République Algérienne Démocratique et Populaire

UNIVERSITE DE CONSTANTINE

THESE

pour l'obtention de grade de MAGISTER

PHYSIQUE THEORIQUE

Présentée par :

BOUDJEDAA TAHAR

SOLUTION PAR L'APPROCHE INTEGRALE DE CHEMIN DE DEUX PROBLEMES :

— L'UN NON-RELATIVISTE

— L'AUTRE RELATIVISTE

Soutenue le 18 Novembre 1991 devant la commission d'examen

MM. M. FELLAH	- Prof. à l'U.S.T.H.B	- Président
T. F. HAMMANN	- Prof. à l'Université de Haute Alsace	- Examinateur
N. MEBARKI	- M C. à l'Université de Constantine	- Examinateur
D. MIMOUNI	- Ph. D. à l'Université de Constantine	- Examinateur
L. CHETOUANI	- Prof. à l'Université de Constantine	- Rapporteur.

République Algérienne Démocratique et Populaire

UNIVERSITE DE CONSTANTINE

THESE

pour l'obtention de grade de MAGISTER

Présentée par :

BOUDJEDAA TAHAR

SOLUTION PAR L'APPROCHE INTEGRALE DE CHEMIN DE DEUX PROBLEMES :

— L'UN NON-RELATIVISTE

— L'AUTRE RELATIVISTE

Soutenue le 18 Novembre 1991 devant la commission d'examen

MM. M. FELLAH	- Prof. à l'U.S.T.H.B	- Président
T. F. HAMMANN	- Prof. à l'Université de Haute Alsace	- Examinateur
N. MEBARKI	- M C. à l'Université de Constantine	- Examinateur
D. MIMOUNI	- Ph. D. à l'Université de Constantine	- Examinateur
L. CHETOUANI	- Prof. à l'Université de Constantine	

REMERCIEMENTS

Ce travail a fait l'objet d'une these de Magister , effectue au departement de physique theorique de l'universite de Constantine. Je voudrais d'abord remercier:

- Mr le Professeur M.Fellah, avec l'expression de ma sincere reconnaissance, d'avoir accepte de juger ce travail et de presider le jury.
- Mr le Professeur T.T. Hammann, avec ma profonde gratitude, de ses remarques et suggestions qui m'ont ete utiles, de sa collaboration avec le groupe de physique theorique de l'universite de Constantine et m'avoir fait l'honneur d'etre parmi les membres du jury.
- Mr N. Mebarki, avec le temoignage de ma reconnaissance, dont les critiques nombreuses et utiles m'ont servi a ameliorer ce manuscript et avoir accepte de juger ce travail.
- Mr D. Mimouni, avec ma gratitude la plus distinguee, d'avoir ete interesse par ce travail et accepte de le juger.

Je tiens a remercier tout particulierement, Mr le Professeur L. Chetouani, avec l'expression de mes respects et ma reconnaissance les plus dinstingues, d'avoir dirige et suivi ce travail. Grace a ses conseils precieux et son soutien constant, il m'a initie a la technique des integrales de parcours et a apporte beaucoup dans la realisation de ce travail. Sans lui, ce travail ne serait pas realise.

Je voudrais remercier particulierement Mr L. Guechi, de son assistance et sa collaboration dans ce travail, ainsi que sa redaction des articles qui m'a ete tres utile. Je lui suis tres reconnaissant.

Je remercie vivement mes amis et collegues et je leur suis tres reconnaissant:

- Mr A. Chaoui, de m'avoir consacre tout son temps pour realiser la frappe de cette these, de ses conseils et encouragements, et de son soutien constant.
- Mr A. Teila, qui m'a aide dans la preparation de ce manuscript, et m'a toujours soutenu et dont les conseils m'etaient tres utiles.
- Mr M. Ledra dit "Khali", de son aide precieuse, de ses riches critiques et suggestions et soutien permanent.
- Mr M. Benkhrourou, de m'avoir envoye les articles dont j'avais besoin et de ses vifs encouragements.

Je remercie egalement, avec ma profonde gratitude, mes proches:

- Mr M. Boudjeda de m'avoir aide, de ses precieuses critiques et encouragements.
- Mr H. Ziad qui a mis a ma disposition sa librairie et de ses encouragements.

Et enfin mes remerciements vont egalement a ceux qui ont participe, de pres ou de loin, a la realisation de cette these.

" Nous n'avons pas encore de theorie complete et consequente qui combine la mecanique quantique et la gravitation. Cependant, nous sommes pratiquement certains de conna tre quelques unes des caracteristiques qu'une telle theorie unifiee devrait present. L'une d'elles dit qu'elle devrait englober la proposition de Feynmann de formuler la theorie quantique en termes d'integrale de chemins."

" Chaque trajectoire dans l'integrale de chemins devra decrire non seulement l'espace-temps mais tout ce qu'il y a dedans, y compris les organismes complexes comme les etres humains qui peuvent observer l'histoire de l'univers."

STEPHEN W. HAWKING

" Une breve histoire du temps. "
Du big bang aux trous noirs
(Flammarion 1989)

ملخص

تناولنا في هذه الأطروحة نقطتين اساسيتين:
اولا: الناشر المنسوب الى الكمون الفعال الذى يعمم كمون هلتين و كمون كبلر يحسب بواسطة التكاملات المسارية على الزمرة الغير كثيفة $SU(1,1)$ و منه نستنتج الطيف الطاقوي و دوال الموجة للحالات الغير متصلة و الحالات المستمرة.

ثانيا: دوال قرين للجسيمات المشحونة ذات اللفة $(spin)$ 0 و 1/2 الخاضعة لحقل موجة كهرومغناطيسية مستوية تحسب باستعمال نظرية التكاملات المسارية. كما اثبت كذلك في حالة اللفة صفر ان دالة قرين النصف كلاسيكية، المحصل عليها تكون على شكلها المكثف، و منه نستنتج الامواج في حالة اللفة صفر و دوال الموجة في حالة اللفة نصف.

A la mémoire de mon père,

a ma mère, a mes frères,

à ma soeur et à tous ceux

qui me sont chers.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET ORGANISATION DU TRAVAIL

INTRODUCTION

INTRODUCTION AU TRAVAIL

Depuis son élaboration, le formalisme de l'intégrale de chemin n'a cessé d'envahir les domaines les plus variés de la physique. L'analogie qui existe entre les intégrales de Feynman et celles de Wiener a inspiré leur utilisation en mécanique statistique. Son extension à la dimension infinie lui a permis d'être le langage le plus évolué s'appliquant excellemment à la théorie quantique des champs. Ses récentes applications à la théorie quantique de la gravité confirment son efficacité dans le traitement des problèmes physiques les plus ardus.

Malgré tous ces développements, l'application de cette alternative au traitement des potentiels de la mécanique quantique est restée restreinte aux systèmes quadratiques. Le problème de Coulomb qui fut le succès retentissant de l'équation de Schrödinger n'a été solutionné qu'en 1979. Son traitement exact via l'intégrale de chemin a été obtenu pour la première fois par Duru et Kleinert, en introduisant la transformation spatiale KS suivie d'une transformation temporelle. Depuis ce succès, la liste des potentiels solutionnés par la technique des transformations spatio-temporelles n'a cessé d'augmenter de jour en jour. Parmi eux citons:" Morse Oscillator [1], the Dirac-Coulomb problem[2], the Rosen Morse oscillator [3], the Hartmann potentiel [4],[5], the charge monopole system [6],[7], [8], the Dirac dyonium problem, the Kepler problem in a uniformly curved space [9],the Hulthen potentiel [10] ".

INTRODUCTION

L'intégrale de chemin du propagateur d'une particule de Dirac en interaction avec un champ extérieur, reste de nos jours un problème difficile à affronter à cause du degré de liberté interne du spin. Mais une manière de contourner ce problème, consiste à convertir cette particule de Dirac en une particule de Klein-Gordon, qui lui correspond par l'astuce de Fock "introduction de la cinquième variable" un formalisme "path integral". Citons parmi les exemples "Path integral derivation of black holes radiance " [11].

Le but de ce travail est d'utiliser la technique des transformations spatio-tempporelles, pour ajouter à la liste des potentiels solutionnés, le potentiel écranté (paru dans J.Math.Phys.32 (2), February 1991) et de déterminer les propagateurs d'une particule de spin 0 et 1/2 , soumise à l'action d'une onde plane en utilisant l'astuce de Fock (soumis)

Dans le premier chapitre de ce travail, on examinera certains aspects généraux de l'intégrale de chemin ,et nous exposerons seulement les outils utiles aux déveleppements des chapitres ultérieurs.

Le second chapitre, sera consacré à l'étude du potentiel écranté via la variété SU(1,1), convertie par le moyen d'une transformation spatio-temporelle. Les fonctions d'onde et les énergies sont déduites pour les cas discret et continu.

Le troisième chapitre, traitera le propagateur de Klein-Gordon pour une onde électromagnétique plane, moyen par lequel on déduit facilement le propagateur associé à une particule de Dirac. Dans chaque cas les fonctions d'onde seront déduites.

Le dernier chapitre, constituera les conclusions générales de ce travail.

REFERENCES

[1] Cai, P.R, Inomata, A. and Wilson, R, Phys.lett.86A, 117(1983).

[2] Kayed, M.A, and Inomata, A ,Phys.Rev.Lett.53,107(1984)

[3] Inomata, A, Kayed, M,A, J.Phys.A18, L235 (1985).

[4] Carpir, M.V, and Inomata, A, in" path integral from Mev to mev " (M.C.Gutzweiller et. al) p261 world scientific Singapore 1985.

[5] L.Chetouani, L.Guechi and T.F.Hammann, Phys.lett.A,vol125,6, 7(1987).

[6] Durr, H. and Inomata ,A.,J.Math.phys.26,2231,(1985).

[7] L.Chetouani, L.Guechi, and T.F. Hammann, J.Math.Phys.30,3 (1989).

[8] L.Chetouani, L.Guechi, M.Letlout and T.F.Hammann, Nuovo Ciments B105, 387(1990).

[9] Barut, A.O.Inomata, A.,Junker, J.Phys.A20 6271(1987).

[10] Cai,J.M, Cai, P.Y, and Inomata, A, Phys.Rev.A34,6,(1986).

[11] J.B.Hartle and S.W. Hawking. Phys.Rev. D13,2188 (1978).

CHAPITRE II

INTEGRALE DE CHEMIN

INTEGRALE DE CHEMIN

1.1) INTRODUCTION

A coté de la formulation de Schrödinger et celle d Heisenberg de la mécanique quantique, il existe aussi une troisième version équivalente mais beaucoup plus naturelle, appelée methode d'intégrale de chemin de Feynman. Evidemment, cette approche n'apporte rien de nouveau à la mécanique quantique, ma elle contient en elle à la fois l'étrange principe superposition et la limite classique. Ce qui donne l'impressio d'être encore proche de la mécanique classique, tout en étant dan la mécanique quantique. En outre, elle offre des avantages multiples, par exemple, elle facilite la généralisation des systèmes non relativistes à des systèmes relativistes, l'extensi du degré de liberté d'un nombre fini à l'infini et la formulati de la mécanique quantique dans des espaces-temps courbés. Le coeu de ce formalisme est le propagateur qui contient toutes les informations du système physique. Connaissant le lagrangier classique du système, ce propagateur est formulé comme étant une somme sur tous les chemins possibles (principe de supeposition d'une certaine amplitude dont la phase est proportionnelle l'action du système (approximation classique) correspondante a chemin.

Le but de ce chapitre est de formuler cette approche à l Feynman à partir des principes de la mécanique quantique, et d'exposer quelques propriétés générales de ce formalisme.

II.2) PRINCIPES GENERAUX DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

Avant d'aborder la formulation de l'intégrale de chemin, il est utile, même nécessaire, de rappeler quelques principes généraux de la mécanique quantique, qui sont à la base de ce formalisme.

En premier lieu, citons d'abord le principe d'incertitude d'Heisenberg dont l'énoncé le plus simple est: à un instant donné, la position et la vitesse d'une particule quantique ne peuvent être mesurées exactement et simultanément. Par conséquent, ce principe interdit l'existence d'une trajectoire bien déterminée et bien définie. Ce qui veut dire que la nature a renoncé à la description déterministe, capable de prédire le futur exactement, en revanche d'une description moins détaillée, qui ne prédit que la probabilité des différents événements.

Le principe suivant est qu'à l'événement possible est associée une amplitude de probabilité, qui est en général un nombre complexe. La probabilité de l'événement est représentée pa le carré du module de cette amplitude. C'est a dire, événement: particule quittant le point a à l'instant ta, allant vers le point b à l'instant tb, avec tb>ta. L'amplitude de probabilité associée à cet evenement est K(b,a). La probabilité de l'événement est $P(b,a) = |K(b,a)|^2$

Ensuite vient le principe de superposition:
Lorsque l'événement peut se produire suivant plusieurs voies, l'amplitude de probabilité de l'événement est donnée par la somme des amplitudes de probabilité correspondantes à chaque voie.

Soit $K_i(b,a)$ l'amplitude de probabilité correspondante à la voie (i), il vient que:

$$K(b,a) = \sum_i K_i(b,a) \tag{2.1}$$

Si, en outre, la particule emprunte le point c à l'instant t_c pour aller de a vers b, avec $t_a < t_c < t_b$ un autre principe pourra s'appliquer: L'amplitude de probabilité pour aller de a vers b est le produit de l'amplitude de probabilité d'aller de a vers c par celle d'aller de c vers b.

$$K(b,a)\big|_c = K(b,c)\ K(c,a) \tag{2.2}$$

Normalement, l'utilisation de ces principes et le recours à l'approximation classique qui est une caractéristique de la mécanique quantique, suffiraient à la description "complète" de la nature. Cependant, cette analogie classique n'est pas toujours possible et la description n'est pas aussi bien complète. L'exemple le plus convaincant est celui de la particule avec spin. Le spin n'a pas d'analogue classique et il ne retrouve sa place qu'en théorie quantique relativiste. De ce fait, les développements ultérieurs de l'intégrale de chemin seront pour une mécanique quantique non relativiste et sans spin.

II.3) FORMULATION DE L'INTEGERALE DE CHEMIN

Contrairement à la particule classique qui emprunte des chemins particuliers (chemins classiques) pour aller d'un point a à un point b, la particule quantique prend tous les chemins possibles entre ces deux points. Donc l'amplitude de probabilité d'un tel événement peut s'écrire, d'après le principe de superposition, cité ci dessus comme :

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possibles de a vers b}}} \Phi\,[x(t)] \qquad (2.3)$$

où $\Phi\,[x(t)]$ est l'amplitude de probabilité du chemin x(t) liant a et b.

Postulons, en plus, que la contribution de chaque chemin ait une phase proportionnelle à l'action S(x(t)), qui correspond au chemin x(t).

$$\Phi\,[x(t)] = \text{Const}\,\exp\left[\,(i/\hbar)\, S[x(t)]\,\right] \qquad (2.4a)$$

$$\text{où} \quad S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\, dt \qquad (2.4b)$$

et $L(x,\dot{x},t)$ le lagrangien du système (La constante de normalisation de l'amplitude étant convenablement choisie). En vérité, ce choix de $\Phi(x(t))$ et $S(x(t))$ n'est pas arbitraire. Il résulte d'une analogie entre les systèmes quantiques et leurs correspondants classiques. C'est à dire quand $\hbar \longrightarrow 0$, il est aisé de voir que s(x(t)) définie par l'équation (2.4b) devient l'action classique et l'amplitude de probabilité prend la forme classique $K(b,a) = \text{const}\exp(i/h\ S_{cl})$ où $S_{cl} = S(\bar{x})$ est l'action classique, avec $\bar{x}$ le chemin classique de la particule.

En effet, une preuve peut être esquissée en appliquant la méthode de la phase stationnaire, qui consiste en ce qui suit:

L'intégrale de la forme suivante:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[\frac{i}{\lambda} f(t)]$$

se réduit, quand $\lambda \longrightarrow 0$, au facteur dominant suivant:

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi i\lambda}{f''(t_0)}} \quad \exp[\frac{i}{\lambda} f(t_0)]$$

où t_0 vérifie l'équation $f'(t)=0$.

Dans notre cas la méthode nécessite quelques modifications dues au fait que $S(x(t))$ est considerée comme étant une fonctionelle de $x(t)$.

Alors l'application de cette formule deviendrait

$$\bar{h} \longrightarrow 0 , K(b,a) \quad C \exp[\frac{i}{\bar{h}} S(\bar{x}(t))]$$

où $\bar{x}(t)$ est solution de $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$, donc de l'équation d'Euler-Lagrange(chemin classique), et C un facteur dependant de la dérivée seconde de $S(x(t)$ (méthode WKB).

Notons enfin, que jusqu'ici nous n'avons pas explicité ce que signifie "sommation sur tous les chemins possibles". Ce que nous allons tenter de faire maintenant.

II.4) LA SOMME SUR TOUS LES CHEMINS:

Nous subdivisons d'abord l'intervalle de temps (t_b-t_a) en N intervalles $t_j-t_{j-1} = \varepsilon$; $t_b-t_a= N\varepsilon$, avec $t_0 = t_a$ et $t_N= t_b$.

De cette manière, chaque chemin peut être défini discrètement par une séquence de points (x_0=a, x_1, ... x_{N-1}, x_N) qui, à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, deviendra le chemin continu x(t). Ainsi, l'amplitude du chemin x(t) sera une fonction de la séquence de points et s'écrira : $\Phi(x_0, \ldots\ldots, x_N)$ qui, à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, dépendera essentiellement du chemin continu x(t).

Maintenant, en appliquant le principe donné par l'équation (2.2), il vient que:

$$\Phi(x_0, \ldots\ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{N} \Phi(x_j, x_{j-1}) \qquad (2.5)$$

où $\Phi(x_j, x_{j-1})$ est l'amplitude de probabilité de la partie du chemin limitée par les points x_j et x_{j-1}, qu'on définera par la suite.

Alors, la somme sur tous les chemins est obtenue, en intégrant sur tous les points (x_0, x_1, ... x_{N-1}, x_N), les points finaux a et b étant fixés.

Ce qui donne pour l'amplitude l'écriture grossière suivante:

$$K(b,a) \simeq \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \Phi(x_j, x_{j-1}) \qquad (2.6)$$

En prenant la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ de cette expression, on aura pris en compte tous les points du chemin et le résultat s'écrira correctement, comme:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \Phi(x_j, x_{j-1}) \qquad (2.7)$$

où $$\Phi(x_j,x_{j-1}) = \frac{1}{A}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x_j,x_{j-1})\right] \qquad (2.8)$$

avec A la constante de normalisation de l'amplitude et $S(x_j,x_{j-1})$ l'action entre les instants t_j et t_{j-1}.

Nous exigerons de plus à $S(x_j,x_{j-1})$ d'être une action classiqu

$$S(x_j,x_{j-1}) = \text{Mini}\int_{t_{j-1}}^{t_j} L(x,\dot{x},t)\,dt \qquad (2.9)$$

Ce qui donne finalement:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \prod_{j=1}^{N-1}dx_j \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{A}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x_j,x_{j-1})\right] \qquad (2.10$$

où $S(x_j,x_{j-1})$ est donnée par l'équation (2.9).

Formellement l'équation (2.10) s'écrira:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int_{(x_a,t_a)}^{(x_b,t_b)} \mathcal{D}x(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\,dt\right] \qquad (2.10'$$

L'expression de $S(x_j,x_{j-1})$ définie par l'équation (2.9) n'est pas facile à calculer pour ε arbitraire. Toutefois, une approximation peut être faite sur $S(x_j,x_{j-1})$ qui consiste à ne retenir que le premier ordre en ε. Elle découle du fait qu'une erreur d'ordr supérieur à un en ε, ie $\varepsilon^{1+\eta}$ dans $S(x_j,x_{j-1})$, ne contribuera pa dans le calcul de l'expression (2.10). L'erreur s'accumelera en une erreur $\varepsilon^{1+\eta}(1/\varepsilon)$ qui s'annule à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, où $(1/\varepsilon)$

désigne le nombre de facteurs dans l'expression (2.10).

Dans le cas d'un lagrangien quadratique en $\dot{x}$, une bonne approximation de $S(x_j,x_{j-1})$ est donnée par:

$$S(x_j,x_{j-1}) = \varepsilon\, L\left(\frac{x_j+x_{j-1}}{2}, \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon}, \frac{t_j+t_{j-1}}{2} \right) \qquad (2.11)$$

où l'on voit déjà apparaitre ce qu'on appelle le principe du mid-point (voir section (7)).

Pour un lagrangien indépendant du temps et ne contenant pas de terme linéaire en $\dot{x}$, l'expression (11) pourra se réduire à

$$S(x_j,x_{j-1}) = \varepsilon\, L\left(x_j, \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon}\right) \qquad (2.12)$$

c'est le cas, par exemple, d'une particule soumise au potentiel scalaire $V(x)$.

$$S(x_j,x_{j-1}) = \frac{m}{2}\, \frac{(x_j-x_{j-1})^2}{\varepsilon} - \varepsilon\, V(x_j) \qquad (2.13)$$

Notons, pour terminer cette section que de l'équation (2.7) il découle une propriété interessante de l'amplitude:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int dx_c\, K(x_b,t_b;x_c,t_c)\, K(x_c,t_c;x_a,t_a) \qquad (2.14)$$

pour $t_a < t_c < t_b$, qui indique que les évenements ont lieu successivement dans le temps.

En effet, choisissons dans la subdivision $t_0,t_1,\dots,t_k,\dots,t_N$, un instant t_k qui soit entre t_0 et t_N mais suffisemment loin d'eux pour que les durées t_k-t_0 et t_N-t_k puissent être mesurables.

C'est à dire $t_0,\dots,t_k,\dots,t_{k+1}$

où k et l tendent tous les deux vers l'infini.

Alors, il vient

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (k,l \to \infty)}} \int \prod_{j=1}^{k-1} dx_j \prod_{j=1}^{k} \Phi(x_j,x_{j-1})\ dx_k \prod_{j=k+1}^{k+l-1} dx_j \prod_{j=k+1}^{k+l} \Phi(x_j,x_{j-1})$$

et donc

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int dx_c\ K(x_b,t_b;x_c,t_c)\ K(x_c,t_c;x_a,t_a)$$

(ou l'on a pose $t_k=t_c$)

cette relation reste valable seulement pour les systèmes ayant une action qui verifie la relation de localité:

$S(b,a) = S(b,c) + S(c,b)$

II.5) FONCTION D'ONDE

On a vu précédemment que $k(x_b,t_b,x_a,t_a)$ représente l'amplitude de probabilité pour que la particule aille de x_a à l'instant t_a vers x_bà l'instant t_b, où (x_a,t_a) et (x_b,t_b) désignent respectivement le passé et le futur de l'événement.

Oubliant son passé (x_a,t_a), sachant qu'il est quelque par antérieurement, cette amplitude de probabilité pourrai alors exprimer une amplitude de probabilité de présence au point x_b à l'instant t_b, qu'on appelle généralement la fonction d'onde de la particule.

$K(x_b,t_b,\ldots)= \Psi(x_b,t_b)$.

Les points signifient que le passé est sans importance.

Ainsi définie, il est aisé de voir que cette f.d'onde vérifie l'équation intégrale suivante:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t,x_0,t_0)\ \psi(x_0,t_0)\ dx_0 \qquad (2.15)$$

où $K(x,t,x_0,t_0)$ est l'amplitude de probabilité d'aller de (x_0,t_0) vers (x,t) dite souvent propagateur de la particule.
Pour obtenir l'équation (2.15) on a qu'à poser dans l'équation (2.14)

$K(x,t,..)= \psi\ (x,t)$ et $K(x_0,t_0,....)= \psi\ (x_0,t_0)$, les points désignent un passé antérieur à (x_0, t_0).

L'équation (2.15) signifie que connaissant la fonction d'onde à l'instant t_0, il est possible de déterminer son futur à l'instant $t>t_0$. Tout son passé antérieur à t_0 est contenu dans la fonction d'onde initiale $\psi\ (x_0,t_0)$.

Prenant la limite $t \longrightarrow t_0$ dans l'équation (2.15); il vient:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \to t_0} K(x,t,x_0,t_0)\ \psi(x_0,t_0)\ dx_0$$

qui montre que $K(x,t;x_0,t_0)$ vérifie la propriété suivante dite "condition de normalisation".

$$\lim_{t \to t_0} K(x,t,x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \qquad (2.16)$$

II.6) EQUATION DE SCHRÖDINGER

Dans cette section, nous exposerons le cas d'une particule soumise au potentiel scalaire $V(x)$ en utilisa l'expression (2.13) pour $S(x_j, x_{j-1})$. Par contre, pour le cas d'u potentiel vecteur, l'introduction du principe du mid-point est nécessaire (voir section (7)).

Pour une durée $t-t_0 = \varepsilon \longrightarrow 0$, l'équation (2.15) et l'expressio du propagateur nous laissent écrire:

$$\psi(x, t_0+\varepsilon) = \int \frac{1}{A} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon} - \varepsilon V(x) \right] \right] \psi(x_0, t_0)\, dx_0$$

posant $x-x_0 = \eta$, $t_0=t$, il vient

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \int d\eta \frac{1}{A} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{\eta^2}{\varepsilon} \right] \right] \exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar} \right] \psi(x-\eta, t)$$

La première exponentielle varie rapidement sauf peut être au voisinage de $\eta \sim 0$ tel que η soit de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. Sachant que les autres facteurs sont lentement variable avec η (continuité de la fonction d'onde $\psi(x(t))$), il vient que les seuls chemin qui contribuent dans l'intégrale de chemin sont pour lesquels on $\Delta x_j \simeq \sqrt{\varepsilon}$ qui montre le caractère Brownien du mouvement quantique (discontinuité de la vitesse $\frac{\Delta x_j}{\varepsilon}$).

Développons $\psi(x-\eta, t)$ en série de Taylor à l'ordre 2 en η donc à l'ordre 1 en ε puis intégrons sur η et développons $\psi(x, t+\varepsilon)$ et $\exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar} \right]$ a l'ordre 1 en ε, on en déduit facilemen l'équation de Schrödinger pour $\psi(x,t)$, après avoir identifié A à:

$$A = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}$$

$$i\bar{h}\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\ \psi \qquad (2.17)$$

$$\text{ou} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^{2}}{2m} + \hat{V}(x) \qquad \text{et} \qquad p = -\,i\,\bar{h}\ \frac{\partial}{\partial x}$$

Une généralisation au potentiel dépendant du temps $V(x,t)$ est possible donnant un résultat analogue à l'équation (2.17). Sauf peut être qu'il faudrait utiliser la discrétisation $\frac{t_j + t_{j-1}}{2}$ pour l'axe des temps.

Montrons maintenant que le propagateur peut être considéré comme fonction de Green de l'équation de Schrödinger.

Il a été défini pour $t_b > t_a$, comme fonction d'onde au point (x_b, t_b) alors on peut affirmer qu'il satisfait l'équation de Schrödinger (2.17).

$$i\bar{h}\ \frac{\partial K}{\partial t_b} - H_b K = 0 \qquad \text{pour} \quad t_b > t_a$$

En outre, imposons la condition $k(x_b, t_b, x_a, t_a) = 0$, $t_b < t_a$ qui exprime le fait que le propagateur ne propage pas les fonctions d'onde vers le passé. Ce qui est conforme à une théorie non relativiste.

Il convient de poser alors

$$\bar{K}(x_b, t_b ; x_a , t_a) = \theta(t_b - t_a)\ K(x_b, t_b ; x_a , t_a)$$

Et on montre facilement, en utilisant la proprieté (2.16) que $\bar{K}$ satisfait l'equation de Schrödinger suivante.

$$i\bar{h}\ \frac{\partial \bar{K}}{\partial t_b} - H\ \bar{K} = i\bar{h}\ \delta(t_b - t_a)\ \delta(x_b - x_a) \qquad (2.18)$$

Pour un hamiltonien indépendant du temps, les fonctions d'onde solution de l'équation de Schrödinger, ont la forme simple:

$\exp(-\frac{iEt}{\hbar})\phi(x)$ où les $\phi(x)$ vérifient l'équation aux valeurs propres $H\phi = E\phi$ et constituant ainsi un système orthogonal fermé pour l'espace de Hilbert "espace des fonctions d'onde".

Développons alors la fonction d'onde sur cette base et comparons l'expression obtenue avec l'équation (2.15), on obtiendra la propriété suivante:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \begin{cases} \displaystyle\sum\!\!\!\!\!\!\int \phi(x_b)\ \phi^*(x_a)\ \exp\left[-\frac{iE}{\hbar}(t_b-t_a)\right] & \text{pour } t_b > t_a \\ 0 & \text{pour } t_b < t_a \end{cases}$$

(2.19)

qui exprime le développement du propagateur en fonctions d'onde

le symbole $\sum\!\!\!\!\!\!\int$ désigne une sommation sur les états discrets et continus.

Les développements effectués jusqu'ici, sont valables pour des systèmes à une dimension. Une généralisation à une dimension quelconque k est possible, en remplacant $x = (x^1,\ldots\ldots,x^k)$ et $A = (\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m})^{k/2}$

Dans le cas de d particules on aura:

$x = (x_1^1,\ldots\ldots,x_1^k,\ldots\ldots,x_d^1,\ldots\ldots,x_d^k)$

et $A = \left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m_1}\right)^{k/2} \left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m_2}\right)^{k/2} \ldots\ldots\ldots \left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m_d}\right)^{k/2}$

Une formulation de l'intégrale de chemin en langage d'opérateurs équivalente à celle d'en dessus est aussi possible, partant de l'equation de Schrödinger et utilisant l'approximation suivante comme formule de base.

$$\exp\left[-\frac{i\epsilon}{\hbar}(T+V)\right] = \exp\left[-\frac{i\epsilon}{\hbar}T\right]\exp\left[-\frac{i\epsilon}{\hbar}V\right] + O(\epsilon^2)$$

Cette approximation est equivalente a l'hypothèse (2.9).

VII) PRINCIPE DU MID POINT

Nous avons montré dans la section (II.6). qu'avec l'expression (2.12) de $S(x_j,x_{j-1})$ il était possible de retrouver l'équation de Schrödinger pour une particule soumise à un potentiel scalaire $V(x)$. Par contre, dans le cas d'un potentiel vecteur l'approximation n'est plus valable. La situation n'est pas si simple car il n'est pas clair comment évaluer discrètement, le terme $\int dt\ A\dot{x}$ présent dans l'action, afin de retrouver l'équation de Schrödinger suivante.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A\right)^2\psi + V\psi \qquad (2.20)$$

Toutefois, il s'avére que l'expression (2.11) de $S(x_j,x_{j-1})$ est plus satisfaisante, du fait qu'elle renferme en elle ce qu'on appelle le principe du mid-point. Nous n'allons pas démontrer l'équation (2.20) à partir de cette prescription, mais juste la justifier. La difficulté reside dans le fait suivant:

Utiliser l'égalite suivante dans l'intégrale de chemin

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, A\dot{x} = \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) A(x_j) \quad \left(\text{ou} \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) A(x_{j-1}) \right) \tag{2.21}$$

n'est pas correct, parceque le mouvement de la particule, en formulation intégrale de chemin, est un mouvement Brownien. C'est à dire, les chemins qui contribuent sont ceux pour lesquels on a: $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \sim \sqrt{\varepsilon}$

Ainsi la formule correcte à appliquer sera:

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, A\dot{x} = \int_{x_a}^{x_b} dx\, A - (1/2 - \theta) \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{dA}{dx} \tag{2.22}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$

En effet : Soit $B(x)$ une fonction telle que $\frac{dB}{dx} = A(x)$

on a: $\int_{x_a}^{x_b} dx\, A = B(x_b) - B(x_a)$

Ecrivons maintenant $[\, B(x_b) - B(x_a) \,]$ comme suit :

$$B(x_b) - B(x_a) = \sum_{j=1}^{N} [\, B(x_j) - B(x_{j-1}) \,]$$

Développons la différence $[\, B(x_j) - B(x_{j-1}) \,]$ en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en Δx_j donc a l'ordre 1 en ε , il vient

$$B(x_j) - B(x_{j-1}) = A(x_j^{\theta})(x_j - x_{j-1}) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \frac{dA}{dx}(x_j^{\theta})(x_j - x_{j-1})^2 + O(\Delta x_j^3)$$

Les ordres supérieurs a 2 sont négligés puisqu'ils donnent une contribution nulle en intégrale de chemin.

Avec $x_j^{\theta} = x_{j-1} + \theta(x_j - x_{j-1})$ ou $0 \leq \theta \leq 1$

Sachant que $(x_j - x_{j-1})^2 \simeq \varepsilon$, on aura alors

$$B(x_b) - B(x_a) = \sum_{j=1}^{N} A(x_j^{\theta})(x_j - x_{j-1}) + (\frac{1}{2} - \theta) \sum_{j=1}^{N} \frac{dA}{dx}(x_j^{\theta})\varepsilon$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$

ce qui justifie l'équation(2.22).

pour $\theta = 1/2$ donc $x_j^{\theta} = \tilde{x}_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$

On a :

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\, A\dot{x} = \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) A(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}) \qquad (2.23)$$

qui est le résultat correct justifiant ainsi le principe du mid-point.

Pour clore cette section, notons que l'utilisation de l'expression (2.23) donnerait l'Hamiltonien $\frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}\hat{A})^2 + \hat{V}$ dans l'équation de Schrödinger, alors que l'expression (2.21) donnerait l'hamiltonien $\frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - \frac{2e}{c}\hat{A}\hat{p} + \frac{e^2}{c^2}\hat{A}^2) + \hat{V}$.

Les deux hamiltoniens sont différents par le terme $\frac{1}{2m}(- \frac{e}{c}\hat{p}\hat{A}$ qui n'est pas toujours nul.

Notons enfin, que dans le cas du potentiel scalaire la prescription du mid-point n'est pas nécessaire, puisque ses apports sont de l'ordre de ε^{1+q} $(q>0)$ par rapport à celles du pré-point$(\theta=0)$ et post-point $(\theta=1)$. Dans ce cas on dit que ces trois prescriptions de discrètisation sont équivalentes.

VIII INTEGRALE DE CHEMIN DANS L'ESPACE DES PHASES

Dans cette section, nous développerons l'intégrale de chemin dans l'espace des phases à partir du formalisme usuel d'opérateurs de la mécanique quantique. En considérant tout d'abord le propagateur, comme étant la représentation position de l'opérateur d'évolution $\hat{\mathcal{U}}(t;t_0)$, puis approximant ce dernier jusqu'à l'ordre 1 en ε. L'hamiltonien correspondant à $\hat{\mathcal{U}}(t;t_0)$ est celui d'un électron soumis à un champ électromagnétique exprimé par:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}\hat{A})^2 + \hat{V} \tag{2.24}$$

Dans cette expression le couplage classique pA est remplacé par $1/2\ (\hat{p}\hat{A}+\hat{A}\hat{p})$ dans sa version quantique. Il s'ensuit qu'il lui correspond la regle de correspondance de Weyl. Dans ce qui suit, il est montré qu'à cette regle de correspondance, est associée la prescription du mid-point dans l'espace des phases.

- Nous avons vu que le propagateur satisfait les équations (2.16) et (2.18). Donc il est possible d'en déduire leurs analogues en formalisme d'opérateurs, comme suit :

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t_b} - \hat{H}\right)\hat{\mathcal{U}}(t_b;t_a) = i\hbar\,\delta(t_b-t_a)\,\P \tag{2.25'}$$

$$\hat{\mathcal{U}}(t_b;t_a) = \P \tag{2.25''}$$

avec $K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \langle x_b|\ \hat{\mathcal{U}}(t_b;t_a)|x_a\rangle$ (2.26)

où $|x\ \rangle$ est la représentation position. Elle est constituée des vecteurs propres de l'opérateur position $\hat{x}\ |\ x\rangle = x\ |\ x\rangle$.

Dans cette représentation, l'opérateur impulsion $\hat{p}$ est representé par $-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}$.

Ainsi alors, il est aisé de voir que les relations de commutation qui regissent la dynamique sont :

$$[\hat{x},\hat{x}] = [\hat{p},\hat{p}] = 0 \; ; \qquad [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \tag{2.27}$$

Parallèlement à cette représentation, il existe aussi la représentation dite d'impulsion $|p\rangle$, vecteurs propres de l'operateur d'impulsion $\hat{p}\,|p\rangle = p|p\rangle$.

La position est representée dans cette représentation par: $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}$.

Les relations d'orthonormalisation, de fermeture et de passage d'une représentation à l'autre sont données par :

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')\; ; \qquad \langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \tag{2.27'}$$

$$\int dx\; |x\rangle\langle x| = 1 \quad ; \int dp\; |p\rangle\langle p| \tag{2.27''}$$

$$\langle x|p\rangle = (1/\sqrt{2\pi\hbar}\,)\, \exp[(i/\hbar)px] \tag{2.27'''}$$

Maintenant, subdivisons l'intervalle de temps t_b-t_a en N intervalles de lonqueur ε c'est à dire $t_b-t_a = N\,\varepsilon$. L'utilisation de la propriété du semi-groupe de $\hat{\mathcal{U}}$ suivante (l'équivalente de l'équation (2.14)).

$$\mathcal{U}(t_b;t_a) = \mathcal{U}(t_b;t_c)\,\mathcal{U}(t_c;t_a) \quad \text{pour } t_a < t_c < t_b \tag{2.28}$$

nous laisse écrire l'expression évidente suivante:

$$\hat{\mathcal{U}}(t_b;t_a) = \prod_{j=1}^{N} \hat{\mathcal{U}}(t_j;t_{j-1}) \tag{2.29}$$

avec $t_N = t_b$, $t_0 = t_a$; $t_{j-1} < t_j < t_{j+1}$ pour $j=1,\ldots,N-1$

(on sous-entend ici que le développement du produit $\prod$ soit ordonné suivant les temps décroissants)

Introduisons alors la relation de fermeture correspondante à chaque instant t_j, $j=1,\ldots\ldots,N-1$

$$x_j = x(t_j) \qquad \int dx_j \, |x_j\rangle\langle x_j| = 1 \tag{2.30}$$

Il est aisement obtenu de l'équation (2.26) que:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \langle x_j | \mathcal{U}(t_j;t_{j-1}) | x_{j-1} \rangle \tag{2.31}$$

En tendant cette procedure a l'infini ($N \longrightarrow \infty$); il serait possible d'approximer l'operateur infinitesimal par

$$\hat{\mathcal{U}}(t_j;t_{j-1}) \simeq 1 - (i\varepsilon/\hbar)\,\hat{H} \qquad (N \longrightarrow \infty) \tag{2.32}$$

où $\hat{H}$ désigne l'hamiltonien du système éq.(2.24).

Reportant l'équation (2.32) dans (2.31), on aboutit à l'expression suivante du propagateur.

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \langle x_j | 1 - (i\varepsilon/\hbar)\,\hat{H} | x_{j-1} \rangle \tag{2.33}$$

En introduisant, là encore, la relation de fermeture définie sur les p_j (les p_j seront définies par la suite)

$$\int dp_j \, |p_j\rangle\langle p_j| = 1 \tag{2.34}$$

Il vient alors:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \langle x_j | p_j \rangle\langle p_j | 1-(i\varepsilon/\hbar)\,\hat{H} | x_{j-1} \rangle \tag{2.35}$$

Substituant maintenant $\hat{H}$ par son expression (2.24), on aura:

$$\langle p_j | 1-(i\varepsilon/\hbar)\, H\, | x_{j-1} \rangle = \exp\left[(-i\varepsilon/\hbar)\, \mathcal{H}(j,j-1)\right] \langle p_j | x_{j-1} \rangle \qquad (2.36)$$

ou $\mathcal{H}(j,j-1) = \dfrac{1}{2m}\left(p_j^2 - \dfrac{2e}{c} p_j \tilde{A}_j + \dfrac{e^2}{c^2} A_j^2\right) + V_j$

avec $A_j = (A_j + A_{j-1}) / 2 = A(\tilde{x}_j)$ (à l'ordre 1 en ε)

et $x_j = (x_j + x_{j-1}) / 2$

Les termes A_j, A_j^2 et V_j sont obtenus dans l'équation (2.36) avant l'introduction de la relation de fermeture (2.34).

Finalement, on obtient l'écriture de propagateur dans l'espace des phases en utilisant la relation (2.27''').

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_j(x_j - x_{j-1}) - \varepsilon\mathcal{H}(j,j-1)\right]\right] \qquad (2.37)$$

ou $\mathcal{H}(j,j-1) = \dfrac{1}{2m}\left(p_j^2 - \dfrac{2e}{c} p_j \tilde{A}_j + \dfrac{e^2}{c^2} A_j^2\right) + V_j$

et $p_j(x_j - x_{j-1}) - \varepsilon\mathcal{H}(j,j-1)$ est la représentation de l'action $S(j,j-1)$ exprimée en fonction des variablesde l'espace des phases (x,p). Formellement l'équation(2.37) s'écrira comme suit

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int \mathcal{D}x\, \mathcal{D}p\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \left[p\dot{x} - \mathcal{H}\right]\right] \qquad (2.38)$$

Elle représente l'intégrale de chemin du propagateur définie dans l'espace des phases. La somme sur tous les chemins possibles est étendue aux trajectoires de cet espace des phases (x,p). Comment sont définies ces trajectoires?

La particule se meut du point x_{j-1} au point x_j durant le temps (t_{j-1}, t_j), pendant que l'impulsion reste constante, égale à p_j. L'intervalle de temps suivant, elle change subitement de valeur et devient $p_{j+1} \neq p_j$.
Donc il y a continuité sur les variables x et discontinuités sur les variables p (mouvement Brownien). On reconnait aisement ici le "principe d'incertitude de Heisenberg".

II.9) APPROXIMATION WKB

Parfois dans des conditions physiques spécifiques, une approche semi-classique pourrait être satisfaisante à la description quantique d'une particule. Dans ce cas le comportement classique serait très dominant. C'est à dire le paquet d'onde représentant la particule serait très restreint autour de son centre de gravité (position moyenne) et ne s'étalant pas au cours du temps de manière que l'évolution soit quasi ment- classique.
Dans la version intégrale de chemin, cette situation se rencontre quand $\hbar \longrightarrow 0$ et les chemins sur lesquels on somme, sont proches du chemin classique $\bar{x}$ à l'ordre $O(\sqrt{\hbar})$. De la sorte, en développant l'action au voisinage du chemin classique, on ne tiendra compte que de la variation seconde de l'action. Les ordres supérieurs à deux seront négligés.
Soit $\bar{x}$ le chemin classique, développons l'action au voisinage de $\bar{x}$ tel que,

$x(t) = \bar{x} + \sqrt{\hbar}\; y(t)$, on obtient:

$$S[x(t)] = S[\bar{x}(t)] + \sqrt{\bar{h}}\ \frac{\delta S}{\delta x}\Big|_{\bar{x}} y(t) + (1/2)\ \bar{h}\ \frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{\bar{x}} y^2(t) \qquad (2.39)$$

Du fait que x soit l'action classique et $\hbar$ tende vers zéro. l'action prend la forme suivante:

$$S[x(t)] = S_{Classique} + (1/2)\ \bar{h}\ \frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{\bar{x}}\ y^2(t) \qquad (2.40)$$

De telle sorte que le propagateur s'écrira comme.

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \exp\left[(i/\bar{h})\ S_{Classique}\right]\int_{(y=0,t_a)}^{(y=0,t_b)} \mathcal{D}y\ \exp\left[(i/2)\ \frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|\ y^2(t)\right] \qquad (2.41)$$

où $\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{\bar{x}}\ y^2(t)$ est une action quadratique en y et $\dot{y}$. donc qui peut être exactement évaluée. Une étude se basant sur le calcul variationnel montre que:

$$\int_{(y=0,t_a)}^{(y=0,t_b)} \mathcal{D}y\ \exp\left[(i/2)\ \frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|\ y^2(t)\right] = \sqrt{\frac{i}{2\pi\bar{h}}\ \frac{\partial^2\ S_{classique}}{\partial x_b \partial x_a}} \qquad (2.42)$$

Ainsi,on obtiendra la formule de "Van-Vleck-Pauli"

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \sqrt{\frac{i}{2\pi\bar{h}}\ \frac{\partial^2\ S_{classique}}{\partial x_b \partial x_a}}\ \exp\left[(i/\bar{h})\ S_{Classique}\right] \qquad (2.43)$$

Notons que pour les systèmes quadratiques. cette formule deviendra un résultat exact. puisqu'on aura automatiquement $\delta^3 S, \delta^4 S, \ldots\ldots\ldots, \delta^N S$ nulles pour ces systèmes. Et que cette approximation resterait valable, au moins, pour un lagrangien de la forme:

$$L(x,\dot{x}) = (m/2)\,\dot{x}^2 + (e/c)\dot{x}\,A - V(x) \qquad (2.44)$$

II.9) INTEGRALE DE CHEMIN EN COORDONNEES POLAIRES

Dans le cas d'un potentiel central V(r), le systèm physique possède symétrie dite sphérique c'est à dire qu'il est invariant par les rotations spatiales. Pour traiter ce système en mécanique quantique, il est généralement admis de convertir le problème à des coordonnées adéquates admettant cette symétrie; ces coordonnées sont les coordonnées polaires. La formulation de l'intégrale de chemin en coordonnées polaires n'est pas évidente. Et utiliser l'approximation polygonale (2.11) pour ces coordonnées n'est pas correct. Le moyen le plus sûr d'évaluer cette intégrale, c'est d'écrire le propagateur en coordonnées cartésiennes puis introduire les coordonnées polaires par la transformation:

$$x= r\sin\theta\cos\phi;\quad y=r\sin\theta\sin\phi;\quad z= r\cos\theta \qquad (2.45)$$

Considérons une particule de masse m soumise au potentiel central V(r); son propagateur s'écrit comme:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \lim_{N\to\infty}\int \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{3N/2}\prod_{j=1}^{N-1}dx_j\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(x_j-x_{j-1})^2 -\varepsilon V(\tilde{r}_j)\right]\right] \qquad (2.46)$$

avec $r_j = \sqrt{x_j^2}$; $\tilde{r}_j = (r_j + r_{j-1})/2$

Introduisons les coordonnées polaires définies par (2.45) pour chaque x_j, $j=1,\ldots,N-1$; (r_j, θ_j, ϕ_j)

$x_j = r_j e_j$ ou $e_j = (\sin\theta_j\cos\phi_j ; \sin\theta_j\sin\phi_j ; \cos\theta_j)$

Il vient en premier lieu :

$$(x_j - x_{j-1})^2 = r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}(e_j, e_{j-1}) \tag{2.47}$$

où il est facile de voir que:

$$(e_j, e_{j-1}) = \cos\theta_{j,j-1} = \cos\theta_j\cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j\sin\theta_{j-1}\cos(\phi_j - \phi_{j-1})$$

avec $\theta_{j,j-1} = (e_j \widehat{,} e_{j-1})$

Après ces changements, on aura :

$$\exp\left[\frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(x_j - x_{j-1})^2 - \varepsilon V(\tilde{r}_j)\right]\right] =$$

$$\exp\left[\frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2)^2 - \varepsilon V(\tilde{r}_j)\right]\right]\exp\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{m}{i\hbar\varepsilon} r_j r_{j-1}\cos\theta_{j,j-1}\right]\right] \tag{2.47'}$$

$$\text{et } dx_j = r_j^2 \sin\theta_j \, dr_j \, d\theta_j \, d\phi_j \tag{2.47''}$$

Afin de séparer la partie radiale de la partie angulaire, utilisons la formule d'expansion suivante:

$$\exp\left[Z\cos\theta_{j,j-1}\right] = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2Z}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta_j, \phi_j)\, Y^*_{l,m}(\theta_{j-1}, \phi_{j-1})\, I_{l+1/2}(Z) \tag{2.48}$$

où $Y_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques et I_k est la fonction de Bessel modifiée.

Insérons les équations (2.47'),(2.47'') et (48) dans l'équation (2.46) et utilisons la relation d'orthonormalisation suivante:

$$\int_0^{\pi} d\theta_j \int_0^{2\pi} d\phi_j \, Y_{l,m}(\theta_j, \phi_j)\, Y^*_{l',m'}(\theta_j, \phi_j)\sin\theta_j = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \quad ; \; j=1,\ldots,N-1$$

On obtient ainsi la forme du propagateur (2.46) séparée e partie angulaire et l'autre radiale:

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big[K_l(r_b,t_b;r_a,t_a)\; Y_{l,m}(\theta_b,\phi_b)\; Y^*_{l,m}(\theta_a,\phi_a)\Big] \tag{2.49}$$

avec K_l le propagateur radial défini par:

$$K_l(r_b,t_b;r_a,t_a) = \lim_{N\to\infty} (4\pi)^N \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{3N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j \prod_{j=1}^{N} R_l(j,j-1) \tag{2.50}$$

Où R_l est donné par l'expression suivante:

$$R_l(j,j-1) = \left(\frac{i\pi\varepsilon\hbar}{2mr_j r_{j-1}}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)^2 - \varepsilon V(\tilde{r}_j)\right]\right]$$

$$I_{l+1/2}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}r_j r_{j-1}\right) \tag{2.51}$$

L'intégrale fonctionnelle (2.50) peut être simplifiée en utilisant le développement asymptotique suivant, sachant qu'à la limite on a $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$I_{l+1/2}(z) \underset{z>>1}{\simeq} (1/2\pi z)^{1/2} \exp\left[z - \frac{l(l+1)}{2z} + O(1/z^2)\right] \tag{2.52}$$

avec $z = \dfrac{m}{i\hbar\varepsilon} r_j r_{j-1}$

Ce qui donne immédiatement apres simplification des calculs:

$$K_l(r_b,t_b;r_a,t_a) = \frac{1}{r_a r_b} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$
$$\prod_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(r_j - r_{j-1})^2 - \varepsilon\left(\tilde{V}(r_j) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr_j r_{j-1}}\right)\right]\right] \tag{2.53}$$

qui représente une intégrale de chemin à une dimension d'un particule soumise au potentiel central V(r) plus le potentiel centrifuge $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$.

Notons que l'intégrale de chemin (2.53) s'intégre sur les chemins r(t) tels que r≥0.

Remarque :

La formule asymptotique (2.52) n'est correcte que si Re(Z)>0. Dans notre cas cette formule n'est pas applicable puisque $Z=\frac{m}{i\hbar\epsilon} r_j r_{j-1}$ ne vérifie pas Re(Z)>0. Alors il est utile de prolonger la masse par une partie imaginaire positive infinitesimale ($m \longrightarrow m+i\eta$; $\eta > 0$ tendant vers zéro), de telle manière que Z satisfasse la condition Re(Z)>0.

Une autre manière de le faire, c'est de prolonger l'axe des temps dans le plan complexe à un temps imaginaire $t \longrightarrow -it$ (rotation de Wick). Cette rotation fait passer d'une intégrale de Feynman à une intégrale de Wiener. Ainsi le Z devient réel vérifiant Re(Z)>0.

REFERENCES :

[1] Le cours de physique de Feynman Tome 3 - Mecanique quantique - Feynman / Leighton / Sands - inter-éditions 1979.

[2] L. Landan et E.Litchitz - Mécanique quantique Tome 3. Editions Mir Moscou. 3ème édition 1975 6 Reimpression 1988.

[3] P.A.M. Dirac. The principales of.quantum mechanics.Fourt Edition. (Revise) 1986; Clarendon-press- Oxford.

[4] D. Blokhintsev. Principes de mécanique quantique Editions MIR-Moscou (1981).

[5] R.P. Feynman, Rev.Mod.Physique. 20. 367. (1948)
R.Feynman - A.Hibbs, Quantum Mechanics and path integrals (Mc Graw - Hill - New York 1965).

[6] L.S Schulman. Techniques and applications of path-integration (John Wiley New-York 1981).

[7] F. Langouche. D. Rockaerts. E. Tirapegui - Functionnal integration an d semi- classical expansions. D.Reidel publishing company 1982).

[8] D.C.Khandekar - SV.Lawande - Phys.Reports- 137 N° 2 Et 3 (1986) 115 - 229.

[9] L. Chetouani - L. Guechi - T.F. Hammann phys.Rev.A. Vol.40. N° 3. 1157.- 1164. (1989).

[10] W. Langguth-A. Inomata J. Math.Phys. Vol. 20 N° 3 (1979).

[11] Bielefeld encourters in physics and mathematics VII; Path integrals from mev to Mev ed. Gutzwiller et al (Singapore: World scientific). F.Steiner P.335

CHAPITRE III

TRAITEMENT INTEGRALE DE CHEMIN DU POTENTIEL ECRANTE

III.1) INTRODUCTION

Depuis que la procédure dite de reparamétrisation des parcours a été introduite [1], le nombre de potentiels solutionnés par l'approche des intégrales de parcours ne cesse d'augmenter et ceci malgré certaines critiques [2]. Parmi ces potentiels, citons le potentiel de Hulthén qui a trouvé sa solution, récemment, via l'intégration sur le groupe compact SU(2) [3]. Or les groupes non compacts ont aussi leur importance en physique, parmi lesquels on a le groupe SU(1,1), qui est une continuation de SU(2). Le potentiel de Pöschl-Teller modifié et le potentiel coulombien dans un espace courbe sont des exemples de potentiels qui ont pu être traités très récemment par intégration sur le groupe SU(1,1) [4], [5].

Le but de ce chapitre est d'utiliser ce groupe au calcul du propagateur relatif à un potentiel effectif écranté. Sa solution par la méthode dite de factorisation existe depuis longtemps [6]. Il a été aussi analysé dans le cadre de la méthode (WKB) [7]. Ainsi qu'il a été aussi solutionné par l'équation de Schrödinger [8].

Il s'agit d'une combinaison de deux potentiels centraux:

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) = \frac{-(\lambda-\mu)}{e^{\nu r} - 1} + \frac{\mu}{(e^{\nu r} - 1)^2} \qquad (3.1)$$

et λ, μ et ν sont des constantes réelles positives définies par:

$\lambda = \nu Z e^2$, $\mu = \dfrac{\hbar^2 \nu^2 l(l+1)}{2m}$, $\nu > 0$, et Ze la charge du noyau.

Ce potentiel généralise celui de Hulthén dont on sait qu'il a une importance particulière en physique nucléaire [9]. En plus il peut être considéré comme généralisation du potentiel coulombien.

A l'aide d'une transformation spatio-temporelle particulière, il est montré que la fonction de Green du potentiel en question se ramène à la fonction de Green du potentiel modifié de Pöschl-Teller écrite sous sa forme stable, due à la présence des exponentielles (section 2).

Cette fonction de Green est alors déduite de l'intégrale de chemin définie sur la variété SU(1,1), par l'introduction de deux angles d'Euler et une autre transformation spatio-temporelle (troisième angle d'Euler) (section 3). Le spectre ainsi que les fonctions d'onde des états liés sont alors obtenus (section 4). Les fonctions d'ondes des états de diffusion sont aussi trouvées via une autre transformation spatio-temporelle (section 5). Les potentiels de Hulthén et de l'atome d'hydrogène, cas particuliers du problème du potentiel écranté, sont donc traités ici de manière unifiée (section 6).

III.2) LA FONCTION DE GREEN

Le propagateur régissant l'evolution d'un système physique se mouvant dans un potentiel central V(r), est donné habituellement par l'intégrale fonctionnelle de Feynmann suivante:

$$K(r_f,r_i;T) = \int \mathcal{D} r(t) \exp\left[(i/\hbar) \int_0^T \mathcal{L}(r,\dot{r})\, dt \right] \qquad (3.2)$$

ou

$$\mathcal{L}(r,\dot{r}) = (m/2)\, \dot{r}^2 - V(r)$$

est le lagrangien du système (le point (.) désigne la dérivation par rapport à t). Sous sa forme discrète, l'expression (2) est la limite quand $N \longrightarrow \infty$ ($\varepsilon \longrightarrow 0$) de:

$$K(r_f,r_i;I) = \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{3/2} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp\left[(i/\hbar) \sum_{j=1}^{N} S(j,j-1)\right]$$

avec $I = t_f - t_i = N\varepsilon$ où nous avons subdivisé l'intervalle de temps I en N intervalles.

et $S(j,j-1) = (m/2\varepsilon)\Delta r_j^2 - \varepsilon v(\tilde{r}_j)$ est l'action durant l'intervalle de temps $[t_{j-1},t_j]$.

en outre :

$\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$; $\tilde{r}_j = (r_j+r_{j-1})/2$; $r_N = r_f$; $r_0 = r_i$

Conformément à la référence [10], la symétrie sphérique du potentiel incite à un développement en ondes partielles du propagateur (en coordonnees sphériques).

$$K(r_f,r_i;I) = 1/(r_f r_i) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)/4\pi \; P_l(\cos\Theta) \; K_l(r_f,r_i;I) \qquad (3.3)$$

où $\Theta = (r_f \widehat{,} r_i)$ est l'angle entre r_f et r_i.

et

$$K(r_f,r_i;I) = \int \mathcal{D}\, r(t) \exp\left[(i/\hbar) \int_0^T \left((m/2)\, \dot{r}^2 - V_{eff}(r) \right) dt \right]$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp\left[(i/\hbar) \sum_{j=1}^{N} \left((m/2\varepsilon)\,(r_j-r_{j-1})^2 - \varepsilon V_{eff}\left(\frac{r_j+r_{j-1}}{2}\right)\right)\right] \qquad (3.4)$$

est le propagateur radial, relatif au potentiel effectif écranté

(l) que nous nous proposons de calculer.

Jusqu'ici, l'intégrale de chemin (3.4) est mal-définie car le potentiel Veff(r) admet une singularité à l'origine (r=0) qui y introduirait des divergences (chute de la particule sur le centre). Il est donc nécessaire d'éliminer cette singularité pour avoir une intégrale de chemin stable [11]. Dans ce but, il est préférable d'isoler la singularité en effectuant une troncature et alors une redéfinition du propagateur. Il est commode de reparamétriser le chemin par une fonction f(x) appropriée, s'annulant à la singularité telle que $\frac{dt}{ds} = f(x)$. Ainsi la singularité se rejette à l'infini et l'intégrale de chemin devient stable.

La procédure usuelle consiste à substituer un potentiel défini par:

$$V_\eta(r) = \begin{cases} V_{eff}(r) & \text{si } r > \eta \\ V_{eff}(\eta) & \text{si } r \leq \eta \end{cases}$$

au potentiel $V_{eff}(r)$ dans l'équation (3.4).

A ce potentiel $V_\eta(r)$ est associé un propagateur K_l^η pour lequel

$$K_l = \lim_{\eta \to 0} K_l^\eta$$

Maintenant, on est en position de trouver l'expression stable de la fonction de Green relative au potentiel (3.1).

Introduisons d'abord l'énergie E au moyen de la fonction de Green partielle.

$$G_l(r_f, r_i; E) = \lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty K_l^\eta\,(r_f, r_i; l)\, \exp\left[(i/\hbar)\, E.l\right] dl \qquad (3.5)$$

et utilisons, en premier lieu, la transformation spatiale suivante:

$$\begin{cases} r \longrightarrow x;\ r \in \,]0,\infty[\,;\ x \in \,]-\infty,+\infty[\quad \text{definie par} \\ r = (-2/\nu)\ \ln(\mathrm{th}(e^{x}/2)) \end{cases} \tag{3.6}$$

Pour voir ce que deviennent la mesure et l'action, en fonction de la nouvelle variable, nous aurons besoin des dérivées suivantes:

$$\frac{dr}{dx} = (-2/\nu)\ (e^{x}/\mathrm{Sh}(e^{x}))$$

$$\frac{d^2r}{dx^2} = (-2/\nu)\ e^{x}\ [(\mathrm{Sh}(e^{x}) - e^{x}\mathrm{Ch}(e^{x}))/(\mathrm{Sh}^2(e^{x}))]$$

$$\frac{d^3r}{dx^3} = (-2/\nu)e^{x}\ [(\mathrm{Sh}^2(e^{x}) - 3e^{x}\mathrm{Ch}(e^{x})\ \mathrm{Sh}(e^{x}) + e^{2x}\mathrm{Sh}^2(e^{x}) + 2e^{2x})/(\mathrm{Sh}^3(e^{x}))]$$

En substituant la première dérivée dans la mesure, elle devient:

$$\prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j = \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} (2/\nu)(e^{x_j}/\mathrm{Sh}(e^{x_j}))dx_j$$

Sous sa forme symétrique, elle devient:

$$\prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j = (\nu/2)\ [\exp(-x_N-x_0)\ \mathrm{Sh}(e^{x_N})\ \mathrm{Sh}(e^{x_0})]^{1/2}$$

$$\prod_{j=1}^{N} [(2m\ \exp(x_j+x_{j-1})/\ i\pi\nu^2\mathrm{Sh}(e^{x_j})\ \mathrm{Sh}(e^{x_{j-1}})]^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \tag{3.7}$$

L'équation (3.6) peut être écrite sous une forme plus adéquate, en faisant apparaitre ce qu'on appelle généralement " promotor " :

$$G_l(r_f,r_i;E) = \lim_{\eta \to 0} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_l^{\eta}\ (r_f,r_i;T)\ dT \tag{3.6'}$$

ou $\mathcal{P}_l^{\eta}(r_f,r_i;T)$ est le promoteur s'exprimant par une intégrale de chemin, suivant la formule:

$$\mathcal{F}_l^{\eta}(r_f,r_i;l) = \int \mathcal{D}\, r(t) \exp\left[(i/\hbar)\int_0^T ((m/2)\,\dot{r}^2 - V_\eta(r)+E)\,dt\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp\left[(i/\hbar)\sum_{j=1}^{N} A(j,j-1)\right] \qquad (3.8)$$

avec $A(j,j-1) = (m/2\varepsilon)\,(r_j-r_{j-1})^2 - \varepsilon\,[V_\eta\,(\frac{r_j+r_{j-1}}{2})-E\,]$

Lors de la transformation spatiale, l'action $A(j,j-1)$ se transforme en,

$$A(j,j-1) = (m/2\varepsilon)\,(\frac{dr}{dx})^2\Big|_{\tilde{x}_j} \Delta x_j^2 \left[1+ \frac{(\frac{d^3r}{dx^3})\Big|_{\tilde{x}_j}}{(\frac{dr}{dx})\Big|_{\tilde{x}_j}}(\Delta x_j^2/12)\right]$$

$$- \varepsilon\,[V_\eta\,(r(\tilde{x}_j))-E\,]$$

La retenue des développements à l'ordre quatre en Δx_j est due au fait que les chemins qui contribuent dans l'intégrale de chemin, sont pour lesquels on a: $\Delta x_j \simeq \sqrt{\varepsilon}$. L'action étant symétrisée suivant la prescription du mid-point .

En substituant les dérivées par leurs expressions on aura:

$$A(j,j-1) \underset{\eta\to 0}{\simeq} [2m \exp(2\tilde{x}_j)/(\nu\, Sh(e^{\tilde{x}_j}))^2\varepsilon] \left[\Delta x_j^2 + \frac{\Delta x_j^4}{12}\,(1+e^{2\tilde{x}_j} +\right.$$

$$\left.((2 \exp(2\tilde{x}_j)\ /\ Sh^2(e^{\tilde{x}_j})) - 3e^{\tilde{x}_j}(Ch(e^{\tilde{x}_j})\ /\ Sh(e^{\tilde{x}_j}))\right] +$$

$$\varepsilon\left[E + (\lambda - \mu)\,Sh^2(e^{\tilde{x}_j}/2) - \mu\,Sh^4(e^{\tilde{x}_j}/2)\right] \qquad (3.9)$$

avec les notations habituelles:

$\varepsilon = t_j-t_{j-1} = 1/N;\ \Delta x_j = x_j - x_{j-1}\ ;\ \tilde{x}_j = (x_j+x_{j-1})/2$

Le terme cinétique contient une masse variable. Il est possible de le modifier et de rendre la masse constante à l'aide de la transformation temporelle suivante:

$$\frac{dt}{ds'} = (4\ \exp(2x))/(\nu^2\ Sh^2(e^x)) \qquad (3.10)$$

en fait elle n'est rien d'autre que:

$$\frac{dt}{ds'} = \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$$

qui s'écrit sous forme discrète

$$\varepsilon = [(4\sigma_j \exp(x_j + x_{j-1})/\ \nu^2 Sh(e^{x_j})\ Sh(e^{x_{j-1}})] \qquad (3.11)$$

et sous sa forme symétrique, elle devient:

$$\varepsilon \simeq (4\ \sigma_j \exp(2\tilde{x}_j))/(\nu^2\ Sh^2(e^{\tilde{x}_j}))\left[1 + (\Delta x_j^2/4)\ e^{\tilde{x}_j}[(e^{\tilde{x}_j}/Sh^2(e^{\tilde{x}_j})) - (\ Ch(e^{\tilde{x}_j})/Sh(e^{\tilde{x}_j}))]\right] \qquad (3.12)$$

ou

$$\sigma_j = s'_j - s'_{j-1}$$

il est aisé de vérifier que la mesure et l'action deviennent, en y insérant les expressions (3.11) et (3.12), respectivement:

$$\prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1}dr_j = (\nu/2)\ [\exp(-x_N - x_0)\ Sh(e^{x_N})\ Sh(e^{x_0})]^{1/2}$$

$$\prod_{j=1}^{N}\ [(m/2\pi i\hbar\sigma_j]^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1}dx_j \qquad (3.13)$$

et

$$A(j,j-1) \underset{\eta\to 0}{\simeq} (m/2\sigma_j)\ \Delta x_j^2 + (m\Delta x_j^4/24\sigma_j)\ [1 + e^{2\tilde{x}_j} - (\ \exp(2\tilde{x}_j)\ /\ Sh^2(e^{\tilde{x}_j}))] + \sigma_j e^{2\tilde{x}_j}\left[\frac{E/\nu^2}{Sh^2(e^{\tilde{x}_j}/2)} + \frac{(\lambda - E)/\nu^2}{Ch^2(e^{\tilde{x}_j}/2)} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m}\right] \qquad (3.14)$$

Or le terme en (Δx_j^4) peut être estimé et remplacé, suivant la procédure de Schulman-Langhlin, par un potentiel effectif purement quantique comme suit:

$$\langle(\Delta x_j^4)\rangle \simeq \int d(\Delta x_j)(\Delta x_j^4)\ \exp[(im/2\hbar\sigma_j)\Delta x_j^2](m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2} = 3\ (\frac{i\hbar\sigma_j}{m})^2$$

ce qui donne l'estimation suivante pour notre terme en:

$$(m\Delta x_j^4/24\sigma_j)\ [1+e^{2\tilde{x}_j} - (\ \exp(2\tilde{x}_j)\ /\ Sh^2(e^{\tilde{x}_j}))] =$$

$$(-\hbar^2\sigma_j/8m)[1+e^{2\tilde{x}_j} - (\ \exp(2\tilde{x}_j)\ /\ Sh^2(e^{\tilde{x}_j}))] \qquad (3.16)$$

Il en résulte pour l'action l'expression suivante:

$$A(j,j-1) \underset{\eta\to 0}{\simeq} (m/2\sigma_j)\ \Delta x_j^2 + \sigma_j(\hbar^2/8m)\ e^{2\tilde{x}j}\Big[\frac{(8mE/\hbar\ \nu^2)^2_+\ 1/4}{Sh^2(e^{\tilde{x}j}/2)}$$

$$-\frac{(8m(E-\lambda)/\hbar^2\nu^2)+1/4}{Ch^2(e^{\tilde{x}j}/2)} - (2l+1)^2 - \exp(-2\tilde{x}_j)\Big] \qquad (3.16)$$

Après avoir pris la limite sur η (singularité rejetée à l'infini), la transformation spatio-temporelle, nous permet alors d'écrire l'intégrale de chemin $\mathcal{P}_l(r_f,r_i;s')$ sous la forme:

$$\mathcal{P}_l(r_f,r_i;s') = (\nu/2)\ [\exp(-x_f-x_i)\ Sh(e^{x_f})\ Sh(e^{x_i})]^{1/2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \exp\Big[(i/\hbar)\sum_{j=1}^{N} A(j,j-1)\Big] \qquad (3.17)$$

où $A(j,j-1)$ est définie par l'équation (3.16).

Remarquons, cependant, que l'instant t_i et l'instant t_f du chemin sont fixés, par conséquent les paramètres s'_i et s'_f dépendent du chemin . Cette dependance peut être manifestée, evidemment, par la contrainte : $t_f - t_i = \int_{s'_i}^{s'_f}(\frac{dr}{dx})^2 ds'$.

A priori, ceci est possible par l'introduction d'une identité définie par la fonction δ de Dirac. Mais un choix de cette identité s'avère délicat. Conformement à la réf [12], où se trouve une justification satisfaisante, nous choisissons une identité symétrique.

En posant $s' = s'_f - s'_i$ la relation entre $\mathcal{P}_l(r_f,r_i;s')$ et $\mathcal{P}_l(r_f,r_i;l)$ est donnée par;

$$\mathcal{P}_l(r_f,r_i;l) = \left(\frac{dr}{dx}\right)\Bigg|_{x_f} \left(\frac{dr}{dx}\right)\Bigg|_{x_i} \int_0^\infty \delta\left(l-\int_0^{s'}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 ds'\right) \mathcal{P}_l(r_f,r_i;s')ds'$$

ou bien

$$\mathcal{P}_l(r_f,r_i;l) = (4/\nu^2)\,[\exp(x_f+x_i)/Sh(e^{x_f})Sh(e^{x_i})] \int_0^\infty \delta\left(l-\int_0^{s'}(2\, e^x/\nu\, Sh(e^x))^2\right)\mathcal{P}_l(r_f,r_i;s')ds' \tag{3.18}$$

où $\mathcal{P}_l(r_f,r_i;s')$ est representée par l'expression (3.17).

En insérant (3.18) dans (3.5'), on obtient finalement, après intégration sur la variable l, la fonction de Green:

$$G_l(r_f,r_i;E)=(2/\nu)[\exp(x_f+x_i)/Sh(e^{x_f})Sh(e^{x_i})]^{1/2}\int_0^\infty \mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s')\, ds' \tag{3.19}$$

avec

$$\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s') = \int \mathcal{D}x(s')\, \exp\left[(i/\hbar)\int_0^{s'} ds'[(m/2)\dot{x}^2+(\hbar^2/8m)e^{2x}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(8mE/\hbar^2\nu^2)+1/4}{Sh^2(e^x/2)} - \frac{(8m(E-\lambda)/\hbar^2\nu^2)+1/4}{Ch^2(e^x/2)} - (2l+1)^2 - \exp(-2x)\right]\right] \tag{3.20}$$

La fonction de Green (3.19) exprimée en fonction du noyau (3.20) represente une intégrale de parcours où les chemins ne s'effondrent pas (pas de singularité). On dit aussi que l'expression (3.20) représente l'intégrale de chemin stable. En outre, le potentiel inclus dans (3.20) a la forme du potentiel de Pöschl-Teller modifié, qui a été très récemment étudié [4].
Nous sommes maintenant en position d'exprimer le noyau (3.20) en termes d'intégrale de chemin définie sur la variété SU(1,1).

III-3) INTEGRALE DE CHEMIN SUR LA VARIETE SU(1;1)

Généralement, quand on veut résoudre un problème d'intégrale de Feynmann, on essaye de le ramener, par le moyen d'une transformation, au cas de l'oscillateur harmonique. Par contre, le potentiel de Pöschl-Teller modifié ne s'aligne pas parmi ceux de la liste des convertibles en oscillateur harmonique . Sa résolution repose essentiellement sur les propriétés de son groupe dynamique SU(1,1), isomorphe à l'hyperboloïde unité . La conversion du problème sur SU(1,1) nécessite une extension de la dimension de l'espace relatif à l'intégrale de chemin. Son astuce repose sur la formule asymptotique suivante:

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[2ip\alpha - Z(1-\cos\alpha)\right] d\alpha \simeq (2\pi/Z)^{1/2} \exp[-(p^2 - 1/4)/2Z] \qquad (3.21)$$

pour Z grand et p entier.
Posons d'abord $x = [(-8mE)/(\hbar\nu)^2]^{1/2}$ et $\gamma = [8m(\lambda-E)/(\hbar\nu)^2]^{1/2}$
et introduisons deux variables angulaires α et β par le moyen de

la formule(3.21), sachant que $\sigma_j \longrightarrow 0$.

Le noyau $\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s')$ devient avec ce choix de constantes.

$$\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s') = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1}dx_j\,\exp\Big[(i/\hbar)\sum_{j=1}^{N}$$

$$(m/2\sigma_j)\,\Delta x_j^2 - \sigma_j(\hbar^2/8m)\,e^{2\tilde{x}_j}\Big[\frac{x^2-1/4}{Sh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)} -$$

$$\frac{\gamma^2-1/4}{Ch(e^{x_j}/2)\;\;Ch(e^{x_{j-1}}/2)}\Big] - \sigma_j(\hbar^2/8m)\,e^{2\tilde{x}_j}\,[(2l+1)^2+e^{-2\tilde{x}_j}]$$

(3.22)

L'application de la formule (3.12) pour les exponentielles contenant les constantes x et γ donne respectivement:

$$\exp\Big[\frac{-(x^2-1/4)}{2\,\dfrac{4mSh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)}{i\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\;\sigma_j}}\Big] \simeq \Big[\frac{4mSh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)}{2\pi i\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j}\Big]^{1/2}$$

$$\int_0^{2\pi}d\alpha_j\,\exp\Big[(i/\hbar)(\hbar x\alpha_j+\frac{4mSh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)}{\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j}(1-\cos\alpha_j))\Big] \qquad (3.23)$$

$$\exp\Big[\frac{-(\gamma^2-1/4)}{2\,\dfrac{4imCh(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)}{\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\;\sigma_j}}\Big] \simeq \Big[\frac{4imCh(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)}{2\pi\;\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j}\Big]^{1/2}$$

$$\int_0^{2\pi}d\beta_j\,\exp\Big[(i/\hbar)(\hbar\gamma\beta_j-\frac{4mCh(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)}{\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j}(1-\cos\beta_j))\Big] \qquad (3.24)$$

Reportant les équations (3.23) et (3.24) dans l'expression du noyau (3.22), on obtient:

$$\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s') = 2\int_0^{2\pi} d\alpha_f \int_0^{2\pi} d\beta_f \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j$$

$$\prod_{j=1}^{N} \exp\Big[(i/\hbar)[(m/2\sigma_j)\,\Delta x_j^2 - \sigma_j(\hbar^2/8m)\, e^{2\tilde{x}_j}\,[(2l+1)^2+e^{-2\tilde{x}_j}]]\Big]$$

$$\prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2} \prod_{j=1}^{N} (im/2\pi\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2}$$

$$\prod_{j=1}^{N} [Sh(e^{x_j})Sh(e^{x_{j-1}})]^{1/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} 2d\alpha_j d\beta_j \prod_{j=1}^{N} \exp\Big[(i/\hbar)[\hbar\lambda\alpha_j + \hbar\gamma\beta_j -$$

$$\frac{4m}{\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j}\{Ch(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)\,(1-\cos\beta_j)-Sh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)$$

$$(1-\cos\alpha_j)\}]\Big] \tag{3.25}$$

A présent, introduisons à la place des variables α_j et β_j deux autres variables appelées angles d'Euler $\phi_j \in [0,2\Pi[$ et $\psi_j \in [0,4\Pi[$ définies par les relations:

$$\alpha_j = (1/2)\ (\Delta\psi_j + \Delta\phi_j) \quad \text{et} \quad \beta_j = (1/2)\ (\Delta\psi_j - \Delta\phi_j) \tag{3.26}$$

et

$$2\int_0^{2\pi} d\alpha_j \int_0^{2\pi} d\beta_j = \int_0^{2\pi} d\phi_j \int_0^{4\pi} d\psi_j \tag{3.27}$$

avec la condition $\psi_0 = \phi_0 = 0$ (3.28)

En remplaçant (3.26) et (3.27) dans l'équation (3.25) et en évaluant les termes linéaires en $\Delta\psi_j$ et $\Delta\phi_j$ obtenus, et avec la condition (3.28), il vient:

$$\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s') = [Sh(e^{x_f})Sh(e^{x_i})]^{1/2}\int_0^{2\pi} d\phi_f\int_0^{4\pi} d\psi_f\ \exp[(i/2)(x+\gamma)\psi_f$$

$$+(i/2)\ (x-\gamma)\phi_f]\ \mathcal{P}'_E(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s') \tag{3.29}$$

ou

$$\mathcal{P}'_E(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s') = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2}(m/2\pi i\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2}$$

$$(im/2\pi\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1} Sh(e^{x_j})\ dx_j d\phi_j d\psi_j\prod_{j=1}^{N}\exp\Big[(i/\hbar)[(m/2\sigma_j)\Delta x_j^2$$

$$-\sigma_j(\hbar^2/8m)\ e^{2\tilde{x}j}\ [(2l+1)^2+e^{-2\tilde{x}j}] - \frac{4m}{e^{2\tilde{x}j}\ \sigma_j}\ \{Ch(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)$$

$$(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j-\Delta\phi_j))-Sh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j+\Delta\phi_j))\}]\Big] \tag{3.30}$$

De là, définissons $W(j,j-1)$ par

$$W(j,j-1) = [(m/2\sigma_j)\Delta x_j^2-\sigma_j(\hbar^2/8m)\ e^{2\tilde{x}j}\ [(2l+1)^2+e^{-2\tilde{x}j}] - \frac{4m}{e^{2\tilde{x}j}\ \sigma_j}.$$

$$\{Ch(e^{x_j}/2)Ch(e^{x_{j-1}}/2)(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j-\Delta\phi_j))-Sh(e^{x_j}/2)Sh(e^{x_{j-1}}/2)$$

$$(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j+\Delta\phi_j))\}] \tag{3.31}$$

A ce stade, on est prêt à convertir l'équation (3.30) en une intégrale de chemin sur la variété $SU(1,1)$, en introduisant le troisième angle d'Euler par la tranformation suivante:

$$\begin{cases} x = \ln\xi \\ \dfrac{ds'}{ds} = 1/\xi^2 \end{cases}$$

sous forme discrète elle s'écrit;

$$\begin{cases} x_j = \ln\xi_j \\ \sigma = \tau_j/(\xi_j\xi_{j-1}) \end{cases}$$

avec $\tau = s_f - s_i$ et $\tau_j = s_j - s_{j-1}$
et comme d'habitude, après un simple calcul, la mesure s'écrira sous la forme:

$$\prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\sigma_j)^{1/2}(m/2\pi i\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2}(im/2\pi\hbar\exp(2\tilde{x}_j)\sigma_j)^{1/2}$$

$$\prod_{j=1}^{N-1} \operatorname{sh}(e^{x_j})\ dx_j d\phi_j d\psi_j = (\xi_N\xi_0)^{1/2}\prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\hbar\tau_j)(im/2\pi\hbar\tau_j)^{1/2}$$

$$\prod_{j=1}^{N-1} \operatorname{sh}(\xi_j)\ d\xi_j d\phi_j d\psi_j \tag{3.32}$$

Voyons ce que devient l'action définie par l'équation (3.31). En premier lieu, le terme cinétique s'écrit sous sa forme symétrique, comme étant:

$$(m/2\sigma_j)\ \Delta x_j^2 = (m/2\tau_j)\ \Delta\xi_j^2 + (m/8\tau_j)\ (\Delta\xi_j)^4\left[\frac{\left(\frac{d^2x}{d\xi^2}\right)^2\Big|_{\tilde{\xi}_j}}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2\Big|_{\tilde{\xi}_j}} - \frac{2}{3}\,\frac{\left(\frac{d^3x}{d\xi^3}\right)\Big|_{\tilde{\xi}_j}}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)\Big|_{\tilde{\xi}_j}}\right]$$

ou bien, évidemment, après avoir remplacé les quantités nécessaires

$$(m/2\sigma_j)\ \Delta x_j^2 = (m/2\tau_j)\ \Delta\xi_j^2 + (m/8\tau_j)\ (\Delta\xi_j)^4\left[-1/(3\tilde{\xi}_j^2)\right] \tag{3.33}$$

$(\Delta\xi_j)^4$ est approximé comme toujours suivant la procédure de Schulman-Laughlin par:

$$\langle(\Delta\xi_j)^4\rangle \simeq 3(i\hbar\tau_j/m)^2$$

En insérant les résultats précédents dans l'expression de $W(j,j-1)$ (3.31) on obtient:

$$W(j,j-1)=(m/2\tau_j)\ \Delta\xi_j^2-(\hbar^2(2l+1)^2\tau_j/8m)-(4m/\tau_j)[\ Ch(\xi_j/2)Ch(\xi_{j-1}/2)$$
$$(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j-\Delta\phi_j))-Sh(\xi_j/2)Sh(\xi_{j-1}/2)(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j+\Delta\phi_j))]$$

(3.34)

Remarquons, en outre, qu'ici aussi le noyau $\mathcal{P}'_E(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s')$ est relié au noyau reparamétrisé par la relation;

$$\mathcal{P}'_E(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s') = (\xi_f.\xi_i)^{-1/2}\int_0^\infty \delta(s'-\int_0^s(1/\xi^2)ds)$$
$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)\ ds \qquad (3.35)$$

$\mathcal{P}_E(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)$ étant le noyau exprimé par:

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\hbar\tau_j)(im/2\pi\hbar\tau_j)^{1/2}$$
$$\prod_{j=1}^{N-1} Sh(\xi_j)\ d\xi_j d\phi_j d\psi_j \prod_{j=1}^{N}\exp\left[(i/\hbar)\ W(j,j-1)\right] \qquad (3.36)$$

où l'expression de $W(j\ j-1)$ est donnée par (3.34).

Arrivés là, substituons alors (3.36) dans (3.35) puis (3.35) dans (3.29) et enfin (3.29) dans la fonction de Green (3.19), on aura:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (2/D)[Sh(\xi_f)\ Sh(\xi_i)]^{-1/2}\int_0^\infty ds'[Sh(\xi_f)\ Sh(\xi_i)]^{1/2}$$
$$\int_0^{2\pi}d\phi_f\int_0^{4\pi}d\psi_f\ \exp[(i/2)(x+\gamma)\psi_f+(i/2)\ (x-\gamma)\phi_f]\int_0^\infty\delta(s'-\int_0^s(1/\xi^2)ds)$$
$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)\ ds$$

Après intégration sur la variable s', on obtient:

$$G_l(r_f,r_i;t) = (2/D)[Sh(\xi_f)\ Sh(\xi_i)]^{-1/2}\int_0^{\infty} ds\ \exp\left[(-i/\hbar)\frac{(2l+1)^2\hbar^2 s}{8m}\right]$$

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) \qquad (3.37)$$

où nous avons fait jouer à $[(2l+1)^2\hbar^2/8m]$ le rôle de l'énergie (conjuguée canonique du temps fictif s). En ce sens, nous l'avons définie automatiquement dicrète puisque $l=0,1,2,\ldots\ldots\ldots\infty$; et

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = [Sh(\xi_f)\ Sh(\xi_i)]^{1/2}\int_0^{2\pi} d\phi_f\int_0^{4\pi} d\psi_f\ \exp[(i/2)(x+\gamma)\psi_f +$$

$$(i/2)\ (x-\gamma)\phi_f]\ \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\hbar\tau_j)(im/2\pi\hbar\tau_j)^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1}Sh(\xi_j)d\xi_j d\phi_j d\psi_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left[(i/\hbar)\ W'(j,j-1)\right] \qquad (3.38)$$

avec

$$W'(j,j-1) = (m/2\tau_j)\ \Delta\xi_j^2 - (4m/\tau_j)\ [Ch(\xi_j/2)\ Ch(\xi_{j-1}/2)$$

$$(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j-\Delta\phi_j))-Sh(\xi_j/2)Sh(\xi_{j-1}/2)(1-\cos(1/2)(\Delta\psi_j+\Delta\phi_j))]$$

$$(3.38')$$

Par l'astuce de renversement du temps $\tau_j \longrightarrow -\tau_j$ [4], et l'utilisation du développement , $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, dans l'équation (3.38), il est facile d'écrire $\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s)$ comme étant une intégrale de chemin sur SU(1,1)

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = (1/8)\ [Sh(\xi_f)Sh(\xi_i)]^{1/2}\ \exp[(-i\hbar^2 s/32m\hbar)]$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi_f\int_0^{4\pi} d\psi_f \exp[(i/2)(x+\gamma)\psi_f + (i/2)\ (x-\gamma)\phi_f]\ Q(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s)$$

$$(3.39)$$

(on a fait l'estimation $\langle(\Delta\xi_j)^4\rangle \simeq 3(i\hbar\tau_j/m)^2$)

avec $Q(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)$ définie sur SU(1,1) par:

$$Q(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}(im/2\pi\hbar\tau_j)(m/2i\pi\hbar\tau_j)^{1/2}\prod_{j=1}^{N-1}2\pi^2dg_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left[(i/\hbar)(4m/\tau_j)[1-(1/2)\mathrm{Tr}(\hat{g}_j)\right] \qquad (3.40)$$

où $\hat{g}_j = g_j g_{j-1}^{-1}$ et la " spinor representation " de SU(1,1) est paramétrisée de la manière suivante:

$$g(\phi,\xi,\psi) = \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Ch}(\xi/2) & \mathrm{Sh}(\xi/2) \\ \mathrm{Sh}(\xi/2) & \mathrm{Ch}(\xi/2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2}\end{bmatrix}$$

et $dg = (1/16\pi^2)\mathrm{Sh}(\xi)\,d\xi\,d\phi\,d\psi$

L'intégrale de parcours $Q(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s)$ se calcule à l'aide des fonctions de Bargmann $d^{J,\sigma}_{M,N}(\xi)$ [13], obtenues par continuation analytique des fonctions de Wigner $d^{J}_{M,N}(\xi) \in SU(2)$. Ces fonctions de Bargmann sont données pour $M \geq N$:

$$d^{J,+}_{M,N}(\xi)=[1/(M-N)!]\left[\frac{\Gamma(1+M+J)\Gamma(M-J)}{\Gamma(1+N+J)\Gamma(N-J)}\right]^{1/2}[\mathrm{Ch}(\xi/2)]^{-M-N}[\mathrm{Sh}(\xi/2)]^{M-N}$$

$${}_2F_1\,(1-N+J,-N-J,1+M-N;-\mathrm{Sh}^2(\xi/2)) \qquad (3.41a)$$

$$d^{J,-}_{M,N}(\xi)=[1/(M-N)!]\left[\frac{\Gamma(1-N+J)\Gamma(-N-J)}{\Gamma(1-M+J)\Gamma(-M-J)}\right]^{1/2}[\mathrm{Ch}(\xi/2)]^{M+N}[\mathrm{Sh}(\xi/2)]^{M-N}$$

$${}_2F_1\,(1+M+J,+M-J,1+M-N;-\mathrm{Sh}^2(\xi/2)) \qquad (3.41b)$$

et satisfont à la propriété de symétrie $d^{J,\sigma}_{M,N}(\xi) = (-1)^{M-N}d^{J,\sigma}_{N,M}(\xi)$ pour $M < N$.

Suivant les valeurs de J on a:

des séries discrètes si:

$$J=-1/2,0,1/2,1\ldots\left|\begin{array}{ll}M=J+1,J+2,\ldots & \text{pour } \sigma=+\\ M=-J-1,-J-2,\ldots & \text{pour } \sigma=-\end{array}\right.$$

et des series continues si:

$$J=-(1/2)+i\rho\quad\left[\begin{array}{lll}\rho\geq 0 & M=0,\pm1,\pm2,\ldots & \text{pour } \sigma=0\\ \rho>0 & M=\pm1/2,\pm3/2,\ldots & \text{pour } \sigma=1/2\end{array}\right.$$

il s'ensuit que l'intégrale de chemin Q devient, voir [annexe 2]:

$$Q(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)=(1/2\pi^2)\sum_{\sigma}\Bigg\{\sum_{2J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[\frac{i(2J+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}\right]$$

$$\chi_J^{\sigma}(g_f g_i^{-1})+\int_0^{\infty}d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)\ \exp\left[\frac{-i(\rho)^2\hbar^2 s}{2m\hbar}\right]\chi^{\sigma}_{-1/2+i\rho}(g_f g_i^{-1})\tag{3.42}$$

où $\chi_J^{\sigma}(g_f g_i^{-1})=\sum_{M,N} d^{J,\sigma}_{M,N}(g_f)\,d^{J,\sigma}_{M,N}{}^{*}(g_i)$

et $d^{J,\sigma}_{M,N}(g)=\exp[-iM\phi]d^{J,\sigma}_{M,N}(\xi)\exp[-iN\psi]$

Cette expression s'obtient [voir annexe , 2],en remplaçant $m\longrightarrow 4m$ puis en revenant à l'orientation réelle du temps fictif s ($s\longrightarrow -s$) due à l'astuce effectuée sur $Q(\xi_f,\psi_f,\phi_f,\xi_i,0,0;s)$.

Il est clair, que le fait d'utiliser des représentations unitaires et l'intégration sur ϕ_f et ψ_f, nous donnent l'expression suivante du noyau relatif au potentiel de Pöschl-Teller modifié:

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s)=(1/2)\,[\mathrm{Sh}(\xi_f)\mathrm{Sh}(\xi_i)]^{1/2}\Bigg[\sum_{J=\sigma}^{\alpha_- -1}(2J+1)d^{J,\sigma}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)d^{J,\sigma *}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i)$$

$$\exp\left[\frac{i(2J+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}\right]+\int_0^{\infty}d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)\ \exp\left[\frac{-i(\rho)^2\hbar^2 s}{2m\hbar}\right]$$

$$d^{-1/2+i\rho,\sigma}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)d^{-1/2+i\rho,\sigma *}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i)\Bigg]\tag{3.43}$$

avec: $\alpha_+ = (\gamma+x)/2$ et $\alpha_- = (\gamma-x)/2$

cette équation reste valable pour α_- entier ou demi-entier respectivement si $\sigma = 0$ ou $1/2$.

III.4) SPECTRE D'ENERGIE ET FONCTIONS D'ONDE CORRESPONDANTS AUX ETATS LIES

Notons d'abord qu'à partir de l'équation (3.37), il est possible de séparer la partie discrète de la partie continue de $\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s)$. Ceci se fait en écrivant $\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s)$ sous la forme:

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = \hbar\omega([\mathrm{Sh}(\xi_f)\mathrm{Sh}(\xi_i)]^{1/2})/(8\pi m)\Bigg[\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)G_l(r_f,r_i;E)$$

$$\exp[\frac{i(2l+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}] + \int_0^{\infty}d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho)\ G_{-1/2+i\rho}(r_f,r_i;E)$$

$$\exp[\frac{-i(\rho)\ \hbar^2 s^2}{2m\hbar}]\Bigg] \qquad (3.44)$$

La partie continue étant obtenue par continuation analytique de la partie discrète ($l \longrightarrow -1/2+i\rho$) suivant la transformation de Sommerfeld-Watson. Cette écriture peut facilement se justifier, en reportant (3.44) dans (3.37).

En effet:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (2/\nu[\mathrm{Sh}(\xi_f)\mathrm{Sh}(\xi_i)]^{1/2})\int_0^{\infty} ds\ \exp[-\frac{i(2l+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}]$$

$$\hbar\omega([\mathrm{Sh}(\xi_f)\mathrm{Sh}(\xi_i)]^{1/2})/(8\pi m)\Bigg\{\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)G_p(r_f,r_i;E)\exp[\frac{i(2p+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}]$$

$$+\int_0^{\infty}d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho)\ G_{-1/2+i\rho}(r_f,r_i;E)\exp[\frac{-i(\rho)\ \hbar^2 s^2}{2m\hbar}]\Bigg\}$$

Intégrons sur la variable s et utilisons la formule:

$$\int_0^{\infty} \exp(i\alpha s)\, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} [i/(\alpha+i\varepsilon)] = PP(i/\alpha)+\pi\delta(\alpha)$$

ou plutôt une autre forme dont la contribution est équivalente à celles apportées par $PP(i/\alpha)$ et $\pi\delta(\alpha)$ (équivalence au sens des distributions).

$$G_l(r_f,r_i;t) = (2\pi\hbar/4\pi m)\left\{ \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)G_p(r_f,r_i;t)\delta\left(\frac{(p+1/2)^2-(l+1/2)^2}{2m/\hbar}\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} d\rho\ 2\rho \cdot \pi(\rho)\ G_{-1/2+i\rho}(r_f,r_i;t)\delta\left(\frac{(\rho)^2+(l+1/2)^2}{2m/\hbar}\right)\right\}$$

Le fait que ρ soit une variable continue réelle donne une contribution identiquement nulle à la partie continue.

De la sorte ,on peut réecrire pour la fonction de Green:

$$G_l(r_f,r_i;t) = \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)G_p(r_f,r_i;t)\delta[(p-l)(p+l+1)]$$

Utilisons maintenant la formule:

$$\delta(f(x)) = \sum_{\alpha} [\delta(x-x_\alpha)/|f'(x_\alpha)|] \qquad \{x_\alpha \text{ racine simple de } f(x)\}$$

qui dans notre cas s'écrira:

$\delta[(p-l)(p+l+1)] = 1/(2l+1)\{\delta(p-l)+\delta(p+l+1)\}$ où l est un entier positif. La sommation sur l'entier p porte sur les entiers positifs, et donc la contribution de $\delta(p+l+1)$ est identiquement nulle. D'où alors la justification de (3.44) par un résultat conforme à l'identité suivante:

$$G_l(r_f,r_i;E) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p(r_f,r_i;E)\delta(p-l) = G_l(r_f,r_i;E)$$

Ainsi par une comparaison des series discrètes des deux noyaux (3.43) et (3.44), on déduit par identification la condition J=l ou bien J entier (3.45)

La sommation dans (3.43) porte donc sur des valeurs entières $l = 0,1,2,\dots\dots\dots \infty$. Par conséquent, la valeur de σ se fixe à la valeur 0: $\sigma = 0$ (3.46)

Avec ces conclusions, venons-en à la partie discrète du noyau. Elle se réduit à:

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = (1/2)([Sh(\xi_f)Sh(\xi_i)]^{1/2})\sum_{J=0}^{\alpha_- -1}(2J+1)d^{J,+}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)d^{J,+*}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i)$$

$$\exp\left[\frac{i(2J+1)^2\hbar^2 s}{8m\hbar}\right] \qquad (3.47)$$

Comme précédemment, insérant(3.47) dans (3.37) et effectuant la même procédure d'en haut, nous obtenons ainsi la fonction de Green comprenant uniquement la partie discréte:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (4\pi m/\hbar\nu)\sum_{J=0}^{\alpha_- -1}\delta(J-l)d^{J,+}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)d^{J,+*}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i) \qquad (3.48)$$

En adoptant le changement d'indice de sommation suivant $J=\alpha_-+1-N = \frac{\gamma-x}{2}+1-N$, nous obtenons pour la fonction de Green:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (4\pi m/\hbar\nu)\sum_{N=l+1}^{\alpha_-+1}\delta(\alpha_- -N)d^{l,+}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)d^{l,+*}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i) \qquad (3.49)$$

Alors de la contrainte delta, on tire :

$$\alpha_- = \frac{1}{2}(\gamma - x) = N \tag{3.60}$$

ou encore en tenant compte des équations (3.21'), les niveaux d'énergie s'écrivent comme:

$$E_N = -(\hbar\nu)^2/8m\ [(2m\lambda/\hbar^2\nu^2 N) - N]^2 \tag{3.61}$$

La forme particulière de Veff(r) entraine l'existence d'un nombre fini d'états liés. La condition (3.60) limite la sommation sur N termes. En fait, cette limitation est due à la forme de celui pöschl-teller transformé de Veff(r).

Remarquons, par ailleurs, que la borne superieure de la sommation (3.49) compliquerait davantage la détermination des fonctions d'onde. Mais, la présence de $\Gamma(\alpha_- - J)$ au dénominateur de la fonction de Green (exprimée en fonction des fonctions hypergeometriques) devenant infinie dès que J > N+1, nous autorise à faire l'extention de la sommation jusqu'à l'infini.

Alors, conformement à ce qu'il a été dit, on peut reécrire la fonction de Green comme suit:

$$G_l(r_f, r_i; E) = (4\pi m/\hbar\nu) \sum_{N=l+1}^{\infty} \delta(\alpha_- - N)\, d^{l,+}_{q_N,N}(\xi_f)\, d^{l,+*}_{q_N,N}(\xi_i) \tag{3.62}$$

où $q_N = \alpha_+$ (quand $\alpha_- = N$)

Il est aisé de vérifier, en plus, que: $q_N = (2m\lambda)/(\hbar^2\nu^2 N)$.

Clairement, la fonction de Green admet les valeurs E_N comme pôles. Il est donc préférable de les faire apparaître dans son expression (3.62); sachant que :

$$\delta(\alpha_- - N) = \delta(f(E)) = \delta(E - E_N)/\left|f'(E_N)\right|$$

où nous avons considéré l'expression $\alpha_- - N$ comme fonction de l'énergie E. Après un calcul simple on arrive à:

$f'(E_N) = (4mN)/[\hbar^2\nu^2(q_N^2 - N^2)]$ nous avons utilisé les égalités suivantes: $Y = q_N + N$

$X = q_N - N$

l'expression (3.52) devient alors:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (4\pi m/\hbar\nu)\sum_{N=l+1}^{\infty}{}'\left(\delta(E-E_N)/|f'(E_N)|\right) d^{l,+}_{q_N,N}(\xi_f)d^{l,+*}_{q_N,N}(\xi_i) \tag{3.53}$$

Effectuons maintenant l'intégration sur l'énergie E, afin d'obtenir la partie discrète du propagateur suivant la formule:

$$K^d_l(r_f,r_i;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp[-iET/\hbar]G_l(r_f,r_i;E)$$

(où l'indice d désigne la partie discrète)

$$K^d_l(r_f,r_i;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \exp[-iET/\hbar](4\pi m/\hbar\nu)\sum_{N=l+1}^{\infty}{}'\delta(E-E_N)/|f'(E_N)|$$

$$\cdot\; d^{l,+}_{q_N,N}(\xi_f)d^{l,+*}_{q_N,N}(\xi_i)$$

$$= \sum_{N=l+1}^{\infty}{}'\,[(q_N^2-N^2)\nu/(2N)]d^{l,+}_{q_N,N}(\xi_f)d^{l,+*}_{q_N,N}(\xi_i)\exp[-iE_N T/\hbar] \tag{3.54}$$

De la décomposition bien connue du propagateur en fonctions d'onde, nous déduisons:

$$K^d_l(r_f,r_i;T) = \sum_{N=l+1}^{\infty}{}'\,u_{N,l}(r_f)u^*_{N,l}(r_i)\exp[-iE_N T/\hbar] \tag{3.55}$$

avec $u_{N,l}(r) = \left\{[(q_N^2-N^2)\nu/(2N)]\right\}^{1/2} d^{l,+}_{q_N,N}(\xi)$ ou $th(\xi/2)=e^{-\nu r/2}$

Soit $a = (2mt_N/(\hbar\nu)^2)$, de la sorte, les fonctions $d^{l,+}_{q_N,N}(\xi)$ deviennent égales à :

$$d^{l,+}_{2(-a)^{1/2}+N,N}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(2(-a)^{1/2}+1)}\left[\frac{\Gamma(1+2(-a)^{1/2}+N+1)\Gamma(2(-a)^{1/2}+N-1)}{\Gamma(1+N+J)\Gamma(N-J)}\right]^{1/2}$$

$$[Ch(\xi/2)]^{-2(-a)^{1/2}-2N}\ [Sh(\xi/2)]^{2(-a)^{1/2}}$$

$$_2F_1\ (1-N+1,-N-1,1+2(-a)^{1/2};-Sh^2(\xi/2))$$

Les fonctions d'onde correspondantes aux états liés se déduisent, en tenant compte de la relation [14]:

$$_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;Z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(1-Z)^{-\alpha}\,{}_2F_1\,(\alpha,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta;1/(1-Z)) +$$
$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-Z)^{-\alpha}\,F\,(\beta,\alpha-\beta,\beta+1-\alpha;1/(1-Z))$$

Dans notre cas les valeurs α,β,γ et Z sont respectivement:

$\alpha = 1-N+1$; $\beta = -N-1$; $\gamma = 2(-a)^{1/2}$; $Z = -Sh^2(\xi/2)$

Remarquons, en outre, que le deuxième terme du développement est nul à cause du fait que la fonction d'Euler $\Gamma(\alpha)$ est infinie puisque $\alpha = 1-N+1 \le 0$ $(N \ge 1+1)$

Par conséquent la fonction d'onde (3.55) devient alors:

$$u_{N,l}(r) = \left\{\frac{2\nu(-a)^{1/2}((-a)^{1/2}+N)}{N}\right\}^{1/2}\frac{1}{\Gamma(2(-a)^{1/2}+1)}$$

$$\left[\frac{\Gamma(1+2(-a)^{1/2}+N+1)\Gamma(2(-a)^{1/2}+N-1)}{\Gamma(1+N+J)\Gamma(N-J)}\right]^{1/2}[1-\exp(-\nu r)]^{(-a)^{1/2}+N}$$

$$[\exp(-\nu r)/1-\exp(-\nu r)]^{(-a)^{1/2}} \frac{\Gamma(2(-a)^{1/2}+1)\Gamma(-2l-1)}{\Gamma(-N-l)\Gamma(2(-a)^{1/2}+N-l)} (1-e^{-\nu r})^{1-N+l}$$

$${}_2F_1\,(1-N+l,N+2(-a)^{1/2}+l+1,2l+2;1-e^{-\nu r})$$

utilisons maintenant le fait que, $\Gamma(1-Z)\ \Gamma(Z) = \pi/\sin(\pi Z)$, pour simplifier le facteur :

$$\frac{\Gamma(2l+2)\Gamma(-2l-1)}{\Gamma(-N-l)\Gamma(1+N+l)} = (-1)^{N-l+1}$$

Nous obtenons finalement la forme définitive de la fonction d'onde:

$$u_{N,l}(r) = (-1)^{N-l+1} \left\{ \frac{2\nu(-a)^{1/2}((-a)^{1/2}+N)}{N} \right\}^{1/2} (1/(2l+1)!)$$

$$\left[\frac{\Gamma(l+N+1)\Gamma(2(-a)^{1/2}+N+l+1)}{\Gamma(N-l)\Gamma(N-l+2(-a)^{1/2})} \right]^{1/2} [\exp(-\nu r)]^{(-a)^{1/2}} [1-e^{-\nu r}]^{l+1}$$

$${}_2F_1\,(1-N+l,N+2(-a)^{1/2}+l+1,2l+2;1-e^{-\nu r}) \qquad (3.56)$$

En réalité, le nombre d'etats liés est fini. Cette limitation reapparait dans le comportement asymptotique des fonctions d'onde:

$$u_{N,l}(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} [\exp(-\nu r)]^{(-a)^{1/2}} \qquad (\longrightarrow 0\ )$$

Les valeurs de N se limitent alors par $N_{max} = \{(2m\lambda)^{1/2}/\hbar\nu\}$ " partie entiere de $(2m\lambda)^{1/2}/\hbar\nu$ .En fait , elle est déduite de l'inegalite $-a > 0$.

Le propagateur s'écrit définitivement comme:

$$K_l^{d}(r_f,r_i;t) = \sum_{N=l+1}^{N_{max}} u_{N,l}(r_f)u^{*}_{N,l}(r_i)\ \exp[-iE_N t/\hbar] \qquad (3.57)$$

III.6) SPECTRE D'ENERGIE ET FONCTIONS D'ONDE CORRESPONDANTS AUX ETATS CONTINUS:

Il est clair qu'au delà de N_{max} , la valeur attribuée à l'énergie part de zéro. Et d'après la forme du potentiel le mouvement de la particule devient illimité dans l'espace. Le spectre devient alors continu et doit contribuer dans l'expression du propagateur. La transformation de Sommerfeld-Watson [15], basée essentiellement sur le changement $\sum_N \longrightarrow (1/2i)\oint_c \frac{\exp(-i\pi\nu)}{\sin\pi\nu}\, d\nu$, permet en principe d'obtenir les fonctions d'onde continues. Cependant, cette procédure n'est pas simple à manipuler .Nous préferons alors utiliser directement l'expression (3.16) en modifiant uniquement le facteur de $d^{J,+}_{M,N}$ pour N entier.

$\frac{\Gamma(1+M+J)\Gamma(M-J)}{\Gamma(1+N+J)\Gamma(N-J)}$ par $[\sin\pi J/\pi]^2\Gamma(1+M+J)\Gamma(M-J)\Gamma(-N-J)\Gamma(1-N+J)$ afin d'adopter le facteur de la réf [16] et en considérant une autre transformation spatio-temporelle définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} r = (2/\nu)\ln(\mathrm{Ch}(e^x/2)) \\ \frac{dt}{ds} = [\exp(x)\,\mathrm{th}(e^x/2)/\nu]^2 \end{array}\right. \qquad (3.58)$$

Notons, par ailleurs , que la première transformation n'a pas fait apparaître la partie continue du propagateur, et la deuxième transformation rencontrerait des difficultés quant à la definition des entiers de sa partie discrète. Mais, le jumelage de deux transformations permettra de retrouver le propagateur tout en entier .Physiquement, ceci n'affecte en rien le propagateur , qui, lui, a la forme indépendante des transformations utilisées. En effet, elles sont d'aspect mathématique plutôt que physique. Pour cette raison, nous nous occuperons que de la partie continue du propagateur , lors de son traitement par la transformation (3.58). La partie discrète etant déjà déduite de la transformation (3.6)

suivant la procédure des sections 2 et 3, il est facile de montrer que la structure de la fonction de Green (3.37) reste la meme lors de la transformation.

Les derivees dont on aura besoin dans le calcul sont égales à :

$$\frac{dr}{dx} = (e^{x}/\nu)\,\frac{Sh(e^{x}/2)}{Ch(e^{x}/2)}$$

$$\frac{d^2r}{dx^2} = (e^{x}/\nu)\,\frac{Sh(e^{x}/2)}{Ch(e^{x}/2)} + (e^{2x}/2\nu)(1/Ch(e^{x}/2))^2$$

$$\frac{d^3r}{dx^3} = (e^{x}/\nu)\,\frac{Sh(e^{x}/2)}{Ch(e^{x}/2)} + (3e^{2x}/2\nu)(1/Ch(e^{x}/2))^2 - (e^{2x}/2\nu)\,\frac{Sh(e^{x}/2)}{Ch^3(e^{x}/2)}$$

La transformation spatio -temporelle s'écrit sous sa forme discrète:

$$\begin{cases} r_j = (2/\nu)\ln(Ch(e^{x_j}/2)) \\ \varepsilon = (\sigma_j/\nu^2)\exp(x_j+x_{j-1})\,th(e^{x_j}/2)\,th(e^{x_{j-1}}/2) \end{cases}$$

En procédant de la même manière et en suivant pas à pas les sections 2 et 3, on arrivera à l'expression de la fonction de Green suivante:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (1/\nu)\,\frac{\exp[(x_f+x_i)/2][Sh(e^{x_f}/2)Sh(e^{x_i}/2)]^{1/2}}{[Ch(e^{x_f}/2)Ch(e^{x_i}/2)]^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s')\,ds' \qquad (3.59)$$

avec :

$$\mathcal{P}'_E(x_f,x_i;s') = \int \mathcal{D}x(s') \exp\Big[(i/\hbar)\int_0^{s'} ds' \big[(m/2)\dot{x}^2+(\hbar^2/8m)e^{2x}\Big(\frac{-(2l+1)^2+1/4}{Sh^2(e^x/2)} - \frac{(8m(E-\lambda)/\hbar^2\nu^2)}{Ch^2(e^x/2)} - (8mE/\hbar^2\nu^2)\exp(-2x)\Big)\big]\Big] \tag{3.60}$$

Donc, apparemment, on a la même forme que l'équation (3.20) sauf qu'on a remplacé x par $2l+1$ et γ reste inchangée.

$$x = (-8m/\hbar^2\nu^2)^{1/2} \longrightarrow 2l+1 \quad \text{et} \quad \gamma = [8m(\lambda-E)/\hbar^2\nu^2]^{1/2} \tag{3.60'}$$

La conversion de cette intégrale en une intégrale de chemin définie sur SU (1,1) nécessite ,là aussi, la même formule d'approximation (3.21) (introduction de deux angles d'Euler) et la même transformation spatio-temporelle (introduction du troisième angle d'Euler).

$$x = \ln\xi \qquad \text{et} \qquad \frac{ds'}{ds} = 1/\xi^2$$

Ainsi, l'expression (3.37) de la fonction de Green est remplacée par:

$$G_l(r_f,r_i;E) = (1/\nu)\ \frac{[Sh(\xi_f/2)Sh(\xi_i/2)]^{1/2}}{[Ch(\xi_f/2)Ch(\xi_i/2)]^{1/2}} \int_0^\infty ds \exp\Big[(i/\hbar)\frac{E\,s}{\nu^2}\Big]\ \mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) \tag{3.61}$$

où $\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s)$ est défini sur SU(1,1) par :

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = (1/8)\ [Sh(\xi_f)Sh(\xi_i)]^{1/2} \exp[(-i\hbar^2 s/32m\hbar)]$$
$$\int_0^{2\pi} d\phi_f \int_0^{4\pi} d\psi_f \exp[(i/2)(x+\gamma)\psi_f + (i/2)\ (x-\gamma)\phi_f]\ Q(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s) \tag{3.62}$$

avec $x = 2l+1$ et $\gamma = [8m(\lambda-E)/\hbar^2\nu^2]^{1/2}$ et $Q(x_f,\psi_f,\phi_f,x_i,0,0;s)$ identiquement égale a l'expression (3.40). Ne prenant en compte que la partie continue et en fixant $(\sigma=0)$, d'après la partie discrète déjà déduite, l'expression analogue de (3.43) s'écrira:

$$\mathcal{P}_E(\xi_f,\xi_i;s) = (1/2)\,[Sh(\xi_f)Sh(\xi_i)]^{1/2}\int_0^\infty d\rho\; 2\rho\; th\pi\rho\; \exp\left[\frac{-i(\rho)^2\hbar^2 s}{2m\hbar}\right]$$

$$d^{-1/2+i\rho,0}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)\, d^{-1/2+i\rho,0*}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i) \qquad (3.63)$$

Changeons ρ par k/ν dans l'équation (3.63) , insérons- la dans l'équation (3.61), et intégrons sur la variable s pour déterminer la fonction de Green. Ceci fait, effectuons ensuite, l'intégration sur l'énergie E de cette fonction pour en déterminer la partie continue du propagateur. Il vient (l'indice c désigne la partie continue):

$$K^c_l(r_f,r_i;T)=(1/\nu)Sh(\xi_f/2)Sh(\xi_i/2)\int_0^\infty dk\; 2k\; th(\pi k/\nu)\exp[-i\hbar^2k^2T/2m\hbar]$$

$$d^{-1/2+ik/\nu,0}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_f)\, d^{-1/2+ik/\nu,0*}_{\alpha_+\alpha_-}(\xi_i)$$

et comme précédemment α_+ et α_- sont respectivement $(\gamma+x)/2$ et $(\gamma-x)/2$. Enfin, par identification au développement du propagateur en fonctions d'onde:

$$K^c_l(r_f,r_i;T) = \int_0^\infty dk\; u_{k,l}(r_f)\; u^*_{k,l}(r_i)\exp[-iE_kT/\hbar]$$

on déduit le spectre continu $E_k = \hbar^2k^2/2m$ (3.66)

Et finalement, les fonctions d'onde des états continus, suivant l'écriture de la réf. [8].

$$u_{k,l}(r) = (-1)^{l+1}(1/2\pi)^{1/2}(1/(2l+1)!)$$
$$\left|\frac{\Gamma(l+1-s/2+(-a)^{1/2})\Gamma(l+1+s/2+(-a)^{1/2})}{\Gamma(2(-a)^{1/2})}\right|(e^{\nu r}-1)^{l+1}(e^{-\nu r})^{(-a)^{1/2}}$$

$$_2F_1\ (1-s/2+l+(-a)^{1/2},s/2+(-a)^{1/2}+l+1,2l+2;1-e^{-\nu r}) \qquad (3.66)$$

ou $a = (2m\ E_k/\hbar^2\nu^2) = k^2/\nu^2$, $s = \gamma$ et $E_k > 0$.

Cette expression est obtenue après avoir remplacé le facteur des fonctions $d^{l,\sigma}_{N,N}$ par son analogue cité plus haut, ainsi que l'utilisation de la relation suivante:

$$_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;Z) = (1-Z)^{-\alpha}\ _2F_1(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;Z/(1-Z))$$

Le facteur $(1/2\pi)^{1/2}\ [1/|\Gamma(2(-a)^{1/2})|]$ est une conséquence des formules suivantes:

$$\Gamma(1-Z)\Gamma(Z) = (\pi/\sin\pi Z) \quad \text{et} \quad |\Gamma(1-2ik/\nu)|^2 = (2\pi k/\nu)[Sh(2\pi k/\nu)]^{-1}$$

Définitivement, le propagateur relatif au potentiel écranté est:

$$K_l(r_f,r_i;t) = \sum_{N=l+1}^{N_{max}} u_{N,l}(r_f)u^*_{N,l}(r_i)\ \exp[-iE_N t/\hbar]$$

$$+ \int_0^\infty dk\ u_{k,l}(r_f)\ u^*_{k,l}(r_i)\exp[-iE_k t/\hbar]$$

$u_{N,l}(r)$ et E_N sont données par les équations (3.56) et (3.51), $u_{k,l}(r)$ et E_k sont données par les équations (3.66) et (3.65). Le spectre et les fonctions d'onde sont, exactement, ceux obtenus par résolution de l'équation de Shrödinger [8].

III.6) CAS PARTICULIERS

Premier cas: le potentiel d'Hulthén

Posons $\mu = 0$, c.a.d $l=0$, dans l'expression (3.1), nous obtenons le potentiel de Hulthén

$$V_{eff}(r) = V(r) = (-\lambda/(e^{\nu r}-1)) = (-\lambda)(e^{-\nu r}/(1-e^{-\nu r}))$$

Le spectre discret d'énergie, ainsi que les fonctions d'onde correspondants à l'état s ($l=0$) se réduisent, alors, à

$$E_N = -(\hbar\nu)^2/8m\ [(2m\lambda/\hbar^2\nu^2 N\ ) - N]^2 \qquad N= 1,2,\ldots\ldots,\{(2m\lambda)^{1/2}/\hbar\nu\}$$

Soit $p_N = (2m\lambda/\hbar^2\nu^2 N\ ) - N$ donc $E_N = -(\hbar\nu)^2/8m\ [p_N]^2$ ou bien $\epsilon = -p_N^2/4$. Les fonctions d'onde s'écrivent comme:

$$u_{N,0}(r) = [\nu p_N(p_N/2 + N)(p_N+N)]^{1/2}\exp(-p_N r/2)\ (1-\exp(-\nu r))$$

$$\quad {}_2F_1(1-N,p_N+N+1,2;1-e^{-\nu r})$$

Ces résultats coïncident avec ceux de la réf. [3] obtenus par l'intégrale de chemin sur la variété SU(2) et par résolution de l'équation de Shrödinger [17].

De même, les fonctions d'onde relatives au spectre continu sont données par

$$u_{k,0}(r) = (-1)\,(1/2\pi)^{1/2}$$

$$\left|\frac{\Gamma(1-s/2+(-a)^{1/2})\;\Gamma(1+s/2+(-a)^{1/2})}{\Gamma(2(-a)^{1/2})}\right|(e^{\nu r}-1)\,(e^{-\nu r})^{(-a)^{1/2}}$$

$${}_2F_1\,(1-s/2+(-a)^{1/2},s/2+(-a)^{1/2}+1,2;1-e^{-\nu r})$$

Deuxième cas: Le potentiel de Coulomb

Faisons tendre $\nu \longrightarrow 0$, le potentiel effectif devient égal à $-Ze^2/r + \hbar^2 l(l+1)/2mr^2$, qui est un potentiel coulombien attractif d'ion hydrogénoïde plus un terme centrifuge dépendant de l.

Le spectre discret de l'énergie de l'atome d'hydrogène $(Z=1)$ est

$$E_N = (-1/2)\;(me^4/\hbar^2N^2) \qquad ;\; N=1,2,\ldots\ldots\ldots,\infty.$$

Dans ce cas $\sqrt{-a} = (me^2/\hbar^2\nu N) \underset{\nu \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \infty$. Et il est facile de voir

que $\displaystyle\lim_{\nu \longrightarrow 0}\ {}_2F_1\,(l-N+1,N+2(-a)^{1/2}+l+1,2l+2;1-e^{-\nu r}) =$

${}_1F_1(l-N+1,2l+2;2cr/N)$ avec $c = me^2/\hbar^2$

Ceci permet de déduire, facilement, la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène pour un état de moment cinétique orbital l. On trouve le résultat bien connu suivant:

$$u_{N,l}(r) = (\sqrt{c}\;/\;N(2l+1)!\;)[(N+l)!/(N-l-1)!]^{1/2}(2cr/N)^{l+1}e^{-cr/N}$$

$${}_1F_1(l-N+1,2l+2;2cr/N)$$

Remarquons, en plus, que N prend les valeurs 1,2,3,......,∞ tel que $N \geq l+1$, c'est à dire que pour N donné on a: $l=0,1,\ldots\ldots,N-1$. Ainsi, les états avec des l distincts et N identique ont la même énergie. Ce qu'on appelle souvent dégénérescence coulombienne.
Les fonctions d'onde des états continus de l'atome d'hydrogène se déduisent aussi de l'équation (3.66)

$$u_{k,l}(r) = [1/(2\pi)^{1/2}(2l+1)!]\,|\Gamma(1+l+ic/k)|\,(2kr)^{l+1}\exp(-ikr)$$

$$_1F_1(l+ic/k+1,2l+2;2ikr)$$

Ce dernier résultat est en accord avec celui de la littérature au facteur $\exp(\pi c/2k)$ près.

III.7) CONCLUSION

Malgré la présence de la singularité à l'origine dans le potentiel $V_{eff}(r)$, nous avons été capables, par un choix convenable de la transformation spatio-temporelle, de montrer que la fonction de Green (3.19) pour le potentiel $V_{eff}(r)$ est entièrement définie par un noyau stable (3.20).
Cependant, les expressions obtenues (3.19-3.20) ne sont pas intégrables. Par l'introduction de deux angles d'Euler (extension de la dimension de l'espace) ,et en utilisant une transformation spatio-temporelle, nous avons obtenu une fonction de Green stable

et intégrable.

Le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'onde des états liés et des états de diffusion sont alors obtenus. Le traitement du potentiel effectif nous a permis de retrouver les solutions du potentiel de Hulthén et du problème de Kepler dans une manière unifiée.

REFERENCES:

[1] I.H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. B 84, 185 (1979).

[2] H. Kleinert, Phys. Lett. A 120,361 (1987);

A. Inomata , in path integrals from mev to Mev ,Bielfeld encounters in physics and mathematics VII, edited by M.C. Gutzwiller. A. Inomata, J.R. Clauder and L.Streit (World scientific, singapour, 1985) P 433.

[3] J.M. Cai, P.Y. Cai and A. Inomata, Phys.Rev.A34, 4621 (1986).

[4] M. Bohms and G.Junker, J.Math.Phys. 28, 1978 (1987)

[5] A.O. Barut, A. Inomata and G.Junker, J.Phys.A : Math. Gen 20, 6271 (1987).

[6] L. Infeld and T.E. Hull. Rev.Mod.Phys. 23, 21 (1951).

[7] C. Rosenzweig and J.B. Krieger, J.Math.Phys. 9, 849 (1968).

[8] U. Myhrman, J.Math.Phys. 21, 1732 (1980).

[9] L. Hulthen, Ark. Math. Astron. Fys. A28, 5 (1942); E.A. Hylleraas and V.Risberg, Avh.Nor. Virlensk. Akad. Oslo Math. Naturvidensk. K.1.1, 3, (1941); J.Lindhard and A.Winter, Nucl. Phys.A 166, 1442 (1971).

[10] D.Peak and A.Inomata, J.Math.Phys. 10, 1442 (1969).

[11] H.Kleinert, Phys.Lett. B 224, 313 (1989).

[12] L.Chetouani and T.F.Hammann,Nuovo Cimento.Vol.98B,1 (1987).

[13] V.Bargmann, Ann. Math. 48, 568 (1947)

[14] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, series and products (academic, New York, 1969) P.1043 eq (9.132.1).

[15] I.H.Duru and H.Kleinert, Fortschr.Phys. 30, 973 (1986).

[16] A. Frank and K.B. Wolf, J.Math.Phys. 26, 973 (1985).

[17] S. Flügge. practical quantum mechanics I (Spinger - Verlag - New York 1971) P 175-178.

CHAPITRE IV

INTEGRALE DE CHEMIN POUR LES PARTICULES DE SPIN ZERO ET 1/2 DANS LE CHAMP D'UNE ONDE PLANE

SPIN 0 ET 1/2 DANS LE CHAMP D'UNE ONDE PLANE

IV-1) INTRODUCTION

Considérons des particules chargées de spin zéro et un-demi, soumises à l'action d'un champ électromagnétique d'une onde plane. Et proposons-nous de calculer les fonctions de Green correspondantes dans le formalisme d'intégrale fonctionnelle de Feynman. Les équations de Klein-Gordon et de Dirac, décrivant ses systèmes physiques relativistes, admettent des solutions simples et analytiques [1] et [2]. En effet, il est possible de calculer leurs fonctions de Green par le moyen de la technique des opérateurs, en résolvant les équations de Heisenberg [3], ou en résolvant directement:

soit l'équation de Klein-Gordon [4]:

$$(\pi_b^2 - m^2)\Delta(x_b,x_a) = \delta^4(x_b-x_a) \tag{4.1}$$

soit l'équation de Dirac:

$$(\hat{\pi}_b - m\ )S(x_b,x_a) = \delta^4(x_b-x_a) \tag{4.2}$$

ou plutôt sa forme quadratique:

$$[\pi_b^2 - m^2+e/2(\sigma F_b)]S_1(x_b,x_a) = \delta^4(x_b-x_a) \tag{4.3}$$

obtenue par le changement de fonctions:

$$S(x_b,x_a) = (\hat{\pi}_b + m\ )S_1(x_b,x_a) \tag{4.4}$$

où nous avons utilisé les notations usuelles:

$\hat{\pi} = \pi_\mu\gamma^\mu;\quad \pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu;\quad \hbar = c = 1;\quad (\sigma F) = \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu};$

$\sigma^{\mu\nu} = (1/2)\ [\gamma^\mu,\gamma^\nu];\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$

Les solutions des équations (4.1) et (4.2) exhibent une structure bien connue, qui peut être expliquée naturellement dans le formalisme des intégrales de chemin de Feynman. Le but de ce chapitre est de résoudre les équations (4.1), (3.3) et (4.4) dans le formalisme des intégrales fonctionnelles, en laissant $(-m^2/2)$

jouer le rôle de l'énergie et d'utiliser l'astuce de Fock, qui consiste à convertir une équation hyperbolique en une équation parabolique de type Schrödinger, en introduisant une cinquième dimension- i.e- un pseudo-temps (temps fictif) qui permet la reparamétrisation des chemins [5]. En effet, pour spin zéro, l'equation de Klein-Gordon qui décrit une particule de masse m et de charge e en présence d'un champ électromagnétique $A_\mu(x)$ est donnée par:

$$(i\partial_\mu - eA_\mu)^2\psi(x) = m^2\psi(x)$$

en changeant $\psi(x) \longrightarrow \Phi(x,\lambda) = \exp(im^2\lambda/2)\psi(x)$

où l'on a introduit la cinquième dimension λ. Il est facile de vérifier que $\Phi(x,\lambda)$ vérifie l'equation de Schrödinger suivante:

$$i\ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \mathcal{H}\Phi \qquad \text{avec } \mathcal{H} = (-1/2)(i\partial_\mu - eA_\mu)^2$$

A cette équation correspond une description lagrangienne donc un formalisme en intégrale de chemin. Son propagateur de Feynman étant défini par:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int \mathcal{D}x(s)\ \exp[i\int_0^\lambda \mathcal{L}_0(x,\dot{x})ds]$$

avec $\mathcal{L}_0 = (-1/2)\ \dot{x}^2 - eA\dot{x}$, la transformée de Legendre de $\mathcal{H}$.

La transformée de Fourier de $K(x_b,x_a,\lambda)$ dite fonction de Green est définie par:

$$G(x_b,x_a) = \int_0^\infty d\lambda\ \exp(-im^2\lambda/2)K(x_b,x_a;\lambda)$$

où ici $(-m^2/2)$ joue le rôle de l'énergie conjuguée canonique de λ. En outre, elle satisfait l'équation suivante [5]:

$(\mathcal{Z}-\mathcal{H})\, G(\mathcal{Z}) = i\, \mathbb{1}$, ou bien autrement

$(\pi_b^2 - m^2) G(x_b,x_a)/2i = \delta^4(x_b-x_a)$

Ainsi, par comparaison avec l'équation (1), il vient que $\Delta(x_b,x_a)$ admet la représentation suivante:

$\Delta(x_b,x_a) = G(x_b,x_a)/2i$

$$\Delta(x_b,x_a) = (1/2i) \int_0^\infty d\lambda\, \exp(-im^2\lambda/2) K(x_b,x_a;\lambda) \qquad (4.5)$$

où

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int \mathcal{D}x(s)\, \exp[i\int_0^\lambda \mathcal{L}_0(x,\dot{x})ds \qquad (4.6)$$

et

$$\mathcal{L}_0 = (-1/2)\, \dot{x}^2 - eA\dot{x}; \qquad x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3)$$

x^μ étant un point de l'espace-temps quadridimensionnel muni de la métrique $g_{\mu\nu}$= diag(+1,-1,-1, 1).

Pour les particules de spin 1/2, la représentation fonctionnelle, est la même pour $S_1(x_b,x_a)$ à la différence du terme en plus, dû à l'existence du Spin " Couplage Spin-Champ ". Ainsi on aura:

$$S_1(x_b,x_a) = (1/2i) \int_0^\infty d\lambda\, \exp(-im^2\lambda/2) \int \mathcal{D}x(s)\, \exp[i\int_0^\lambda \mathcal{L}_1(x,\dot{x})ds]$$

ou (4.7)

$\mathcal{L}_1 = (-1/2)\, x^2\, eAx - (e/4)(\sigma F)$

Nous pouvons supposer, sans briser la généralité du problème, que l'onde plane électromagnétique est caractérisée par les relations : $\phi = k.x$ et $k^2 = 0$ (4.8)

de telle sorte que le 4-Potentiel A_μ soit une fonction de la variable Φ: $$A_\mu = A_\mu(\Phi) \tag{4.9}$$
Nous soumettrons, en outre, ce 4-Potentiel à la condition de jauge de Lorentz: $\partial^\mu A_\mu = 0$

condition équivalente à $k\,A = 0$ (4.10)

(Le terme constant dans A étant inessentiel)

Dans la section II, nous calculerons les expressions (4.5-4.6) dans la représentation d'espace des phases, en considérant la variable Φ indépendante de k x. Il est montré que le même résultat peut être obtenu par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (calcul semi-classique).

Dans la section III, la fonction de Green est calculée et les fonctions d'onde sont explicitement déduites pour les deux cas, sans et avec spin.

IV-2) FONCTIONS DE GREEN POUR LES PARTICULES DE SPIN ZERO

L'expression (4.6) du propagateur est souvent dite sa représentation dans l'espace de configuration. Et il est possible de l'exprimer par une représentation dans l'espace des phases, en linéarisant le terme quadratique $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ du lagrangien $\mathcal{L}_0$

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int \mathcal{D}x(s)\ \exp\left[-i\int_0^\lambda (p\dot{x} + \mathcal{H})\,ds\right] \tag{4.11}$$

où $\mathcal{H} = (-1/2)(p-eA)^2$ est l'hamiltonien du système.

Sa version discrète s'écrit comme suit:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d^4x_j \prod_{j=1}^{N} \frac{d\,p_j^4}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N} \exp\Big\{-i[p_j\Delta x_j - \varepsilon/2\ (p_j^2 - 2ep_j\tilde{A}_j + e^2\tilde{A}_j^2)]\Big\} \tag{4.12}$$

avec les notations standards [5],[6]:

$x_j = x(s_j)$; $x_j = x(0)$; $x_j = x(\lambda)$; $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$;

$\tilde{x}_j = (x_j + x_{j-1})/2$; $\tilde{A}_j = A(k\tilde{x}_j)$ et $\varepsilon = s_j - s_{j-1} = \lambda/N$.

En effet, l'expression (4.12) est facile à retrouver. L'écriture discrète du propagateur (4.6) est donnée par:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d^4x_j \prod_{j=1}^{} (1/2\pi i\varepsilon)^{3/2}(1/2\pi\varepsilon)^{1/2} \prod_{j=1}^{N} \exp\Big\{i[-(\Delta x_j^2/2\varepsilon) - e\tilde{A}_j\Delta x_j]\Big\}$$

Ceci étant, il suffit d'utiliser la formule de linéarisation suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ap^2+bp)\, dp = (\pi/-a)^{1/2} \exp(-b^2/4a)$$

Son application au terme quadratique $\exp(-\frac{i}{2\varepsilon}\ \Delta x_j^2)$ puis le changement de variable $p_j + eA_j \longrightarrow p_j$, donnera le résultat de la formule (4.12). Notons bien, que pour le terme dépendant de la vitesse, la prescription du mid-point a été utilisée [6],[8].

En vérité, la forme de la solution donnée par la référence [9], nous laisse anticiper la démarche à suivre dans le traitement de ce problème dans sa version intégrale de chemin.

séparer dans le propagateur sa partie libre en x de celle qui dépend du champ de l'onde plane, en considérant Φ comme variable indépendante de k x. Ceci est possible, en insérant l'identité suivante dans l'expression (4.12);

$$\int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\delta(\phi_b - \phi_a - k(x_b - x_a)) = 1$$

ou plutôt sa version intégrale de chemin, qui est une généralisation à chacun des intervalles $[j-1,j]$.

$$\int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\int \prod_{j=1}^{N-1} d\phi_j \prod_{j=1}^{N} \delta(\Delta\phi_j - k\Delta x_j) = 1 \qquad (4.13)$$

où $\Delta\phi_j = \phi_j - \phi_{j-1}$

Cette dernière identite peut être déduite aisément, de la première identité, en utilisant la propriété:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\delta(b-x) = \delta(b-a) ,$$

en intercalant l'intervalle $[a,b]$ par le point $(N-1)$, puis l'intervalle $[a,N-1]$ par le point $(N-2)$; et ainsi de suite. Exprimons maintenant, la fonction δ par sa représentation integrale:

$$\delta(\Delta\phi_j - k\Delta x_j) = (1/2\pi) \int dp_{\phi_j} \exp[ip_{\phi_j}(\Delta\phi_j - k\Delta x_j)]$$

Ainsi, l'intégrale de chemin (4.13) sera représentee dans l'espace des phases. Le propagateur (4.12) devient alors;

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\bar{K}(x_b,\phi_b,x_a,\phi_a;\lambda)$$

où $\bar{K}$ est le propagateur qui traitera les variables x et ϕ indépendemment l'une de l'autre, défini par:

$$\bar{K}(x_b,\phi_b,x_a,\phi_a;\lambda) = \int \mathcal{D}x\, \mathcal{D}p\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}p_\phi \exp\left[i\int_0^\lambda [-p\dot{x}+p_\phi(\dot{\phi}-k\dot{x})+p^2/2-epA + e^2A^2/2]ds\right]$$

suivante dans l'expression (4.12):

$$\int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\delta(\phi_b - \phi_a - k(x_b - x_a)) = 1$$

ou plutôt sa version intégrale de chemin, qui est une généralisation à chacun des intervalles $[j-1,j]$.

$$\int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\int \prod_{j=1}^{N-1} d\phi_j \prod_{j=1}^{N} \delta(\Delta\phi_j - k\Delta x_j) = 1 \qquad (4.13)$$

où $\Delta\phi_j = \phi_j - \phi_{j-1}$

Cette dernière identite peut être déduite ,aisément, de la première identité, en utilisant la propriété:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\delta(b-x) = \delta(b-a) ,$$

en intercalant l'intervalle $[a,b]$ par le point $(N-1)$, puis l'intervalle $[a,N-1]$ par le point $(N-2)$; et ainsi de suite. Exprimons maintenant, la fonction δ par sa représentation integrale:

$$\delta(\Delta\phi_j - k\Delta x_j) = (1/2\pi) \int dp_{\phi_j} \exp[ip_{\phi_j}(\Delta\phi_j - k\Delta x_j)]$$

Ainsi, l'intégrale de chemin (4.13) sera représentee dans l'espace des phases. Le propagateur (4.12) devient alors:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int d\phi_b d\phi_a \delta(\phi_a - kx_a)\bar{K}(x_b,\phi_b,x_a,\phi_a;\lambda)$$

où $\bar{K}$ est le propagateur qui traitera les variables x et ϕ indépendemment l'une de l'autre, défini par:

$$\bar{K}(x_b,\phi_b,x_a,\phi_a;\lambda) = \int \mathcal{D}x\, \mathcal{D}p\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}p_\phi \exp\left[i\int_0^\lambda [-p\dot{x} + p_\phi(\dot{\phi} - k\dot{x}) + p^2/2 - epA + e^2A^2/2]ds\right]$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d^4x_j \prod_{j=1}^{N} \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N-1} d\phi_j \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_{\phi_j}}{(2\pi)}$$

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N} [-p_j\Delta x_j+\varepsilon/2\ (p_j^2 - 2ep_jA(\tilde{\phi}_j) + e^2A^2(\tilde{\phi}_j)+p_{\phi_j}(\Delta\phi_j-k\Delta x_j)]\right\}$$

(4.14)

avec $\tilde{\phi}_j = (\phi_j + \phi_{j-1})/2$

Dans chaque intervalle $[j-1,j]$, en changeant $p + k\ p_\phi$ en p et en tenant compte de $k^2 = 0$ et de la relation (10), nous obtenons les changements suivants

$\mathcal{D}p \longrightarrow \mathcal{D}p;\quad p_jA(\tilde{\phi}_j) \longrightarrow p_jA(\tilde{\phi}_j);\quad p_j^2 \longrightarrow p_j^2 - 2(p_jk)p_{\phi_j}$

Après substitution, il vient pour le propagateur $\bar{K}$:

$$\bar{K}(x_b,\phi_b,x_a,\phi_a;\lambda) = \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d^4x_j \prod_{j=1}^{N} \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N-1} d\phi_j \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_{\phi_j}}{(2\pi)}$$

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}[-p_j\Delta x_j+(\varepsilon/2)p_j^2-\varepsilon ep_jA(\tilde{\phi}_j)+(\varepsilon/2)e^2A^2(\tilde{\phi}_j)+p_{\phi_j}\Delta\phi_j-\varepsilon(p_jk)p_{\phi_j})]\right\}$$

(4.15)

L'intégration sur x est simplement obtenue du fait que:

$$\sum_{j=1}^{N}[p_j\Delta x_j] = p_Nx_N-p_1x_0+\sum_{j=1}^{N-1}[p_j - p_{j+1}]x_j$$

Effectuons alors, l'intégration sur les (N-1) variables x_j, on aura :

$$\bar{K}(x_b,\Phi_b,x_a,\Phi_a;\lambda) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N-1} (2\pi)^4 \delta(p_{j+1}-p_j) \prod_{j=1}^{N-1} d\Phi_j$$
$$\prod_{j=1}^{N} \frac{dp_{\Phi_j}}{(2\pi)} \exp\Big[(-ip_N x_N + ip_1 x_0) + \sum_{j=1}^{N} (\varepsilon/2)p_j^2 - \varepsilon e p_j A(\tilde{\Phi}_j) + (\varepsilon/2)e^2A^2(\tilde{\Phi}_j)$$
$$+ p_{\Phi_j}\Delta\Phi_j - \varepsilon(p_j k)p_{\Phi_j}\Big] \tag{4.16}$$

La présence de la distribution de Dirac reflète la conservation de la quadri-impulsion de la particule durant le mouvement.

$p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots = p_N = p$

Alors le propagateur $\bar{K}$ se simplifie à:

$$\bar{K}(x_b,\Phi_b,x_a,\Phi_a;\lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2] \int \mathcal{D}\Phi\, \mathcal{D}p_\Phi$$
$$\exp\left\{i\int_0^\lambda [p_\Phi(\dot{\Phi} - kp) - epA + e^2A^2/2]ds\right\} \tag{4.17}$$

où l'on voit déjà la séparation, en partie libre et partie dépendante du champ de l'onde plane, apparaitre dans le propagateur. Intégrons sur les variables p_{Φ_j}, on aura:

$$\bar{K}(x_b,\Phi_b,x_a,\Phi_a;\lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2] \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\Phi_j$$

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N} [-\varepsilon e p A(\tilde{\Phi}_j) + (\varepsilon/2)e^2A^2(\tilde{\Phi}_j)]\right\} \prod_{j=1}^{N} \delta(\Delta\Phi_j - \varepsilon(pk)) \tag{4.18}$$

Maintenant, l'intégration sur les variables Φ_j montre que la contribution (4.18) des amplitudes sur tous les chemins $\{\Phi\}$, se réduit à l'intégration sur le chemin décrit par:

$\Delta\phi_1 = (pk)\varepsilon;\ \Delta\phi_2 = (pk)\varepsilon; \ldots\ldots\ldots ;\Delta\phi_N = (pk)\varepsilon$

Sous sa forme continue, le chemin est décrit par l'équation différentielle: $\dfrac{d\phi}{ds} = (p,k)$.

La résolution de cette équation sous sa forme discrète donne:

$\phi_j - \phi_a = (pk)(j\varepsilon)$

C'est à dire, on intègre suivant le chemin droit défini par l'équation suivante:

$$\phi_N - \phi_a = (pk)(N\ \varepsilon) = (pk)\ \lambda \tag{4.19}$$

et joignant les points $(\phi_a, 0)$ et (ϕ_b, λ).

Sachant que ε vaut: $\varepsilon = \dfrac{\Delta\phi_j}{(pk)}$, la sommation dans l'exponentielle se convertira en une intégrale de Riemann suivant le chemin défini par (4.19) et donnera l'expression:

$$\int_{\phi_a}^{\phi_b} \left(\frac{-e(pA)}{(pk)} + \frac{e^2A^2}{2(pk)} \right) d\phi$$

Le propagateur K devient, alors

$$K(x_b, x_a; \lambda) = \int d\phi_b\, d\phi_a\ \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\delta(\phi_a - kx_a)\,\delta(\phi_b - kx_a - (pk)\lambda)$$

$$\exp[-ip(x_b - x_a) + ip^2\lambda/2]\exp[-i\int_{kx_a}^{\phi_b} \left(\frac{e(pA)}{(pk)} - \frac{e^2A^2}{2(pk)} \right) d\phi] \tag{4.20}$$

Remarquons, avant tout, que la forme du propagateur (4.20) n'est pas totalement symétrique. Pour qu'on puisse faire disparaitre cette dissymétrie, introduisons d'abord la représentation intégrale de la fonction δ:

$$\delta(\phi_b - kx_a - (pk)\lambda) = (1/2\pi)\int dp_{\phi_b}\exp\left[ip_{\phi_b}(\phi_b - kx_a - (pk)\lambda)\right]$$

puis par le changement de variable $p - p_{\phi_b}k \longrightarrow p$ et en tenant compte des équations $k^2 = 0$ et $kA = 0$, il vient:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int d\phi_b\, d\phi_a \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\delta(\phi_a - kx_a)\delta(\phi_b - kx_b)\exp[-ip(x_b - x_a) + ip^2\lambda/2]$$
$$\exp[-i\int_{kx_a}^{kx_b}\left(\frac{e(pA)}{(pk)} - \frac{e^2A^2}{2(pk)}\right)d\phi]$$

Finalement, le propagateur et la fonction de Green sont respectivement donnés par:

$$K(x_b,x_a;\lambda) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[-ip(x_b - x_a) + ip^2\lambda/2 - \frac{i\lambda}{kx_b - kx_a}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(pA) - e^2A^2/2]d\phi\right]$$

(4.21)

$$\text{et } \Delta(x_b,x_a) = (1/2i)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda\, \exp[i\lambda(p^2 - m^2)/2]$$
$$\exp[-ip(x_b - x_a) - i\int_{kx_a}^{kx_b}\left(\frac{e(pA)}{(pk)} - \frac{e^2A^2}{2(pk)}\right)d\phi]$$

Après intégration sur la variable λ, la fonction de Green devient:

$$\Delta(x_b,x_a) = (1/(2\pi)^4)\int \frac{d^4p}{p^2 - m^2 + i0}\exp[-ip(x_b - x_a) - i\int_{kx_a}^{kx_b}\left(\frac{e(pA)}{(pk)} - \frac{e^2A^2}{2(pk)}\right)d\phi]$$

(4.22)

où nous avons employé la formule:

$$\int_0^\infty \exp(i\alpha\lambda)d\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\alpha + i\varepsilon}$$

Arrivé là, on est prêt à effectuer l'intégration sur p^0 pour déduire les fonctions d'onde. Les pôles de la fonction de Green sont les énergies positives et négatives respectivement données par $p^0_+ = \omega - i\varepsilon$ et $p^0_- = \omega + i\varepsilon$ où $\omega = (p^2+m^2)^{1/2}$

La détermination de l'intégrale s'effectue, généralement, en appliquant le théorème de Cauchy. Pour les énergies positives p^0_+ le contour sera choisi en dessous de l'axe des réels avec $t_b - t_a > 0$ pour que l'intégration puisse s'annuler à l'infini. Par contre, pour les énergies négatives p^0_- le contour sera choisi au dessus de l'axe avec $t_b - t_a < 0$. De la sorte, on écrira pour la fonction de Green:

$$\Delta(x_b,x_a) = (-i/2)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1/\omega)\exp\left[-i\omega(t_b-t_a) + ip(r_b-r_a)\right]$$

$$\exp\left[\frac{-i}{\omega k^0 - pk}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(\omega A^0 - pA) - e^2A^2/2]d\phi\right]\theta(t_b-t_a) - (i/2)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1/\omega)$$

$$\exp\left[i\omega(t_b-t_a)+ip(r_b-r_a)\right]\exp\left[\frac{-i}{-\omega k^0 - pk}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(-\omega A^0 - pA) - e^2A^2/2]d\phi\right]\theta(t_a-t_b)$$

ou bien sous sa forme compacte, elle devient:

$$\Delta(x_b,x_a) = (-i/2)\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1/\omega)\exp\left[-i\varepsilon\omega(t_b-t_a) + ip(r_b-r_a)\right]$$

$$\exp\left[\frac{-i}{\varepsilon\omega k^0 - pk}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(\varepsilon\omega A^0 - pA) - e^2A^2/2]d\phi\right]\theta[\varepsilon(t_b-t_a)]$$

$$= (-i)\sum_{\varepsilon=\pm}\int d^3p\ \psi^{\varepsilon}_p(x_b)\psi^{\varepsilon *}_p(x_a)\theta[\varepsilon(t_b-t_a)] \qquad (4.23)$$

La dernière expression exprime le développement de la fonction de Green en fonctions d'onde. Par identification, nous obtenons les ondes convenablement normalisées, solution de l'équation de Klein-Gordon. Alors, nous déduisons de ces équations les fonctions d'onde normalisées

$$\psi_p^{\pm}(x_b)=(1/2\pi)^{3/2}(1/2p^0)\exp\left[\mp ipx-(i/pk)\int_{kx_0}^{kx}[e(pA)\mp e^2A^2/2]d\phi\right] \quad (4.24)$$

avec $p^0=\omega=(p^2+m^2)^{1/2}$ et kx_0 une constante quelconque.

Il est intéressant de montrer par une autre méthode semi classique, comment le propagateur (4.21) peut être obtenu via une transformation canonique. En effet, le mouvement dans le système (x,p), espace des phases, est régi par l'hamiltonien:

$$\mathcal{H}=(-1/2)(p-eA)^2$$

Soit la transformation canonique $F_2(x,P,s)$ définie par:

$(x,p)\xrightarrow{F2}(Q,P)$ qui transformera l'hamiltonien $\mathcal{H}$ en un nouvel hamiltonien $\mathcal{K}$ égal à zéro. La fonction génératrice de cette transformation est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi:

$$\mathcal{K}=\mathcal{H}+\frac{\partial F_2}{\partial s}=0 \text{ avec } p=-\frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ et } Q=-\frac{\partial F_2}{\partial P}$$

ou bien, sous une autre forme:

$$\mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_2}{\partial x},x,s\right)+\frac{\partial F_2}{\partial s}=(-1/2)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+eA\right)^2+\frac{\partial F_2}{\partial s}=0.$$

La solution de cette équation d'Hamilton-Jacobi est alors donnée par:

$$F_2(x,P,s)=-Px-(1/Pk)\int^{kx}[e(PA)-e^2A^2/2]d\phi+P^2s/2$$

solution qu'on peut trouver dans [9].

Le lien entre les anciennes variables (x,p) et les nouvelles variables (Q,P) est alors donné par les équations

$$P_\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial x^\mu} = P_\mu + (k_\mu/Pk)[e(PA) - e^2A^2/2] \qquad (4.25a)$$

$$Q_\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial p^\mu} = x_\mu - P_\mu s + (1/Pk)\int^{kx} eA_\mu d\Phi - (k_\mu/(Pk)^2)\int^{kx} [e(PA) - e^2A^2/2]d\Phi \qquad (4.25b)$$

Après avoir fait un peu de mécanique classique, passons maintenant au calcul du propagateur (4.11) dont la version discrète est (4.12). Rappelons que les p_j sont constants dans chaque intervalle $[s_{j-1}, s_j]$ ($p(s)$ est discontinu alors que $x(s)$ est continu) et par voie de conséquence p_j et x_j ne sont pas réellement des variables canoniques. Pour passer des (x_j, p_j) aux variables (Q_j, P_j), il n'est pas tout à fait clair comment trouver le lien dans le cas général. On peut utiliser les relations (4.25a) et (4.25b) en remplaçant les ∂ par Δ comme suit [8].

– Nous adoptons le mid-point comme prescription

$$(p_j)_\mu = -\frac{\Delta F_2}{\Delta x^\mu_j} = -\frac{F_2(\tilde{x}^\nu_j, x^\mu_j, P_j, \tilde{s}_j) - F_2(\tilde{x}^\nu_j, x^\mu_{j-1}, P_j, \tilde{s}_j)}{x^\mu_j - x^\mu_{j-1}}$$

$$(Q_j)_\mu = -\frac{\Delta F_2}{\Delta P^\mu_j} = -\frac{F_2(\tilde{x}_j, P^\nu_j, P^\mu_{j+1}, \tilde{s}_j) - F_2(\tilde{x}_j, P^\nu_j, P^\mu_j, \tilde{s}_j)}{P^\mu_{j+1} - P^\mu_j}$$

μ fixe, $\mu \neq \nu$ $\quad \nu = 0, 1, 2, 3.$

qui donnent après développement:

$$(p_j)_\mu = (P_j)_\mu + \frac{k_\mu}{(P_jk)}[e(P_j\tilde{A}_j) - e^2\tilde{A}^2_j/2] + \text{termes d'ordre supérieur en } \Delta x^\mu_j$$

$$(Q_j)_\mu = (x_j)_\mu - (P_j)_\mu s_j + \frac{1}{(P_jk)}\int^{kx_j} eA_\mu d\Phi - (k_\mu/(Pk)^2)\int^{kx_j} [e(P_jA) - e^2A^2/2]d\Phi +$$

$+$ termes d'ordre supérieur en ΔP_j^μ

Il est clair que $\dfrac{\partial(x_j,p_j)}{\partial(Q_j,P_j)} = 1 +$ termes d'ordre supérieur en $\left(\Delta x_j^\mu\right.$ $\left., \Delta p_j^\mu\right)$ et donc en $\left(\Delta Q_j^\mu, \Delta P_j^\mu\right)$. Ces termes d'ordre supérieur en ΔQ_j^μ $,\Delta P_j^\mu$ ne peuvent être négligés dans le cas général, puisqu'ils peuvent être remplacés par un potentiel effectif en h^2. Dans notre problème, ce potentiel effectif est probablement nul. Limitons-nous à un calcul semi-classique, C'est à dire en négligeant ces termes d'ordre supérieur.

Dans ce cas le jacobien $\dfrac{\partial(x_j,p_j)}{\partial(Q_j,P_j)}$ est égal à un.

Le calcul semi-classique suppose que nous considérons uniquement la contribution des chemins classiques dans le calcul de l'intégrale (4.11), comme

$-p_j\Delta x_j - \mathcal{H}(x_j,p_j) = -P_j\Delta Q_j + \Delta F_j$

avec $F_1 = F_2 + PQ$ pour tout intervalle. Alors le propagateur (4.11) devient

$$K^{s.cl}(x_b,x_a;\lambda) = \lim_{N\to\infty} \int \frac{d^4P_N}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{N-1} d^4Q_j \frac{d^4P_j}{(2\pi)^4} \exp\left[i\sum_{j=1}^{N} \{P_j\Delta Q_j + \Delta F_j\}\right]$$

Si on intègre sur les Q_j, on fait apparaître $\prod_{j=1}^{N-1}(2\pi)^4\delta(P_j - P_{j+1})$, autrement dit P constant ($P_1 = P_2 = \dots = P_N$), à cause du fait que $\dot{P} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q} = 0$

D'où l'expression du propagateur, obtenue par un calcul semi-classique via une transformation canonique:

$$K^{s.cl}(x_b,x_a;\lambda) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \exp\left[i\{F_2(b) - F_2(a)\}\right]$$

où

$$p = p_N = p(P, Q_b, s_b)$$

Notons aussi que, si on intégre d'abord sur P_j, on fait apparaitre $\prod_{j=1}^{N-1} (2\pi)^4 \delta(Q_j - Q_{j-1})$ et donc Q = constante reflétant la propriété:

$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 0$. Cette expression du propagateur a été obtenu récemment [10]. Ainsi, le propagateur obtenu par la méthode d'Hamilton-Jacobi, devient: (le calcul effectué est donc semi-classique)

$$K^{s.cl}(x_b, x_a; \lambda) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-iP(x_b - x_a) + iP^2\lambda/2 - i\int_{kx_a}^{kx_b} (\frac{e(PA)}{(Pk)} - \frac{e^2 A^2}{2(Pk)}) d\phi$$

(4.26)

où p est fonction de P donnée par la relation (4.25-a).

Un calcul très long donne $d^4p = d^4P$. Cependant, pour l'éviter rappelons nous (cf éq(4.26))que $pA = PA$ et $pk = Pk$ et introduisons la transformation, inverse de (25-a), suivante;

$P = p - \frac{k\mu}{(P\ k)}[e(P\ A_b) - e^2\ A_b^2/2]$, dans l'équation(4.26), on obtient,

$$K^{s.cl}(x_b, x_a; \lambda) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x_b - x_a) + ip^2\lambda/2 - i\int_{kx_a}^{kx_b} (\frac{e(pA)}{(pk)} - \frac{e^2 A^2}{2(pk)}) d\phi$$

$$-i[e(pA_b - e^2 A_b^2/2][\lambda - k(x_b - x_a)/(pk)] \qquad (4.27)$$

Montrons que la condition $(pk)\lambda = k(x_b - x_a)$ est implicitement contenue dans l'équation(4.26). Pour cela posons $\omega = (pk)\lambda$ et insérons la contrainte;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \delta(\omega - (pk)\lambda) = \int d\omega \frac{dp_\omega}{2\pi} \exp[ip_\omega(\omega - (pk)\lambda)] = 1$$

dans l'équation(4.27), on aura alors;

$$K^{s.cl}(x_b,x_a;\lambda)=\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}d\omega\,\frac{dp_\omega}{2\pi}\exp\Big[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2\ -i\int_{kx_a}^{kx_b}\Big(\frac{e(pA)}{(pk)}-$$

$$\frac{e^2A^2}{2(pk)}\Big)d\phi\ -i\lambda[e(pA_b-e^2A_b^2/2][1-k(x_b-x_a)/\omega]+ip_\omega(\omega-(pk)\lambda)\Big]$$

Changeant $p-p_\omega k \longrightarrow p$ et intégrant respectivement sur p_ω et ω, il vient

$$K^{s.cl}(x_b,x_a;\lambda)=\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}d\omega\ \delta(\omega-k(x_b-x_a))\exp\Big[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2$$

$$-i\int_{kx_a}^{kx_b}\Big(\frac{e(pA)}{(pk)}-\frac{e^2A^2}{2(pk)}\Big)d\phi\ \Big]$$

$$=\int\ \frac{d^4p}{(2\pi)^4}d\omega\ \delta(\omega-k(x_b-x_a))\exp\Big[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2-\frac{i\lambda}{kx_b-kx_a}\int_{kxa}^{kx_b}[e(pA)-e^2A^2/2]d\phi\Big]$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \exp\Big[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2-\frac{i}{(pk)}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(pA)-\frac{e^2A^2}{2}]d\phi\Big]$$

(4.28a)

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \exp\Big[-ip(x_b-x_a)+ip^2\lambda/2-\ \frac{i\lambda}{kx_b-kx_a}\int_{kx_a}^{kx_b}[e(pA)-\frac{e^2A^2}{2}]d\phi\Big]$$

(4.28b)

Ce résultat est le même que celui obtenu par intégration discrète (éq.(4.21).).
En outre, il confirme l'affirmation d'en desssus: $\frac{\partial(x_j,p_j)}{\partial(Q_j,P_j)}=1$

L'expression (4.28-a), obtenue via la transformation canonique, peut se comparer à l'expression semi-classique habituelle du propagateur:

$$\sum_{\alpha} \left[\det \frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x_b \partial x_a}\right]^{1/2} \exp(iS_\alpha)$$

Ici S_α est juste F_2, le nom (label) de la trajectoire classique est représenté par p et la somme $\sum_{\alpha} \left[\det \frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x_b \partial x_a}\right]^{1/2}$ est

remplacée par l'intégrale $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

Finalement, par intégration sur la 4-impulsion p, nous obtenons la fonction de Green pour les particules de spin zéro comme suit:

$$\Delta(x_b,x_a) = (1/8\pi^2)\exp\left[-\frac{ie(x_b - x_a)}{k(x_b-x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} A\, d\phi\right]\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left[-(im^2\lambda/2) - \frac{i(x_b-x_a)^2}{2\lambda} + \frac{i\lambda e^2}{2k(x_b-x_a)}\left\{\int_{kx_a}^{kx_b} A^2 d\phi - \frac{1}{k(x_b-x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} A\, d\phi\right]^2\right\}\right] \quad (4.29)$$

Il est facile de vérifier que $\Delta(x_b,x_a)$, ainsi écrite, vérifie l'équation de Klein-Gordon (4.1).

Notons enfin, pour terminer cette section, que la fonction de Green (4.29) s'obtient simplement par un calcul semi-classique. En effet, si l'on retient uniquement la contribution des chemins classiques dans le calcul de l'intégrale (4.6), alors

2

$$K \longrightarrow \left[\det \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_b \partial x_a}\right]^{1/2} \exp(iS_c)$$

pour déterminer le chemin classique, on peut partir soit, du lagrangien et utiliser l'équation du mouvement de Lagrange:

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}+eA) = ek(\dot{x}\frac{dA}{d\phi})$$

dont la résolution s'effectue par itération grâce à la propriété qui en découle $k\frac{dx}{ds} = k\dot{x} = cste$ $(kA=0;k^2=0)$.
Soit, en utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi dont la résolution a été déjà faite. Le chemin classique est donné par l'équation (4.25-b) avec P,Q constantes. En utilisant(4.25-b) et les

conditions initiales $x_a = x(0)$; $x_b = x(\lambda)$, l'expression $i S_{cl}$ trouvée est juste l'exposant de toutes les exponentielles de l'équation (4.29). Le calcul du determinant de la matrice 4*4 (calcul assez long) est simplement $[-(2\pi\lambda)^{-4}]$. Ce qui montre donc, que la contribution principale apportée au calcul du propagateur (4.6), provient uniquement des chemins classiques.

IV-3) LES FONCTIONS DE GREEN POUR LES PARTICULES DE SPIN 1/2

Les équations (4.6) et (4.7) décrivant respectivement des particules sans spin et avec spin dans un champ électromagnétique, diffèrent seulement par le terme de couplage " spin-champ " $(\sigma.F)$. La fonction de Green $S_1(x_b, x_a)$ se calcule via la même méthode utilisée pour $\Delta(x_b, x_a)$. Toutefois, nous rajoutons à l'action un terme supplémentaire décrivant le couplage, de la sorte la fonction de Green s'écrira en notation standard comme

$$S_1(x_b,x_a)=(1/(2\pi)^4)\int \frac{d^4p}{p^2-m^2+i0}\exp[-ip(x_b-x_a)-i\int_{kx_a}^{kx_b}(\frac{e(pA)}{(pk)}-\frac{e^2\hat{A}^2}{2(pk)})d\phi$$
$$+\int_{kx_a}^{kx_b}(e(\sigma.F)/4)\ d\phi]$$

où il faut noter que $S_1(x_b,x_a)$ est une matrice 4*4 et (σF) dépend seulement de ϕ

$(\sigma F)=\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu};\ F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\ k_\mu A'_\nu-k_\nu A'_\mu$.

Le prime indique la dérivation par rapport à ϕ.

ou bien $(\sigma F)\ =\ 2i\hat{k}\hat{A}'$ où $\hat{Z}=Z_\mu\gamma^\mu$ et nous avons utilisé les relations $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=2(AB),\ kA'=0$

Ainsi alors, l'expression de la fonction de Green $S_1(x_b,x_a)$ devient

$$S_1(x_b,x_a)=(1/(2\pi)^4)\int \frac{d^4p}{p^2-m^2+i0}\exp[-ip(x_b-x_a)-i\int_{kx_a}^{kx_b}(\frac{e(pA)}{(pk)}-\frac{e^2A^2}{2(pk)})d\phi]$$

$$\exp[(e/2(pk))\hat{k}(\hat{A}_b-\hat{A}_a)]$$

Le fait que $[\hat{k}(\hat{A}_b-\hat{A}_a)]^2$ soit nul, donne

$$\exp[(e/2(pk))\hat{k}(\hat{A}_b-\hat{A}_a)]\ =\ 1+(e/2(pk))\hat{k}(\hat{A}_b-\hat{A}_a)$$

$$=[1+(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_b)][1-(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_a)]$$

où $\hat{A}_b=\hat{A}(kx_b);\ \hat{A}_a=\hat{A}(kx_a)$.

Ce qui nous laisse écrire $S_1(x_b,x_a)$ sous la forme suivante:

$$S_1(x_b,x_a)=(1/(2\pi)^4)\int\frac{d^4p}{p^2-m^2+i0}[1+(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_b)][1-(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_a)]$$

$$\exp[-ip(x_b-x_a)-i\int_{kx_a}^{kx_b}(\frac{e(pA)}{(pk)}-\frac{e^2A^2}{2(pk)})d\phi] \qquad (4.30)$$

La fonction de Green $S(x_b,x_a)$ est déduite de l'équation (4.4):

$$S(x_b,x_a) = (\hat{\pi}_b + m)S_1(x_b,x_a)$$

$$= (1/(2\pi)^4)\int\frac{d^4p}{p^2-m^2+i0}[1+(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_b)][\hat{p}+m][1-(e/2)(pk))\hat{k}(\hat{A}_a)]$$

$$\exp[-ip(x_b-x_a)-i\int_{kx_a}^{kx_b}(\frac{e(pA)}{(pk)}-\frac{e^2A^2}{2(pk)})d\phi] \qquad (4.31)$$

où nous avons utilisé les relations $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=2(AB)$; $k^2=0$; $kA=0$.
Pour déteminer les fonctions d'onde, intégrons sur la variable p^o et utilisons les opérateurs de projection sur les états d'énergies positives et négatives [11] définis par:

$$\Lambda_+(p) = (\hat{p}+m)/2m = \sum_{\pm s}\mathcal{U}(p,s)\bar{\mathcal{U}}(p,s)$$

$$\Lambda_-(p) = (-\hat{p}+m)/2m = -\sum_{\pm s}\mathcal{V}(p,s)\bar{\mathcal{V}}(p,s) \qquad (4.32)$$

La fonction de Green admet deux pôles: $p^0_+=\omega-i0$ et $p^0_-=-\omega+i0$. Et de manière analogue que précédemment, les contours d'intégration sont choisis, en dessus pour les energies négatives, et en dessous pour les énergies positives. Nous noterons aussi la présence de $\theta(t_b-t_a)$ pour p^0_+ et $\theta(t_a-t_b)$ pour p^0_-. Après application du théoreme de Cauchy, il vient:

$$S(x_b,x_a)=-i\theta(t_b-t_a)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(m/p^0)[1+(e/2pk)\hat{k}\hat{A}_b]\frac{\hat{p}+m}{2m}[1-(e/2pk)\hat{k}\hat{A}_a]$$

Le développement (4.33) est ainsi conforme aux conditions aux limites imposées par la théorie des trous (holes). Contrairement au cas de Klein-Gordon, où la théorie des trous n'existe pas, les états de fréquences négatives sont indisp nsables si l'on veut obtenir des résultats physiques corrects tels que le calcul de la section efficace de Thomson.

IV-4) Conclusion

Nous avons calculé la fonction de Green pour des particules de spin zéro et 1/2 en interaction avec une onde électromagnétique plane. La fonction de Green dans le cas de spin zéro a été obtenue par deux méthodes , directe , et , semi-classique à l'aide des transformations canoniques. Cette fonction de Green peut alors être ajoutée à la liste des fonctions de Green, dont l'expression semi-classique est exacte. Pour le cas de spin 1/2, la situation est plus complexe. Nous avons seulement déduit sa fonction de Green à partir de celle de spin zéro.
Les ondes (spin zéro) et fonctions d'onde (spin 1/2) ont été déduites et coincident avec ceux de la littérature.

REFERENCES:

[1] D.M.Volkov,Zh.Eksp.Teor.Fiz.2 1286 (1937).

[2] L.Landau et E.Lifchitz, Theorie quantique relativiste (Mir, Moscou-1972);A.G.Nikintin, Theoritical and Mathematical Physics,57;1123, (1985).

[3] A.O.Barut,O,Ozaltin and N.Unal,Act Physica Austriaca ;56, 179 (1985).

[4] J.Schwinger, Phys.Rev 82. 664 (1951).

[5] R.P.Feynman,Phys.Rev.84.108 (1951);L.S.Schulman,Techniques and Applications of Path-integration (Wiley,New York,1981).

[6] L.Chetouani etT.F.Hammann,Nuovo Cimento,B.98.1.(1987);Phys.Rev A.34.4737(1986);L.Chetouni,L.Guechi and T.F.Hammann.J.Math. Phys.30 655 (1989);L.Chetouni,A.Chouchaoui and T.F.Hammann, J.Math.Phys,31838 (1990).L.Chetouani,L.Guechi,Letlout and T.F.Hammann,Nuovo Cimento,B.105 ,387(1990).

[7] D.Mc.Laughlin and L.S.Schulman,J.Math.Phys.12,2520(1971).

[8] L.Chetouni,L.Guechi and T.F.Hammann,Phys.Rev.A40,1157(1989).

[9] L.Landau et E.Lifchitz,Theorie des champs (Mir,Moscou,1970).

[10] A.O.Barut and I.H.Duru, Phys.Rev,A38,5906(1988).

[11] J.D.Bjorken and S.D.Drell,Relativistic Quantum Mechanics (Mc Graw Hill,1964).

CONCLUSIONS

CONCLUSIONS:

Dans le chapitre III, nous avons traité le potentiel ecrante dans sa version integrale de chemin, dotee des techniques nouvelles tres efficaces. Ces techniques sont essentiellement la reparametrisation des chemins admettant une singularite, a l'aide des transformations spatio-temporelles et les methodes de la theorie des groupes appliquee a l'integrale de parcours. En premier lieu, nous avons choisi une transformation spatio-temporelle qui a pu rejeter la singularité à l'infini (integrale de chemin stable). Aboutissant ainsi au potentiel de Pöschel-Teller dont le traitement a necessite une extension de la dimension de l'espace (conversion du probleme à la pseudo-sphere unite de $E_{2,2}$). Et enfin de l'utilisation des méthodes de la theorie des groupes a resulte le propagateur relatif au potentiel ecrante. Pour chaque partie, discrete et continue, du propagateur nous avons choisi des transformations independantes. Cependant, une transformation commune aux deux parties pourrait exister.

Dans le chapitre IV, l'astuce de Fock nous a permis de reduire l'equation de Klein-Gordon a une equation de Schrödinger. Chemin par lequel, l'etude de la fonction de Green d'une particule de spin zero soumise au champ d'une onde plane, a ete tres aisee. Un calcul semi-classique nous a montre que les contributions apportees a la fonction de Green sont dues essentillement aux chemins classiques. Pour la particule de spin 1/2, la fonction de Green est deduite de celle de zero. C'est à dire qu'on a utilise l'equation quadratique de Dirac au lieu de l'equation lineaire,ce qui laisse l'etude du probleme critiquable. La solution du probleme pourrait etre satisfaisante dans le cadre du modele de Barut et Duru (degré de liberte interne du spin).

Dans notre travail nous avons traite donc deux problemes de la mecanique quantique, l'un non relativiste et l'autre relativiste. Et nous avons essaye de montrer et de confirmer, la encore, l'efficacite et la simplicite des methodes fonctionnelles dans l'etude de ces problèmes.

ANNEXES

A1) LE GROUPE SU(1;1) ET SES REPRESENTATIONS

Le groupe SU(1,1) présente beaucoup de similarités avec le groupe SU(2) et il est, voire même, son prolongement analytique. Le fait que SU(1,1) soit non compact, il s'ensuit qu'il posséde une série continue de representations unitaires. Et les fonctions de Wigner qui s'introduisent dans SU(2) sont remplacées par les fonctions de Bargmann dans SU(1,1).

I1) DESCRIPTION ET PARAMETRISATION

SU(1,1) est l'ensemble des matrices du second ordre de la forme:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad |\alpha|^2-|\beta|^2=1$$

Ainsi, SU(1,1) muni de la multiplication des matrices, forme un groupe appelé groupe des matrices unimodulaires et quasi-unitaires du second ordre.

Il est facile de vérifier que, si $g \in SU(1,1)$, alors:

$g\ s\ g^{+} = s$ où $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, g^{+} étant l'adjointe de g

Inversement, si $g\ s\ g^{+} = s$ et $\det g = +1$, alors, $g \in SU(1,1)$.

Comme il existe entre SU(2) et SO(3) " groupe des rotations dans E_3 realisé sur une sphere "un épimorphisme , il existe aussi un épimorphisme entre SU(1,1) et SH(3) " groupe des rotations dans E_3 realisé sur une hyperboloïde ou un cône ". Ceci laisse voir beaucoup d'applications du groupe SU(1,1), surtout en physique.

Une paramétrisation plus adéquate utilise les angles d'Euler qui sont, dans le cas général, des nombres complexes.

Comment: puisque presque toute matrice de $SL(2,C)$ " groupe des matrices complexes unimodulaires du second ordre " se présente sous la forme suivante: $u \in SL(2,\mathbb{C})$

$$u = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)\ \exp[-i(\phi+\psi)/2] & i\ \sin(\theta/2)\exp[i(\psi-\phi)/2] \\ i\ \sin(\theta/2)\ \exp[i(\phi-\psi)/2] & \cos(\theta/2)\exp[i(\phi+\psi)/2] \end{bmatrix}$$

où θ, ϕ, ψ sont les angles d'Euler complexes.

Il est facile d'en retrouver celle de $SU(1,1)$ sachant que:

$$\text{pour } u \in SU(1,1);\ u \in SL(2,C) \text{ avec } u = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne après identification θ imaginaire pur, ϕ et ψ réels. remplaçons alors θ par $\tau = i\ \theta$ réel, alors u prend la forme suivante $u \in SU(1;1)$;

$$u = \begin{bmatrix} Ch(\theta/2)\ \exp[-i(\phi+\psi)/2] & Sh(\theta/2)\exp[i(\psi-\phi)/2] \\ Sh(\theta/2)\ \exp[i(\phi-\psi)/2] & Ch(\theta/2)\exp[i(\phi+\psi)/2] \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

avec les domaines de variations

$$\begin{cases} 0 \le \phi < 2\pi \\ 0 \le \tau < \infty \\ 0 \le \psi < 4\pi \end{cases}$$

qui assurent des relations binuvoques entre les paramétres et les éléments de SU(1,1).

La formule (1) peut être aussi écrite sous la forme:

$$u = \begin{bmatrix} e^{-i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ch(\tau/2) & Sh(\tau/2) \\ Sh(\tau/2) & Ch(\tau/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Psi/2} \end{bmatrix} \qquad (A.2)$$

12) MESURE INVARIANTE

Le groupe SU(1,1) étant localement compact, il posséde une mesure invariante, c'est a dire:

$$\int f(g)\, dg = \int f(g\, g_0)\, dg \; ; \quad g_0 \text{ et } g \in SU(1,1)$$

où f est une fonction continue à support compact definie sur SU(1,1).

Soit $g \in SU(1,1)$, $\quad g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{bmatrix}$

multiplions-le à droite par l'élément $g_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \bar\beta_0 & \bar\alpha_0 \end{bmatrix} \in SU(1,1)$.

il vient

$$g' = g g_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \bar\beta_0 & \bar\alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \bar\beta' & \bar\alpha' \end{bmatrix}$$

avec $\begin{cases} \alpha' = \alpha_0\alpha + \beta\,\bar\beta_0 \\ \beta' = \alpha\,\beta_0 + \beta\,\bar\alpha_0 \end{cases}$

puisque $g_0 \in SU(1,1)$, la transformation précédente a pour determinant 1, il s'ensuit que sur SU(1,1), $dg = d\alpha\, d\bar\alpha\, d\beta\, d\bar\beta$ est invariante relativement à la multiplication à droite par des éléments de SU(1,1).

La formule (A.1) permet d'écrire:

$$\begin{cases} \alpha = r\, Ch(\tau/2)\exp[-i(\phi+\psi)/2] \\ \beta = r\, Sh(\tau/2)\exp[i(\phi-\psi)/2] \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\alpha} = r\, Ch(\tau/2)\exp[i(\phi+\psi)/2] \\ \bar{\beta} = r\, Sh(\tau/2)\exp[-i(\phi-\psi)/2] \end{cases}$$

avec la contrainte $r = 1$ qui est équivalente à $\det g = 1$.
Après un calcul simple on arrive à:

$$dg = \frac{1}{16\pi^2}\, sh\tau\, d\tau\, d\phi\, d\psi \qquad (A.3)$$

Ceci est retrouvé après l'introduction de la contrainte $\delta(r-1)$.
Ici le facteur $\frac{1}{16\pi^2}$ est choisi arbitrairement puisque le volume du groupe est infini.

I3) L'ALGEBRE DE LIE ASSOCIEE

L'algèbre de Lie associée à SU(1,1) est realisée par les trois sous groupes à un paramétre respectivement composés des matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} Ch(t/2) & -Sh(t/2) \\ -Sh(t/2) & Ch(t/2) \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} Ch(t/2) & iSh(t/2) \\ -iSh(t/2) & Ch(t/2) \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} e^{-it/2} & 0 \\ 0 & e^{it/2} \end{bmatrix}$$

dont les matrices tangentes sont respectivement:

$$(1/2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ (1/2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ (1/2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elles peuvent être réduites aux matrices:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (A.4)$$

appelées matrices de Pauli relatives au groupe SU(1,1).
Ces matrices étant linéarement indépendantes, elles forment une base de l'algèbre de Lie associée à SU(1,1). leurs relations de commutation sont données par:

$$[\sigma_1; \sigma_2] = -2 i \sigma_3 ; [\sigma_2; \sigma_3] = -2 i \sigma_1 ; [\sigma_3; \sigma_2] = 2 i \sigma_2 \qquad (A.5)$$

14) REPRESENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES DE SU(1;1)

Il est bien connu que les représentations unitaires irrédutibles, $D^{l,\sigma}(g)$ de SU(1;1) où l complexe et σ vaut 0 ou un-demi, peuvent être divisées en deux séries fondamentales et une série dite complémentaire (dans un certain espace de Hilbert). On sait, en plus, que dans la décomposition d'une fonction définie sur SU(1;1) et de carré intégrable, il ne figure que des éléments de représentations unitaires irréductibles. Et de plus, elles n'appartiennent qu'aux séries fondamenales. Ce fait ne nous laisse s'intéresser qu'à ces dernieres: $D^{l,\sigma}(g)$

$$\text{Séries continues: } l = -\frac{1}{2} + i\rho \quad \begin{cases} \rho \geq 0 & m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ pour } \sigma = 0 \\ \rho > 0 & m = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots \text{ pour } \sigma = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Séries discrètes: } l = -\frac{1}{2}, 0, \ldots \begin{cases} m = l+1, l+2, \ldots \text{ pour } \sigma = + \\ m = -l-1, -l-2, \ldots \text{ pour } \sigma = - \end{cases} \qquad (A.6)$$

Venons-en maintenant aux éléments des matrices de représentations. En utilisant la décomposition (A.2) des éléments de SU(1;1) et l'action de $D^{l,\sigma}(g)$ sur l'espace de Hilbert (espace de la représentation), il est possible de montrer que les éléments de matrices sont donnés par:

$$d^{l,\sigma}_{m,n}(g) = \exp(-im\phi)\ d^{l,\sigma}(\tau)\ \exp(-in\psi) \qquad (A.7)$$

où $d^{l,\sigma}_{m,n}(\tau)$ sont les fonctions de Bargmann obtenues par une continuation analytique, en θ et en indice l, des fonctions de Wigner $d^{l,\sigma}_{m,n}(\theta) \in SU(2)$. Cette propriété découle du fait que SU(1;1) est considéré comme continuation analytique de SU(2).

Pour $m \geq n$:

$$d^{l,+}_{m,n}(\tau) = [1/(m-n)!] \left[\frac{\Gamma(l+m+1)\Gamma(m-l)}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(n-l)} \right]^{1/2} [Ch(\tau/2)]^{-m-n}[Sh(\tau/2)]^{m-n}$$

$$_2F_1\ (l-n+1, -n-l, l+m-n; -Sh^2(\tau/2)) \qquad (A.8)$$

$$d^{l,-}_{m,n}(\tau) = [1/(m-n)!] \left[\frac{\Gamma(l-n+1)\Gamma(-n-l)}{\Gamma(l-m+1)\Gamma(-m-l)} \right]^{1/2} [Ch(\tau/2)]^{m+n}[Sh(\tau/2)]^{m-n}$$

$$_2F_1\ (l+m+1, +m-l, l+m-n; -Sh^2(\tau/2)) \qquad (A.9)$$

Pour $n \geq m$ on a: $d^{l,\sigma}_{m,n}(\tau) = (-1)^{m-n} d^{l,\sigma}_{n,m}(\tau)$

avec $d^{l,+}_{m,m}(\tau) = d^{l,-}_{m,m}(\tau)$

Les séries continues s'obtinnent par continuation analytique:

$$l \longrightarrow -\frac{1}{2} + i\rho$$

Ib) ANALYSE DE FOURIER SUR LE GROUPE SU(1;1)

Toute fonction de carré integrable définie sur SU(1;1) admet unedécomposition en éléments matriciels de représentations, essentiellement constituée des séries fondamentales, continues et discrètes.(les series $D^{-\frac{1}{2},\sigma}(g)$ sont exclues).Ces éléments matriciels forment ainsi un système orthogonal sur SU(1;1).

Une telle orthogonalisation s'exprime par les relations suivantes:

$$\int_{SU(1,1)} d^{l',\sigma}_{m'n'}(g)\, d^{l,\sigma}_{m,n}(g)\; dg = \begin{cases} (\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'})/(2l+1) & \text{pour } \sigma = \pm \\ (\delta(\rho-\rho')\delta_{m,m'}\delta_{n,n'})/(2\rho\, \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)) & \text{pour } \sigma = 0, 1/2 \end{cases}$$

De la sorte, on aura la décomposition en séries de Fourier de toute fonction de carré intégrable définie sur SU(1;1), comme suit:

$$f(g) = \sum_{\sigma} \left\{ L \sum_{2l=0}^{\infty} (2l+1) + \int_0^{\infty} d\rho\; 2\rho\; \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma) J \sum_{m,n} \hat{f}^{\sigma}_{m,n}(g)\, d^{l,\sigma}_{m,n}(g) \right\}$$

ou $\qquad \hat{f}^{\sigma}_{m,n}(g) = \int_{SU(1,1)} f(g)\, d^{l,\sigma *}_{m,n}(g)\; dg$

Pour la partie continue, on effectuera le remplacement $l \longrightarrow -\frac{1}{2} + i\rho$.

A 11) INTEGRALE DE CHEMIN SUR LA VARIETE SU(1;1)

Dans le but de construire le propagateur défini sur la variété SU(1;1), nous utiliserons l'isomorphisme existant entre SU(1;1) et la sphère définie dans l'espace pseudo-euclidien $E_{2,2}$, muni de la métrique $g_{\mu\nu}=$ diag {+1,+1,-1,-1}. Et donc d'un produit scalaire: $(x,x)=(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2$.

En outre pour la régularisation des intégrales, on ajoutera:

- Une petite partie imaginaire positive à la masse, pour les composantes compactes (x^1,x^2)
- Une petite partie imaginaire négative à la masse, pour les composantes non-compactes (x^3, x^4)

111) ISOMORPHISME ENTRE SU(1;1) ET LA SPHERE.

Soient (x^1,x^2,x^3,x^4) les coordonnées dans $E_{2,2}$, définies par:

$x^1= r\, Ch(\tau/2)\cos[(\phi+\psi)/2]$ $\quad x^2= r\, Ch(\tau/2)\sin[(\phi+\psi)/2]$

$x^3= r\, Sh(\tau/2)\cos[(\phi-\psi)/2]$ $\quad x^4= r\, Sh(\tau/2)\sin[(\phi-\psi)/2]$

avec: (A.10)

$0 \leq \phi < 2\pi$

$0 \leq \tau < \infty$

$0 \leq \psi < 4\pi$

$0 \leq r < \infty$

Ainsi définies, il est aisé de voir que ces relations établissent l'isomorphisme entre SU(1,1) et la sphère unité définie dans $E_{2,2}$ par: $(x,x) = 1$

112) Propagateur de Feynman sur SU(1,1)

L'action élémentaire d'une particule libre est définie dans $E_{2,2}$ par:

$$S(j,j-1)=(m/2\varepsilon)\left[(\Delta x_j^1)^2+(\Delta x_j^2)^2-(\Delta x_j^3)^2-(\Delta x_j^4)^2\right] \qquad (A.11)$$

Le propagateur de Feynman relatif à cette particule dans cet espace est donné par l'intégrale fonctionnelle suivante:

$$K(x_b, x_a, t_b, t_a) = \int \mathcal{D}x(t) \exp\{iS(b,a)\} \tag{A.12}$$

ou $S(b,a) = \int_{ta}^{tb} \mathcal{L}(x,\dot{x})dt$

qui s'écrit sous la forme discrète comme suit:

$$K(x_b, x_a, t_b, t_a) = \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\varepsilon)(im/2\pi\varepsilon) \prod_{j=1}^{N-1} d^4x_j \prod_{j=1}^{N} \exp[iS(j,j-1)] \tag{A.13}$$

ou $S(j,j-1)$ est l'action donnée par la formule (A.11).

La constante de normalisation est choisie de manière à satisfaire la condition: $\lim_{t_b \to t_a} K(x_b, x_a, t_b, t_a) = \delta(x_b - x_a)$ (A.14)

Exprimant le propagateur en fonction des paramétres définis par les relations (A.10) ,il vient:

$$K(x_b, x_a, t_b, t_a) = \lim_{N \to \infty} \int \prod_{j=1}^{N} (m/2\pi i\varepsilon)(im/2\pi\varepsilon) \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{8} r_j^3 \, dr_j$$

$$Sh(\tau_j)\, d\tau_j d\Phi_j d\Psi_j \prod_{j=1}^{N} \exp\Big[iS(j,j-1)\Big] \tag{A.15}$$

ou $S(j,j-1)$ est exprimée aussi comme,

$$S(j,j-1) = (m/2\varepsilon)\Delta r_j^2 - (m/\varepsilon) r_j r_{j-1} [1 - (e_j, e_{j-1})] \tag{A.16}$$

le vecteur position est représenté en coordonées sphériques relatives à l'espace pseudo-euclidien $E_{2,2}$ par: $x = (r, \tau, \Phi, \Psi)$.

En vertu de l'isomorphisme existant entre SU(1;1) et la pseudo-sphère unité, il est possible d'écrire : (A.2)

$$g(\phi,\tau,\psi)=\begin{bmatrix} e^1-ie^2 & e^3-ie^4 \\ e^3+ie^4 & e^1+ie^2 \end{bmatrix}$$
$$= e^1 1 - i[e^2\sigma_3 + e^3\sigma_1 + e^4\sigma_2] \qquad (A.17)$$

où e^1, e^2, e^3, e^4 sont les composantes de e dans $E_{2,2}$, et $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les générateurs de l'algèbre de Lie de SU(1;1). Par un simple calcul, il est aisé de vérifier que le produit scalaire s'écrit:

$$(e,e') = \frac{1}{2} Tr[g(\phi,\tau,\psi)\ g^{-1}(\phi',\tau',\psi')] \qquad (A.18)$$

Ainsi donc s'écrira l'action élémentaire:

$$S(j,j-1)=(m/2\varepsilon)\Delta r_j^2-(m/\varepsilon)r_j r_{j-1}[1-\frac{1}{2} Tr g_j] \qquad (A.19)$$

ou $g_j = g(\phi_j,\tau_j,\psi_j)$ et $g_j = g_j g_{j-1}^{-1}$

Pour qu'on puisse réaliser le propagateur sur la variété SU(1;1), on doit tenir compte de la contrainte r = 1, c.à.d, se situer sur la pseudo-sphère unité de $E_{2,2}$. Une manière de le faire est de poser:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \exp[(im/2\varepsilon)\Delta r_j^2]=(2i\pi\varepsilon/m)^{1/2}\delta(r_j-r_{j-1}) \qquad (A.20)$$

Alors, en intégrant, évidemment, l'expression (A.15) sur les variables r_j, on obtient:

$$K(x_b,x_a,t_b,t_a)\Big|_{\text{pseudo sphère unité}} = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{j=1}^{N}(m/2\pi i\varepsilon)^{1/2}(im/2\pi\varepsilon)\prod_{j=1}^{N-1}2\pi^2 dg_j$$
$$\prod_{j=1}^{N}\exp\Big[iS(j,j-1)\Big] \qquad (A.21)$$

avec dg_j la mesure définie sur SU(1;1)

$$dg_j = (1/16\pi^2)Sh(\tau_j)\ d\tau_j d\phi_j d\psi_j \qquad (A.22)$$

et $S(j,j-1) = (m/\varepsilon)[1-\frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\, g_j]$

où l'on voit maintenant que l'action peut être considérée comme fonction définie sur SU(1;1). De ce fait, elle admettra le développement suivant;

$$f(g)= \sum_{\sigma} \left\{ [\sum_{2l=0}^{\infty} (2l+1)+\int_0^{\infty} d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)] \sum_{m,n} \hat{f}^{\sigma}_{m,n}(g) d^{l,\sigma}_{m,n}(g) \right\} \qquad (A.23)$$

En outre, elle est fonction centrale, c.a.d., $f(g_0^{-1} g g_0) = f(g)$.
Le développement est restreint alors, aux caractères des représentations notes $\chi^{l,\sigma}(g)$.
On aura, alors;

$$\exp[-(iZ/2)\ \mathrm{Tr}(g)]= \sum_{\sigma} \left\{ [\sum_{2l=0}^{\infty} (2l+1)+\int_0^{\infty} d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)] \right.$$

$$\left. \sum_{m} (2/\pi Z)[K_{2l+1}(iZ)+(-1)^m\ K_{2l+1}(-iZ)] d^{l,\sigma}_{m,m}(g) \right\}$$

(A.24)

l'expression précédente se déduit de:

$$f^{\sigma}_{m,n}(1)=(2/\pi Z)[K_{2l+1}(iZ)+(-1)^m\ K_{2l+1}(-iZ)]\delta_{m,n} \qquad (A.25)$$

Les K_l représentent les fonctions de Bessel modifiées.

Profitons, du fait que $\varepsilon \longrightarrow 0$, pour ne garder que le développement;

$$f^{\sigma}_{m,n}(1)=(\delta_{m,n}/2\pi^2)(2\pi/iZ)(2i\pi/Z)^{1/2}\exp\left\{-iZ-i\frac{(2l+1)^2-1/4}{2Z}+0(1/Z^2)\right\}$$

(A.26)

Il est à noter que pour cette formule, il y a distinction entre les séries discrètes et continues.

1°) les séries discrètes sont la conséquence des composantes compactes, la masse régularisante est alors $m+i\eta$ donc $\mathrm{Im}z > 0$.

2°) les séries continues sont la conséquence des composantes non compactes, la masse régularisante est alors $m - i\eta$ donc $\mathrm{Im}z < 0$.

On obtient immédiatement l'expression suivante, en appliquant (A.26):

$$\exp[-(im/\varepsilon)\ (1-\frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(g))] = \sum_{\sigma}\left\{[\sum_{2l=0}^{\infty}(2l+1)+\int_0^\infty d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)]\right.$$

$$\left.(1/2\pi^2)(2\pi\varepsilon/im)(2i\pi\varepsilon/m)^{1/2}\exp\left\{-i\frac{(2l+1)^2-1/4}{2m}\varepsilon\right\}\ \chi^{l,\sigma}(g)\right\} \qquad (A.27)$$

A ce stade, insérons ce développement dans la formule (A.21), on aura:

$$K(x_b,x_a,t_b,t_a) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1}dg_j\prod_{j=1}^{N}\left\{\sum_{\sigma_j}\left\{[\sum_{2l_j=0}^{\infty}(2l_j+1)+\int_0^\infty d\rho_j\,2\rho_j\,\mathrm{th}\pi(\rho_j+i\sigma_j)]\right.\right.$$

$$\left.\left.(1/2\pi^2)\exp\left\{-i\frac{(2l_j+1)^2-1/4}{2m}\ \varepsilon\right\}\ \chi^{l_j,\sigma_j}\ (g_jg_{j-1}^{-1}\ )\right\}\right\}$$

(A.28)

De l'orthogonalité de la fonction caractère, il vient :

$$\int_{SU(1,1)}\chi^{\lambda,\sigma}\ (g''g'^{-1})\chi^{\lambda',\sigma'}\ (g'\ g^{-1})dg' = \frac{\delta_{\sigma,\sigma'}.\delta(\lambda,\lambda')}{d_\lambda}\ \chi^{\lambda,\sigma}\ (g''g^{-1})$$

(A.29)

où

$$\delta(\lambda,\lambda')=\begin{cases}\delta_{\lambda,\lambda'} & \text{cas discret}\\ \delta(\lambda-\lambda') & \text{cas continu}\end{cases}$$

et

$$d_\lambda=\begin{cases}2l+1 & \text{cas discret}\\ 2\rho\,\mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma) & \text{cas continu}\end{cases}$$

Il est clair que l'expression (A.28) se simplifie à:

$$K(x_b,x_a,t_b,t_a) = (1/2\pi^2)\sum_{\sigma}\left\{\left[\sum_{2l=0}^{\infty}(2l+1)\chi^{l,\sigma}(g_b g_a^{-1})\exp\left\{-iE_l(t_b-t_a)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^{\infty}d\rho\ 2\rho\ \mathrm{th}\pi(\rho+i\sigma)\chi^{-1/2+i\rho,\sigma}(g_b g_a^{-1})\exp\left\{-iE_{-\frac{1}{2}+i\rho}(t_b-t_a)\right\}\right]\right\}$$

(A.30)

avec: $E_l = \dfrac{(2l+1)^2-1/4}{2m}$ et $E_{-\frac{1}{2}+i\rho} = E_{l=-\frac{1}{2}+i\rho}$

Finalement, il ne reste que la séparation des parties initiales et finales. Elle résulte essentiellement de l'orthogonalité des éléments matriciels des représentations du groupe SU(1,1):

$$\chi^{l,\sigma}(g_b g_a^{-1}) = \sum_{m,n} d^{l,\sigma}_{m,n}(g_b)\, d^{l,\sigma\,*}_{m,n}(g_a)$$