = D_n + \max(F_n, 0)$$

$$A_S = D_s + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$D_e = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_e \frac{\Delta\eta_P}{d\zeta_e}$$

$$D_w = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_w \frac{\Delta\eta_P}{d\zeta_w}$$

$$D_n = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_n \frac{\Delta\zeta_P}{d\eta_n}$$

$$D_s = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_s \frac{\Delta\zeta_P}{d\eta_s}$$

$$S = S_d + S_c + P_k \Big|_P \Delta\zeta_P \Delta\eta_P$$

$$\begin{aligned} S_c = & -\frac{1}{2}(K_P - K_W) \|F_e, 0\| + \frac{1}{2}(K_E - K_{EE}) \|F_e, 0\| - \frac{1}{2}(K_P - K_E) \|F_w, 0\| \\ & + \frac{1}{2}(K_W - K_{WW}) \|F_w, 0\| - \frac{1}{2}(K_P - K_S) \|F_n, 0\| + \frac{1}{2}(K_N - K_{NN}) \|F_n, 0\| \\ & - \frac{1}{2}(K_P - K_N) \|F_s, 0\| + \frac{1}{2}(K_S - K_{SS}) \|F_s, 0\| \end{aligned}$$

### III.4.1.5 Discrétisation de l'équation de dissipation d'énergie cinétique turbulente $\varepsilon^*$

La Discrétisation de l'équation de dissipation d'énergie cinétique turbulente est la même que celle d'énergie cinétique turbulente ; la différence c'est bien dans le terme de source.

$$S = \frac{1}{R_e} \frac{v_t}{v} C_1 \frac{\varepsilon P_k}{K} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K^2} \varepsilon + \frac{1}{R_e J} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{q_{11}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} + \Gamma_\varepsilon \frac{q_{12}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\varepsilon \frac{q_{21}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + \Gamma_\varepsilon \frac{q_{22}}{J} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right]$$

$$\int_w^n \int_s \left( \frac{1}{R_e} \frac{v_t}{v} C_1 \frac{\varepsilon P_k}{K} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K^2} \varepsilon \right) \partial \zeta \partial \eta = \left( \frac{1}{R_e} C_1 \frac{v_{tP}}{v} \frac{\varepsilon P}{K_P} P_{kP} - C_2 \frac{\varepsilon P^2}{K_P^2} \varepsilon P \right) \Delta \zeta \Delta \eta$$

Donc, l'équation discrétisée est :

$$A_P \varepsilon_P = A_E \varepsilon_E + A_W \varepsilon_W + A_N \varepsilon_N + A_S \varepsilon_S + S_\varepsilon$$

Avec:

$$A_E = D_e + \max(F_e, 0)$$

$$A_W = D_w + \max(F_w, 0)$$

$$A_N = D_n + \max(F_n, 0)$$

$$A_S = D_s + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$D_e = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_e \frac{\Delta\eta_P}{d\zeta_e}$$

$$D_w = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{11}}{J} \Big|_w \frac{\Delta\eta_P}{d\zeta_w}$$

$$D_n = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_n \frac{\Delta\zeta_P}{d\eta_n}$$

$$D_s = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{v_t}{v\sigma_k}\right) \frac{q_{22}}{J} \Big|_s \frac{\Delta\zeta_P}{d\eta_s}$$

$$S = \left( \frac{1}{R_e} C_1 \frac{v_{tp}}{v} \frac{\varepsilon_P}{K_P} P_{k_P} - C_2 \frac{\varepsilon_P^2}{K_P^2} \varepsilon_P \right) \Delta\zeta \Delta\eta + S_d + S_c$$

$$S_c = -\frac{1}{2}(\varepsilon_P - \varepsilon_W) \|F_e, 0\| + \frac{1}{2}(\varepsilon_E - \varepsilon_{EE}) \|F_e, 0\| - \frac{1}{2}(\varepsilon_P - \varepsilon_E) \|F_w, 0\| + \frac{1}{2}(\varepsilon_W - \varepsilon_{WW}) \|F_w, 0\| \\ - \frac{1}{2}(\varepsilon_P - \varepsilon_S) \|F_n, 0\| + \frac{1}{2}(\varepsilon_N - \varepsilon_{NN}) \|F_n, 0\| - \frac{1}{2}(\varepsilon_P - \varepsilon_N) \|F_s, 0\| + \frac{1}{2}(\varepsilon_S - \varepsilon_{SS}) \|F_s, 0\|$$

#### III.4.1.6 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites sous la forme générale de l'équation de discrétisation.

## 1. sur paroi solide

- pour les composantes de vitesses U et V

$$A_P = 1$$

$$S = 0$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

- pour l'énergie cinétique turbulente K

$$A_P = 1$$

$$S = 0$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

- pour la dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$

$$A_P = 1$$

$$S = 0$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

## 2.A l'entrée

- pour la composante de vitesse U

$$A_P = 1$$

$$S = 1$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

- pour la composante de vitesse V

$$A_P = 1$$

$$S = 0$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = S = 0$$

- pour l'énergie cinétique turbulente K

$$A_P = 1$$

$$S = \frac{3}{2} I^2$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

- pour la dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$

$$A_P = 1$$

$$S = C_\mu \frac{k_{\text{entrée}}^2}{\nu_t}$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

## 2.A la sortie

- pour les composantes de vitesses U et V

$$A_P = 1$$

$$A_E = A_W = 1$$

$$A_S = A_N = S = 0$$

- pour l'énergie cinétique turbulente K et son tau de dissipation  $\varepsilon$

$$A_P = 1$$

$$A_E = A_W = 1$$

$$A_S = A_N = S = 0$$

## III-5. Traitement de la pression (algorithme de SIMPLER)

Les équations de Navier-Stokes se composent de l'équation de conservation de la masse et des équations de conservation de la quantité de mouvement. Leur résolution nécessite l'obtention, à chaque instant, d'un champ de pression et d'un champ de vitesse cohérents. Sous la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement, l'équation de continuité se réduit à l'obtention d'un champ de vitesse à divergence nulle. Le couplage vitesse-pression est délicat à traiter pour les écoulements incompressibles car la pression n'apparaît pas explicitement dans l'équation de conservation de la masse. Plusieurs voies sont utilisées pour aborder ce problème et correspondent à des classes de méthodes différentes.

**III-5.1.L’algorithme de SIMPLER**

La solution séquentielle des systèmes d’équations de discrétisation sont résolus suivant l’algorithme SIMPLER [32] qui est décrit par les étapes suivantes :

- 1- on estime un champ de vitesse U etV
- 2-on calcule les coefficients des équations de discrétisation des équations des quantités de mouvement et on détermine les pseudo-vitesses .ces dernières sont obtenues par la solution des équations de discrétisation des quantités de mouvement sans les termes de pression.
- 3-on utilise les pseudo-vitesses dans la source de l’équation de discrétisation de la pression. la solution de cette équation donne une estimation de la pression P\* .
- 4- la pression p\* est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvements qui sont ensuite résolus pour obtenir une estimation du champs de vitesse U\* , V\* .
- 5-ce champ de vitesse est utilisé dans la source de l’équation de discrétisation de la pression. La solution de cette équation donne une correction de P’.
- 6-le champ de vitesse est corrigé par la correction de pression.
- 7- le champ de vitesse corrigé est utilisé dans les équations de discrétisation de K et qui sont ensuite résolus pour obtenir les champs de ces variables.
- 8-on détermine la viscosité cinématique de turbulence en fonction de K et ε
- 9-s’il n’y pas de convergence retourner à l’étape.

**III-6.Technique numérique de résolution**

**III-6.1.Technique de balayage**

La résolution directe du système d’équation algébrique est compliquée, pour y remédier, une méthode de résolution semi-iterative a été suggérée, elle consiste à faire un balayage ligne par ligne c’est à dire déterminer les valeurs des paramètres Φ sur chaque ligne du maillage indépendamment des autres lignes, va ramener le système précédent à un système matrice

tridiagonale , pour une présentation convenable de l’algorithme, il est nécessaire d’utiliser une écriture indicielle aux termes de l’équation générale :

$$A_P(i,j) \Phi_{i,j} = A_E (i,j) \Phi_{i+1,j} + A_W (i,j) \Phi_{i-1,j} + A_N (i,j) \Phi_{i,j+1} + A_S (i,j) \Phi_{i,j-1} + S\Phi(i,j) \tag{III-9}$$

Les coefficients A sont des matrices pentagonales. Ce système est transformé en un système à matrices tri-diagonale dans chaque direction.

**Suivant  $\zeta$  :**

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S^* \quad (\text{III-10})$$

Avec:

$$S^* = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S \quad (\text{III-11})$$

Ce système d'équation peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée  $\Phi^*$ .

**Suivant  $\eta$**

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + S^{**} \quad (\text{III-12})$$

Avec:

$$S^{**} = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S \quad (\text{III-13})$$

Ce système d'équation peut être résolu par l'algorithme de Thomas. La solution obtenue est notée  $\Phi^{**}$ .

### **III-6.2. Résolution des équations par la méthode de TDMA**

Cette méthode consiste à réduire la matrice tri diagonal en une matrice bi diagonale, elle se base sur la procédure de substitution en arrière, avant de commencer ce processus on cherche la relation de récurrence de la forme :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i \Phi_{i-1} + d_i \quad (\text{III-14})$$

$a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont des coefficient,  $d_i$  comprend les termes de source. On suppose que la relation entre  $\Phi_i$  et  $\Phi_{i+1}$  (relation de récurrence) est :

$$\Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{III-15})$$

Donc :

$$\Phi_{i-1} = P_{i-1} \Phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{III-16})$$

La substituant de (III-16) dans l'équation (III-14) donne :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i (P_{i-1} \Phi_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (\text{III-17})$$

Donc, les relations de récurrence sont :

$$P_i = \frac{b_i}{(a_i - c_i P_{i-1})} \quad (\text{III-18})$$

$$Q_i = \frac{(d_i + c_i Q_{i-1})}{(a_i - c_i P_{i-1})} \quad (\text{III-19})$$

On a :

$$c_i = b_{i1} = 0$$

On doit avoir :

$$P_{i1} = 0 \quad (\text{III-20})$$

Avec :

$$P_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad (\text{III-21})$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III-22})$$

D'après (III-15) et (III-20) , on trouve :

$$Q_{i1} = \Phi_{i1} \quad (\text{III-23})$$

Les étapes de l'algorithme de Thomas sont :

- 1] calculer  $P_1$  et  $Q_1$ .
- 2] calculer  $P_i$  et  $Q_i$
- 3] utiliser les équations de récurrences pour calculer tous  $P_i$  et  $Q_i$  .

### III.6.3.La Méthode de Sous-Relaxation:

Le procédé de résolution itérative consiste à modifier successivement les valeurs de  $\Phi_i$  de manière à approcher la solution correcte; le changement trop rapide des valeurs de  $\Phi$  d'un tour à l'autre risque de provoquer des instabilités numériques. Par conséquent, pour minimiser les risques de divergences, il est toujours souhaitable d'amortir l'amplitude de ces changements en utilisant la technique de sous relaxation reflété dans la formule suivante:

$$\Phi_p = \Phi_p^0 + \alpha_\Phi (\Phi_p^1 - \Phi_p^0) \quad (\text{III-24})$$



Où:

$\Phi_p^0$  : Est la valeur obtenue de l'itération précédente

$\Phi_p^1$  : Est la valeur obtenue de la résolution en cours.

$\alpha_\phi$  : Est le facteur de sous relaxation dont la valeur varie entre (0 et 1).

### III.7. Structure du Code de Calcul:

Le code de calcul est constitué d'un programme principal et sous programmes. La fonction de chaque subroutine est:

- **Mesh**: calcul les différents paramètres géométriques du maillage.
- **Init**: initialise le champ de vitesse.
- **Zerout** : mettre à zéro les coefficients de l'équation de discrétisation avant leur évaluation pour éviter l'interférence entre les différentes équations de discrétisation.
- **Mass**: Calcul la viscosité et la conductivité en fonction de la température.
- **Xmom**: calcule des coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de la conservation de quantité de mouvement suivant la direction  $\zeta$ .
- **Ymom**: calcule des coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de la conservation de quantité de mouvement suivant la direction  $\eta$ .
- **Coefk** : calcule des coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de k.
- **Coefpsi** : calcule des coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de  $\varepsilon$ .
- **Xsweep** : établit le balayage suivant la direction  $\varepsilon$ .
- **Ysweep** : établit le balayage suivant la direction  $\eta$ .
- **Ulimit** : calcule les conditions aux limites de la vitesse suivant  $\zeta$ .
- **Vlimit** : calcule les conditions aux limites de la vitesse suivant  $\eta$ .
- **Klimit** : calcule les conditions aux limites de k.
- **Psilimit** : calcule les conditions aux limites de  $\varepsilon$ .
- **Tdma** : résolution par l'algorithme de Thomas.

### III.8. Présentation des logiciels de calcul

Gambit et Fluent sont des logiciels, sous licence commerciale, permettant de réaliser des simulations 2D ou 3D en mécanique des fluides allant de la construction du maillage avec Gambit à la résolution des équations de Navier Stokes et au post-traitement avec Fluent. Largement répandus dans l'industrie (automobile, aéronautique, espace, etc...) en raison de leur interface graphique puissante et de l'abondance de leurs options, ils permettent de réaliser des simulations sur tous types de géométries complexes (fixes ou mobiles) associées à des maillages fixes ou adaptatifs et avec des modèles physiques variés (diphasique, turbulent, etc...) [33].

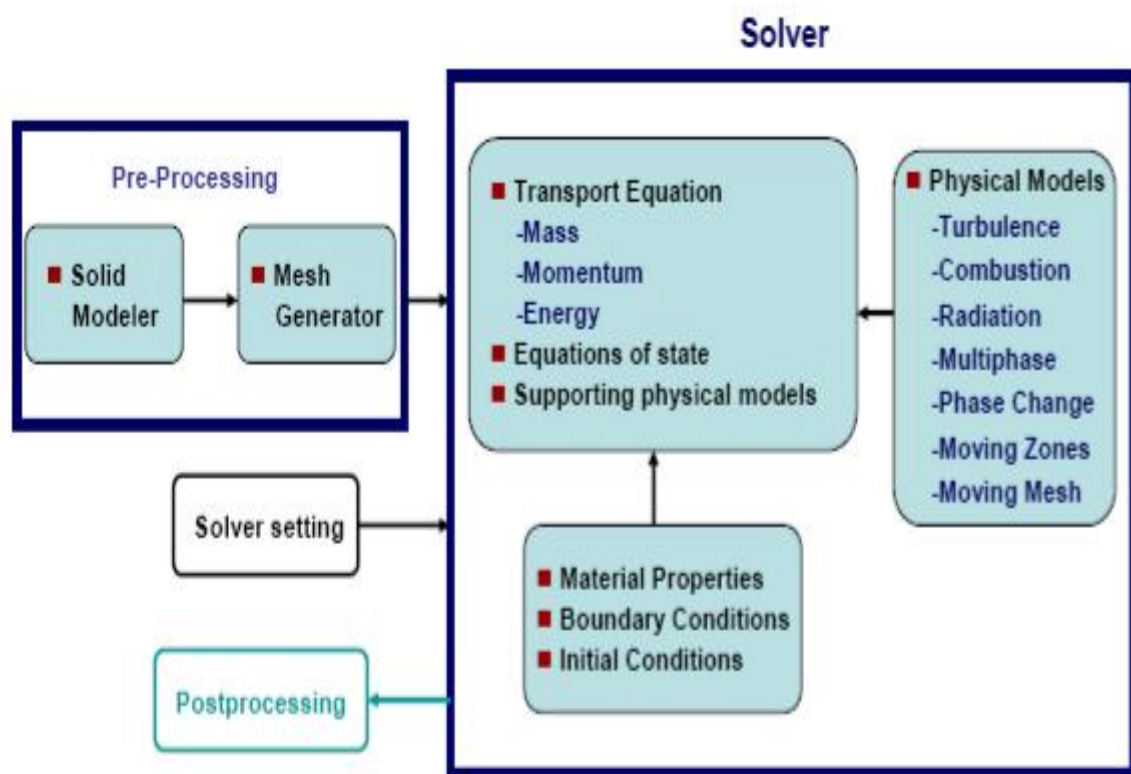


Figure (III.5) : Processus de simulation

#### III.8.1- Le pré-processeur Gambit

C'est un pré processeur intégré pour l'analyse en CFD , il est utilisé pour construire une géométrie et générer son maillage (structuré ou non structuré, en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou axisymétriques), il peut réaliser des maillages complexe en deux ou trois dimensions avec des maillages rectangle ou triangle.

Les options de génération de maillage de Gambit proposent une flexibilité de choix. On peut décomposer la géométrie en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon Gambit génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite.

Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites [34].

### **Construction du maillage sous GAMBIT**

La première étape dans le processus de génération du maillage consiste à tracer le profil dont on souhaite évaluer les performances. On définira ensuite l'espace qui entoure le profil avant de mailler les différentes faces ainsi créées. Ces différents étapes sont décrit dans ce qui suit.

#### ➤ **Importer la géométrie :**

On importe les points définissant le profil. Ces points sont les valeurs de coordonnées données par une série de points calculée avec Matlab d'après la formule du NACA 0012 . Cela donne la répartition des points sur la profil comme suit :



**Figure (III- 6) : répartition des points sur le profil**

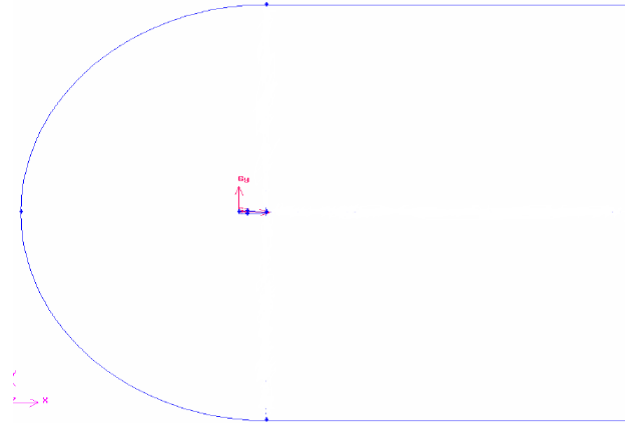
Connectez tous ces points en créant une courbe représentant le profil souhaité .



**Figure (III-7) : géométrie de profil**

➤ **Définir un domaine de calcul :**

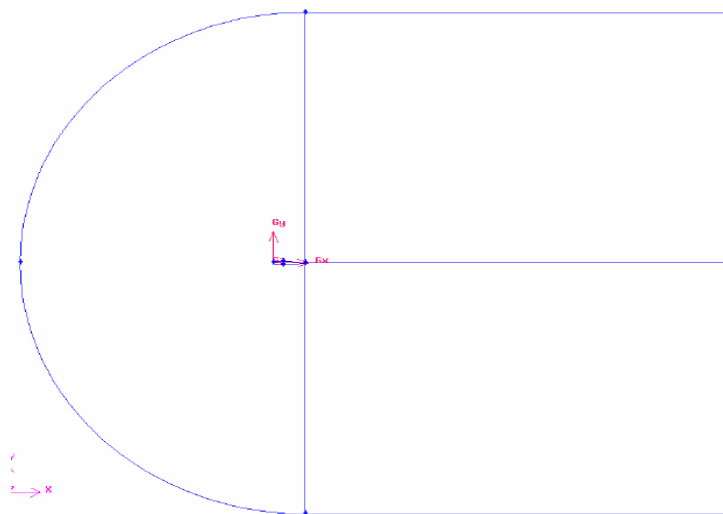
Pour un problème de ce type, nous optons pour le maillage en C. On définit tout d'abord l'enveloppe extérieure du C. Cela fait par construire tous les points et segments de droite et des arcs nécessaires à la construction d'un tel maillage, figure (III-23).



**Figure (III- 8) : frontières de domaine de calcul**

➤ **Créer un blocking :**

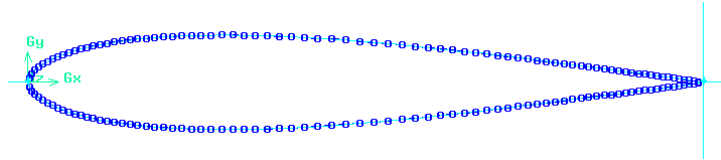
Dans cette étape nous devons créer des blocs ou bien des faces qui entourent le profil. Chaque face est créée en assemblant tous les segments qui la composent.



**Figure (III-9) : faces entourant le profil**

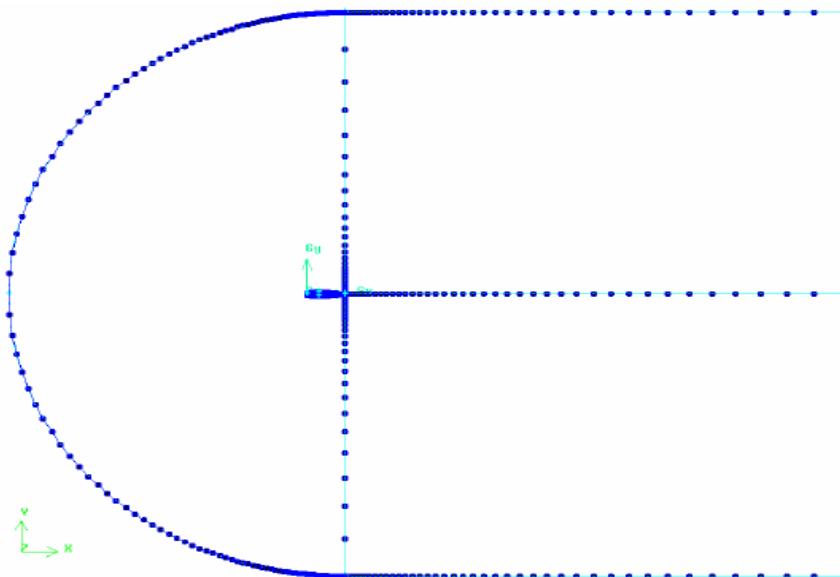
➤ Générer le maillage

Commençons par mailler les segments qui définissent le profil avec même nombre des points sur l'extrados et l'intrados.



Figure(III- 10) : Mailler les segments du profil

Il ne reste plus qu'à mailler le reste du domaine de calcul. On utilise ici des maillages structurés quadrangulaires (« *quad – map* » pour Gambit). Ceci est possible car on dispose de 4 faces composées de 4 segments. On commence par mailler les segments en veillant à imposer le même nombre de points de discrétisation sur les segments se faisant face. Il faut également doser l'espacement des points sur les différents segments de manière à obtenir un maillage régulier avec des mailles peu déformées.

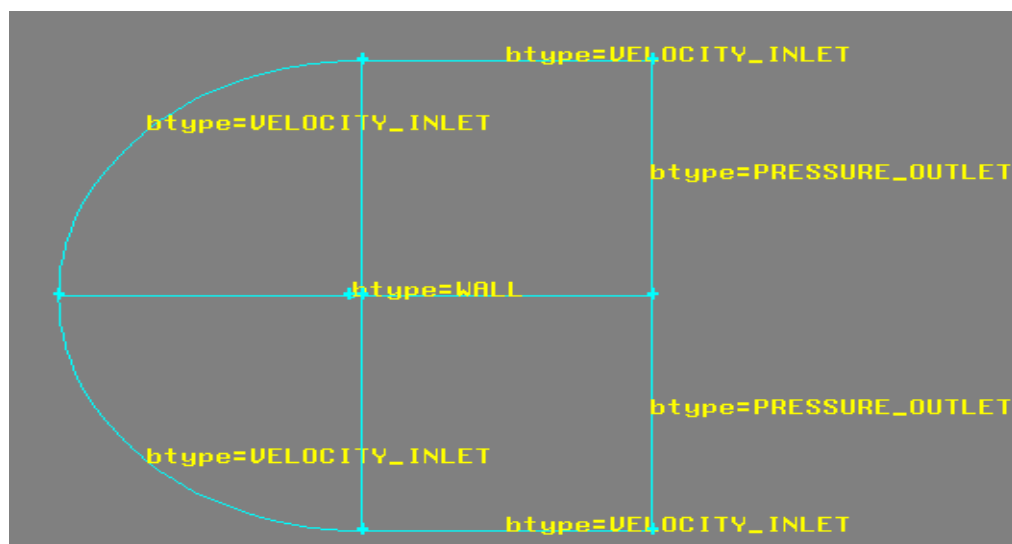


Figure(III- 11) : Mailler les segments des faces

➤ **Proposer les conditions aux limites**

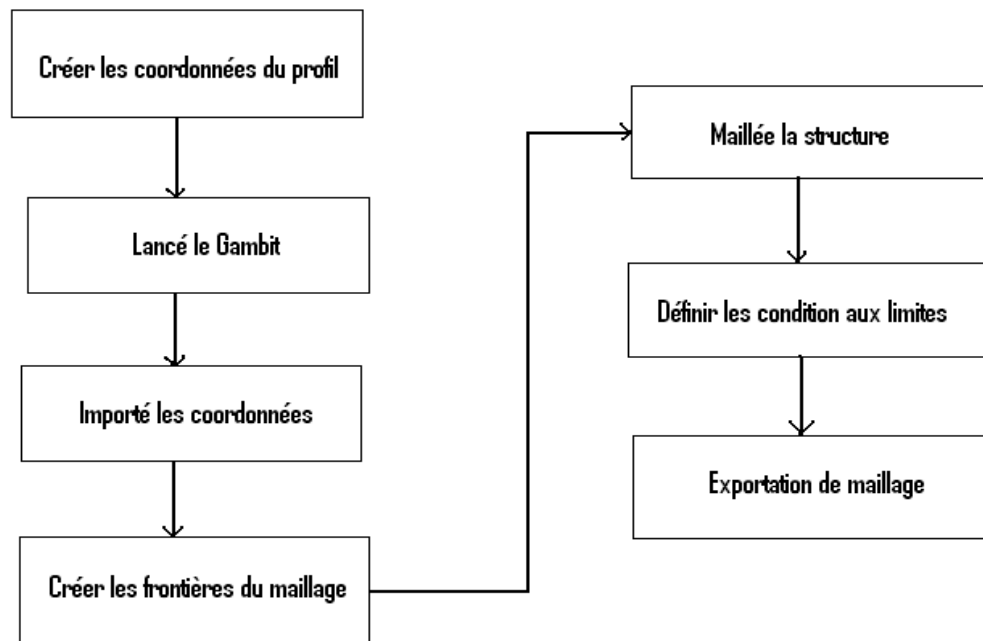
Il faut définir le type de conditions aux limites que l'on souhaite imposer sur les différentes limites du domaine de calcul. On commence par choisir le solveur qui sera utilisé par la suite : *Solver/Fluent5/6*.

Sur le profil, on imposera des conditions d'adhérence (« Wall »). En amont du profil, on supposera connue la vitesse de l'écoulement et on imposera des conditions aux limites de type vitesse imposée (« Velocity inlet »). A la sortie du domaine de calcul, on imposera la valeur de la pression, la pression atmosphérique par exemple et on optera pour des conditions de type sortie à pression imposée (« pressure outlet »). Ces différents choix sont récapitulés ci-dessous :



**Figure(III- 12) : Les conditions aux limites**

Lorsque le maillage est terminé et que les conditions aux limites sont correctement imposées, il ne reste qu'à exporter ce maillage dans un format lisible par le solveur, Fluent en l'occurrence. Ceci se fait par la commande *File/Export/Mesh* qui permet d'écrire un fichier de maillage avec l'extension *.msh*. Cochez l'option « Export 2-D mesh ».



**Figure (III.13) : Processus de génération d'un maillage dans le GAMBIT**

### III.8.2- Le solveur Fluent

Une fois que le maillage pour notre problème est terminé, il faut passer à la résolution des équations du problème. Ces équations sont résolues au moyen d'un programme qu'on nomme solveur. Le solveur que nous avons utilisé pour notre problème est FLUENT. Ce solveur utilise la méthode des volumes finis. Cette méthode est souvent utilisée pour la résolution de problèmes d'écoulements numériques.

L'interface de FLUENT est relativement simple dans sa prise en main. Il faut commencer par importer un maillage sur lequel travailler. Une fois le maillage en place, on définit les paramètres nécessaires pour le calcul. On choisit le modèle physique du problème. On donne les paramètres initiaux comme le nombre de Mach. On règle les conditions initiales et aux limites. Selon le modèle, il faut aussi paramétrer la turbulence. Puis on lance le calcul.

FLUENT contient également un outil de visualisation des résultats qui permet d'afficher les champs de pression, vitesse et autres autour de l'aile. Nous y décrivons les étapes que nous avons suivies pour lancer un calcul à partir du maillage pour le profil d'aile NACA décrit précédemment. Ces étapes constituent une marche à suivre générale pour les calculs d'écoulement autour d'un profil.

La génération du calcul dans «FLUENT» passe par les étapes suivantes :

2- Charger la géométrie par Fluent. **File** → **Read** → **Case**

3- Vérification du maillage. **Grid** → **Check**

4- Afficher le maillage. **Display** → **Grid**

5- Définir le Model de solution. **Define** → **Solver**

6- Définir le Model de Turbulence. **Define** → **Models** → **Viscous**

7- Définir la Matière. **Define** → **Materials**

8- Définir les conditions aux limites. **Define** → **Boundary** → **Conditions**

9- Choix du control de solution. **Solve** → **Controls** → **Solution**

10-Enregistrer les informations liées au problème. **File** → **write Case & dat**

Le fichier Case (regroupe toutes informations liées à la géométrie).

Le fichier dat (contient tous les paramètres et données des calculs).

11-Initialiser le calcul. **Solve** → **Initialize** → **Initialize**

12-Vérifier les résidus des calculs. **Solve** → **Monitors** → **Residual**

13-Choisir du nombre des itérations et lancer les calculs. **Solve** → **Iterate**

14-Post traitement des résultats. (**Display, Plot, Repport etc.**)



## **Chapitre IV**

### **Interprétation des résultats**

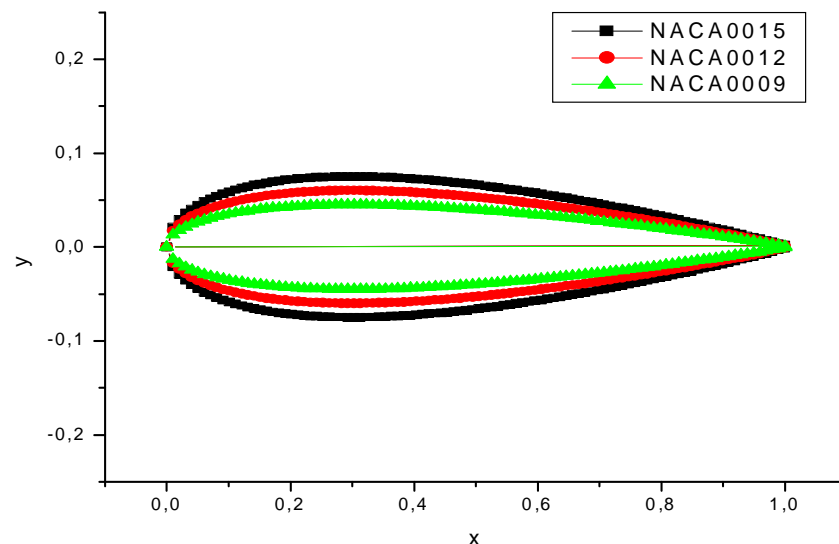
## IV. Interprétation des résultats

Dans ce chapitre on présente les résultats de notre étude concernant la couche limite turbulente développée sur un profil. La distribution de vitesse, de pression et l'évaluation de coefficient de frottement sur différents profils sont déterminées en recherchant l'influence de l'angle d'attaque et du nombre de Reynolds de l'écoulement sur ces derniers.

Malgré plusieurs essais avec différents maillages, toujours un problème au niveau de la convergence de code de calcul élaboré est rencontré. Cependant, on présente à part le maillage obtenu à partir de notre code de calcul, les résultats obtenues par Fluent.

Pour la représentation graphique de nos résultats, on a utilisé le logiciel de graphisme **ORIGIN** 6.0.

Les trois profils symétriques utilisés sont NACA0009, NACA0012 et NACA0015 figure (1V-1). Sur ce type de profil le point d'épaisseur maximale se trouve à 30% de la corde à partir du bord d'attaque.



**Figure (1V-1) : Les profils NACA0009, NACA0012 et NACA0015**

### 1V-1-Génération de maillage

Le maillage généré, à partir de notre code de calcul, autour du profil NACA0012 est de  $(281 \times 91)$  nœuds. Le type de ce maillage est le maillage "C" adapté au type de 'écoulement étudié. Horizontalement, l'infinie est considéré à 5 fois la corde en amont du bord d'attaque du profil et 5 fois la corde en aval du bord de fuite. Verticalement, l'infini est situé à une distance 6 fois la corde.

Un maillage complète autour d'un profil NACA0012 et plus raffiné à proximité de la surface du profil pour détecter les détails de la couche limite, sont représentés dans les figures (IV-2), et (IV-3) respectivement.

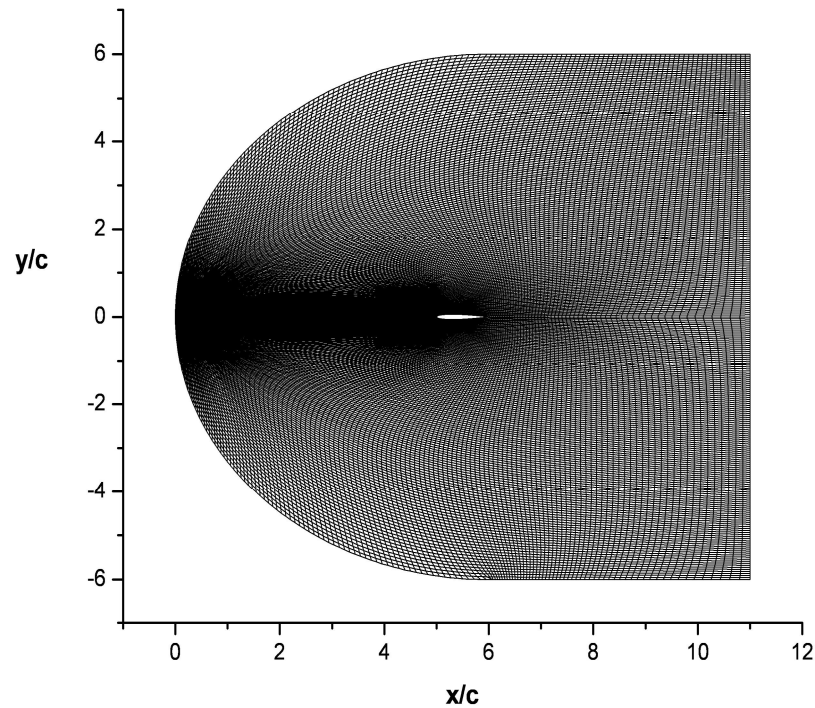
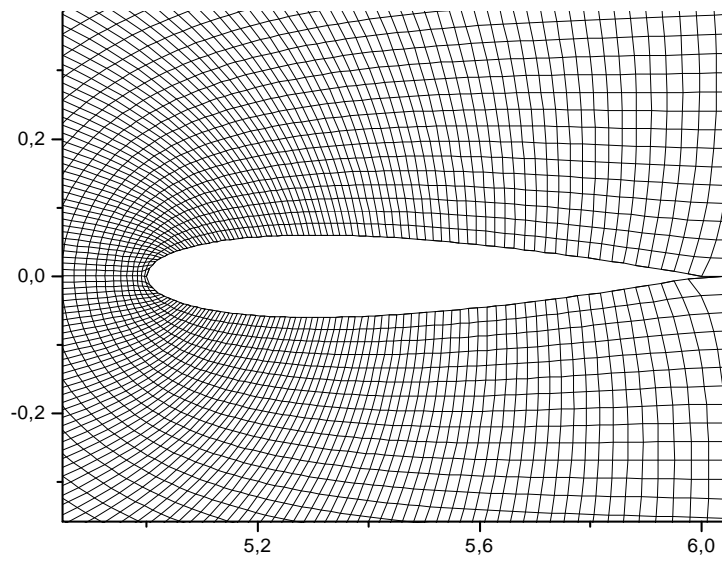
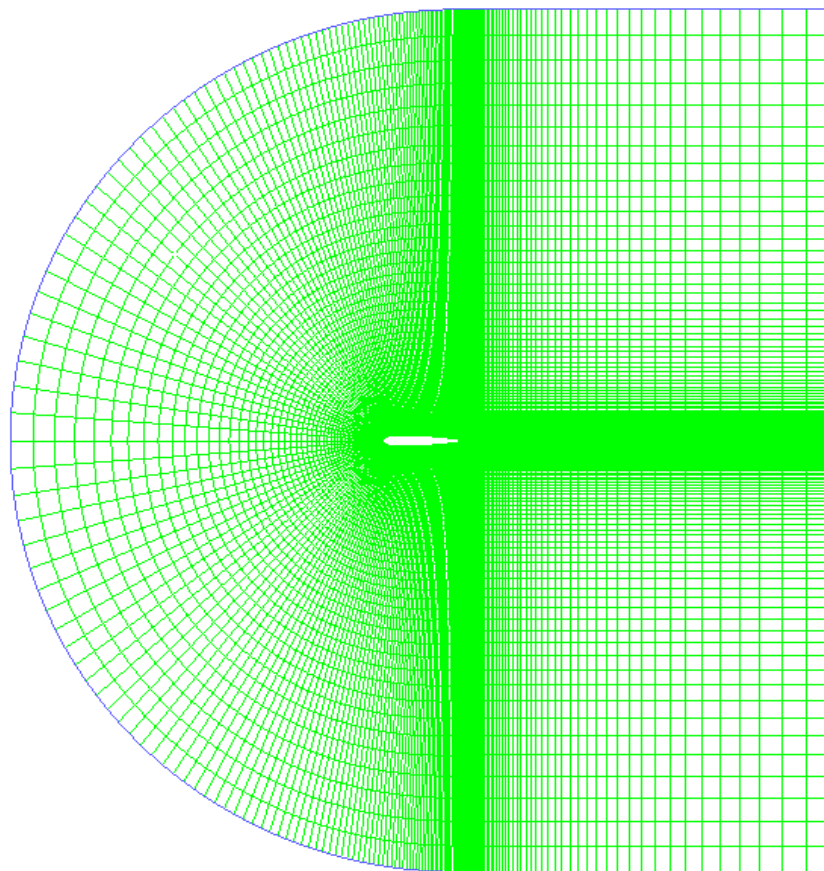


Figure (1V-2) : Maillage "C" généré autour de profil NACA0012



**Figure (IV-3) : Maillage agrandie à proximité de la surface du profil NACA0012**

Le maillage généré par le mailleur Gambit est représenté dans la figure suivante.

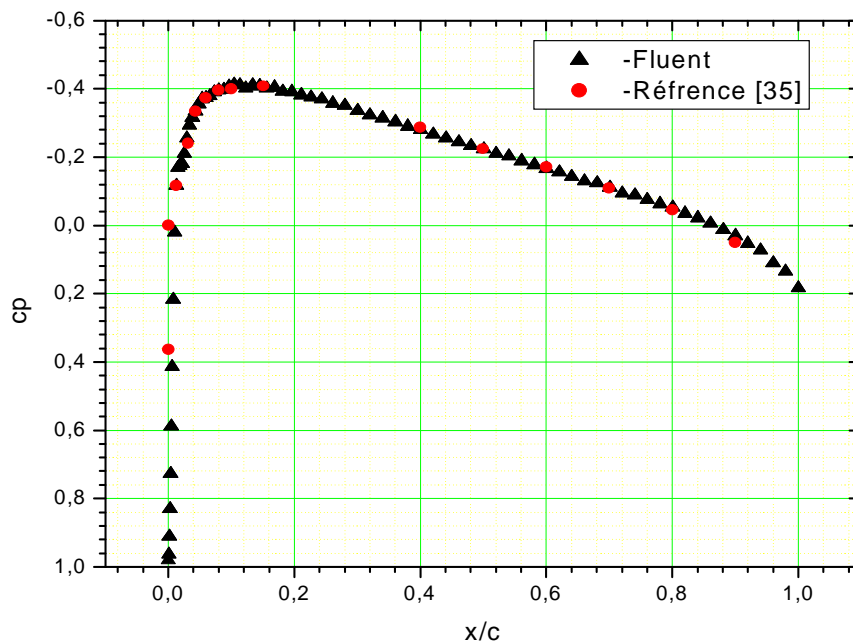


**Figure (IV-4) : Maillage "C" généré autour de profil NACA0012 par Gambit**

### 1V-2-Validation du code de calcul

Pour valider notre code de calcul, la distribution du coefficient de pression  $C_p$  autour du profil NACA0012 comparée aux résultats calculés [35] présent dans la figure (IV-5).

La figure (IV-5) démontre une bonne concordance entre les deux résultats.



**Figure (IV-5) : Distribution de pression autour d'un profil NACA 0012,  $\alpha = 0^\circ$   
 $Re = 2.8 \cdot 10^6$**

### IV-3-Champ de pression

La figure (IV-6-a) représente la distribution spatiale de pression statique sur le profil NACA0012. La pression qui s'exerce sur l'extrados et l'intrados sont identiques, vu que le profil est symétrique et que l'écoulement se fait à l'incidence nulle. La pression maximale est au voisinage du bord d'attaque. Du bord d'attaque, elle diminue jusqu'à une valeur minimale, puis elle commence à augmenter sur le deuxième tronçon du profil. Comme la vitesse et la pression

sont liées par l'équation de Bernoulli, on voit que la vitesse augmente aux endroits à faible pression et diminue dans les zones à haute pression figure (IV-6-b).

La variation de coefficient de pression  $C_p$ , en fonction de la position  $x/c$  sur la surface, (figure IV-7)) montre que la valeur maximale  $C_p=0,99274 \sim 1$  est au bord d'attaque (point de stagnation), ensuite il chute jusqu'à une valeur minimale  $C_p= -0.40796$ , puis il commence à augmenter jusqu'à atteindre la valeur 0,145 au bord de fuite.

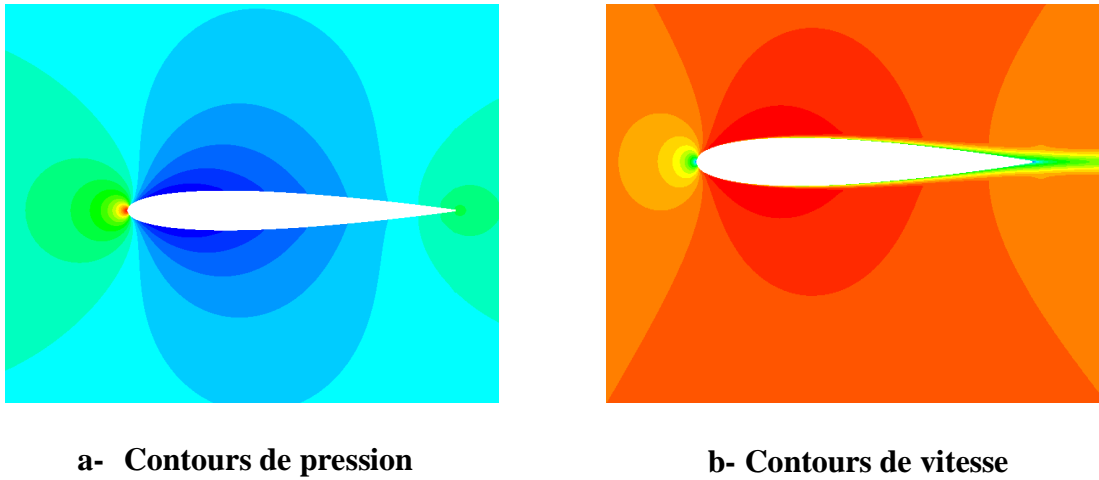


Figure (IV-6) : Contours de pression et de vitesse sur le profil NACA0012,  $\alpha = 0^0$ ,  $Re=10^6$

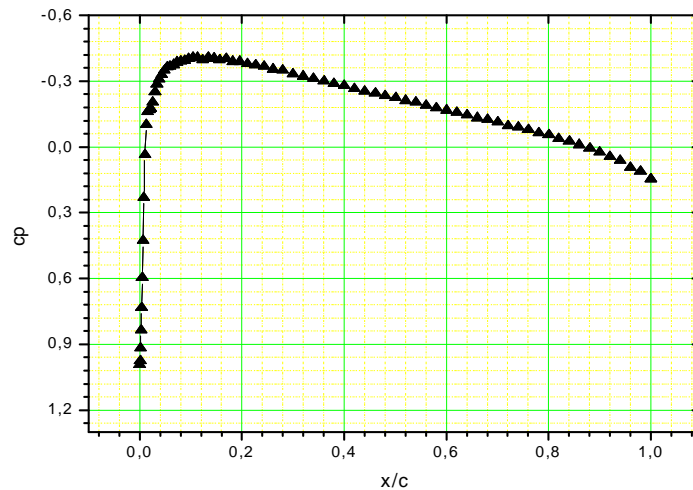


Figure (IV-7) : Distribution de pression autour d'un profil NACA 0012, à  $\alpha = 0^0$ ,  $Re=10^6$

### IV-3.1-L'effet de l'angle d'attaque sur le coefficient de pression

Sur la figure (IV-8), on représente l'évolution du coefficient de pression  $C_p$  sur le profil NACA0012 pour différentes valeurs de l'angle d'attaque  $\alpha=0^\circ, 3^\circ, 6^\circ$  et  $9^\circ$ . Le coefficient de

pression  $C_p$  est donné par : 
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$$
. Dans un premier temps, on constate qu'une

augmentation de l'angle d'attaque entraîne un accroissement en surface de la courbe représentant le coefficient de portance. La portance est résultat de la distribution de la pression sur l'extrados et l'intrados du profil. Elle est représentée par la distribution du coefficient de pression  $C_p$  de part et d'autre du profil. Donc, la portance par unité de surface est l'intégration de la distribution de la pression  $C_p$  le long du profil et par conséquent elle est représentée par la surface comprise entre les deux courbes de  $C_p$  sur l'extrados et l'intrados. D'où on peut lire sur la figure (IV-8) que lorsque l'angle d'attaque augmente, la portance augmente.

La Figure (IV-9) représente les contours de pression statique pour différents angles d'attaque. On constate que plus on augmente l'angle d'attaque plus la zone maximale augmente et se déplace vers l'avant.

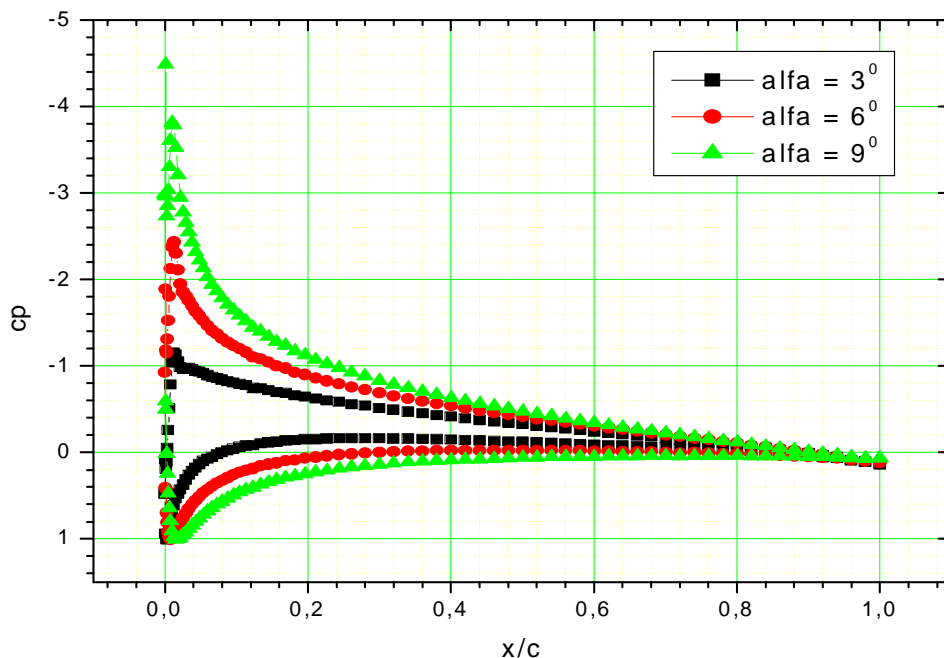
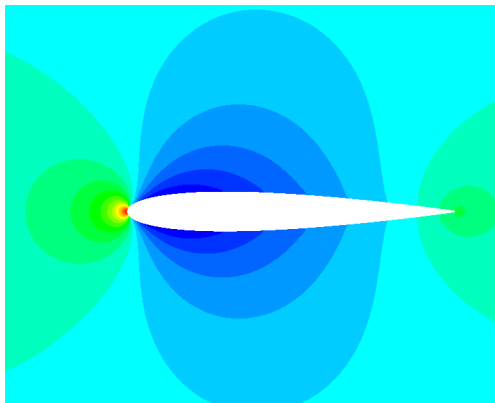
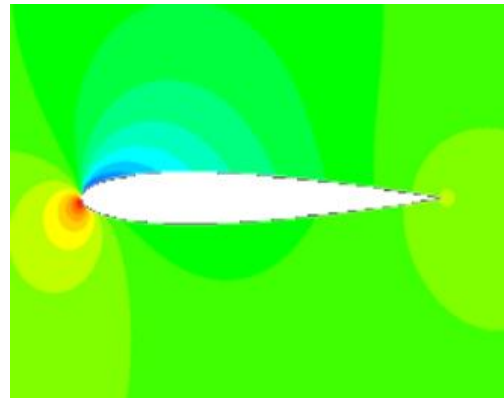


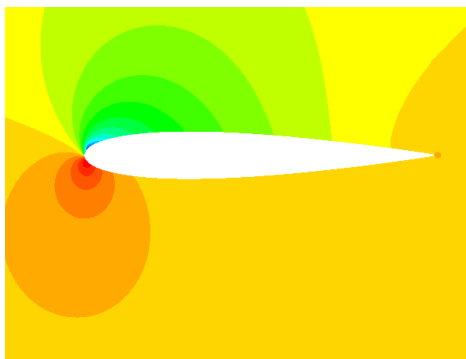
Figure (IV-8) : Distribution de coefficient de pression sur le profil NACA 0012 à  $Re=10^6$  pour différentes valeur de l'angle d'attaque  $\alpha$



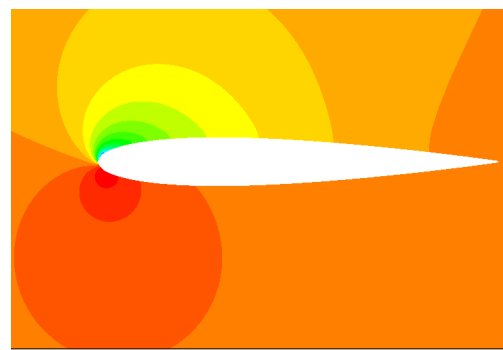
a-  $\alpha = 0^\circ$



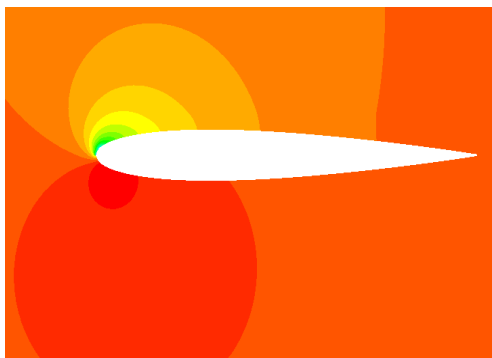
b-  $\alpha = 3^\circ$



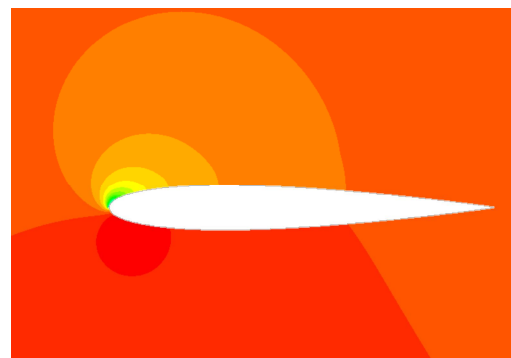
c-  $\alpha = 6^\circ$



d-  $\alpha = 9^\circ$



e-  $\alpha = 12^\circ$



f-  $\alpha = 15^\circ$

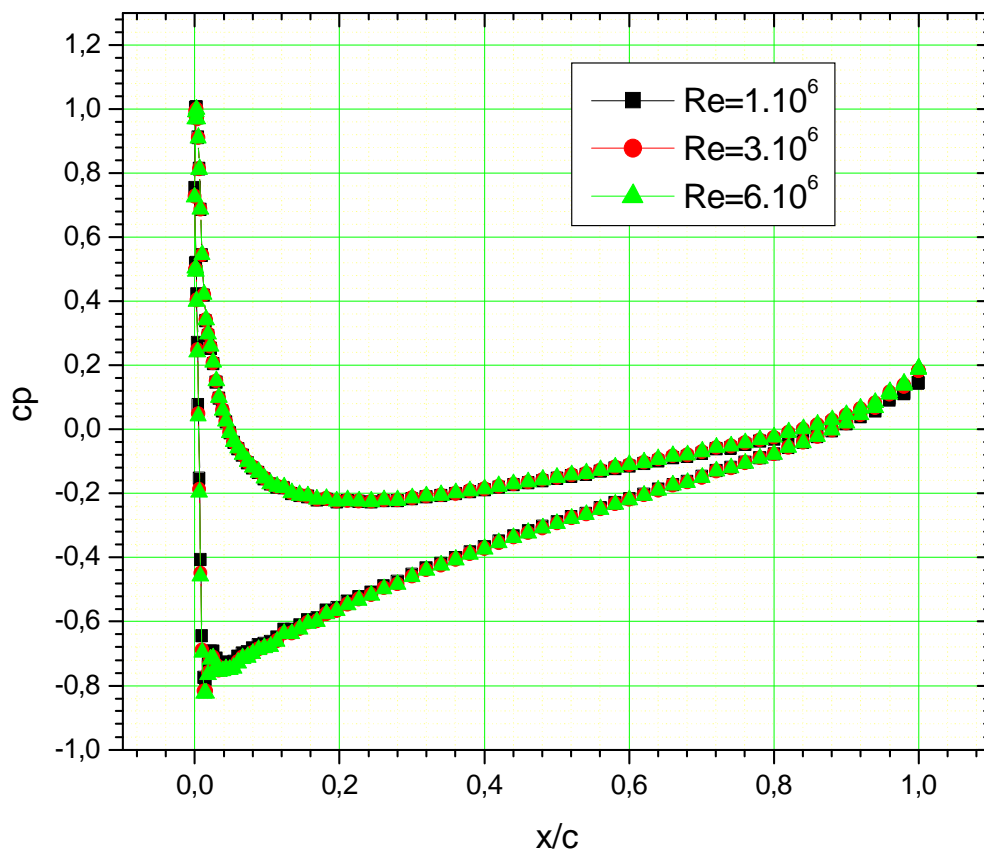
Figure (IV-9) : Contours de pression sur le profil NACA0012 à  $Re=10^6$  pour différentes valeur d'angle d'attaque  $\alpha$



**IV-3-2-L'effet de nombre de Reynolds sur le coefficient de pression**

La figure ci-dessous montre la distribution de coefficient de pression à des nombres de Reynolds différents.

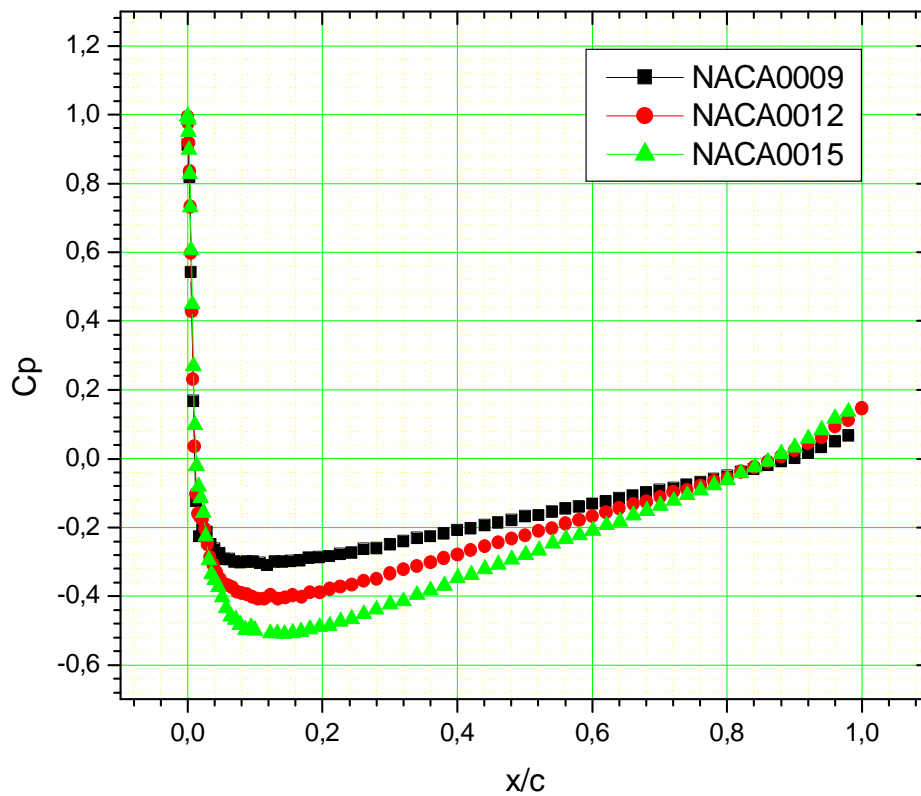
Nous pouvons remarquer que le nombre de Reynolds n'a aucun effet sur la distribution de la pression statique, figure (IV-10). Cette remarque a été faite par Giel et al, (1999) [36].



**Figure (IV-10): Distribution du coefficient de pression sur le profil NACA 0012 pour différentes valeurs du nombre de Re à  $\alpha=0^\circ$**

### IV-3-3-L'effet de l'épaisseur de profil sur le coefficient de pression

Sur la figure (IV-11), on présente le coefficient de pression pour les profils NACA0009, 0012 et NACA0015. On remarque que le coefficient de pression ne change pas d'allure, mais change de valeurs suite au changement de l'épaisseur relative de chaque profil. Augmenter l'épaisseur relative, c'est augmenter la courbure du profil, ce qui augmente par conséquent la vitesse externe et diminue le coefficient de pression. L'épaisseur relative la plus élevée donne le coefficient de pression le plus bas.



**Figure (IV-11): Distribution du coefficient de pression sur les profils NACA 0009, NACA0012 et NACA0015.  $Re = 10^6$  et  $\alpha = 0^\circ$**

#### IV-4-Distribution de vitesse sur un profil

##### IV-4-1-Evolution du profil de vitesse sur le profil NACA 0012

.En premier lieu, la vitesse moyenne est nulle à la paroi à cause de la condition de non glissement. Ensuite la vitesse augmente au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la paroi du profil jusqu'à atteindre la couche externe. Ce gradient de vitesse détermine l'épaisseur de la couche limite.

Sur la figure suivante, sont représentés les profils de vitesse, pour plusieurs stations, obtenus pour un nombre de Reynolds =  $10^6$  et une incidence nulle. On remarque bien sur la figure (IV-12), que l'épaisseur de la couche limite augmente le long du profil c'est-à-dire que l'épaisseur augmente en allant vers le bord de fuite. . A une station  $x/c=0.3$ , elle est de  $y/c=0.012$ , à la station  $x/c=0.6$  elle est de  $y/c=0.021$  et à  $x/c=0.9$ ,  $y/c=0.03$ . Ce qui démontre que l'épaisseur de la couche limite est très faible comparé à la corde du profil, malgré ça, elle est le siège des phénomènes de frottement la cause principale de la consommation énergétique.

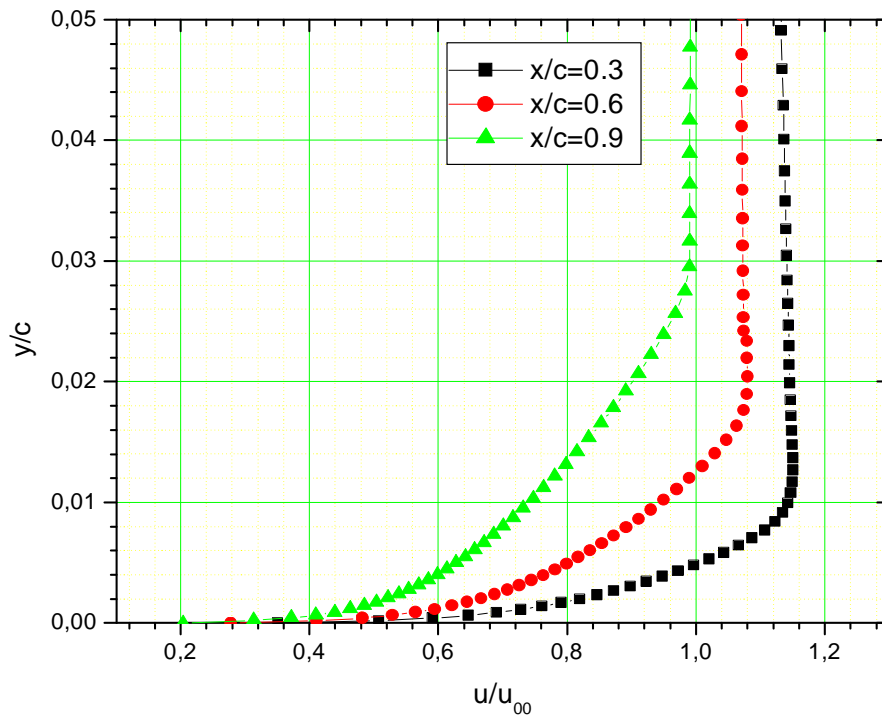


Figure (IV-12): Profils de la vitesse pour plusieurs stations de profil NACA 0012.

$$Re = 10^6 \text{ et } \alpha = 0^\circ$$

#### IV-4-2-L'effet de nombre de Reynolds

La figure (IV-13) représente les profils de la vitesse sur le profil NACA 0012 à la même station  $x/c=0.3$  pour différents nombres de Reynolds. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'épaisseur de la couche limite diminue ; augmenter  $Re$  revient à augmenter la vitesse c'est à dire accélérer les particules décélérées ce qui entraîne une diminution de la couche limite. Ceci confirme les résultats théorique de la couche limite turbulente où l'épaisseur est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds  $\delta = \frac{0.37x}{(Re)^{0.2}}$

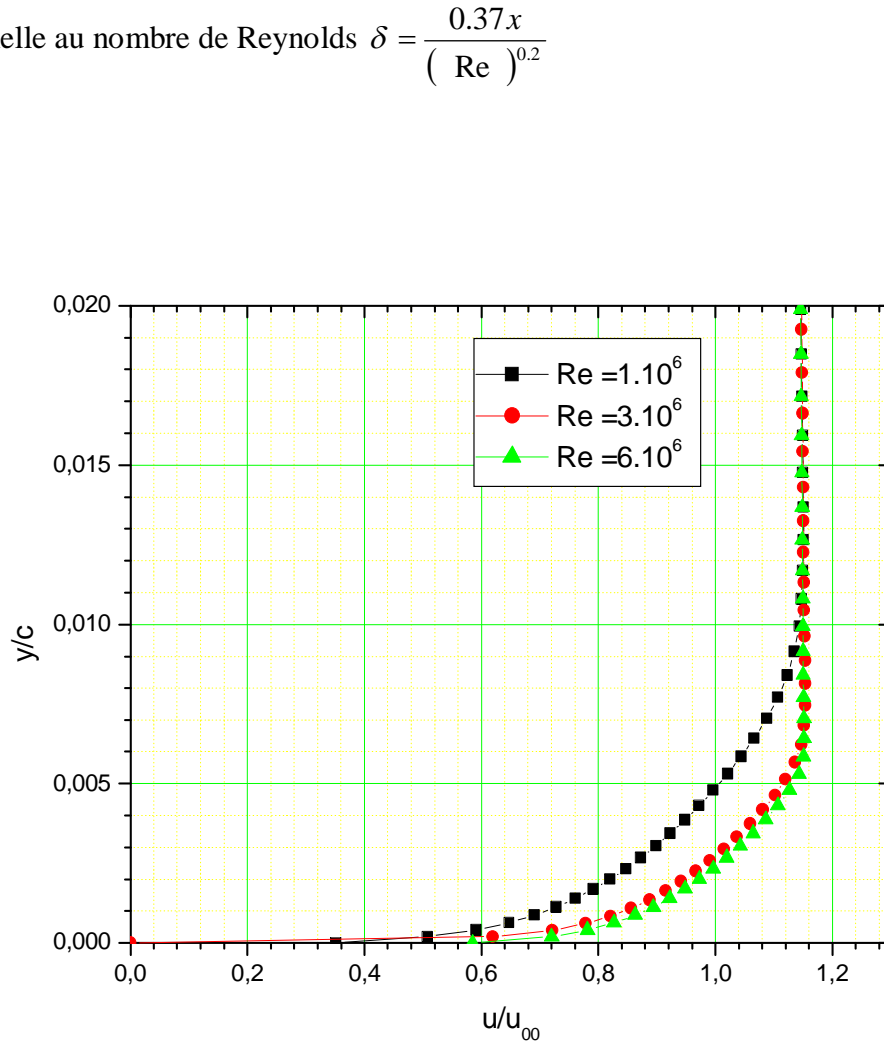


Figure (IV-13): Profils de la vitesse sur le profil NACA 0012 pour différents nombre de Reynolds.  $\alpha = 0^\circ$

## IV-4-3-L'effet de l'angle d'attaque

La figure (IV-14) représente les profils de la vitesse sur le profil NACA 0012 à la station  $x/c=0.5$  pour différents angles d'attaque. Lorsque l'angle d'attaque augmente, l'épaisseur de la couche limite augmente.

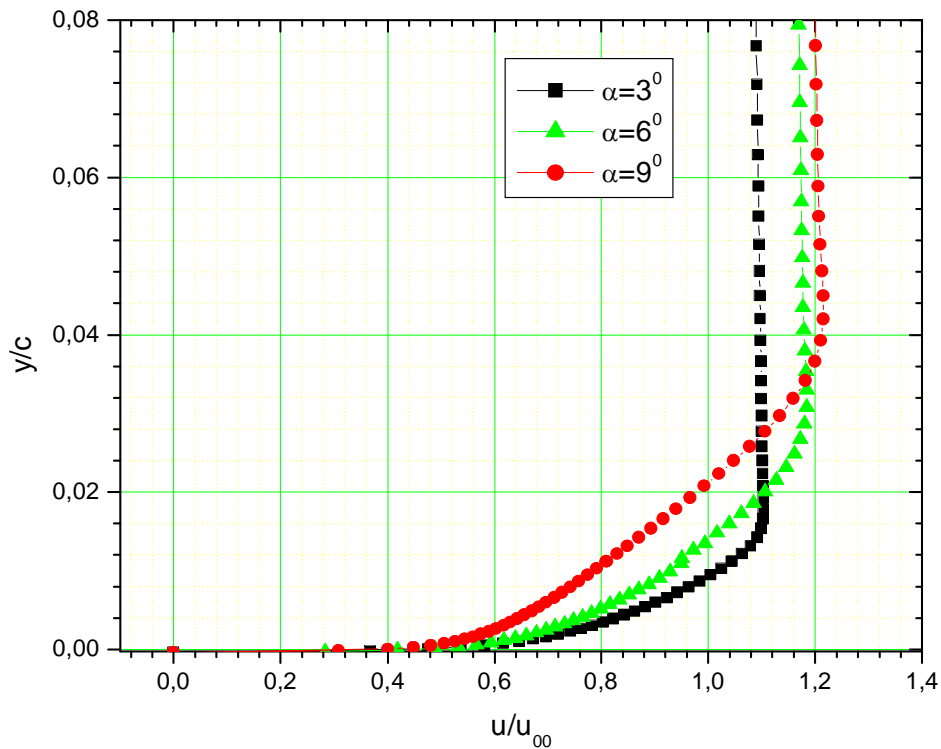


Figure (IV-14): Profils de la vitesse sur le profil NACA 0012 pour différents angle d'attaque à  $x/c=0.5$ .  $Re=10^6$ .

## IV-4-4-L'effet de l'épaisseur

On présente sur la figure (IV-15) les profils de vitesses sur les profils NACA0009, NACA0012 et NACA0015 à la même station,  $x/c=0.69$ , et à  $Re=10^6$ . Sur le profil NACA0009, le profil de vitesse prend la forme classique de la couche limite, une vitesse nulle à la paroi ensuite celle-ci augmente progressivement jusqu'à atteindre la valeur maximale de la vitesse externe, indiquant que la couche limite reste attachée à la paroi en cette station. Par contre sur le profil NACA0012, on est en présence d'un point d'inflexion, au delà duquel la couche limite commence à se décoller. A cette même station la couche limite est déjà décollée, sur le profil NACA0015, où on a un retour d'écoulement traduit par les valeurs négatives de vitesse.

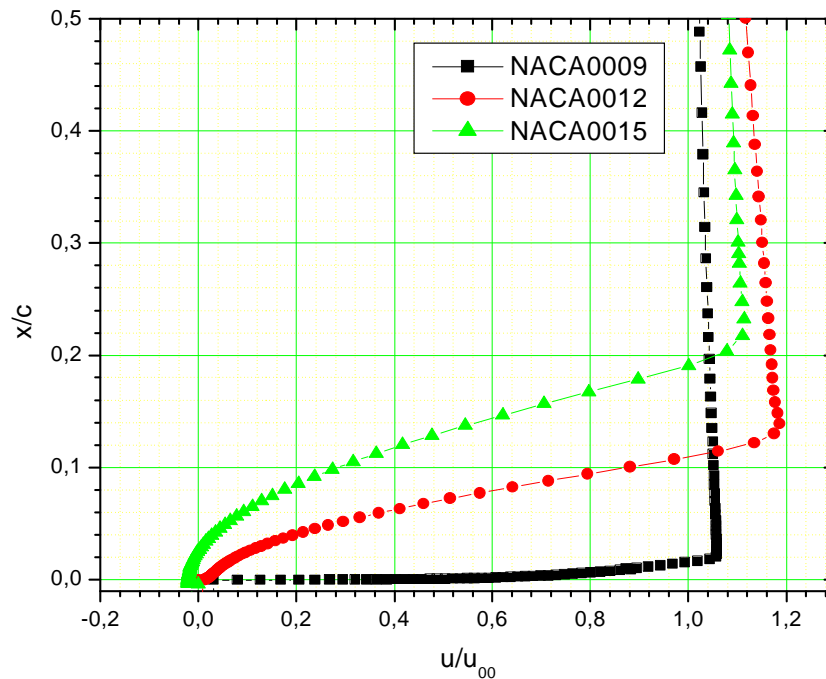


Figure (IV-15) : Profils de la vitesse sur les profils NACA0009, NACA0012 et NACA0015 à  $x/c=0.69$ ,  $Re=10^6$  et  $\alpha =15^\circ$

#### IV-5- Coefficient de frottement

La figure (IV-16) représente le tracé de l'évolution du coefficient de frottement. On s'aperçoit que ce coefficient est important au voisinage du bord d'attaque, son maximum est  $C_f = 0.016$ , et qu'il décroît progressivement en allant vers le bord de fuite.

On remarque aussi, sur cette figure, que le décollement de la couche limite dans les conditions  $Re=10^6$ ,  $\alpha = 0^0$ , n'a pas lieu (le décollement se traduit par l'annulation de coefficient de frottement).

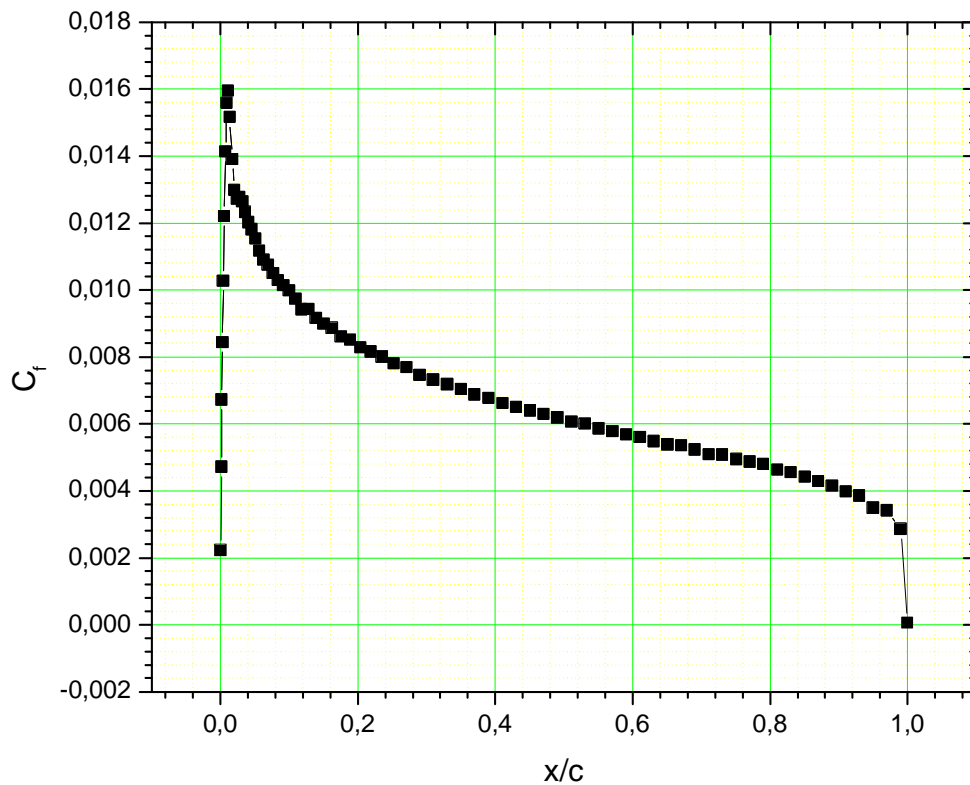


Figure (IV-16): Distribution du coefficient de frottement autour d'un profil NACA0012

à  $\alpha = 0^0$ ,  $Re=10^6$

## IV-5-1-L'effet de l'angle d'attaque sur le coefficient de frottement

La figure (IV-17) montre que l'évolution du coefficient de frottement est assez similaire quelque soit les angles d'attaques. Ainsi le coefficient de frottement augmente avec l'angle d'attaque.

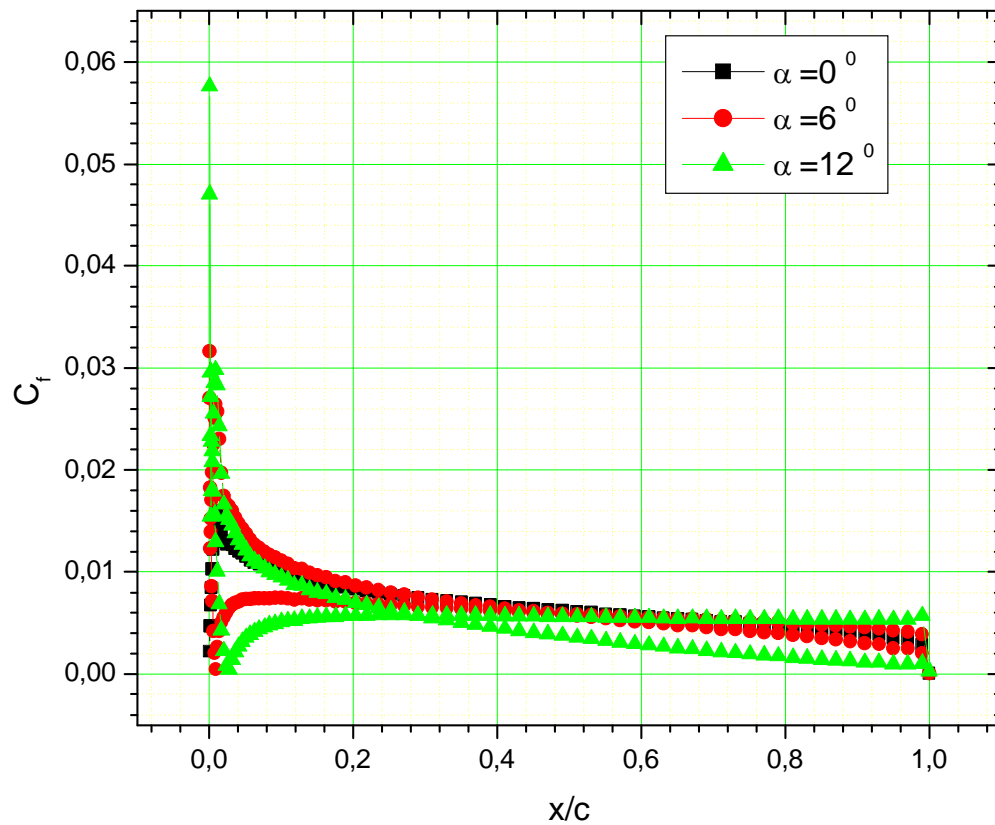
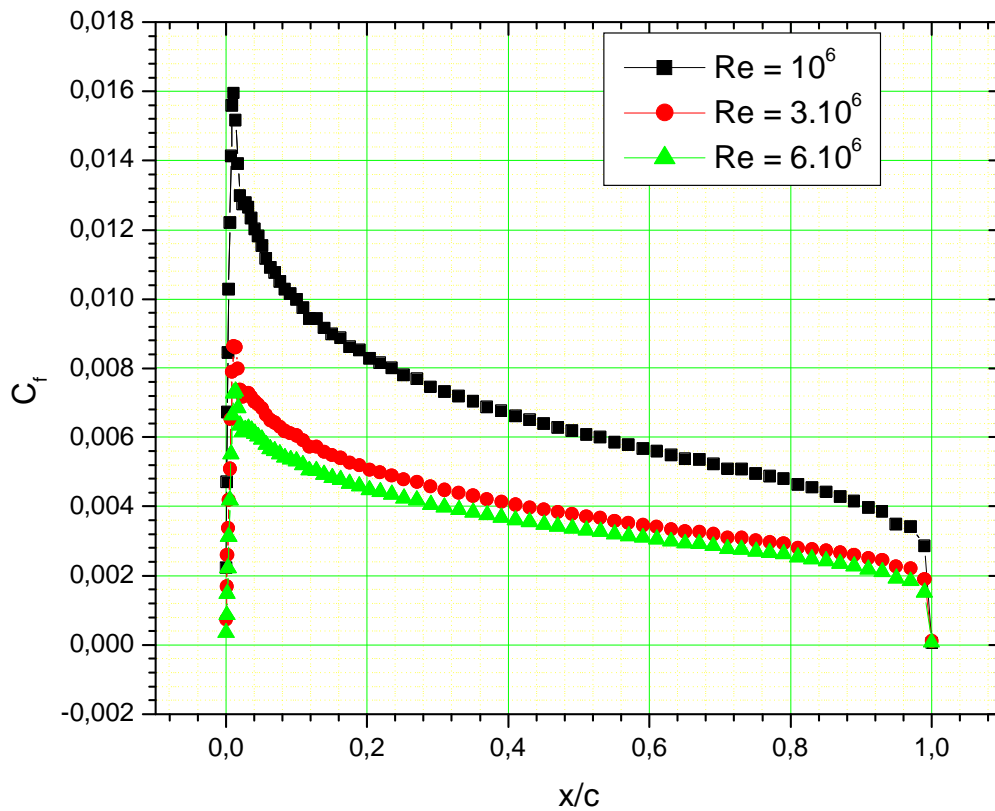


Figure (IV-17) : Distribution du coefficient de frottement autour d'un profil NACA 0012 pour différents angle d'attaque, à  $Re=10^6$



**IV-5-2-L'effet de nombre de Reynolds sur le coefficient de frottement**

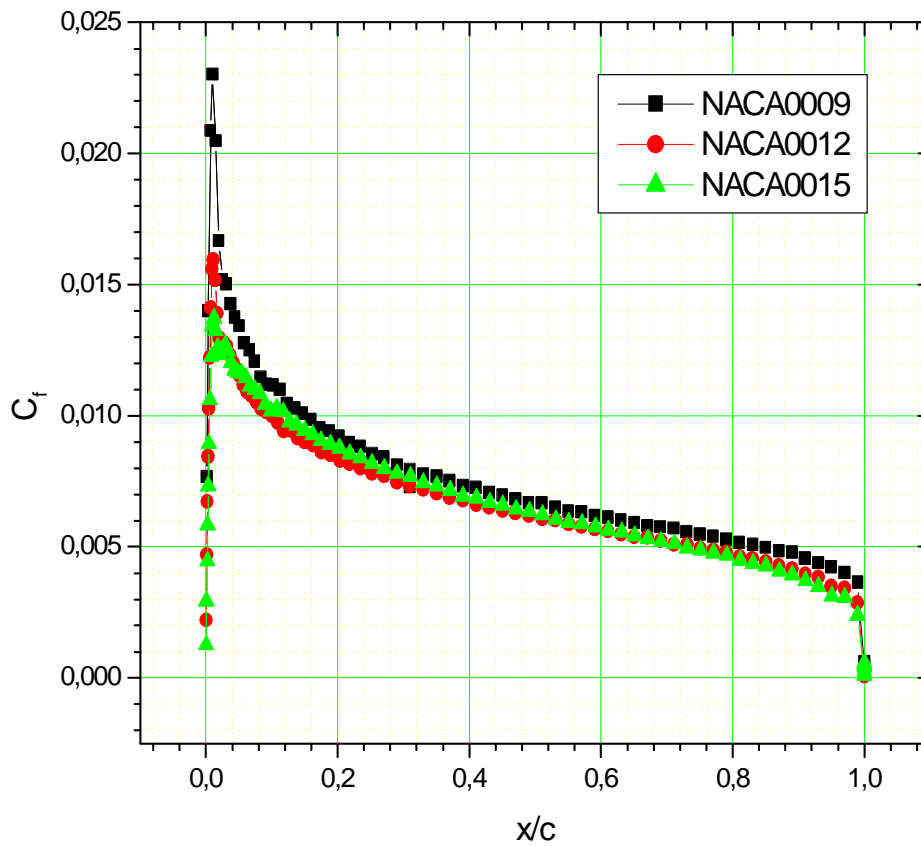
D'après la figure (IV-18), représentant l'évolution du coefficient de frottement pour différents nombres de Reynolds, le coefficient de frottement augmente brusquement autour du bord d'attaque et décroît d'une manière plus ou moins importante (en fonction de l'angle d'attaque) et au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.



**Figure (IV-18) : Distribution du coefficient de frottement autour d'un profil NACA 0012 pour différents nombre de Reynolds,  $\alpha=0$**

**IV-5-3-L'effet de l'épaisseur de profil sur le coefficient de frottement**

Sur la figure (IV -19), on présente la distribution du coefficient de frottement sur les profils NACA0009, 0012 et NACA0015. Il est clair que le coefficient de frottement décroît légèrement avec l'épaisseur. L'augmentation de l'épaisseur se traduit par une plus grande accélération de l'écoulement sur la partie amont du profil, engendrant ainsi une diminution des forces de frottement.



**Figure (IV-19) : Distribution du coefficient de frottement sur les profils NACA 0009, NACA 0012, NACA 0015.  $Re=10^6$ ,  $\alpha=0$ .**

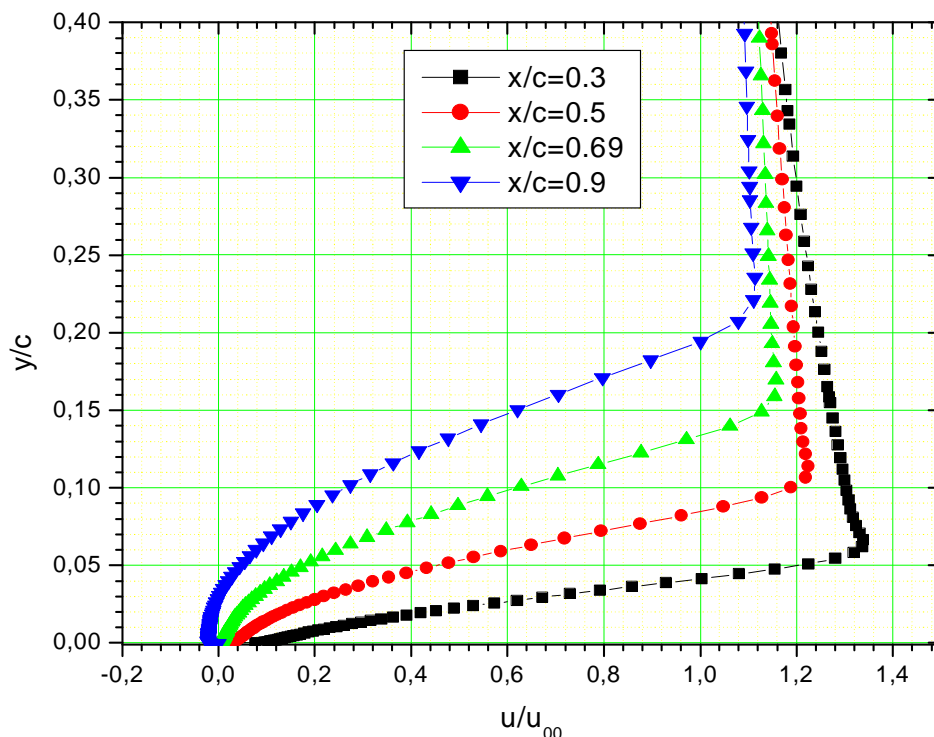
#### IV-6-Décollement de la couche limite turbulente

La figure (IV-20), représente les profils de vitesse, à un angle d'attaque de  $15^\circ$  et un nombre de Reynolds de  $10^6$ , à des abscisses différentes. La figure montre que la couche limite reste attachée à la paroi jusque au point dit point d'inflexion, à  $x/c=0.69$ . Au delà duquel, la couche limite turbulente n'est plus collée à la paroi, c'est le décollement.

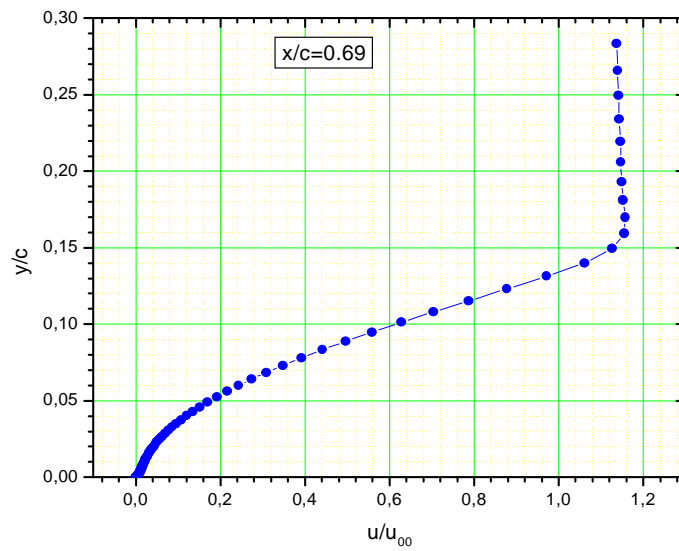
Dans la région décollée, compris entre  $x/c=0.69$  et  $x/c=1$ , on peut observer une répartition de vitesse atypique. En effet, la vitesse est négative au voisinage immédiat de la paroi puis change de signe et devient positive dans le reste de région de l'écoulement, figure (IV-21), où indique des zones de recirculation.

D'après la figure (IV-22), les zones à faible vitesse correspond à la région de décollement au voisinage de bord de fuite.

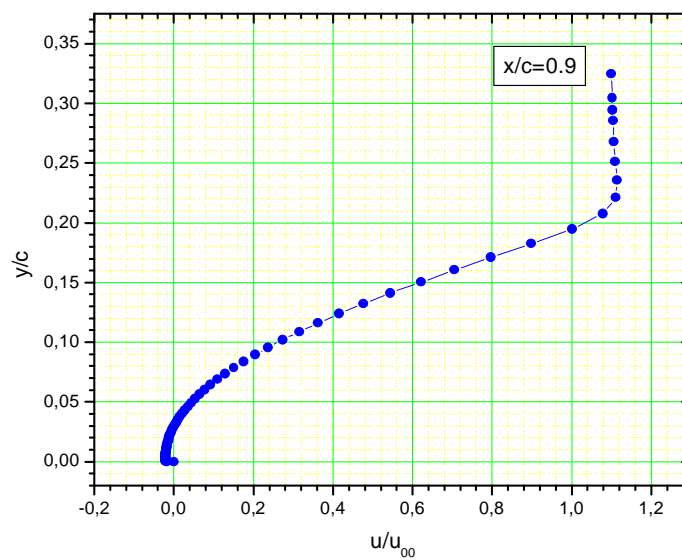
Dans la figure (IV-23), on remarque que la prévision du début de la zone de décollement est identifiée par l'annulation de coefficient de frottement.



- a -



- b -



- c -

Figure (IV-20) : Décollement de la couche limite turbulente

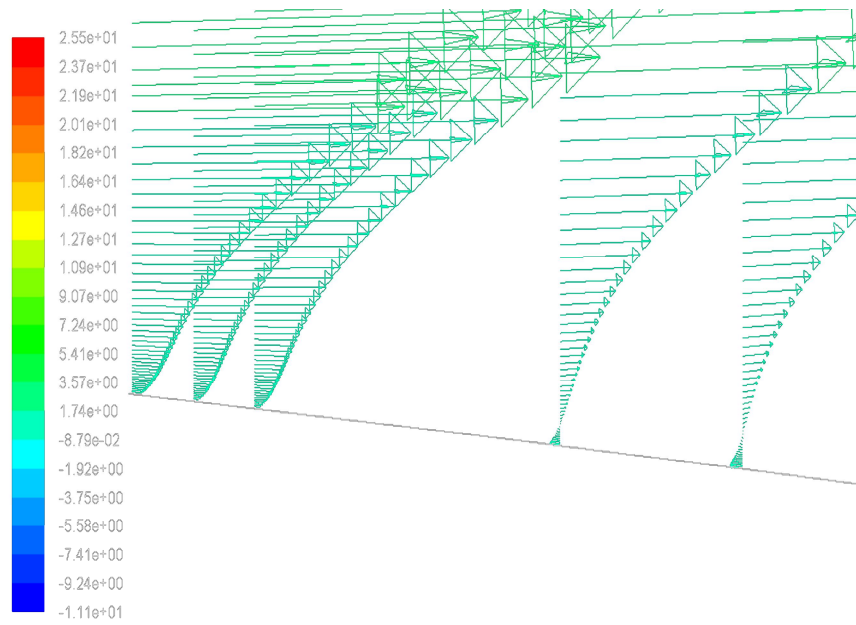


Figure (IV-21) : Vecteurs de vitesse dans la région décollée

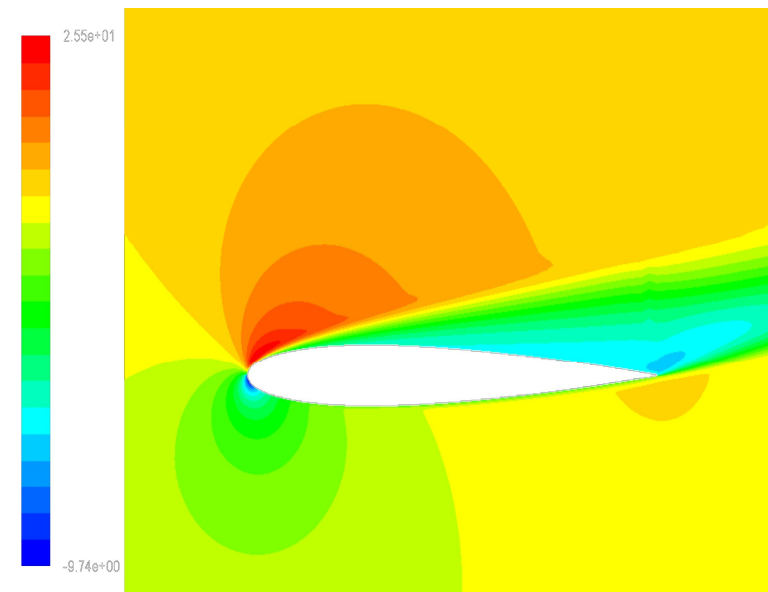


Figure (IV-22) : Contour de vitesse

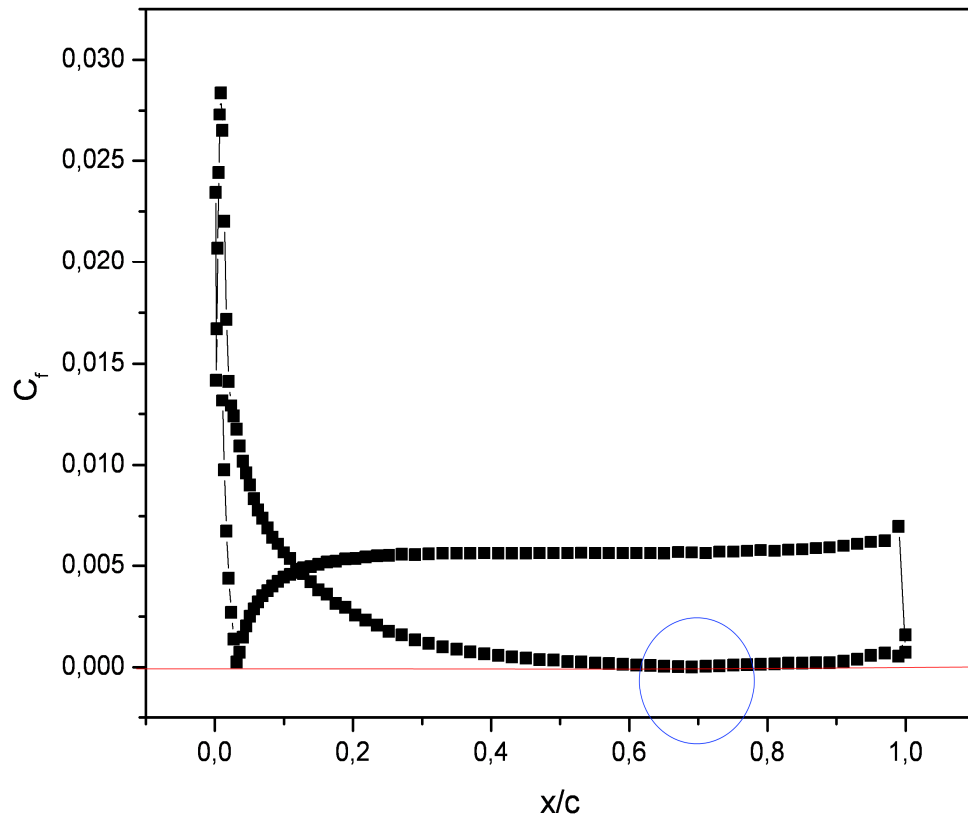


Figure (IV-23) : Distribution de coefficient de frottement à  $\alpha=15^0$  et  $Re=10^6$

#### IV-7-Comparaison entre la couche limite laminaire et turbulente

La comparaison faite pour un nombre de Reynolds égale à  $10^4$  et  $10^6$ , et un angle d'attaque nul.

Les figures (IV-24) et (IV-25), montrent que la forme des profils de vitesses dans la couche limite laminaire et turbulent, à même station  $x/c=0.2$  et  $x/c=0.5$ , sont différentes. On constate que la couche limite turbulente est plus épaisse que la couche laminaire. En effet, la loi de variation de la vitesse dépend de la viscosité du fluide qui induit un frottement entre les couches voisines. Par rapport à un écoulement laminaire, il existe en plus de la viscosité turbulente qui renforce le terme de diffusion visqueuse. Cependant, la variation de la vitesse est beaucoup plus forte au voisinage de la paroi dans une couche limite turbulente que dans une couche limite laminaire.

Dans ces conditions, le coefficient de frottement est beaucoup plus élevé en écoulement turbulent qu'en écoulement laminaire, figure (IV-28).

D'après les figures (IV-26) et (IV-27), la couche limite laminaire subit un décollement alors que la couche limite turbulente reste attachée à la paroi. Ce qui indique que la couche limite turbulente résiste mieux au décollement que celle laminaire.

Les coefficients de pression dans les deux cas laminaire et turbulent, sont comparés sur les figures (IV-29) et (IV-31). Ils sont assez proches le long du profil, à l'exception de la région comprise entre  $x/c=0.56$  et  $x/c=1$  où le  $C_p$  de l'écoulement laminaire devient fluctuant, indiquant la fin de la région laminaire. Cela permet de mettre en évidence qu'à  $Re=10^6$  l'hypothèse du modèle laminaire n'est plus valable sur toute la surface du profil.

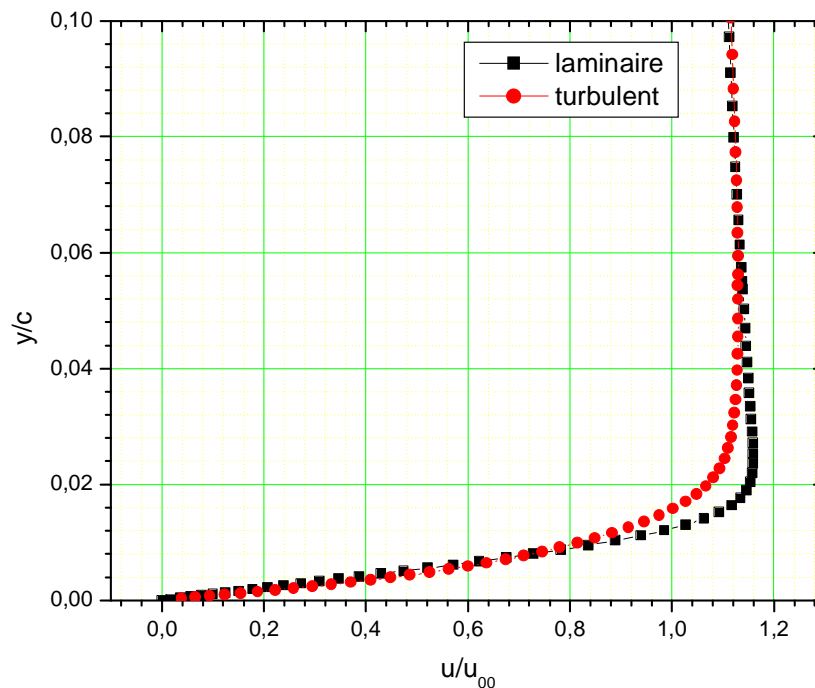


Figure (IV-24) : Profils de vitesses à  $x/c=0.2$  pour  $\alpha=0$  et  $Re=10^4$

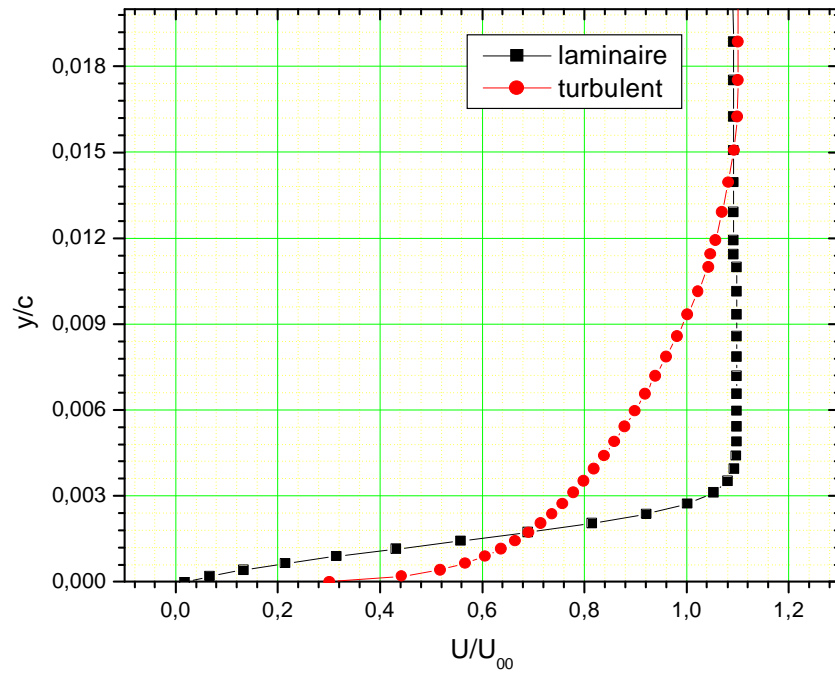


Figure (IV-25) : Profils de vitesses à  $x/c=0.5$  pour  $\alpha=0$  et  $Re=10^6$

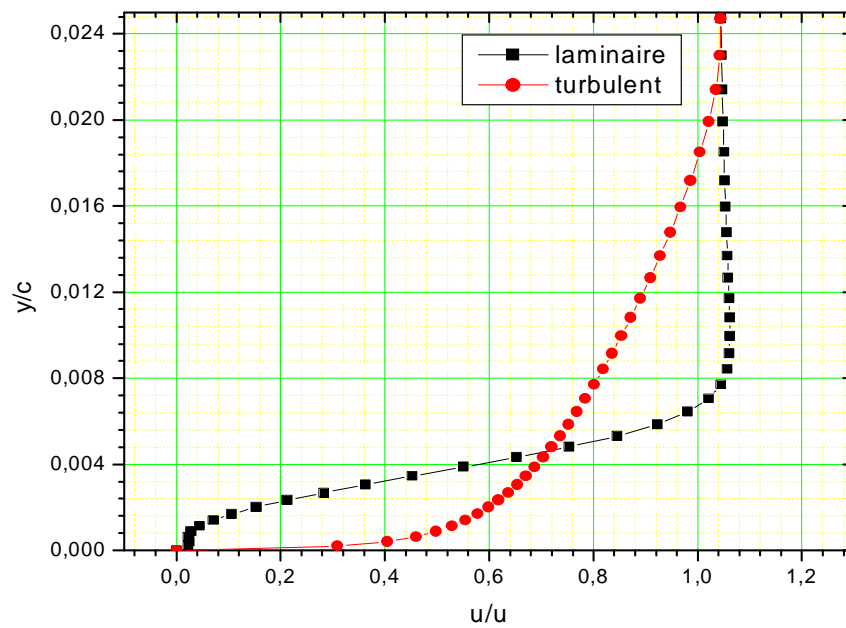


Figure (IV-26) : Profils de vitesses à  $x/c=0.725$  pour  $\alpha=0$  et  $Re=10^6$



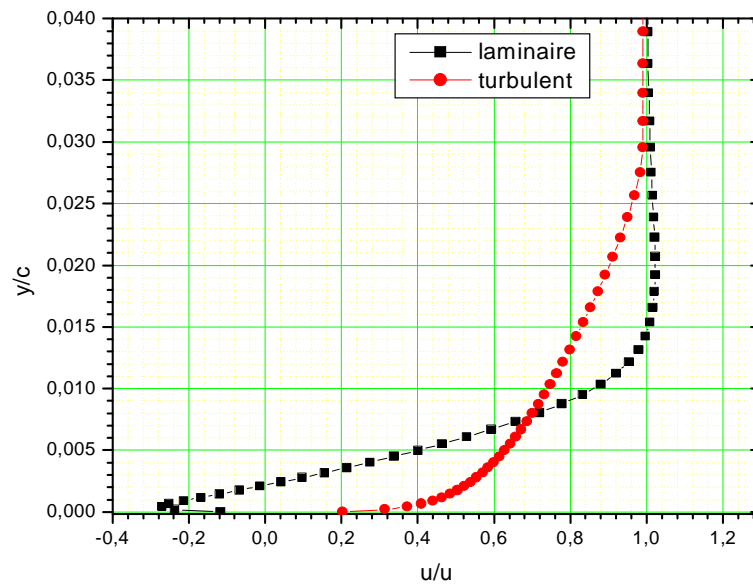


Figure (IV-27) : Profils de vitesses  $x/c=0.9$  pour  $\alpha=0$  et  $Re=10^6$

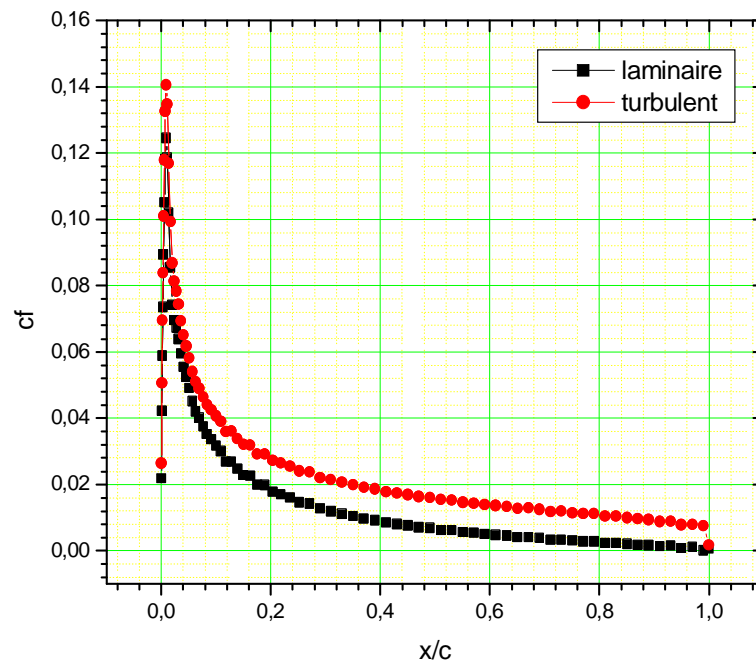


Figure (IV-28) : Distribution de coefficient de frottement à  $\alpha=0$  et  $Re=10^4$

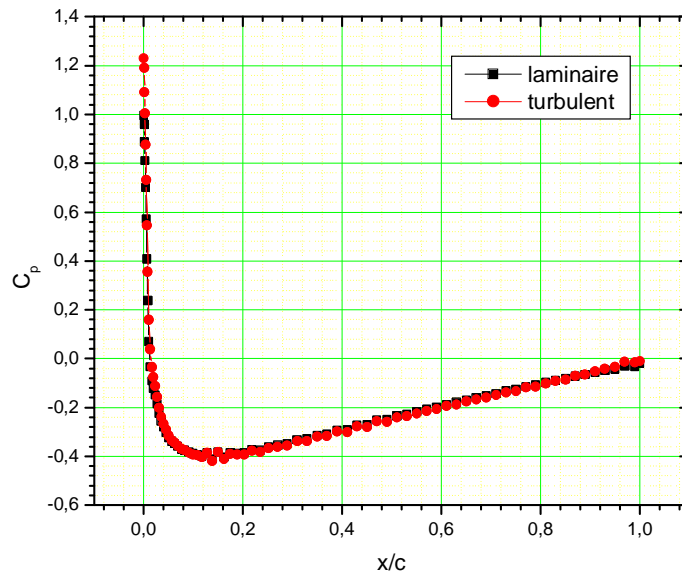


Figure (IV-29) : Distribution de coefficient de pression à  $\alpha=0$  et  $Re=10^4$

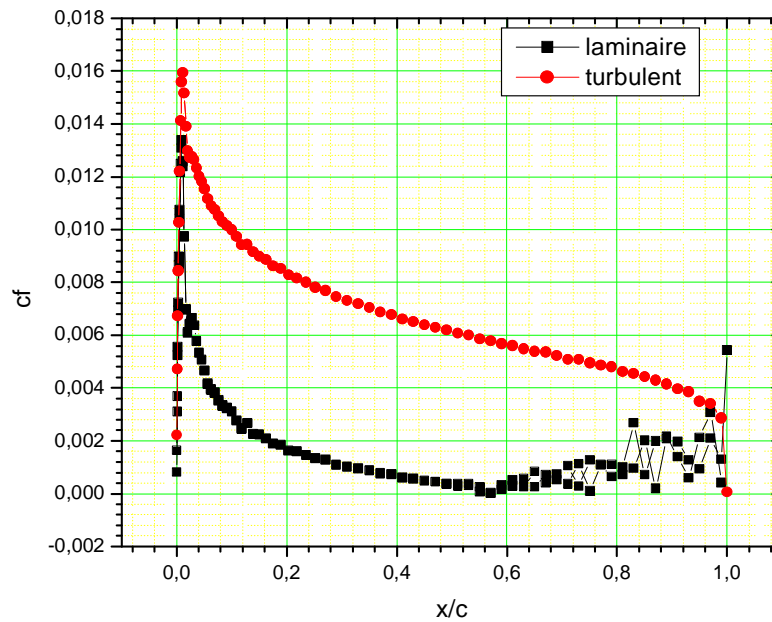


Figure (IV-30) : Distribution de coefficient de frottement à  $\alpha=0$  et  $Re=10^6$

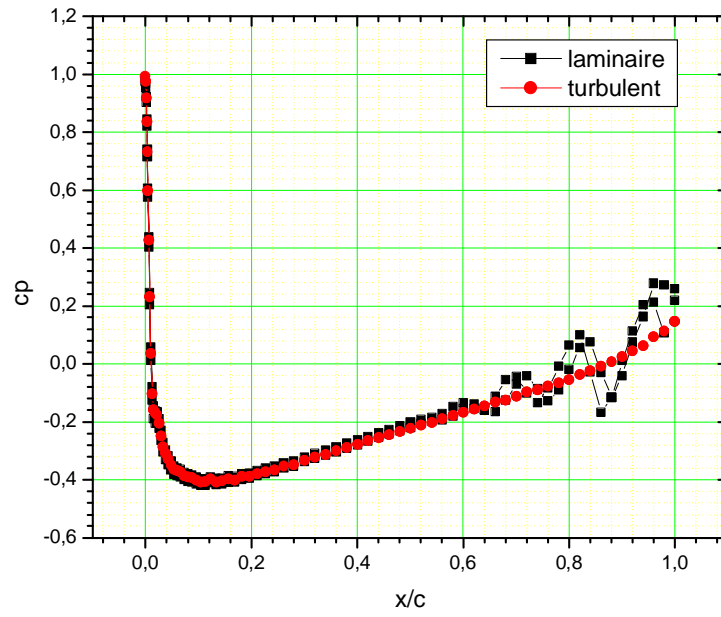


Figure (IV-31) : Distribution de coefficient de pression à  $\alpha=0$  et  $Re=10^6$

## **Conclusion**

## **Conclusion**

Une étude numérique d'une couche limite turbulente autour d'un profil bidimensionnel gouverné par les équations de Navier Stokes moyennées, est présentée. Le modèle à deux équations de transport  $k-\epsilon$  est utilisé.

L'application de la technique de génération de maillage a été utilisée, et a permis l'obtention d'un maillage adapté, facilitant l'application des conditions aux limites. Ceci a été un outil efficace permettant le passage du domaine physique à un domaine de calcul régulier.

La simulation est faite, d'une part, par un code élaboré en fortran qui résout les équations de Navier- Stokes moyennées en coordonnées curvilignes utilisant la méthode des volumes finis où le maillage est généré par la technique de génération de maillage, qui permet l'obtention d'un maillage adapté, facilitant l'application des conditions aux limites, et d'autre part, par les logiciels Gambit, qui génère le maillage, et Fluent qui résout le problème modélisé par la méthode des volumes finis.

Les résultats, obtenus par Fluent, ont permis d'étudier l'influence du nombre de Reynolds, de l'angle d'attaque et de l'épaisseur du profil sur le comportement de la couche limite turbulente et sur les performances aérodynamiques du profil, représentées par les coefficients de pression et de frottement.

Les résultats ont montré que l'épaisseur de la couche limite turbulente augmente dans le sens de l'écoulement. Ainsi que l'épaisseur de la couche limite turbulente et le coefficient de frottement dépendent très fortement du nombre de Reynolds. Une augmentation de ce dernier a tendance à décroître l'épaisseur de la couche limite turbulente et le coefficient de frottement.

On a remarqué aussi que l'augmentation de l'angle d'attaque entraîne une augmentation du coefficient de pression, résultat essentiel d'une accélération du fluide sur l'extrados.

La comparaison faite entre la couche limite turbulente et celle laminaire montre que la couche limite turbulente est plus épaisse que la couche limite laminaire et qu'elle retarde bien le décollement. Par contre, la contrainte pariétale est beaucoup plus élevée en écoulement turbulent qu'en écoulement laminaire.

'en augmentant l'incidence, on assiste à une augmentation de

L'augmentation de l'angle d'incidence (angle entre l'écoulement loin de l'aile et l'axe du profil) se traduit d'abord par une augmentation de la portance, résultant essentiellement d'une accélération du fluide sur l'extrados.

Cette diminution du coefficient de portance à grande incidence est liée au décollement de la couche limite à l'extrados du profil. A faible angle d'incidence, le décollement de la couche limite se produit loin du bord d'attaque. Sur la fig. 6.13, l'angle d'incidence est très élevé et le décollement se produit immédiatement en aval du bord d'attaque et influence tout l'écoulement sur la partie supérieure du profil.

## Références Bibliographiques

- [1] **H.Schlichting**, «Boundary layer theory» 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] **J. Bredberg**, «On the wall boundary condition for turbulence models» Internal rapport 0/4, Sweden, 2000.
- [3] **J. Bellettre**, «Transferts de masse et de chaleur dans la couche limite pariétale et à l'intérieur d'une paroi poreuse plane soumise à de l'effusion ou de la transpiration » thèse de doctorat, l'institut national des sciences appliquées de Lyon, 1998.
- [4] **Mattias H. Buschmann**, « Structure of canonical turbulent wall-bounded flow » AIAA journal, vol 44, no 11, November 2006.
- [5] **J.Gustex**, «Aérodynamique : Turbulence et couche limite », ed Cepadues, 1989.
- [6] **E. Coustols**, «Effet des parois rainurées « riblets » sur la structure d'une couche limite turbulente» Mec. Ind, (2001),2, 421-434.
- [7] **L. Castillo, A. Tumin** ,« Introduction : turbulent boundary layers » AIAA journal, vol 44, no 11, Novembre 2006.
- [8] **J.Coustex**, «Modèles de turbulence : principes et applications» Le 16<sup>iem</sup> congrès canadien de mécanique appliquée, Canada juin 1997.
- [9] **R. Comolet**, «Mécanique expérimental des fluides», tom II 5<sup>me</sup> édition, Masson, Paris, 1990.
- [10] **L. Doris**, « Introduction à la simulation numérique des écoulements turbulents», Note de cours, ENSTA - 3ème année, 2005.
- [11] **A. Jameson**, «Aerodynamics» École Normale Supérieure de Cachan, 2006.
- [12] **A. Sead** ,«compressibl Flow», Prentice-Hall, 1985.
- [13] **F. Muyl, V. Herbert, L. Dumas**, «Réduction des émissions de CO2 : optimisation de la traînée aérodynamique automobile par algorithmes hybrides», Canum 2003.



- [14] **V. N. Kornilov**, «Characteristic of axisymmetric turbulent boundary layer controlled by ring manipulators » Instuti of theorical and Applied Mecanics SbrAS, Novosibirsk, Russia 2003.
- [15] **J. Coustieux, J, Mause**, «Analyse asympotique de la couche limite turbulente », 2005
- [16] **C. Sarraf, H. Djeridi, J.Y. Billard** «Effets de l'épaisseur d'un profil Naca symétrique sur les performances et les caractéristiques de la couche limite turbulente». 11<sup>ème</sup> Journées de l'Hydrodynamique, 3 - 5 Avril 2007, Brest, France
- [17] **M.H. Shojaefard, A.R. Noorpoor, A. Avanesians and 2M. Ghaffarpour**, «Numerical Investigation of Flow Control by Suction and Injection on a Subsonic Airfoil» American Journal of Applied Sciences 2 (10): 1474-1480, 2005.
- [18] **P. d'Espiney, P. Champigny, D. Baudin, J.A. Pilon**, «Couche limite autour d'un fuselage de missile en incidence en écoulement supersonique : Etude expérimentale et calculs Navier Stokes », RTO AVT Symposium on "Missile Aerodynamics", held in Sorrento, italy, 11-14 May 1998.
- [19] **J.Favier, S.Bourgois**, «Contrôle fluïdique du décollement sur un profil d'aile».17<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique Troyes, septembre 2005.
- [20] **M.Xenos, E.Tzirtzilakis, N.Kafoussias**, «Compressible turbulent Boundary layer flow control over a widge». 2<sup>nd</sup> IC-SCCE, Athens, 5-8 July, 2006.
- [21] **R.B. Kotapati-Apparao,K.D.Squires**, «Prediction of the over an airfoil at maximum lift». AIAA paper 2004-0259, Reno,Navada.
- [22] **C. Sarraf, H. Djeridi, J.Y. Billard**, «Couche limite et fluctuations d'efforts hydrodynamiques sur profils portants. Influence de la cavitation». 18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007
- [23] **L.Ryhmin**, « Dynamique des fluides »,Presses polytechniques et universitaires Romandes (PPUR) ,1993
- [24] **J. Blazek**«Computational fluid dynamics :principals and applications».Elsevier 2001.
- [25] **J. H. Ferziger, M.Peric**« Cumputational methods for fluid dynamics », Springer,2002.
- [26] **K.Hoffmann, S.chiang** «Cumputational fluid dynamics volumII », Engineering education system, 2000.

- [27] **M. Gabriel PETIT**, «Contrôle de Décollement par fente pulsée et générateurs de vortex fluides», thèse de doctorat , Université de Toulouse,2005.
- [28] **H.Viviand**, «Une méthode de construction de maillages bidimensionnels orthogonaux ou non orthogonaux», La recherche Aérospatiale, N<sup>o</sup> 1, 1982
- [29] **C. Rome**, « Une méthode de raccordement de maillages non conformes pour la résolution des équations de Navier-Stokes », thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Juin2006.
- [30] **O. Marsden, C. Bogey, C. Bailly** «Calcul direct du bruit aérodynamique rayonné par des géométries complexes» 17<sup>iem</sup> congrès Français de mécanique, Troyes, 2005.
- [31] **H.K.Versteeg, W.Malalasekera**, «An introduction to computational fluid dynamic: the finite volume method» .Longman Group Ltd 1995.
- [32] **S. Patankar**, « Numerical Heat Transfer and Fluid Flow». McGraw-Hill Book Comany.1980
- [33] Fluent 6.1 User's Guide, February 2003, Fluent.inc.
- [34] Gambit 2.1 User's Guide, May 2003, Fluent.inc.
- [35] **C.Rahie and W.L.Chow**, "Numerical study of turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation", AIAA journal, Vol.21, N<sup>o</sup> 11, pp. 1525-1532, 1983
- [36] **S.Djouimaa**, « Simulation de l'écoulement transsonique turbulente autour d'une aube de turbine». », Thèse de doctorat, Univ Batna, 2007.

# **Etude D'une Couche Limite Turbulente Autour D'un Profil Bidimensionnel**

## **Résumé**

Une étude numérique d'une couche limite turbulente autour d'un profil bidimensionnel gouverné par les équations de Navier Stokes moyennées avec le modèle de turbulence  $k-\epsilon$ , est présentée. La simulation numérique est obtenue avec, d'une part, par un code élaboré en fortran qui résout les équations de Navier Stokes moyennées en coordonnées curvilignes utilisant la méthode des volumes finis, et d'autre part, par les logiciels Gambit, qui génère le maillage, et Fluent qui résout le problème modélisé par la méthode des volumes finis. La distribution de vitesse, de pression et l'évaluation de coefficient de frottement sur différents profils sont déterminées en recherchant l'influence de l'angle d'attaque et du nombre de Reynolds de l'écoulement sur ces derniers.

### **Mots clés :**

Couche limite- turbulence- modèle  $k-\epsilon$  – aérodynamique –coefficient de pression- coefficient de frottement- NACA0012 - Fluent

# **Numerical study of incompressible turbulent boundary layer around a two-dimensional profile**

## **Abstract**

A numerical study for turbulent boundary layer around bidimensionnal profile, using the the avrege Navier Stockes equations using a turbulence model  $k-\epsilon$ , is presented. The numerical simulation is obtained, on one hand, by a cod written in fortran and using the finite volume method for solving the equations of the Navier Stockes in curvilinear body-fitted coordintes. On the other hand, using Gambit,which generate the mesh, and FLUENT , to solve the physical problem using finite volume method. Velocity, pressure coefficient and friction coefficient distributions are represented searching the effect of the angles of attack and the Reynolds number on the distribution .

### **Key words:**

Boundary layer - Turbulence-  $k-\epsilon$  model – Aérodynamic – pressure coefficient – friction coefficient - NACA0012 – Fluent.

## الدراسة العددية للطبقة الحدية المضطربة حول مقطع ثنائي البعد

### ملخص

الدراسة العددية للطبقة الحدية المضطربة حول مقطع ثنائي البعد المنمذجة بمعادلات نافى-ستوكس المتوسطة مع استعمال نموذج الاضطراب  $\kappa-\epsilon$  متناولة. الحلول العددية ناتجة من جهة , من خلال برنامج معد بلغة الفورترن لحل معادلات نافى-ستوكس المتوسطة في الاحداثيات المنحنية باستعمال طريقة الحجوم المنتهية و من جهة اخرى باستعمال برنامج Gambit لرسم الشبكة و برنامج Fluent لحل معادلات نافى-ستوكس المتوسطة باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. رسم توزيعات السرعة و توزيعات معامل الضغط و معامل الاحتكاك قد حددت باحثين عن تأثير زاوية الورود وعدد رينولدز للجريان على هذه التوزيعات.

### الكلمات المفتاحية:

الطبقة الحدية - الاضطراب - نموذج  $\kappa-\epsilon$  - الديناميك الهوائي - معامل الضغط - معامل الاحتكاك

Fluent - NACA0012 -