

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Thèse

Présentée par

HADJ HAMMOU Abdelghani

En vue de l'obtention du diplôme de Docteur

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

Étude de quelques modèles cosmologiques dans le cadre de la théorie Einstein-Cartan

Soutenu publiquement le 08/07/2020 devant le jury suivant :

Président	F. Benamira	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur	S. R.Zouzou	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1
Examineur	A. Bouchareb	MCA	Université Badji Mokhtar Annaba
Examineur	K-E. Boudjemaa	MCA	Université Abbas Laghrour Khenchela

Je dédie ce mémoire à mes très chers parents et mes cinq sœurs que je ne remercierais jamais assez pour leur soutien et leur dévouement. Merci de m'avoir protégé et de faire de moi l'homme que je suis. Je tiens à vous exprimer mon amour le plus profond.

Remerciements

Je tiens d'abord à présenter mes remerciements à mon encadreur Monsieur S. R. ZOU-ZOU. Je voudrais également lui témoigner ma gratitude et ma très haute considération pour m'avoir guidé tout au long de mon travail. Il a su être très souvent à ma disposition et surtout très patient, une formidable expérience sur le plan scientifique et humain. Ses conseils et sa rigueur ont été d'une importance primordiale pour mener cette thèse à bon port. Merci

C'est un grand honneur pour moi que Monsieur BENAMIRA Farid, Professeur à l'université Constantine 1, préside le jury. J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur BOUDJEMAA K-E de l'université Abbas Laghrour de Khenchela et Monsieur BOUCHAREB A de l'université Badji Mokhtar d'Annab, pour avoir accepté de porter un jugement sur ce travail de thèse.

Un grand merci à Monsieur GUENOUCHE Mourad, un homme d'une bonté exceptionnelle. Heureux d'avoir fait sa connaissance.

Le parcours de chacun est fait de rencontres capitales qui en déterminent l'orientation, j'ai eu la chance de profiter de l'enseignement de Monsieur KAID Mohand Cherif qui ma fait découvrir la beauté des Mathématiques.

Table des matières

Table des matières	4
1 Introduction	6
2 Théorie d'Einstein-Cartan	10
2.1 Notations et définitions	10
2.2 La connexion de spin	12
2.3 Courbure et torsion (équations de structure de Cartan)	13
2.3.1 Interprétation géométrique de la torsion	16
2.4 Invariance de la métrique et tenseur de contorsion	17
2.5 Géodésiques et autoparallèles dans un espace-temps de Riemann-Cartan . .	19
2.6 Identités de Bianchi	19
2.7 Action et équations du champ	21
2.7.1 équations d'Einstein	23
2.7.2 équations de Cartan	27
2.8 Écart par rapport à la symétrie de τ_{ab}	31
2.9 Champs vectoriels et équations de Killing	33
3 Équation de non-conservation covariante et équation d'asymétrie	36
3.1 Équation de non-conservation covariante	37
3.2 Équation d'asymétrie	42
4 Modèle de Kottler avec torsion	46
4.1 Loi de Gauss faible en relativité générale	47
4.2 Loi de Gauss faible dans la théorie d'Einstein-Cartan	48
4.2.1 Forme générale de la connexion dans le cas statique à symétrie sphé- rique	48
4.2.2 Équations d'Einstein et de Cartan dans le cas de la métrique de Kottler	51
4.2.3 Tenseur de Cartan complètement antisymétrique	56
4.3 Géodésiques des photons dans le cas de la métrique de Kottler intérieure avec torsion	65
5 Modèle de Robertson-Walker avec torsion	71

5.1	Champs vectoriels de Killing associés aux quasi-translations (cas sphérique)	72
5.2	Métrie de Robertson-Walker et connexion de spin	73
5.3	Équations d'Einstein-Cartan	75
5.4	Modèle d'Einstein-Strauss et problème de la masse	81
5.5	Discussion	82
6	Conclusion	85
A	Autre forme des équations d'Einstein-Cartan	87
A.1	Tenseur de courbure, tenseur de Ricci et courbure scalaire	87
A.2	Équations d'Einstein-Cartan	88
A.2.1	Variation de l'action par rapport à la métrique	89
A.2.2	Variation de l'action par rapport au tenseur de contorsion	90
	Bibliographie	91

Chapitre 1

Introduction

Un peu plus de 100 années se sont écoulées depuis qu’Einstein a proposé sa théorie de la relativité générale (RG), considérée par beaucoup comme la théorie la plus élégante de la physique qui au fil des ans a passé tous les tests avec un énorme succès. Les derniers en date étant la détection des ondes gravitationnelles par les chercheurs du LIGO en septembre 2015 [1] et l’obtention de la première image du trou noir super massif *M87** grâce au EHT (event horizon telescope) en avril 2019. Cependant, malgré le succès incontestable de la RG un certain nombre de problèmes ne trouve toujours pas de solution dans le cadre de cette théorie. La formation de singularités, l’origine de la “récente” expansion accélérée, la nature de la matière noire et de l’énergie sombre sont autant de sujets qui restent ouverts en physique. Le plus gros inconvénient de la RG est que cette dernière ne tient pas compte des effets quantiques d’où cette quête effrénée des physiciens d’une théorie quantique de la gravitation qui unirait les deux piliers de la physique que sont la mécanique quantique et la RG.

La gravitation telle que décrite par Einstein nécessite un espace-temps dynamique capable de se courber en présence de la matière, tandis que les autres interactions fondamentales (nucléaire forte, nucléaire faible et électromagnétique) sont décrites par la théorie quantique des champs qui fonctionne plutôt sur l’espace-temps plat de Minkowski. On sait que les particules élémentaires possèdent deux caractéristiques fondamentales : la masse et le spin. Si la masse est considérée comme étant la source de la courbure, le spin devrait donc, en toute logique, être relié à une autre propriété géométrique de l’espace-temps. Cette quantité géométrique c’est la torsion.

Elie Cartan [2] avait dès 1922, c’est-à-dire avant même la découverte du spin, suggéré qu’une théorie de la gravité devrait inclure le moment angulaire intrinsèque de la matière, et a donc introduit la torsion. Mais l’avènement de la mécanique quantique dans les années vingt avait en partie éclipsé les travaux de Cartan qui sont passés presque inaperçus, et ce n’est qu’en 1964 que la théorie d’Einstein-Cartan a reçu beaucoup plus de reconnaissance grâce notamment aux travaux de Sciama [3] et Kibble [4] qui obtiennent indépendamment ¹,

1. pour cette raison, la théorie est rebaptisée théorie d’Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK)

dans le cadre de la théorie de jauge pour la gravitation, le même système d'équations décrivant l'énergie-impulsion et le spin de la matière respectivement comme sources de la courbure et de la torsion. En avril 2006, Steven Weinberg déclarait dans PHYSICS TODAY "j'ai jamais compris l'importance du point de vue physique de l'introduction de la torsion en géométrie différentielle", et poursuit "la torsion n'est qu'un tenseur qui peut être traité comme n'importe quel tenseur additionnel dans le contexte de la relativité générale". Dans le même magazine, Friedrich Hehl lui répond (mars 2007) "la torsion n'est pas juste un tenseur mais un tenseur très particulier qui est intrinsèquement relié au groupe de translation au sens de Yang-Mills, c'est le champ de force des translations. La torsion est reliée aux translations et la courbure aux rotations de Lorentz".

Friedrich Hehl est le physicien qui a le plus mis en évidence le rôle géométrique de la torsion dans la physique moderne [5, 6, 7, 8], il est surtout le coauteur [9] d'une revue "historique" sur la théorie U_4 dans laquelle cette dernière apparaît comme une théorie de jauge locale pour le groupe de Poincaré (U_4 référence faite à l'espace-temps de Riemann-Cartan dans lequel est décrite la théorie, V_4 étant réservé à l'espace-temps Riemannien de la RG). Une contribution significative fut également apportée par le "groupe de Varsovie" [10, 11, 12, 13, 14, 15]. On trouve aussi une large littérature sur le rôle de la torsion et ses implications en cosmologie dans [16], où une classification chronologique est donnée, et plus récemment dans [17, 18].

Dans la théorie EC, l'espace-temps est décrit par une géométrie non riemannienne et la connexion affine n'est donc pas nécessairement symétrique comme c'est le cas en RG avec les symboles de Christoffel. La torsion est définie comme la partie antisymétrique de cette connexion non riemannienne. Par conséquent, cette dernière est considérée comme une variable indépendante, au même titre que la métrique, utilisée pour la description du champ gravitationnel dont les équations sont issues du principe de moindre action. Du point de vue dynamique, le moment angulaire intrinsèque (spin) de la matière est responsable de la présence de la torsion tout comme la matière est responsable de la courbure de l'espace-temps. La relation spin-torsion étant algébrique cela implique que la torsion ne se propage pas dans le vide ce qui n'est pas un problème en soi, puisque c'est la raison principale pour laquelle, jusqu'à présent, aucune observation de la torsion n'a été détectée dans une région vide de l'espace. Une théorie dans laquelle la torsion peut se propager en dehors de la distribution de la matière devrait expliquer, afin d'être en accord avec les mesures expérimentales, pourquoi cette propagation hors de la matière est permise, mais uniquement avec une valeur trop petite pour être mesurée. Ainsi, les prédictions de la théorie EC diffèrent de celles de la RG uniquement à des densités extrêmement élevées, comme celles présentes à l'intérieur des trous noirs ou bien dans une époque où l'univers était encore très jeune. Dans ces conditions, la matière est si dense et l'énergie si élevée que les effets quantiques, notamment le couplage entre le spin de la matière et la torsion de l'espace-temps, sont prédominants et font apparaître une "force" gravitationnelle répulsive qui pourrait prévenir (en principe) la formation des singularités [19, 20, 21].

Malgré les nombreux avantages qu'offre la théorie EC sur le plan théorique, quelques aspects négatifs et non des moindres sont à souligner. Le principal problème réside dans le fait que la prescription de couplage gravitationnel dans le modèle EC viole le principe

d'équivalence fort² et, lorsqu'elle est utilisée pour décrire l'interaction gravitationnelle du champ électromagnétique, viole l'invariance de jauge $U(1)$ de la théorie de Maxwell qui est d'une importance capitale en physique. La violation de l'invariance de jauge signifie que la théorie n'est pas quantifiable puisque le lagrangien dans ce cas n'est pas invariant sous le groupe de transformations locales, le champ électromagnétique ne peut être couplé à la torsion et donc à la géométrie de Riemann-Cartan. Afin de préserver l'invariance de jauge dans la théorie EC, il est nécessaire d'émettre l'hypothèse suivante "les photons ne produisent pas et ne ressentent pas la torsion" [38]. Cependant, du point de vue quantique cette hypothèse n'est pas vraie puisque un photon peut se désintégrer virtuellement en une paire électron-positron. Ces derniers étant des fermions massives, ils sentiront donc l'effet de la torsion, par conséquent, le champ électromagnétique est aussi affecté par la torsion ; même s'il n'existe pas une interaction directe photon-torsion, il y a une interaction entre la torsion et la paire virtuelle électron-positron produite dans le vide par le photon "physique". Mathématiquement, ce mécanisme se traduit par une contribution quantique du second ordre aux équations de Maxwell modifiées (écrites dans un espace de Riemann-Cartan) qui, dans l'approximation classique (à l'ordre zéro), se réduisent aux équations de Maxwell connues (sans torsion). Un autre point faible de la théorie et qui concerne toujours le champ électromagnétique, lorsque ce dernier est considéré en tant que source les équations d'Einstein-Cartan ne sont pas covariantes (au sens de la théorie de jauge).

Noter enfin que les problèmes soulevés précédemment trouvent une solution dans une autre théorie de la gravitation où la torsion joue aussi un rôle important, il s'agit de la gravité téléparallèle (teleparallel gravity). Dans cette dernière, la torsion est considérée comme une alternative à la courbure pour la description de la gravitation, en d'autres termes, la courbure et la torsion sont apparentées aux mêmes degrés de liberté. Mais ce qui caractérise le plus la gravité téléparallèle c'est que la torsion agit comme une force dont l'équation est semblable à la force de Lorentz de l'électrodynamique, tandis qu'en RG ou dans la théorie EC la notion de force est abandonnée au détriment d'une géométrisation de l'interaction gravitationnelle, ce qui est totalement différent du point de vue conceptuel.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre relatif à l'explication de la nature de l'une des principales composantes de l'univers, à savoir la matière noire qui représente presque un quart ($\sim 26\%$) de la densité d'énergie totale de celui-ci. Plusieurs candidats sont proposés dans la littérature dont le plus prometteur (sérieux) reste les WIMP (weakly interacting massive particles), des particules hypothétiques qui ont la particularité d'être massives et n'interagissant que très faiblement avec la matière ordinaire (baryonique) d'où la difficulté de les observer. Dans notre cas, on a choisi d'aborder le problème de la matière noire par une démarche purement géométrique en attribuant l'excès de la densité d'énergie observée à la présence de la torsion à travers la loi de Gauss faible qui se trouve être violée dans la théorie d'Einstein-Cartan.

Le manuscrit est organisé de la façon suite :

le chapitre 2 est une introduction à la théorie d'Einstein-Cartan qui représente le socle

2. localement, les effets d'un champ gravitationnel sur toute expérience, même portant sur la gravitation elle-même, sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel de l'observateur.

sur lequel on construira toutes les idées de cette thèse. On donne les notions de base de la théorie allant de la connexion de spin jusqu'à la dérivation des équations du champ, en passant par l'interprétation géométrique de la torsion, principal concept qui différencie la théorie d'Einstein-cartan de la relativité générale. Dans le chapitre 3, on mettra en évidence deux caractéristiques importantes de la théorie EC à savoir, l'asymétrie et la non-conservation covariante du tenseur énergie-impulsion. On traduira mathématiquement ces deux propriétés en établissant des équations tensorielles qui s'avèrent être bien plus pratiques que la version (canonique) connue dans la littérature. La contribution originale apportée dans cette thèse est présentée de manière détaillée dans le chapitre 4. On procèdera à la résolution analytique des équations du champ dans le cas du modèle de Kottler avec torsion, puis nous montrerons que, dans ces conditions, la loi de Gauss faible n'est pas vérifiée, contrairement au cas de la relativité générale. Dans le même contexte, on proposera une alternative à la matière noire en utilisant uniquement l'idée de la torsion et étudierons les modifications que cette dernière apporte au phénomène de la lentille gravitationnelle à travers les géodésiques des photons dans le cas de la métrique de Kottler intérieure. Le chapitre 5 pose le problème de la jonction des métriques dans le modèle d'Einstein-Strauss lorsque la torsion est prise en considération, il apparaît alors un problème de la masse qui s'avère être variable dans ce cas, chose inexistante en l'absence de torsion. Le manuscrit se termine par une conclusion.

Chapitre 2

Théorie d'Einstein-Cartan

2.1 Notations et définitions

La notion de référentiel est très utile en physique, ce concept est défini comme étant un ensemble d'objets mathématiques par le biais duquel on décrit le comportement (par exemple l'évolution dans le temps) des systèmes physiques. De tels objets sont définis presque toujours sur un sous-ensemble de l'espace-temps (dans le cadre de notre travail, un espace-temps de dimension 4). En langage mathématique, un référentiel $\{b_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est un ensemble de champs vectoriels linéairement indépendants en chaque point x d'un sous-ensemble ouvert U d'une variété M ($x \in U$ et $U \subseteq M \cong \mathbb{R}^4$).

Le passage d'un référentiel $\{b_\mu\}$ à un autre référentiel $\{b'_\mu\}$ se fait par la relation

$$b'_\mu = \gamma^{-1}(x)^\nu{}_\mu b_\nu, \quad (2.1)$$

ou $\gamma^{-1}(x)^\nu{}_\mu$ une matrice 4×4 inversible.

Soit $\{\beta^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ un ensemble de 4 1-formes constituant une base des 1-formes pour tout $x \in U$ de telle sorte que lors d'un changement de base, on a

$$\beta'^\mu = \gamma(x)_\nu{}^\mu \beta^\nu, \quad (2.2)$$

les deux matrices $\gamma^{-1}(x)^\nu{}_\mu$ et $\gamma(x)_\nu{}^\mu$ sont inverse l'une de l'autre.

Le référentiel $\{\beta^\mu\}$ est dit dual au référentiel $\{b_\mu\}$ si

$$\beta^\mu(b_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (2.3)$$

Un référentiel dual $\{\beta^\mu\}$ est dit holonome si, et seulement si localement, on a

$$d\beta^\mu = 0 \quad (1 - \text{forme exacte}), \quad (2.4)$$

autrement dit, si au voisinage de U , il existe un système de coordonnées local $\{x^\mu\}$ tel que :

$$\beta_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.5)$$

une démonstration est disponible dans [22].

Un référentiel $\{b_\mu\}$ est holonome si, et seulement si, son référentiel dual $\{\beta^\mu\}$ est holonome. De manière naturelle, on choisira comme référentiel holonome $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ l'ensemble des dérivées partielles par rapport aux coordonnées en chaque point de l'espace tangent de la variété \mathcal{R}^4 . Son référentiel dual (dans l'espace cotangent) est donné par les gradients des fonctions de coordonnées $\{dx^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$. De même, on notera $\{e_a, a = 0, 1, 2, 3\}$ le référentiel orthonormé et son dual $\{e^a, a = 0, 1, 2, 3\}$ de telle sorte à avoir

$$\begin{aligned} dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} &= \mathbf{1}^\mu{}_\nu, \quad e^a \otimes e_b = \mathbf{1}^a{}_b \\ e^a &= e_\mu{}^a dx^\mu, \quad dx^\mu = e^{-1\mu}{}_a e^a, \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec les conditions d'orthonormalité suivantes

$$e_\nu{}^a(x) e^{-1\mu}{}_a(x) = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu{}^a(x) e^{-1\mu}{}_b(x) = \delta_b^a, \quad (2.7)$$

la tétrade¹ $e_\mu{}^a(x)$ et son inverse $e^{-1\mu}{}_a(x)$ permettent de passer du repère holonome dx^μ au repère orthonormé e^a et vice versa. Dans l'espace tangent, on aura donc

$$\begin{aligned} g(e_a, e_b) &= \eta_{ab} \\ g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) &= g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

et dans l'espace cotangent

$$\begin{aligned} g^*(e^a, e^b) &= \eta^{ab} \\ g^*(dx^\mu, dx^\nu) &= g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique et η_{ab} la métrique de Minkowski de l'espace-temps plat qui servent à faire monter et descendre, respectivement, les indices grecques et latins. Ainsi, on a

$$e^{-1\mu}{}_a = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu{}^b. \quad (2.10)$$

Une petite parenthèse pour dire qu'il est toujours possible de trouver un repère orthonormé il suffi pour cela d'appliquer le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt en chaque point de la variété[23]. Notez que la relativité générale (RG) peut être formulée dans un référentiel holonome ou dans un référentiel orthonormé, tandis que la théorie d'Einstein-Cartan ne peut s'exprimer que dans un référentiel orthonormé. Une autre différence entre les deux théories est que, en RG, la métrique $g_{\mu\nu}$ représente la seule variable dynamique à partir de laquelle découlent toutes les autres entités de la théorie à savoir les symboles de Christoffel, le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, par contre

1. on trouve aussi le terme "vierbein" de l'allemand pour désigner la tétrade, "vier" pour quatre et "bein" pour dire jambe

dans la théorie d'Einstein-Cartan, il existe une autre variable dynamique en plus de $g_{\mu\nu}$, il s'agit d'une connexion dite "de spin" considérée comme une variable indépendante. Cette dernière joue le même rôle que la connexion affine en relativité générale. Elle permet de définir, la dérivée covariante d'un tenseur, le transport parallèle d'un vecteur sur une variété, ainsi que la courbure et la torsion dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre.

2.2 La connexion de spin

On défini la "nouvelle" dérivée covariante d'un tenseur comme étant égale à sa dérivée partielle plus des termes de correction impliquant, cette fois-ci non pas la connexion affine, mais la connexion de spin contractée avec le tenseur en question. En d'autres termes

$$\nabla_{\mu} X^a{}_b = \partial_{\mu} X^a{}_b + \omega_{\mu}{}^a{}_c X^c{}_b - \omega_{\mu}{}^c{}_b X^a{}_c, \quad (2.11)$$

un terme de correction positif pour l'indice latin du haut et un terme de correction négatif pour l'indice latin du bas. La dérivée covariante d'un vecteur dans le repère holonome (en utilisant la connexion affine Γ) est

$$\begin{aligned} \nabla X &= (\nabla_{\mu} X^{\nu}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu} \\ &= (\partial_{\mu} X^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le même objet dans le repère orthonormé (puis exprimé dans le repère holonome) s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla X &= (\nabla_{\mu} X^a) dx^{\mu} \otimes e_a \\ &= (\partial_{\mu} X^a + \omega_{\mu}{}^a{}_b X^b) dx^{\mu} \otimes e_a \\ &= (\partial_{\mu} (e_{\nu}{}^a X^{\nu}) + \omega_{\mu}{}^a{}_b e_{\lambda}{}^b X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes (e^{-1\sigma}{}_a \partial_{\sigma}) \\ &= e^{-1\sigma}{}_a (e_{\nu}{}^a \partial_{\mu} X^{\nu} + X^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}{}^a + \omega_{\mu}{}^a{}_b e_{\lambda}{}^b X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\sigma} \\ &= (\partial_{\mu} X^{\sigma} + e^{-1\sigma}{}_a \partial_{\mu} e_{\nu}{}^a X^{\nu} + e^{-1\sigma}{}_a e_{\lambda}{}^b \omega_{\mu}{}^a{}_b X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\sigma}, \end{aligned}$$

en redéfinissant les indices $\sigma \rightarrow \nu \rightarrow \lambda$, on aura

$$\begin{aligned} \nabla X &= (\partial_{\mu} X^{\nu} + e^{-1\nu}{}_a \partial_{\mu} e_{\lambda}{}^a X^{\lambda} + e^{-1\nu}{}_a e_{\lambda}{}^b \omega_{\mu}{}^a{}_b X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu} \\ &= (\partial_{\mu} X^{\nu} + (e^{-1\nu}{}_a \partial_{\mu} e_{\lambda}{}^a + e^{-1\nu}{}_a e_{\lambda}{}^b \omega_{\mu}{}^a{}_b) X^{\lambda}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En comparant (2.12) et (2.13), on obtient l'expression de la connexion affine en fonction de la connexion de spin

$$\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} = e^{-1\nu}{}_a \partial_{\mu} e_{\lambda}{}^a + e^{-1\nu}{}_a e_{\lambda}{}^b \omega_{\mu}{}^a{}_b, \quad (2.14)$$

ou de manière équivalente

$$\omega_{\mu}{}^a{}_b = e_{\nu}{}^a e^{-1\lambda}{}_b \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} - e^{-1\lambda}{}_b \partial_{\mu} e_{\lambda}{}^a. \quad (2.15)$$

Si on multiplie les deux membres de cette équation par e_ν^b , on obtient

$$\begin{aligned}\omega_\mu^a{}_b e_\nu^b &= e_\sigma^a e^{-1\lambda}{}_b \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} e_\nu^b - e^{-1\lambda}{}_b e_\nu^b \partial_\mu e_\lambda^a \\ &= e_\sigma^a \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \partial_\mu e_\nu^a,\end{aligned}$$

donc

$$\partial_\mu e_\nu^a - e_\sigma^a \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b = 0,$$

cette relation (une dérivée partielle, un terme incluant la connexion affine Γ pour l'indice grecque ν et un terme incluant la connexion de spin ω pour l'indice latin a) est équivalente à

$$\nabla_\mu e_\nu^a = 0, \quad (2.16)$$

elle est souvent appelée le postulat de la tétrade (tetrad postulate) et reste toujours vraie sans restriction aucune sur la connexion.

2.3 Courbure et torsion (équations de structure de Cartan)

En développant la connexion de spin ω sur une base holonome dx^μ , on obtient la 1-forme suivante

$$\omega^a{}_b =: \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu. \quad (2.17)$$

Ainsi, n'importe quelle connexion est caractérisée par deux tenseurs que sont la courbure et la torsion ; ils sont donnés par [25]

$$R^a{}_b := d\omega^a{}_b + (\omega \wedge \omega)^a{}_b \quad (2.18)$$

pour la courbure, une 2-forme à valeurs tensorielles dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz $so(1,3)$ que l'on peut aussi écrire comme

$$R^a{}_b := \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.19)$$

La torsion, quant à elle, est donnée par [26]

$$T^a := De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \quad (2.20)$$

une 2-forme à valeurs vectorielles (dans R^4),

$$T^a =: \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e^b e^c. \quad (2.21)$$

Les relations (2.18) et (2.20) sont communément appelées équations de structure de Cartan.

Explicitons les expressions de la courbure et de la torsion, pour cela on a

$$d\omega^a{}_b = \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} dx^\nu dx^\mu,$$

en inversant les deux indices muets μ et ν , on obtient

$$d\omega^a{}_b = \partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} dx^\mu dx^\nu$$

or, en vertu de l'antisymétrie du produit extérieur dont on a volontairement omis les symboles, on a

$$\partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} dx^\nu dx^\mu = -\partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu dx^\nu,$$

donc

$$d\omega^a{}_b = \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.22)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega)^a{}_b &= \omega^a{}_c \omega^c{}_b \\ &= \omega^a{}_{c\mu} dx^\mu \omega^c{}_{b\nu} dx^\nu \\ &= \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu} dx^\nu dx^\mu \\ &= -\omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned}$$

ou on a inversé les indices μ et ν dans la quatrième ligne, donc

$$(\omega \wedge \omega)^a{}_b = \frac{1}{2} (\omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.23)$$

en regroupant (2.22) et (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} R^a{}_b &:= d\omega^a{}_b + (\omega \wedge \omega)^a{}_b \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned}$$

par identification, on obtient l'expression des composantes de la courbure

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu}. \quad (2.24)$$

Notez que le tenseur de courbure est antisymétrique par rapport aux deux derniers indices ($R^a{}_{b\mu\nu} = -R^a{}_{b\nu\mu}$).

Pour ce qui est de la torsion on écrira d'abord, en utilisant (2.6), que

$$T^a =: \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e^b e^c = \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e_\mu{}^b e_\nu{}^c dx^\mu dx^\nu.$$

En développant le membre de droite de (2.20), on aura

$$\begin{aligned} de^a &= \underbrace{\partial_\nu e_\mu{}^a}_{\mu \leftrightarrow \nu} dx^\nu dx^\mu \\ &= \partial_\mu e_\nu{}^a dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

avec

$$\partial_\nu e_\mu^a dx^\nu dx^\mu = -\partial_\nu e_\mu^a dx^\mu dx^\nu$$

donc

$$de^a = \frac{1}{2} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.25)$$

De même

$$\begin{aligned} \omega^a{}_k \wedge e^k &= \omega^a{}_{k\mu} dx^\mu e_\nu{}^k dx^\nu \\ &= \underbrace{\omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k}_{\mu \leftrightarrow \nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k dx^\nu dx^\mu \\ &= -\omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k dx^\mu dx^\nu, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega^a{}_k \wedge e^k = \frac{1}{2} (\omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k - \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.26)$$

en regroupant (2.25) et (2.26), on obtient

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k - \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k) dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e_\mu{}^b e_\nu{}^c dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

donc, par identification

$$T^a{}_{bc} e_\mu{}^b e_\nu{}^c = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k - \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k,$$

enfin, l'expression des composantes de la torsion est donnée par

$$T^a{}_{bc} = (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k - \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k) e^{-1\mu}{}_b e^{-1\nu}{}_c, \quad (2.27)$$

la torsion est elle aussi antisymétrique vis-à-vis des deux derniers indices ($T^a{}_{bc} = -T^a{}_{cb}$).

Si on veut exprimer explicitement la torsion dans la base purement holonome (en faisant apparaître que les indices grecques), on aura

$$\begin{aligned} T^\lambda{}_{\mu\nu} &= e^{-1\lambda}{}_a T^a{}_{\mu\nu} \\ &= e^{-1\lambda}{}_a (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b), \end{aligned}$$

le développement de cette expression donne

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{-1\lambda}{}_a \partial_\mu e_\nu^a + e^{-1\lambda}{}_a e_\nu{}^b \omega_\mu{}^a{}_b - e^{-1\lambda}{}_a \partial_\nu e_\mu^a - e^{-1\lambda}{}_a e_\mu{}^b \omega_\nu{}^a{}_b,$$

enfin, en utilisant la définition de la connexion affine (2.14), la torsion prend la forme suivante

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad (2.28)$$

Dans la littérature, on définit souvent la torsion comme étant la partie antisymétrique de la connexion, c'est ce que traduit la relation (2.28). Si la connexion affine est symétrique par rapport à ses deux indices du bas, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$, ce qui est toujours le cas en relativité générale, la torsion devient nulle et les composantes $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ sont appelées "symboles de Christoffel".

2.3.1 Interprétation géométrique de la torsion

La théorie de la relativité générale étant une théorie classique de la gravité, elle décrit cette dernière dans un cadre géométrique en reliant le champ gravitationnel à la courbure de l'espace-temps. Dans la théorie d'Einstein-Cartan, cette description reste toujours valable et permet donc d'interpréter la courbure comme étant la raison pour laquelle un vecteur qui est transporté parallèlement à lui-même le long d'un contour fermé, change de direction lorsque celui-ci retourne à son point de départ, on dit alors que la géométrie génère la rotation². On a vu précédemment que la connexion affine possède une partie antisymétrique qui est reliée à la torsion et comme cette dernière est une caractéristique très importante de la théorie d'Einstein-Cartan, il convient de lui donner une interprétation géométrique tout comme la courbure. Pour cela, considérons deux vecteurs infinitésimaux V et W en un point x^μ de la variété. Si on transporte chacun des vecteurs le long de l'autre (V le long de W et vice-versa), on obtient deux nouveaux vecteurs W' et V' respectivement en $x^\mu + V^\mu$ et $x^\mu + W^\mu$ (voir figure 2.1). On aura donc,

$$\begin{aligned} V'^\mu &= V^\mu - V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} W^\nu, \\ W'^\mu &= W^\mu - W^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\nu. \end{aligned}$$

Les extrémités des deux vecteurs V'^μ et W'^μ sont repérées sur la variété par

$$\begin{aligned} v^\nu &= x^\mu + W^\mu + V'^\mu = x^\mu + W^\mu + V^\mu - V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} W^\nu, \\ w^\nu &= x^\mu + V^\mu + W'^\mu = x^\mu + V^\mu + W^\mu - W^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\nu. \end{aligned}$$

Afin de rendre compte de la coïncidence ou pas de v et w , on calcule leur différence

$$\begin{aligned} v^\nu - w^\nu &= W^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\nu - V^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} W^\nu \\ &= W^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\nu - V^\nu \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} W^\lambda \\ &= W^\lambda V^\nu (\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}) \\ &= T^\mu{}_{\nu\lambda} W^\lambda V^\nu, \end{aligned}$$

2. Puisque la notion de courbure est commune aux deux théories, on a juger inutile de présenter ici l'analyse mathématique qui permet de donner son interprétation géométrique.

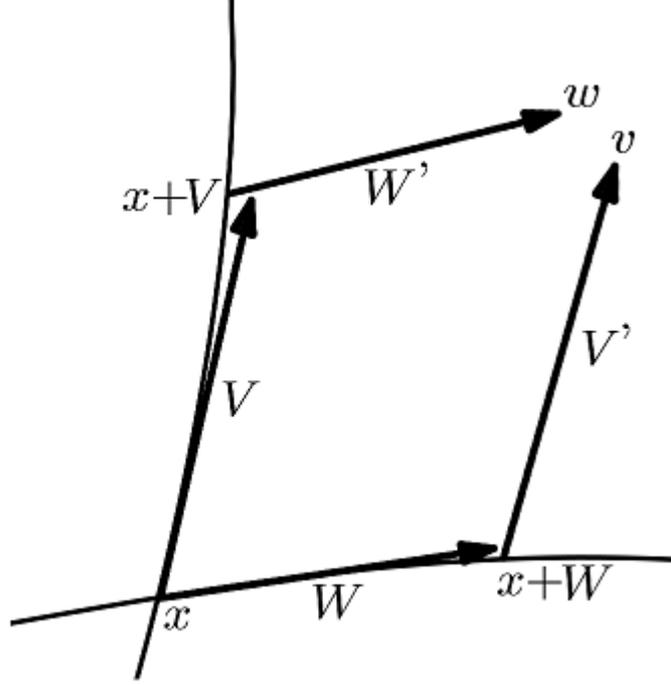


FIGURE 2.1 – un parallélogramme formé par deux vecteurs et leur transport parallèle l’un le long de l’autre, ne se referme pas en présence de la torsion.

ou on a utilisé la relation (2.28) pour écrire la dernière ligne. On voit que v et w ne coïncident pas et que leur différence est proportionnelle à la valeur de la torsion en x . On dit, dans ce cas, que la géométrie génère la translation.

2.4 Invariance de la métrique et tenseur de contorsion

On a vu que dans un espace-temps de Riemann-Cartan la connexion Γ n’est pas symétrique. Cependant, afin d’assurer l’invariance des unités de longueur et de temps lors du déplacement parallèle des vecteurs, la connexion doit satisfaire ce qu’on appelle “la condition de compatibilité métrique” donnée par

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} = 0. \tag{2.29}$$

Une permutation circulaire des indices de la relation précédente permet d’écrire

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\mu} = 0, \tag{2.30}$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} = 0. \tag{2.31}$$

En combinant ces trois relations, on obtient

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} + g_{\lambda\rho} (\Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - 2g_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{[\nu\lambda]} + 2g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{[\lambda\mu]} = 0, \tag{2.32}$$

avec $\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu})$ et $\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})$ qui représentent respectivement les parties symétriques et antisymétriques de la connexion.

Rappelons que dans la géométrie Riemannienne où la connexion est symétrique par défaut, on a

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} = -2g_{\lambda\rho} \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

où $\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ représentent les symboles de Christoffel. Ainsi, en utilisant l'équation (2.28), la relation (2.32) devient

$$-2g_{\lambda\rho} \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + g_{\lambda\rho} (\Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - 2g_{\mu\rho} T^\rho_{\nu\lambda} + 2g_{\rho\nu} T^\rho_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.34)$$

Une contraction par $\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}$ donne

$$-\tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - T_{\mu\nu}{}^\sigma + T_\nu{}^\sigma{}_\mu = 0. \quad (2.35)$$

Sachant que

$$\frac{1}{2} (\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \frac{1}{2} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - T^\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

la relation précédente devient donc

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^\sigma + T_{\nu\mu}{}^\sigma + T^\sigma_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

On obtient finalement l'expression qui donne la connexion de Riemann-Cartan en terme de la connexion de Riemann

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + K^\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

avec

$$K^\sigma_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^\sigma + T_{\nu\mu}{}^\sigma + T^\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

un tenseur qu'on appelle "tenseur de contorsion" et qui porte les degrés de liberté de rotation de l'espace-temps de Riemann-Cartan. On voit donc que la définition de la connexion de Riemann-Cartan résulte de la condition de compatibilité (2.29). Pour finir, on donne quelques propriétés du tenseur de contorsion qui découlent de la définition (2.39)

$$K_{\mu\nu\lambda} = -K_{\nu\mu\lambda}, \quad K_{\mu(\nu\lambda)} = 2T_{(\nu\lambda)\mu}, \quad K_{\mu[\nu\lambda]} = T_{\mu\nu\lambda}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} K_{(\mu|\nu|\lambda)} &= \frac{1}{2} (K_{\mu\nu\lambda} + K_{\lambda\nu\mu}) = -2T_{(\mu\lambda)\nu}, \\ K_{[\mu|\nu|\lambda]} &= \frac{1}{2} (K_{\mu\nu\lambda} - K_{\lambda\nu\mu}) = -T_{\nu\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Il est possible aussi de construire les contractions suivantes

$$K^\nu{}_{\mu\nu} = 2T_\mu = -T_{\mu\nu}{}^\nu, \quad K^\nu{}_{\nu\mu} = 0. \quad (2.42)$$

2.5 Géodésiques et autoparallèles dans un espace-temps de Riemann-Cartan

Dans la littérature, il existe deux définitions du concept de géodésique. Le premier définit une géodésique comme étant la courbe la plus droite possible dont le vecteur tangent est transporté parallèlement sur lui-même. Dans la deuxième définition, une géodésique est considérée comme étant le plus court chemin possible séparant deux points quelconques. En relativité générale, ces deux concepts coïncident, mais dans un espace-temps de Riemann-Cartan (avec courbure et torsion) ceux-ci doivent être considérés de manière séparée. En effet, dans un tel espace-temps, le transport parallèle d'un vecteur est traduit par l'équation suivante

$$\delta(dx^\lambda) = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.43)$$

où $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ représente la connexion de Riemann-Cartan. On voit bien que seule la partie symétrique contribue à cette équation, ce qui nous permet d'écrire

$$\delta(dx^\lambda) = -\Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.44)$$

en utilisant l'équation (2.37), la relation précédente devient

$$\delta(dx^\lambda) = -\left(\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + 2T_{(\mu\nu)}{}^\lambda\right) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.45)$$

c'est l'équation des autoparallèles qui décrit le mouvement des particules ayant un moment cinétique intrinsèque (spin). Cette dernière ne peut donc pas être l'équation de mouvement des particules scalaires (sans spin) puisque celles-ci suivent les géodésiques données par les symboles de Christoffel

$$\delta(dx^\lambda) = -\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.46)$$

ce qui traduit le fait que la torsion n'a pas d'influence sur le mouvement des particules sans spin puisque les $\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$ sont écrites uniquement en fonction de la métrique de l'espace-temps (voir (2.33)). On voit donc que pour avoir une coïncidence entre les autoparallèles et les géodésiques, une condition nécessaire et suffisante est que la partie symétrique du tenseur différence de (2.45) et (2.46) soit nulle, c'est-à-dire, $T_{(\mu\nu)}{}^\lambda = 0$. Dans ce cas, le tenseur de contorsion (2.39) devient

$$K^\sigma{}_{\mu\nu} = T^\sigma{}_{\mu\nu},$$

ce qui, en vertu de la première propriété dans (2.41) et de la définition (2.28), traduit le fait que le tenseur de torsion doit être complètement antisymétrique.

2.6 Identités de Bianchi

En plus des équations de structure de Cartan 2.18 et 2.20, on a les deux identités de Bianchi suivantes

$$DR = dR + [\omega, R] = 0 \quad (2.47)$$

$$DT = DDe = Re. \quad (2.48)$$

Commençons par la première identité en l'écrivant en terme de composantes

$$\begin{aligned} DR^a{}_b &= dR^a{}_b + [\omega, R]^a{}_b \\ &= \underbrace{dR^a{}_b}_A + \underbrace{\omega^a{}_c \wedge R^c{}_b}_B - \underbrace{R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b}_C, \end{aligned} \quad (2.49)$$

en utilisant la relation 2.18 de la courbure, les termes A, B et C deviennent alors

$$\begin{aligned} A &= d(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \\ &= d^2\omega^a{}_b + d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b \\ &= d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b, \end{aligned}$$

ou on a utilisé la propriété de la nilpotence pour la dérivée extérieure ($d^2 = 0$). De même, on a

$$\begin{aligned} B &= \omega^a{}_c \wedge (d\omega^c{}_b + \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b) \\ &= \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} C &= (d\omega^a{}_c + \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c) \wedge \omega^c{}_b \\ &= d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^c{}_b. \end{aligned}$$

En regroupant les trois termes, on obtient

$$\begin{aligned} DR^a{}_b &= A + B - C \\ &= \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b - \underbrace{\omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c \wedge \omega^c{}_b}_{c \leftrightarrow d} \\ &= \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b - \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b \\ DR^a{}_b &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

La deuxième identités de Bianchi relie la torsion à la courbure, de la manière suivante

$$DT^a = dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} &= d(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) + \omega^a{}_b \wedge (de^b + \omega^b{}_c \wedge e^c) \\ &= d\omega^a{}_b \wedge e^b - \omega^a{}_b \wedge de^b + \omega^a{}_b \wedge de^b + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge e^c \\ &= \underbrace{d\omega^a{}_b \wedge e^b}_{b \rightarrow c} + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge e^c \\ &= (d\omega^a{}_c + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c) \wedge e^c \\ DT^a &= R^a{}_c \wedge e^c. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Historiquement, le qualificatif “deuxième” identité a été attribué à la relation (2.47) relative à la courbure puisque la “première” identité (2.48), relative à la torsion, existait déjà et

n'a donc un sens que pour les connexions affines qui possèdent une partie antisymétrique. Notez qu'il est possible de trouver dans certains ouvrages, comme par exemple [27], que D soit définie comme la "dérivée covariante extérieure". En effet, les relations (2.49) et (2.51) permettent de faire l'analogie avec la dérivée covariante utilisée en relativité générale sauf que dans ce cas, la dérivée partielle est remplacée par une dérivée extérieure et les symboles de Christoffel par la connexion de spin, une connexion pour chaque indice latin.

2.7 Action et équations du champ

A partir des champs fondamentaux du référentiel e et de la connexion de spin ω , il est possible de construire l'action d'Einstein-Hilbert suivante [28]

$$S_{EH}[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int R^a{}_b \star (e^b e_a) - \frac{2\Lambda}{16\pi G} \int \star 1 \quad (2.53)$$

avec

$$\begin{aligned} R^a{}_b \star (e^b e_a) &= R^{ab} \star (e_b e_a) \\ &= R^{ab} \star (\eta_{b\bar{b}} e^{\bar{b}} \eta_{a\bar{a}} e^{\bar{a}}) = R^{ab} \eta_{b\bar{b}} \eta_{a\bar{a}} \star (e^{\bar{b}} e^{\bar{a}}) \\ &= R^{ab} \eta_{b\bar{b}} \eta_{a\bar{a}} \frac{1}{2} \epsilon_{\bar{b}\bar{a}cd} \eta^{\bar{b}\bar{b}} \eta^{\bar{a}\bar{a}} e^c e^d, \end{aligned} \quad (2.54)$$

où nous avons utilisé la définition suivante de l'action Hodge star \star sur la base orthonormée $\{e^a\}$ [29]

$$\star (e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}) = \frac{1}{(m-r)!} \epsilon^{a_1 \dots a_r}{}_{b_{r+1} \dots b_m} e^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{b_m}$$

avec m la dimension de la variété et

$$\epsilon_{a_1 \dots a_m} = \begin{cases} +1 & \text{si } (a_1 \dots a_m) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, \dots, m) \\ -1 & \text{si } (a_1 \dots a_m) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, \dots, m) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

les indices sont élevés en utilisant η^{ab} . Sachant que $\eta_{a\bar{a}} \eta^{\bar{a}\bar{a}} = \delta^{\bar{a}}{}_a$ et $\eta_{b\bar{b}} \eta^{\bar{b}\bar{b}} = \delta^{\bar{b}}{}_b$, la relation (2.54) devient alors

$$\begin{aligned} R^a{}_b \star (e^b e_a) &= \frac{1}{2} R^{ab} \underbrace{\epsilon_{bacd}}_{-\epsilon_{abcd}} e^c e^d \\ &= -\frac{1}{2} R^{ab} \epsilon_{abcd} e^c e^d, \end{aligned}$$

de même, nous avons

$$\star 1 = \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d.$$

L'action d'Einstein-Hilbert (2.53) s'écrit donc

$$S_{EH}[e, \omega] = \frac{-1}{32\pi G} \int \left(R^{ab} + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) e^c e^d \epsilon_{abcd}. \quad (2.55)$$

On peut écrire la relation (2.55) en fonction de la courbure scalaire ($R = R^{ab}{}_{ab}$) de manière concrète. Pour se faire, on a

$$\begin{aligned} R^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{2} R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} e^{\bar{a}} e^{\bar{b}} e^c e^d \epsilon_{abcd} \\ &= \frac{1}{2} R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} \left(-\epsilon^{\bar{a}\bar{b}cd} e^0 e^1 e^2 e^3 \right) \epsilon_{abcd}, \end{aligned}$$

avec

$$\epsilon_{abcd} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}cd} = -2 \left(\delta_{\bar{a}}^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{c}} - \delta_{\bar{a}}^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{b}} \right),$$

donc

$$R^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} = \left(R^{ab}{}_{ab} - R^{ab}{}_{ba} \right) e^0 e^1 e^2 e^3,$$

puisque le tenseur de courbure est antisymétrique par rapport aux deux derniers indices, la relation précédente devient alors

$$R^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} = 2R^{ab}{}_{ab} e^0 e^1 e^2 e^3. \quad (2.56)$$

Le terme donné par $e^0 e^1 e^2 e^3$ est défini comme étant l'élément de volume invariant de notre variété (de dimension 4), donc

$$e^0 e^1 e^2 e^3 = \star 1 = dV,$$

dés lors, la relation (2.56) s'écrit

$$R^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} = 2R^{ab}{}_{ab} dV.$$

De la même façon, le deuxième terme de (2.55) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b e^c e^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{6} \Lambda \left(-\epsilon^{abcd} e^0 e^1 e^2 e^3 \right) \epsilon_{abcd} \\ &= -\frac{1}{6} \Lambda (-4!) e^0 e^1 e^2 e^3, \end{aligned} \quad (2.57)$$

où on a utilisé la relation suivante pour le tenseur complètement antisymétrique ϵ

$$\epsilon^{abcd} \epsilon_{abcd} = -4!.$$

En regroupant (2.56) et (2.57), L'action d'Einstein-Hilbert (2.53) devient alors [28]

$$S_{EH}[e, \omega] = \frac{-1}{16\pi G} \int \left(R^{ab}{}_{ab} + 2\Lambda \right) dV, \quad (2.58)$$

le facteur constant $1/16\pi G$ est introduit pour retrouver la limite newtonienne lorsque l'on tient compte de la matière. Notez que l'action (2.58) est, de manière similaire à la relativité générale, linéaire en R (la courbure scalaire).

En faisant le choix de travailler dans un référentiel orthonormé $\{e^a\}$ l'avantage est double. Le premier étant que le produit Hodge star devient plus facile à exprimer, le second est qu'on n'aura pas à se soucier des contraintes éventuelles sur la métrique puisque la condition de métricité, algébrique dans ce cas, devient $\nabla\eta = 0$ au lieu qu'elle soit donnée par $\nabla g = 0$ (dans le référentiel holonome $\{dx^\mu\}$). Or, η représente la métrique de Minkowski, donc $\partial\eta = 0$. En terme de composantes, on a

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\eta_{ab} &= \partial_\mu\eta_{ab} - \omega_\mu{}^c{}_a\eta_{cb} - \omega_\mu{}^c{}_b\eta_{ac} \\ &= -\omega_{\mu ba} - \omega_{\mu ab},\end{aligned}$$

en égalisant cette équation à zéro, on obtient

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}, \quad (2.59)$$

cette relation traduit le fait que les composantes de la connexion de spin ω prennent leurs valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Enfin, il est important de noter que cette relation est vraie que si les indices a et b sont tous deux en haut ou en bas.

En faisant varier le référentiel orthonormé dans le Lagrangien de matière, on obtient le "courant d'énergie-impulsion" noté τ_a , une 3-forme à valeurs vectorielles [28]

$$\mathcal{L}_M[e + f, \omega] - \mathcal{L}_M[e, \omega] := -f^a\tau_a + O(f^2), \quad (2.60)$$

le tenseur énergie-impulsion τ_{ab} est défini par $\star\tau_a := \tau_{ab}e^b$.

2.7.1 équations d'Einstein

Pour obtenir les équations d'Einstein on fait varier l'action totale par rapport au référentiel orthonormé e ,

$$\begin{aligned}\delta S_T &= S_T[e + f, \omega] - S_T[e, \omega] \\ &= S_{EH}[e + f, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e + f, \omega] - \left(S_{EH}[e, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega] \right),\end{aligned} \quad (2.61)$$

le calcul, au premier ordre de f , de $S_{EH}[e + f, \omega]$ donne

$$\begin{aligned}S_{EH}[e + f, \omega] &= -\frac{1}{32\pi G} \int \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6}\Lambda(e^a + f^a)(e^b + f^b) \right) (e^c + f^c)(e^d + f^d) \epsilon_{abcd} \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \int \underbrace{\left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6}\Lambda e^a e^b \right) e^c e^d}_{S_{EH}[e, \omega]} \epsilon_{abcd} \\ &\quad - \frac{1}{32\pi G} \int \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6}\Lambda e^a e^b \right) (f^c e^d + e^c f^d) \epsilon_{abcd} \\ &\quad - \frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{6}\Lambda (f^a e^b + e^a f^b) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(f^2).\end{aligned} \quad (2.62)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
 \underbrace{e^c f^d \epsilon_{abcd}}_{c \leftrightarrow d} &= e^d f^c \epsilon_{abdc} \\
 &= -f^c e^d \epsilon_{abdc} \\
 &= f^c e^d \epsilon_{abcd},
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

en utilisant (2.63), la troisième ligne de (2.62) devient alors

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{32\pi G} \int \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) (f^c e^d + e^c f^d) \epsilon_{abcd} &= -\frac{1}{32\pi G} \int 2 \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) f^c e^d \epsilon_{abcd} \\
 &= -\frac{1}{16\pi G} \int f^c \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) e^d \epsilon_{abcd}.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 e^a f^b e^c e^d \epsilon_{abcd} &= -\underbrace{f^b e^a e^c e^d \epsilon_{abcd}}_{a \leftrightarrow b} \\
 &= -f^a e^b e^c e^d \epsilon_{bacd} \\
 &= f^a e^b e^c e^d \epsilon_{abcd},
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{6} \Lambda (f^a e^b + e^a f^b) e^c e^d \epsilon_{abcd} &= -\frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{3} \Lambda \underbrace{f^a e^b e^c e^d \epsilon_{abcd}}_{a \leftrightarrow c} \\
 &= -\frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{3} \Lambda f^c e^b e^a e^d \epsilon_{cbad} \\
 &= \frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{3} \Lambda f^c e^a e^b e^d \epsilon_{cbad} \\
 &= -\frac{1}{32\pi G} \int \frac{1}{3} \Lambda f^c e^a e^b e^d \epsilon_{abcd}.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

En injectant (2.64) et (2.65) dans (2.62), on obtient

$$\begin{aligned}
 S_{EH}[e + f, \omega] - S_{EH}[e, \omega] &= -\frac{1}{32\pi G} \int f^c \left[2 \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right] e^d \epsilon_{abcd} + O(f^2) \\
 &= -\frac{1}{16\pi G} \int f^c \left[\left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) \right] e^d \epsilon_{abcd} + O(f^2),
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

en imposant à l'action totale d'être invariante, la relation (2.61) devient alors

$$\begin{aligned} \delta S_T &= S_{EH}[e + f, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e + f, \omega] - \left(S_{EH}[e, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega] \right) = 0 \\ \Rightarrow S_{EH}[e + f, \omega] - S_{EH}[e, \omega] &= - \left(\int \mathcal{L}_M[e + f, \omega] - \int \mathcal{L}_M[e, \omega] \right), \end{aligned} \quad (2.67)$$

en substituant (2.60) et (2.66) par leurs expressions respectives dans (2.67), on obtient

$$- \frac{1}{16\pi G} \int f^c \left[\left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) \right] e^d \epsilon_{abcd} = - \left(- \int f^c \tau_c \right), \quad (2.68)$$

par identification, on obtient les équations d'Einstein qui sont données par [28]

$$\left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) e^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G \tau_c. \quad (2.69)$$

Il est possible d'obtenir une formulation plus "familère" des équations d'Einstein, c'est-à-dire une relation reliant le tenseur d'Einstein au tenseur énergie-impulsion. Pour se faire, nous appliquerons le produit Hodge star aux deux membres de 2.69.

$$\begin{aligned} \star R^{ab} e^d \epsilon_{abcd} &= \star \left(\frac{1}{2} R^{ab}{}_{rl} e^r e^l \right) e^d \epsilon_{abcd} = \frac{1}{2} R^{ab}{}_{rl} \epsilon_{abcd} \star e^r e^l e^d \\ &= \frac{1}{2} R^{ab}{}_{rl} \epsilon_{abcd} \epsilon_{\bar{r}\bar{l}\bar{d}\bar{k}} \eta^{\bar{r}r} \eta^{\bar{l}l} \eta^{\bar{d}d} e^{\bar{k}} \\ &= \frac{1}{2} R^{ab}{}_{rl} \epsilon_{abcd} \epsilon^{rldk} \eta_{\bar{k}k} e^{\bar{k}} \\ &= -\frac{1}{2} R^{ab}{}_{rl} \epsilon_{abcd} \epsilon^{rldk} \eta_{\bar{k}k} e^{\bar{k}}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

or, on a

$$\epsilon_{abcd} \epsilon^{rldk} = - \left(\delta_a^r \delta_b^l \delta_c^k + \delta_a^l \delta_b^k \delta_c^r + \delta_a^k \delta_b^r \delta_c^l - \delta_a^r \delta_b^k \delta_c^l - \delta_a^l \delta_b^r \delta_c^k - \delta_a^k \delta_b^l \delta_c^r \right), \quad (2.71)$$

donc

$$\begin{aligned} \star R^{ab} e^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{2} \left(R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + R^{ab}{}_{ca} \eta_{\bar{k}b} + R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a} - \underbrace{R^{ab}{}_{ac}}_{-R^{ab}{}_{ca}} \eta_{\bar{k}b} - \underbrace{R^{ab}{}_{ba}}_{-R^{ab}{}_{ab}} \eta_{\bar{k}c} - \underbrace{R^{ab}{}_{cb}}_{-R^{ab}{}_{bc}} \eta_{\bar{k}a} \right) e^{\bar{k}} \\ &= \left(R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + \underbrace{R^{ab}{}_{ca} \eta_{\bar{k}b} + R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a}}_{a \leftrightarrow b} \right) e^{\bar{k}} \\ &= \left(R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + \underbrace{R^{ba}{}_{cb} \eta_{\bar{k}a}}_{R^{ab}{}_{bc}} + R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a} \right) e^{\bar{k}} \\ \star R^{ab} e^d \epsilon_{abcd} &= \left(R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + 2R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a} \right) e^{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned}
 \star \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b e^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{3} \Lambda \epsilon_{abcd} \star e^a e^b e^d \\
 &= \frac{1}{3} \Lambda \epsilon_{abcd} \epsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{k}} \eta^{\bar{a}a} \eta^{\bar{b}b} \eta^{\bar{d}d} e^{\bar{k}} \\
 &= \frac{1}{3} \Lambda \epsilon_{abcd} \underbrace{\epsilon^{abdk}}_{-\epsilon^{abkd}} \eta_{\bar{k}k} e^{\bar{k}} \\
 &= -\frac{1}{3} \Lambda \underbrace{\epsilon_{abcd} \epsilon^{abkd}}_{-3! \delta_c^k} \eta_{\bar{k}k} e^{\bar{k}} \\
 \star \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b e^d \epsilon_{abcd} &= 2 \Lambda \eta_{\bar{k}c} e^{\bar{k}}, \tag{2.73}
 \end{aligned}$$

sans oublier que

$$\star \tau_c := \tau_{c\bar{k}} e^{\bar{k}}. \tag{2.74}$$

En injectant (2.72),(2.73) et (2.74) dans (2.69), on obtient

$$\begin{aligned}
 (R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + 2R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a} + 2\Lambda \eta_{\bar{k}c}) e^{\bar{k}} &= -16\pi G \tau_{c\bar{k}} e^{\bar{k}} \\
 \frac{1}{2} R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} + \underbrace{R^{ab}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a}}_{-R^{ba}{}_{bc}} + \Lambda \eta_{\bar{k}c} &= -8\pi G \tau_{c\bar{k}} \\
 \frac{1}{2} R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} - \underbrace{R^{ba}{}_{bc} \eta_{\bar{k}a}}_{R^b{}_{\bar{k}bc}} + \Lambda \eta_{\bar{k}c} &= -8\pi G \tau_{c\bar{k}} \\
 R^b{}_{\bar{k}bc} - \frac{1}{2} R^{ab}{}_{ab} \eta_{\bar{k}c} - \Lambda \eta_{\bar{k}c} &= 8\pi G \tau_{c\bar{k}},
 \end{aligned}$$

en posant $a \rightarrow c$, $b \rightarrow d$, $c \rightarrow b$ et $\bar{k} \rightarrow a$, la relation précédente devient alors

$$R^d{}_{adb} - \frac{1}{2} R^{cd}{}_{cd} \eta_{ab} - \Lambda \eta_{ab} = 8\pi G \tau_{ba},$$

or, par définition, le tenseur d'Einstein est donné par

$$G_{ab} = R^d{}_{adb} - \frac{1}{2} R^{cd}{}_{cd} \eta_{ab},$$

ce qui permet d'écrire enfin, l'équation d'Einstein sous la forme bien connue suivante [26, 28, 31, 30]

$$G_{ab} - \Lambda \eta_{ab} = 8\pi G \tau_{ba}, \tag{2.75}$$

les relations (2.69) et (2.75) sont équivalentes.

Il est intéressant de remarquer que les équations d'Einstein sont linéaires par rapport à la courbure, ce qui signifie que l'énergie-impulsion est, comme en relativité générale, la

source de la courbure. Bien que la relation reliant l'énergie-impulsion à la courbure soit algébrique, cette dernière se propage à travers l'espace-temps (à 4 dimensions), ce qui n'est pas le cas pour la torsion comme nous le verrons plus tard, et donc même si l'énergie-impulsion venait à disparaître, cela n'entraînerait pas l'annulation de la courbure ; les ondes gravitationnelles et la solution de Schwarzschild en sont une parfaite illustration de cette conséquence [23].

Notez aussi, qu'en présence de la torsion, le tenseur d'Einstein G_{ab} et le tenseur d'énergie-impulsion τ_{ab} ne sont ni symétriques ni conservés de manière covariante ($DG_{ab} \neq 0$, $D\tau_{ab} \neq 0$), contrairement à la relativité générale. En effet, en calculant la dérivée covariante extérieure des deux membres de l'équation d'Einstein (2.69), on obtient [28]

$$\begin{aligned}
 & D \left[\left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) e^d \epsilon_{abcd} \right] = -16\pi G (D\tau)_c \\
 & \underbrace{DR^{ab}}_{=0} e^d \epsilon_{abcd} + R^{ab} \underbrace{D e^d}_{T^d} \epsilon_{abcd} + \frac{1}{3} \Lambda \left(\underbrace{D e^a}_{T^a} e^b e^d \epsilon_{abcd} + e^a \underbrace{D e^b}_{T^b} e^d \epsilon_{abcd} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \underbrace{D e^d}_{T^d} \epsilon_{abcd} = -16\pi G (D\tau)_c \\
 & \left(R^{ab} + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) T^d \epsilon_{abcd} + \frac{1}{3} \Lambda \left(T^a e^b e^d \epsilon_{abcd} + e^a T^b e^d \epsilon_{abcd} \right) = -16\pi G (D\tau)_c \\
 & \left(R^{ab} + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) T^d \epsilon_{abcd} + \frac{1}{3} \Lambda \left(\underbrace{e^b e^d T^a \epsilon_{abcd}}_{a \leftrightarrow d} - \underbrace{e^a e^d T^b \epsilon_{abcd}}_{b \leftrightarrow d} \right) = -16\pi G (D\tau)_c \\
 & \left(R^{ab} + \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b \right) T^d \epsilon_{abcd} + \frac{1}{3} \Lambda \left(\underbrace{e^b e^a T^d \epsilon_{dbca}}_{-e^a e^b} - \underbrace{e^a e^b T^d \epsilon_{adcb}}_{-\epsilon_{abcd}} \right) = -16\pi G (D\tau)_c \\
 & \qquad \qquad \qquad \left(R^{ab} + \Lambda e^a e^b \right) T^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G (D\tau)_c, \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé les identités de Bianchi (2.47) et (2.48) dans la deuxième ligne. [ce que cela signifie]

2.7.2 équations de Cartan

En faisant varier la connexion de spin dans le Lagrangien de matière, on obtient “le courant de spin” S_{ab} , une 3-forme qui prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz

$$\mathcal{L}_M[e, \omega + \chi] - \mathcal{L}_M[e, \omega] := -\frac{1}{2} \chi^{ab} S_{ab} + O(\chi^2), \tag{2.77}$$

le tenseur de spin S_{abc} , quant à lui, est défini par $\star S_{ab} := s_{abc} e^c$.

Pour obtenir l'équation de Cartan, on fait varier l'action totale par rapport à la connexion de spin

$$\begin{aligned} \delta S_T &= S_T[e, \omega + \chi] - S_T[e, \omega] \\ &= S_{EH}[e, \omega + \chi] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega + \chi] - \left(S_{EH}[e, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega] \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

commençons par calculer l'expression de la courbure $R(\omega + \chi)$ au premier ordre de χ

$$\begin{aligned} R^{ab}(\omega + \chi) &= d(\omega^{ab} + \chi^{ab}) + (\omega^a{}_{\bar{c}} + \chi^a{}_{\bar{c}})(\omega^{\bar{c}b} + \chi^{\bar{c}b}) \\ &= \underbrace{d\omega^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\omega^{\bar{c}b}}_{R^{ab}(\omega)} + d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} + \chi^a{}_{\bar{c}}\omega^{\bar{c}b} + O(\chi^2) \\ &= R^{ab}(\omega) + d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} + \chi^a{}_{\bar{c}}\omega^{\bar{c}b} + O(\chi^2), \end{aligned} \quad (2.79)$$

de même pour l'action d'Einstein-Hilbert $S_{EH}[e, \omega + \chi]$, qui donne

$$\begin{aligned} S_{EH}[e, \omega + \chi] &= -\frac{1}{32\pi G} \int \left(R^{ab}(\omega + \chi) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) e^c e^d \epsilon_{abcd} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{32\pi G} \int \left(R^{ab}(\omega) + \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b \right) e^c e^d \epsilon_{abcd}}_{S_{EH}[e, \omega]} \\ &\quad - \frac{1}{32\pi G} \int (d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} + \chi^a{}_{\bar{c}}\omega^{\bar{c}b}) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2) \\ &= S_{EH}[e, \omega] - \frac{1}{32\pi G} \int \left(d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} + \chi^a{}_{\bar{c}} \underbrace{\omega^{\bar{c}b}}_{-\omega^{b\bar{c}}} \right) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_{EH}[e, \omega + \chi] - S_{EH}[e, \omega] &= -\frac{1}{32\pi G} \int \left(d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} - \underbrace{\chi^a{}_{\bar{c}}\omega^{b\bar{c}}}_{\chi^{a\bar{c}}\omega^{b\bar{c}}} \right) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2) \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \int \left(d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} - \underbrace{\chi^{a\bar{c}}\omega^b{}_{\bar{c}}}_{-\omega^b{}_{\bar{c}}\chi^{a\bar{c}}} \right) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2) \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \int (d\chi^{ab} + \omega^a{}_{\bar{c}}\chi^{\bar{c}b} + \omega^b{}_{\bar{c}}\chi^{a\bar{c}}) e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2), \end{aligned} \quad (2.80)$$

l'expression entre parenthèses de (2.80) est, par définition, la dérivée covariante extérieure de χ , donc

$$S_{EH}[e, \omega + \chi] - S_{EH}[e, \omega] = -\frac{1}{32\pi G} \int (D\chi)^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2). \quad (2.81)$$

En faisant usage du théorème de Stocks et en négligeant le terme aux frontière, il est possible d'écrire que [23]

$$\begin{aligned} 0 &= \int d(\chi^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd}) \\ &= \int D(\chi^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd}), \end{aligned}$$

l'égalité de la deuxième ligne reste vraie car le terme entre parenthèses est un invariant de Lorentz ; une manière simple de le voir est de remarquer que tous les indices latins qui y figurent, c'est-à-dire a,b,c et d, sont des indices de sommation et donc la dérivée covariante extérieure de celui-ci ne fait pas intervenir de termes contenant la connexion de spin mais uniquement la dérivée extérieure ordinaire. De plus, la règle de Leibniz pour la dérivée covariante extérieure permet d'écrire³

$$\begin{aligned} 0 &= \int D(\chi^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd}) \\ &= \int (D\chi)^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} - \int \chi^{ab} (De)^c e^d \epsilon_{abcd} - \int \chi^{ab} \underbrace{e^c (De)^d}_{c \leftrightarrow d} \epsilon_{abcd} \\ &= \int (D\chi)^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} - \int \chi^{ab} (De)^c e^d \epsilon_{abcd} - \int \chi^{ab} \underbrace{e^d (De)^c}_{-(De)^c e^d - \epsilon_{abcd}} \epsilon_{abcd} \\ &= \int (D\chi)^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} - 2 \int \chi^{ab} (De)^c e^d \epsilon_{abcd}, \end{aligned}$$

en utilisant la définition du tenseur de torsion (2.20), on aura donc

$$\begin{aligned} \int (D\chi)^{ab} e^c e^d \epsilon_{abcd} &= 2 \int \chi^{ab} \underbrace{(De)^c}_{T^c} e^d \epsilon_{abcd} \\ &= 2 \int \chi^{ab} T^c e^d \epsilon_{abcd}, \end{aligned} \tag{2.82}$$

en substituant (2.82) par son expression dans l'équation (2.81) , on obtient

$$S_{EH}[e, \omega + \chi] - S_{EH}[e, \omega] = -\frac{1}{16\pi G} \int \chi^{ab} T^c e^d \epsilon_{abcd} + O(\chi^2). \tag{2.83}$$

En imposant à l'action totale d'être invariante, la relation (2.78) devient alors

$$\begin{aligned} \delta S_T &= 0 \\ S_{EH}[e, \omega + \chi] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega + \chi] - \left(S_{EH}[e, \omega] + \int \mathcal{L}_M[e, \omega] \right) &= 0 \\ S_{EH}[e, \omega + \chi] - S_{EH}[e, \omega] &= - \int (\mathcal{L}_M[e, \omega + \chi] - \mathcal{L}_M[e, \omega]), \end{aligned} \tag{2.84}$$

3. puisque ϵ est invariant sous le groupe de transformation de Lorentz $SO(1, 3)$, on a $(De)_{abcd} = d\epsilon_{abcd} = 0$.

en injectant les relations (2.81) et (2.83) dans (2.84), il s'ensuit que

$$-\frac{1}{16\pi G} \int \chi^{ab} T^c e^d \epsilon_{abcd} = - \int \left(-\frac{1}{2} \chi^{ab} S_{ab} \right), \quad (2.85)$$

par identification, on obtient l'équation de Cartan suivante [23, 28]

$$T^c e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G S_{ab}. \quad (2.86)$$

Cette équation est linéaire par rapport à la torsion, ce qui traduit le fait que le spin est la source de la torsion, mais contrairement à la courbure, celle-ci ne se propage pas à travers l'espace-temps ; la torsion est nulle à l'extérieur de la matière. Autre remarque importante concernant l'équation de Cartan (2.86), est que la torsion est couplée à la densité de spin via la constante gravitationnelle G qui, on le rappelle, est aussi la constante de couplage entre la courbure et la densité de matière, ajoutez à cela la faible densité de spin dans l'univers, par conséquent, la théorie l'Einstein-Cartan et la relativité générale sont indiscernables expérimentalement ; ce qui est préjudiciable pour cette théorie.

Notez qu'il est aussi possible d'obtenir une formulation tensorielle de l'équation de Cartan en appliquant le produit Hodge star aux deux membres de la relation (2.86). Ainsi, on obtient

$$\star T^c e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G \star S_{ab}, \quad (2.87)$$

avec $\star S_{ab} = S_{abc} e^c$ et $T^c = \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}} e^{\bar{a}} e^{\bar{b}}$, l'équation (2.87) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}} \epsilon_{abcd} \star e^{\bar{a}} e^{\bar{b}} e^d &= -8\pi G S_{abc} e^c \\ \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}\bar{a}\bar{b}} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}} \eta_{\bar{f}\bar{f}} e^{\bar{f}} &= -8\pi G S_{abc} e^c, \end{aligned} \quad (2.88)$$

sachant que

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}} &= -\epsilon_{abcd} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}\bar{f}\bar{d}} \\ &= \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{f}} - \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{f}} - \delta_a^{\bar{f}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{a}} - \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{f}} \delta_c^{\bar{b}} + \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{f}} \delta_c^{\bar{a}} + \delta_a^{\bar{f}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{b}}, \end{aligned}$$

le membre de droite de l'équation (2.87) s'écrit

$$\begin{aligned} \star T^c e^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} \left(T_{\bar{c}ab} \eta_{\bar{c}\bar{f}} e^{\bar{f}} - T_{\bar{c}ba} \eta_{\bar{c}\bar{f}} e^{\bar{f}} - T_{\bar{c}cb} \eta_{\bar{a}\bar{f}} e^{\bar{f}} - T_{\bar{c}ac} \eta_{\bar{b}\bar{f}} e^{\bar{f}} + T_{\bar{c}ca} \eta_{\bar{b}\bar{f}} e^{\bar{f}} + T_{\bar{c}bc} \eta_{\bar{a}\bar{f}} e^{\bar{f}} \right) \\ &= \frac{1}{2} T_{\bar{c}ab} e^{\bar{c}} - \frac{1}{2} \underbrace{T_{\bar{c}ba}}_{-T_{\bar{c}ab}} e^{\bar{c}} - \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}cb} \eta_{\bar{a}\bar{f}} e^{\bar{f}} - \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} \underbrace{T_{\bar{c}ac}}_{-T_{\bar{c}ca}} \eta_{\bar{b}\bar{f}} e^{\bar{f}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}ca} \eta_{\bar{b}\bar{f}} e^{\bar{f}} + \frac{1}{2} \eta^{c\bar{c}} \underbrace{T_{\bar{c}bc}}_{-T_{\bar{c}cb}} \eta_{\bar{a}\bar{f}} e^{\bar{f}} \\ &= T_{\bar{c}ab} e^{\bar{c}} - \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}cb} \eta_{\bar{a}\bar{f}} e^{\bar{f}} + \eta^{c\bar{c}} T_{\bar{c}ca} \eta_{\bar{b}\bar{f}} e^{\bar{f}}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Il est possible de décomposer le tenseur de torsion en ses parties irréductibles comme suit

$$T_{abc} = A_{abc} + \eta_{ab}V_c - \eta_{ac}V_b + M_{abc}, \quad (2.90)$$

avec une partie complètement antisymétrique $A_{abc} := \frac{1}{3}(T_{abc} + T_{cab} + T_{bca})$, une partie vectorielle $V_c := \frac{1}{3}T_{abc}\eta^{ab}$ et enfin une partie mixte M_{abc} dont les propriétés sont : $M_{abc} = -M_{acb}$, $M_{abc}\eta^{ab} = 0$ et $M_{abc} + M_{cab} + M_{bca} = 0$. L'équation (2.89) devient donc

$$\star T^c e^d \epsilon_{abcd} = (A_{\bar{c}ab} + \eta_{\bar{c}a}V_b - \eta_{\bar{c}b}V_a + M_{\bar{c}ab}) e^{\bar{c}} - 3V_b \eta_{a\bar{f}} e^{\bar{f}} + 3V_a \eta_{b\bar{f}} e^{\bar{f}}, \quad (2.91)$$

en remplaçant l'indice de sommation \tilde{f} par \bar{c} dans la dernière relation, on obtient

$$\begin{aligned} \star T^c e^d \epsilon_{abcd} &= (A_{\bar{c}ab} + \eta_{\bar{c}a}V_b - \eta_{\bar{c}b}V_a + M_{\bar{c}ab} - 3V_b \eta_{a\bar{c}} + 3V_a \eta_{b\bar{c}}) e^{\bar{c}} \\ &= (A_{\bar{c}ab} - 2\eta_{\bar{c}a}V_b + 2\eta_{\bar{c}b}V_a + M_{\bar{c}ab}) e^{\bar{c}} \\ \bar{c} \rightarrow c &= (A_{cab} - 2\eta_{ca}V_b + 2\eta_{cb}V_a + M_{cab}) e^c, \end{aligned} \quad (2.92)$$

en utilisant (2.92), l'équation (2.87) s'écrit

$$A_{cab} + 2\eta_{cb}V_a - 2\eta_{ca}V_b + M_{cab} = -8\pi G S_{abc}, \quad (2.93)$$

les relations (2.86) et (2.93) sont strictement équivalentes. De façon analogue, on peut décomposer le tenseur de spin S_{abc} en partie complètement antisymétrique $a_{abc} := \frac{1}{3}(s_{abc} + s_{cab} + s_{bca})$, partie vectorielle $s_b := \frac{1}{3}s_{abc}\eta^{ac}$ et partie mixte m_{abc} caractérisée par $m_{abc} = -m_{bac}$, $m_{abc}\eta^{ac} = 0$ et $m_{abc} + m_{cab} + m_{bca} = 0$, donc

$$s_{abc} = a_{abc} + \eta_{ca}s_b - \eta_{cb}s_a + m_{abc}, \quad (2.94)$$

en tenant compte de (2.94), l'équation (2.93) prend la forme suivante [31]

$$A_{abc} = -8\pi G a_{abc}, \quad V_a = \frac{1}{2}8\pi G s_a, \quad M_{cab} = -8\pi G m_{abc}, \quad (2.95)$$

qui est aussi équivalente à l'équation de Cartan (2.86).

2.8 Écart par rapport à la symétrie de τ_{ab}

Dans ce qui suit, nous allons développer une formule qui illustre l'écart par rapport à la symétrie du tenseur énergie-impulsion τ_{ab} . Pour cela, appliquons la dérivée covariante extérieure aux deux membres de l'équation (2.86)

$$(DT)^c e^d \epsilon_{abcd} + T^c (De)^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G (DS)_{ab}, \quad (2.96)$$

à l'aide de la deuxième identité de Bianchi (2.48), la relation précédente devient

$$\begin{aligned} (Re)^c e^d \epsilon_{abcd} + T^c T^d \epsilon_{abcd} &= -8\pi G (DS)_{ab} \\ R^c{}_k e^k e^d \epsilon_{abcd} + T^c T^d \epsilon_{abcd} &= -8\pi G (DS)_{ab}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \underbrace{T^c T^d \epsilon_{abcd}}_{c \leftrightarrow d} &= T^d T^c \epsilon_{abdc} \\ &= - \underbrace{T^d T^c}_{T^c T^d} \epsilon_{abcd} \\ T^c T^d \epsilon_{abcd} &= -T^c T^d \epsilon_{abcd}, \end{aligned}$$

donc

$$T^c T^d \epsilon_{abcd} = 0. \quad (2.97)$$

Sachant que la courbure est donnée en termes de composantes par $R^c{}_k = \frac{1}{2} R^c{}_{klr} e^l e^r$, on peut écrire

$$\frac{1}{2} R^c{}_{klr} e^l e^r e^k e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G (DS)_{ab}; \quad (2.98)$$

l'application du produit Hodge star aux deux membres de cette équation donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R^c{}_{klr} \epsilon_{abcd} \star (e^l e^r e^k e^d) &= -8\pi G \star (DS)_{ab} \\ \frac{1}{2} R^c{}_{klr} \epsilon_{abcd} \epsilon^{lrkd} &= -8\pi G \star (DS)_{ab}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

en utilisant la propriété suivante

$$\epsilon_{abcd} \epsilon^{lrkd} = -(\delta_a^l \delta_b^r \delta_c^k + \delta_a^r \delta_b^k \delta_c^l + \delta_a^k \delta_b^l \delta_c^r - \delta_a^l \delta_b^k \delta_c^r - \delta_a^r \delta_b^l \delta_c^k - \delta_a^k \delta_b^r \delta_c^l),$$

l'équation (2.99) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\underbrace{R^c{}_{cab}}_{=0} + R^c{}_{bca} + \underbrace{R^c{}_{abc}}_{-R^c{}_{acb}} - \underbrace{R^c{}_{bac}}_{-R^c{}_{bca}} - \underbrace{R^c{}_{cba}}_{=0} - R^c{}_{acb} \right) &= 8\pi G \star (DS)_{ab} \\ R^c{}_{bca} - R^c{}_{acb} &= 8\pi G \star (DS)_{ab}, \end{aligned}$$

or, d'après la définition du tenseur d'Einstein, on a $R^c{}_{bca} = G_{ba} + \frac{1}{2} R^{cd}{}_{cd} \eta_{ba}$ et $R^c{}_{acb} = G_{ab} + \frac{1}{2} R^{cd}{}_{cd} \eta_{ab}$, ainsi, la symétrie de la métrique de Minkowski permet d'écrire

$$G_{ba} - G_{ab} = 8\pi G \star (DS)_{ab},$$

enfin, en utilisant l'équation d'Einstein (2.75), on obtient l'équation d'asymétrie du tenseur énergie-impulsion [28, 32]

$$\tau_{ab} - \tau_{ba} = \star (DS)_{ab}, \quad (2.100)$$

on voit bien qu'en l'absence de densité de spin, et donc de torsion, on retrouve le cas bien connu de la relativité générale où le tenseur énergie-impulsion est symétrique.

Notez qu'il est aussi possible de vérifier que le tenseur énergie-impulsion est symétrique lorsque la torsion est nulle en garantissant l'invariance de Lorentz de l'action de la matière

[26]. En utilisant l'équation (2.60), on calcule la variation du lagrangien de matière sous une transformation de Lorentz infinitésimale $(\Omega^a{}_b) \in \mathfrak{so}(1, 3)$ avec

$$f^a = -\Omega^a{}_b e^b, \quad (2.101)$$

puisque la contribution des champs de matière est nulle, l'équation (2.60) devient alors

$$0 = \Omega^c{}_b e^b \frac{1}{6} \tau_c{}^a \epsilon_{arsd} e^r e^s e^d, \quad (2.102)$$

où on a utilisé la définition du courant énergie-impulsion $\tau_c = \frac{1}{6} \tau_c{}^a \epsilon_{arsd} e^r e^s e^d$ (une 3-forme à valeurs vectorielles). L'application du produit Hodge star sur l'équation (2.102) donne

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega^c{}_b \frac{1}{6} \tau_c{}^a \epsilon_{arsd} \star (e^b e^r e^s e^d) \\ &= \Omega^c{}_b \frac{1}{6} \tau_c{}^a \epsilon_{arsd} \epsilon_{\bar{b}\bar{r}\bar{s}\bar{d}} \eta^{\bar{b}b} \eta^{\bar{r}r} \eta^{\bar{s}s} \eta^{\bar{d}d} \\ &= \Omega^c{}_b \frac{1}{6} \tau_c{}^a \epsilon_{arsd} \epsilon^{brsd} \\ &= -\Omega^c{}_b \frac{1}{6} \tau_c{}^a \delta_a^b \\ 0 &= -\Omega^{cb} \tau_{cb}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

puisque Ω^{cb} est une matrice (arbitraire) antisymétrique, alors le tenseur énergie-impulsion τ_{cb} doit forcément être symétrique⁴.

Dans le prochain chapitre, nous détaillerons le contenu du membre de droite de l'équation (2.100) et nous verrons l'utilité de cette dernière dans la résolution des équations d'Einstein-Cartan.

2.9 Champs vectoriels et équations de Killing

Tout comme la relativité générale, la théorie d'Einstein-Cartan est quasiment impossible à traiter si l'on ne fait pas appel aux symétries éventuelles que peut présenter l'espace-temps (la variété), en effet, puisque le caractère non linéaire des équations d'Einstein-Cartan rend toute résolution exacte extrêmement difficile. On entend par symétrie une certaine transformation qui laisse la géométrie invariante, en d'autres termes, la métrique reste inchangée d'un point de la variété à un autre après la transformation. Lorsqu'on parle de symétries, l'idée d'introduire les champs vectoriels de Killing (ou vecteurs de Killing) devient systématique. En effet, à chaque vecteur de Killing correspond une symétrie "continue" de la métrique de la variété et implique donc l'existence d'une quantité conservée. Les symétries de la métrique sont appelées isométries et sont définies comme suit [28] :

4. il n'y a que la contraction d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique qui donne un résultat nul.

soit φ un difféomorphisme avec la matrice Jacobienne suivante

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\mu}(x) := \frac{\partial \varphi^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}}(x), \quad (2.104)$$

si $g_{\mu\nu}(x)$ est le tenseur métrique par rapport aux coordonnées x^{μ} , alors par définition φ est une isométrie locale si

$$g_{\mu\nu}(x) = (\Lambda^T)_{\mu}{}^{\bar{\mu}}(x) g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\varphi(x)) \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\nu}(x). \quad (2.105)$$

Afin d'assurer l'invariance de la métrique sous cette transformation, il suffit de le faire pour le cas infinitésimal puisque n'importe quelle transformation continue peut être considérée comme une succession de transformations infinitésimales. En posant

$$\varphi(x) = x + \xi(x) + o(\xi^2), \quad (2.106)$$

où $\xi = \xi^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ est un champ de vecteurs, la relation (2.104) devient

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(x^{\mu} + \xi^{\mu}) \\ &= \delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

son inverse est donné par

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \quad (2.108)$$

Le calcul de $g_{\mu\nu}(\varphi(x))$ donne

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\varphi(x)) &= g_{\mu\nu}(x + \xi) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (2.109)$$

en injectant les expressions (2.107) et (2.109) dans (2.105) et en développant au premier ordre de ξ , on obtient

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\mu}(x) g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x + \xi(x)) \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\nu}(x) \\ &= \left(\delta^{\bar{\mu}}{}_{\mu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \right) \left(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \right) \left(\delta^{\bar{\nu}}{}_{\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= g_{\mu\nu} + \xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^{\nu}}, \end{aligned}$$

d'où la relation [33, 34]

$$\xi^{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}(x)}{\partial x^{\mu}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x) + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}(x)}{\partial x^{\nu}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x) = 0. \quad (2.110)$$

Pour une métrique donnée, (2.110) est un système d'équations différentielles qui détermine les champs de vecteurs $\xi^i(x^\alpha)$. (2.110) est l'équation de Killing pour la métrique et les vecteurs ξ^μ , solutions de cette équation, sont les champs vectoriels de Killing. Ils caractérisent les propriétés symétriques de l'espace, donc si l'équation (2.110) n'a pas de solutions, l'espace en question ne possède pas de symétries.

De la même manière que pour la métrique, si on note par $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ les composantes de la connexion (pas nécessairement la connexion de Christoffel de la métrique) par rapport aux coordonnées x^μ , alors par définition φ laisse la connexion invariante si [28]

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) = (\Lambda^{-1T})_{\bar{\lambda}}{}^\lambda(x) \Lambda^{\bar{\mu}}{}_\mu(x) \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\nu(x) \Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\varphi(x)) - (\Lambda^T)_{\bar{\nu}}{}^\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Lambda^{-1T})_{\bar{\nu}}{}^\lambda(x), \quad (2.111)$$

en se limitant au premier ordre de ξ du développement et en substituant $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(\varphi(x))$ par $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x + \xi) = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ dans (2.111), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= (\Lambda^{-1})^\lambda{}_{\bar{\lambda}} \Lambda^{\bar{\mu}}{}_\mu \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\nu \Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x + \xi) - \Lambda^{\bar{\nu}}{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Lambda^{-1})^\lambda{}_{\bar{\nu}} \\ &= \left(\delta^\lambda{}_{\bar{\lambda}} - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^{\bar{\lambda}}} \right) \left(\delta^{\bar{\mu}}{}_\mu + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta^{\bar{\nu}}{}_\nu + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu} \right) \left(\Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \right) \\ &\quad - \left(\delta^{\bar{\nu}}{}_\nu + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\delta^\lambda{}_{\bar{\nu}} - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^{\bar{\nu}}} \right) \\ &= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^{\bar{\lambda}}} \Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \Gamma^\lambda{}_{\bar{\mu}\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\bar{\nu}} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \end{aligned}$$

enfin, l'équation de Killing pour la connexion prend la forme suivante

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^{\bar{\lambda}}} \Gamma^{\bar{\lambda}}{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \Gamma^\lambda{}_{\bar{\mu}\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\bar{\nu}} + \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (2.112)$$

L'étude, par exemple, du modèle standard de la cosmologie qui est basé sur les deux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'espace-temps (principe cosmologique) dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan nécessite la résolution des équations de Killing (2.110) et (2.112) respectivement pour la métrique et la connexion pour tous les champs vectoriels qui génèrent le groupe de symétrie maximale de l'espace en plus de satisfaire la condition de métricité qui est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\bar{\mu}}{}_{\mu\lambda} g_{\bar{\mu}\nu} - \Gamma^{\bar{\nu}}{}_{\nu\lambda} g_{\mu\bar{\nu}} = 0. \quad (2.113)$$

Dans les prochains chapitres, nous étudierons deux modèles cosmologiques dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan. En premier lieu, on traitera le modèle de Kottler avec torsion dans lequel seront imposées les invariances sous les rotations autour des trois axes ainsi que la symétrie sous la translation temporelle (cas stationnaire). Le modèle de Robertson-Walker, toujours avec torsion, fera l'objet de la deuxième étude ou on exigera cette fois-ci l'invariance sous les rotations et les quasi-translations autour des trois axes.

Chapitre 3

Équation de non-conservation covariante et équation d'asymétrie

Il est bien admis en relativité générale que le tenseur énergie-impulsion est symétrique et de divergence nulle, c'est-à-dire,

$$\tau^{\mu\nu} - \tau^{\nu\mu} = 0 \quad (3.1)$$

$$D_\mu \tau^{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Les relations (3.1) et (3.2) représentent les équations de conservation que doit vérifier un champ de matière dans le cas le plus général. Dans la théorie d'Einstein-Cartan, en revanche, ces relations ne sont plus valables du fait de la présence de la densité de spin. En effet, en gardant l'esprit de géométrisation de la gravitation dans lequel cette dernière apparaît comme une conséquence de la présence d'une densité d'énergie (de spin) qui agit en créant une courbure (une torsion) de l'espace-temps, et de ce fait, donne lieu à des équations du champ dans lesquelles les quantités géométriques, en l'occurrence la courbure (et la torsion), sont reliées au champ de matière présent dans l'espace-temps. Il est donc tout à fait légitime de s'interroger sur l'existence d'une éventuelle relation entre la densité d'énergie et la densité de spin.

En 1928 Dirac fut le premier à décrire un système de champs de matière appelés spineurs possédant, en plus d'une densité de spin, une densité d'énergie décrite par un tenseur non-symétrique, et pour compliquer encore d'avantage la situation, ce tenseur n'est pas conservé de manière covariante, contrairement à ce qui est établi en relativité générale.

Dans les sections suivantes, on donnera l'équivalent des relations (3.1) et (3.2) dans la théorie d'Einstein-Cartan en les exprimant notamment sous une forme tensorielle bien plus pratique que les équations (2.76) et (2.100).

3.1 Équation de non-conservation covariante

Nous avons vu qu'il est possible d'écrire le courant d'énergie-impulsion, une 3-forme à valeurs vectorielles, dans le référentiel orthonormé e^a comme suit

$$\tau_c = \frac{1}{6} \tau_c^a \epsilon_{arsd} e^r e^s e^d, \quad (3.3)$$

où τ_c^a est le tenseur énergie-impulsion.

La dérivée covariante extérieure de τ_c est par définition

$$\begin{aligned} D\tau_c &= d\tau_c + \omega_c^a \tau_a \\ &= d\left(\frac{1}{6} \tau_c^a \epsilon_{arsd} e^r e^s e^d\right) + \omega_c^a{}_\mu dx^\mu \frac{1}{6} \tau_a^f \epsilon_{frsd} e^r e^s e^d. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Afin de calculer $d\tau_c$, il est nécessaire d'utiliser un référentiel holonome dx^μ dont le lien avec les e^a est donné par

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \quad (3.5)$$

avec $e^a{}_\mu(x) \in GL(4)$. Donc

$$\begin{aligned} D\tau_c &= \partial_\mu \left(\frac{1}{6} \tau_c^a \epsilon_{arsd} e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma \right) dx^\mu dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma \\ &\quad + \frac{1}{6} \omega_c^a{}_\mu \tau_a^f \epsilon_{frsd} e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma dx^\mu dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

en développant cette relation de manière plus explicite, on obtient

$$\begin{aligned} D\tau_c &= \frac{1}{6} \left\{ \epsilon_{arsd} \left[(\partial_\mu \tau_c^a) e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma + \tau_c^a (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^s{}_\beta e^d{}_\gamma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_c^a e^r{}_\alpha (\partial_\mu e^s{}_\beta) e^d{}_\gamma + \tau_c^a e^r{}_\alpha e^s{}_\beta (\partial_\mu e^d{}_\gamma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \omega_c^a{}_\mu \tau_a^f \epsilon_{frsd} e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma \right\} dx^\mu dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour revenir au référentiel orthonormé, nous utilisons l'inverse de la relation (3.5) qui s'écrit

$$dx^\mu = e^{-1\mu}{}_a e^a. \quad (3.8)$$

De ce fait, nous obtenons

$$\begin{aligned} D\tau_c &= \frac{1}{6} \left\{ \epsilon_{arsd} \left[(\partial_\mu \tau_c^a) e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma + \tau_c^a (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^s{}_\beta e^d{}_\gamma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_c^a e^r{}_\alpha (\partial_\mu e^s{}_\beta) e^d{}_\gamma + \tau_c^a e^r{}_\alpha e^s{}_\beta (\partial_\mu e^d{}_\gamma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \omega_c^a{}_\mu \tau_a^f \epsilon_{frsd} e^r{}_\alpha e^s{}_\beta e^d{}_\gamma \right\} e^{-1\mu}{}_g e^{-1\alpha}{}_{\bar{r}} e^{-1\beta}{}_{\bar{s}} e^{-1\gamma}{}_{\bar{d}} e^g e^{\bar{r}} e^{\bar{s}} e^{\bar{d}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En utilisant la relation d'orthonormalité

$$e^a{}_\mu e^{-1\mu}{}_b = \delta_b^a, \quad (3.10)$$

où δ est le symbole de Kronecker, la relation (3.9) devient alors

$$\begin{aligned} D\tau_c = \frac{1}{6} \{ & \epsilon_{arsd} [(\partial_\mu \tau_c^a) e^{-1\mu}_g e^g e^r e^s e^d + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r e^g e^r e^s e^d \\ & + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_s e^g e^r e^s e^d + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_d e^g e^r e^s e^d] \\ & + \omega_c^a{}_\mu e^{-1\mu}_g \tau_a^f \epsilon_{frsd} e^g e^r e^s e^d \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En appliquant l'opération Hodge star à la 4-forme $D\tau_c$, on obtient une 4-4=0-forme. Ainsi, la propriété de linéarité du Hodge star permet d'écrire

$$\begin{aligned} \star D\tau_c = \frac{1}{6} \{ & \epsilon_{arsd} [(\partial_\mu \tau_c^a) e^{-1\mu}_g \star e^g e^r e^s e^d + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r \star e^g e^r e^s e^d \\ & + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_s \star e^g e^r e^s e^d + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_d \star e^g e^r e^s e^d] \\ & + \omega_c^a{}_\mu e^{-1\mu}_g \tau_a^f \epsilon_{frsd} \star e^g e^r e^s e^d \}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec

$$\star e^g e^r e^s e^d = \epsilon_{\tilde{g}\tilde{r}\tilde{s}\tilde{d}} \eta^{\tilde{g}g} \eta^{\tilde{r}r} \eta^{\tilde{s}s} \eta^{\tilde{d}d} = \epsilon^{grsd}. \quad (3.13)$$

Donc

$$\begin{aligned} \star D\tau_c = \frac{1}{6} [& (\partial_\mu \tau_c^a) e^{-1\mu}_g \epsilon_{arsd} \epsilon^{grsd} + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r \epsilon_{arsd} \epsilon^{grsd} \\ & + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_s \epsilon_{arsd} \epsilon^{grsd} + \tau_c^a e^{-1\mu}_g (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_d \epsilon_{arsd} \epsilon^{grsd}] \\ & + \omega_c^a{}_\mu e^{-1\mu}_g \tau_a^f \epsilon_{frsd} \epsilon^{grsd}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Puisque

$$\epsilon_{arsd} \epsilon^{grsd} = -3! \delta_a^g, \quad (3.15)$$

et

$$\epsilon_{arsd} \epsilon^{g\tilde{r}sd} = -2! (\delta_a^g \delta_r^{\tilde{r}} - \delta_a^{\tilde{r}} \delta_r^g), \quad (3.16)$$

$\star D\tau_c$ peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} \star D\tau_c = \frac{1}{6} [& -3! (\partial_\mu \tau_c^a) e^{-1\mu}_a \\ & - 2\tau_c^a e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r + 2\tau_c^a e^{-1\mu}_r (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_a \\ & - 2\tau_c^a e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_s + 2\tau_c^a e^{-1\mu}_s (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_a \\ & - 2\tau_c^a e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_d + 2\tau_c^a e^{-1\mu}_d (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_a \\ & - 3! \omega_c^a{}_\mu e^{-1\mu}_f \tau_a^f]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Étant donné que les indices s, d, β et γ sont des indices muets, il est facile de voir que

$$e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_s = e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r \quad (3.18)$$

$$e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_d = e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r \quad (3.19)$$

$$e^{-1\mu}_s (\partial_\mu e^s_\beta) e^{-1\beta}_a = e^{-1\mu}_r (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_a \quad (3.20)$$

$$e^{-1\mu}_d (\partial_\mu e^d_\gamma) e^{-1\gamma}_a = e^{-1\mu}_r (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_a, \quad (3.21)$$

en injectant ces relations dans (3.17), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \star D\tau_c &= -(\partial_\mu \tau_c^a) e^{-1\mu}_a - \tau_c^a e^{-1\mu}_a (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_r + \tau_c^a e^{-1\mu}_r (\partial_\mu e^r_\alpha) e^{-1\alpha}_a \\ &\quad - \omega_c^a{}_\mu e^{-1\mu}_f \tau_a^f. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Passons à présent aux deux membres de gauche de l'équation (2.76) qui font intervenir la courbure R^{ab} et la torsion T^d et dont les expressions sont données par

$$R^{ab} = R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} e^{\bar{a}} e^{\bar{b}}, \quad (3.23)$$

$$T^d = T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} e^{\bar{c}} e^{\bar{d}}, \quad (3.24)$$

ainsi, nous avons

$$R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} = \frac{1}{4} R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} \epsilon_{abcd} e^{\bar{a}} e^{\bar{b}} e^{\bar{c}} e^{\bar{d}}. \quad (3.25)$$

En appliquant l'opération Hodge star à la dernière relation et en tenant compte de la relation (3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \star R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} &= \frac{1}{4} R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} \epsilon_{abcd} \star e^{\bar{a}} e^{\bar{b}} e^{\bar{c}} e^{\bar{d}} \\ &= \frac{1}{4} R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}} T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} \epsilon_{abcd} e^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En utilisant la relation suivante

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} e^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} &= - \left[\delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{c}} \delta_d^{\bar{d}} + \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{d}} + \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{c}} \delta_d^{\bar{b}} \right. \\ &\quad + \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{d}} + \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{c}} \delta_d^{\bar{a}} + \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{c}} \\ &\quad + \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{c}} + \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{b}} + \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{a}} \\ &\quad + \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{a}} + \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{c}} + \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{b}} \\ &\quad - \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{c}} - \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{d}} - \delta_a^{\bar{a}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{c}} \delta_d^{\bar{b}} \\ &\quad - \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{c}} \delta_d^{\bar{d}} - \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{a}} - \delta_a^{\bar{b}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{c}} \\ &\quad - \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{b}} - \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{b}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{d}} - \delta_a^{\bar{c}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{a}} \\ &\quad \left. - \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{a}} \delta_c^{\bar{b}} \delta_d^{\bar{c}} - \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{c}} \delta_c^{\bar{d}} \delta_d^{\bar{a}} - \delta_a^{\bar{d}} \delta_b^{\bar{d}} \delta_c^{\bar{a}} \delta_d^{\bar{b}} \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

la relation (3.26) devient

$$\begin{aligned}
 \star R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} = & -\frac{1}{4} \left[R^{ab}{}_{ab} T^d{}_{cd} + R^{ab}{}_{bc} T^d{}_{ad} + R^{ab}{}_{bd} T^d{}_{ca} \right. \\
 & + R^{ab}{}_{ca} T^d{}_{bd} + R^{ab}{}_{da} T^d{}_{cb} + R^{ab}{}_{ba} T^d{}_{dc} \\
 & + R^{ab}{}_{cb} T^d{}_{da} + R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ab} + R^{ab}{}_{db} T^d{}_{ac} \\
 & + R^{ab}{}_{dc} T^d{}_{ba} + R^{ab}{}_{ac} T^d{}_{db} + R^{ab}{}_{ad} T^d{}_{bc} \\
 & - R^{ab}{}_{ab} T^d{}_{dc} - R^{ab}{}_{ac} T^d{}_{bd} - R^{ab}{}_{ad} T^d{}_{cb} \\
 & - R^{ab}{}_{ba} T^d{}_{cd} - R^{ab}{}_{da} T^d{}_{bc} - R^{ab}{}_{ca} T^d{}_{db} \\
 & - R^{ab}{}_{bd} T^d{}_{ac} - R^{ab}{}_{cb} T^d{}_{ad} - R^{ab}{}_{dc} T^d{}_{ab} \\
 & \left. - R^{ab}{}_{bc} T^d{}_{da} - R^{ab}{}_{db} T^d{}_{ca} - R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ba} \right]. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Puisque $R^{ab}{}_{\bar{a}\bar{b}}$ et $T^d{}_{\bar{c}\bar{d}}$ sont antisymétriques par rapport à leurs deux derniers indices, la relation (3.28) se simplifie d'avantage pour donner

$$\begin{aligned}
 \star R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} = & -R^{ab}{}_{ab} T^d{}_{cd} + R^{ab}{}_{bc} T^d{}_{da} + R^{ab}{}_{bd} T^d{}_{ac} \\
 & + R^{ab}{}_{ac} T^d{}_{bd} - R^{ab}{}_{ad} T^d{}_{bc} - R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ab}. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

En utilisant la définition du tenseur de Ricci $R^a{}_b$

$$R^a{}_b = R^{da}{}_{db}, \tag{3.30}$$

et de la courbure scalaire R

$$R = R^{ab}{}_{ab}, \tag{3.31}$$

ainsi que les propriétés d'antisymétrie du tenseur de courbure¹ et du tenseur de torsion, nous obtenons enfin

$$\star R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} = -RT^d{}_{cd} - 2R^a{}_c T^d{}_{da} - 2R^a{}_d T^d{}_{ac} - R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ab}. \tag{3.32}$$

Le dernier terme à calculer est le Hogde star \star de $\Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd}$, on a donc

$$\begin{aligned}
 \star \Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd} & = \star \Lambda e^a e^b \frac{1}{2} T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} e^{\bar{c}} e^{\bar{d}} \epsilon_{abcd} \\
 & = \frac{1}{2} \Lambda T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} \epsilon_{abcd} \star e^a e^b e^{\bar{c}} e^{\bar{d}}, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

la relation (3.13) permet d'écrire

$$\star \Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd} = \frac{1}{2} \Lambda T^d{}_{\bar{c}\bar{d}} \epsilon_{abcd} \epsilon^{ab\bar{c}\bar{d}}, \tag{3.34}$$

1. le tenseur de courbure est aussi antisymétrique par rapport à ses deux premiers indices

avec

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{ab\bar{c}\bar{d}} = -2! \left(\delta_c^{\bar{c}}\delta_d^{\bar{d}} - \delta_c^{\bar{d}}\delta_d^{\bar{c}} \right), \quad (3.35)$$

en remplaçant (3.35) par son expression dans (3.34), on obtient

$$\star \Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd} = -\Lambda T^d{}_{cd} + \Lambda T^d{}_{dc}. \quad (3.36)$$

sachant que le tenseur de torsion est antisymétrique vis-à-vis des deux derniers indices, la relation précédente devient alors

$$\star \Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd} = 2\Lambda T^d{}_{dc}. \quad (3.37)$$

En substituant les résultats (3.22), (3.32) et (3.37) dans l'équation suivante

$$\star R^{ab} T^d \epsilon_{abcd} + \star \Lambda e^a e^b T^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G \star (D\tau)_c,$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} -RT^d{}_{cd} - 2R^a{}_c T^d{}_{da} - 2R^a{}_d T^d{}_{ac} - R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ab} + 2\Lambda T^d{}_{dc} = & +16\pi G (\partial_\mu \tau_c{}^a) e^{-1\mu}{}_a \\ & + 16\pi G \tau_c{}^a e^{-1\mu}{}_a (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^{-1\alpha}{}_r \\ & - 16\pi G \tau_c{}^a e^{-1\mu}{}_r (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^{-1\alpha}{}_a \\ & + 16\pi G \omega_c{}^a{}_\mu e^{-1\mu}{}_f \tau_a{}^f, \end{aligned} \quad (3.38)$$

c'est la forme tensorielle de l'équation de non conservation covariante (2.76). C'est une relation très importante puisqu'elle s'avère être une combinaison astucieuse des équations d'Einstein, et permet donc de gagner du temps dans la résolution de ces dernières. Nous verrons dans le prochain chapitre une application directe de cette équation dans la résolution des équations d'Einstein-Cartan dans le modèle de Kottler dans le cas particulier mais très intéressant d'un tenseur de torsion complètement antisymétrique. Dans ce cas précis, la relation (3.38) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} -2R^a{}_d T^d{}_{ac} - R^{ab}{}_{cd} T^d{}_{ab} = & 16\pi G (\partial_\mu \tau_c{}^a) e^{-1\mu}{}_a + 16\pi G \tau_c{}^a e^{-1\mu}{}_a (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^{-1\alpha}{}_r \\ & - 16\pi G \tau_c{}^a e^{-1\mu}{}_r (\partial_\mu e^r{}_\alpha) e^{-1\alpha}{}_a + 16\pi G \omega_c{}^a{}_\mu e^{-1\mu}{}_f \tau_a{}^f. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sachant que le spin est une propriété quantique des particules et que la torsion est le spin, il n'est pas étonnant de constater que ce dernier n'a pas d'influence sur le mouvement d'un corps à l'échelle macroscopique. En effet, puisque les géodésiques et les autoparallèles coïncident, et ce, dans le cas d'une torsion complètement antisymétrique ce qui paraît être, à première vue, comme une problématique dont il faudrait s'affranchir quant à une éventuelle description des phénomènes physiques qui tiennent compte de cet élément "nouveau" qu'est la torsion. De façon presque paradoxale, la torsion peut se manifester à l'échelle cosmologique dans une époque où l'univers était très jeune, une période durant laquelle la densité de particules, et donc de spin, était tellement élevée qu'un effet, probablement encore mesurable aujourd'hui, pourrait subsister. Dans ce contexte, et pour mettre encore

plus en évidence l'importance d'une torsion complètement antisymétrique, Böhmer [35] démontre que, si l'on considère un modèle cosmologique homogène et isotrope incluant la torsion [36], alors le cas d'une torsion complètement antisymétrique n'est pas seulement un des cas possibles, mais le seul cas physiquement signifiant que peut avoir ce modèle [37]. En émettant l'hypothèse d'une expansion exponentielle de l'univers dans laquelle le terme dominant des équations de Friedmann est celui de la torsion, Böhmer montre que cette dernière pourrait parfaitement être une explication de l'inflation cosmique et ce, sans avoir recours à un quelconque champ scalaire. L'effet de la torsion étant très rapidement atténué après la période d'inflation, les mesures cosmologiques actuelles devraient détecter un effet certes faible mais pas nul de la torsion (voir Sabbata et Sivaram [38] et de Andrade [39]). Dans [40], Berman montre que même si l'on considère un univers anisotrope dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan (cas du modèle de Bianchi I), alors il est possible d'expliquer la phase d'inflation qu'a connu notre univers après une très courte période de son existence par la contribution de l'interaction spin-spin qui est supposée être dominante à cette époque. Enfin, dans la théorie de Kaluza-Klein à 11-dimension, la considération d'un tenseur de Cartan complètement antisymétrique s'avère être l'outil nécessaire pour le processus d'aplanissement (flattening process) qui permet d'écraser la 7-sphère dans le mécanisme de compactification spontanée [37].

3.2 Équation d'asymétrie

Tous comme le courant énergie-impulsion, le courant de spin S_{ab} , une 3-forme à valeurs du groupe de Lorentz, peut s'écrire dans le référentiel orthonormé e^a comme suit

$$S_{ab} = \frac{1}{3!} S_{abfgh} e^f e^g e^h. \quad (3.40)$$

Le tenseur de spin s_{abc} est relié au courant de spin S_{ab} via l'opération Hodge star \star ,

$$\star S_{ab} = s_{abc} e^c. \quad (3.41)$$

Afin de voir le lien qui existe entre S_{abfgh} et s_{abc} , appliquons le Hodge star à l'équation (3.40)

$$\star S_{ab} = \frac{1}{3!} S_{abfgh} \star e^f e^g e^h, \quad (3.42)$$

avec

$$\star e^f e^g e^h = \epsilon_{\tilde{i}\tilde{g}\tilde{h}\tilde{k}} \eta^{\tilde{i}f} \eta^{\tilde{g}g} \eta^{\tilde{h}h} e^{\tilde{k}}, \quad (3.43)$$

donc

$$\begin{aligned} \star S_{ab} &= \frac{1}{3!} S_{abfgh} \epsilon_{\tilde{i}\tilde{g}\tilde{h}\tilde{k}} \eta^{\tilde{i}f} \eta^{\tilde{g}g} \eta^{\tilde{h}h} e^{\tilde{k}} \\ &= \frac{1}{3!} S_{abfgh} \epsilon^{fgh\tilde{k}} \eta_{\tilde{k}c} e^c. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En comparant ce résultat à la relation (3.41), on obtient

$$s_{abc} = \frac{1}{3!} S_{abfgh} \epsilon^{fgh}{}^c. \quad (3.45)$$

On peut aussi exprimer S_{abfgh} en terme de s_{abc} en multipliant la relation (3.45) par $\epsilon_{f'g'h'}{}^c$, ainsi, nous aurons

$$\begin{aligned} s_{abc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c &= \frac{1}{3!} S_{abfgh} \epsilon^{fgh}{}^c \epsilon_{f'g'h'}{}^c \\ &= \frac{1}{3!} S_{abfgh} \epsilon^{fghc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \epsilon^{fghc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c &= - \left[\delta_{f'}^f \delta_{g'}^g \delta_{h'}^h - \delta_{g'}^f \delta_{f'}^g \delta_{h'}^h - \delta_{h'}^f \delta_{g'}^g \delta_{f'}^h \right. \\ &\quad \left. - \delta_{f'}^f \delta_{h'}^g \delta_{g'}^h + \delta_{g'}^f \delta_{h'}^g \delta_{f'}^h + \delta_{h'}^f \delta_{f'}^g \delta_{g'}^h \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

la relation (3.46) devient alors

$$\begin{aligned} s_{abc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c &= -\frac{1}{3!} (S_{abf'g'h'} - S_{abg'f'h'} - S_{abh'g'f'} - S_{abf'h'g'} \\ &\quad + S_{abg'h'f'} + S_{abh'f'g'}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant le fait que $S_{abf'g'h'}$ est antisymétrique par rapport aux trois derniers indices, on peut montrer que les six contributions entre parenthèses sont les mêmes, donc

$$s_{abc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c = -\frac{1}{3!} 3! S_{abf'g'h'}. \quad (3.49)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} S_{abf'g'h'} &= -s_{abc} \epsilon_{f'g'h'}{}^c \\ &= -s_{abc} \eta^{ck} \epsilon_{f'g'h'k}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou bien

$$S_{abfgh} = s_{abc} \eta^{ck} \epsilon_{k f g h}. \quad (3.51)$$

En utilisant cette relation, il est donc possible d'écrire S_{ab} comme

$$S_{ab} = \frac{1}{3!} s_{abc} \eta^{\bar{c}k} \epsilon_{\bar{k} f g h} e^f e^g e^h. \quad (3.52)$$

À présent calculons la dérivée covariante extérieure du courant de spin $(DS)_{ab}$,

$$(DS)_{ab} = dS_{ab} + \omega_a{}^c S_{cb} + \omega_b{}^c S_{ac}. \quad (3.53)$$

Le calcul de la dérivée extérieure dS_{ab} nous impose l'utilisation d'un référentiel holonome dx^μ ,

$$\begin{aligned} dS_{ab} &= d \left(\frac{1}{3!} s_{abc} \eta^{\bar{c}\bar{k}} \epsilon_{\bar{k}fgh} e^f{}_\nu e^g{}_\rho e^h{}_\sigma dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \right) \\ &= \frac{1}{3!} \eta^{\bar{c}\bar{k}} \epsilon_{\bar{k}fgh} [(\partial_\mu s_{abc}) e^f{}_\nu e^g{}_\rho e^h{}_\sigma + s_{abc} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^g{}_\rho e^h{}_\sigma \\ &\quad + s_{abc} e^f{}_\nu (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^h{}_\sigma + s_{abc} e^f{}_\nu e^g{}_\rho (\partial_\mu e^h{}_\sigma)] dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \end{aligned} \quad (3.54)$$

La relation (3.8) nous permet de revenir au référentiel orthonormé e^a . On a donc

$$dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma = e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} e^{\bar{i}} e^{\bar{j}} e^{\bar{g}} e^{\bar{h}}, \quad (3.55)$$

en remplaçant (3.55) dans (3.54), on obtient

$$\begin{aligned} dS_{ab} &= \frac{1}{3!} \eta^{\bar{c}\bar{k}} \epsilon_{\bar{k}fgh} [(\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} e^f{}_\nu e^g{}_\rho e^h{}_\sigma e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^g{}_\rho e^h{}_\sigma e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} e^f{}_\nu (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^h{}_\sigma e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} e^f{}_\nu e^g{}_\rho (\partial_\mu e^h{}_\sigma) e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}}] e^{\bar{i}} e^{\bar{j}} e^{\bar{g}} e^{\bar{h}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

En utilisant (3.10), la relation précédente devient

$$\begin{aligned} dS_{ab} &= \frac{1}{3!} \eta^{\bar{c}\bar{k}} \epsilon_{\bar{k}fgh} [(\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} e^{\bar{i}} e^f e^g e^h \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} e^{\bar{i}} e^{\bar{j}} e^g e^h \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} e^{\bar{i}} e^f e^{\bar{g}} e^h \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^h{}_\sigma) e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} e^{\bar{i}} e^f e^g e^{\bar{h}}]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En appliquant l'opération Hodge star à cette relation et en utilisant (3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \star dS_{ab} &= \frac{1}{3!} \eta^{\bar{c}\bar{k}} \epsilon_{\bar{k}fgh} [(\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} \epsilon^{\bar{i}fgh} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^{-1\nu}{}_{\bar{j}} \epsilon^{\bar{i}fgh} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} \epsilon^{\bar{i}fgh} \\ &\quad + s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{i}} (\partial_\mu e^h{}_\sigma) e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} \epsilon^{\bar{i}fgh}]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Les relations (3.15) et (3.16) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \star dS_{ab} &= -\eta^{\bar{c}\bar{k}} (\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}{}_{\bar{k}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{k}} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^{-1\nu}{}_{\bar{f}} + \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{f}} (\partial_\mu e^f{}_\nu) e^{-1\nu}{}_{\bar{k}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{k}} (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^{-1\rho}{}_{\bar{g}} + \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{g}} (\partial_\mu e^g{}_\rho) e^{-1\rho}{}_{\bar{k}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{k}} (\partial_\mu e^h{}_\sigma) e^{-1\sigma}{}_{\bar{h}} + \frac{1}{3} \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{abc} e^{-1\mu}{}_{\bar{h}} (\partial_\mu e^h{}_\sigma) e^{-1\sigma}{}_{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Avec une permutation d'indices convenable, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \star dS_{ab} &= -\eta^{\bar{c}\bar{k}} (\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}_{\bar{k}} \\ &\quad - \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_{\bar{k}} (\partial_\mu e^f_\nu) e^{-1\nu}_f + \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_f (\partial_\mu e^f_\nu) e^{-1\nu}_{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Reste à calculer les deux membres $\omega_a^c S_{cb}$ et $\omega_b^c S_{ac}$ de la relation (3.53). On a

$$\omega_a^c = \omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{k}} e^{\bar{k}}, \quad (3.61)$$

et

$$S_{cb} = \frac{1}{3!} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}} \epsilon_{\bar{l}\bar{f}\bar{g}\bar{h}} e^{\bar{f}} e^{\bar{g}} e^{\bar{h}}, \quad (3.62)$$

donc

$$\omega_a^c S_{cb} = \frac{1}{3!} \omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{k}} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}} \epsilon_{\bar{l}\bar{f}\bar{g}\bar{h}} e^{\bar{k}} e^{\bar{f}} e^{\bar{g}} e^{\bar{h}}. \quad (3.63)$$

En appliquant le Hodge star à la dernière relation (3.63), et en utilisant (3.13) et (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} \star \omega_a^c S_{cb} &= \frac{1}{3!} \omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{k}} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}} \epsilon_{\bar{l}\bar{f}\bar{g}\bar{h}} \epsilon^{\bar{k}\bar{i}\bar{g}\bar{h}} \\ &= \frac{1}{3!} \omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{k}} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}} (-) 3! \delta_{\bar{l}}^{\bar{k}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

enfin

$$\star \omega_a^c S_{cb} = -\omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{l}} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}}. \quad (3.65)$$

De la même manière, on a

$$\star \omega_b^c S_{ac} = -\omega_b^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{l}} s_{ac\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}}. \quad (3.66)$$

En collectant les résultats (3.60), (3.65) et (3.66), on obtient

$$\begin{aligned} \star (DS)_{ab} &= \star dS_{ab} + \star \omega_a^c S_{cb} + \star \omega_b^c S_{ac} \\ &= -\eta^{\bar{c}\bar{k}} (\partial_\mu s_{abc}) e^{-1\mu}_{\bar{k}} - \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_{\bar{k}} (\partial_\mu e^f_\nu) e^{-1\nu}_f + \eta^{\bar{c}\bar{k}} s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_f (\partial_\mu e^f_\nu) e^{-1\nu}_{\bar{k}} \\ &\quad - \omega_a^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{l}} s_{cb\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}} - \omega_b^c{}_{\bar{\mu}} e^{-1\bar{\mu}}_{\bar{l}} s_{ac\bar{d}} \eta^{\bar{d}\bar{l}}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Avec une permutation appropriée des indices, la relation (3.67) devient

$$\begin{aligned} \star (DS)_{ab} &= \eta^{\bar{c}\bar{k}} e^{-1\nu}_{\bar{k}} \left[-(\partial_\nu s_{abc}) - s_{ab\bar{c}} (\partial_\nu e^f_\mu) e^{-1\mu}_f + s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_f (\partial_\mu e^f_\nu) \right. \\ &\quad \left. - \omega_a^c{}_\nu s_{cb\bar{c}} - \omega_b^c{}_\nu s_{ac\bar{c}} \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Enfin, l'équation d'asymétrie peut être écrite comme

$$\begin{aligned} \tau_{ab} - \tau_{ba} &= \eta^{\bar{c}\bar{k}} e^{-1\nu}_{\bar{k}} \left[-(\partial_\nu s_{abc}) - s_{ab\bar{c}} (\partial_\nu e^f_\mu) e^{-1\mu}_f + s_{ab\bar{c}} e^{-1\mu}_f (\partial_\mu e^f_\nu) \right. \\ &\quad \left. - \omega_a^c{}_\nu s_{cb\bar{c}} - \omega_b^c{}_\nu s_{ac\bar{c}} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

On voit bien, d'après cette équation, que la présence d'une source de torsion, en l'occurrence le tenseur de spin s_{abc} , fait que le tenseur énergie-impulsion τ_{ab} n'est pas symétrique. C'est l'une des propriétés qui différencie la théorie d'Einstein-Cartan de la relativité générale.

Chapitre 4

Modèle de Kottler avec torsion

Après la publication en 1915 [41] de la première version des équations d'Einstein (sans constante cosmologique) ces dernières semblaient si difficiles à résoudre, vu leur degré de complexité, qu'Einstein lui-même était étonné qu'une année plus tard seulement (1916) Karl Schwarzschild [42] trouve une solution analytique exacte en faisant l'hypothèse de la symétrie sphérique. Une deuxième solution exacte fut apportée par Willem de Sitter (1917) [43] après qu'Einstein donna leurs formes définitives aux équations de la relativité générale en introduisant la constante cosmologique [44]. Cette solution décrit un univers homogène, isotrope et vide de matière mais "rempli" d'une constante cosmologique positive. La combinaison de ces deux solutions a donné lieu au modèle de Kottler [45] appelé aussi modèle de Schwarzschild-de Sitter, celui-ci est bien connu en relativité générale et reste encore aujourd'hui un sujet de recherche intéressant, vu l'importance de la symétrie sphérique des objets stellaires présents dans le cosmos [52, 53].

Le modèle de Schwarzschild a, depuis longtemps, fait l'objet de nombreuses études dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan [46, 47, 48, 49, 50, 51]. Dans [31], Schücker utilise la métrique de Kottler pour montrer que la loi de Gauss faible (weak Gauss law) n'est plus vérifiée lorsque la torsion, à la Einstein-Cartan, est prise en considération. Cependant, après une révision des calculs figurants dans l'article en question, il s'est avéré qu'un certain nombre de termes nouveaux (désirés pour des raisons que nous verrons plus tard) sont apparus, ce qui a pour conséquence d'éviter le calcul numérique dont l'auteur a eu recours dans son article. Ainsi, on obtient une solution exacte des équations d'Einstein-Cartan décrivant la métrique à l'intérieur d'une distribution de matière de densité constante et présentant une symétrie sphérique en présence d'une constante cosmologique non nulle.

N.B : Afin de faciliter la comparaison des résultats, on a décidé de garder les mêmes notations que celles utilisées dans [31].

4.1 Loi de Gauss faible en relativité générale

En électromagnétisme, la loi de Gauss (ou théorème de Gauss) permet de calculer le flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée en connaissant la distribution de charge contenue dans le volume délimité par cette surface. Cette loi reste valable en relativité générale dans le cas d'une distribution de masse statique à symétrie sphérique même en présence d'une constante cosmologique.

Pour parvenir à établir cette loi, il est nécessaire de passer par les étapes suivantes ¹,

— **Étape 1** : résoudre l'équation de Killing pour la métrique (2.110)

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\nu} g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1)$$

pour les vecteurs de Killing

$$\begin{aligned} \xi &= -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \xi &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \xi &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

générant les rotations autour des 3 axes (ox), (oy) et (oz) (symétrie sphérique), ainsi que le vecteur

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.3)$$

qui génère la translation temporelle (distribution de matière statique). La solution de l'équation (4.1) est connue et donne, après une transformation de coordonnées convenable,

$$d\tau^2 = B dt^2 - A dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.4)$$

avec A et B des fonctions positives de r .

— **Étape 2** : résoudre l'équation d'Einstein

$$Ricci_{\mu\nu} - \frac{1}{2} scalar g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \tau_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

à l'extérieur de la distribution de masse, $\tau_{\mu\nu} = 0$, on obtient la solution de Kottler,

$$B = \frac{1}{A} = 1 - \frac{S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2,$$

S étant une constante d'intégration.

1. Le développement qui va suivre est repris intégralement à partir de [31]

- **Étape 3** : en assimilant la distribution de matière $\tau^t_t(r)$ à une sphère de rayon R , il est possible alors de déterminer la constante S en utilisant la loi de Gauss faible qui n'est autre que la composante (tt) de l'équation d'Einstein

$$Ricci^t_t - \frac{1}{2} scalar g^t_t - \Lambda g^t_t = 8\pi G \tau^t_t. \quad (4.6)$$

Dans le cas statique et sphérique, cette équation devient

$$\frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{d}{dr} \frac{r}{A} \right] - \Lambda = 8\pi G \tau^t_t, \quad (4.7)$$

par intégration, on obtient

$$\frac{r}{A} = r - 2G \int_0^r \tau^t_t(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 - \frac{1}{3} \Lambda r^3 + K. \quad (4.8)$$

Sachant que $A(0) > 0$, la constante d'intégration K s'annule lorsque la relation précédente est évaluée en $r = 0$. Donc la solution intérieure prend la forme

$$A(r) = \left[1 - \left(2G \int_0^r \tau^t_t(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r} \right) / r - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right]^{-1}, \quad (4.9)$$

en utilisant la continuité de la fonction A sur la frontière $r = R$, on obtient le rayon de Schwarzschild $S = 2GM$ avec

$$M = \int_0^R \tau^t_t(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (4.10)$$

4.2 Loi de Gauss faible dans la théorie d'Einstein-Cartan

Nous verrons dans cette section que la loi de Gauss faible n'est plus vérifiée à partir du moment où on introduit la torsion.

4.2.1 Forme générale de la connexion dans le cas statique à symétrie sphérique

La métrique étant la première variable fondamentale dans la théorie d'Einstein-Cartan, la connexion métrique Γ (à ne pas confondre avec la connexion de Christoffel) représente quant à elle la seconde variable dynamique indépendante qu'il faudra donc déterminer. Chose possible grâce à la résolution de l'équation de Killing pour la connexion (2.112)

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \Gamma^\lambda_{\bar{\mu}\nu} + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\bar{\nu}} + \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (4.11)$$

La raison à cela est que les deux variables fondamentales doivent posséder les mêmes symétries, et donc, les mêmes champs vectoriels de Killing (4.2) – (4.3) d'où la relation précédente qui est l'analogie de l'équation de Killing pour la métrique (4.1).

Il est question de 4×64 équations auxquelles il faudra satisfaire. Pour la translation temporelle, il en résulte que toutes les composantes Γ sont indépendantes du temps. Reste à résoudre les 3×64 équations qui assurent l'invariance sous les rotations et qu'il est possible de réduire à 2×64 équations puisque dans le cas des rotations infinitésimales, le commutateur de deux des rotations donne la troisième. Un calcul relativement long donne les composantes non nulles suivantes pour la connexion :

$$\Gamma^a{}_{bc} = X^a{}_{bc}(r), a, b, c \in \{t, r\}, \quad (4.12)$$

$$\Gamma^a{}_{\theta\theta} = \Gamma^a{}_{\varphi\varphi}/\sin^2\theta = E^a(r), \Gamma^a{}_{\theta\varphi} = -\Gamma^a{}_{\varphi\theta} = \sin\theta F^a(r), \quad (4.13)$$

$$\Gamma^\theta{}_{a\theta} = \Gamma^\varphi{}_{a\varphi} = C_a(r), \Gamma^\theta{}_{\theta a} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi a} = Y_a(r), \quad (4.14)$$

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi a} = -\sin^2\theta \Gamma^\varphi{}_{\theta a} = -\sin\theta Z_a(r), \Gamma^\theta{}_{a\varphi} = -\sin^2\theta \Gamma^\varphi{}_{a\theta} = -\sin\theta G_a(r), \quad (4.15)$$

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta \cos\theta, \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cos\theta/\sin\theta, \quad (4.16)$$

avec $8 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ fonctions arbitraires X, E, F, C, Y, Z, G de r . G et Z sont les fonctions qui permettent de paramétrer les composantes de la connexion Γ qui ne figurent pas dans [31] et qui joueront un rôle important dans la suite de ce travail.

En utilisant la condition de métricité donnée par (2.113)

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^\lambda} - \Gamma^{\bar{\mu}}{}_{\mu\lambda} g_{\bar{\mu}\nu} - \Gamma^{\bar{\nu}}{}_{\nu\lambda} g_{\mu\bar{\nu}} = 0, \quad (4.17)$$

on obtient des relations qui relient entre elles les fonctions précédentes, réduisant ainsi leurs nombres à 8 : $C_t, C_r, D_t, D_r, G_t, G_r, Z_t, Z_r$. Les composantes non nulles de la connexion

deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 \Gamma^t{}_{rt} &= D_t \frac{A}{B}, \Gamma^r{}_{tt} = D_t, \\
 \Gamma^t{}_{rr} &= D_r \frac{A}{B}, \Gamma^r{}_{tr} = D_r, \\
 \Gamma^t{}_{tr} &= \frac{B'}{2B}, \Gamma^r{}_{rr} = \frac{A'}{2A}, \\
 \Gamma^t{}_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{B} C_t, \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r^2}{A} C_r, \\
 \Gamma^t{}_{\varphi\varphi} &= \frac{r^2}{B} \sin^2 \theta C_t, \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\frac{r^2}{A} \sin^2 \theta C_r, \\
 \Gamma^\theta{}_{t\theta} &= C_t, \Gamma^\theta{}_{r\theta} = C_r, \\
 \Gamma^\varphi{}_{t\varphi} &= C_t, \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = C_r, \\
 \Gamma^\theta{}_{\theta r} &= \frac{1}{r}, \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma^t{}_{\theta\varphi} &= \frac{r^2}{B} \sin \theta G_t, \Gamma^r{}_{\theta\varphi} = -\frac{r^2}{A} \sin \theta G_r, \\
 \Gamma^t{}_{\varphi\theta} &= -\frac{r^2}{B} \sin \theta G_t, \Gamma^r{}_{\varphi\theta} = \frac{r^2}{A} \sin \theta G_r, \\
 \Gamma^\varphi{}_{t\theta} &= -\frac{G_t}{\sin \theta}, \Gamma^\varphi{}_{r\theta} = -\frac{G_r}{\sin \theta}, \\
 \Gamma^\theta{}_{t\varphi} &= G_t \sin \theta, \Gamma^\theta{}_{r\varphi} = G_r \sin \theta, \\
 \Gamma^\varphi{}_{\theta t} &= \frac{Z_t}{\sin \theta}, \Gamma^\varphi{}_{\theta r} = \frac{Z_r}{\sin \theta}, \\
 \Gamma^\theta{}_{\varphi t} &= -Z_t \sin \theta, \Gamma^\theta{}_{\varphi r} = -Z_r \sin \theta, \\
 \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta, \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Les composantes (4.18) sont le résultat de l'implémentation des symétries (4.2 – 4.3) en utilisant le repère holonome dx^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. À présent, nous allons utiliser le repère orthonormé e^a , $a = 0, 1, 2, 3$. Les deux référentiels sont reliés par

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \tag{4.19}$$

où $e(x) = e^a{}_\mu(x) \in GL(4)$, de telle sorte à avoir

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x) e^a{}_\nu(x) \eta_{ab}, \tag{4.20}$$

avec $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique et η_{ab} la métrique de Minkowski. La connexion Γ écrite dans le référentiel holonome est une 1-forme qui prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $gl(4)$,

$$\Gamma^\alpha{}_\beta = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} dx^\mu. \tag{4.21}$$

De même, la connexion de spin ω est une 1-forme mais à valeurs dans $so(1, 3)$, ce qui se traduit par² $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. Le lien entre les composantes de Γ et ω est donné par la transformation de gauge

$$\omega = e\Gamma e^{-1} + ede^{-1}, \quad (4.22)$$

en terme de composantes, on a

$$\omega^a{}_{b\mu} = e^a{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}e^{-1\beta}{}_b + e^a{}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}e^{-1\alpha}{}_b. \quad (4.23)$$

À partir de (4.20), on peut déduire que

$$e = \begin{pmatrix} \sqrt{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

En utilisant (4.18) et (4.23), on obtient les composantes non nulles $\omega^a{}_{b\mu}$ de la connexion,

$$\begin{aligned} \omega^t{}_{rt} &= \sqrt{\frac{A}{B}}D_t, & \omega^{\theta}{}_{\varphi t} &= -Z_t, \\ \omega^t{}_{rr} &= \sqrt{\frac{A}{B}}D_r, & \omega^{\theta}{}_{\varphi r} &= -Z_r, \\ \omega^t{}_{\theta\theta} &= \frac{r}{\sqrt{B}}C_t, & \omega^t{}_{\varphi\theta} &= -\frac{r}{\sqrt{B}}G_t, \\ \omega^r{}_{\theta\theta} &= -\frac{r}{\sqrt{A}}C_r, & \omega^r{}_{\varphi\theta} &= \frac{r}{\sqrt{A}}G_r, \\ \omega^t{}_{\theta\varphi} &= \frac{r}{\sqrt{B}}\sin\theta C_t, & \omega^t{}_{\varphi\varphi} &= \frac{r}{\sqrt{B}}\sin\theta C_t, \\ \omega^r{}_{\theta\varphi} &= -\frac{r}{\sqrt{A}}\sin\theta C_r, & \omega^r{}_{\varphi\varphi} &= -\frac{r}{\sqrt{A}}\sin\theta C_r, \\ & & \omega^{\theta}{}_{\varphi\varphi} &= -\cos\theta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2.2 Équations d'Einstein et de Cartan dans le cas de la métrique de Kottler

Ayant obtenu les composantes de la connexion ω , il devient facile de calculer les composantes de la courbure données par

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_{\mu}\omega^a{}_{b\nu} - \partial_{\nu}\omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu}\omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu}\omega^c{}_{b\mu}. \quad (4.26)$$

2. Les indices a et b doivent figurer tous les deux en haut ou bien en bas.

Les composantes non nulles sont

$$\begin{aligned}
 R^{tr}{}_{tr} &= \left(\sqrt{\frac{A}{B}} D_t \right)', \\
 R^{\theta\varphi}{}_{tr} &= -Z_t', \\
 R^{t\theta}{}_{t\theta} &= \frac{r}{\sqrt{B}} (D_t C_r - G_t Z_t), \\
 R^{t\varphi}{}_{t\theta} &= -\frac{r}{\sqrt{B}} (D_t G_r + C_t Z_t), \\
 R^{r\theta}{}_{t\theta} &= -r\sqrt{A} \left(\frac{D_t C_t}{B} - \frac{G_r Z_t}{A} \right), \\
 R^{r\varphi}{}_{t\theta} &= r\sqrt{A} \left(\frac{D_t G_r}{B} + \frac{C_r Z_t}{A} \right), \\
 R^{t\theta}{}_{t\varphi} &= \frac{r}{\sqrt{B}} \sin \theta (D_t G_r + C_t Z_t), \\
 R^{t\varphi}{}_{t\varphi} &= \frac{r}{\sqrt{B}} \sin \theta (D_t C_r - G_t Z_t), \\
 R^{r\theta}{}_{t\varphi} &= -r\sqrt{A} \left(\frac{D_t G_t}{B} + \frac{C_r Z_t}{A} \right), \\
 R^{r\varphi}{}_{t\varphi} &= -r\sqrt{A} \left(\frac{D_t C_t}{B} - \frac{G_r Z_t}{A} \right), \\
 R^{t\theta}{}_{r\theta} &= -\left(\frac{r}{\sqrt{B}} C_t \right)' + \frac{r}{\sqrt{B}} (D_r C_r - G_t Z_r), \\
 R^{t\varphi}{}_{r\theta} &= \left(\frac{r}{\sqrt{B}} G_t \right)' - \frac{r}{\sqrt{B}} (D_r G_r - C_t Z_r), \\
 R^{r\theta}{}_{r\theta} &= \left(\frac{r}{\sqrt{A}} C_r \right)' - r\sqrt{A} \left(\frac{D_r C_t}{B} - \frac{G_r Z_r}{A} \right), \\
 R^{r\varphi}{}_{r\theta} &= -\left(\frac{r}{\sqrt{A}} G_r \right)' + r\sqrt{A} \left(\frac{D_r G_t}{B} + \frac{C_r Z_r}{A} \right), \\
 R^{t\theta}{}_{r\varphi} &= \left[-\left(\frac{r}{\sqrt{B}} G_t \right)' + \frac{r}{\sqrt{B}} (D_r G_r + C_t Z_r) \right] \sin \theta, \\
 R^{t\varphi}{}_{r\varphi} &= \left[-\left(\frac{r}{\sqrt{B}} C_t \right)' + \frac{r}{\sqrt{B}} (D_r C_r - G_t Z_r) \right] \sin \theta, \\
 R^{r\theta}{}_{r\varphi} &= \left[\left(\frac{r}{\sqrt{A}} G_r \right)' - r\sqrt{A} \left(\frac{D_r G_t}{B} + \frac{C_r Z_r}{A} \right) \right] \sin \theta, \\
 R^{r\varphi}{}_{r\varphi} &= \left[\left(\frac{r}{\sqrt{A}} C_r \right)' - r\sqrt{A} \left(\frac{D_r C_t}{B} - \frac{G_r Z_r}{A} \right) \right] \sin \theta, \\
 R^{tr}{}_{\theta\varphi} &= -\frac{2r^2 \sin \theta}{\sqrt{AB}} (C_t G_r - G_t C_r), \\
 R^{\theta\varphi}{}_{\theta\varphi} &= -\sin \theta \left[1 + r^2 \left(\frac{C_t^2 + G_t^2}{B} - \frac{C_r^2 + G_r^2}{A} \right) \right], \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

avec $' := \frac{d}{dr}$ la dérivée par rapport à r .

L'étape suivante consiste à calculer le tenseur de Ricci défini par

$$R^a_b := R^{ca}{}_{\mu\nu} e^{-1\mu}{}_c e^{-1\nu}{}_b, \quad (4.28)$$

et dont les composantes non nulles sont

$$\begin{aligned} R^t_t &= \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} D_t \right)' + \frac{2}{B} (D_t C_r - G_t Z_t), \\ R^r_r &= \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} D_t \right)' + \frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_r}{\sqrt{A}} \right)' + \frac{2}{A} \left(\frac{C_r}{r} + G_r Z_r \right) - 2 \frac{D_r C_t}{B}, \\ R^\theta_\theta &= R^\varphi_\varphi = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_r}{\sqrt{A}} \right)' + \frac{1}{A} \left(\frac{C_r}{r} + C_r^2 + G_r Z_r + G_r^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{B} (D_t C_r - G_t Z_t - D_r C_t - C_t^2 - G_t^2) - \frac{1}{r^2}, \\ R^t_r &= -\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_t}{\sqrt{B}} \right)' + \frac{2}{\sqrt{AB}} \left(-\frac{C_t}{r} + D_r C_r - G_t Z_r \right), \\ R^r_t &= -2 \sqrt{\frac{A}{B}} \left(\frac{D_t C_t}{B} - \frac{G_r Z_t}{A} \right), \\ R^\theta_\varphi &= -R^\varphi_\theta = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{G_r}{\sqrt{A}} \right)' + \frac{1}{A} \left(\frac{G_r}{r} - C_r Z_r \right) + \frac{1}{B} (D_t G_r + C_t Z_t - D_r G_t), \end{aligned} \quad (4.29)$$

en plus de l'affectation de toutes les composantes du tenseur de Ricci par les modifications soulignées précédemment, deux nouvelles composantes $\theta\varphi$ et $\varphi\theta$ antisymétriques l'une par rapport à l'autre font leur apparition.

Le calcul de la courbure scalaire donne

$$\begin{aligned} R &= R^t_t + R^r_r + R^\theta_\theta + R^\varphi_\varphi = R^t_t + R^r_r + 2R^\theta_\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} D_t \right)' + \frac{4}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_r}{\sqrt{A}} \right)' + \frac{2}{A} \left(2 \frac{C_r}{r} + C_r^2 + 2G_r Z_r + G_r^2 \right) \\ &\quad + \frac{2}{B} (2D_t C_r - 2D_r C_t - C_t^2 - 2G_t Z_t - G_t^2) - \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'équation d'Einstein s'écrit

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R \eta_{ab} - \Lambda \eta_{ab} = 8\pi G \tau_{ba}. \quad (4.31)$$

Dans le repère orthonormé $e = \text{diag} \left(\sqrt{B}, \sqrt{A}, r, r \sin \theta \right)$, la forme la plus générale³ du tenseur énergie-impulsion τ_{ab} est donnée par

$$\tau_{ab} = \begin{pmatrix} \rho(r) & q(r) & 0 & 0 \\ o(r) & P_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_a(r) & u(r) \\ 0 & 0 & -u(r) & P_a(r) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Les composantes tt , rr et $\theta\theta$ de l'équation d'Einstein (4.31) sont

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_r}{\sqrt{A}} \right)' - \frac{1}{A} \left(2\frac{C_r}{r} + C_r^2 + 2G_r Z_r + G_r^2 \right) + \frac{1}{B} (2D_r C_t + C_t^2 + G_t^2) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi G\rho(r), \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{A} (C_r^2 + G_r^2) + \frac{1}{B} (2D_t C_r - C_t^2 - 2G_t Z_t - G_t^2) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi G P_r(r), \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} D_t \right)' + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_r}{\sqrt{A}} \right)' + \frac{1}{A} \left(\frac{C_r}{r} + G_r Z_r \right) + \frac{1}{B} (D_t C_r - D_r C_t - G_t Z_t) + \Lambda = 8\pi G P_a(r). \quad (4.35)$$

Les composantes hors diagonale tr , rt et $\theta\varphi$ s'écrivent

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{C_t}{\sqrt{B}} \right)' + \frac{2}{\sqrt{AB}} \left(-\frac{C_t}{r} + D_r C_r - G_t Z_r \right) = -8\pi G o(r), \quad (4.36)$$

$$2\sqrt{\frac{A}{B}} \left(\frac{D_t C_t}{B} - \frac{G_r Z_t}{A} \right) = 8\pi G q(r), \quad (4.37)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{G_r}{\sqrt{A}} \right)' - \frac{1}{A} \left(\frac{G_r}{r} - C_r Z_r \right) - \frac{1}{B} (D_t G_r + C_t Z_t - D_r G_t) = -8\pi G u(r). \quad (4.38)$$

La prochaine étape consiste à écrire concrètement l'équation de Cartan qui relie la torsion T^a à sa source s_{ab} , le courant de spin demi-entier

$$T^c e^d \epsilon_{abcd} = -8\pi G s_{ab}. \quad (4.39)$$

Les composantes de la torsion sont des 2-forme qui prennent leurs valeurs (vectorielles) dans \mathbb{R}^4 , dans le référentiel orthonormé elles prennent la forme suivante,

$$T^a = \frac{1}{2} T_{a'bc} \eta^{a'a} e^b e^c, \quad (4.40)$$

avec T_{abc} donnée par (2.27),

$$T^a{}_{bc} = \left(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega^a{}_{k\mu} e_\nu{}^k - \omega^a{}_{k\nu} e_\mu{}^k \right) e^{-1\mu}{}_b e^{-1\nu}{}_c. \quad (4.41)$$

3. à chaque composante du tenseur de Ricci correspond une composante du tenseur énergie-impulsion

Les composantes non nulles de la torsion sont

$$\begin{aligned}
 T_{ttr} &= \left(D_t - \frac{1}{2} \frac{B'}{A} \right) \frac{\sqrt{A}}{B}, \\
 T_{rtr} &= \frac{D_r}{\sqrt{B}}, \\
 T_{\theta t\theta} &= T_{\varphi t\varphi} = \frac{C_t}{\sqrt{B}}, \\
 T_{\varphi t\theta} &= -T_{\theta t\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{B}} (Z_t + G_t), \\
 T_{\theta r\theta} &= T_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(C_r - \frac{1}{r} \right), \\
 T_{\varphi r\theta} &= T_{\theta \varphi r} = -\frac{1}{\sqrt{A}} (Z_r + G_r), \\
 T_{t\theta\varphi} &= -\frac{2}{\sqrt{B}} G_t, \\
 T_{r\theta\varphi} &= -\frac{2}{\sqrt{A}} G_r.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Comme cité précédemment dans le chapitre 1, il est possible de décomposer les tenseurs de torsion et de spin en partie complètement antisymétrique, partie vectorielle et partie mixte, ce qui se traduit par

$$T_{abc} = A_{abc} + \eta_{ab} V_c - \eta_{ac} V_b + M_{abc}, \tag{4.43}$$

pour le tenseur de torsion, et

$$S_{abc} = a_{abc} + \eta_{ca} S_b - \eta_{cb} S_a + m_{abc}, \tag{4.44}$$

pour le tenseur de spin. Ainsi, l'équation de Cartan (4.39) devient strictement équivalente à la relation suivante (voir la relation (2.92))

$$A_{cab} + 2\eta_{bc} V_a - 2\eta_{ac} V_b + M_{cab} = -8\pi G (a_{abc} + \eta_{ca} S_b - \eta_{cb} S_a + m_{abc}),$$

à partir de laquelle on déduit

$$A_{abc} = -8\pi G a_{abc}, \quad V_a = \frac{1}{2} 8\pi G S_a, \quad M_{cab} = -8\pi G m_{abc}. \tag{4.45}$$

Explicitement, les équations de Cartan s'écrivent

$$\begin{aligned}
 A_{t\theta\varphi} &= -\frac{2}{3\sqrt{B}}(Z_t + 2G_t) = -8\pi G a_{t\theta\varphi}, \\
 A_{r\theta\varphi} &= -\frac{2}{3\sqrt{A}}(Z_r + 2G_r) = -8\pi G a_{r\theta\varphi}, \\
 V_t &= \frac{1}{3\sqrt{B}}(D_r + 2C_t) = 4\pi G s_t, \\
 V_r &= \frac{1}{3\sqrt{A}}\left(\frac{-B'}{2B} - \frac{2}{r} + 2C_r + \frac{A}{B}D_t\right) = 4\pi G s_r, \\
 M_{ttr} &= -\frac{2}{3\sqrt{A}}\left(\frac{B'}{2B} - \frac{1}{r} + C_r - \frac{A}{B}D_t\right) = -8\pi G m_{ttr}, \\
 M_{t\theta\varphi} &= \frac{2}{3\sqrt{B}}(Z_t - G_t) = -8\pi G m_{\theta\varphi t}, \\
 M_{rtr} &= \frac{2}{3\sqrt{B}}(D_r - C_t) = -8\pi G m_{trr}, \\
 M_{r\theta\varphi} &= \frac{2}{3\sqrt{A}}(Z_r - G_r) = -8\pi G m_{\theta\varphi r}, \\
 M_{\theta t\theta} &= -\frac{1}{2}M_{rtr} = \frac{1}{3\sqrt{B}}(C_t - D_r) = -8\pi G m_{t\theta\theta}, \\
 M_{\theta t\varphi} &= \frac{1}{3\sqrt{B}}(Z_t - G_t) = -8\pi G m_{\theta t\varphi}, \\
 M_{\theta r\theta} &= \frac{1}{2}M_{trt} = \frac{1}{3\sqrt{A}}\left(\frac{B'}{2B} - \frac{1}{r} + C_r - \frac{A}{B}D_t\right) = -8\pi G m_{r\theta\theta}, \\
 M_{\theta r\varphi} &= \frac{1}{3\sqrt{A}}(Z_r - G_r) = -8\pi G m_{r\varphi\theta}, \\
 M_{\varphi t\theta} &= -\frac{1}{3\sqrt{B}}(Z_t - G_t) = -8\pi G m_{t\theta\varphi}, \\
 M_{\varphi t\varphi} &= M_{\theta t\theta} = -\frac{1}{2}M_{rtr} = \frac{1}{3\sqrt{B}}(C_t - D_r) = -8\pi G m_{t\varphi\varphi}, \\
 &\left(m_{t\theta\theta} = m_{t\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}m_{trr}\right). \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

4.2.3 Tenseur de Cartan complètement antisymétrique

On a montré dans le chapitre 1 que le fait de considérer une torsion complètement antisymétrique est en soi-même une condition suffisante et nécessaire pour que les géodésiques, définies par la connexion de Christoffel et minimisant localement la longueur de l'arc délimité par deux points de la courbe d'une particule libre, et les autoparallèles, définies

par le transport d'un vecteur tangent à la courbe parallèlement à lui-même en utilisant la connexion métrique (indépendante) Γ , coïncident.

En imposant à la partie vectorielle V_a et de symétrie mixte M_{abc} d'être nulles, on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} C_t &= 0, \\ C_t &= \frac{1}{r}, \\ D_t &= \frac{B'}{2A}, \\ D_r &= 0, \\ G_t &= Z_t, \\ G_r &= Z_r. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Les équations d'Einstein deviennent alors

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{1}{r\sqrt{A}} \right)' - \frac{1}{A} \left(\frac{3}{r^2} + 3Z_r^2 \right) + \frac{Z_t^2}{B} + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi G\rho(r), \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{r^2} + Z_r^2 \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{B'}{rA} - 3Z_t^2 \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi GP_r(r), \tag{4.49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{B'}{2\sqrt{AB}} \right)' + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{1}{r\sqrt{A}} \right)' + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{r^2} + Z_r^2 \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{B'}{2rA} - Z_t^2 \right) + \Lambda = 8\pi GP_a(r), \tag{4.50}$$

pour les composantes diagonales tt , rr et $\theta\theta = \varphi\varphi$. Les composantes hors diagonales s'écrivent

$$\frac{Z_t}{\sqrt{B}} \frac{Z_r}{\sqrt{A}} = 4\pi G\sigma(r), \tag{4.51}$$

$$\frac{Z_t}{\sqrt{B}} \frac{Z_r}{\sqrt{A}} = -4\pi Gq(r), \tag{4.52}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{Z_r}{\sqrt{A}} \right)' - \frac{1}{B} \left(\frac{B'}{2A} Z_r \right) = -8\pi Gu(r), \tag{4.53}$$

respectivement pour les composantes tr , rt et $\theta\varphi$. Les équations de Cartan prennent la forme suivante

$$\frac{Z_t}{\sqrt{B}} = 4\pi Ga_{t\theta\varphi}, \tag{4.54}$$

$$\frac{Z_r}{\sqrt{A}} = 4\pi Ga_{r\theta\varphi}. \tag{4.55}$$

On peut désormais considérer le cas d'une étoile de Schwarzschild dans lequel la densité de masse ρ et la densité de spin s sont constantes $\left(\frac{d\rho}{dr} = \frac{ds}{dr} = 0\right)$ à l'intérieur de la distribution de la matière. On adopte les deux équations d'état suivantes :

$$a_{t\theta\varphi} = s_{t\theta\varphi} = \omega_t \rho, \quad (4.56)$$

$$a_{r\theta\varphi} = s_{r\theta\varphi} = \omega_r \rho, \quad (4.57)$$

avec ω_t et ω_r deux paramètres constants. Ainsi, les équations d'Einstein se simplifient d'avantage pour donner

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{1}{r\sqrt{A}} \right)' - \frac{3}{r^2 A} - 3(4\pi G\omega_r \rho)^2 + (4\pi G\omega_t \rho)^2 + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{r^2 A} + (4\pi G\omega_r \rho)^2 + \frac{B'}{rAB} - 3(4\pi G\omega_t \rho)^2 - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi GP_r(r), \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{B'}{2\sqrt{AB}} \right)' + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{1}{r\sqrt{A}} \right)' + \frac{1}{r^2 A} + (4\pi G\omega_r \rho)^2 + \frac{B'}{2rAB} - (4\pi G\omega_t \rho)^2 + \Lambda = 8\pi GP_a(r), \quad (4.60)$$

$$o(r) = o = -q(r) = -q = 4\pi G\omega_t \omega_r \rho^2, \quad (4.61)$$

$$u(r) = \frac{B'}{4B\sqrt{A}} \omega_r \rho. \quad (4.62)$$

Aussi, les équations de Cartan se réduisent à la forme suivante

$$\frac{Z_t}{\sqrt{B}} = 4\pi G\omega_t \rho, \quad (4.63)$$

$$\frac{Z_r}{\sqrt{A}} = 4\pi G\omega_r \rho. \quad (4.64)$$

La composante tt de l'équation d'Einstein (4.58) est découplée des deux autres composantes rr et $\theta\theta$ et peut être réécrite comme suit

$$-\left(\frac{r}{A}\right)' - 3(4\pi G\omega_r \rho)^2 r^2 + (4\pi G\omega_t \rho)^2 r^2 + 1 - \Lambda r^2 = 8\pi G\rho r^2. \quad (4.65)$$

En intégrant la relation précédente, on obtient

$$-\frac{r}{A} - (4\pi G\omega_r \rho)^2 r^3 + \frac{1}{3}(4\pi G\omega_t \rho)^2 r^3 + r - \frac{\Lambda}{3} r^3 - \frac{8}{3}\pi G\rho r^3 = K, \quad (4.66)$$

avec K une constante d'intégration à déterminer. Sachant que $A(0) > 0$, l'évaluation de (4.66) en $r = 0$ donne $K = 0$. On aura donc

$$\frac{r}{A(r)} + (4\pi G\omega_r \rho)^2 r^3 - \frac{1}{3}(4\pi G\omega_t \rho)^2 r^3 - r + \frac{\Lambda}{3} r^3 + \frac{8}{3}\pi G\rho r^3 = 0, \quad (4.67)$$

finalemt, on obtient l'expression suivante pour la fonction $A(r)$ de la métrique de Schwarzschild à l'intérieur de la distribution de matière

$$A(r) = \left[1 - \left(\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 - 16\pi^2 G^2 \omega_t^2 \rho^2 \right) \frac{r^2}{3} \right]^{-1}. \quad (4.68)$$

Afin de rester cohérent, nous examinerons la loi de Gauss faible en présence de la torsion après avoir déterminé toutes les fonctions inconnues qui restent, à savoir, $B(r)$, $P(r)$ et $u(r)$.

Pour simplifier le calcul, nous considérons une seule pression, c'est-à-dire, $P_r(r) = P_\theta(r) = P(r)$. Le calcul des deux membres de l'équation de non conservation covariante dans le cas d'un tenseur de Cartan complètement antisymétrique (3.39) donne,

$$\frac{4}{\sqrt{AB}} \frac{Z_r}{A} \left[Z'_t + \left(\frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) Z_t \right] = -16\pi G \frac{q'(r)}{\sqrt{A}} - 16\pi G \frac{q(r)}{\sqrt{A}} \frac{B'}{B} - 32\pi G \frac{q(r)}{r\sqrt{A}} + 32\pi G \frac{u(r)}{\sqrt{B}} Z_t, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{4B'}{AB} \frac{Z_r^2}{\sqrt{A}} + \frac{4}{\sqrt{A}} \frac{Z_t}{B} \left(Z'_t + \frac{2}{r} Z_t \right) &= -16\pi G \frac{P'(r)}{\sqrt{A}} - 8\pi G \frac{B'}{B} \frac{P(r)}{\sqrt{A}} \\ &\quad - 32\pi G \frac{P(r)}{r\sqrt{A}} - 8\pi G \frac{B'}{B} \frac{\rho}{\sqrt{A}} \\ &\quad + 32\pi G \frac{P(r)}{r\sqrt{A}} + 32\pi G \frac{u(r)}{\sqrt{A}} Z_r, \end{aligned} \quad (4.70)$$

respectivement pour $c = t$ et $c = r$. Pour les composantes θ et φ l'équation (3.39) est identiquement satisfaite, en d'autres termes, aucune information supplémentaire n'est obtenue. À partir de la relation (2.111), on peut facilement montrer que les fonctions Z_r et Z_t sont respectivement paire et impaire sous l'inversion temporelle $t \rightarrow -t$. Dans le cas d'une étoile de Schwarzschild ou la densité de masse est constante, il est tout à fait raisonnable de considérer l'invariance par renversement du temps, par conséquent, on a

$$Z_t(r) = \omega_t = 0, \quad (4.71)$$

d'où

$$o(r) = 0, \quad q(r) = 0. \quad (4.72)$$

Dans ce cas, l'équation (4.70) devient

$$\frac{-16\pi G}{\sqrt{A}} \left[P' + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} (P + \rho) - \frac{2B'}{16\pi GB} \frac{Z_r^2}{A} \right] = 0, \quad (4.73)$$

en utilisant l'équation de Cartan (4.64), la relation précédente prend la forme suivante

$$P' + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} (P + \rho + 4\pi G \omega_r^2 \rho^2) = 0, \quad (4.74)$$

en vertu de la constance de ρ , on peut donc écrire

$$(P + \rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2)' + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} (P + \rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) = 0, \quad (4.75)$$

ou bien encore

$$\frac{(P + \rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2)'}{(P + \rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2)} + \frac{1}{2} \frac{B'}{B} = 0, \quad (4.76)$$

l'intégration de cette équation donne

$$P + \rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2 = \frac{K}{\sqrt{B}}. \quad (4.77)$$

La pression à l'extérieur de la distribution de matière étant nulle, la continuité de celle-ci implique qu'elle doit aussi s'annuler sur la surface de la sphère $r = R$, ce qui se traduit par $P(R) = 0$, d'où la valeur de la constante K

$$K = (\rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) \sqrt{B(R)}, \quad (4.78)$$

ainsi, on obtient l'expression de la pression $P(r)$ en fonction de $B(r)$ à l'intérieur de la distribution de masse

$$P(r) = (\rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) \left(\frac{\sqrt{B(R)}}{\sqrt{B(r)}} - 1 \right). \quad (4.79)$$

En substituant $P(r)$ et $A(r)$ par leurs expressions respectives (4.79) et (4.68) dans la composante rr de l'équation d'Einstein (4.59), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) + \frac{B'}{rB} \left(1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right) \\ & = 8\pi G (\rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) \frac{\sqrt{B(R)}}{\sqrt{B(r)}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

en multipliant les deux membres de l'équation (4.80) par $\sqrt{B(r)}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \sqrt{B(r)} + \frac{2}{r} \left(\sqrt{B(r)} \right)' \left(1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right) \\ & = 8\pi G (\rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) \sqrt{B(R)}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

c'est une équation différentielle du premier ordre en $\sqrt{B(r)}$ avec second membre, sa solution générale est la somme de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière avec second membre. Puisque le second membre de l'équation (4.81) est constant, il est donc possible de chercher une solution particulière sous forme d'une constante qu'on appellera D . En remplaçant $\sqrt{B(r)}$ par D dans (4.81), on obtient

$$D = \frac{12\pi G (\rho + 4\pi G\omega_r^2\rho^2) \sqrt{B(R)}}{\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2}, \quad (4.82)$$

qui est une solution particulière de (4.81).

Cherchons à présent la solution générale de l'équation différentielle (4.81) sans second membre, c'est-à-dire,

$$\frac{2}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \sqrt{B(r)} + \frac{2}{r} \left(\sqrt{B(r)} \right)' \left(1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right) = 0, \quad (4.83)$$

la multiplication de (4.83) par r donne

$$(\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r}{3} \sqrt{B} + \left(\sqrt{B} \right)' \left(1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right) = 0, \quad (4.84)$$

que l'on peut réécrire comme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln \left(1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right) = \frac{d}{dr} \ln \sqrt{B}, \quad (4.85)$$

en intégrant cette équation, on obtient

$$\sqrt{B(r)} = C \sqrt{1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3}}, \quad (4.86)$$

avec C une constante d'intégration. Donc la solution générale de l'équation différentielle (4.81) est donnée par

$$\sqrt{B(r)} = C \sqrt{1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3}} + \frac{12\pi G (\rho + 4\pi G \omega_r^2 \rho^2) \sqrt{B(R)}}{\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2}. \quad (4.87)$$

En imposant à la fonction $B(r)$ d'être continue sur la frontière $r = R$, sachant que $B(R) = \frac{1}{A(R)}$, on obtient l'expression de la constante d'intégration C suivante

$$C = \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2}. \quad (4.88)$$

Finalement, l'expression (4.87) de $B(r)$ devient

$$\begin{aligned} \sqrt{B(r)} = & \frac{1}{\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2} \left[(\Lambda - 4\pi G\rho) \sqrt{1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{r^2}{3}} \right. \\ & \left. + 12\pi G (\rho + 4\pi G \omega_r^2 \rho^2) \sqrt{1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) \frac{R^2}{3}} \right]. \quad (4.89) \end{aligned}$$

En adoptant des notations similaires, mais quelque peu modifiées, à celles introduites par Schücker dans [31],

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \frac{1}{3} (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2), \\ \tilde{\alpha} &= \frac{12\pi G (\rho + 4\pi G\omega_r^2 \rho^2)}{3\tilde{\gamma}}, \\ \tilde{\beta} &= \frac{\Lambda - 4\pi G\rho}{3\tilde{\gamma}} = 1 - \tilde{\alpha}, \\ W(r) &= \sqrt{1 - \tilde{\gamma}r^2}, \\ Q &= W(R),\end{aligned}\tag{4.90}$$

il est possible de simplifier l'expression (4.89) comme suit

$$\sqrt{B(r)} = \tilde{\beta}\sqrt{1 - \tilde{\gamma}r^2} + \tilde{\alpha}\sqrt{1 - \tilde{\gamma}R^2},\tag{4.91}$$

ou bien

$$B(r) = \left(\tilde{\beta}W(r) + \tilde{\alpha}Q \right)^2.\tag{4.92}$$

En remplaçant (4.91) dans (4.79), on obtient l'expression de la pression à l'intérieur de la distribution de matière

$$P(r) = (\rho + 4\pi G\omega_r^2 \rho^2) \left(\frac{Q}{\tilde{\alpha}Q + \tilde{\beta}W(r)} - 1 \right).\tag{4.93}$$

En utilisant (4.53), (4.55) et (4.57), on peut écrire

$$u(r) = \frac{B'}{4B\sqrt{A}} \omega_r \rho = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{B})'}{\sqrt{B}} \frac{1}{\sqrt{A}} \omega_r \rho,\tag{4.94}$$

avec

$$\left(\sqrt{B(r)} \right)' = -\frac{(1 - \tilde{\alpha}) \tilde{\gamma}r}{\sqrt{1 - \tilde{\gamma}r^2}} = -\frac{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}r}{W(r)},\tag{4.95}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{A(r)}} = \sqrt{1 - \tilde{\gamma}r^2} = W(r),\tag{4.96}$$

donc, la relation (4.94) devient

$$u(r) = -\frac{1}{2} \frac{(1 - \tilde{\alpha}) \tilde{\gamma} \omega_r \rho r}{(1 - \tilde{\alpha}) \sqrt{1 - \tilde{\gamma}r^2} + \tilde{\alpha} \sqrt{1 - \tilde{\gamma}R^2}},\tag{4.97}$$

qui est finalement équivalente à l'expression suivante

$$u(r) = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\omega_r \rho r}{\tilde{\alpha}Q + \tilde{\beta}W(r)}.\tag{4.98}$$

Toutes les fonctions $A(r)$, $B(r)$, $o(r)$, $q(r)$ et $u(r)$ qui apparaissent dans la métrique de Kottler intérieure ont été déterminées, de même que la pression $P(r)$.

À présent, examinons la manière dont la loi de Gauss sera modifiée lorsqu'on tient compte d'un tenseur de Cartan complètement antisymétrique. Celle-ci est donnée, comme en relativité générale, par la composante tt de l'équation d'Einstein (4.58),

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} \left(\frac{1}{r\sqrt{A}} \right)' - \frac{3}{r^2 A} - 3(4\pi G\omega_r \rho)^2 + (4\pi G\omega_t \rho)^2 + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (4.99)$$

et dont l'intégration a donné l'expression de $A(r)$ suivante

$$A(r) = \left[1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 - 16\pi^2 G^2 \omega_t^2 \rho^2) \frac{r^2}{3} \right]^{-1}. \quad (4.100)$$

En évaluant (4.100) en $r = R$, on obtient

$$A^{-1}(R) = 1 - (\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 - 16\pi^2 G^2 \omega_t^2 \rho^2) \frac{R^2}{3}, \quad (4.101)$$

ceci d'une part. D'une autre part, on sait que par continuité de la fonction A sur la frontière, on a

$$A^{-1}(R) = 1 - \frac{2GM_e}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}, \quad (4.102)$$

ou M_e est la masse externe [31] définie par la force du champ gravitationnel à l'extérieur de la distribution de matière ($r \geq R$). En comparant (4.101) et (4.102), on obtient la relation suivante

$$2GM_e = 3(3\omega_r^2 - \omega_t^2) \frac{G^2 M_i^2}{R^3} + 2GM_i, \quad (4.103)$$

avec M_i la masse interne définie par

$$M_i = \frac{4}{3} \pi \rho R^3. \quad (4.104)$$

Ainsi, la relation reliant la masse interne à la masse externe est donnée par

$$M_e = M_i \left[1 + \frac{3}{2} (3\omega_r^2 - \omega_t^2) \frac{GM_i}{R^3} \right], \quad (4.105)$$

qui montre bien que les deux masses ne coïncident pas, mettant ainsi en évidence la brisure de la loi de Gauss faible dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan. Dans le cas où $\omega_r = \omega_t = 0$, c'est-à-dire en l'absence de torsion, on retrouve la solution analytique connue de A ,

$$A(r) = \left[1 - \frac{1}{3} (8\pi G\rho + \Lambda) r^2 \right]^{-1}, \quad (4.106)$$

et dans ce cas on a $M_e = M_i$, en accord avec la loi de Gauss faible en relativité générale.

D'après (4.105), il est possible de distinguer deux cas :

- $\frac{\omega_r^2}{\omega_t^2} < \frac{1}{3} \implies M_i > M_e$ la masse interne est plus grande que la masse externe. En vue d'apporter une possible explication au problème de la matière noire, ce cas de figure n'est pas intéressant car on sait que la matière sombre est beaucoup plus abondante dans l'univers que la matière baryonique.
- $\frac{\omega_r^2}{\omega_t^2} > \frac{1}{3} \implies M_e > M_i$ la masse externe est plus grande que la masse interne. Pour la raison évoquée précédemment, il est tout à fait envisageable que la torsion puisse être considérée comme un élément de réponse à la question de la matière noire dont la nature et l'origine, rappelons-le, ne reposent que sur des hypothèses.

On a vu précédemment que dans le cas d'une étoile de Schwarzschild ou la densité de masse est constante à l'intérieur du rayon R , on pouvait supposer l'invariance sous inversion temporelle, ce qui a permis d'éliminer la fonction Z_t et, par conséquent, d'éliminer aussi le paramètre ω_t . Afin de rester cohérent avec ce qui vient d'être dit, et puisque le deuxième cas ci-dessus est plus intéressant que le premier du point de vue cosmologique, on gardera donc que la fonction Z_r et le paramètre ω_r qui la caractérise. Dans ce cas, la relation (4.105) devient

$$M_e = M_i \left[1 + \frac{9}{2} \omega_r^2 \frac{GM_i}{R^3} \right]. \quad (4.107)$$

La matière noire représente environ 26% de la densité d'énergie totale de l'univers, la matière baryonique quant à elle ne représente que 4.9% [54]. Si on définit M_e comme étant la masse "ressentie" par un observateur placé à l'extérieur de la distribution de masse, on peut donc identifier M_e à la matière sombre (ce que l'observateur mesure). De même, M_i pourrait être définie comme la masse "effective" contenue dans la sphère de matière ce qui permet de l'identifier à la matière ordinaire, il existe donc un rapport de 5 entre les deux masses ($M_e/M_i \approx 5$).

Dans le cas de notre soleil dont la masse et le rayon sont donnés par $M_i = M_\odot$ avec $M_\odot = 1.9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ et $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$, on a

$$\omega_r = \left(\frac{8}{9} \frac{R^3}{GM_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.52 \cdot 10^3 \text{ s}. \quad (4.108)$$

Pour un amas de galaxies tel que $M_i = 10^{15} M_\odot$ et $R = 3 \cdot 10^{23} \text{ m}$, on obtient

$$\omega_r = \left(\frac{8}{9} \frac{R^3}{G10^{15}M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.26 \cdot 10^{17} \text{ s}. \quad (4.109)$$

Pour les mêmes exemples cités ci-dessus, Schücker [31] obtient des valeurs différentes du paramètre ω qui sont données par $\omega = 3.1 \text{ s}$ et $\omega = 1.33 \cdot 10^{15} \text{ s}$ respectivement pour le soleil et l'amas de galaxies.

Quant à la question de savoir si concrètement la torsion peut être une alternative à la matière noire, Schücker et Tilquin [28] ont exploité les données du Union 2 sample [55], un échantillon de 577 supernova de type 1a avec une large plage de redshifts allant jusqu'à 1.4, afin de confronter la théorie d'Einstein-Cartan dans le cas d'un espace de symétrie maximale ($\mathcal{O}(3) \times \mathbb{R}^3$) aux données expérimentales. La matière visible étant constituée

principalement de protons, neutrons, électrons et de neutrinos, tous avec un spin $\frac{1}{2}$ et de faible densité, ce qui permet de négliger la pression et de simplifier par la même occasion le modèle en question. En utilisant la même équation d'état que la notre avec, évidemment, une dépendance temporelle $s(t) = \omega_s \rho(t)$, les auteurs obtiennent un fit avec une densité de matière de $\Omega_m = 5\%$ correspondant à la matière visible uniquement. Toutefois, le meilleur fit aux observations du WMAP collaboration [56] à été obtenu avec des densités de masse et de spin données par $\Omega_m = 9\%$ et $\Omega_s = 12\%$. Ce fit est rendu possible grâce à un paramètre d'état ω_s de $\omega_s \sim H_0^{-1} \sim 10^{17}s$, exactement du même ordre de grandeur que celui obtenu dans le cas de l'amas de galaxies (4.109). Cela indique que la torsion générée par la densité de spin peut se manifester de manière significative sur l'échelle des grandes structures de l'univers ou bien à l'échelle de l'univers dans son ensemble en tant que système. À noter cependant, la valeur de $\Omega_m = 9\%$ qui implique encore, certes une faible présence de la matière noire, mais qui n'est pas tout à fait nulle. Noter enfin, l'écart de la valeur obtenue du paramètre d'état $\omega_r \sim 10^{17}s$ par rapport à celle attendue, par exemple, pour un proton [28, 31]

$$\omega_s = \frac{\hbar}{m_{proton}c^2} \sim 10^{-25}s,$$

42 ordres de grandeur séparent les deux valeurs, ce qui représente une différence énorme et surtout troublante pour reprendre l'expression des auteurs de l'article.

4.3 Géodésiques des photons dans le cas de la métrique de Kottler intérieure avec torsion

Lorsqu'un photon passe à proximité d'une distribution de masse, celui-ci est dévié par le champ gravitationnel créé par cette dernière. La déviation de la lumière est une conséquence directe de la courbure de l'espace-temps par la présence de la matière, et cette déviation est d'autant plus importante que la distribution de masse est grande. Dans le cas où un observateur reçoit une lumière émanant d'une source lointaine et que celle-ci subit le phénomène décrit précédemment, on dit alors que la distribution de masse en question joue le rôle de lentille gravitationnelle. Tel un télescope naturel, cette dernière peut fournir non seulement d'importantes informations sur les objets célestes telle que leurs masses, mais constitue aussi un moyen fiable pour identifier les signatures émanant des trous noirs, et permettre par la même occasion une vérification des théories alternatives de la gravitation dans le régime du champ fort [85, 86, 87, 88]. Les physiciens ont longtemps cru que la constante cosmologique n'avait pas d'influence sur le phénomène de la déflexion de la lumière en avançant comme argument le fait que la constante cosmologique disparaissait de l'équation de la géodésique dans le cas d'une particule sans masse [57, 58, 59, 60, 61, 62]. En 2007, Ishak et Rindler [63] montrent que cet argument n'était pas suffisant puisque, dans le cas d'une particule massive, la constante cosmologique apparaît de manière concrète et qu'en plus il fallait tenir compte de la métrique elle-même. Un riche débat était alors engagé entre ceux qui confirmèrent le résultat de Rindler et Ishak [64, 65, 66, 67, 68] et

ceux qui les contredisent [69, 70, 71]. Dans tous ces travaux, le photon considéré ne pénètre pas à l'intérieur de la distribution de masse (la lentille) et son mouvement est donc celui d'un photon en chute libre dans le champ de gravitation de la lentille modélisée par la métrique de Schwarzschild-de Sitter extérieure, c'est-à-dire, par

$$ds^2 = B(r) dt^2 - B^{-1}(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

avec

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2.$$

Toute fois, il est possible de considérer le phénomène de la "déflexion de la lumière" lorsque le photon pénètre à l'intérieur de la distribution de masse. Un travail dans ce sens a été effectué par Schücker [72] dans lequel il met en évidence la dépendance de manière concrète de la géodésique d'une particule sans masse en la constante cosmologique dans le cas de la solution de Kottler intérieure, chose qui n'est pas vraie dans le cas de Kottler extérieur où l'influence de la constante cosmologique n'apparaît que lorsque les angles de coordonnées sont convertis en angles physiques.

Afin de rester dans la logique du travail fait dans cette thèse, on a trouvé intéressante l'idée de l'étude d'une éventuelle influence de la torsion sur la déflexion de la lumière. En effet, on a vu précédemment que la torsion ne se manifeste qu'à l'intérieur de la distribution de masse ou il y a présence de densité de spin (voir l'équation de Cartan (2.86)). Le fait de considérer un tenseur de Cartan complètement antisymétrique permet d'obtenir une coïncidence entre les géodésiques et les courbes autoparallèles, dans ce cas l'équation de mouvement d'un photon dans le champ de gravitation de la distribution de masse (la lentille) est donnée par

$$\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0, \quad (4.110)$$

avec p un paramètre affine et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ les symboles de Christoffel de la métrique de Kottler intérieure. En vertu de l'isotropie de l'espace, le mouvement s'effectue dans un plan que l'on peut choisir comme étant le plan équatorial ($\theta = \pi/2$). Les équations de la géodésiques s'écrivent donc

$$\ddot{t} + \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t}\dot{r} = 0, \quad (4.111)$$

$$\ddot{r} + \frac{B'(r)}{2A(r)} \frac{B'(r)}{B(r)} \dot{t}^2 + \frac{A'(r)}{2A(r)} \dot{r}^2 - \frac{r}{A(r)} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.112)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (4.113)$$

Sachant que $B'(r) = \dot{B}(r)/\dot{r}$, l'intégration de (4.111) et (4.113) donne

$$\dot{t} = \frac{1}{B(r)}, \quad (4.114)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{r^2}, \quad (4.115)$$

la relation (4.114) est obtenue après une redéfinition du paramètre affine p . la relation (4.115) traduit l'invariance par rotation et la constante d'intégration J est interprétée comme le moment angulaire par unité de masse. En substituant \dot{t} et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions (4.114) et (4.115) dans (4.112), on obtient après intégration

$$A(r)\dot{r}^2 - \frac{1}{B(r)} + \frac{J^2}{r^2} = -E, \quad (4.116)$$

avec E une constante d'intégration jouant le rôle d'une énergie par unité de masse car l'équation (4.116) est une conséquence de l'invariance sous les translations temporelles. En utilisant les relations (4.114), (4.115) et (4.116) on peut écrire

$$ds^2 = E dp^2, \quad (4.117)$$

pour un photon $ds^2 = 0$, par conséquent $E = 0$, ainsi l'équation (4.116) devient

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{A(r)B(r)} - \frac{J^2}{r^2 A(r)}. \quad (4.118)$$

En divisant la relation précédente par $\dot{\varphi}^2$, on obtient

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2}{A(r)B(r)} \left(\frac{r^2}{J^2} - B(r)\right), \quad (4.119)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} = \frac{1}{A(r)} \left(\frac{r^2}{J^2 B(r)} - 1\right). \quad (4.120)$$

En évaluant l'expression (4.120) en $r = R$, on obtient la condition initial suivante

$$C = \left(R\frac{d\varphi(R)}{dr}\right)^{-2} = \frac{1}{A(R)} \left(\frac{R^2}{J^2 B(R)} - 1\right), \quad (4.121)$$

en tirant J^2 en fonction de C et en remplaçant dans (4.120), on obtient la partie spatiale de la géodésique du photon suivante

$$\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} = \frac{1}{A(r)} \left(\frac{r^2}{R^2} \frac{C + B(R)}{B(r)} - 1\right). \quad (4.122)$$

À présent, développons le membre de droite de la relation précédente à des termes d'ordre 2 inclus. Le développement de $B(r)$, dont l'expression est donnée par (4.91), s'écrit

$$\begin{aligned}
 B(r) &= 1 + \frac{1}{3}4\pi G\rho r^2 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - 4\pi G\rho R^2 - (4\pi G\omega_r\rho)^2 R^2 \\
 &+ \frac{1}{12}(4\pi G\rho r^2)^2 - \frac{1}{12}(4\pi G\rho r^2)(\Lambda r^2) - \frac{1}{12}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 r^2\right)(\Lambda r^2) \\
 &+ \frac{1}{12}(4\pi G\rho R^2)^2 - \frac{1}{12}(4\pi G\rho R^2)(\Lambda R^2) - \frac{1}{12}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 R^2\right)(\Lambda R^2) \\
 &- \frac{1}{6}(4\pi G\rho r^2)(4\pi G\rho R^2) + \frac{1}{6}(4\pi G\rho R^2)(\Lambda r^2) + \frac{1}{6}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 R^2\right)(\Lambda r^2) \\
 &+ \frac{1}{12}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 r^2\right)(4\pi G\rho r^2) + \frac{1}{12}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 R^2\right)(4\pi G\rho R^2) \\
 &- \frac{1}{6}\left((4\pi G\omega_r\rho)^2 R^2\right)(4\pi G\rho r^2). \tag{4.123}
 \end{aligned}$$

Le développement de $1/B(r)$ à des termes d'ordre 2 inclus donne

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{B(r)} &= 1 - \frac{1}{6}8\pi G\rho r^2 + \frac{1}{2}8\pi G\rho R^2 + \frac{1}{3}(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2) + \frac{1}{3}\Lambda r^2 \\
 &+ \frac{1}{144}(8\pi G\rho r^2)^2 - \frac{5}{72}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda r^2) \\
 &- \frac{1}{72}(8\pi G\rho r^2)(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2) + \frac{1}{36}(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2)(\Lambda r^2) \\
 &+ \frac{11}{48}(8\pi G\rho R^2)^2 + \frac{1}{24}(8\pi G\rho R^2)(\Lambda R^2) + \frac{1}{9}(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2)^2 \\
 &+ \frac{23}{72}(8\pi G\rho R^2)(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2) + \frac{1}{36}(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2)(\Lambda R^2) \\
 &- \frac{1}{8}(8\pi G\rho r^2)(8\pi G\rho R^2) + \frac{1}{4}(8\pi G\rho r^2)(\Lambda R^2) \\
 &- \frac{1}{96}(8\pi G\rho r^2)(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2) + \frac{1}{6}(48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2)(\Lambda r^2) + \frac{1}{9}(\Lambda r^2)^2. \tag{4.124}
 \end{aligned}$$

En substituant $A(r)$ par son expression⁴ (4.100) et $B(R)$ par

$$B(R) = \frac{1}{A(R)} = 1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) R^2$$

dans (4.122), on obtient

$$\begin{aligned}
 \left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^{-2} &= \left(1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) R^2\right) \\
 &\left(\frac{r^2}{R^2} \frac{1}{B(r)} \left(C + 1 - \frac{1}{3}(\Lambda + 8\pi G\rho + 48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2) R^2\right) - 1\right). \tag{4.125}
 \end{aligned}$$

4. avec $\omega_t = 0$

En injectant (4.124) dans la relation précédente et en développant le résultat jusqu'à des termes d'ordre 2, on aboutit enfin à l'équation de la déflexion de la lumière suivante

$$\begin{aligned}
 \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right)^{-2} &= -1 + (C + 1) \frac{r^2}{R^2} \\
 &+ \frac{1}{2} (C + 1) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) (8\pi G \rho r^2) + \frac{1}{3} (C + 1) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) (48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2) \\
 &+ \frac{1}{8} \left[- \left(\frac{7}{3} C + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{3} C + 1 \right) \frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{2} (C + 1) \frac{r^2}{R^2} \right] (8\pi G \rho r^2)^2 \\
 &+ \frac{1}{24} \left[- \frac{67}{12} \left(\frac{83}{67} C - 1 \right) + (C + 1) \frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{23}{3} C + 1 \right) \frac{R^2}{r^2} \right] (8\pi G \rho r^2) (48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2) \\
 &+ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{6} (C - 3) + \frac{1}{3} \left(C + \frac{1}{3} \right) \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} (C + 1) \frac{r^4}{R^4} \right] (8\pi G \rho r^2) (\Lambda R^2) \\
 &+ \frac{1}{6} \left[\frac{1}{6} (C - 3) + \frac{1}{3} (C - 1) \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} (C + 1) \frac{r^4}{R^4} \right] (48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2) (\Lambda R^2).
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

La première ligne de (4.126) correspond à des termes d'ordre 0, la deuxième ligne à des termes d'ordre 1 qui sont proportionnels à $8\pi G \rho r^2$ et $48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 r^2$, le reste de l'équation regroupe des termes d'ordre 2. Quelques remarques importantes peuvent être faites concernant l'équation précédente. Avant tout, il est intéressant de noter qu'en l'absence de torsion ($\omega_r = 0$) on retrouve le même résultat obtenu par Schücker [72] à la seule différence près que le facteur $\frac{1}{3}$ dans le deuxième terme de la cinquième ligne est remplacé par un facteur 3 (on ignore l'influence que pourrait avoir cette modification). La seconde remarque est que la constante cosmologique apparaît ici (à l'ordre 2) de manière explicite, contrairement au cas de Kottler extérieure où celle-ci n'apparaît que lorsque les angles de coordonnées sont traduites en angles physiquement observables (cette constatation est aussi valable dans le cas sans torsion). La remarque la plus importante que l'on peut cependant faire et qui représente un apport nouveau au phénomène de déflexion de la lumière, est que le terme contenant la torsion, à savoir $48\pi^2 G^2 \omega_r^2 \rho^2 R^2$, en plus d'apparaître à l'ordre 2 dans l'équation (4.126), il apparaît aussi à l'ordre 1 dans celle-ci, ce qui nous laisse croire que la torsion pourrait avoir une influence plus importante que la constante cosmologique dans la déviation de la lumière.

Concernant le travail de Schücker [72], il fait noter à juste titre que la contribution de la constante cosmologique à la déflexion dans le cas de Kottler intérieure est de l'ordre de $GM\Lambda$ que multiplie une "échelle de longueur caractéristique" (5^{ème} ligne de (4.126)). Il compare de manière qualitative ce terme à celui obtenu par Sereno[65] $GM\Lambda b$ où $b \sim \epsilon r_p$ est le paramètre d'impact, ϵ l'angle de coordonnée (supposé petit) et r_p la distance d'approche minimale qui est la racine du membre de droite (sans torsion) de l'équation (4.126). De ce fait, il conclut que cette échelle de longueur dépend du profil de la densité $\rho(r)$ à l'intérieur de la distribution de matière. Le cas particulier d'une densité constante utilisée pour simplifier les calculs n'est pas réaliste, néanmoins un exemple d'un amas de galaxies

jouant le rôle d'une lentille gravitationnelle avec une masse $M = 10^{15}M_{\odot}$ et un rayon $R = 3 \cdot 10^{23}m$ est donné dans [72].

Chapitre 5

Modèle de Robertson-Walker avec torsion

À partir des deux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'espace tridimensionnel découle un modèle cosmologique qui rend compte de bon nombre de phénomènes observés à ce jour, il s'agit du modèle de Robertson-Walker (R-W) aussi appelé modèle standard de la cosmologie. Dans ce chapitre, il ne sera pas question de reprendre entièrement la description du modèle qu'il est possible de trouver dans n'importe quel livre de relativité générale, mais plutôt de reconsidérer le modèle en question dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan en introduisant la notion de torsion et de constater les modifications qui en résultent. En effet, par isotropie de l'espace on entend qu'il n'existe pas de direction privilégiée pour observer l'univers, cela se traduit mathématiquement par l'invariance de la métrique sous les rotations. Ayant déjà abordé ce volet (invariance sous les rotations) dans le cas du modèle de Kottler, il ne sera donc pas nécessaire de refaire les calculs puisqu'ils sont exactement les mêmes. Cependant, dans le cas de R-W une dépendance vis-à-vis du temps apparaît logiquement vu que ce modèle décrit un univers évoluant dans le temps (contrairement au modèle de Kottler qui décrit un univers statique).

Habituellement, lorsqu'on parle d'espace homogène cela signifie que tous les points de celui-ci sont équivalents, en d'autres termes, si p et q sont deux points de la variété M qui décrit l'espace à 3 dimensions, alors il existe une isométrie qui prend p en q , c'est l'invariance sous les translations. Ceci pour le cas plat. Si on émet l'hypothèse d'une courbure spatiale (positive pour le cas sphérique et négative pour le cas pseudo-sphérique), alors l'homogénéité d'un tel espace sera traduite par l'invariance de la métrique sous les quasi-translations que l'on décrira dans la section suivante.

Afin de rester cohérent, il est nécessaire de traiter les deux isométries de la métrique (rotations et quasi-translations) dans le même système de coordonnées et comme l'invariance sous les rotations s'est faite de façon naturelle à l'aide des coordonnées sphériques dans le cas de Kottler, il nous sera exigé de faire usage de ce même système de coordonnées pour imposer l'invariance sous les quasi-translations.

5.1 Champs vectoriels de Killing associés aux quasi-translations (cas sphérique)

En coordonnées cartésiennes, les champs vectoriels de Killing pour les quasi-translations prennent une forme relativement simple, ils sont donnés, respectivement le long des trois axes (ox), (oy) et (oz), par

$$\begin{aligned} & (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x}, \\ & (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

En coordonnées sphériques, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{5.4}$$

En remplaçant ces relations dans (5.1), on obtient les expressions des champs vectoriels de Killing associés aux quasi-translations en coordonnées sphériques :

$$(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} = (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{5.5}$$

en écrivant les vecteurs de Killing sous la forme $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, il est clair qu'en terme de composantes on a : $\xi^t := 0$, $\xi^r := (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\varphi$, $\xi^\theta := \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \cos\theta \cos\varphi$, $\xi^\varphi := -\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$ le long de l'axe (ox).

De même pour les quasi-translations le long de (oy), on a

$$(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} = (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{5.6}$$

avec $\xi^t := 0$, $\xi^r := (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\varphi$, $\xi^\theta := \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \cos\theta \sin\varphi$, $\xi^\varphi := \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}$.

Enfin, le vecteur de Killing associé aux quasi-translations le long de (oz) est donné par

$$(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} = (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{5.7}$$

tel que : $\xi^t = \xi^\varphi := 0$, $\xi^r := (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$, $\xi^\theta := -\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \sin\theta$.

5.2 Métrique de Robertson-Walker et connexion de spin

De façon similaire au travail fait dans le cas du modèle de Kottler, il est nécessaire de résoudre l'équation de Killing pour la métrique (2.110), son analogue pour la connexion (2.112) et satisfaire la condition de métricité (2.113) pour tous les vecteurs de Killing qui génèrent le groupe de symétrie maximale, ceci dans le but de combiner le principe cosmologique (homogénéité et isotropie) à la théorie d'Einstein-Cartan.

La solution la plus générale de l'équation de Killing (2.110) est bien connue et donne la métrique de R-W suivante

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (5.8)$$

avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ la métrique sur la 2-sphère et $a(t)$ le facteur d'échelle.

Les connexions Γ invariantes sous les vecteurs de Killing ξ s'obtiennent par la résolution de l'équation (2.112). Dans le cas des quasi-translations données par (5.5), (5.6) et (5.7), il est question de 3×64 équations auxquelles il faudrait satisfaire. Afin de permettre aux lecteurs de mieux appréhender les résultats, on donne comme exemple de calcul la composante $\Gamma^t{}_{rr}$. En choisissant de mettre en évidence l'action du champ vectoriel de Killing associé à la quasi-translation le long de (oy), l'application de l'équation (2.112) donne alors

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^t{}_{rr} - \underbrace{\frac{\partial \xi^t}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda{}_{rr}}_{=0} + \frac{\partial \xi^{\bar{\mu}}}{\partial x^r} \Gamma^t{}_{\bar{\mu}r} + \frac{\partial \xi^{\bar{\nu}}}{\partial x^r} \Gamma^t{}_{r\bar{\nu}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \xi^t}{\partial x^r \partial x^r}}_{=0} &= 0 \\ \xi^r \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} + \xi^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma^t{}_{rr} + \xi^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma^t{}_{rr} + 2 \frac{\partial \xi^r}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} + \frac{\partial \xi^\theta}{\partial r} \Gamma^t{}_{\theta r} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial r} \Gamma^t{}_{\varphi r} \\ &+ \frac{\partial \xi^\theta}{\partial r} \Gamma^t{}_{r\theta} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial r} \Gamma^t{}_{r\varphi} = 0 \\ \xi^r \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} + 2 \frac{\partial \xi^r}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les deux seuls termes qui subsistent sont ceux qui apparaissent dans la troisième ligne de (5.9). Ceci vient du fait que, lorsque nous avons imposé l'invariance sous les rotations dans le modèle de Kottler, les composantes $\Gamma^t{}_{\theta r}$, $\Gamma^t{}_{r\theta}$, $\Gamma^t{}_{\varphi r}$ et $\Gamma^t{}_{r\varphi}$ étaient nulles, de plus, $\Gamma^t{}_{rr}$ ne dépendait ni de θ ni de φ ($\frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma^t{}_{rr} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma^t{}_{rr} = 0$). Ainsi, en utilisant l'expression des composantes des vecteurs de Killing le long de (oy), on obtient

$$\begin{aligned} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} - 2r (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\varphi \Gamma^t{}_{rr} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} - \frac{2r}{(1-r^2)} \Gamma^t{}_{rr} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'intégration de (5.10) donne

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^t{}_{rr} &= \int \frac{2r}{(1-r^2)} \Gamma^t{}_{rr} \\ \int \frac{\partial \Gamma^t{}_{rr}}{\Gamma^t{}_{rr}} &= \int \frac{2r}{(1-r^2)} \partial r \\ \Rightarrow \ln \Gamma^t{}_{rr} &= -\ln(1-r^2) + C, \end{aligned}$$

en rappelant que les Γ dépendent du temps t , la constante d'intégration C peut être absorbée dans l'exponentielle pour donner enfin

$$\Gamma^t{}_{rr} = \frac{1}{(1-r^2)} G(t),$$

avec $G(t)$ une fonction arbitraire de t . Les autres composantes non nulles de la connexion Γ sont :

$$\begin{aligned} \Gamma^t{}_{tt} &= P(t), \Gamma^r{}_{rr} = \frac{r}{1-r^2}, \\ \Gamma^t{}_{rr} &= \frac{1}{1-r^2} G(t), \Gamma^r{}_{tr} = \Gamma^\theta{}_{t\theta} = \Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = U(t), \\ \Gamma^\theta{}_{\theta r} &= \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi t} = Q(t), \\ \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma^r{}_{\theta\theta} &= \frac{\Gamma^r{}_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} = -r(1-r^2), \Gamma^t{}_{\theta\theta} = \frac{\Gamma^t{}_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} = r^2 G(t), \\ \Gamma^r{}_{\theta\varphi} &= -\Gamma^r{}_{\varphi\theta} = r^2 \sin\theta (1-r^2)^{\frac{1}{2}} K(t), \\ \Gamma^\varphi{}_{r\theta} &= -\Gamma^\varphi{}_{\theta r} = \frac{\Gamma^\theta{}_{\varphi r}}{\sin^2\theta} = -\frac{\Gamma^\theta{}_{r\varphi}}{\sin^2\theta} = \frac{(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\theta} K(t), \end{aligned}$$

avec P, G, Q, U et K des fonctions arbitraires de t . L'application de la condition de métricité (2.113) permet de réduire le nombre de fonctions obtenues à 2 et les connexions précédentes deviennent donc

$$\begin{aligned} \Gamma^r{}_{rr} &= \frac{r}{1-r^2}, \Gamma^t{}_{rr} = \frac{a^2(t)}{1-r^2} U(t), \\ \Gamma^r{}_{tr} &= \Gamma^\theta{}_{t\theta} = \Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = U(t), \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi t} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \\ \Gamma^t{}_{\theta\theta} &= \frac{\Gamma^t{}_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} = r^2 a^2(t) U(t), \Gamma^r{}_{\theta\theta} = \frac{\Gamma^r{}_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} = -r(1-r^2), \\ \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma^\theta{}_{\theta r} &= \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \Gamma^r{}_{\theta\varphi} = -\Gamma^r{}_{\varphi\theta} = r^2 \sin\theta (1-r^2)^{\frac{1}{2}} K(t), \end{aligned}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\theta} = -\Gamma^\varphi_{\theta r} = \frac{\Gamma^\theta_{\varphi r}}{\sin^2\theta} = -\frac{\Gamma^\theta_{r\varphi}}{\sin^2\theta} = \frac{(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\theta} K(t).$$

La prochaine étape consiste à calculer la connexion de spin ω dans le repère orthonormé $e^a := e^a{}_\mu dx^\mu$ avec $e^a{}_\mu = \text{diag}\left(1, \frac{a}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}, ar, ar \sin\theta\right)$, ceci grâce à la transformation de gauge (4.23) dont on rappelle l'expression

$$\omega^a{}_{b\mu} = e^a{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} e^{-1\beta}{}_b + e^a{}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-1\alpha}{}_b. \quad (5.11)$$

Les composantes non nulles de la connexion de spin ω sont

$$\begin{aligned} \omega^t{}_{rr} &= \omega^r{}_{tr} = \frac{a(t)}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} U(t), \\ \omega^t{}_{\theta\theta} &= \frac{\omega^t{}_{\varphi\varphi}}{\sin\theta} = \omega^\theta{}_{t\theta} = \frac{\omega^\varphi{}_{t\varphi}}{\sin\theta} = ra(t) U(t), \\ \omega^\varphi{}_{r\theta} &= -\omega^r{}_{\varphi\theta} = \frac{\omega^r{}_{\theta\varphi}}{\sin\theta} = -\frac{\omega^\theta{}_{r\varphi}}{\sin\theta} = rK(t), \\ \omega^\theta{}_{\varphi r} &= -\omega^\varphi{}_{\theta r} = (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} K(t), \\ \omega^\theta{}_{r\theta} &= -\omega^r{}_{\theta\theta} = \frac{\omega^\varphi{}_{r\varphi}}{\sin\theta} = -\frac{\omega^r{}_{\varphi\varphi}}{\sin\theta} = (1-r^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \omega^\varphi{}_{\theta\varphi} &= -\omega^\theta{}_{\varphi\varphi} = \cos\theta. \end{aligned}$$

5.3 Équations d'Einstein-Cartan

En injectant les composantes précédentes de la connexion de spin ω dans la relation (2.24), on obtient les composantes $R^a{}_{b\mu\nu}$ de la courbure suivantes

$$R^t{}_{rtr} = R^r{}_{ttr} = (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} (\dot{a}U + a\dot{U}), \quad (5.12)$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = R^\theta{}_{t\theta\theta} = \frac{R^t{}_{\varphi t\varphi}}{\sin\theta} = \frac{R^\varphi{}_{t\varphi\varphi}}{\sin\theta} = r (\dot{a}U + a\dot{U}), \quad (5.13)$$

$$R^t{}_{r\varphi\theta} = R^r{}_{t\varphi\theta} = 2r^2 \sin\theta a(t) U(t) K(t), \quad (5.14)$$

$$R^t{}_{\varphi\theta r} = R^\varphi{}_{t\theta r} = \frac{R^t{}_{\theta r\varphi}}{\sin\theta} = \frac{R^\theta{}_{tr\varphi}}{\sin\theta} = 2r (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} a(t) U(t) K(t), \quad (5.15)$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = R^\theta{}_{r\theta r} = \frac{R^r{}_{\varphi r\varphi}}{\sin\theta} = \frac{R^\varphi{}_{r\varphi r}}{\sin\theta} = r (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + a^2(t) U^2(t) - K^2(t)), \quad (5.16)$$

$$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = r^2 \sin\theta (1 + a^2(t) U^2(t) - K^2(t)), \quad (5.17)$$

$$R^r{}_{\varphi\theta t} = R^\varphi{}_{r\theta t} = \frac{R^r{}_{\theta t\varphi}}{\sin\theta} = \frac{R^\theta{}_{r\varphi t}}{\sin\theta} = r\dot{K}(t), \quad (5.18)$$

$$R^\theta{}_{\varphi tr} = R^\varphi{}_{\theta tr} = (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \dot{K}(t). \quad (5.19)$$

L'expression du tenseur de Ricci est donnée par

$$Ricci^a{}_b := \eta^{aa'} R^c{}_{a'\mu\nu} e^{-1\mu}{}_c e^{-1\nu}{}_b, \quad (5.20)$$

et ses composantes non nulles sont

$$Ricci^t{}_t = -\frac{3}{a(t)} \left(\dot{a}(t) U(t) + a(t) \dot{U}(t) \right), \quad (5.21)$$

$$Ricci^r{}_r = -\frac{1}{a(t)} \left[\left(\dot{a}(t) U(t) + a(t) \dot{U}(t) \right) + \frac{2}{a(t)} \left(1 + a^2(t) U^2(t) - K^2(t) \right) \right]. \quad (5.22)$$

Noter qu'en raison de la symétrie maximale, on a

$$Ricci^\theta{}_\theta = Ricci^\varphi{}_\varphi = Ricci^r{}_r. \quad (5.23)$$

La contraction du tenseur de Ricci donne la courbure scalaire suivante

$$\begin{aligned} scalar &= Ricci^t{}_t + 3Ricci^r{}_r \\ \Rightarrow scalar &= -\frac{6}{a(t)} \left[\left(\dot{a}(t) U(t) + a(t) \dot{U}(t) \right) + \frac{1}{a(t)} \left(1 + a^2(t) U^2(t) - K^2(t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Rappelons l'expression du tenseur de Cartan qui est donné par

$$T^a{}_{bc} = \left(\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{k\mu} e^k{}_\nu - \omega^a{}_{k\nu} e^k{}_\mu \right) e^{-1\mu}{}_b e^{-1\nu}{}_c,$$

ses composantes non nulles sont

$$T_{rtr} = T_{\theta t\theta} = T_{\varphi t\varphi} = U(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5.25)$$

$$T_{r\theta\varphi} = T_{\theta\varphi r} = T_{\varphi r\theta} = \frac{2}{a(t)} K(t). \quad (5.26)$$

Comme se fut le cas dans le modèle de Kottler, on décompose le tenseur de torsion en partie complètement antisymétrique A_{abc} , partie vectorielle V_c et partie de symétrie mixte M_{abc} . On obtient alors

$$A_{r\theta\varphi} = \frac{2}{a(t)} K(t), \quad (5.27)$$

$$V_t = U(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5.28)$$

$$M_{abc} = 0. \quad (5.29)$$

Afin de faire coïncider les courbes autoparallèles (définies à partir de la connexion indépendante Γ) avec les géodésiques (définies à partir des symboles de Christoffel), on impose

au tenseur de torsion d'être complètement antisymétrique ($V = M = 0$). Cette contrainte permet de déterminer l'expression de la fonction $U(t)$ qui s'écrit

$$U(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5.30)$$

Avant d'écrire les équations d'Einstein, on doit parler du membre droit de celles-ci, c'est-à-dire, du contenu matériel du modèle. Le tenseur énergie-impulsion le plus général qui est invariant sous le groupe de symétrie maximale $O(3) \times \mathbb{R}^3$ doit satisfaire, tout comme la métrique et la connexion Γ , une équation similaire à l'équation de Killing (2.110). Ainsi, le tenseur énergie-impulsion contient deux fonctions du temps, $\rho(t)$ et $p(t)$ que l'on peut interpréter comme la densité d'énergie et la pression [26, 28], on a donc

$$\tau^a{}_b = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(t) \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Afin de simplifier les calculs, on considère que l'univers est rempli d'un dust de matière sans pression ($p(t) = \omega\rho(t)$ avec $\omega = 0$).

De la même manière, le tenseur de torsion le plus général qui est invariant sous $O(3) \times \mathbb{R}^3$ possède une seule fonction du temps $s(t)$. De ce fait, on a quatre fonction inconnues, a , ρ , K et s mais seulement trois équations, deux équations d'Einstein et une équation de Cartan. Pour cette raison on suppose que la densité de spin $s(t)$ est proportionnelle à la densité d'énergie [28]

$$s(t) = \omega_s \rho(t). \quad (5.32)$$

Les composantes (tt) et (rr) des équations d'Einstein s'écrivent

$$\frac{3}{a^2} (1 + \dot{a}^2 - K^2) - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{a} \left[2\ddot{a} + \frac{1}{a} (1 + \dot{a}^2 - K^2) \right] - \Lambda = 0. \quad (5.34)$$

L'équation de Cartan prend la forme suivante

$$A_{r\theta\varphi} = -8\pi G a_{r\theta\varphi}, \quad (5.35)$$

avec $A_{r\theta\varphi}$ la composante complètement antisymétrique de la torsion donnée par (5.27), et $a_{r\theta\varphi} = s(t)$ la densité de spin donnée par l'équation d'état (5.32). L'équation de Cartan (5.35) devient

$$\frac{2}{a(t)} K(t) = -8\pi G \omega_s \rho(t). \quad (5.36)$$

On aurait pu poser $a_{r\theta\varphi} = -s(t)$, et ainsi éliminer le signe $(-)$ dans (5.36), mais puisque la fonction $K(t)$ apparaît au carré dans les équations d'Einstein (5.33) et (5.34), cela ne changerait rien au reste du calcul.

Les équations de Friedmann généralisées (avec torsion) s'écrivent donc

$$3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - (4\pi G\omega_s\rho)^2 \right) = \Lambda + 8\pi G\rho, \quad (5.37)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + (4\pi G\omega_s\rho)^2 + \frac{1}{a^2} = \Lambda. \quad (5.38)$$

La composante $c = t$ de l'équation de non-conservation covariante (3.38) permet d'écrire l'égalité suivante

$$-\frac{12}{a^2} K\dot{K} = 16\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho \right), \quad (5.39)$$

en utilisant l'équation de Cartan (5.36), la relation précédente devient

$$4\pi G (3\rho\dot{a}a^2 + \dot{\rho}a^3) = -3(4\pi G\omega_s)^2 (\rho^2 a^2 \dot{a} + \rho\dot{\rho}a^3), \quad (5.40)$$

qui peut être reformulée comme

$$3(1 + 4\pi G\omega_s^2\rho)\rho\dot{a} + (1 + 12\pi G\omega_s^2\rho)\dot{\rho}a = 0. \quad (5.41)$$

Une manière équivalente d'écrire (5.41) est

$$3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{1 + 12\pi G\omega_s^2\rho}{1 + 4\pi G\omega_s^2\rho} = 0,$$

ou bien encore

$$3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{8\pi G\omega_s^2\dot{\rho}}{1 + 4\pi G\omega_s^2\rho} = 0. \quad (5.42)$$

Cette dernière s'intègre facilement pour donner

$$\rho a^3 (1 + 4\pi G\omega_s^2\rho)^2 = \text{const}. \quad (5.43)$$

En l'absence de torsion ($\omega_s = 0$), on retrouve bien le résultat connu de la relativité générale $\rho a^3 = \text{const}$ pour un univers dominé par de la matière non-relativiste.

La deuxième étape consiste à déterminer la solution $t(a)$ en résolvant analytiquement l'équation de Friedmann (5.37). Toutefois, en présence d'une courbure spatiale non nulle, une telle solution fait intervenir des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce dont la fonction inverse $a(t)$ est inconnue [73], et cela se complique d'avantage en présence de la torsion. Afin de rester dans la solution analytique et d'éviter le recours à l'option numérique, on basculera vers le cas plat du modèle de R-W dans lequel la relation (5.43) reste toujours valable. Dans le cas plat, l'équation de Friedmann (5.37) devient

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - (4\pi G\omega_s\rho)^2 \right) = \Lambda + 8\pi G\rho. \quad (5.44)$$

En définissant, dans un système d'unité où $8\pi G = 1$, la fonction suivante

$$f(\rho) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda + \rho}{3} + \frac{\omega_s^2}{4}\rho^2, \quad (5.45)$$

et en remplaçant \dot{a}/a par $\sqrt{f(\rho)}$ dans l'équation (5.42), on obtient

$$dt = -\frac{1}{3} \left(\frac{d\rho}{\rho\sqrt{f(\rho)}} + \frac{\omega_s^2 d\rho}{(1 + \omega_s^2 \rho/2)\sqrt{f(\rho)}} \right). \quad (5.46)$$

L'intégrale du premier terme entre parenthèses se fait facilement en utilisant la formule 2.266 en page 97 de [74],

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctanh} \frac{2a + bx}{2\sqrt{aR}}, \quad R = a + bx + cx^2, \quad [a > 0]. \quad (5.47)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{f(\rho)}} &= -\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left(1 + 2\frac{\Lambda + \sqrt{3\Lambda f(\rho)}}{\rho} \right) + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln 3 \\ &= -\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left[\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\rho}} + \sqrt{\frac{3f(\rho)}{\rho}} \right)^2 - \frac{3}{4}\omega_s^2 \rho \right] + \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln 3. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Le deuxième terme entre parenthèses de (5.46) s'intègre par application de la formule 2.281 en page 103,

$$\int \frac{dx}{(x+p)^n \sqrt{R}} = -\int \frac{t^{n-1} dt}{\sqrt{c + (b-2pc)t + (a-bp+cp^2)t^2}}, \quad t = \frac{1}{x+p} > 0, \quad (5.49)$$

et de la formule 2.261 en page 94,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{2\sqrt{cR} + 2cx + b}{\sqrt{\Delta}}, \quad R = a + bx + cx^2, \quad [a > 0] \quad \Delta = 4ac - b^2.$$

On obtient, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{(1 + \omega_s^2 \rho/2)\sqrt{f(\rho)}} &= -\frac{2\sqrt{3}}{\omega_s \sqrt{1 + \Lambda \omega_s^2}} \ln \left[2\omega_s \sqrt{1 + \Lambda \omega_s^2} \right] \\ &\quad - \frac{2\sqrt{3}}{\omega_s \sqrt{1 + \Lambda \omega_s^2}} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda \omega_s^2}} - \frac{\sqrt{1 + \Lambda \omega_s^2} + \omega_s \sqrt{3f(\rho)}}{2 + \rho \omega_s^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Il s'ensuit, d'après (5.46), (5.48) et (5.50) que

$$t(\rho) = \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \ln \left[\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\rho}} + \sqrt{\frac{3f(\rho)}{\rho}} \right)^2 - \frac{3}{4} \omega_s^2 \rho \right] + \frac{2\omega_s}{\sqrt{3(1+\Lambda\omega_s^2)}} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1+\Lambda\omega_s^2}} - \frac{\sqrt{1+\Lambda\omega_s^2} + \omega_s \sqrt{3f(\rho)}}{2 + \rho\omega_s^2} \right] - C, \quad (5.51)$$

avec C une constante d'intégration donnée par

$$C = \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \ln \left[\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\rho_0}} + \sqrt{\frac{3f(\rho_0)}{\rho_0}} \right)^2 - \frac{3}{4} \omega_s^2 \rho_0 \right] + \frac{2\omega_s}{\sqrt{3(1+\Lambda\omega_s^2)}} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1+\Lambda\omega_s^2}} - \frac{\sqrt{1+\Lambda\omega_s^2} + \omega_s \sqrt{3f(\rho_0)}}{2 + \rho_0\omega_s^2} \right]. \quad (5.52)$$

En l'absence de torsion ($\omega_s = 0$), on retrouve le résultat de la relativité générale

$$t(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \left[\ln \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\rho}} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{\rho}} \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\rho_0}} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{\rho_0}} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \left(\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho}} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho_0}} \right), \quad (5.53)$$

où nous avons utilisé la relation suivante

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right). \quad (5.54)$$

La relation (5.51) permet de déterminer le temps t en fonction de la densité ρ qui, à son tour, s'exprime en fonction du facteur d'échelle a via la relation (5.43).

Le résultat (5.43) permet d'écrire

$$\rho a^3 (1 + \omega_s^2 \rho / 2)^2 = \rho_0 a_0^3 (1 + \omega_s^2 \rho_0 / 2)^2 = 3A. \quad (5.55)$$

Utilisons la définition de la constante de Hubble

$$H_0 = \frac{\dot{a}(0)}{a_0}, \quad (5.56)$$

qui permet d'obtenir dans le système d'unité où $H_0 = 1$, la relation suivante

$$\dot{a}(0) = a_0. \quad (5.57)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation de Friedmann (5.45) pour $t = 0$, on trouve

$$\frac{3}{4} \omega_s^2 \rho_0^2 + \rho_0 = 3 - \Lambda, \quad (5.58)$$

c'est une équation du second degré en ρ_0 dont la racine est donnée par

$$\rho_0 = \frac{2\sqrt{1+3\omega_s^2(3-\Lambda)}-1}{3\omega_s^2}, \quad \Lambda < 3, \quad (5.59)$$

où nous avons retenu que la solution correspondant à une densité positive.

À partir de la relation (5.55), on peut déduire une expression pour la constante A

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\rho_0 a_0^3 (1 + \omega_s^2 \rho_0/2)^2 \\ &= \frac{2}{3^4} \frac{a_0^3}{\omega_s^2} \left(\sqrt{1+3\omega_s^2(3-\Lambda)}-1 \right) \left(2 + \sqrt{1+3\omega_s^2(3-\Lambda)} \right)^2, \end{aligned}$$

donc

$$A = \frac{2}{3^4} \frac{a_0^3}{\omega_s^2} \left[9(3-\Lambda)\omega_s^2 + (1+3(3-\Lambda)\omega_s^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \quad (5.60)$$

Dans l'approximation $\omega_s \ll 1$, on retrouve à l'ordre le plus bas¹ le ρ_0 et le A qui correspondent au cas plat sans torsion

$$\rho_0 = 3 - \Lambda, \quad (5.61)$$

$$A = \frac{a_0^3}{3} (3 - \Lambda). \quad (5.62)$$

5.4 Modèle d'Einstein-Strauss et problème de la masse

Dans le chapitre précédent, on a parlé du phénomène de lentille gravitationnelle qui est décrit, en accord avec les observations, par le modèle de Kottler dans lequel l'observateur est supposé au repos par rapport à la lentille et où les masses de la source et de l'observateur sont négligées. Afin de donner une description plus réaliste du phénomène, le modèle d'Einstein-Strauss [75, 76, 77] a été proposé comme alternative [78, 79, 80] (cas plat) [73] (cas courbe). Dans ce modèle, les contraintes précédentes sont assouplies en permettant à l'observateur d'être en mouvement par rapport à la lentille et en tenant compte des autres masses qui entourent le système en supposant que ces dernières forment un dust de matière homogène et isotrope. L'effet de l'expansion est aussi pris en compte en considérant l'observateur comobile par rapport à ce dust. La solution d'Einstein-Strauss est la jonction entre la métrique de Kottler

$$ds^2 = B(r) dT^2 - B(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{M}{4\pi r} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (5.63)$$

à l'intérieur de la sphère de Schücking de rayon $r_{schü}(T)$ centrée sur la distribution de masse sphérique (la lentille) avec $r \leq r_{schü}$, et celle de Robertson-Walker (cas plat)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), \quad (5.64)$$

1. en utilisant $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{(1+x)^3} \simeq 1 + \frac{3}{2}x$

à l'extérieur de la sphère, $\chi \geq \chi_{schü}$, où le facteur d'échelle $a(t)$ est déterminé par l'intégration de l'équation de Friedmann

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}r^2}, \quad (5.65)$$

avec $A = \frac{1}{3}\rho_{dust0}a_0^3$; ceci en relativité générale. Si maintenant on tient compte de la torsion à la Einstein-Cartan, la relation (5.65) est remplacée par l'équation de Friedmann généralisée (5.44) et la quantité conservée A sera donnée par (5.55). Les deux métriques sont raccordées sur le rayon constant de Schücking $\chi_{schü}$ qui est relié à la coordonnée radiale $r_{schü}(T)$ via le formalisme d'Israel-Darmois [81, 82] de la manière suivante [75, 76]

$$r_{schü}(T) = a(t)\chi_{schü}. \quad (5.66)$$

La masse centrale M doit être égale à la densité du dust multipliée par le volume de la sphère de Schücking

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{schü}^3 \rho_{dust}. \quad (5.67)$$

En utilisant (5.66), la relation précédente devient

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \chi_{schü}^3 \rho_{dust}, \quad (5.68)$$

qui peut être inversée pour donner

$$\chi_{schü} = \left(\frac{3M}{4\pi a^3 \rho_{dust}} \right)^{1/3}, \quad (5.69)$$

or si on utilise la relation (5.55), le rayon de Schücking (5.69) qui, rappelons-le, doit être constant (coordonnée comobile) ne l'est plus, puisqu'il s'écrira dans ce cas

$$\chi_{schü} = \left(\frac{M(1 + \omega_s^2 \rho_{dust}/2)^2}{4\pi A} \right)^{1/3},$$

la densité ρ_{dust} étant une fonction du temps t (voir (5.51)), la masse centrale M (ou de manière équivalente $\chi_{schü}$) n'est pas constante, ce qui représente un vrai problème physique.

5.5 Discussion

Afin de mieux comprendre l'origine de la non constance de la masse lorsque la torsion est prise en considération dans le modèle d'Einstein-Strauss, on propose d'illustrer ce dernier par un schéma (voir la figure (5.1)). On voit bien que le photon depuis son entrée à l'intérieur de la sphère de Schücking jusqu'à sa sortie, il ne rencontre pas la distribution de masse qui est schématisée dans la figure par une galaxie (ou amas de galaxies). le facteur d'impact b

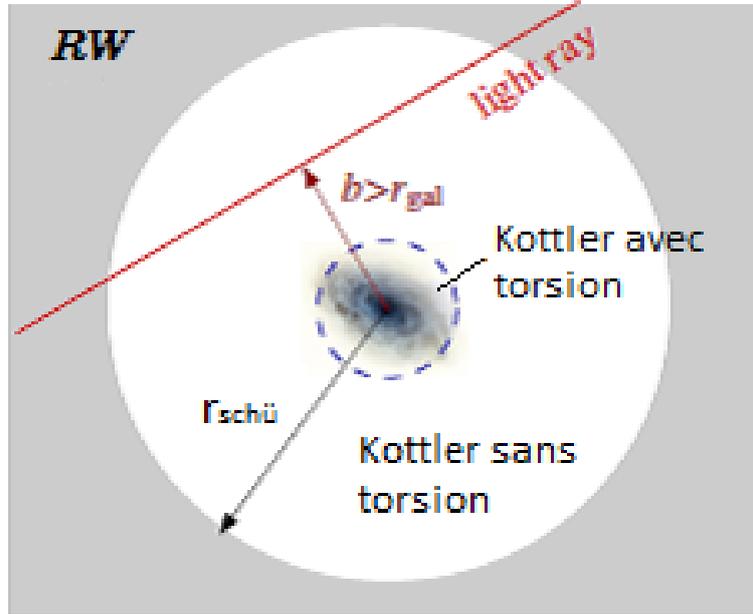


FIGURE 5.1 – Modèle d’Einstein-Strauss avec torsion

ou de manière “équivalente” la distance d’approche minimale est supérieur au rayon de la galaxie, ce qui signifie que le photon ne ressent pas l’effet de la torsion engendrée par celle-ci et se déplace donc dans un espace-temps décrit par la métrique de Kottler extérieure sans torsion (5.63). La zone grise de la figure représente l’espace-temps de Robertson-Walker dans lequel la source et l’observateur (comobiles par rapport à la lentille) se situent, il est rempli d’un dust de matière et donc d’une densité de spin qui, rappelons-le, est liée à la torsion via l’équation de Cartan. Il existe donc deux surfaces de jonction, la première entre la métrique de R-W avec torsion et la métrique de Kottler extérieure (sans torsion), la deuxième entre les métriques de Kottler extérieure et intérieure avec torsion ($d\tau^2 = B dt^2 - A dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ où les fonctions A et B sont données² respectivement par (4.68) et (4.89)). On peut donc dire que le problème de la masse trouve son origine dans la discontinuité de la torsion d’un coté de la surface(s) de jonction à un autre, et ceci revient au fait que la torsion est liée à sa source, c’est-à-dire à la densité de spin, de manière algébrique, en d’autres termes, à l’extérieur de la distribution de masse, la densité de spin est nulle et, de ce fait, la torsion devient identiquement nulle. Il est donc clair que la relation donnant la coordonnée radiale $r_{schü}(T)$ en terme du rayon constant de Schücking $\chi_{schü}$ doit être modifiée afin de tenir compte de cette discontinuité. Apporter une réponse à ce problème constitue un défi qui ne sera malheureusement pas relevé dans le cadre de cette thèse mais qui pourrait faire l’objet d’une étude approfondie dans un future proche.

Toutefois, le phénomène de la lentille gravitationnelle en présence de la torsion a été récemment étudié par Songbai Chen et al [83, 84]. Dans ces derniers, la théorie d’Einstein-

2. avec $\omega_t = 0$, c’est-à-dire, tenseur de Cartan complètement antisymétrique

Cartan est généralisée afin de permettre au champ de torsion d'être dynamique en ajoutant des corrections d'ordre supérieur au Lagrangien. Ainsi, la courbure de l'espace-temps est couplée à la torsion de telle sorte que les équations de mouvement de ces deux champs deviennent dynamiques, ce qui assure à la torsion une propagation dans l'espace-temps même en l'absence d'une densité de spin .

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette thèse nous avons tenté d'aborder le problème de la matière noire par une approche purement géométrique à travers la loi de Gauss faible dans le cadre de la théorie d'Einstein-Cartan. Cette dernière se distingue de la relativité générale par l'existence d'une propriété géométrique de l'espace-temps, au côté de la courbure, qu'on appelle la torsion, celle-ci est reliée à la densité de spin de manière analogue à la relation qui lie la courbure à la densité de matière (et d'énergie). Une autre caractéristique importante de cette théorie et que nous avons traduit mathématiquement sous forme d'équation, est l'asymétrie ainsi que la non-conservation covariante du tenseur énergie-impulsion. En effet, si Einstein avait tant insisté pour obtenir un tenseur (tenseur d'Einstein) symétrique et conservé de manière covariante, l'introduction de la torsion semble violer ces deux propriétés importantes du tenseur d'Einstein et par la même occasion du tenseur énergie-impulsion puisque les deux sont reliés par une égalité à travers les équations d'Einstein. Dans ce contexte, on a pu obtenir une version tensorielle des équations traduisant les deux propriétés citées précédemment. La première (asymétrie) mène très souvent à une égalité parfaite et ne fournit donc aucune information supplémentaire, la deuxième (non-conservation) en revanche semble procurer un moyen utile pour la résolution analytique des équations d'Einstein puisqu'elle s'avère être une combinaison astucieuse de ces dernières sans devoir à le faire par tâtonnement comme ce qui se fait souvent en RG, résultat que nous avons exploité dans le cas de la métrique de Kottler intérieure.

Un autre résultat important obtenu dans cette thèse est la violation de la loi de Gauss faible en présence de la torsion. Une révision attentive du travail fait par Zouzou et Schücker a révélé l'apparition de nouvelles composantes de la connexion métrique après vouloir imposer les symétries de rotations et de translation temporelle (modèle de Kottler) à cette dernière via la méthode de Killing qui représente un passage obligatoire dans la théorie d'Einstein-Cartan. Par conséquent, le tenseur de courbure, de Ricci et de torsion sont modifiés, ce qui offre la possibilité au tenseur de Cartan d'être complètement antisymétrique, une condition nécessaire et suffisante pour que les géodésiques définies à partir de la connexion métrique et des symbole de Christoffel coïncident. Ainsi, les modifications

que nous avons apporté nous ont permis de trouver une solution exacte aux équations d'Einstein-Cartan en déterminant toutes les fonctions qui apparaissent au niveau de la métrique et du tenseur énergie-impulsion dans le cas particulier d'une étoile de Schwarzschild où la densité d'énergie et de spin sont considérées constantes. En utilisant la continuité de la fonction $A(r)$, c'est-à-dire la composante rr de la métrique de Kottler, sur la frontière de la distribution de matière, on a introduit les concepts de masse interne M_i et masse externe M_e , la première définie comme étant la masse "réelle" (matière baryonique) renfermée dans la sphère de matière et la seconde jouant le rôle de la masse mesurée (matière noire) par un observateur situé à l'extérieur de celle-ci. Deux cas se sont alors présentés à nous :

- $M_i > M_e$ ce cas n'est pas intéressant du point de vue cosmologique du moment qu'il ne résout pas le problème posé dans cette thèse, à savoir, la torsion peut-elle être une alternative à la matière noire?. De plus, le fait de considérer le cas d'une étoile de Schwarzschild (densité constante) nous a permis d'éliminer cette possibilité en utilisant l'argument de l'invariance par renversement du temps.
- $M_i < M_e$ c'est le résultat recherché puisqu'on sait que la matière ordinaire ne représente qu'une fraction minime du contenu global de l'univers, ce qui a conduit à conclure que la torsion pouvait bien être un substitut à la matière noire.

Les deux cas ci-dessus mettent ainsi en évidence la brisure de la loi de Gauss faible dans la théorie d'Einstein-Cartan, chose qui n'est plus vraie en relativité générale. On a montré avec un exemple numérique concret, correspondant à la masse de notre soleil et un amas de galaxies, que la valeur du paramètre d'état (paramètre qui relie la torsion à la densité de spin) est améliorée et permet de tenir compte des observations faites en 2011 par le WMAP. Un autre phénomène dans lequel la torsion pourrait aussi être impliquée est la déflexion de la lumière. En effet, l'étude des géodésiques des photons lorsque ces derniers pénètrent à l'intérieur de la distribution de matière qui fait office de lentille gravitationnelle (Kottler intérieur) a révélé de manière qualitative que le terme contenant la torsion apparaît à deux ordres de grandeur différents. À l'ordre 2, au même titre que la constante cosmologique, mais aussi et surtout à l'ordre 1, ce qui indique que la torsion pourrait jouer un rôle plus important que celle-ci dans le phénomène de déviation de la lumière. Nous avons enfin montré que le modèle d'Einstein-Strauss ne pouvait être traité dans le cadre de la théorie Einstein-Cartan, du moins sous la forme présentée dans le chapitre 2. Pour cause, l'équation de Cartan reliant la densité de spin à la torsion est de nature algébrique empêchant cette dernière de se propager à travers l'espace-temps, ce qui, par conséquent, fait apparaître une discontinuité de la torsion au niveau de la jonction entre la métrique de Robertson-Walker et celle de Kottler et, de ce fait, un problème de constance de la masse centrale qui est injustifiable du point de vue physique.

Chapitre A

Autre forme des équations d'Einstein-Cartan

Dans cette annexe, nous allons donner une autre formulation des équations d'Einstein-Cartan en choisissant, cette fois-ci, la métrique et le tenseur de contorsion comme variables indépendantes.

A.1 Tenseur de courbure, tenseur de Ricci et courbure scalaire

Le tenseur de courbure est donné par

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}. \quad (\text{A.1})$$

En utilisant la définition de la connexion de Riemann-Cartan (2.38), la relation précédente devient

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \partial_\rho \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\sigma} + \partial_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\sigma} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\rho} \\ &\quad - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\sigma} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} + K^\lambda{}_{\nu\sigma} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\rho} + K^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} \\ &\quad - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma} - K^\lambda{}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\sigma} - K^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sachant que le tenseur de courbure dans l'espace de Riemann s'écrit en fonction des symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}$ comme

$$\tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\sigma} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\rho} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\sigma}, \quad (\text{A.3})$$

l'expression (A.2), prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \partial_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} + K^\lambda{}_{\nu\sigma} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\rho} \\ &\quad + K^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma} - K^\lambda{}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\sigma} - K^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En calculant la dérivée covariante du tenseur de contorsion par rapport à la connexion de Riemann, on obtient

$$\tilde{\nabla}_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} = \partial_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\rho\nu} K^\mu{}_{\lambda\sigma} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\rho\sigma} K^\mu{}_{\nu\lambda} + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\rho\lambda} K^\lambda{}_{\nu\sigma}, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\tilde{\nabla}_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} = \partial_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\sigma\nu} K^\mu{}_{\lambda\rho} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\sigma\rho} K^\mu{}_{\nu\lambda} + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\sigma\lambda} K^\lambda{}_{\nu\rho}, \quad (\text{A.6})$$

en substituant aux termes $\partial_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma}$ et $\partial_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho}$ leurs expressions respectives (A.5) et (A.6), la relation (A.4) devient

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \tilde{\nabla}_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} - \tilde{\nabla}_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\rho\sigma} K^\mu{}_{\nu\lambda} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\sigma\rho} K^\mu{}_{\nu\lambda} \\ &\quad + K^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} - K^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la symétrie de la connexion de Christoffel, on obtient l'expression de la courbure de Riemann-Cartan suivante

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \tilde{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \tilde{\nabla}_\rho K^\mu{}_{\nu\sigma} - \tilde{\nabla}_\sigma K^\mu{}_{\nu\rho} + K^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\rho} - K^\lambda{}_{\nu\rho} K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \quad (\text{A.7})$$

La contraction de (A.7) par δ_μ^ρ permet d'obtenir le tenseur de Ricci-Cartan

$$R_{\nu\sigma} = \tilde{R}_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}_\mu K^\mu{}_{\nu\sigma} - \tilde{\nabla}_\sigma K^\mu{}_{\nu\mu} + K^\lambda{}_{\nu\sigma} K^\mu{}_{\lambda\mu} - K^\lambda{}_{\nu\mu} K^\mu{}_{\lambda\sigma}.$$

On définit le vecteur de torsion T_μ par $K^\nu{}_{\mu\nu} = 2T_\mu$, de ce fait, le tenseur de Ricci-Cartan s'écrit

$$R_{\nu\sigma} = \tilde{R}_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}_\mu K^\mu{}_{\nu\sigma} - 2\tilde{\nabla}_\sigma T_\nu + 2K^\lambda{}_{\nu\sigma} T_\lambda - K^\lambda{}_{\nu\mu} K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \quad (\text{A.8})$$

En contractant l'expression précédente, on obtient le scalaire de Ricci-Cartan

$$R = \tilde{R} + \tilde{\nabla}_\mu K^{\mu\sigma}{}_\sigma - \tilde{\nabla}_\sigma K^\mu{}_{\sigma\mu} + K^{\lambda\sigma}{}_\sigma K^\mu{}_{\lambda\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_\mu K^\mu{}_{\lambda\sigma},$$

sachant que $K^\lambda{}_{\mu\nu} = -K_\mu{}^\lambda{}_\nu$, la relation ci-dessus devient

$$R = \tilde{R} - 2\tilde{\nabla}_\sigma K^{\mu\sigma}{}_\mu + K^{\sigma\lambda}{}_\lambda K^\mu{}_{\sigma\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_\mu K^\mu{}_{\lambda\sigma}. \quad (\text{A.9})$$

En terme du vecteur de torsion, on obtient

$$R = \tilde{R} - 4\tilde{\nabla}_\sigma T^\sigma - T^\sigma T_\sigma - K^{\lambda\sigma}{}_\mu K^\mu{}_{\lambda\sigma}.$$

A.2 Équations d'Einstein-Cartan

L'action d'Einstein-Hilbert dans la théorie EC est donnée par

$$S = \int \left(\frac{1}{2k} R \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \right) d^4x, \quad (\text{A.10})$$

avec R le scalaire de Ricci-Cartan donné par (A.9), $g = \det(g_{\mu\nu})$ le déterminant de la métrique, $k = 8\pi G$ la constante gravitationnelle, \mathcal{L}_m le lagrangien de matière et d^4x l'élément de volume. En insérant l'expression (A.9) dans (A.10), on obtient

$$\begin{aligned} S &= \int \left[\frac{1}{2k} \left(\tilde{R} + K^{\sigma\lambda}{}_\lambda K^\mu{}_{\sigma\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_\mu K^\mu{}_{\lambda\sigma} \right) \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \right] d^4x \\ &\quad - \frac{1}{k} \int \sqrt{-g} \tilde{\nabla}_\sigma K^{\mu\sigma}{}_\mu d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

le deuxième terme de cette relation représente le terme de surface, ce dernier ne contribue pas aux équations et peut donc être négligé.

A.2.1 Variation de l'action par rapport à la métrique

En faisant varier l'action (A.11) par rapport à la métrique, on obtient

$$\frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}} \left[\frac{1}{2k} \left(\tilde{R} + K^{\sigma\lambda}{}_{\lambda} K^{\mu}{}_{\sigma\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_{\mu} K^{\mu}{}_{\lambda\sigma} \right) \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \right] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Cette relation peut être réécrite comme

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g^{\rho\sigma}} + \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}},$$

avec

$$\mathcal{A} = \tilde{R} + K^{\sigma\lambda}{}_{\lambda} K^{\mu}{}_{\sigma\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_{\mu} K^{\mu}{}_{\lambda\sigma}. \quad (\text{A.13})$$

Après quelques manipulations, l'expression (A.12) prend la forme suivante

$$\frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}} \left[g^{\rho\sigma} \left(\tilde{R}_{\rho\sigma} - K^{\lambda}{}_{\rho\lambda} K^{\mu}{}_{\sigma\mu} + K^{\lambda}{}_{\sigma\mu} K^{\mu}{}_{\rho\lambda} \right) \right] + \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}}. \quad (\text{A.14})$$

Il est possible de montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2g} \frac{\delta g}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2} g_{\rho\sigma},$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\rho\sigma}} = \frac{1}{2g} \frac{\delta g}{\delta g_{\rho\sigma}} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma},$$

ainsi, l'équation (A.14) se transforme en

$$\tilde{R}_{\rho\sigma} - K^{\lambda}{}_{\rho\lambda} K^{\mu}{}_{\sigma\mu} + K^{\lambda}{}_{\sigma\mu} K^{\mu}{}_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} \mathcal{A} g_{\rho\sigma} = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}}. \quad (\text{A.15})$$

Le terme de droite définit la partie symétrique du tenseur énergie-impulsion

$$-\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\rho\sigma}} = \mathcal{T}_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.16})$$

puisque les variations par rapport à la métrique sont synonymes de changements au niveau des distances entre les points de l'espace-temps, la relation (A.16) traduit donc le fait que le tenseur énergie-impulsion est relié aux degrés de liberté de translation. Dans l'espace de Riemann, le tenseur d'Einstein est donnée par

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\rho\sigma} = \tilde{R}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \tilde{R}, \quad (\text{A.17})$$

en utilisant (A.13) et (A.17) dans (A.15), on obtient

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\rho\sigma} = k \left(\mathcal{T}_{\rho\sigma} + \mathcal{U}_{\rho\sigma} \right), \quad (\text{A.18})$$

où $\mathcal{U}_{\rho\sigma}$ est un tenseur symétrique traduisant l'effet de la torsion de l'espace-temps, il est donné par

$$\mathcal{U}_{\rho\sigma} = \frac{1}{k} \left[K^\lambda{}_{\rho\lambda} K^\mu{}_{\sigma\mu} - K^\lambda{}_{\sigma\mu} K^\mu{}_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} (K^{\lambda\nu}{}_{\lambda} K^\mu{}_{\nu\mu} - K^{\nu\lambda}{}_{\mu} K^\mu{}_{\lambda\nu}) \right], \quad (\text{A.19})$$

en terme du vecteur de torsion, il devient

$$\mathcal{U}_{\rho\sigma} = \frac{1}{k} \left[4T_\rho T_\sigma - K^\lambda{}_{\sigma\mu} K^\mu{}_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} (4T_\nu T^\nu - K^{\nu\lambda}{}_{\mu} K^\mu{}_{\lambda\nu}) \right],$$

les expressions (A.16) et (A.19) définissent le “tenseur énergie-impulsion effectif” qui joue le rôle de source pour la partie purement riemannienne du tenseur d'Einstein.

A.2.2 Variation de l'action par rapport au tenseur de contorsion

En faisant varier l'action (A.11) par rapport au tenseur de contorsion, on obtient

$$\frac{\delta}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} \left[\frac{1}{2k} \left(\tilde{R} + K^{\sigma\lambda}{}_{\lambda} K^\mu{}_{\sigma\mu} - K^{\lambda\sigma}{}_{\mu} K^\mu{}_{\lambda\sigma} \right) \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \right] = 0,$$

ou bien

$$\frac{\delta}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} \left[g^{\rho\sigma} \left(\tilde{R}_{\rho\sigma} - K^\lambda{}_{\rho\lambda} K^\mu{}_{\sigma\mu} + K^\mu{}_{\rho\lambda} K^\lambda{}_{\sigma\mu} \right) \right] = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma}.$$

Sachant que $K^\lambda{}_{\mu\nu} = -K_\mu{}^\lambda{}_\nu$, la relation précédente devient

$$\frac{\delta}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} \left(g^{\rho\sigma} \tilde{R}_{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} K_\rho{}^\lambda{}_\lambda K^\mu{}_{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma} K_\rho{}^\mu{}_\lambda K^\lambda{}_{\sigma\mu} \right) = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma},$$

donc

$$g^{\rho\sigma} \frac{\delta K_\rho{}^\lambda{}_\lambda}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} K^\mu{}_{\sigma\mu} + g^{\rho\sigma} K_\rho{}^\lambda{}_\lambda \frac{\delta K^\mu{}_{\sigma\mu}}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} - g^{\rho\sigma} \frac{\delta K_\rho{}^\mu{}_\lambda}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} K^\lambda{}_{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma} K_\rho{}^\mu{}_\lambda \frac{\delta K^\lambda{}_{\sigma\mu}}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} = -\frac{2k}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma}, \quad (\text{A.20})$$

où on a utilisé le fait que $g^{\rho\sigma}$ et $K^{\beta\alpha}{}_\gamma$ sont des variables indépendantes, c'est-à-dire, $\frac{\delta g^{\rho\sigma}}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma} = 0$. En définissant le tenseur moment angulaire de spin comme étant

$$s_{\beta\alpha}{}^\gamma = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta K^{\beta\alpha}{}_\gamma},$$

l'équation (A.20) s'écrit

$$\delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\lambda \delta_\lambda^\gamma K^\mu{}_{\sigma\mu} + \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\rho \delta_\mu^\gamma K_\rho{}^\lambda{}_\lambda - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\mu \delta_\lambda^\gamma K^\lambda{}_{\sigma\mu} - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\rho \delta_\mu^\gamma K_\rho{}^\mu{}_\lambda = 2k s_{\beta\alpha}{}^\gamma,$$

donc, la deuxième des équations d'Einstein-Cartan est donnée par

$$\delta_\alpha^\gamma K^\mu{}_{\beta\mu} - \delta_\beta^\gamma K^\mu{}_{\alpha\mu} + K^\gamma{}_{\alpha\beta} - K^\gamma{}_{\beta\alpha} = 2k s_{\beta\alpha}{}^\gamma.$$

Enfin, en utilisant la convention d'antisymétrisation, on obtient le résultat suivant

$$K^\gamma{}_{[\alpha\beta]} + \delta_{[\alpha}^\gamma K^\mu{}_{\beta]\mu} = k s_{\beta\alpha}{}^\gamma. \quad (\text{A.21})$$

Bibliographie

- [1] Abbott et al., Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, Phys. Rev. Lett., 116 , 061102 (2016).
- [2] Cartan É, 1923 Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie), Ann. Éc. Norm. Sup. 40 325. Cartan É, 1924 Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie, suite), Ann. Éc. Norm. Sup. 41 1. Cartan É, 1925 Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie), Ann. Ec. Norm. Sup. 42 17.
- [3] Dennis W. Sciama, The physical structure of general relativity, Rev. Mod. Phys. 36, 463-469 (1964).
- [4] Tom W. B. Kibble, Lorentz invariance and the gravitational field, J. Math. Phys. 2, 212-221 (1961).
- [5] F. W. Hehl, Spin and torsion in general relativity I : foundations. Gen. Rel. Grav. 4 (4), 333-349 (1973).
- [6] F. W. Hehl, Spin and torsion in general relativity II : geometry and field equations. Gen. Rel. Grav. 5 (5), 491 (1974).
- [7] F. W. Hehl, How does one measure torsion of space-time ?. Physics Letters A 36 (3), 225-226 (1971).
- [8] F. W. Hehl, Gauge theories of gravitation : a reader with commentaries. Imperial College Press (2013).
- [9] F. W. Hehl, P. Von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, General relativity with spin and torsion : Foundations and prospects. Reviews of Modern Physics 48 (3), 393 (1976).
- [10] A. Trautman, Bull. Polon. Acad. Sci. 20 185, 503, 895 (1972).
- [11] A. Trautman, Nature Physical Science 242, 7, (1973).
- [12] W. Kopczynski, Phys. Lett. 39A 219 (1972).
- [13] W. Kopczynski, Phys. Lett. 43A 63 (1973).

- [14] J. Tafel, Phys. Lett. 45A 341 (1973).
- [15] W. Adamowicz, & A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci. SCr. Sci. Math. Astron. Phys. 23 :000 (1975).
- [16] D. Puetzfeld, Status of non-Riemannian cosmology. New Astronomy Reviews 49 59 (2005). [arXiv :gr-qc/0404119].
- [17] S. Capozziello, G. Lambiase, C. Stornaiolo, Geometric classification of the torsion tensor in space-time, Annalen Phys. 10 (2001) 713. [gr-qc : 0101038]. I. L. Shapiro, Physical aspects of the space-time torsion, Phys. Rept. 357 (2002) 113. [hep-th : 0103093].
- [18] K. F. Shie, J. M. Nester and H. J. Yo, Torsion cosmology and the accelerating universe, Phys. Rev. D 78 (2008) 023522 [arXiv :0805.3834 [gr-qc]]. A. V. Minkevich, Comment on “Torsion Cosmology and Accelerating Universe”, arXiv :0811.1430 [gr-qc]. A. V. Minkevich, Accelerating universe without dark energy and dark matter and spacetime torsion, Phys. Lett. B 678 (2009) 423 [arXiv :0902.2860 [gr-qc]]. X. -z. Li, C. -b. Sun, P. Xi, Statender diagnostic in a torsion cosmology, JCAP 0904 (2009) 015. [arXiv :0903.4724 [gr-qc]].
- [19] N. J. Poplawski, Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling, Phys. Rev. D, 85 107502 (2012), [arXiv :1111.4595 [gr-qc]].
- [20] N. J. Poplawski, Big bounce from spin and torsion, Gen. Rel. Grav., 44 1007 (2012).
- [21] N. J. Poplawski, Cosmology with torsion : an alternative to cosmic inflation, Phys. Lett. B, 690 73 (2010).
- [22] Bozhidar. Z. Iliev, Handbook of normal frames and coordinates, Springer Science & Business Media.
- [23] M. Göeckeler and T. Schücker, Differential Geometry, Gauge theory, and Gravity (1987) Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press.
- [24] Jeffrey Yopez, Einstein’s vierbein field theory of curved space, [arXiv :1106.2037[gr-qc]] (2011).
- [25] S. Carroll, Spacetime and Geometry, edition Wesley, San Francisco (2004).
- [26] T. Schücker and M. Göeckeler, torsion an alternative to the cosmological constant, Int. J. Mod. Phys. D 21 (2012) 1250089 [astro-ph.CO].
- [27] S. Kobayashi & K. Numizo, Fondations of Differential Geometry tome 1, Interscience Publishers (1963).
- [28] T. Schücker and A. Tilquin, Torsion, an alternative to dark matter ?, Gen. Rel. Grav. 43 (2011) 2965, [arXiv :1104.0160[astro-ph.CO]].
- [29] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, IoP, Bristol and Philadelphia (2003).
- [30] S. R. Zouzou, A. Tilquin, & T. Schücker, Einstein-Cartan, Bianchi I and the Hubble Diagram, Gen. Rel. Grav. (2016) 48 :48.

- [31] T. Schücker and S. R. Zouzou, On a weak Gauß law in general relativity and torsion, *Class. Quant. Grav.* 29 (2012) 245009 [arXiv :1203.5642[gr-qc]].
- [32] Luca Fabbri, *Fondations Quadrilogy*, [arXiv :1703.02287[gr-qc]] (2017).
- [33] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons (1972).
- [34] H. Stephani, *An Introduction to Special and General Relativity*, Cambridge University Press (2004).
- [35] C. G. Böhmer, On inflation and torsion in cosmology, *Acta Phys. Polon. B* 36 (2005).
- [36] H. Göenner and F. Müller-Hoissen, Spatially homogeneous and isotropic spaces in theories of gravitation with torsion, *Class. Quant. Grav.* 1, 651 (1984).
- [37] Luca Fabbri, On a completely antisymmetric cartan torsion tensor, *Annales Fond. Broglie* 32 :215 (2007).
- [38] V. de Sabbata and C. Sivaram, *Spin and torsion in gravitation*, World Scientific, Singapore (1994).
- [39] L. C. Garcia de Andreda, Cosmic relic torsion from inflationary cosmology, *Int. J. Mod. Phys. D* 8, 725 (1999).
- [40] M. S. Berman, Inflation in the einstein-cartan cosmological model, *Gen. Rel. Grav.* 23 : 1083 (1991).
- [41] A. Einstein, The field equations of gravitation.
- [42] K. Schwarzschild, On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 189-196 (1916).
- [43] W. de Sitter, On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences, *Month. Not. Roy. Astro. Soc.* 78 (1919).
- [44] A. Einstein, Cosmological considerations in the general theory of relativity, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 142-152 (1917).
- [45] F. Kottler, On the physical foundations of Einstein's theory of relativity, *Annalen Phys.*, 56, 401.
- [46] G. D. Kerlick, The effect of intrinsic spin on neutron stars in the Einstein-Cartan theory of gravity. *Astrophys. J.*, 185, 631 (1975).
- [47] B. Kuchowicz, The Einstein-Cartan equations in astrophysically interesting situation : the case of spherical symmetry. *Acta Phys. Polon.*, B6, 555 (1975).
- [48] T. Singh and R. B. S. Yadav, Static fluid spheres in Einstein-Cartan theory, *Indian J. Pure appl. Math.*, 10(1) : 14-25 (1978).
- [49] M. M. Som and M. L. Bedran, Static dust sphere in Einstein-Cartan theory. *Phys. Rev.*, D24(10), 2561 (1981).

- [50] A. L. Mehra and M. K. Gokhroo, Static dust sphere in Einstein-Cartan theory. *Gen. Rel. Grav.*, 24 : 1011 (1992).
- [51] A. R. Prasanna, Static fluid spheres in Einstein-Cartan theory. *Phys. Rev.*, D11, 2076 (1975).
- [52] Z. Stuchlík, Spherically Symmetric Static Configurations of Uniform Density in Spacetimes with a Non-Zero Cosmological Constant. *Acta Phys. Slov.* 50 (2000) 219.
- [53] C. G. Boehmer, Eleven spherically symmetric constant density solutions with cosmological constant. *Gen. Rel. Grav.* 36 (2004) 1039.
- [54] P.A.R. Ade, et al. (2014) Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 571, Article N° A16.
- [55] R. Amanullah, et al., Spectra and HST Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation ; *ApJ* : April 9, 2010.
- [56] D. Larson et al., Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Power Spectra and WMAP Derived Parameters ; *ApJ. Suppl.* 192 (2011) 16.
- [57] N. J. Islam, *Phys. Letter. A* 97, 239 (1983).
- [58] W.H.C. Freire, V.B. Bezerra, J.A.S. Lima, *Gen. Rel. Grav.* 33, 1407 (2001).
- [59] A. W. Kerr, J. C. Hauck, B. Mashhoon, *Class. Quant. Grav.*, 20, 2727 (2003).
- [60] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, *Phys. Lett. B* 634, 465 (2006).
- [61] M. Sereno, Ph. Jetzer, *Phys. Rev. D* 73, 063004 (2006).
- [62] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, *Phys. Rev. D* 75, 043003 (2007).
- [63] W. Rindler and M. Ishak, The Contribution of the Cosmological Constant to the Relativistic Bending of Light Revisited, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 043006 [arXiv :0709.2948 [astro-ph]].
- [64] M. Sereno, On the influence of the cosmological constant on gravitational lensing in small systems., *Phys. Rev. D* 77, 043004 [arXiv :0711.1802 [astro-ph]] (2008).
- [65] M. Sereno, The role of Lambda in the cosmological lens equation. [arXiv :0807.5123 [astro-ph]].
- [66] T. Schücker, Cosmological constant and lensing. [arXiv :0712.1559 [astro-ph]], *Gen. Relativ. Gravit.* DOI :10.1007/s10714-008-0652-2.
- [67] T. Schücker, Strong lensing with positive cosmological constant. [arXiv :0805.1630 [astro-ph]]. *Moriond Proceedings Cosmology* (2008).
- [68] R. Kantowski, B. Chen and X. Dai, Gravitational lensing corrections in flat CDM cosmology. [arXiv :0909.3308v1 [astro-ph.CO]].

- [69] I.B. Khriplovich, A.A. Pomeransky, Does cosmological term influence gravitational lensing ? [arXiv :0801.1764 [gr-qc]].
- [70] M. Park, Rigorous approach to the gravitational lensing. [arXiv :0804.4331 [astro-ph]].
- [71] F. Simpson, J.A. Peacock, A.F. Heavens, On lensing by a cosmological constant. [arXiv :0809.1819 [astro-ph]].
- [72] T. Schücker, Lensing in an interior Kottler solution [arXiv :0903.2940 [astro-ph]] (2009).
- [73] M. Guenouche, S.R. Zouzou, Deflection of light and time delay in closed Einstein-Straus solution, Phys. Rev. D 98, 123508 (2018) [arXiv :1803.10905[gr-qc]].
- [74] Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2007), Table of integrals, series, and products , Elsevier/Academic Press, Amsterdam [7th Edition].
- [75] Einstein, A., Straus, E. G. : The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual star. Rev. Mod. Phys. 17, 120- 124 (1946). DOI : 10.1103/RevModPhys.17.120.
- [76] Schücking, E. : Das Schwarzschildsche Linienelement und die expansion des Weltalls. Z. Phys. 137, 595-603 (1954). DOI : 10.1007/BF01375011.
- [77] Balbinot, R., Bergamini, R., Comastri, A. : Solution of the Einstein– Straus problem with a Λ term. Phys. Rev. D 38, 2415 (1988). DOI : 10.1103/PhysRevD.38.2415.
- [78] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer and C. Allison, “A New Independent Limit on the Cosmological Constant/Dark Energy from the Relativistic Bending of Light by Galaxies and Clusters of Galaxies,” Mon. Not. R. Astron. Soc. 388 (2008) 1279 [arXiv :0710.4726 [astro-ph]].
- [79] Schücker, T. : Strong lensing in the Einstein-Straus solution. Gen. Rel. Grav. 41, 1595–1610 (2009). DOI : 10.1007/s10714-008-0731-4.
- [80] Boudjemaa, K.-E., Guenouche, M., Zouzou, S.R. : Time delay in the Einstein-Straus solution. Gen. Rel. Grav. 43, 1707-1731 (2011). DOI : 10.1007/s10714-011-1152-3.
- [81] Darmois G. Mémorial de Sciences Mathématiques, Fascicule XXV, “Les équations de la gravitation einsteinienne”, Chapitre V. (1927).
- [82] Israel W. , Nuovo Cim B 44, 1. (1966). Erratum 48, 463.
- [83] Lu Zhang , Songbai Chen and Jiliang Jing, Gravitational lensing by a black hole with torsion. Inter. J. of Mod. Phys. D, Vol. 27, No. 12, 1850110 (2018) [arXiv :1712.00160[gr-qc]].
- [84] Chen Songbai et al, A new asymptotical flat and spherically symmetric solution in the generalized Einstein–Cartan–Kibble–Sciama gravity and gravitational lensing. Eur.Phys.J. C78 (2018) no.11, 981 [arXiv :1804.05004 [gr-qc]].

- [85] R. Whisker, Strong gravitational lensing by braneworld black holes, *Phys. Rev. D* 71 064004 (2005).
- [86] A. Bhadra, Gravitational lensing by a charged black hole of string theory, *Phys. Rev. D* 67 103009 (2003).
- [87] S. Sahu, K. Lochan and D. Narasimha, Gravitational Lensing by Self-Dual Black Holes in Loop Quantum Gravity, *Phys. Rev. D* 91, 063001 (2015).
- [88] J. Sadeghi, H. Vaez, Strong gravitational lensing in a charged squashed Kaluza-Klein Gödel black hole, *Phys. Lett. B* 728 170 (2014).