

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1  
FACULTE DES SCIENCES  
EXACTES DEPARTEMENT DE  
PHYSIQUE

N° de Série:104/DS/2019

N° d'ordre :12/phy/2019

## **THESE**

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences en Physique

Spécialité: Physique Energétique

Option : Photothermique

## **THEME**

**Contribution à l'étude de la convection naturelle  
instationnaire dans des enceintes cubiques inclinées**

PAR

**AZZOUZ Khadoudja**

Soutenue le : 23/06/2019

Devant le jury :

Présidente :	Pr.	CHAKER Abla	Université frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur :	Pr.	DJEZZAR Mahfoud	Université frères Mentouri Constantine 1
Examineurs :	Pr.	MEZAACHE El Hacène	Université du 20 Août 55 Skikda
	Pr.	RAHMANI Ahmed	Université d'Oum El Bouaghi
	Dr.	TAYBITahar	Université de Bordj Bou Arreridj



*Je dédie ce mémoire à mes parents.*

*À mon mari et mes enfants, lokmen et louay*

*À mes sœurs*

*À mes frères*

*A tous les membres de ma famille, grands et petits*

*A tous mes amis*

## **Remerciements**

*En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement et à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur **Mahfoud DJEZZAR**, Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine 1, pour ses efforts, ses orientations ainsi que la qualité du savoir qu'il m'a inculqué, sans oublier son temps précieux ainsi que sa disponibilité permanente, sa contribution primordiale et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Madame **Abla CHAKER**, Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine 1, qui a bien voulu présider mon jury de thèse, malgré ses nombreuses occupations.*

*Je remercie également Monsieur **MEZAACHE El Hacène**, Professeur à l'Université du 20 Août 55 Skikda, Monsieur **RAHMANI Ahmed**, Professeur à l'Université d'Oum El Bouaghiet Monsieur **Tayebi Tahar**, Maître de Conférences à l'Université de Bordj Bou Arreridj, qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse et de participer à mon jury de soutenance, je leur adresse ma sincère gratitude.*

*Tous mes remerciements vont également, à toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.*

# Nomenclature

## Lettres latines

A	Amplitude adimensionnelle d'oscillation de la température
a	Amplitude d'oscillation de la température (K)
C <sub>p</sub>	Chaleur massique à pression constante (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
Gr	Nombre de Grashof
$\vec{g}$	Accélération de la pesanteur (m.s <sup>-2</sup> )
K	Conductivité thermique du fluide (W. m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup> )
L	Côté de l'enceinte cubique (m)
Nu	Nombre de Nusselt
N <sub>moy</sub>	Nombre de Nusselt moyen
P	Pression au sein du fluide (Pa)
Pr	Nombre de Prandtl défini par $Pr = \frac{v \rho c_p}{\lambda}$
T	Température du fluide (K)
T <sub>ch</sub>	Température des parties chaudes de l'enceinte (K)
T <sub>fr</sub>	Température des parties froides de l'enceinte (K)
T <sub>d</sub>	Ecart de température T <sub>d</sub> = T - T <sub>fr</sub> (K)
t	Temps (s)
t <sub>p</sub>	Période d'oscillation de la température (s)
ΔT	Ecart de température ΔT = T <sub>ch</sub> - T <sub>fr</sub> (K)
U, V	Composantes de la vitesse suivant x et y (m.s <sup>-1</sup> )
$\vec{V}$	Vecteur vitesse. (m.s <sup>-1</sup> )
x, y, z	Coordonnées cartésiennes (m)

## Lettres grecques

α	Diffusivité thermique (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
---	--

$\beta$	Coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\theta$	Température adimensionnelles
$\varphi$	Angle d'inclinaison ( $^{\circ}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique du fluide ( $kg \cdot m^{-3}$ )
$\delta$	Fonction générale
$\Phi$	Fraction Volumique de nanoparticules

### **Indices**

Ch	Chaude.
fr	Froide.
L	Local.
M	Moyen.
G	global.
F	Fluide (l'eau pure)
S	Solid
nf	Nanofluid
AB, CD, BC et AD	Parois

### **Exposant**

+ Paramètres dimensionnels.

## TABLE DES FIGURES

Figure 2.1:Section transversale du système par un plan vertical et du repère cartésien.....	14
Figure 2.2 : Coordonnées cartésiennes.....	17
Figure 3.1 : Maillage typique uniforme suivant x et suivant y.....	26
Figure 3.2 : Volume fini typique.....	26
Figure 3.3 : Maillage décalé suivant x.....	27
Figure 3.4 : Maillage décalé suivant y.....	28
Figure 3.5 : L'interface n entre les points P et N dans le cas d'un maillage uniforme suivant y.....	30
Figure 4.1:Comparaison du nombre du Nusselt entre Khanafer et al [5] et nos résultats.....	47
Figure 4.2 : Comparaison du profile de vitesse U à demi-section de l'enceinte entre Khanafer et al [5] et nos résultats ( $Gr=10^5$ , $\Phi=0.05$ ).....	47
Figure 4.3 : Comparaison du profile de vitesse V à demi-section de l'enceinte entre Khanafer et al [4] et nos résultats ( $Gr=10^5$ , $\Phi=0.05$ ).....	48
Figure 4.4 : Comparaison des profils de température à la demi-section de l'enceinte entre nos résultats et d'autres résultats de la littérature (références [5], [58] et [17]) ( $Gr=10^5$ , $\Phi=0.05$ ).....	48

## Première condition pariétale thermique

Figure 4.5 : Lignes de courant pour le nanofluide Cu–eau (lignes continues) et l'eau pure (lignes discontinues) pour $t_p= 0.1$ , $\Phi=0$ , $\Phi=0.1$ et $Gr=10^4$ (a): $A=0.2$ , (b): $A=0.6$ , (c): $A=1$ .....	52
Figure 4.6 : Isothermes pour le nanofluide Cu–eau (lignes continues) et l'eau pure (lignes discontinues) pour $t_p= 0.1$ , $\Phi=0$ , $\Phi=0.1$ et $Gr=10^4$ (a): $A=0.2$ , (b): $A=0.6$ , (c): $A=1$ .....	54
Figure 4.7 : Lignes de courant pour le nanofluide Cu–eau (lignes continues) et l'eau pure (lignes discontinues) pour $t_p= 0.1$ , $\Phi=0$ , $\Phi=0.1$ et $Gr=10^6$ (a): $A=0.2$ , (b): $A=0.6$ , (c): $A=1$ .....	57
Figure 4.8 : Isothermes pour le nanofluide Cu–eau (lignes continues) et l'eau pure (lignes discontinues) pour $t_p= 0.1$ , $\Phi=0$ , $\Phi=0.1$ et $Gr=10^6$ (a): $A=0.2$ , (b): $A=0.6$ , (c): $A=1$ .....	59
Figure 4.9: Réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de $\Phi$ ( $Gr=10^6$ , $A=0.6$ ).....	60
Figure 4.10 : Réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de $A$ ( $Gr=10^6$ , $\Phi=0$ ).....	60
Figure 4.11.a : Variation des profils de la vitesse $U$ en fonction du temps pour $X=0.5$ , $A=1$ et $Gr=10^6$ .....	61
Figure 4.11.b : Variation des profils de la vitesse $V$ en fonction du temps pour $Y=0.5$ , $A=1$ et $Gr=10^6$ .....	62
<b>Deuxième condition pariétale thermique</b>	
Figure 4.12 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^3$ .....	63



Figure 4.13 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^4$ .....	64
Figure 4.14: Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^5$ .....	65
Figure 4.15: Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^6$ .....	66
Figure 4.16 : Variation du nombre de Nusselt moyen avec le nombre de Grashof pour différentes fractions volumiques .....	67
Figure 4.17 : Profils de la vitesse U pour $X=0.5$ et V pour $Y=0.5$ de la cavité pour différentes fractions volumiques pour $Gr=10^5$ et $Gr=10^4$ .....	68

**Troisième condition pariétale thermique**

Figure 4.18 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^3$ .....	70
Figure 4.19 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^4$ .....	71
Figure 4.20 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^5$ .....	72
Figure 4.21: Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^6$ .....	73

**Quatrième condition pariétale thermique**

Figure 4.22 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^3$ .....	75
Figure 4.23 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^4$ .....	76
Figure 4.24 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^5$ .....	77
Figure 4.25 : Isothermes et lignes de courant pour $Gr=10^6$ .....	78
Figure 4.26: Variations des Nombres de Nusselt moyens de la troisième et la quatrième condition pariétale thermique.....	79

## LISTE DES TABLEAUX

1	Propriétés thermophysiques de l'eau et des nanoparticules à $T=25^{\circ}\text{C}$ .....	18
4.1	Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds pour $\Phi=0.1$ .....	46

## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

NOMENCLATURE.....	i
TABLE DES FIGURES.....	iii
LISTE DE TABLEAUX.....	vi
TABLE DES MATIERES.....	x
INTRODUCTION.....	01

### CHAPITRE I : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	04
-----------------------------------	----

### CHAPITRE II : ANALYSE THEORIQUE

2.1 Description du problème.....	14
2.2 Modèle monophasique et hypothèses simplificatrices.....	14
2.3 Formulation du problème.....	15
2.3.1 Formulation vectorielle du problème.....	15
2.3.2 Formulation indicielle.....	16
2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes.....	17
2.5 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles.....	18
2.5.1 Première condition pariétale thermique.....	18
2.5.2 Deuxième condition pariétale thermique.....	19
2.5.3 Troisième condition pariétale thermique.....	19
2.5.4 Quatrième condition pariétale thermique.....	19
2.6 Adimensionalisation.....	19
2.6.1 Première condition pariétale thermique.....	21

2.6.2	Deuxième condition pariétale thermique.....	21
2.6.3	Troisième condition pariétale thermique.....	22
2.6.4	Quatrième condition pariétale thermique.....	22
2.7	Coefficients d'échange de la chaleur.....	22
2.7.1	Valeur locale du nombre de Nusselt.....	22
2.7.2	Nombre de Nusselt moyen.....	23

### **CHAPITRE III : FORMULATION NUMERIQUE**

3.1	Introduction.....	25
3.1.1	Maillage typique.....	25
3.1.2	Maillage décalé.....	27
3.2	Discretisation des équations.....	28
3.2.1	Discretisation temporelle en second ordre.....	28
3.2.2	Discretisation des termes convectifs et non linéaires.....	29
3.2.3	Discretisation spatiale en second ordre.....	29
3.2.4	Discretisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant x .....	31
3.2.5	Discretisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant y.....	32
3.2.6	Discretisation de l'équation de l'énergie.....	33
3.3	Résolution du système des équations de vitesse .....	35
3.3.1	Discretisation de l'équation de continuité.....	35
3.3.2	Discretisation de l'équation de la pression.....	37
3.3.3	Discretisation des conditions aux limites.....	39
3.4	Méthode de résolution .....	43
3.5	La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation.....	43
3.6	L'algorithme SIMPLE.....	43
3.7	Détails numériques.....	44

## CHAPITRE IV : RESULTATS ET DICUSSION

4.1	Introduction.....	46
4.2	Etude du maillage.....	46
4.3	Comparaison des résultats issus du code de calcul avec ceux de la littérature.....	49
4.4	<b>Première condition pariétale thermique :</b> .....	49
4.4.1	Isothermes et lignes de courant.....	49
4.4.2	Nombre de Nusselt moyen.....	59
4.4.3	Variation du profil de la composante U et V de la vitesse.....	61
4.5	<b>Deuxième condition pariétale thermique :</b> .....	62
4.5.1	Isothermes et lignes de courant.....	62
4.5.3	Nombre de Nusselt moyen.....	67
4.5.2	Variation du profil des composantes de la vitesse.....	67
4.6	<b>Troisième condition pariétale thermique:</b> .....	69
4.6.1	Isothermes et lignes de courant.....	69
4.7	<b>Quatrième condition pariétale thermique :</b> .....	74
4.7.1	Isothermes et lignes de courant.....	74
4.7.2	Comparaison entre les variations des Nombres de Nusselt moyens de la troisième et la quatrième condition pariétale thermique.....	78
	Conclusion.....	80
	Références Bibliographiques.....	82

ملخص

Abstract

Résumé

# **INTRODUCTION**

**L**e transfert de chaleur par convection naturelle peut être augmenté passivement soit en changeant la géométrie ou la région d'application des conditions aux limites ou bien en améliorant la conductivité thermique du fluide de base, par exemple, en ajoutant de petites nanoparticules solides pour constituer un nanofluide.

**D**ans ce travail, on étudie numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée remplie d'un mélange d'eau et de nanoparticules de cuivre.

**L**e but de cette investigation est d'étudier l'amélioration du transfert de chaleur par l'utilisation de nanofluides dans le cadre d'un transfert de chaleur par convection naturelle.

**N**ous avons donc étudié ici, la convection naturelle, laminaire et instationnaire dans une enceinte cubique allongée, de grand axe horizontal, inclinée d'un angle  $\varphi$  eu égard au plan horizontal, remplie d'un nanofluide. Dans un premier cas de chauffage, les deux parois actives sont soumises la première à une excitation thermique périodique dans le temps et la seconde à une température constante froide ( $T_{fr}$ ), les deux autres parois étant adiabatiques. Dans un deuxième cas de chauffage, deux parois sont maintenues isothermes à deux températures chaude ( $T_{ch}$ ) et froide ( $T_{fr}$ ), alors que les deux autres parois sont maintenues adiabatiques. Pour un troisième et un quatrième cas de chauffage les deux parois actives sont soumises la première à une excitation thermique périodique dans l'espace (cette dernière diffère pour le troisième et le quatrième cas considérés) et la seconde est maintenue isotherme à une température froide ( $T_{fr}$ ), cependant, les deux autres parois sont adiabatiques.

**L**e manuscrit de cette thèse est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons présenté des généralités sur la convection naturelle ainsi qu'une revue détaillée des travaux antérieurs qui ont traité la convection naturelle avec des nanofluides.

**D**ans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur, pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et le modèle monophasique pour le nanofluide utilisé ainsi que les simplifications classiques de Boussinesq.

**L**a méthodologie de la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des volumes finis est présentée dans le troisième chapitre.

**D**ans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par des résultats issus de la littérature et enfin nous

présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant et les isothermes au sein du fluide étudié, ainsi que les profils des vitesses horizontales et verticales et les nombres de Nusselt locaux et moyens, sur les parois chauffées de l'enceinte, ces derniers sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Grashof et de la fraction volumique des nanoparticules, pour voir leurs effets sur les transferts de chaleur au sein de l'enceinte considérée.



# **Chapitre 1**

## **Recherche bibliographique**

L'étude des transferts de chaleur par convection naturelle dans les enceintes fermées est intéressante, compte tenu de leurs diverses applications dans le génie industriel, ainsi que leur utilisation comme échangeurs dans la conversion énergétique. Comme exemples d'applications, on peut citer le chauffage industriel de l'eau et la stérilisation médicale.

Le nanofluide est un mélange de particules nanométriques en suspension dans un fluide de base, il a une conductivité thermique supérieure à celle du fluide. Cette conductivité thermique élevée améliore le taux de transfert de chaleur dans les applications industrielles. Le nanofluide peut être appliqué à des problèmes d'ingénierie, tels que les échangeurs de chaleur, le refroidissement des équipements électroniques, les procédés chimiques, le stockage d'énergie, etc.

De nombreux chercheurs ont étudié différents aspects des nanofluides. **Hwang et al. [1]** ont étudié le transfert de chaleur dans une cavité rectangulaire avec un nanofluide d' $\text{Al}_2\text{O}_3$  à base d'eau. Ils concluent que le coefficient de transfert de chaleur du nanofluide par rapport à celui du fluide de base, diminue à mesure que la taille des nanoparticules augmente. **Bilgen et Yedder [2]**, **Das et al. [3]** ont étudié la convection naturelle dans des enceintes rectangulaires remplies de nanofluides. Leurs résultats ont montré que pour tous les nombres de Grashof considérés, le coefficient de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. **Tayebi et Djeddar [4]** ont présenté numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un nanofluide (Cu-eau). Leurs résultats ont montré que la température uniforme à la paroi inférieure donne un nombre de Nusselt plus élevé que la température variant linéairement, et pour un nombre de Rayleigh donné, une augmentation de la fraction volumique des nanoparticules provoque une augmentation du nombre de Nusselt moyen, mais cette augmentation est plus élevée dans le cas d'une température constante. **Khanafer et al. [5]** ont présenté numériquement l'analyse de plusieurs paramètres pertinents sur les caractéristiques de transfert de chaleur des nanofluides, dans l'enceinte bidimensionnelle de hauteur  $H$  et de largeur  $L$  remplie d'un nanofluide. Les parois horizontales sont supposées isolées. La paroi verticale gauche est maintenue à une température  $T_H$  élevée tandis que la paroi verticale droite est maintenue à une basse température  $T_L$ . La méthode numérique utilisée est l'approche des volumes finis. Les résultats montrent que les nanoparticules en suspension augmentent sensiblement le taux de transfert de chaleur à n'importe quel nombre de Grashof donné. Le taux de transfert de chaleur du nanofluide augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. La présence de nanoparticules dans le fluide a modifié la structure de l'écoulement. **Jou et Tzeng [6]** ont utilisé des nanofluides pour améliorer le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire. Ils ont mené une étude numérique en utilisant le modèle de **Khanafer et al. [5]**. Ils ont indiqué que la fraction volumique des nanofluides entraîne une augmentation du coefficient de transfert thermique moyen. **Tayebi et al. [7]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Cu-eau) avec des conditions de chauffage uniforme et sinusoïdale. Leurs résultats montrent que la température uniforme donne un nombre de Nusselt plus élevé que celle de la température sinusoïdale et que pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh l'augmentation de la fraction volumique donne une augmentation du nombre de Nusselt moyen et que cette augmentation est plus

élevée pour le cas de la température uniforme. **Jalal et al. [8]** ont présenté une étude expérimentale et numérique illustrant les caractéristiques du transfert de chaleur d'un dissipateur de chaleur en utilisant le nanofluide (CuO-eau). Ils ont trouvé que les nanoparticules de CuO dispersées dans l'eau augmentent le coefficient du transfert de chaleur du dissipateur de manière significative, et cela est principalement attribué à la conductivité plus élevée des nanofluides et le mouvement brownien des particules. La quantité d'augmentation du coefficient de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la concentration des particules et ne diminue pas à des nombres de Reynolds plus élevés. **E. Abu-Nada et al. [9]** ont étudié l'amélioration du transfert de chaleur dans une enceinte fermée remplie de nanofluides ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau) et (CuO-eau) avec des parois chauffées différemment. La hauteur et la largeur de l'enceinte sont données par H et W, respectivement. La paroi gauche est chauffée et maintenue à une température constante ( $T_H$ ) supérieure à la température froide ( $T_C$ ) de la paroi droite. La méthode numérique utilisée est la méthode des volumes finis. Les résultats montrent qu'à des nombres élevés de Rayleigh, le nombre de Nusselt moyen diminue sur toute la surface chauffée en augmentant la fraction volumique des nanoparticules  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et CuO. Il est sensible au rapport d'aspect de l'enceinte. **Abu-Nada et Chamkha [10]** ont étudié les caractéristiques de transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte chauffée différemment remplie d'un nanofluide CuO-EG-eau pour différents modèles de conductivité thermique et de viscosité variables. La méthode numérique utilisée est la méthode des volumes finis. Les résultats montrent que les effets des modèles de viscosité sont prédits plus prédominants sur le comportement du nombre de Nusselt moyen, que sur l'influence des modèles de conductivité thermique. Le rapport d'aspect de l'enceinte devrait avoir des effets significatifs sur le comportement du nombre de Nusselt moyen qui diminue à mesure que le rapport d'aspect de l'enceinte augmente. **Snoussi et al. [11]** ont présenté une étude numérique du transfert de chaleur par convection dans des enceintes tridimensionnelles, remplies de différents nanofluides (Cu-eau et  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau). Ils ont conclu que leurs résultats sont conformes aux prévisions publiées précédemment. En particulier, l'amélioration du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des fractions volumiques des nanoparticules, du nombre de Rayleigh, ainsi que de l'extension de la longueur des parois refroidies. **Mahmoodi et Sebdani [12]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un nanofluide Cu-eau au centre de la cavité existe des corps adiabatiques. La méthode numérique utilisée est la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER a été utilisé pour le couplage vitesse-pression. Les résultats montrent que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Lorsque le nombre de Rayleigh est maintenu constant, le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. **Jahanshahi et al. [13]** ont étudié la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée soumise à différentes températures sur les parois latérales en utilisant un nanofluide ( $\text{SiO}_2$ -eau). Les résultats montrent que le nombre de Nusselt augmente avec la fraction volumique pour toute la gamme des nombres de Rayleigh. **Bouhi et Sehaqui [14]** ont présenté l'effet des conditions aux limites uniformes et périodiques sur la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Cu-eau). Ils ont conclu que l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules augmente considérablement le taux de transfert de chaleur pour n'importe quel nombre de Grashof. **Lai**

et **Yang [15]** ont étudié la convection naturelle d'un nanofluide ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau) dans une cavité carrée bidimensionnelle, en utilisant la méthode de Boltzmann en réseau (LBM), avec des parois latérales maintenues à différentes températures et entraînées par la force de flottabilité. Ils ont conclu que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et la concentration du volume de particules. Le nombre de Nusselt moyen du nanofluide est plus élevé que celui de l'eau avec le même nombre de Rayleigh. **Ho et al. [16]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie d'un nanofluide ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau). L'enceinte est chauffée différemment pour les deux parois verticales et les autres parois sont adiabatiques. Ils ont conclu qu'il y a une différence significative dans l'amélioration de la viscosité dynamique effective du nanofluide calculée à partir des deux formules adoptées, autre que celle de l'amélioration de la conductivité thermique, qui s'est avérée jouer un rôle majeur, conduisant ainsi à des résultats contradictoires concernant l'efficacité du transfert de chaleur quant à l'utilisation du nanofluide dans l'enceinte. **Abu-Nada et Oztop [17]** ont étudié les effets de l'angle d'inclinaison sur le champ d'écoulement et la distribution de la température dans une enceinte rectangulaire remplie de nanofluide. Ils ont conclu que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, mais l'effet de la concentration des nanoparticules sur le nombre de Nusselt est plus prononcé à un nombre de Rayleigh faible qu'à un nombre de Rayleigh élevé. **Sharma et GUPTA [18]** ont étudié le transfert de chaleur dans une enceinte rectangulaire à parois verticales chauffées différemment et remplies de trois types de nanofluides. Ils ont constaté que le nombre de Nusselt augmentait avec la fraction volumique des nanoparticules, pour toute la gamme du nombre de Grashof, et que la présence, de ces derniers dans le fluide modifiait les caractéristiques des fluides de base et que, pour les nanoparticules de Cu, on obtenait la plus grande valeur de diffusivité thermique. **Apurba et al. [19]** ont étudié le transfert de chaleur avec un écoulement laminaire du nanofluide cuivre-eau à travers un canal bidimensionnel avec des parois à températures constantes. Les résultats montrent une augmentation considérable du transfert de chaleur avec l'augmentation de la fraction volumique solide quel que soit le nombre de Reynolds. **Rahimi et al. [20]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie d'un mélange de nanoparticules-eau, les parois sont chauffées différemment, ils ont conclu que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules et les propriétés des nanoparticules influent sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur. **Abu-Nada [21]** a étudié l'amélioration du transfert de chaleur des nanofluides (CuO-eau) par la convection naturelle entre deux plaques différemment chauffées en utilisant le problème de Rayleigh-Bénard. L'objectif principal de cette étude porte sur les effets de la conductivité thermique variable et de la viscosité variable des nanofluides, sur l'amélioration du transfert de chaleur dans la convection naturelle. Les résultats montrent que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de nombre de Rayleigh et la fraction volumique des nanoparticules. **Mahmoudi et al. [22]** ont présenté expérimentalement l'effet de l'emplacement et la dimension de la source de chaleur sur le champ de convection naturelle et les champs de température dans une cavité carrée, qui est remplie d'un nanofluide cuivre-eau. Les résultats ont montré que l'augmentation du nombre de Rayleigh renforce l'écoulement de la convection naturelle, ce qui entraîne une diminution de la température de la source de chaleur. **Joshi et Pattamatta [23]** ont présenté une étude expérimentale du transfert de

chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie d'un nanofluide ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau). Les nombres de Rayleigh allant de  $7 \times 10^5$  à  $1 \times 10^7$ . Des nanofluides MWCNT-eau avec des fractions volumiques 0.1%, 0.3% et 0.5% sont formulés et étudiés pour différents nombres de Rayleigh. Ils ont conclu que le nanofluide MWCNT-eau, comparé au nanofluide  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau, donne des valeurs plus élevées du nombre de Nusselt pour une fraction volumique donnée. Leur étude pour la première fois démontre une amélioration de la convection naturelle avec le nanofluide MWCNT-eau. **Aminossadati** et **Ghasemi** [24] ont présenté une étude numérique du refroidissement par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide avec une source de chaleur encastrée dans la paroi inférieure. Les parois supérieure et verticale sont maintenues à une température relativement basse. Ils ont conclu que l'augmentation des nombres de Rayleigh renforce les flux de convection naturelle qui se traduit par la réduction de la température de la source de chaleur. **Tavman** et **al.** [25] ont présenté une étude expérimentale de la conductivité thermique et la viscosité des nanofluides ( $\text{SiO}_2$ -eau) et ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau). Ils ont constaté que la conductivité thermique effective des nanofluides augmentait proportionnellement à la concentration des particules, quelle que soit la température du fluide. Les viscosités efficaces de ces nanoparticules augmentent avec la concentration des particules, et diminue avec l'augmentation de la température. **B. Ghasemi** et **al.** [26] ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie d'un nanofluide ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau) et influencée par un champ magnétique. Leurs résultats montrent que le taux de transfert de chaleur augmente avec le nombre de Rayleigh, mais diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann. **M. A. Sheremet** et **I. Pop** [27] ont étudié numériquement une convection mixte dans une cavité carrée remplie de nanofluide à base d'eau. Les parois supérieure et inférieure sont mobiles et chauffées différemment. La méthode des différences finies a été utilisée pour l'analyse numérique du problème. Ils ont conclu que l'intensification du transfert de masse dépend fortement du nombre de Lewis, tandis que le nombre de Nusselt moyen augmente légèrement avec le nombre de Lewis. **Ternik** et **al.** [28] ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle, dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Au-eau), et dont les parois verticales sont différemment chauffées. Ils ont trouvé que l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules augmente le nombre moyen de Nusselt et que l'effet des nanoparticules hautement conductrices sur l'amélioration du transfert de chaleur est plus important pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh. **Chamkha** et **Abu-Nada** [29] ont étudié une convection mixte dans des cavités carrées à simple et double couvercle remplies d'un nanofluide ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau) en utilisant différents modèles de viscosité des nanofluides. La hauteur et la largeur de la cavité sont données par  $H$ . La paroi supérieure du couvercle est chauffée et maintenue à une température constante ( $T_H$ ) supérieure à la température inférieure de la paroi froide ( $T_L$ ). Ils ont constaté qu'il était possible d'améliorer considérablement le transfert de chaleur grâce à la présence des nanoparticules à des nombres de Richardson modérés et élevés. **Lin** et **Violi** [30] ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluides ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau), les parois sont différemment chauffées. Ils ont conclu que la diminution du nombre de Prandtl amplifie les effets des nanoparticules en raison de l'augmentation de la diffusivité thermique efficace. **Li** et **Peterson** [31] ont présenté une étude expérimentale du transfert de chaleur par convection naturelle du nanofluide  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -eau. Les tests de température et du nombre de Nusselt du nanofluide ont donné un écart par

rapport à celle des fluides de base purs (eau distillée). Ils ont constaté une diminution du coefficient de transfert de chaleur par convection naturelle avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules dans les nanofluides. **Basak** et **Chamkha** [32] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de plusieurs types de nanofluides, Ils ont envisagé trois cas de chauffage, dans un premier cas, ils ont imposé un gradient de température horizontal, pour le deuxième cas ils ont imposé que la paroi inférieure était uniformément chauffée, la paroi supérieure étant adiabatique alors que les parois verticales sont des isothermes froides et dans un troisième cas de chauffage, la configuration du deuxième cas est reprise mais la paroi inférieure est cette fois chauffée à une température non uniforme. Ils ont constaté que le transfert de chaleur en utilisant le nanofluide est meilleur par rapport au fluide de base. **Bakhshan** et **Semrani** [33] ont fait une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie de plusieurs types de nanofluides. Les parois sont chauffées différentiellement. Ils ont constaté l'augmentation du nombre de Nusselt moyen avec les nanoparticules pour toutes les valeurs du nombre de Grashof, et que la plus forte augmentation est obtenue pour les nanoparticules de Cuivre (Cu). **Guiet** et **al.** [34] ont présenté la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Cu-eau) avec une source de chaleur à la paroi inférieure. Ils ont conclu que lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh, la fraction volumique des nanoparticules et aussi la taille de la source de chaleur, le taux de transfert de chaleur augmente. **Basak** et **al.** [35] ont étudié numériquement le transfert de chaleur et les effets du chauffage uniforme et non-uniforme des parois inclinées sur la convection naturelle dans une enceinte triangulaire isocèle. Leur résultat indique que le nombre de Nusselt moyen global pour un chauffage non-uniforme est inférieur à celui du chauffage uniforme. **Bhuiyana** et **al.** [36] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie de nanofluides à base d'eau dont la paroi du bas est partiellement chauffée alors que les autres parois sont maintenues froides. La procédure numérique utilisée dans ce travail est basée sur la méthode des résidus pondérée de Galerkin pour la formulation par éléments finis. Les calculs sont effectués pour des nombres de Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^6$  et pour différentes fractions volumiques solides de nanoparticules  $0 \leq \phi \leq 0,2$ . Une augmentation du taux de transfert de chaleur est observée avec l'augmentation de la fraction volumique de nanoparticules pour toute la gamme des nombres de Rayleigh. Ils ont observé que l'amélioration du transfert de chaleur dépend fortement du type de nanofluide. **Khorasanizadeh** et **al.** [37] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie du nanofluide Cu-eau avec un déflecteur conducteur intégré sur la paroi chaude inférieure, les deux parois verticales sont froides et la paroi supérieure horizontale est isolée. Les équations gouvernantes sont résolues numériquement avec la méthode des volumes finis à l'aide de l'algorithme SIMPLER. Ils ont trouvé à  $Ra=10^4$ , que le transfert de chaleur par convection est très faible et la conduction dominante s'affaiblit. Ils ont déplacé le déflecteur vers le centre de la cavité, le nombre moyen de Nusselt diminue. Aussi, à des nombres de Rayleigh plus élevés dus à une convection améliorée, le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la fraction volumique. **Sourtiji** et **al.** [38] ont présenté une étude numérique instationnaire de la convection mixte dans une cavité remplie d'un nanofluide (Al-eau). Les quatre parois de l'enceinte sont maintenues à une température constante ( $T_w$ ) avec des ports d'entrée et de sortie (Le port d'entrée est positionné sur le haut

de la paroi gauche et le port de sortie est situé sur le bas de la paroi droite). Ils ont conclu que le transfert de chaleur est amélioré pour tous les nombres de Strouhal (St) et Richardson (Ri). De plus la performance de la nanoparticule sur l'amélioration du transfert de chaleur à des nombres de Richardson élevés est moins à celle d'un nombre de Richardson inférieur. **Chen et Chen [39]** ont étudié une simulation numérique de l'écoulement de convection naturelle laminaire, stationnaire et bidimensionnelle dans une enceinte carrée avec des sources de chaleur discrètes sur les parois gauche et inférieure, dans un premier cas, une source de chaleur est placée le long de la paroi supérieure gauche et deux sources de chaleur distinctes sont placées sur la paroi inférieure. La paroi droite est maintenue à une température froide et la paroi supérieure est adiabatique, dans un second cas, deux sources de chaleur distinctes sont situées sur la paroi verticale gauche et une source de chaleur est placée le long de la partie de paroi inférieure. Les résultats numériques indiquent que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh dans les deux cas. De plus, l'effet du taux de transfert de chaleur dû à la force de chauffage sur la paroi de gauche est différent de celui du bas. Pour l'effet de la taille de l'élément chauffant, il est observé qu'en augmentant la longueur de la source de chaleur, le taux de transfert de chaleur augmente progressivement dans les deux cas. **Yu et al. [40]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle transitoire dans une enceinte carrée remplie d'un nanofluide chauffée différentiellement, ils constatent qu'à nombre de Rayleigh constant, le nombre de Nusselt moyen temporel est abaissé avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. **Kefayati et al. [41]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie d'un nanofluide (SiO<sub>2</sub>-eau). La méthode numérique utilisée est la méthode de Lattice Boltzmann (LBM). Les températures des deux parois latérales de la cavité sont maintenues à T<sub>H</sub> et T<sub>C</sub>. Les parois horizontales supérieure et inférieure sont adiabatiques. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente avec la fraction de volume pour toute la gamme des nombres de Rayleigh. De plus, l'effet des nanoparticules sur le transfert de chaleur augmente lorsque le rapport de forme de l'enceinte augmente. **Oztop et Abu-Nada [42]** ont étudié le transfert de chaleur et l'écoulement de fluide dans une enceinte rectangulaire partiellement chauffée et remplie de différents types de nanoparticules. Ils ont conclu que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent avec la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme de Rayleigh. **Kalidasan et al. [43]** ont fait une étude numérique bidimensionnelle de la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée avec deux blocs adiabatiques placés en diagonale et remplie de nanofluide cuivre-eau. Les résultats indiquent l'effet combiné de la température des nanofluides et du temps sur la paroi inférieure supprime l'effet de blocage hydrodynamique des blocs solides et améliore le transfert de chaleur par convection. **Santra et al. [44]** ont étudié le transfert de chaleur de la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée chauffée différentiellement et remplie d'un nanofluide (Cu-eau). Ils ont observé que le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation de la fraction volumique pour un nombre de Rayleigh particulier, alors qu'il augmente avec le nombre de Rayleigh pour une fraction volumique particulière. Le diamètre des nanoparticules de cuivre a été fixé à 100 nm pour toutes les études. **Oueslati et Bennacer [45]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie d'un nanofluide et chauffée différentiellement, Ils ont trouvé que les nanofluides améliorent le transfert thermique, et que la meilleure amélioration est obtenue avec les nanoparticules de **Nasrin** et

**al. [46]** ont examiné numériquement les effets de la conductivité thermique et de la viscosité dans une couche mince de nanofluide (Cu-eau), sur le transfert de chaleur par convection naturelle. Ils ont conclu que les meilleures performances du transfert de chaleur sont obtenues en utilisant les valeurs les plus élevées de la conductivité thermique, et les valeurs les plus faibles de la viscosité. **Cho et al. [47]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire dont la paroi basse est ondulée. L'enceinte remplie de nanofluide (Cu-eau) est chauffée par le bas. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules, et que le nombre de Nusselt moyen peut être optimisé en réglant de façon appropriée les conditions de géométrie en fonction du nombre de Rayleigh. **Cihan et al. [48]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire, inclinée et remplie de nanofluide (CuO-eau), les parois verticales de l'enceinte chauffées différentiellement et comportant un conducteur de chaleur cylindrique circulaire dans leur centre. Ils ont trouvé que l'ajout des nanoparticules au fluide de base augmente significativement le transfert de chaleur. Le nombre de Nusselt moyen présente au début une augmentation puis une diminution quand l'angle d'inclinaison augmente. **Ternik et Rudolf [49]** ont étudié l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluides. Les parois verticales de l'enceinte sont chauffées différentiellement. Leurs résultats indiquent que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique. L'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, augmentent le taux de transfert de chaleur. **Mansour et al. [50]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle entre deux enceintes remplies d'un nanofluide à base d'eau (principalement un nanofluide Cu-eau) à l'aide de la méthode des différences finies. Une étude paramétrique a été réalisée et les effets de paramètres pertinents tels que le nombre de Rayleigh, le rapport de forme des deux enceintes entrelacées, la fraction volumique de nanoparticules sur les champs dynamique et thermique ainsi que le taux de transfert de chaleur à l'intérieur de l'enceinte ont été examinés. Les résultats obtenus montrent que le nombre moyen de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, quel que soit le rapport de forme de l'enceinte. De plus, les résultats obtenus montrent que le taux de transfert de chaleur augmente avec les valeurs décroissantes du facteur de forme de la cavité. Ils ont constaté en outre que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. De plus, à faible nombre de Rayleigh, l'effet des nanoparticules sur l'amélioration du transfert de chaleur pour les enceintes étroites est plus important que pour les enceintes larges. **Noghrehabadi et Samimi [51]** ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluides (CuO-eau). Les parois horizontales de l'enceinte sont adiabatiques, et les parois verticales sont chauffées différentiellement. Ils ont conclu qu'il y'a une augmentation du taux de transfert de chaleur avec l'augmentation du nombre de Rayleigh quand les effets du thermophorèse et du mouvement brownien sont pris en compte. **Aktas [52]** a étudié numériquement le transfert de chaleur par convection dans une enceinte rectangulaire remplie de nanofluide (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-eau). Les résultats montrent que l'écoulement oscillant augmente de façon significative le transfert de chaleur par rapport à la conduction pure, et que l'augmentation est plus évidente dans le cas de faible concentration volumique



des nanoparticules. **Öztuna** et **Kahveci** [53] ont présenté le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie des nanofluides (Cu-eau) et (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-eau) et chauffée de différentiellement et partiellement divisée par des séparations, leurs résultats montrent que le nombre de Nusselt moyen diminue avec l'augmentation de séparation et augmente considérablement avec l'introduction des nanoparticules dans le fluide, cette augmentation est maximale pour les nanoparticules de Cu, et minimale pour les particules de Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Dans ce chapitre nous avons montré, que les travaux réalisés sur la convection naturelle se diversifiaient parfois expérimentalement, d'autres plusieurs fois numériquement, en jouant sur divers paramètres (changement des conditions pariétales thermiques, épaisseurs, formes géométriques, inclinaison du système étudié, effet des nanofluides....etc.). Le challenge était de trouver des résultats qui peuvent servir pour valider les modèles numériques. Différents modèles numériques ont été utilisés, comme c'est illustré dans la revue bibliographique.

L'objectif du présent travail consiste à étudier numériquement le transfert thermique par convection naturelle laminaire transitoire dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (cuivre-eau). L'enceinte est inclinée de 45° par rapport au plan horizontal et l'étude proposée consiste à voir l'effet du chauffage temporel et spatial sur la structure de l'écoulement et du transfert thermique, cette configuration reste non encore investie selon notre revue bibliographique. Le calcul préliminaire effectué, de la cavité différentiellement chauffée, a été validé par des résultats trouvés dans la littérature.

# **Formulation théorique**

## 2.1 Description du problème

La figure 2.1 schématise une section transversale carrée, par un plan vertical, d'une cavité, remplie d'un nanofluide, très allongée suivant un axe horizontal  $Az$  perpendiculaire au plan de la figure. L'enceinte est inclinée de façon que ses plans diagonaux soit l'un vertical et l'autre horizontal. Le repère est cartésien bidimensionnel.

Initialement le système est en équilibre thermodynamique à la température  $T_0$ . Les côtés  $AB$  et  $CD$  sont adiabatiques et le côté  $BC$  est toujours maintenu isotherme à une température froide  $T_{fr}$  et le côté  $AD$  est chauffé selon quatre conditions pariétales thermiques que nous verrons plus loin.

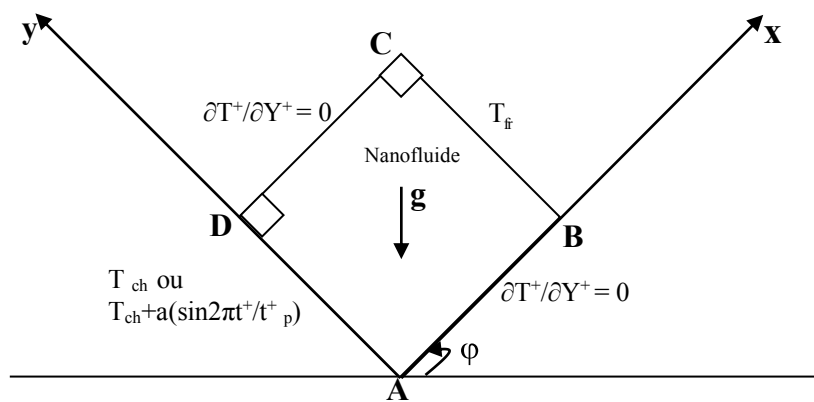


Figure 2.1 Représentation schématique de la section transversale du système

Il se produit donc, dans l'enceinte remplie d'un nanofluide, une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

## 2.2 Modèle monophasique et hypothèses simplificatrices :

Un des modèles développés qui a beaucoup attiré l'attention des chercheurs est le modèle monophasique pour les avantages qu'il présente : moins de consommation de temps de calcul et fiabilité des résultats obtenus. Considérant que les particules solides en suspension sont très fines rendant leur fluidisation simple et sans effet de glissement assurant ainsi un équilibre thermique entre les phases solides et fluides. De ce fait, **ce modèle traite le nanofluide comme un fluide homogène** sur lequel sont appliqués les principes de conservation connus sauf qu'à la place des **propriétés physiques du fluide** il s'agira de considérer les **propriétés thermo physiques du nanofluide**. Ces dernières tiennent compte des propriétés des deux phases fluide et solide.

Dans le cadre de ce modèle nanofluide monophasique, la phase liquide et les nanoparticules solides sont considérées en équilibre thermique. Les hypothèses simplificatrices usuelles largement utilisées dans la dynamique des fluides sont aussi prises en compte :

- L'écoulement est bidimensionnel.
- Le nanofluide est considéré newtonien et incompressible.
- L'écoulement est laminaire établi.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le rayonnement thermique à l'intérieur du passage annulaire est négligeable.
- Les propriétés physiques du nanofluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.

$$\rho_{nf} = \rho_{nf}(p, T) = \rho_{nf}(T) = \rho_{0nf} - (\rho\beta)_{nf}(T - T_0)$$

Où :  $\beta_{nf}$  : est le coefficient de dilatation thermique à pression constante du nanofluide (coefficient de compression isochore).

$\rho_{0nf}$  : La masse volumique de référence (constante).

$T_0$  : La température de référence (constante) associée à  $\rho_{0nf}$ .

## 2.3 Formulation du problème

### 2.3.1 Formulation vectorielle du problème

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{nf} \vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

- Equation de conservation de quantité de mouvement

$$\rho_{nf} \left[ (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho_{nf} \vec{g} - \text{grad} p + \mu_{nf} \Delta \vec{v} \quad (2.3)$$

- Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \Delta T \quad (2.4)$$

Pour le cas d'un écoulement transitoire, laminaire et incompressible, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, ces relations s'écrivent :

- Equation de continuité

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

- Equation de conservation de quantité de mouvement

$$\rho_{nf} \left[ (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = [\rho_{0nf} - (\rho\beta)_{nf} (T - T_0)] \vec{g} - \text{grad } p + \mu_{nf} \Delta \vec{v} \quad (2.6)$$

- Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \Delta T \quad (2.7)$$

Avec :

$\vec{V}$  : Vecteur vitesse du fluide.

$\vec{g}$  : Vecteur accélération de la pesanteur.

$p$  : Pression du fluide.

$K$  : Conductivité thermique du fluide.

$T$  : Température du fluide.

$C_p$  : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

$t$  : temps

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide

### 2.3.2 Formulation indicielle

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.5.a)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{nf} V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{nf} V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_{nf} [1 - \beta(T - T_f)] g_i \quad (2.6.a)$$

- Equation d'énergie :

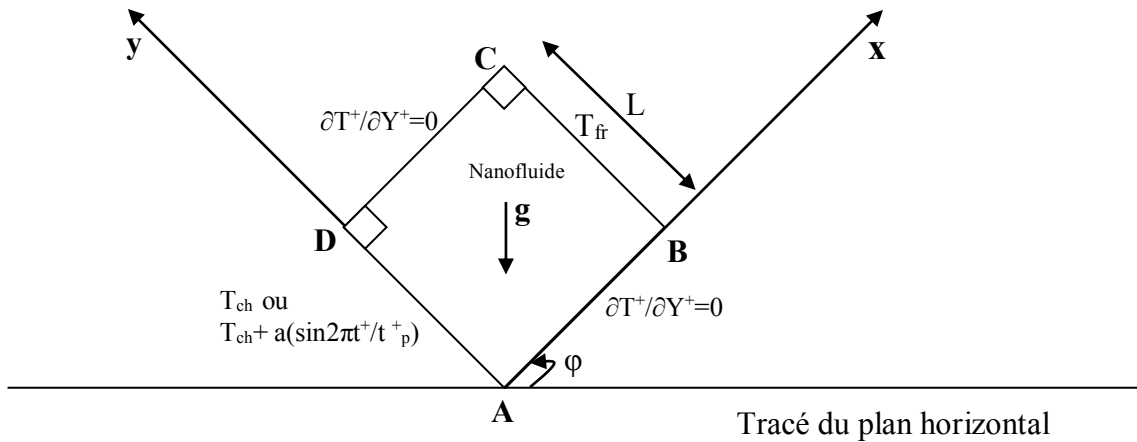
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{nf} C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{nf} C_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.7.a)$$

Avec :

$\tau_{ij}$ : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

**2.4 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes**

Introduisons les coordonnées cartésiennes définies sur la figure 2.2.



**Figure 2.2 Coordonnées cartésiennes**

Le problème étant bidimensionnel et instationnaire donc les équations dimensionnelles s'écrivent respectivement comme suite :

Nous posons maintenant  $\rho_{0nf} = \rho_{nf}$  ce qui donne :

$$\frac{\partial U^+}{\partial X^+} + \frac{\partial V^+}{\partial Y^+} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial U^+}{\partial X^+} + V^+ \frac{\partial U^+}{\partial Y^+} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial X^+} + g \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \sin(\varphi)(T - T_{fr}) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 U^+}{\partial X^{+2}} + \frac{\partial^2 U^+}{\partial Y^{+2}} \right) \tag{2.9.a}$$

$$\frac{\partial V^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial V^+}{\partial X^+} + V^+ \frac{\partial V^+}{\partial Y^+} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P^+}{\partial Y^+} + g \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \cos(\varphi)(T - T_{fr}) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left( \frac{\partial^2 V^+}{\partial X^{+2}} + \frac{\partial^2 V^+}{\partial Y^{+2}} \right) \tag{2.9.b}$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial T^+}{\partial X^+} + V^+ \frac{\partial T^+}{\partial Y^+} = \alpha_{nf} \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial X^{+2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial Y^{+2}} \right) \tag{2.10}$$

La masse volumique et la chaleur spécifique du nanofluide sont données d'après (**Khanafar et al [5], E. Abu-Nada [54]**) Par les expressions :

$$\rho_{nf} = \Phi \rho_s + (1 - \Phi) \rho_f \tag{2.11}$$

$$(\rho C_p)_{nf} = \Phi (\rho C_p)_s + (1 - \Phi) (\rho C_p)_f \tag{2.12}$$

Le coefficient de dilatation thermique du nanofluide est obtenu à partir de la formule suivante :

$$(\rho\beta)_{nf} = \Phi (\rho\beta)_s + (1 - \Phi) (\rho\beta)_f \tag{2.13}$$

La diffusivité thermique du nanofluide est donnée par :

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (2.14)$$

La conductivité thermique effective du nanofluide est approximée par le modèle de **Maxwell [55]** :

$$K_{nf} = K_f \frac{(K_s + 2K_f) - 2\Phi(K_f - K_s)}{(K_s + 2K_f) + \Phi(K_f - K_s)} \quad (2.15)$$

La viscosité du nanofluide est donnée par **Brinkman [56]** :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \Phi)^{2.5}} \quad (2.16)$$

**Tableau 1** : Propriétés thermophysiques de l'eau et des nanoparticules à T=25°C [57]

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C_p$ (J/kgK)	$k$ (W/mK)	$\beta \times 10^{-5}$ (K <sup>-1</sup> )	$\alpha \times 10^{-7}$ (m <sup>2</sup> /s)	$Pr$
Fluide pure (eau)	997.1	4179	0.613	21	1.47	6.2
Cuivre (Cu)	8933	385	401	1.67	1163.1	-

## 2.5 Formulation des conditions aux limites dimensionnelles

Les conditions initiales dimensionnelles sont :

$$0 \leq X^+ \leq L \text{ et } 0 \leq Y^+ \leq L$$

$$T^+ = 0 \quad (2.17)$$

$$U^+ = V^+ = 0 \quad (2.18)$$

Les conditions aux limites dimensionnelles sont :

### 2.5.1 Première condition pariétale thermique

$$\forall X^+, \text{ à } Y^+ = 0 \text{ ou } Y^+ = L$$

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial T^+}{\partial Y^+} = 0 \quad (2.19)$$

$$\forall Y^+, \text{ à } X^+ = 0$$

$$T^+ = T_{ch} + a \sin(2\pi t^+ / t_p^+) \quad (2.20)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = L} \quad T^+ = T_{fr} \quad (2.21)$$

**2.5.2 Deuxième condition pariétale thermique**

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = 0} \quad T^+ = T_{ch} \quad (2.22)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = L} \quad T^+ = T_{fr} \quad (2.23)$$

$$\underline{\forall X^+, \text{ à } Y^+ = 0 \text{ ou } Y^+ = L}$$

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial T^+}{\partial Y^+} = 0 \quad (2.24)$$

**2.5.3 Troisième condition pariétale thermique**

$$\underline{\forall X^+, \text{ à } Y^+ = 0 \text{ ou } Y^+ = L}$$

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial T^+}{\partial Y^+} = 0 \quad (2.25)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = 0}$$

$$T^+ = T_{ch+} \sin(2Y^+/L) \quad (2.26)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = L}$$

$$T^+ = T_{fr} \quad (2.27)$$

**2.5.4 Quatrième condition pariétale thermique**

$$\underline{\forall X^+, \text{ à } Y^+ = 0 \text{ ou } Y^+ = L}$$

$$U^+ = V^+ = \frac{\partial T^+}{\partial Y^+} = 0 \quad (2.28)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = 0}$$

$$T^+ = T_{ch+} \cos(2Y^+/L) \quad (2.29)$$

$$\underline{\forall Y^+, \text{ à } X^+ = L}$$

$$T^+ = T_{fr} \quad (2.30)$$

**2.6 Adimensionalisation**

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Posons les quantités adimensionnelles suivantes :

L : la longueur des côtés de l'enceinte est prise comme longueur caractéristique.



$$X = \frac{X^+}{L}, Y = \frac{Y^+}{L}, U = \frac{U^+L}{\alpha_f}, V = \frac{V^+L}{\alpha_f}, \theta = \frac{T - T_{f_i}}{T_{ch} - T_{f_i}}, P = \frac{P^+}{\rho_{nf} \left( \frac{\alpha_f}{L} \right)^2}, t = \frac{t^+ \alpha_f}{L^2} \text{ et}$$

$$t_p = \frac{t_p^+ \alpha_f}{L^2}$$

Et en les portant dans les équations (2.8), (2.9.a), (2.9.b) et (2.10) on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} \alpha_f} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf} \beta_f} \cdot Gr \cdot Pr^2 \cdot \theta \cdot \sin \varphi \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf} \alpha_f} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf} \beta_f} \cdot Gr \cdot Pr^2 \cdot \theta \cdot \cos \varphi \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1-\Phi) \right)} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{(1-\Phi) \rho_f}{\Phi \rho_s} \right)} \left( \frac{\beta_s}{\beta_f} \right) + \frac{1}{\left( \frac{\Phi \rho_s}{(1-\Phi) \rho_f} \right) + 1} \right] \cdot Gr \cdot Pr^2 \cdot \theta \cdot \sin \varphi \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\text{Pr}}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1-\Phi) \right)} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{(1-\Phi) \rho_f}{\Phi \rho_s} \right)} \left( \frac{\beta_s}{\beta_f} \right) + \frac{1}{\left( \frac{\Phi \rho_s}{(1-\Phi) \rho_f} \right) + 1} \right] \cdot \text{Gr} \cdot \text{Pr}^2 \cdot \theta \cdot \cos \varphi \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{k_{nf}/k_f}{(1-\Phi) + \Phi \left( \frac{\rho C_p}{\rho C_p} \right)_s / \left( \rho C_p \right)_f} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.37)$$

Avec:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f} \quad \text{et} \quad \text{Gr} = \frac{g \beta_f (T_{ch} - T_{fr}) H^3}{\nu^2}$$

Pr : le nombre de Prandtl.

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

### 2.6.1 Première condition pariétale thermique

pour  $t=0$ , on a:

$$\Theta=0, U=V=0 \quad (2.38)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$\forall X$ , à  $Y = 0$  ou  $Y = 1$

$$U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (2.39)$$

$\forall Y$ , à  $X = 0$

$$\Theta = 1 + A \sin(2\pi t/t_p) \quad (2.40)$$

$\forall Y$ , à  $X = 1$

$$\Theta = 0, U = V = 0 \quad (2.41)$$

### 2.6.2 Deuxième condition pariétale thermique

pour  $t = 0$ , on a:

$$\Theta=0, U=V=0 \quad (2.42)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$\forall X$ , à  $Y = 0$  ou  $Y = 1$

$$U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (2.43)$$

$\forall Y, \text{ à } X=0$

$$\Theta = 1, U = V = 0 \quad (2.44)$$

$\forall Y, \text{ à } X=1$

$$\Theta=0, U = V = 0 \quad (2.45)$$

### 2.6.3 Troisième condition pariétale thermique

Pour  $t = 0$ , on a :

$$\Theta=0, U=V=0 \quad (2.46)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$\forall X, \text{ à } Y = 0 \text{ ou } Y = 1$

$$U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (2.47)$$

$\forall Y, \text{ à } X = 0$

$$\Theta = 1 + \sin(2\pi Y) \quad (2.48)$$

$\forall Y, \text{ à } X = 1$

$$\Theta=0, U = V = 0 \quad (2.49)$$

### 2.6.4 Quatrième condition pariétale thermique

Pour  $t = 0$ , on a :

$$\theta=0, U=V=0 \quad (2.50)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$\forall X, \text{ à } Y = 0 \text{ ou } Y = 1$

$$U = V = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (2.51)$$

$\forall Y, \text{ à } X = 0$

$$\Theta = 1 + \cos(2\pi Y) \quad (2.52)$$

$\forall Y, \text{ à } X = 1$

$$\Theta=0, U = V = 0 \quad (2.53)$$

## 2.7 Coefficients d'échange de la chaleur

### 2.7.1 Valeur locale du nombre de Nusselt

En utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans toutes les conditions, il vient :

$$\text{Nu}_L = - \left( \frac{K_{nf}}{K_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0,1} \quad (2.54)$$

### 2.7.2 Nombre de Nusselt moyen

Pour la première condition pariétale thermique le nombre de Nusselt moyen périodique dans le temps  $\text{Nu}_{\text{moyAD}}$  est donné par :

$$\text{Nu}_{\text{moyAD}} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \int_0^1 \text{Nu}_L dY dt \quad (2.55)$$

Pour les autres conditions pariétales thermiques les valeurs moyennes du nombre de Nusselt le long de la paroi AD de l'enceinte, se calculent comme suit :

$$\text{Nu}_{\text{MAD}} = \frac{1}{L} \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_0 dY \quad (2.56)$$

# **Formulation Numérique**

### 3.1 Introduction

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre 2, montre que deux paramètres influencent les profils de vitesse et de la température dans l'enceinte cubique, en maintenant le nombre de Prandtl constant. Ces paramètres sont :

- la fraction volumique du nanofluide utilisé (Cu-eau)
- le nombre de Grashof Gr.

#### 3.1.1. Maillage typique

C'est le maillage obtenu par la discrétisation du domaine physique dans les deux directions, horizontale et verticale, afin d'obtenir un grand nombre de volumes finis. Chaque volume entourant un nœud, et lui-même entouré par d'autres volumes finis, dits voisins. Le volume est séparé de ces voisins par deux faces pour chaque direction. Sauf pour les volumes finis qui se trouvent sur les limites, qui peuvent avoir moins de faces. Dans les nœuds de ce maillage seront stockées les valeurs des quantités scalaires telles que la pression et la température. Aux centres des volumes finis, ils sont placés les points intérieurs du maillage et les points limites sont centrés aux faces limites (voir la figure 3.1). Bien qu'il ne soit pas nécessaire que le maillage soit uniforme, notre maillage est uniforme. Le centre d'un volume fini typique est dénommé  $P$ . Chaque volume fini à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes finis voisins. Les centres des volumes finis voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume fini typique sont notés  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$ , respectivement. Les positions des faces séparant le volume fini typique de ses voisins, à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, sont notées  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ , respectivement. Les dimensions horizontales des volumes finis sont dénommées  $\Delta x$ . Ainsi, les dimensions horizontales des volumes finis englobant les points  $P$ ,  $N$  et  $S$  sont notées  $\Delta x_P$ , et celles des volumes finis englobant les points  $E$ ,  $W$  sont notées  $\Delta x_E$  et  $\Delta x_W$ , respectivement. Les dimensions verticales des volumes finis sont appelées  $\Delta y$ . Et donc, les dimensions verticales des volumes finis englobant les points  $P$ ,  $E$  et  $W$  sont notées  $\Delta y_P$ , et celles des volumes finis englobant les points  $N$ ,  $S$  sont notées  $\Delta y_N$  et  $\Delta y_S$ , respectivement. On appelle les distances entre le point  $P$  et les points «  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$  » respectivement, «  $dx_e$ ,  $dx_w$ ,  $dy_n$  et  $dy_s$  ». La détermination de toutes les dimensions, toutes les distances, les coordonnées des points et les coordonnées des faces, complète les spécifications géométriques du maillage qui s'avéreront nécessaires pour la discrétisation des équations différentielles dans les volumes finis et pour la représentation graphique des résultats.

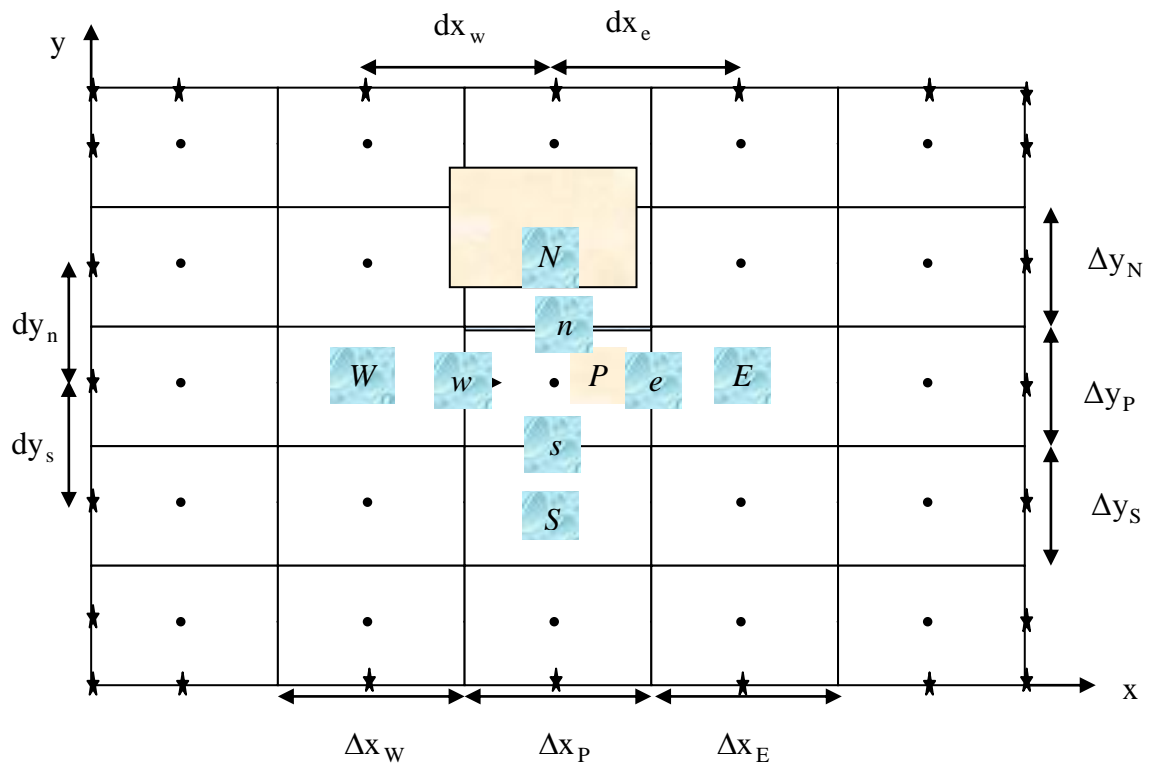


Figure 3.1 : Maillage typique uniforme suivant  $x$  et suivant  $y$ .

Un volume fini typique est illustré sur la figure (3.2) :

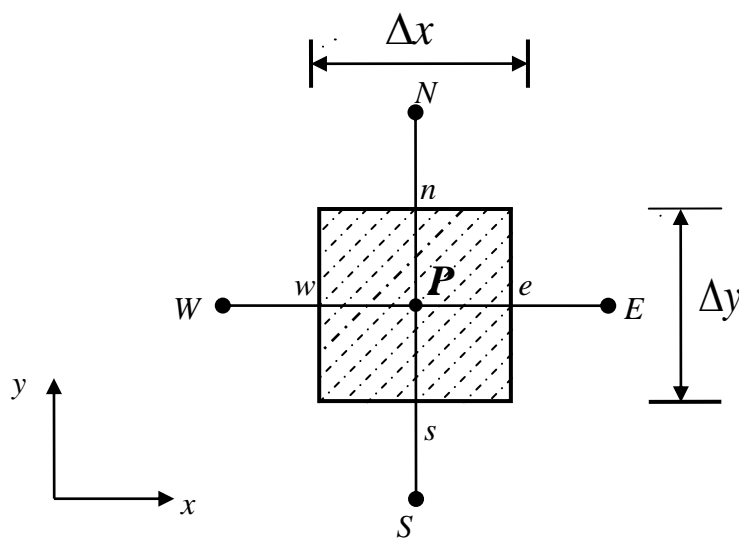


Figure 3.2 : Volume fini typique

3.1.2. Maillage décalé

Le maillage typique décrit sera utilisé pour la discrétisation des équations des variables dépendantes scalaires. Cependant pour les variables dépendantes vectorielles (les composantes du vecteur de vitesse) il est nécessaire et recommandé d'utiliser des maillages décalés. L'idée du maillage décalé, est de stocker les composantes de la vitesse sur les faces des volumes finis pour éviter la satisfaction des équations de discrétisation par des solutions numériques spatialement oscillatoires et physiquement inacceptables. Arbitrairement on a choisi de décaler le maillage typique dans la direction positive des axes ainsi le maillage de la composante horizontale de la vitesse est décalé à droite par rapport au maillage typique; et le maillage de la composante verticale de la vitesse est décalé vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes finis typiques; et l'emplacement des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces horizontales des volumes finis typiques. Quand on décale le maillage dans la direction horizontale, les notations des points du nouveau maillage décalé ainsi que des faces, portent l'indice  $u$  (voir la figure 3.3) et le décalage suivant la direction verticale sera accompagné d'une notation avec l'indice  $v$  (voir la figure 3.4).

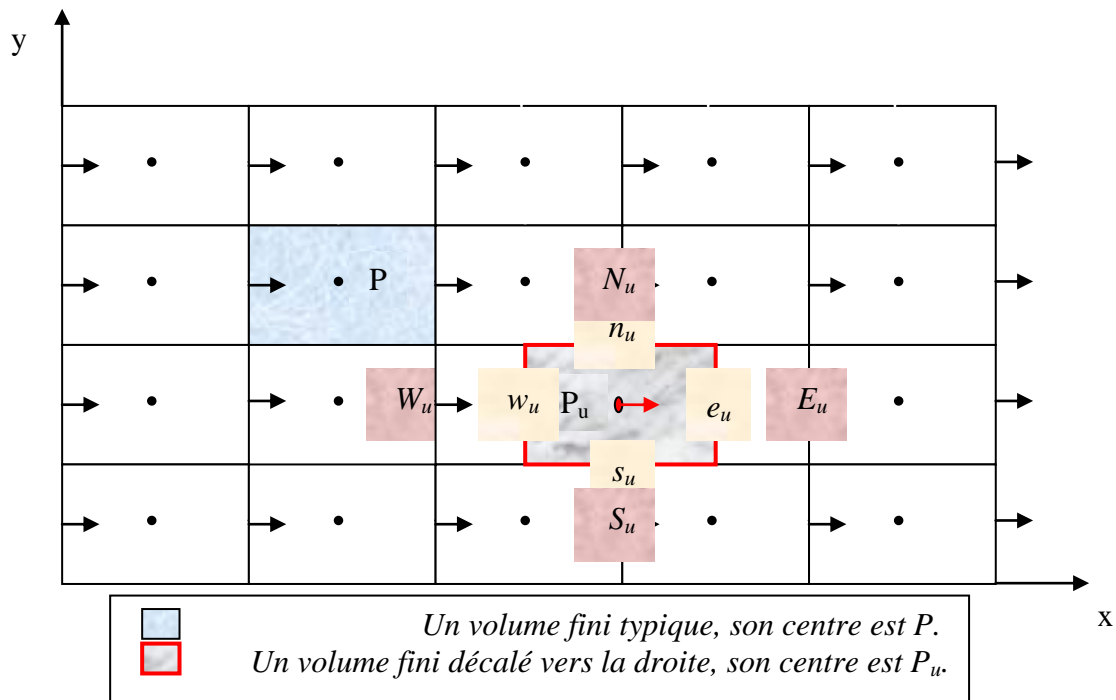


Figure 3.3 : Maillage décalé suivant x

Le volume fini de la vitesse horizontale U est décalé à droite du volume fini typique



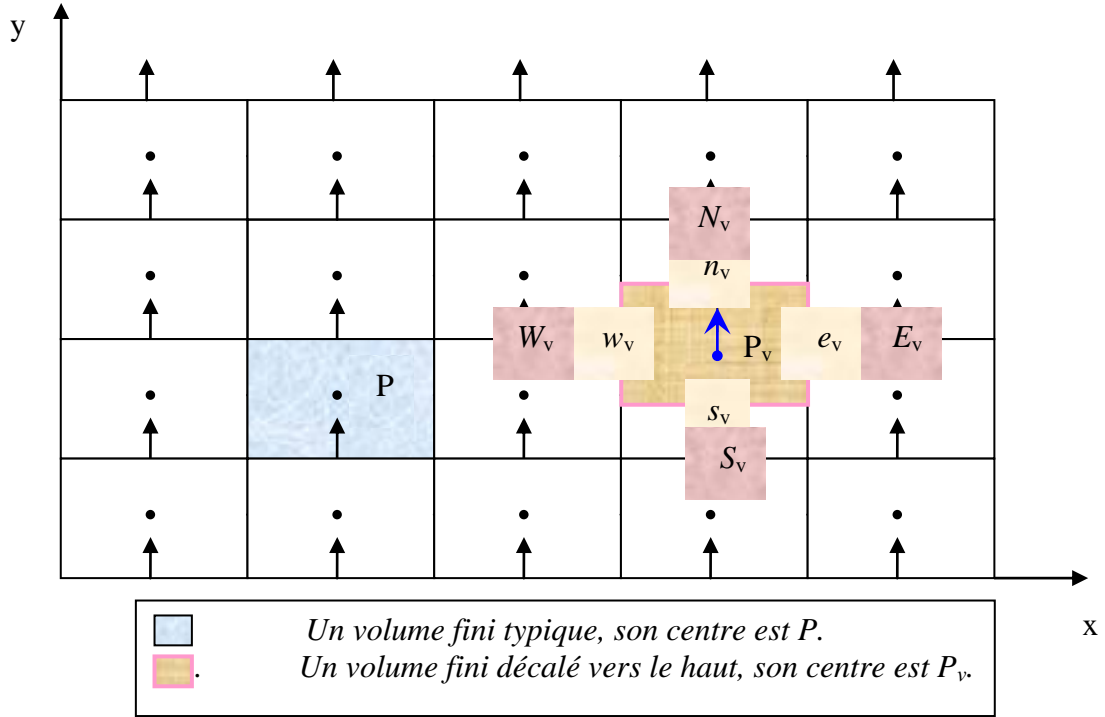


Figure 3.4 : Maillage décalé suivant y

Le volume fini de la vitesse verticale V est décalé en haut du volume fini typique

### 3.2. Discrétisation des équations

#### 3.2.1. Discrétisation temporelle en second ordre

Cette discrétisation concerne tous les termes de la variation temporelle dans toutes les équations, avec les exposants :

$t + \Delta t$  : Qui indique que le terme est évalué au temps  $t + \Delta t$ .

$t - \Delta t$  : Qui indique que le terme est évalué au temps  $t - \Delta t$ .

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable  $\Omega$  dépendante du temps :

$$\Omega^t = \Omega^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t^3} \Big|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.1)$$

Aussi,

$$\Omega^{t-\Delta t} = \Omega^{t+\Delta t} - \frac{(2 \Delta t)}{1!} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|^{t+\Delta t} + \frac{(2 \Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \Big|^{t+\Delta t} - \frac{(2 \Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t^3} \Big|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \quad (3.2)$$

Si l'équation (3.2) est diminuée de l'équation (3.1) multipliée par 4, on obtient :

$$3\Omega^t - \Omega^{t-\Delta t} = 3\Omega^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \Omega^{t+\Delta t}}{\partial t} + O(\Delta t)^2$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\Omega^{t+\Delta t} - 4\Omega^t + \Omega^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2$$

Et donc, une discrétisation de la variation temporelle locale, avec une erreur de troncature d'ordre deux,  $(\Delta t)^2$  est :

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} = \frac{3\Omega^{t+\Delta t} - 4\Omega^t + \Omega^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (3.3)$$

Cette discrétisation est appelée : **Second Order Euler Backward**.

### 3.2.2. Discrétisation des termes convectifs et non linéaires

Aussi, si on multiplie l'équation (3.1) par 2 et on retranche du produit l'équation (3.2), on obtient :

$$\Omega^{t+\Delta t} \approx 2\Omega^t - \Omega^{t-\Delta t} + O(\Delta t)^2$$

Et donc, une approximation temporelle, avec une erreur de troncature d'ordre deux, d'une variable  $\Omega^{t+\Delta t}$  est :

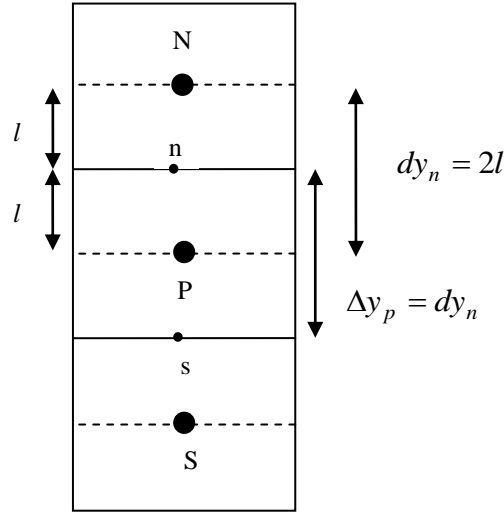
$$\Omega^{t+\Delta t} = 2\Omega^t - \Omega^{t-\Delta t} \quad (3.4)$$

Cette discrétisation est celle **d'Adam-Bashforth**.

### 3.2.3. Discrétisation spatiale en second ordre

Pour assurer une bonne représentation spatiale de la variable dépendante, on doit déterminer sa valeur aux interfaces des volumes finis. Pour cela, on a choisi le **schéma des différences centrées** pour la discrétisation des dérivées spatiales, et nous allons démontrer qu'il est d'ordre deux si le maillage est uniforme.

Soit  $\Omega_n$  la valeur de  $\Omega$  et  $\left. \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right|_n$  la valeur de sa dérivée première à l'interface  $n$  au milieu de la distance entre les points  $P$  et  $N$  (suivant l'axe  $y$ ). Cette distance est ci-après dénommée  $dy_n$  (voir la figure 3.5 dans ci-dessous).



**Figure 3.5 : L'interface  $n$  entre les points  $P$  et  $N$  dans le cas d'un maillage uniforme suivant  $y$ .**

Considérons les développements, en série de Taylor au premier ordre[59], suivant :

$$\Omega_P = \Omega_n - \frac{l}{1!} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_n + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Big|_n - \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} \Big|_n + \dots \quad (3.5)$$

$$\Omega_N = \Omega_n + \frac{l}{1!} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_n + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Big|_n + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} \Big|_n + \dots \quad (3.6)$$

En retranchant l'équation (3.5) de (3.6), on trouve :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_n = \frac{\Omega_N - \Omega_P}{dy_n} - \frac{l}{24} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} \Big|_n (dy_n)^2 + \dots$$

Et donc,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_n = \frac{\Omega_N - \Omega_P}{dy_n}, \text{ Avec une erreur de troncature d'ordre } (dy_n)^2 \quad (3.7)$$

Aussi, l'addition des équations (3.5) et (3.6) donne :

$$\Omega_n = \frac{\Omega_N + \Omega_P}{2} - \frac{l}{16} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Big|_n (dy_n)^2 + \dots$$

Et donc :

$$\Omega_n = \frac{\Omega_P + \Omega_N}{2}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dy_n)^2. \quad (3.8)$$

Dans ce qui suit, on utilise une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature d'ordre  $(\Delta t^2)$  et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta x)^2, (\Delta y)^2$ . Concernant la discrétisation temporelle, les dérivées temporelles seront discrétisées comme précisé dans l'équation (3.3); tous les termes advectifs, non linéaires et des poussées

thermiques seront approchés par la discrétisation *d'Adam-Bashforth* précisée dans l'équation (3.4); tous les gradients de pression et tous les termes diffusifs seront évalués, sans approximation, au temps  $(t + \Delta t)$ . Pour la discrétisation spatiale, le schéma des différences centrées sera utilisé.

### 3.2.4. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant x

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant  $x$  sont multipliés par  $dx dy$  et double intégrés entre les limites du volume fini décalé vers la droite. Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique.

$$A_P U_{P_u}^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + S_U \quad (3.9)$$

Avec:

$$A_E = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{\Delta y_p}{\Delta x_E}$$

$$A_W = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{\Delta y_p}{\Delta x_p}$$

$$A_N = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{dy_e}{dx_n}$$

$$A_S = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{\Delta x_e}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2} \frac{dx_e}{\Delta t} \frac{\Delta y_p}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
 S_U = & (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p + \left[ \frac{4U_{p_u}^t - U_{p_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] dx_e \Delta y_p \\
 & - \left[ 2 \left( U_{e_u}^t U_{e_u}^t - U_{w_u}^t U_{w_u}^t \right) - \left( U_{e_u}^{t-\Delta t} U_{e_u}^{t-\Delta t} - U_{w_u}^{t-\Delta t} U_{w_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_p \\
 & - \left[ 2 \left( V_{n_u}^t U_{n_u}^t - V_{s_u}^t U_{s_u}^t \right) - \left( V_{n_u}^{t-\Delta t} U_{n_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u}^{t-\Delta t} U_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] dx_e \\
 & + \left[ \frac{I}{I + \frac{(1-\Phi) \rho_f}{\Phi \rho_s}} \left( \frac{\beta_s}{\beta_f} \right) + \frac{I}{\frac{\Phi}{1-\Phi} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + I} \right] Gr.Pr^2 . \sin \varphi \left[ 2 \left( \frac{\theta_p^t + \theta_E^t}{2} \right) - \left( \frac{\theta_p^{t-\Delta t} + \theta_E^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] dx_e \Delta y_p
 \end{aligned}$$

On remarque que  $A_P, A_E, A_W, A_N$  et  $A_S$  sont toujours positifs et que  $A_P$  est supérieur à la somme des autres coefficients

### 3.2.5. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant y

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant y sont multipliés par  $dx dy$  et double intégrés entre les limites du volume fini décalé. Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + S_V \quad (3.10)$$

Avec:

$$A_E = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{dy_p}{dx_e}$$

$$A_W = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{dy_n}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{\Delta y_p}{\Delta y_n}$$

$$A_S = \frac{Pr}{(1-\Phi)^{2.5} \left( \Phi \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (1+\Phi) \right)} \frac{\Delta x_p}{\Delta y_p}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3 \Delta x_p dy_n}{2 \Delta t}$$

$$\begin{aligned}
 S_U = & (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta y_p + \left[ \frac{4V_{p_u}^t - V_{p_u}^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p \, dy_n \\
 & - \left[ 2 \left( U_{e_v}^t V_{e_v}^t - U_{w_v}^t V_{w_v}^t \right) - \left( U_{e_v}^{t-\Delta t} U_{e_v}^{t-\Delta t} - U_{w_v}^{t-\Delta t} U_{w_v}^{t-\Delta t} \right) \right] dy_n \\
 & - \left[ 2 \left( V_{n_u}^t V_{n_u}^t - V_{s_u}^t V_{s_u}^t \right) - \left( V_{n_u}^{t-\Delta t} V_{n_u}^{t-\Delta t} - V_{s_u}^{t-\Delta t} V_{s_u}^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p \\
 & + \left[ \frac{1}{1 + \frac{(1-\Phi) \rho_f}{\Phi \rho_s}} \left( \frac{\beta_s}{\beta_f} \right) + \frac{1}{\frac{\Phi}{1-\Phi} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + 1} \right] Gr.Pr^2 . \cos\phi \left[ 2 \left( \frac{\theta_p^t + \theta_N^t}{2} \right) - \left( \frac{\theta_p^{t-\Delta t} + \theta_N^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta x_p \, dy_n
 \end{aligned}$$

### 3.2.6. Discrétisation de l'équation de l'énergie

Tous les termes de l'équation de l'énergie sont multipliés par  $dx \, dy$  et double intégrés entre les limites d'un volume fini typique. Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + S_T \quad (3.11)$$

Avec:

$$A_E = \frac{(k_{nf}/k_f)}{(1-\Phi) + \Phi \left( \frac{\rho c_{ps}}{\rho c_{pf}} \right)} \frac{\Delta y_p}{dx_e}$$

$$A_W = \frac{(k_{nf}/k_f)}{(1-\Phi) + \Phi \left( \frac{\rho c_{ps}}{\rho c_{pf}} \right)} \frac{\Delta y_p}{dx_w}$$

$$A_N = \frac{(k_{nf}/k_f)}{(1-\Phi) + \Phi \left( \frac{\rho c_{ps}}{\rho c_{pf}} \right)} \frac{\Delta x_p}{dy_n}$$

$$A_S = \frac{(k_{nf}/k_f)}{(1-\Phi) + \Phi \left( \frac{\rho c_{ps}}{\rho c_{pf}} \right)} \frac{\Delta x_p}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3}{2} \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{\Delta t}$$

$$S_T = \left[ \frac{4\theta_p^t - \theta_p^{t-\Delta t}}{2 \Delta t} \right] \Delta x_p \Delta y_p \\ - \left[ 2 \left( U_e^t \theta_e^t - U_w^t \theta_w^t \right) - \left( U_e^{t-\Delta t} \theta_e^{t-\Delta t} - U_w^{t-\Delta t} \theta_w^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta y_p \\ - \left[ 2 \left( V_n^t \theta_n^t - V_s^t \theta_s^t \right) - \left( V_n^{t-\Delta t} \theta_n^{t-\Delta t} - V_s^{t-\Delta t} \theta_s^{t-\Delta t} \right) \right] \Delta x_p$$

On remarque que  $A_P, A_E, A_W, A_N$  et  $A_S$  sont toujours positifs et que  $A_P$  est supérieur à la somme des autres coefficients. Cependant, la source  $S_T$ , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, peut être positive, négative ou nulle; mais cela peut poser un problème si  $T_P^{t+\Delta t}$  ne peut être que positive ou nulle. Et donc il faut trouver une reformulation de l'équation de discrétisation pour que les valeurs de  $T_P^{t+\Delta t}$  ne soient que positives ou nulles, comme suit :

Notons que la source  $S_T$ , qui est positive, négative ou nulle, peut être écrite comme la différence de deux termes positifs ou nuls :

$$S_T = |S_T| - \max(-2S_T, 0),$$

$\max(-2S_T, 0)$  est le maximum des valeurs  $-2S_T$  et 0.

Notons que  $|S_T|$  est positive et donc elle est maintenue comme une source, alors que  $-\max(-2S_T, 0)$  est réécrit sous la forme :

$$-\max(-2S_T, 0) = - \left[ \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_P^{t+\Delta t}} \right] T_P^{t+\Delta t}$$

Ce terme est négatif et il est considéré comme un coefficient multiplié par  $T_P^{t+\Delta t}$ ; ce terme est donc ramené à gauche de l'équation de discrétisation qui devient :

$$\left[ A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_P^{t+\Delta t}} \right] T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Où

$$[A_P^*] T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Avec :

$$A_P^* = A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_P^{t+\Delta t}}$$

Notons qu'à droite de la nouvelle équation de discrétisation, la source est toujours positive ou nulle. Cependant à gauche de cette équation on a un problème :

Le coefficient  $A_P^*$  contient une inconnue qui est la variable calculée  $T_P^{t+\Delta t}$ , cette dernière peut être remplacée par l'approximation  $T_P^{t+\Delta t} = 2T_P^{t-\Delta t} - T_P^t$ , seulement la différence  $2T_P^t - T_P^t$  peut être négative pendant le calcul et donc peut causer un problème ! Pour éviter ce problème, on envisage une solution itérative de l'équation de discrétisation non linéaire :

$$\left[ A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_P^{t+\Delta t}} \right] T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Durant la première itération de la solution de cette équation, on considère sa forme linéarisée comme suit :

$$\left[ A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{T_P^t} \right] T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

C'est comme si  $T_P^t$  représente une initialisation pour  $T_P^{t+\Delta t}$ .

Durant les autres itérations, on considère la solution de l'équation :

$$\left[ A_P + \frac{\max(-2S_T, 0)}{(T_P^{t+\Delta t})^*} \right] T_P^{t+\Delta t} = A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + |S_T|$$

Où,  $(T_P^{t+\Delta t})^*$  est la valeur de  $T_P^{t+\Delta t}$  obtenue de l'itération précédente.

Et avec plusieurs itérations, on obtient la valeur de  $T_P^{t+\Delta t}$  qui satisfait l'équation non linéaire.

### 3.3. Résolution du système des équations de vitesse

Pour résoudre les systèmes d'équations de discrétisation de  $U_p^{t+\Delta t}$  et  $V_p^{t+\Delta t}$ , il est nécessaire de connaître les valeurs de la pression aux points du maillage typique, apparaissant dans les sources des équations de discrétisation citées. Et donc, il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention d'une telle équation est possible avec l'utilisation des équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

#### 3.3.1. Discrétisation de l'équation de continuité

$$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right]^{t+\Delta t} dx dy = [U_e^{t+\Delta t} - U_w^{t+\Delta t}] \Delta y_p + [V_n^{t+\Delta t} - V_s^{t+\Delta t}] \Delta x_p = 0 \quad (3.12)$$

Nous avons déjà obtenu l'équation de discrétisation de  $U_p^{t+\Delta t}$  (3.9) qui peut être réécrite sous la forme :

$$A_P U_p^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p \quad (3.13)$$

Avec :

$$S_U = B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$



Aussi, on remarque que la position  $P_u$  du maillage décalé est confondue avec la position  $e$  du maillage typique. Et donc, l'équation de discrétisation de  $U_{P_u}^{t+\Delta t} = U_e^{t+\Delta t}$  devient :

$$A_P U_e^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$U_e^{t+\Delta t} = \frac{A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U + (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \Delta y_p}{A_P}$$

$$U_e^{t+\Delta t} = \hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \quad (3.14)$$

Avec :

$$\hat{U}_e^{t+\Delta t} = \frac{A_E U_{E_u}^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{t+\Delta t} + B_U}{A_P}$$

Cette variable est appelée la *pseudo vitesse suivant la direction x*.

$$d_e = \frac{\Delta y_p}{A_P}$$

Si au point  $e$ , on a l'équation (3.14), Certainement au point  $w$ , on peut obtenir une équation similaire :

$$U_w^{t+\Delta t} = \hat{U}_w^{t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \quad (3.15)$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de  $V_{P_v}^{t+\Delta t}$  (3.10) qui est réécrite sous la forme :

$$A_P V_{P_v}^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p \quad (3.16)$$

Avec:  $S_V = B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$

Aussi on remarque que la position  $P_v$  du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position  $n$  du maillage typique. Et donc on peut écrire :

$$A_P V_n^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p$$

Qui peut être aussi écrite sous la forme :

$$V_n^{t+\Delta t} = \frac{A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V + (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \Delta x_p}{A_P}$$

$$V_n^{t+\Delta t} = \hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \quad (3.17)$$

Avec :

$$\hat{V}_n^{t+\Delta t} = \frac{A_E V_{E_v}^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{t+\Delta t} + B_V}{A_P}$$

Cette variable est appelée le *pseudo vitesse suivant la direction y*.

$$d_n = \frac{\Delta x_p}{A_P}$$

Si on a obtenu à la position  $n$  l'équation (3.17), on peut obtenir à la position  $s$ , l'équation :

$$V_s^{t+\Delta t} = \hat{V}_s^{t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \quad (3.18)$$

Maintenant, nous allons remplacer les quatre équations (3.14), (3.15), (3.17) et (3.18) dans l'équation de discrétisation de continuité (3.13) et on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{U}_e^{t+\Delta t} + d_e (p_P^{t+\Delta t} - p_E^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P - \left[ \hat{U}_w^{t+\Delta t} + d_w (p_W^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P \\ & \left[ \hat{V}_n^{t+\Delta t} + d_n (p_P^{t+\Delta t} - p_N^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P - \left[ \hat{V}_s^{t+\Delta t} + d_s (p_S^{t+\Delta t} - p_P^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.3.2. Discrétisation de l'équation de la pression

L'équation (3.19) est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de pression :

$$A_P p_P^{t+\Delta t} = A_E p_E^{t+\Delta t} + A_W p_W^{t+\Delta t} + A_N p_N^{t+\Delta t} + A_S p_S^{t+\Delta t} + S_p \quad (3.20)$$

Avec:

$$A_E = d_e \Delta y_P$$

$$A_W = d_w \Delta y_P$$

$$A_N = d_n \Delta x_P$$

$$A_S = d_s \Delta x_P$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_p = \left[ \hat{U}_w^{t+\Delta t} - \hat{U}_e^{t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[ \hat{V}_s^{t+\Delta t} - \hat{V}_n^{t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

A chaque point intérieur du maillage typique on a une équation algébrique de discrétisation de pression. La solution de l'ensemble des équations de discrétisation (des pressions des points) nous donne la pression aux points du maillage typique. Cependant, la solution de ce système nécessite la connaissance des pseudo-vitesses présentes dans les sources des équations citées. La source de chaque équation est fonction des pseudo-vitesses qui sont fonctions des vitesses. Et donc, on constate que pour résoudre les équations de discrétisation des vitesses il nous faut la pression (qui n'est pas connue) et pour résoudre l'équation de discrétisation de la pression il

nous faut les vitesses (qui ne sont pas connues). Ce couplage des équations de discrétisation des vitesses et de pression nécessite *une solution simultanée et itérative* de ces équations. Cette solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On défini les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$p = p^* + p'$$

Les variables étoilées sont les estimations et les variables primées sont les corrections.

Si on utilise ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses (3.13) et (3.16) on obtient les équations de discrétisation des estimations :

$$A_P U_{P_u}^{*t+\Delta t} = A_E U_{E_u}^{*t+\Delta t} + A_W U_{W_u}^{*t+\Delta t} + A_N U_{N_u}^{*t+\Delta t} + A_S U_{S_u}^{*t+\Delta t} + B_U + \left( p_{P'}^{*t+\Delta t} - p_{E'}^{*t+\Delta t} \right) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}^{*t+\Delta t} = A_E V_{E_v}^{*t+\Delta t} + A_W V_{W_v}^{*t+\Delta t} + A_N V_{N_v}^{*t+\Delta t} + A_S V_{S_v}^{*t+\Delta t} + B_V + \left( p_{P'}^{*t+\Delta t} - p_{N'}^{*t+\Delta t} \right) \Delta x_p$$

Ces équations montrent qu'avec une estimation de la pression on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont :

$$A_P U_{P_u}'^{t+\Delta t} = A_E U_{E_u}'^{t+\Delta t} + A_W U_{W_u}'^{t+\Delta t} + A_N U_{N_u}'^{t+\Delta t} + A_S U_{S_u}'^{t+\Delta t} + \left( p_{P'}'^{t+\Delta t} - p_{E'}'^{t+\Delta t} \right) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}'^{t+\Delta t} = A_E V_{E_v}'^{t+\Delta t} + A_W V_{W_v}'^{t+\Delta t} + A_N V_{N_v}'^{t+\Delta t} + A_S V_{S_v}'^{t+\Delta t} + \left( p_{P'}'^{t+\Delta t} - p_{N'}'^{t+\Delta t} \right) \Delta x_p$$

On constate que les corrections des vitesses à un point sont fonctions des corrections de la pression et des corrections des vitesses aux points voisins. Donc si on a la correction de la pression, on peut résoudre les deux systèmes d'équations de discrétisation des corrections des vitesses pour obtenir ces dernières.

Cependant on peut s'affranchir de la solution des deux systèmes cités si on redéfinit les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression :

$$A_P U_{P_u}'^{t+\Delta t} = \left( p_{P'}'^{t+\Delta t} - p_{E'}'^{t+\Delta t} \right) \Delta y_p$$

$$A_P V_{P_v}'^{t+\Delta t} = \left( p_{P'}'^{t+\Delta t} - p_{N'}'^{t+\Delta t} \right) \Delta x_p$$

Avec ces définitions, si on a la correction de la pression, on calcule directement les corrections des vitesses. Maintenant il est temps de discuter la détermination de la correction de la pression. On peut démontrer facilement que :

$$U_e^{t+\Delta t} = U_e^{*t+\Delta t} + U_e'^{t+\Delta t} = U_e^{*t+\Delta t} + d_e \left( p_{P'}'^{t+\Delta t} - p_{E'}'^{t+\Delta t} \right)$$

$$U_w^{t+\Delta t} = U_w^{*t+\Delta t} + U_w'^{t+\Delta t} = U_w^{*t+\Delta t} + d_w \left( p_{W'}'^{t+\Delta t} - p_{P'}'^{t+\Delta t} \right)$$

$$V_n^{t+\Delta t} = V_n^{*t+\Delta t} + V_n'^{t+\Delta t} = V_n^{*t+\Delta t} + d_n (p_P'^{t+\Delta t} - p_N'^{t+\Delta t})$$

$$V_s^{t+\Delta t} = V_s^{*t+\Delta t} + V_s'^{t+\Delta t} = V_s^{*t+\Delta t} + d_s (p_S'^{t+\Delta t} - p_P'^{t+\Delta t})$$

On utilise ces quatre définitions dans l'équation de discrétisation de continuité (3.12), et on obtient :

$$\left[ U_e^{*t+\Delta t} + d_e (p_P'^{t+\Delta t} - p_E'^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P - \left[ U_w^{*t+\Delta t} + d_w (p_W'^{t+\Delta t} - p_P'^{t+\Delta t}) \right] \Delta y_P$$

$$\left[ V_n^{*t+\Delta t} + d_n (p_P'^{t+\Delta t} - p_N'^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P - \left[ V_s^{*t+\Delta t} + d_s (p_S'^{t+\Delta t} - p_P'^{t+\Delta t}) \right] \Delta x_P = 0$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la correction de la pression :

$$A_P p_P'^{t+\Delta t} = A_E p_E'^{t+\Delta t} + A_W p_W'^{t+\Delta t} + A_N p_N'^{t+\Delta t} + A_S p_S'^{t+\Delta t} + S_{P'} \quad (3.21)$$

Avec:

$$A_E = d_e \Delta y_P$$

$$A_W = d_w \Delta y_P$$

$$A_N = d_n \Delta x_P$$

$$A_S = d_s \Delta x_P$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_{P'} = \left[ U_w^{*t+\Delta t} - U_e^{*t+\Delta t} \right] \Delta y_P + \left[ V_s^{*t+\Delta t} - V_n^{*t+\Delta t} \right] \Delta x_P = 0$$

Et donc l'équation de discrétisation de la correction de la pression est similaire à celle de la pression; la différence est que la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression contient les estimations des vitesses alors que la source de l'équation de discrétisation de la pression contient les pseudos vitesses.

### 3.3.3 Discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions de vitesse pour toutes les conditions thermiques, sont :

$$U=0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{pu}=1, A_{Nu} = A_{Su} = A_{Eu} = A_{Wu} = S = 0 \quad (3.22)$$

$$V=0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{pv}=1, A_{Nv}=A_{Sv}=A_{Ev}=A_{Wv}=S=0 \quad (3.23)$$

**Première condition pariétale thermique**

pour  $t = 0$ , on a :

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, S = 0 \quad (3.24)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$$\underline{\forall x, \text{ à } y = 0}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 1, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, S = 0 \quad (3.25)$$

$$\underline{\forall x, \text{ à } y = 1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 1, A_E = 0, A_W = 0, S = 0 \quad (3.26)$$

$$\underline{\forall y, \text{ à } x = 0}$$

$$\Theta = 1 + A \sin(2\pi t/t_p)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1; A_N = 0; A_S = 0; A_E = 0; A_W = 0; S = 1 + A \sin(2\pi t/t_p) \quad (3.27)$$

$$\underline{\forall y, \text{ à } x = 1}$$

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1; A_N = 0; A_S = 0; A_E = 0; A_W = 0; S = 0 \quad (3.28)$$

**Deuxième condition pariétale thermique**

Pour  $t = 0$ , on a :

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, S = 0 \quad (3.29)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$$\forall y, \text{ à } x = 0$$

$$\Theta = 1$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1, A_N=0, A_S=0, A_E=0, A_W=0, S=1 \quad (3.30)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 1$$

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1, A_N=0, A_S=0, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.31)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1, A_N=1, A_S=0, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.32)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1, A_N=0, A_S=1, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.33)$$

### **Troisième condition pariétale thermique**

Pour  $t = 0$ , on a :

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1, A_N=0, A_S=0, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.34)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$$\forall x, \text{ à } y = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 ; A_N=1 ; A_S=0 ; A_E=0 ; A_W=0 ; S=0 \quad (3.35)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 , A_N=0 , A_S=1 , A_E=0 , A_W=0 , S=0 \quad (3.36)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 0$$

$$\Theta = 1 + \sin(2\pi y)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 , A_N=0 , A_S=0 , A_E=0 , A_W=0 , S=1 + \sin(2\pi y) \quad (3.37)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 1$$

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 , A_N=0 , A_S=0 , A_E=0 , A_W=0 , S=0 \quad (3.38)$$

#### **Quatrième condition pariétale thermique**

Pour  $t = 0$ , on a :

$$\Theta = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 , A_N=0 , A_S=0 , A_E=0 , A_W=0 , S=0 \quad (3.39)$$

Pour  $t > 0$ , pour toutes les parois on a :

$$\forall x, \text{ à } y = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P=1 , A_N=1 , A_S=0 , A_E=0 , A_W=0 , S=0 \quad (3.40)$$

$$\forall x, \text{ à } y = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_p=1, A_N=0, A_s=1, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.41)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 0$$

$$\Theta = 1 + \cos(2\pi y)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_p=1, A_N=0, A_s=0, A_E=0, A_W=0, S=1+\cos(2\pi y) \quad (3.42)$$

$$\forall y, \text{ à } x = 1$$

$$\Theta=0$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_p=1, A_N=0, A_s=0, A_E=0, A_W=0, S=0 \quad (3.43)$$

### 3.4. Méthode de résolution

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques peuvent être classées en deux classes, directes (inversion d'une matrice, Gauss, Gauss Jordan avec Pivot, L.U. avec substitution) et indirectes ou itératives (Jacobi, Gauss-Seidel; méthode de Balayage). Bien sur, le plus souvent ce sont les méthodes itératives qui sont utilisées surtout pour les problèmes non linéaires, d'un autre côté, les méthodes directes exigent une mémoire énorme et un temps de calcul plus grand. Pour notre cas, nous utilisons une méthode de solution par balayage (*Sweeping*) dite ligne par ligne (L.B.L=line by line) expliquée par *S.V.Patankar*, avec l'algorithme de *Thomas* [59]

Après la résolution du système une autre fois par l'algorithme de *Thomas*, où on doit suivre le même raisonnement juste avec une permutation des indices  $i$  et  $j$ , où  $j$  est un relatif au point nodale considéré suivant la direction  $y$ . La dernière solution qu'on aura obtenue par ce dernier balayage (suivant  $y$ ) est la solution finale qui représente la solution obtenue après une itération des deux balayages (suivant  $x$  et suivant  $y$ ).

### 3.5. La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations discrétisées et déterminer la distribution des vitesses, de la pression et de la température en chaque point du domaine, et aussi déduire les nombres de *Nusselt*, on suit l'algorithme *SIMPLER* [59].

### 3.6. L'algorithme SIMPLER

L'algorithme *SIMPLE* est extensivement utilisé et bien servi dans les calculs d'écoulement des fluides. Cependant, dans les tentatives d'améliorer son taux de convergence, une nouvelle version a été établie et appelée l'algorithme *SIMPLER* qui est une version révisée de l'algorithme *SIMPLE* (*Patankar, 1979a*), (*Semi-Implicit-Method-Pressure-Linked-Equation-Revised*) [59]. L'utilisation de l'équation de la correction de pression seulement pour corriger les vitesses et la fourniture de quelques autres moyens afin d'obtenir un champ



amélioré de la pression, construit un algorithme plus efficace. C'est l'essence de l'algorithme *SIMPLER*.

L'ordre des opérations peut être énoncé comme suit :

- On commence par une initialisation du champ des vitesses  $U$ ,  $V$ ,  $P$  et  $T$  avec toutes les propriétés thermophysiques du problème ( $k$ ,  $\mu$ , et  $\alpha$ ).
- On calcule les coefficients des équations de moment de  $U$ ,  $V$  et avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo-vitesses :  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$ .
- On calcule les coefficients de l'équation de la pression et avec les pseudo-vitesses, on peut calculer la source de cette équation et résoudre (par la méthode itérative de balayage) son système pour obtenir une estimation de la pression :  $p^*$
- L'estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. Alors, ses systèmes sont résolus (par la méthode itérative de balayage) et on obtient les estimations des vitesses :  $U^*$  et  $V^*$ .
- On calcule d'abord la source de l'équation de la correction de la pression et avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) son système et obtenir une estimation de la correction de la pression :  $p'$
- Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses  $U'$  et  $V'$  et on corrige le champ de vitesse utilisant la correction de la pression avec la définition des variables correctes.
- On résout le système d'équations de discrétisation de la température (par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de température  $T$ .
- On vérifie l'atteinte du régime permanent (stationnaire) pour arrêter le calcul, sinon on augmente le temps de calcul (plus d'itérations) et avec le champ de vitesse corrigé comme une nouvelle initialisation, on retourne à l'étape 2, jusqu'à la convergence.

La convergence vers le régime permanent est vérifiée lorsque le bilan global de la chaleur soit satisfait, c'est-à-dire lorsque les différences de températures sont inférieures à un critère de convergence d'ordre  $10^{-5}$ .

### 3.7. Détails numériques :

Un code de calcul basé sur l'algorithme précédent en langage *Fortran* a été utilisé et réalisé sur un micro-portable personnel disposant d'un processeur *intel (R) Core 2 Due*, 3.4 GHz, 4G de RAM. Les essais numériques ont été effectués pour un maillage de (81x81) avec un pas de temps de  $2 \cdot 10^{-5}$ .

# **Résultats et discussions**

#### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons présenté nos résultats avec leurs discussions qui illustrent la convection naturelle dans une enceinte carréremplie d'un nanofluide (Cu-eau) où nous présentons la distribution de la température par des isothermes et la structure de l'écoulement par des lignes de courant. Le taux de transfert de chaleur au niveau des parois sera présenté par les nombres de Nusselt moyens.

Les paramètres de contrôle dans cette étude sont :

- Les conditions pariétales thermiques
- Le nombre de Grashof « Gr »
- La fraction volumique « $\Phi$ »

#### 4.2 Etude du maillage

Dans cette étude, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ( $\alpha=45^\circ$ , pour  $Gr=10^3$ ,  $Gr=10^4$ ,  $Gr=10^5$  et  $Gr=10^6$ ), pour voir leurs effets sur les résultats. Le tableau 4.1 montre donc, la variation du nombre de Nusselt moyen, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage (81x81) qui présente un bon compromis entre la précision et le temps de calcul.

**Tableau 4.1 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds pour  $\Phi=0.1$**

	nixnn	21x21	41x41	61x61	81x81	101x101
$Gr=10^3$	$Nu_{moy}$	2.35	2.32	2.33	2.33	2.34
$Gr=10^4$	$Nu_{moy}$	4.98	4.96	4.87	4.87	4.86
$Gr=10^5$	$Nu_{moy}$	10.20	9.28	9.09	9.04	9.02
$Gr=10^6$	$Nu_{moy}$	19.26	18.18	17.20	16.83	16.68

#### 4.3 Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature

Pour valider nos simulations numériques, une comparaison entre les résultats de la présente étude et ceux trouvés dans la littérature a été faite. **Khanafer et al [5]** considèrent une enceinte carrée. Les deux parois verticales sont chauffées différemment tandis que les parois horizontales sont isolées. Nous avons appliqué notre code de calcul à ce cas, puis nous avons comparé nos résultats avec les leurs. La comparaison concerne le nombre Nusselt moyen sur la paroi chauffée (Figure 4.1) et les profils des vitesses au milieu de la paroi dans les directions  $X=0.5$  et  $Y=0.5$  (Figure 4.2 et 4.3). Une autre comparaison entre les résultats de la présente étude et l'étude expérimentale de **Krane et Jessee [58]** et l'étude de la simulation numérique de **Khanafer [5]** et **al** et celle d'**Abu-Nada et Oztog [17]**, la comparaison concerne les profils de température (Figure 4.4). Nous remarquons un bon accord entre nos résultats et ceux de la littérature (références [5], [58] et [17]).

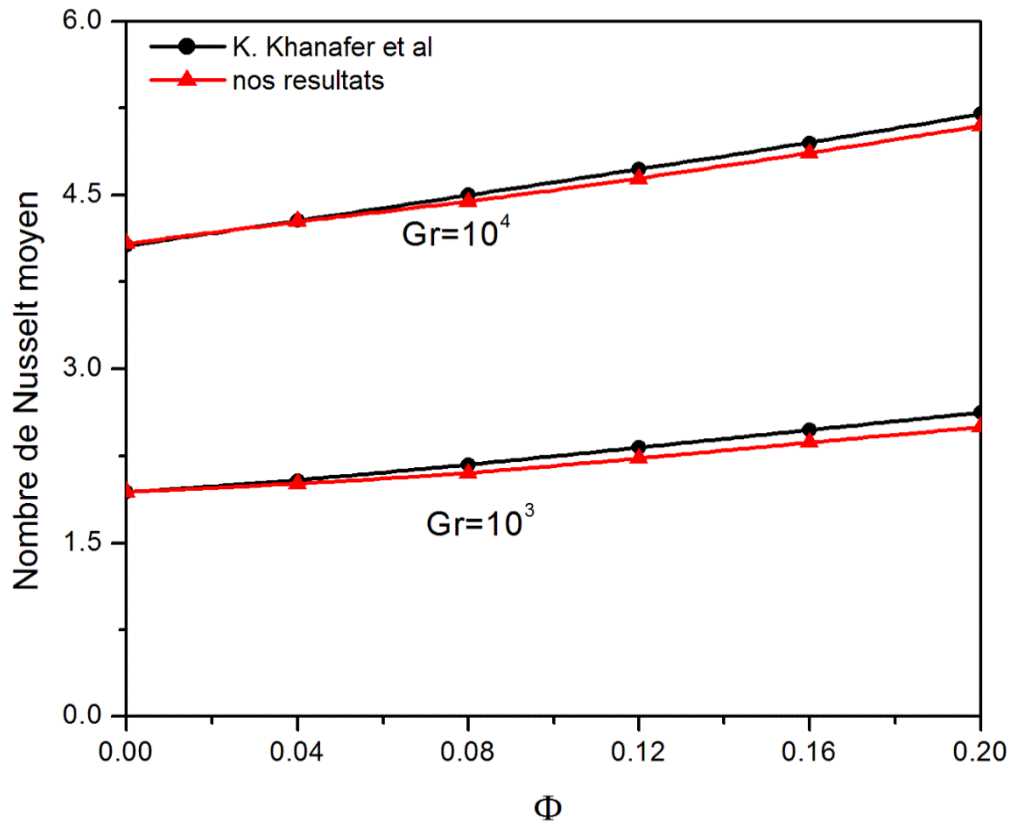


Figure 4.1: Comparaison de nombre du Nusselt entre Khanafer et al. [5] et nos résultats

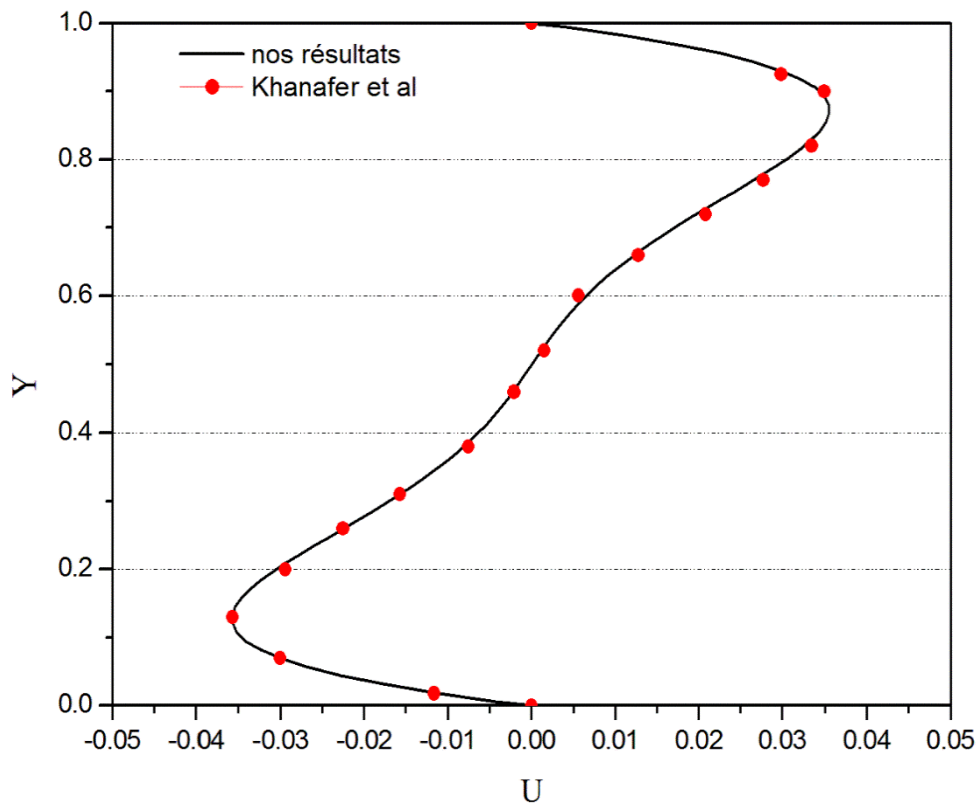


Figure 4.2 : Comparaison des profils de vitesses  $U$  à demi-section de l'enceinte entre Khanafer et al. [5] et nos résultats ( $Gr=10^5$ ,  $\Phi=0.05$ )

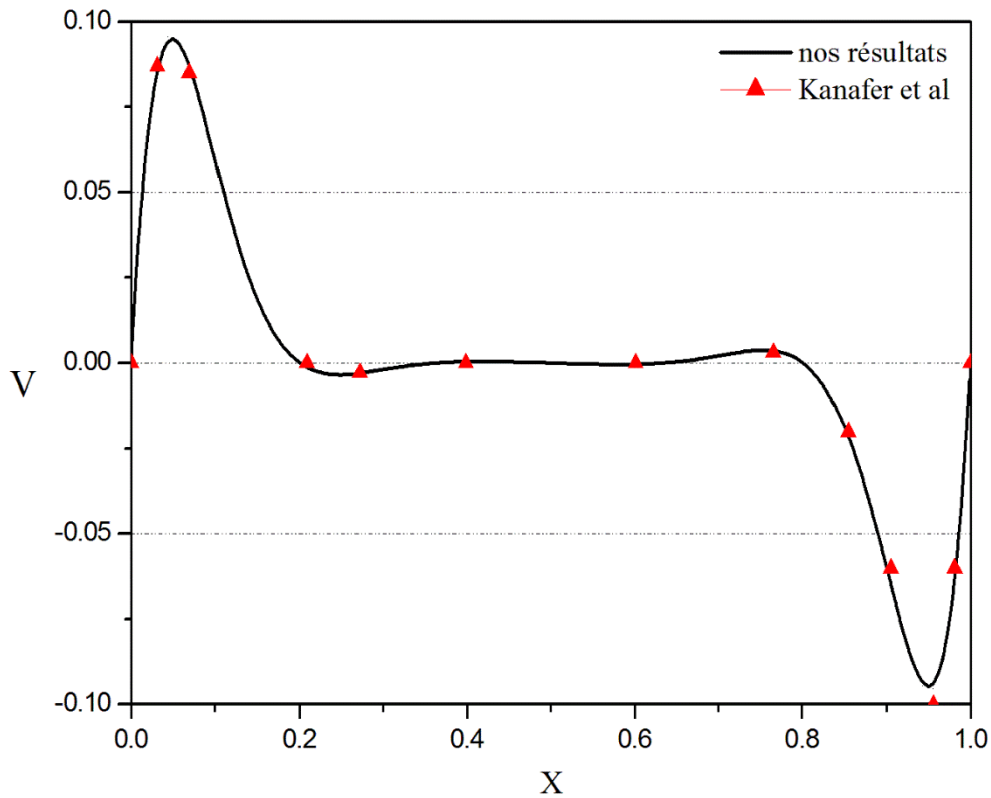


Figure 4.3 : Comparaison des profils de vitesse  $V$  à demi-section de l'enceinte entre Kanafer et al. [5] et nos résultats ( $Gr=10^5$ ,  $\Phi=0.05$ )

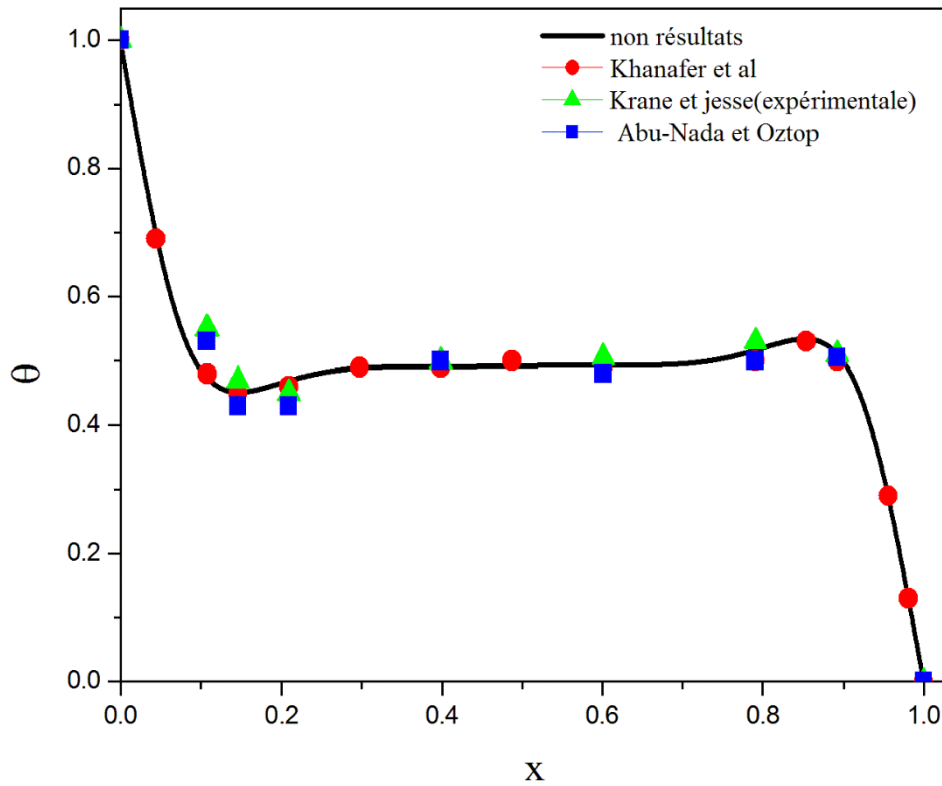


Figure 4.4: Comparaison des profils de température à la demi-section de l'enceinte entre nos résultats et d'autres résultats de la littérature (références [5], [58] et [17]) ( $Gr=10^5$ ,  $\Phi=0.05$ )

#### **4.4. Première condition pariétale thermique :**

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux effets de la fraction volumique ( $\Phi$ ) et de l'amplitude adimensionnelle ( $A$ ) sur le transfert de chaleur par convection. Le nombre de Prandtl et la période adimensionnelle de température oscillante étant maintenus constants :  $Pr=6.2$  et  $t_p=0.1$ . Sur la base des conditions données ci-dessus, des résultats numériques sont obtenus pour  $\Phi=0, 0.05, 0.1$  et  $0.2$ . L'amplitude adimensionnelle ( $A$ ) varie entre 0 et 1.

##### **4.4.1 Isothermes et lignes de courant :**

Les figures (4.5-4.8) représentent les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Grashof.

Comme mentionnées sur ces figures  $|\psi_{\min}|$  augmente à chaque fois qu'on ajoute des nanoparticules ( $\Phi=0.1$ ) au fluide de base ( $\Phi=0$ ) et qu'elle est toujours maximale à  $t=1.02$  dans le 1<sup>er</sup> quart de période pour les différents cas considérés.

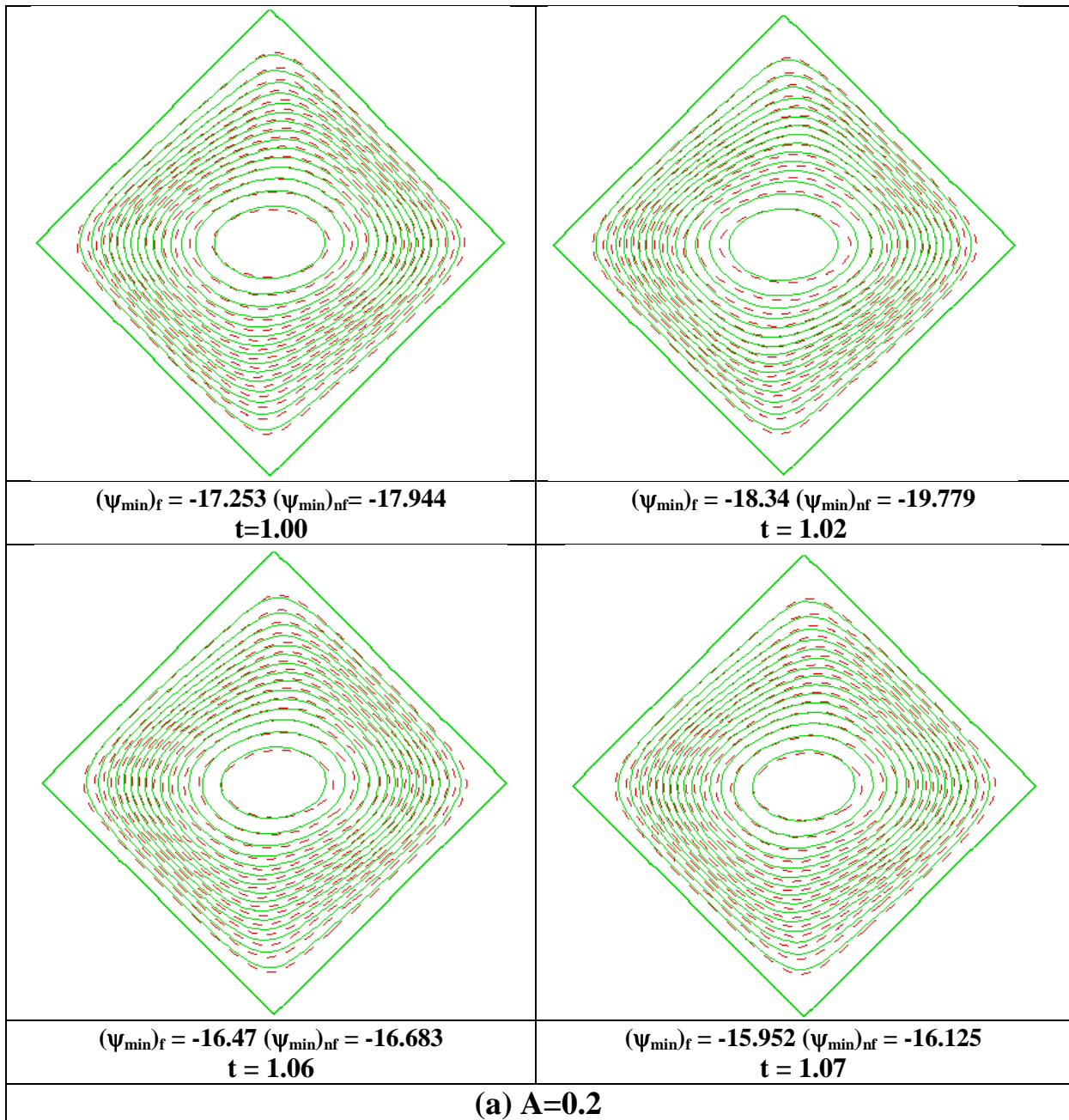
La figure 4.5 montre les lignes de courant sur la durée ( $t=1.0-1.1$ ) pour  $\Phi=0$  et  $\Phi=0.1$  avec différentes valeurs de ( $A$ ), la structure de l'écoulement est caractérisée par la présence d'une seule cellule occupant toute la cavité et les valeurs absolues de la fonction de courant qui y figurent sont petites.

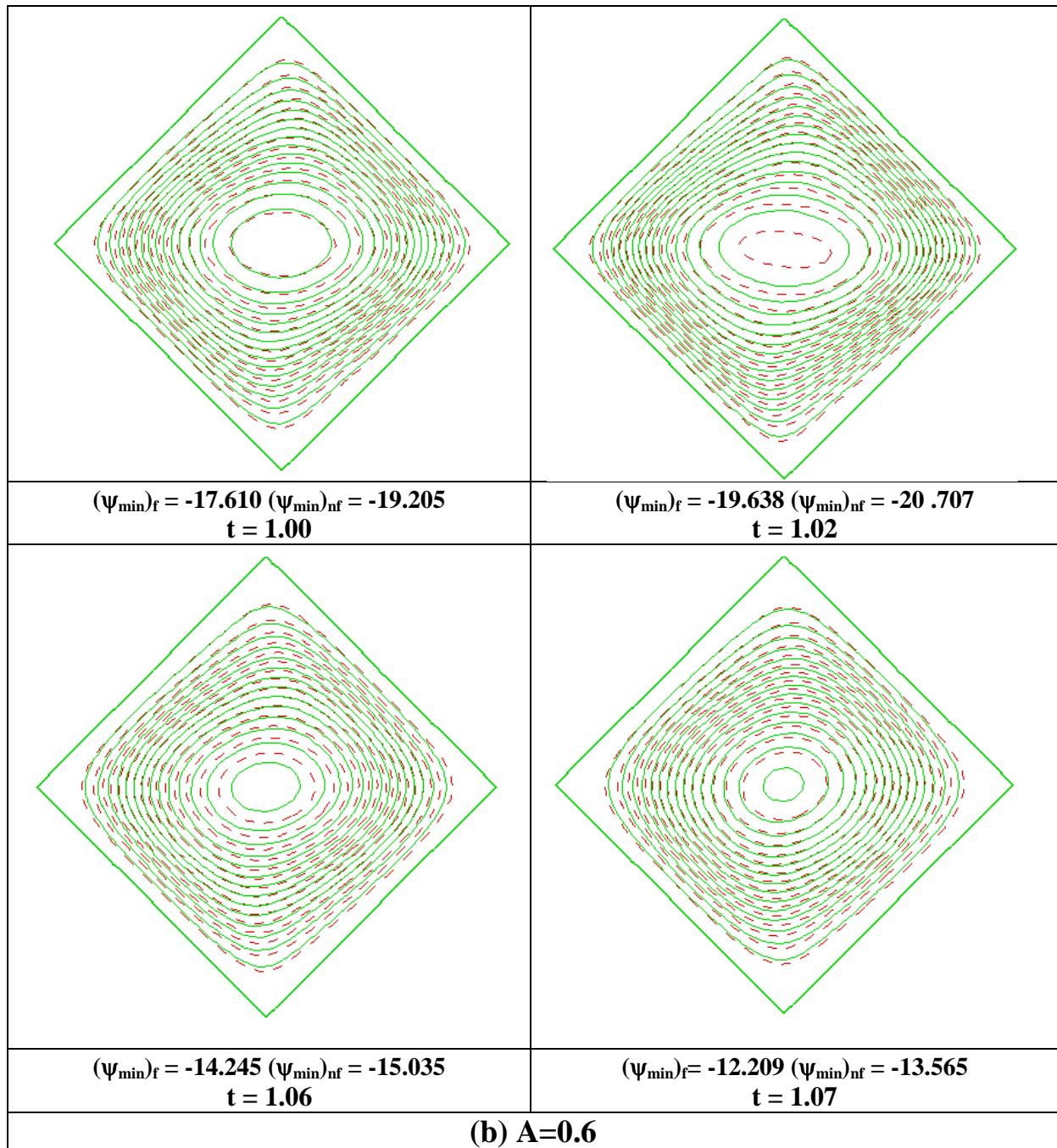
Pour  $Gr=10^4$  les lignes isothermes de la figure (4.6) sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois actives où elles sont serrées à l'opposé du milieu de l'enceinte où elles sont espacées, dans ce cas-là nous sommes en présence d'une convection naissante  $13.695 \leq |\psi_{\min}| \leq 28.903$ , ceci pour les différentes valeurs considérées de l'amplitude adimensionnelle ( $A$ ), sauf pour  $A=1$  dans le 3<sup>ème</sup> quart de période et plus précisément pour  $t=1.07$ , où elles deviennent plus espacées entre elles, dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude excitée périodiquement dans le temps vers la paroi froide isotherme, on peut dire ici, que le transfert thermique se fait par pseudo-conduction au niveau de ces parois actives.

Pour  $Gr=10^6$ , la figure 4.7 illustre les lignes de courant dépendant du temps sur la durée ( $t=1.0-1.1$ ) pour le nanofluide cuivre-eau et l'eau pure avec différentes valeurs de ( $A$ ), pour  $\Phi=0$  et  $\Phi=0.1$ . On peut voir clairement sur ces figures que les lignes de courant se déforment vers le centre de l'enceinte à partir du bas de la paroi chaude excitée périodiquement et du haut de la paroi froide isotherme, l'écoulement est caractérisé ici par l'apparition de deux nouvelles cellules de recirculation sauf pour le cas  $A=1$  pour  $t=1.02$  où il y a quatre cellules de recirculation et où on obtient la plus grande valeur absolue de la fonction de courant  $|\psi_{\min}|=98.85$ , ce qui dénote d'un écoulement très intense pour ce cas-là.

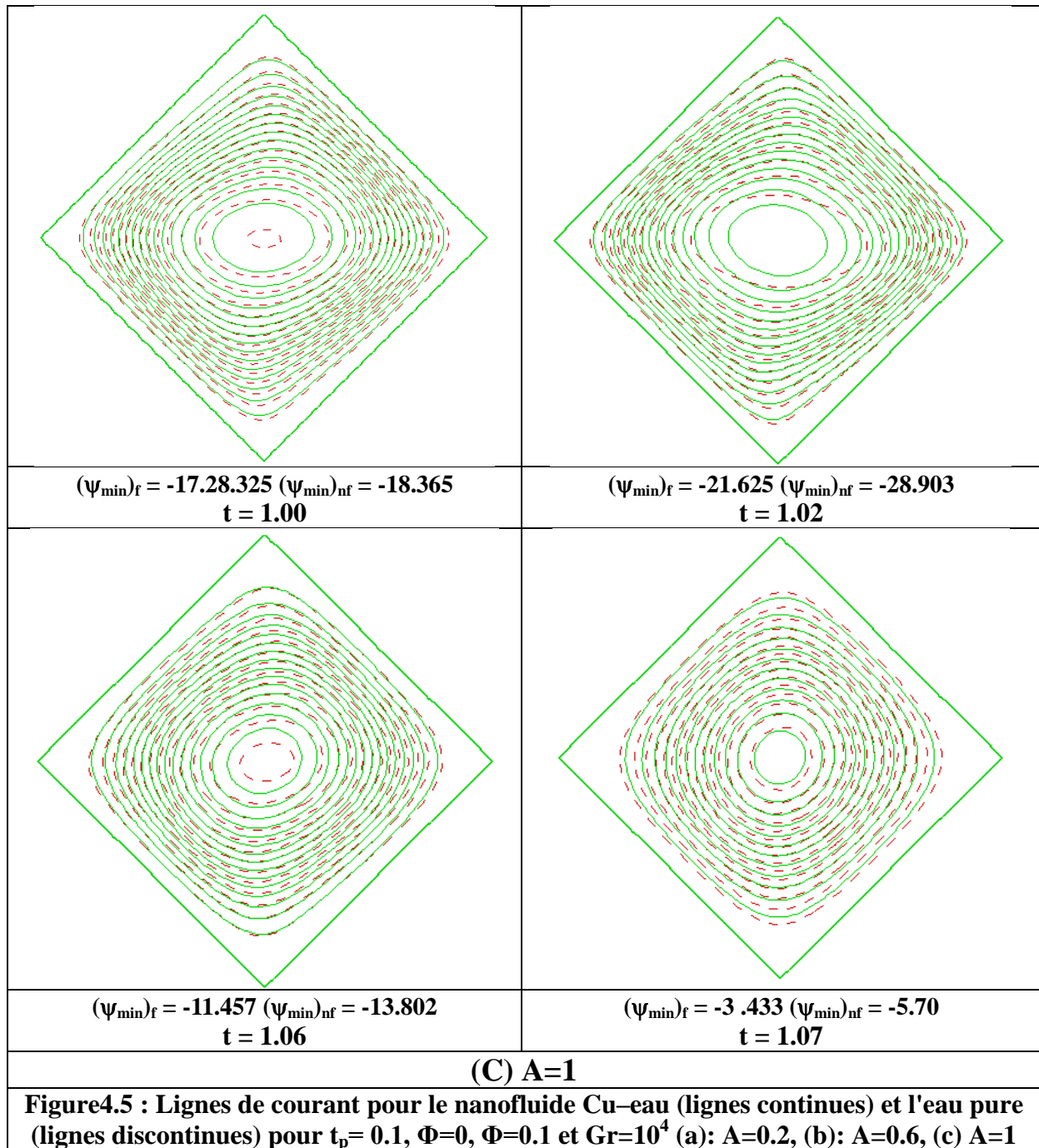
La figure 4.8 représente les lignes isothermes sur la durée ( $t=1.0-1.1$ ) pour le nanofluide cuivre-eau et l'eau pure avec différents ( $A$ ) et pour  $\Phi=0$  et  $0.1$ . Ces lignes sont des courbes presque parallèles et épousent assez bien les profils des parois actives où elles sont serrées, ceci pour les différentes valeurs considérées de l'amplitude adimensionnelle ( $A$ ), sauf pour le cas  $A=1$  dans le 1<sup>er</sup> quart de période pour  $t=1.02$ , où elles sont très serrées entre elles, ce qui est en parfait accord avec la distribution des lignes de courant de la figure 4.7 pour ce même cas où on a trouvé la plus grande valeur absolue de la fonction de courant en l'occurrence

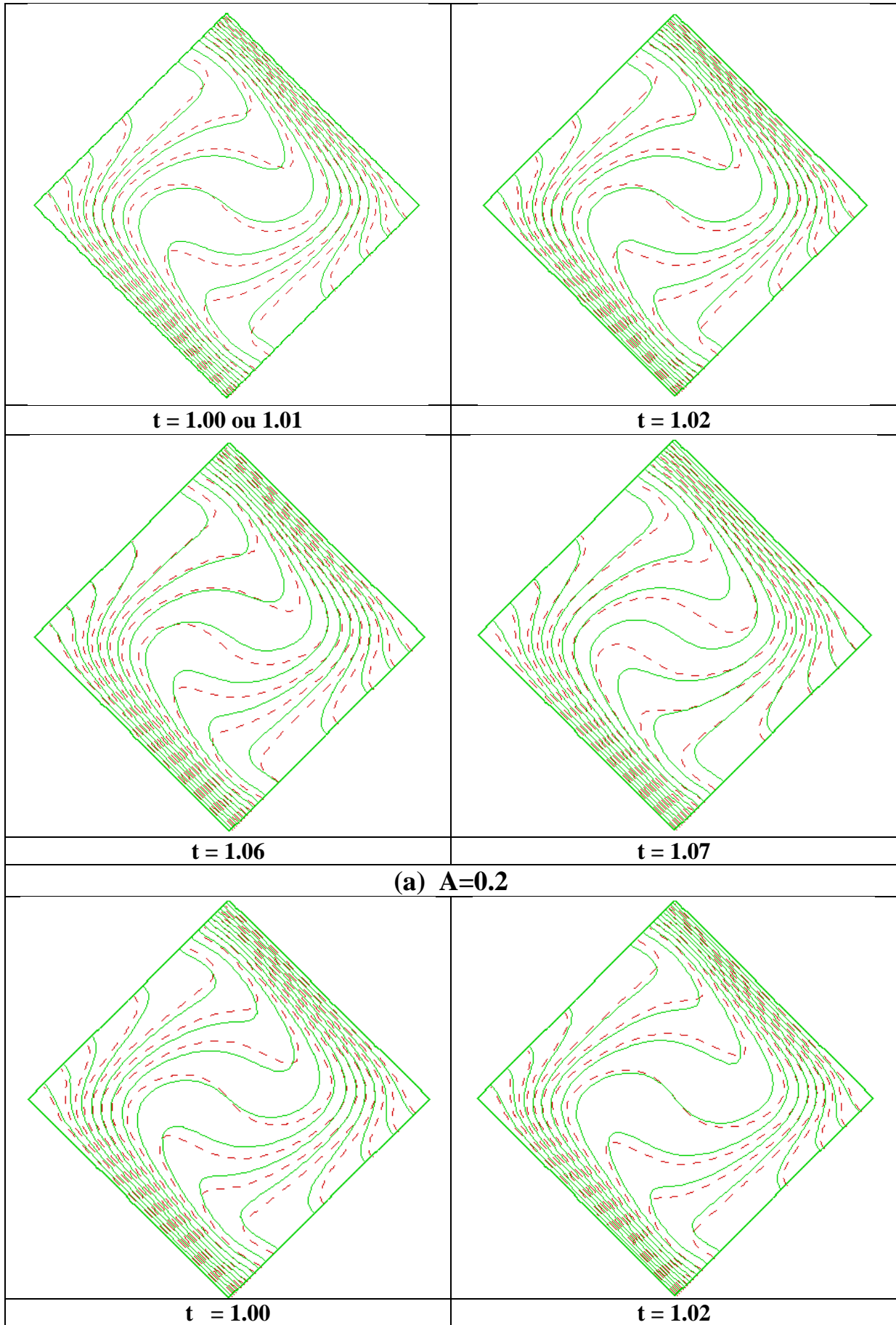
$|\psi_{\min}| = 98.85$ , on peut dire ici, qu'on obtient le meilleur taux de transfert chaleur pour ce cas précis, ce qui va être confirmé plus loin sur la figure 4.10, illustrant le taux de transfert de chaleur au niveau de la paroi chaude excité périodiquement dans le temps.

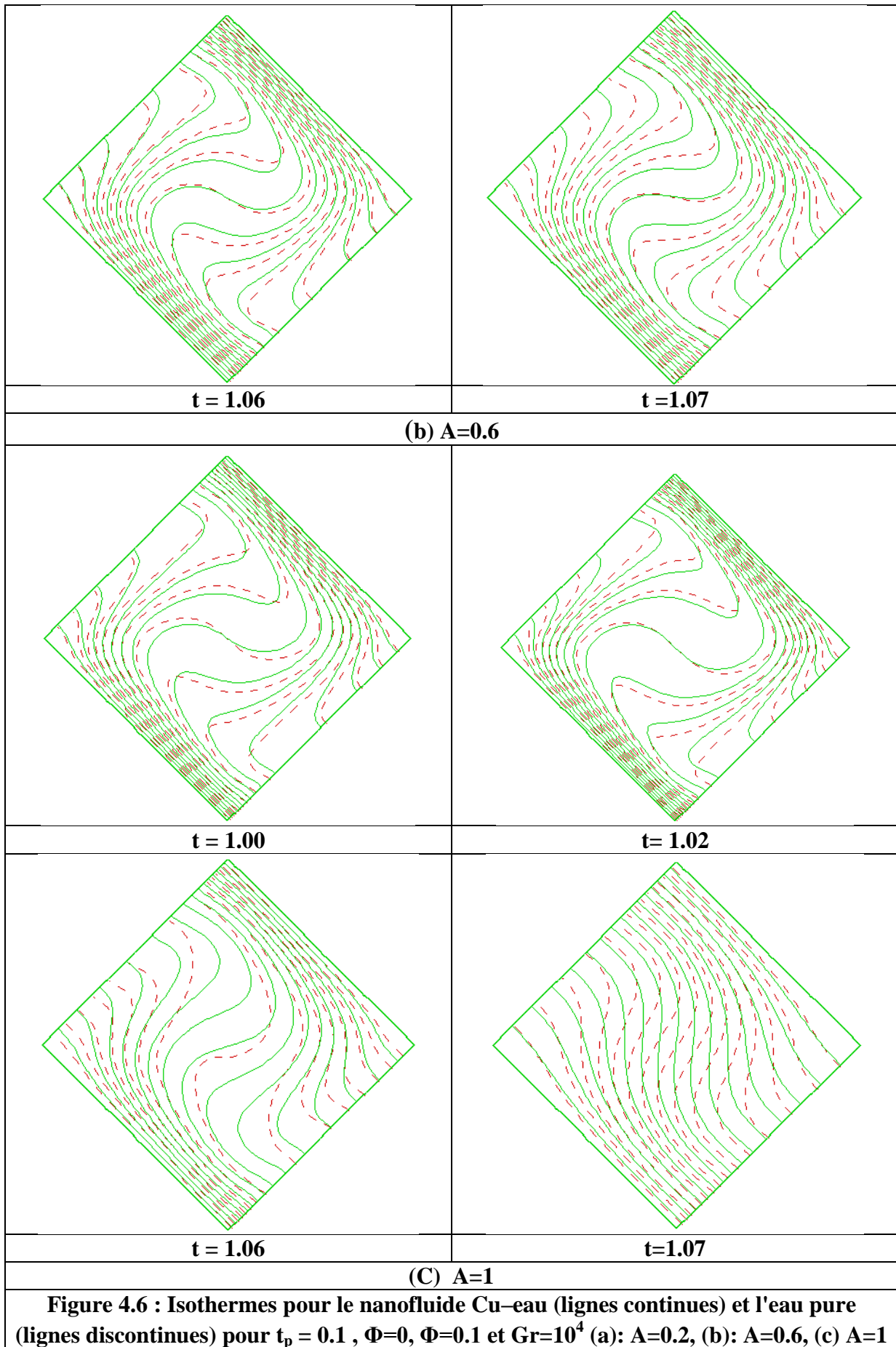


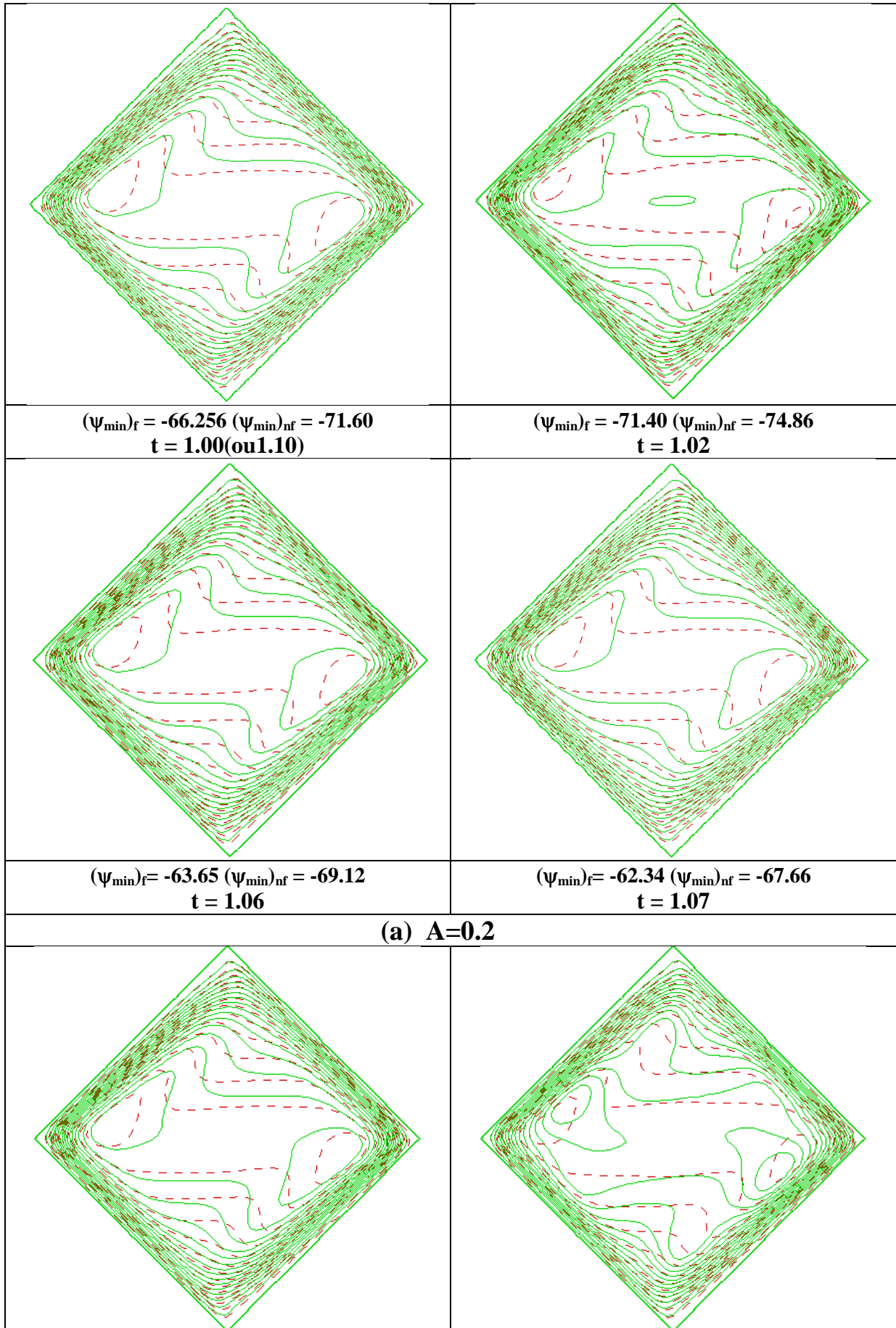


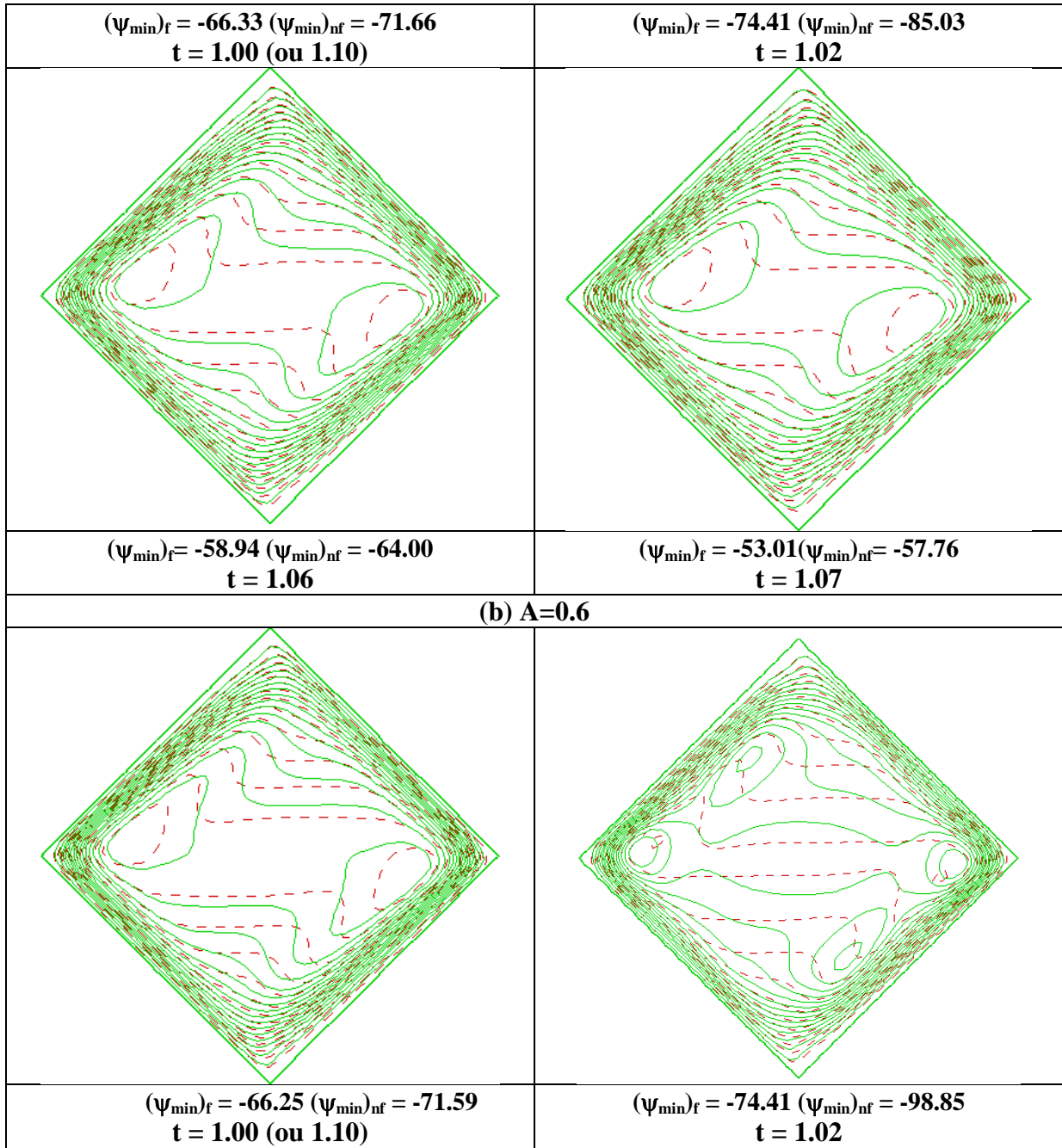


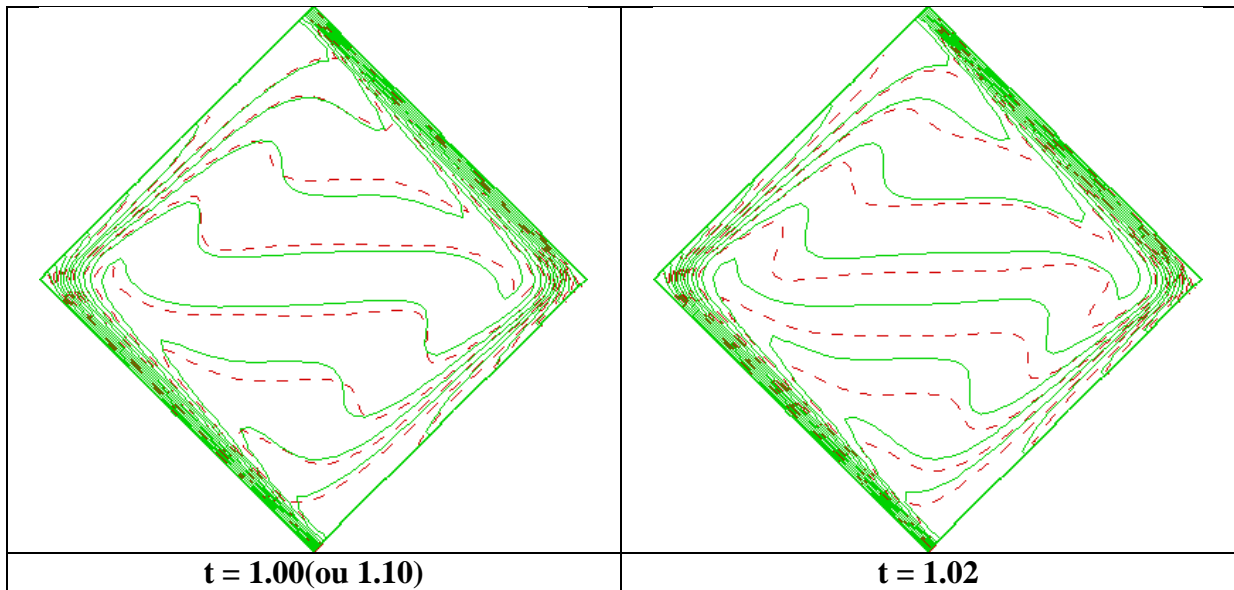
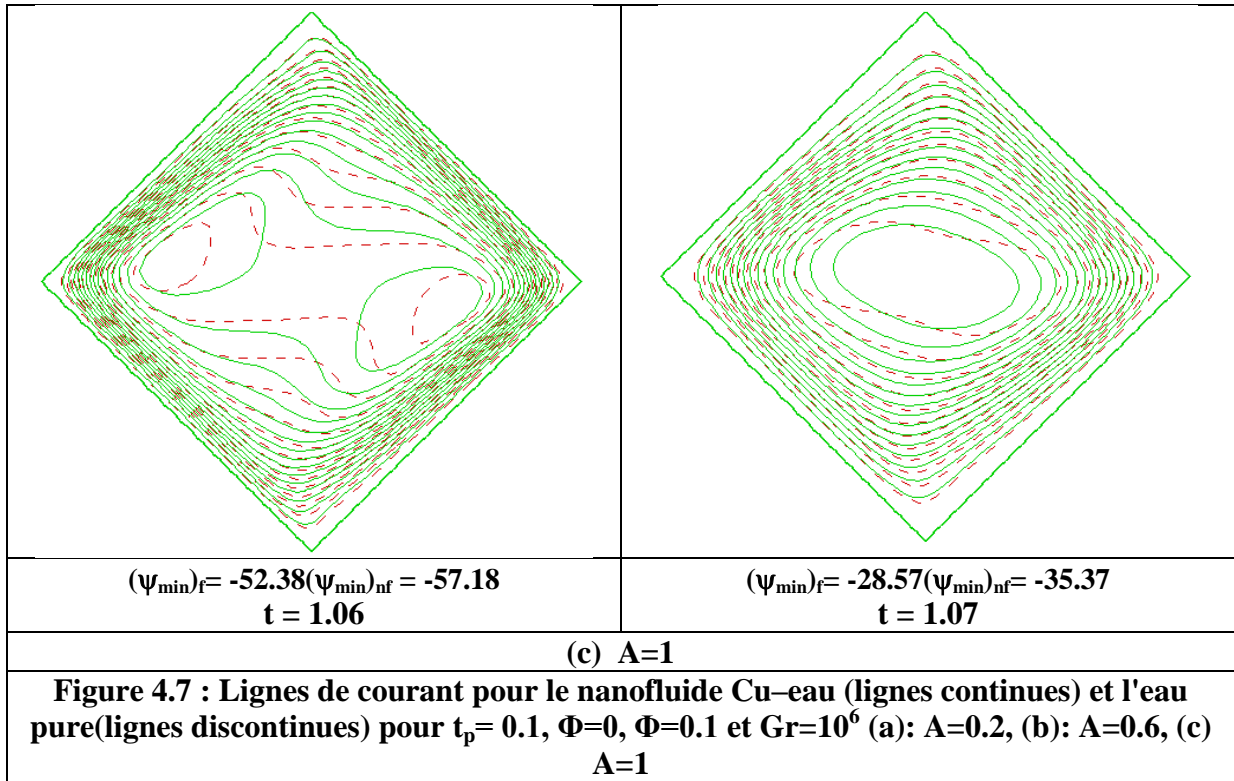


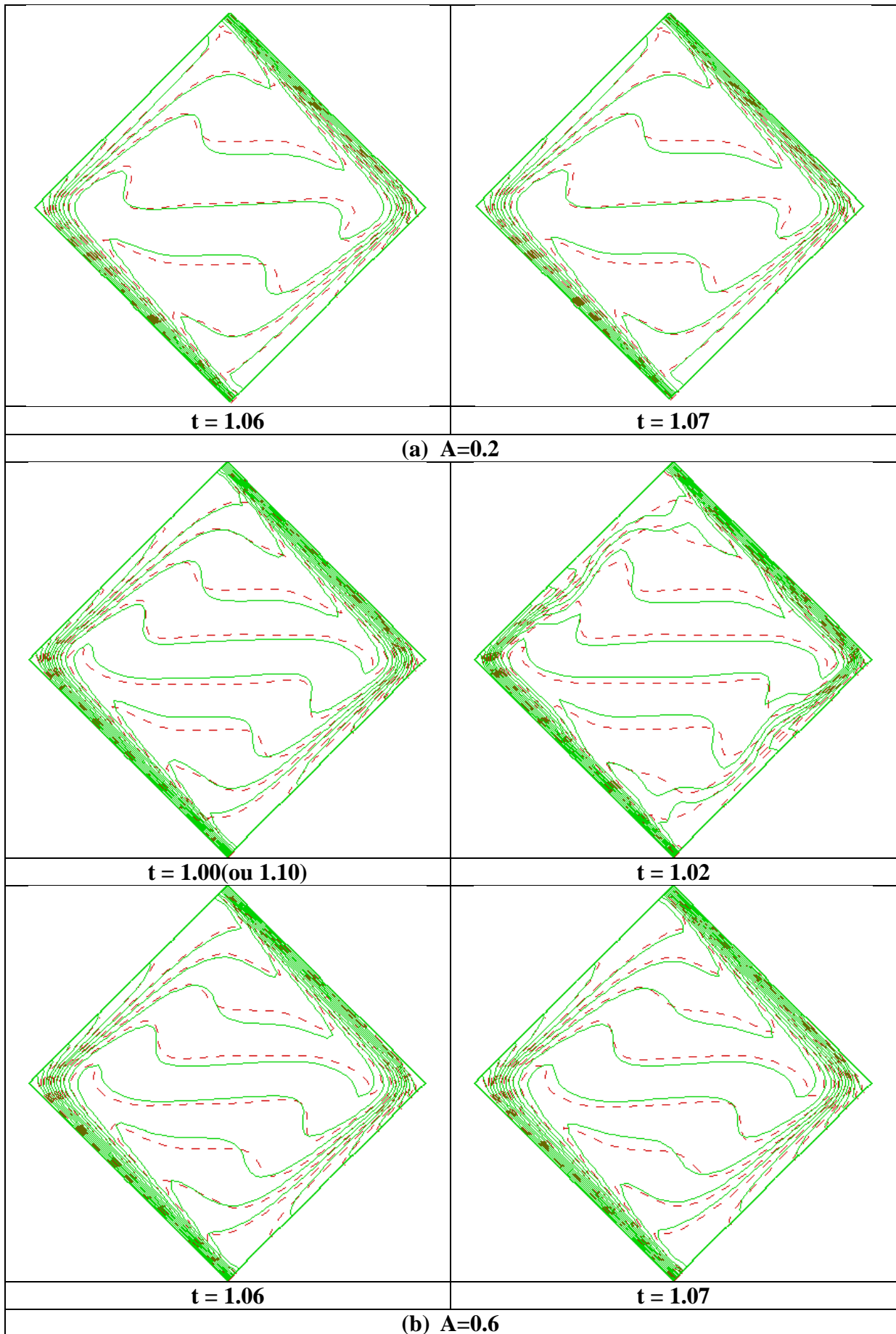


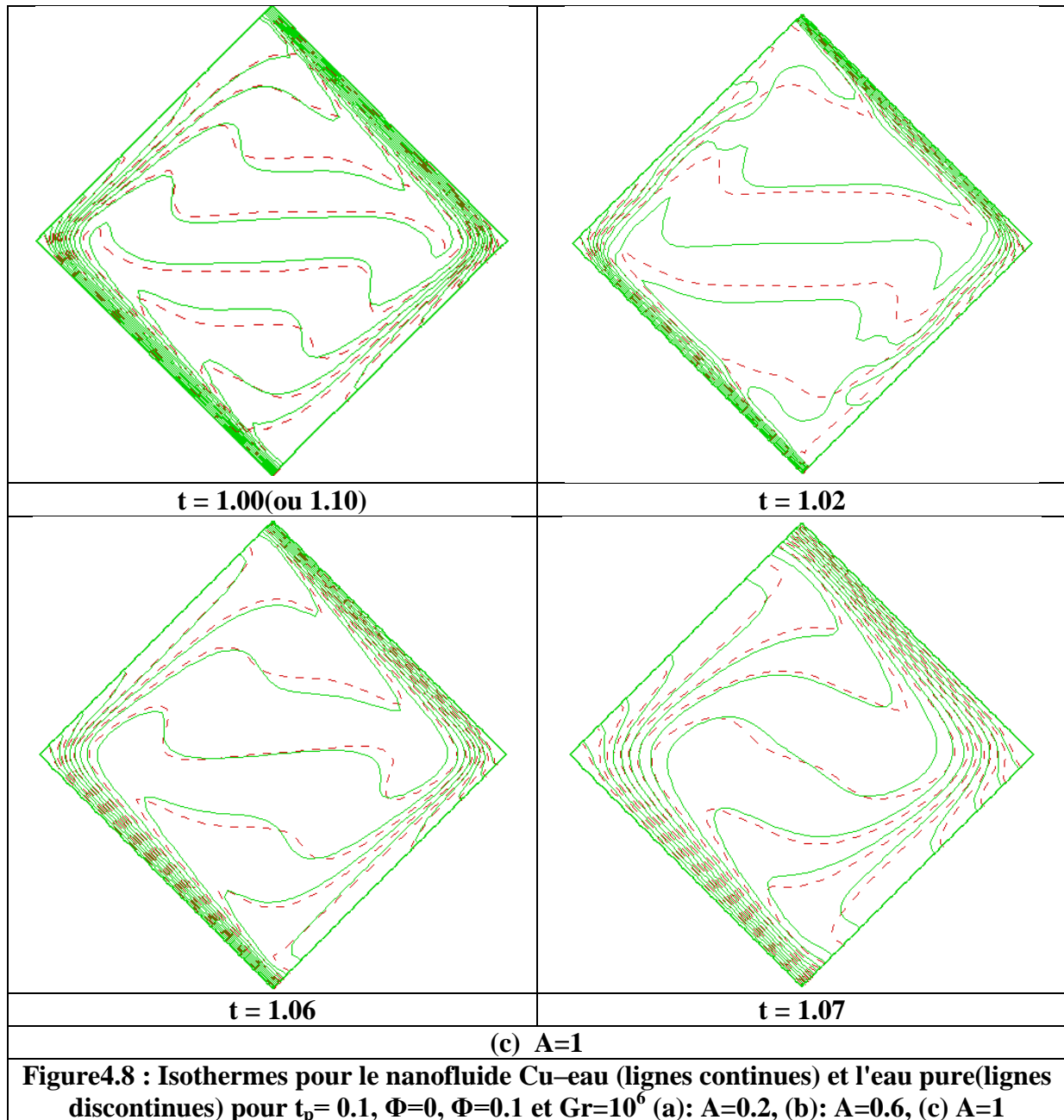












#### 4.4.2 Nombre de Nusselt moyen

La figure 4.9 montre les réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\Phi$ . On voit clairement que ces courbes sont similaires aux ondes de température limites oscillantes originales. Cela montre que le nombre de Nusselt moyen est directement affecté par les ondes oscillantes. Ces courbes indiquent que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la fraction volumique  $\Phi$ .

La figure 4.10 montre les réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen pour l'amplitude adimensionnelle ( $A$ ). Le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de  $A$ .



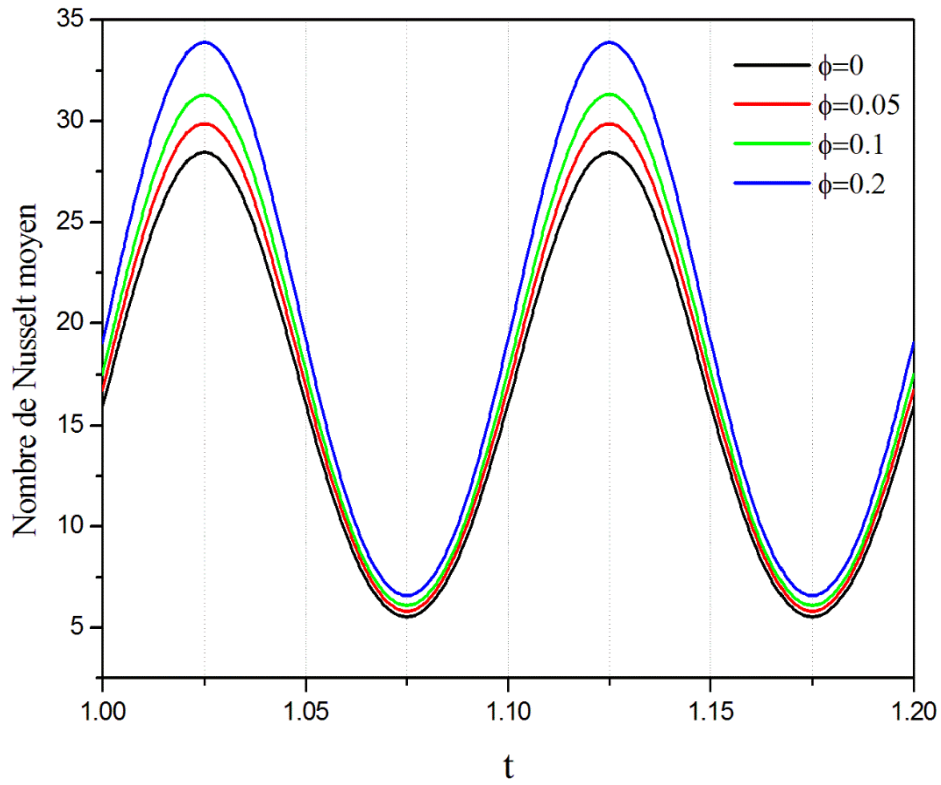


Figure4.9 : Réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de  $\Phi$  ( $Gr=10^6$ ,  $A=0.6$ )

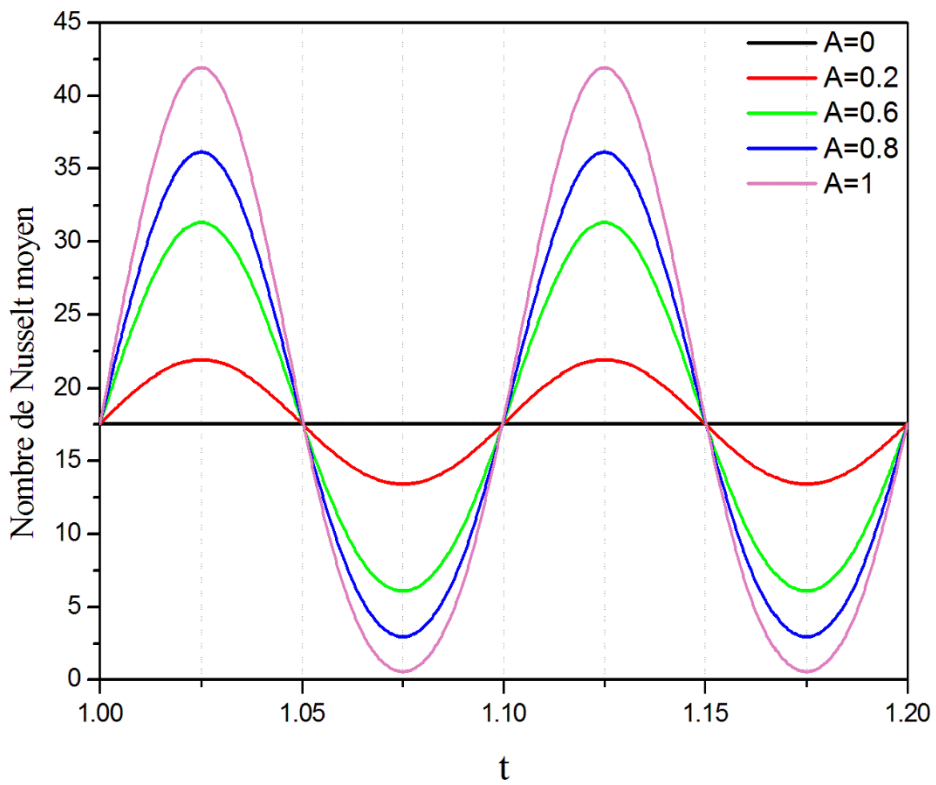
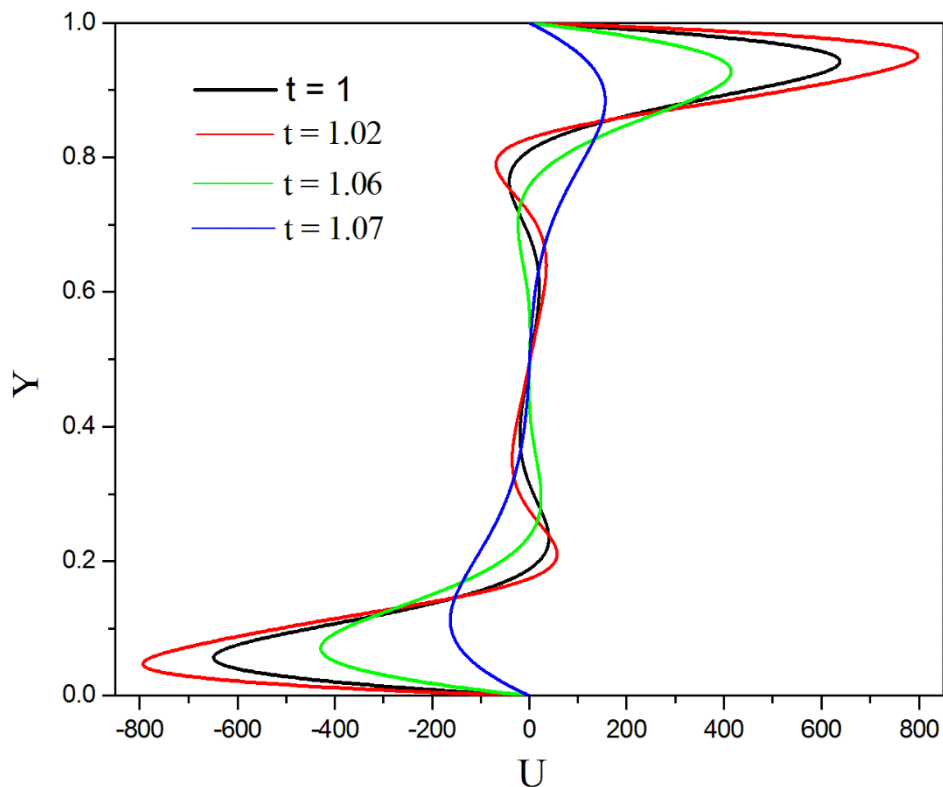


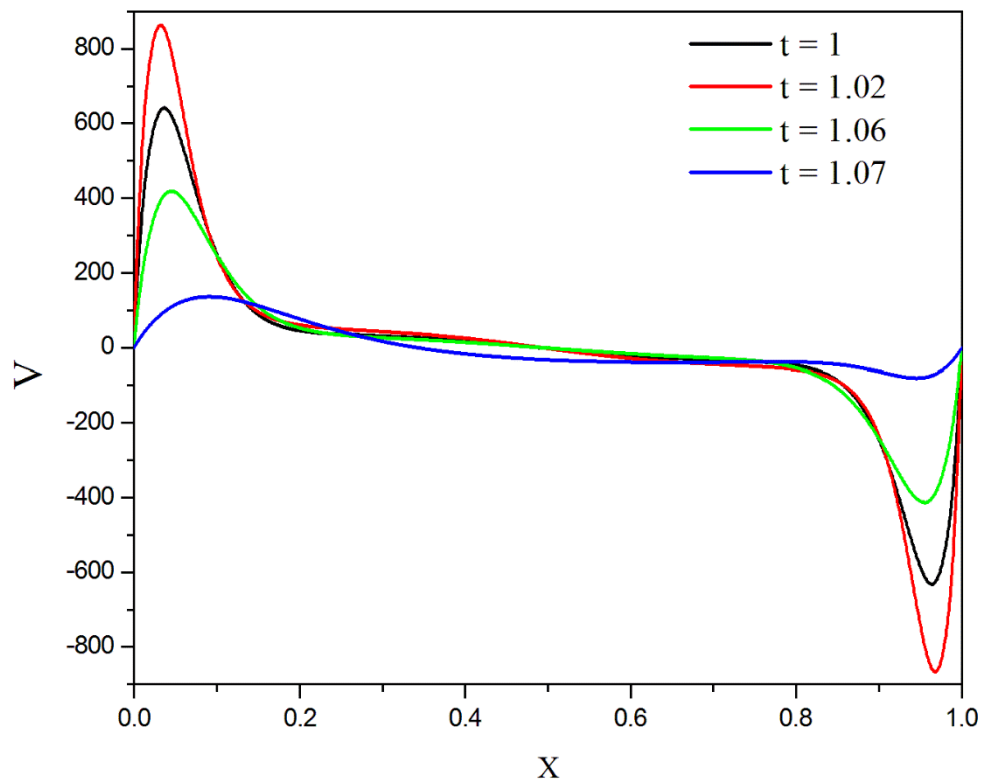
Figure4.10 : Réponses transitoires du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs de  $A$  ( $Gr=10^6$ ,  $\Phi=0.1$ )

#### 4.4.3 Variation du profil de la composante U et V de la vitesse :

Les figures(4.11.a) et (4.11.b) illustrent les variations périodiques, qui montrent la variation dépendante du temps des composantes U et V de la vitesse, respectivement le long de lademi-section  $X=0.5$ , ou  $Y=0.5$  de la cavité,pour  $Gr=10^6$  et  $A=1$ . Des pics élevés de la composante U et V de la vitesse apparaissent à  $t=1.02$ , ce qui est en parfait accord avec la distribution des lignes de courant de la figure 4.7, pour ce même cas, où on a trouvé la plus grande valeur absolue de la fonction de courant, en l'occurrence  $|\psi_{\min}|=98.85$ .



**Figure 4.11.a: Variation des profils de la vitesse U en fonction du temps pour  $X=0.5$ ,  $A=1$  et  $Gr=10^6$**



**Fig.4.11.b: Variation des profils de la vitesse  $V$  en fonction du temps pour  $Y=0.5$ ,  $A=1$  et  $Gr=10^6$**

#### **4.5 Deuxième condition pariétale thermique :**

##### **4.5.1. Isothermes et lignes de courant :**

On examine ici les effets de la fraction volumique ( $\Phi$ ) et le nombre de Grashof ( $Gr$ ) sur les lignes de courant et les isothermes du nanofluide. Ces effets sont illustrés sur les figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 qui montrent une seule cellule tournant dans le sens horaire.

Pour  $Gr=10^3$ , la figure (4.12) illustre des lignes isothermes qui sont des courbes presque parallèles, des valeurs de la fonction de courant qui sont petites (en valeurs absolues) et l'augmentation de la fraction volumique ( $\Phi$ ) qui affecte l'intensité de l'écoulement, car les forces induites par viscosité sont prépondérantes, tout ceci dénote que les transferts de chaleur ici s'opèrent essentiellement par conduction.

Sur les figures (4.13), (4.14) et (4.15), les lignes isothermes se modifient et deviennent très serrées près des parois actives au fur et à mesure que le nombre de Grashof augmente  $10^4 \leq Gr \leq 10^6$  et les lignes de courant se modifient en commençant par adopter une forme ovale horizontale, et par la suite, il y a l'apparition de deux petites cellules de recirculation aux niveaux des deux coins de l'enceinte, situées sur la médiane horizontale, ceci d'une part, d'autre part les valeurs de la fonction de courant augmentent aussi (en valeurs absolues) en augmentant les valeurs du nombre de Grashof, ce qui a permis aux forces d'Archimède de vaincre les forces de viscosité, même pour des valeurs de la fraction volumique ( $\Phi$ ) plus importantes, ce qui traduit donc, un passage d'un transfert conductif à un transfert convectif.

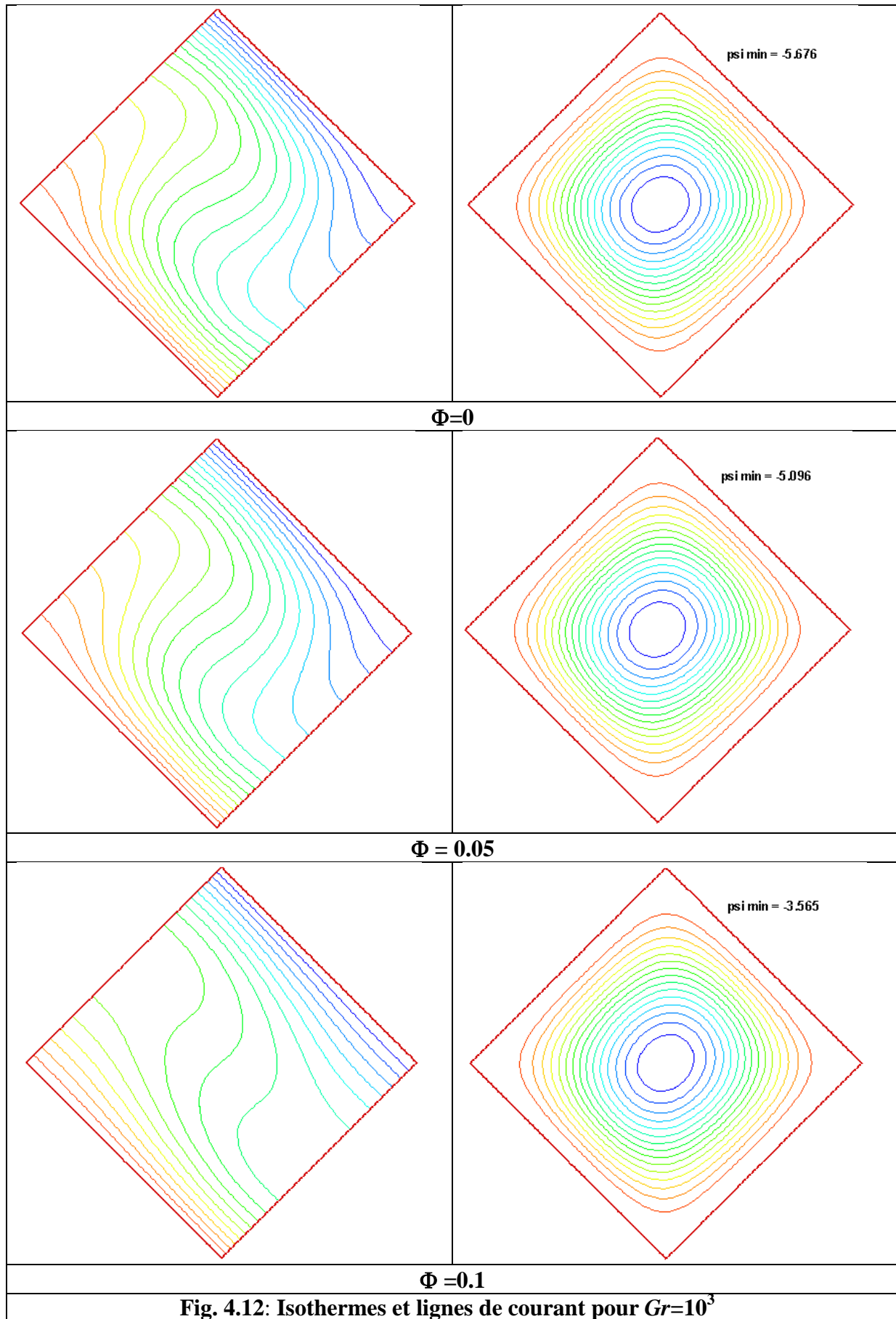


Fig. 4.12: Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^3$

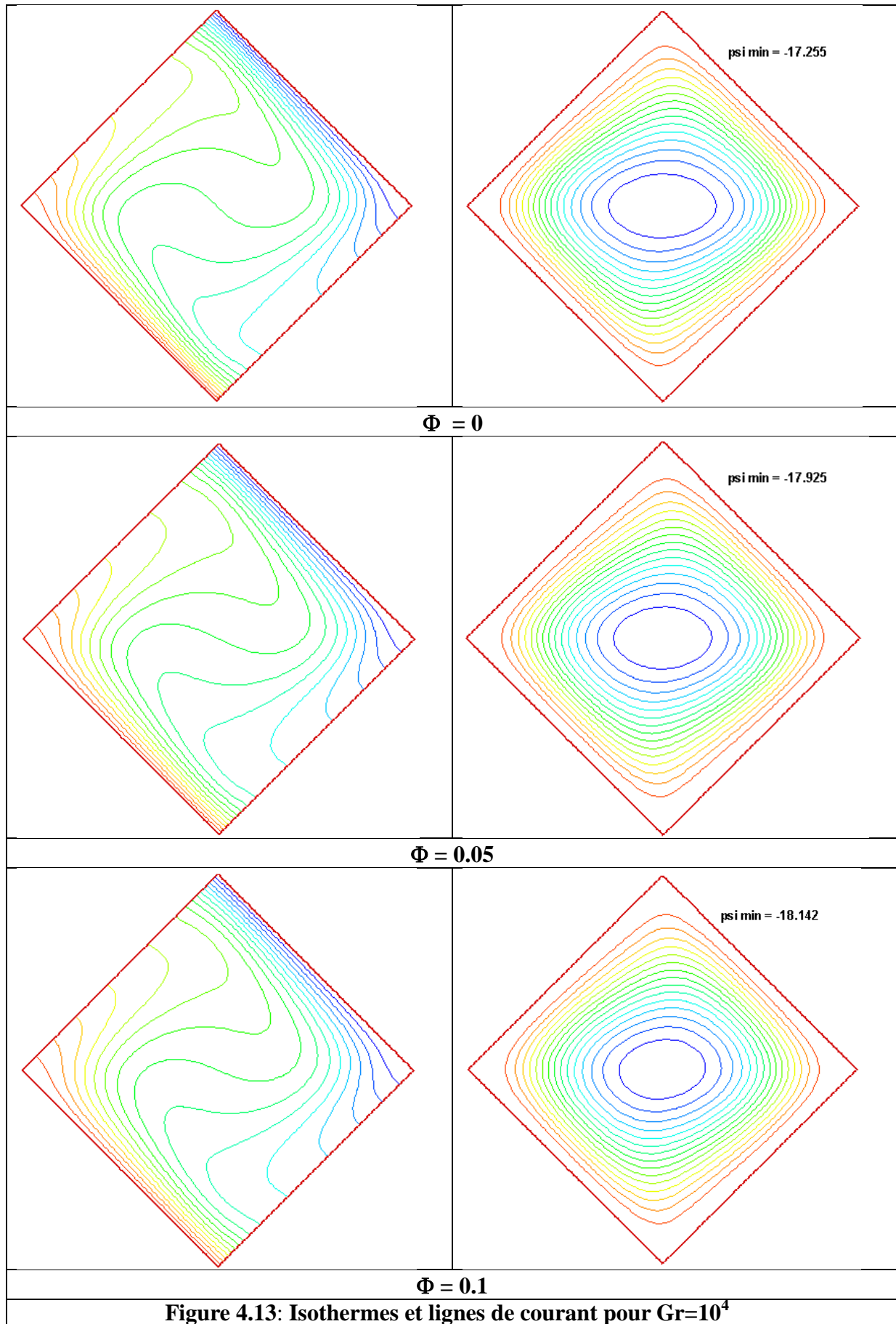
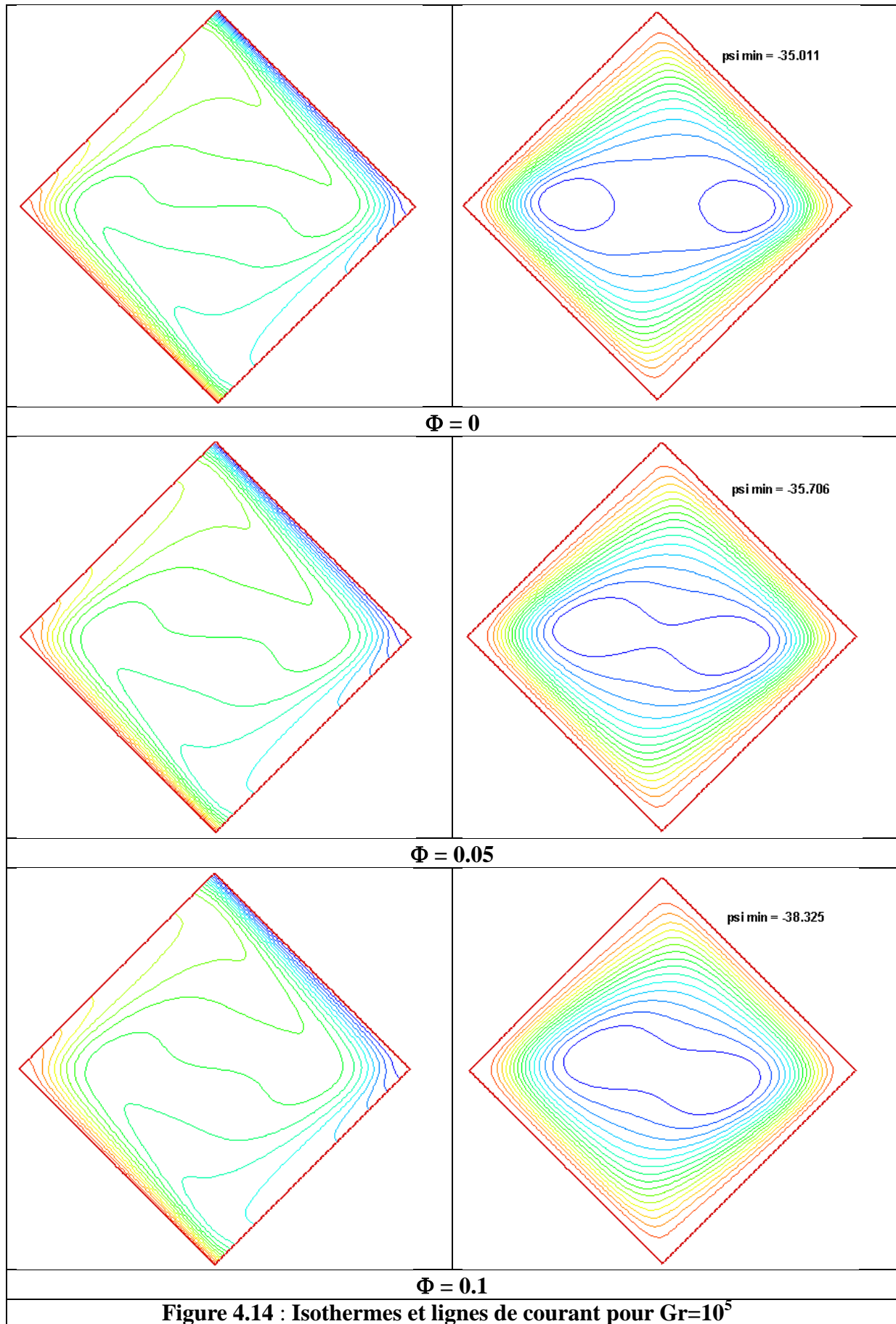


Figure 4.13: Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^4$



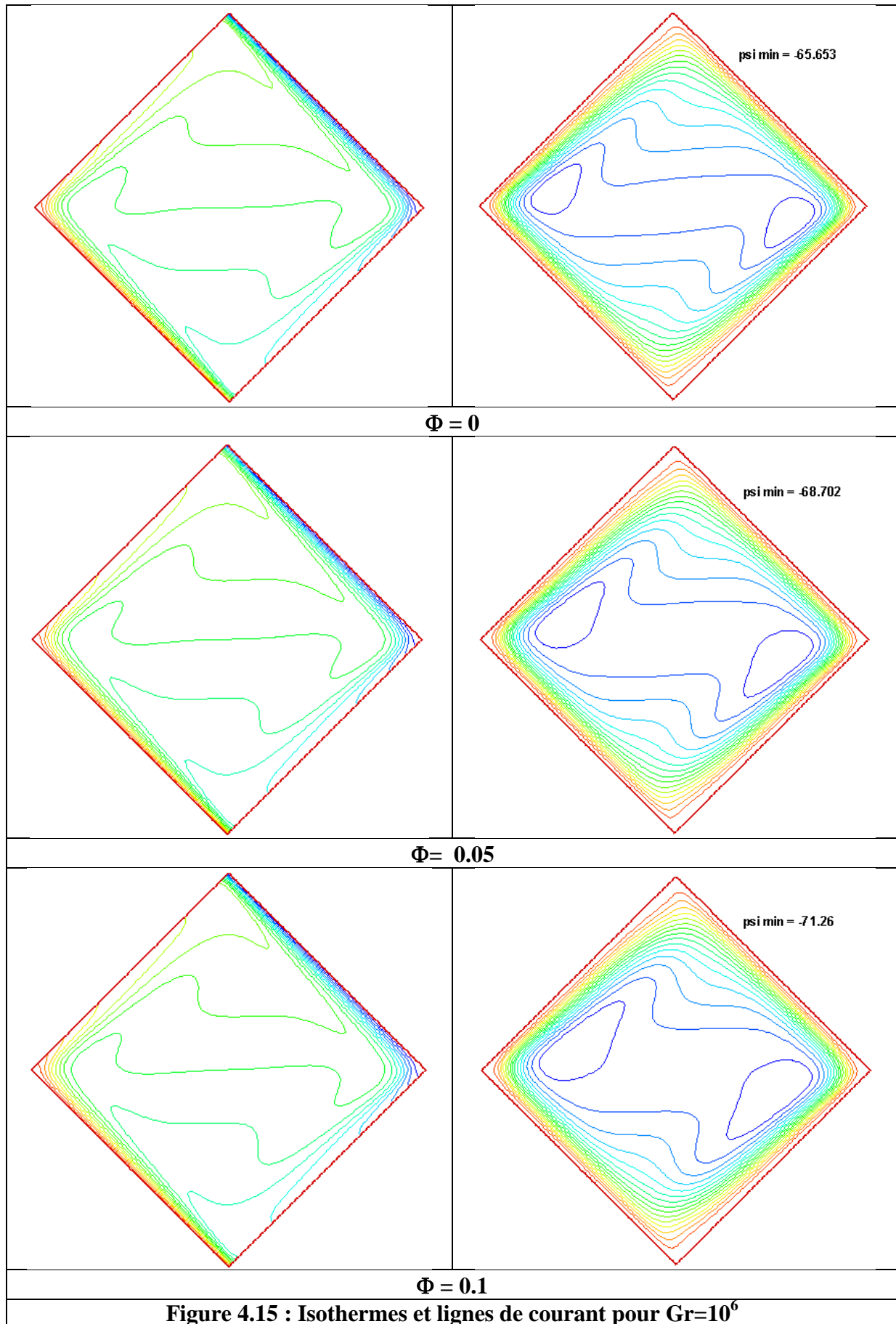
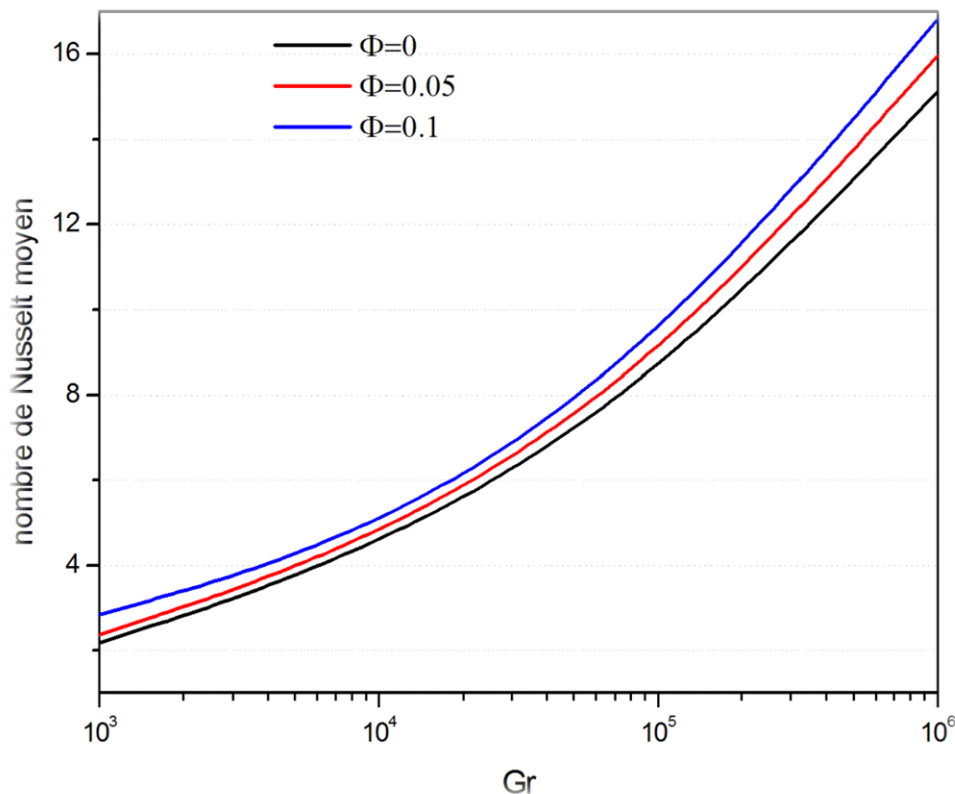


Figure 4.15 : Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^6$

#### 4.5.2 Variation du nombre de Nusselt moyen

La variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Grashof pour l'eau pure ( $\Phi=0$ ) et pour le nanofluide ( $\Phi=0,05$  et  $\Phi=0,1$ ) est représentée sur la figure 4.16. Cette dernière montre que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent avec l'augmentation du nombre de Grashof ( $Gr$ ) et celle de la fraction volumique ( $\Phi$ ). Ceci est dû à l'augmentation de la conductivité thermique du nanofluide ( $C_u$ ) par rapport à celle de l'eau pure.



**Figure 4.16: Variation du nombre de Nusselt moyen avec le nombre de Grashof pour différentes fractions volumiques.**

#### 4.5.3 Variation du profils composantes de la vitesse :

La figure 4.17 illustre l'effet de la fraction volumique sur les profils des composantes de la vitesse aux demi-sections de la cavité, pour  $Pr=6.2$  et  $\Phi=0, 0.05$  et  $0.1$ , les deux composantes de la vitesse au centre de la cavité sont très petites par rapport à celles au voisinage des parois où le fluide se déplace à des vitesses plus élevées, ceci d'une part, d'autre part l'effet de l'ajout des nanoparticules au fluide de base apparait mieux pour  $Gr=10^5$  où les forces de flottabilité arrivent à vaincre les forces de viscosité.



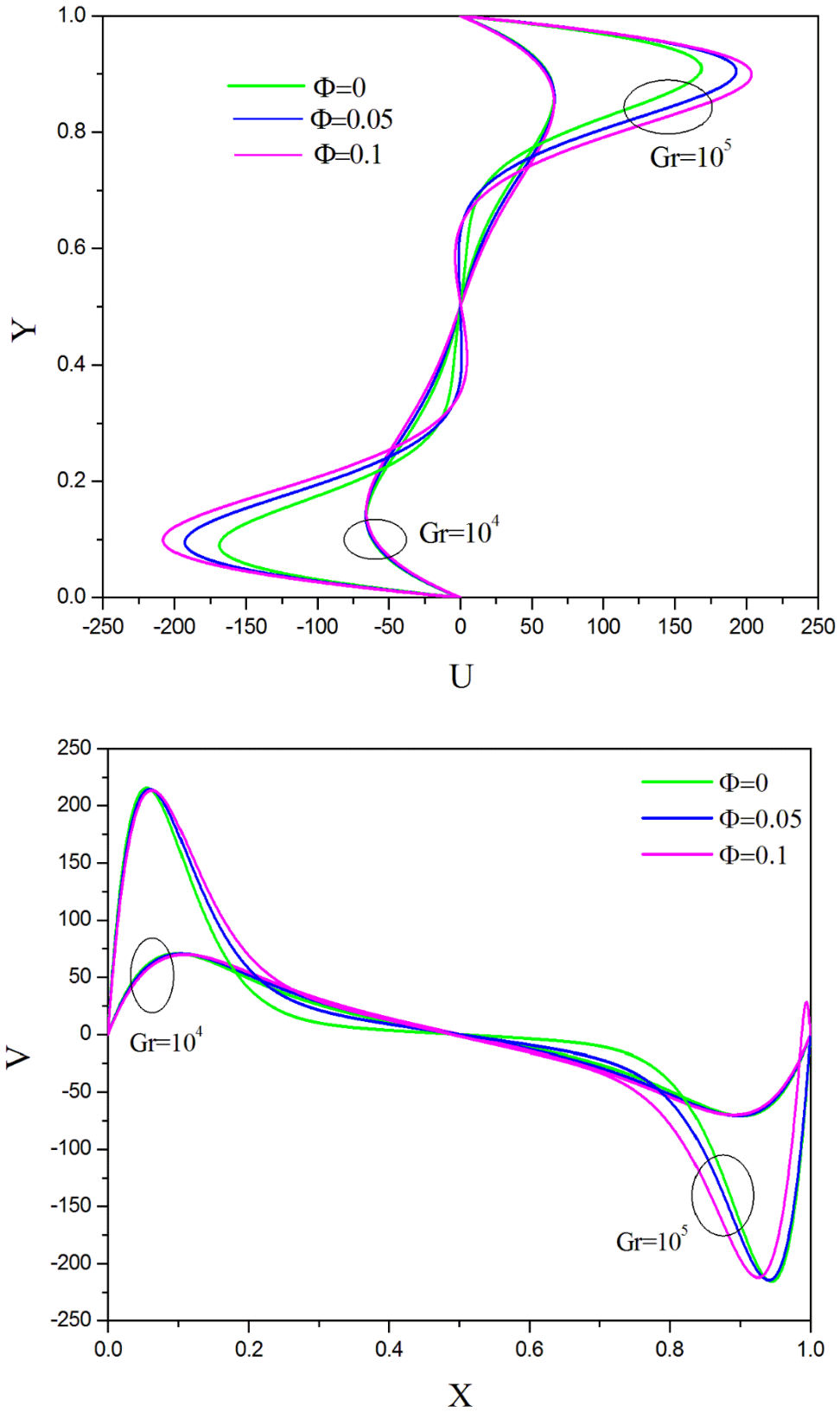


Figure4.17: Profils de la vitesse  $U$  pour  $X=0.5$  et  $V$  pour  $Y=0.5$  de la cavité pour différentes fractions volumiques pour  $Gr=10^5$  et  $Gr=10^4$

#### 4.6. Troisième condition pariétale thermique [60] :

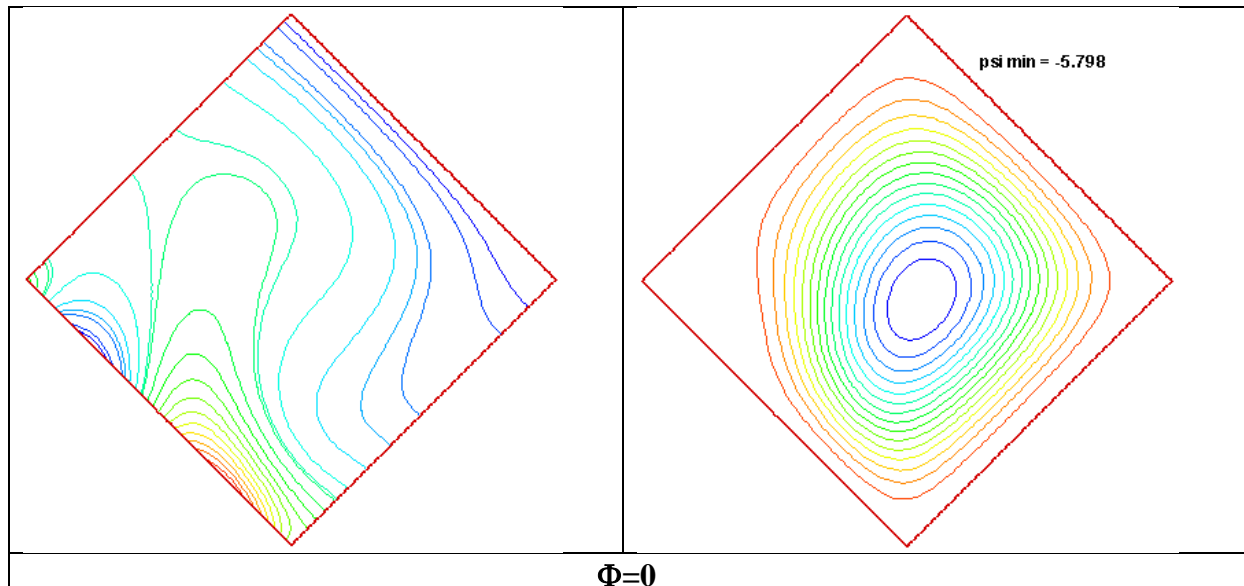
##### 4.6.1 Isothermes et lignes de courant :

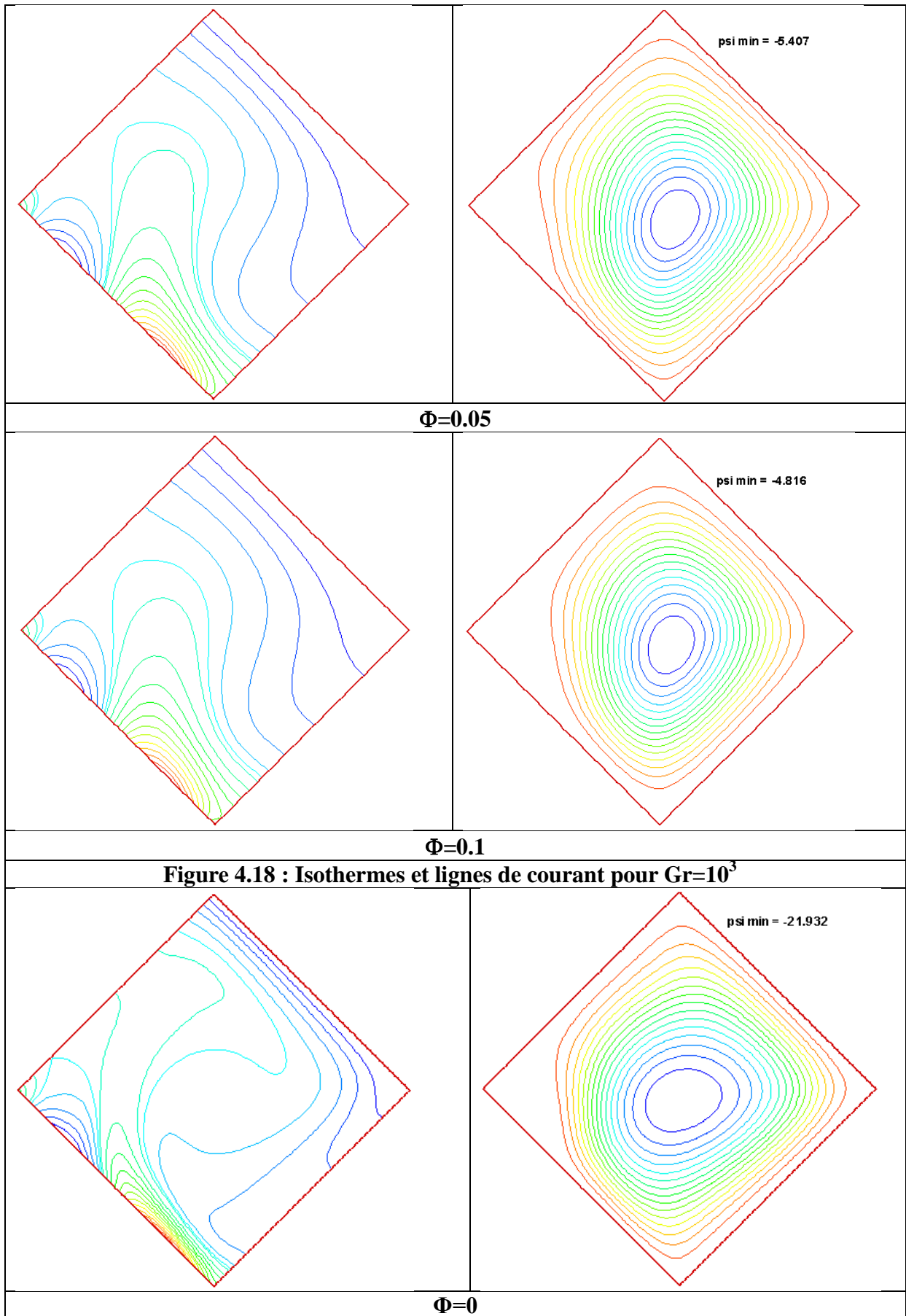
Les figures (4.18-4.21) représentent l'effet de la fraction volumique sur les isothermes et les lignes de courant du nanofluide pour différentes valeurs du nombre de Grashof.

La structure de l'écoulement est caractérisée par la présence d'une seule cellule occupant toute la cavité. La cellule tourne dans le sens horaire pour toutes les figures.

Pour  $Gr=10^3$ , les lignes isothermes de la figure (4.18) sont des courbes presque parallèles à la paroi froide et adoptant une allure périodique au niveau de la paroi soumise à une excitation thermique périodique, les valeurs absolues de la fonction de courant sont petites, ce qui traduit une pseudo-conduction, ceci d'une part, d'autre part l'augmentation de la fraction volumique ( $\Phi$ ) affecte l'intensité de l'écoulement, car les forces d'Archimède n'arrivent toujours pas à vaincre les forces de viscosité.

Pour  $10^4 \leq Gr \leq 10^6$  les lignes isothermes des figures (4.19), (4.20) et (4.21) se modifient et deviennent très serrées près des parois actives au fur et à mesure que le nombre de Grashof augmente, ce qui dénote d'une amélioration du taux de transfert de chaleur dans ces régions et les lignes de courant commencent à se modifier au niveau du coin gauche de l'enceinte, ceci est dû bien sûr à la forme de l'excitation thermique périodique imposée à la paroi chauffée et qui se manifeste clairement en haut de cette dernière et pour  $Gr=10^6$ , il y a apparition d'un petit vortex au niveau de celle-ci, tournant dans un sens antihoraire, ainsi que l'apparition de quelques cellules de recirculation au sein du vortex principal, les valeurs absolues de la fonction de courant mentionnées sur ces mêmes figures augmentent sensiblement, et donc les forces de viscosité sont dominées par les forces de flottabilité, nous sommes donc en présence d'un régime convectif.





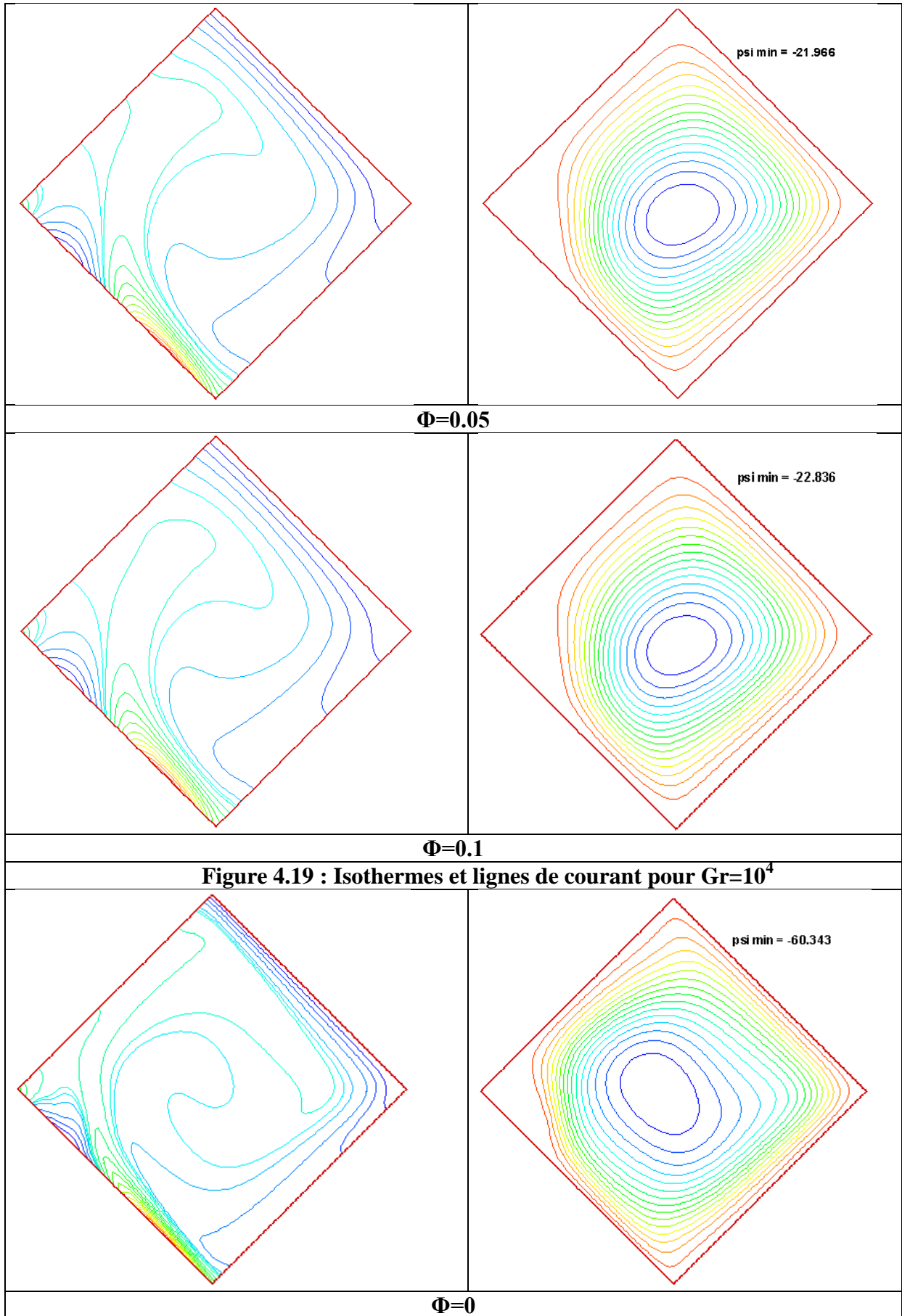


Figure 4.19 : Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^4$

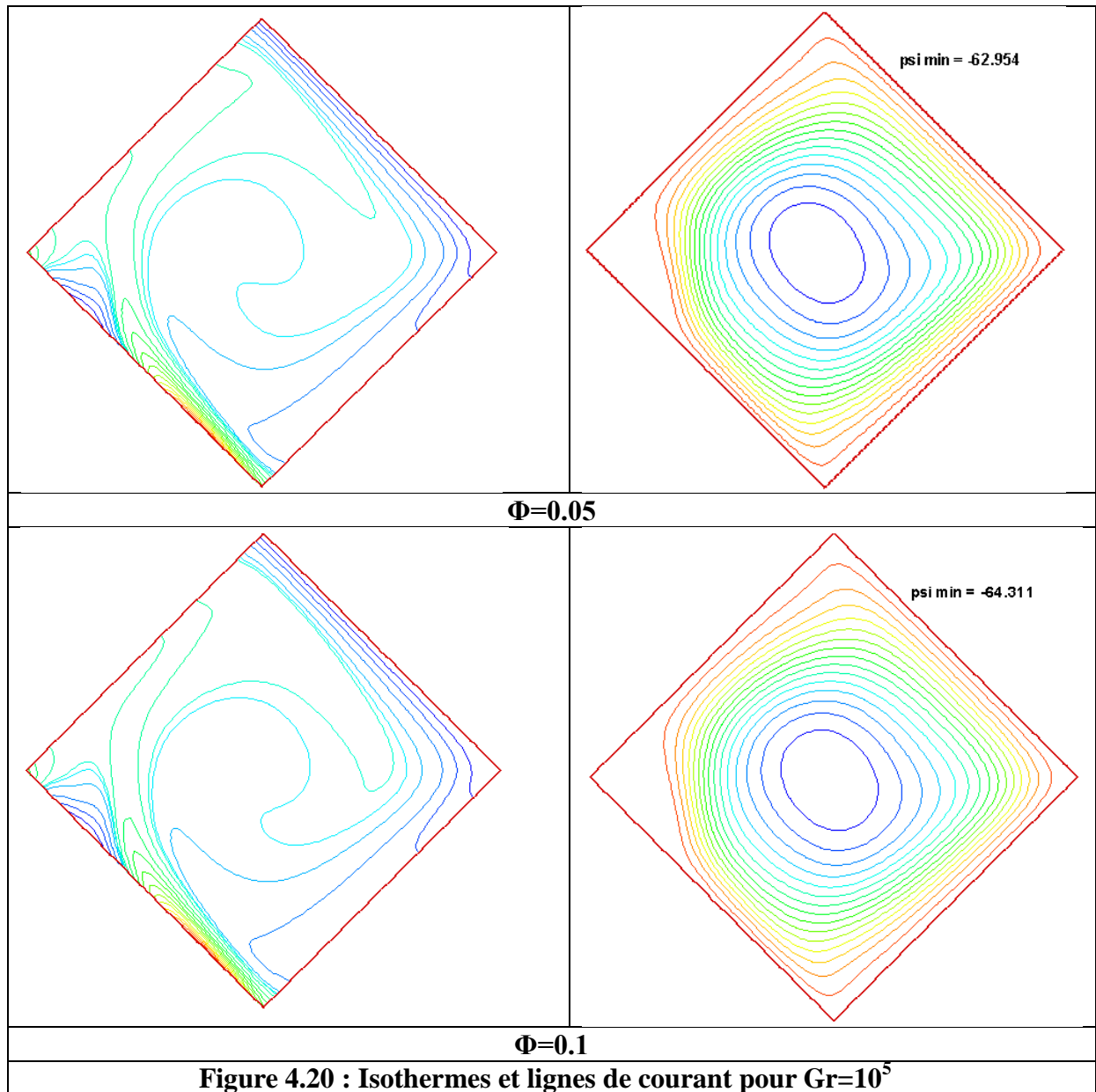


Figure 4.20 : Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^5$

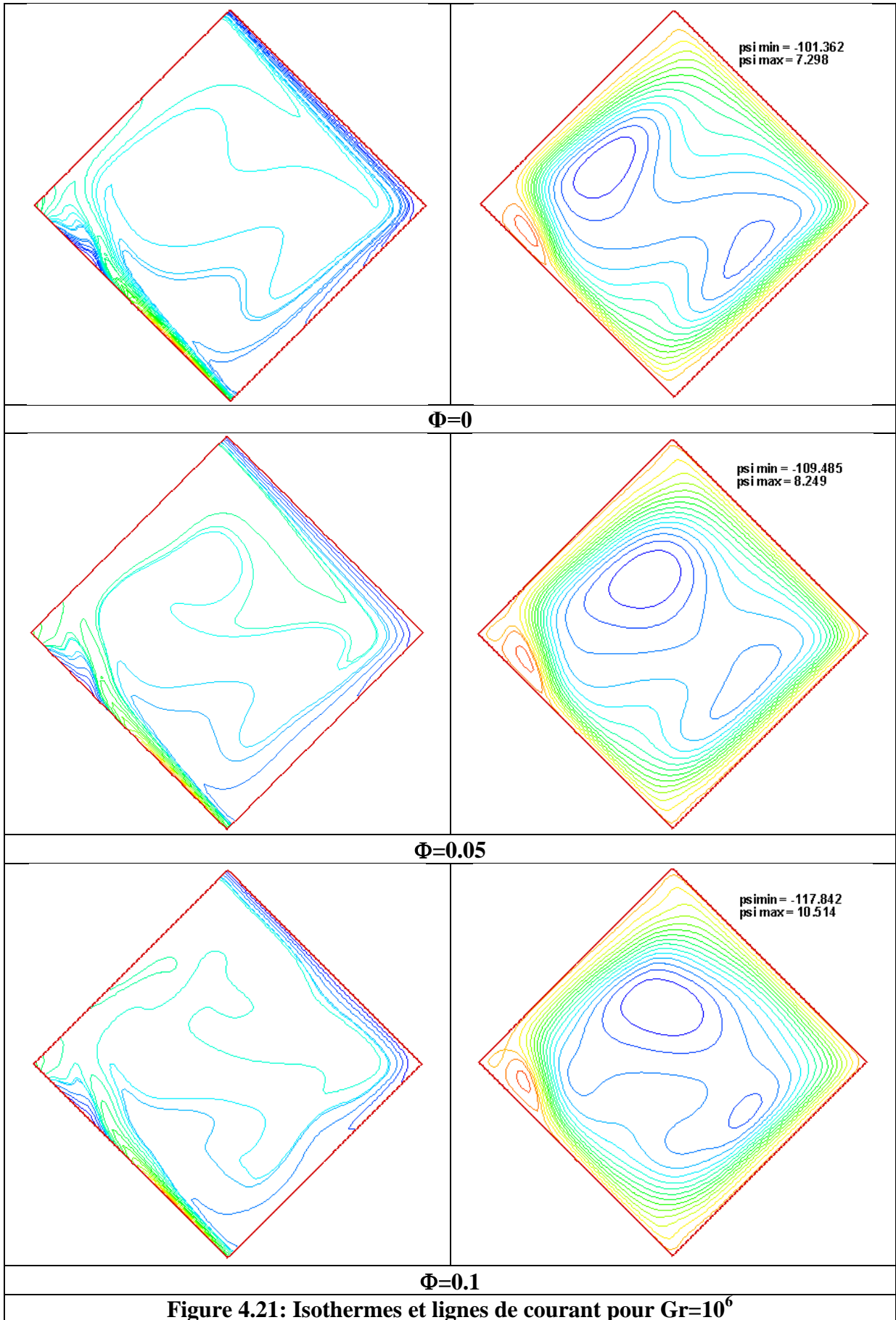


Figure 4.21: Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^6$

#### 4.7 Quatrième condition pariétale thermique [60] :

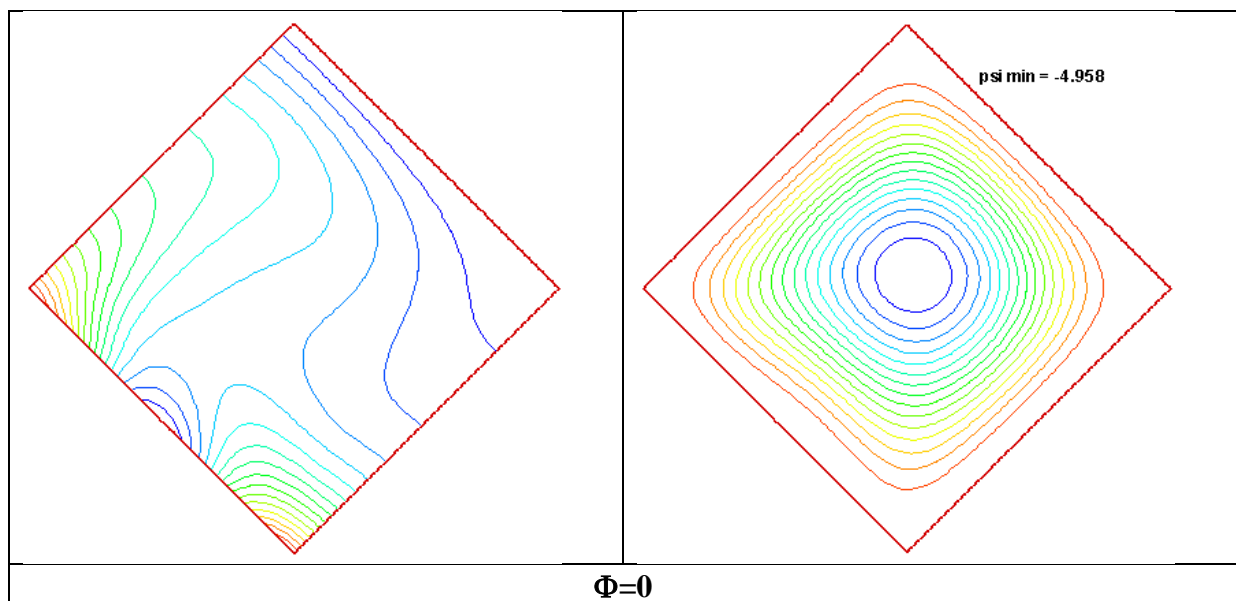
##### 4.7.1 Isothermes et lignes de courant:

Pour ce cas de chauffage, les figures 4.22-4.25 illustrent les isothermes et les fonctions de courant pour différentes fractions volumiques ( $\Phi$ ) de nanoparticules (0, 0.05 et 0.1) et différents nombres de Grashof ( $Gr=10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ ).

Dans ce cas aussi la structure de l'écoulement est caractérisée par la présence d'une seule cellule occupant toute la cavité.

Pour  $Gr=10^3$ , la figure (4.22) illustre des lignes isothermes qui sont des courbes presque parallèles à la paroi froide et adoptant une allure périodique au niveau de la paroi soumise à une excitation thermique périodique, des valeurs absolues petites de la fonction de courant et l'augmentation de la fraction volumique ( $\Phi$ ) qui affecte l'intensité de l'écoulement, car les forces d'Archimède n'arrivent toujours pas à vaincre les forces de viscosité, ceci nous amène à dire que nous sommes en présence d'un régime pseudo conductif.

Sur les figures (4.23),(4.24) et (4.25) les lignes isothermes se modifient et deviennent très serrées près des parois actives au fur et à mesure que le nombre de Grashof augmente  $10^4 \leq Gr \leq 10^6$  et les lignes de courant commencent à se modifier au niveau de la paroi soumise à une excitation thermique périodique et pour  $Gr=10^6$ , il y a apparition d'un petit vortex au niveau de cette dernière tournant dans un sens antihoraire, d'autre part les valeurs absolues de la fonction de courant augmentent aussi en augmentant les valeurs du nombre de Grashof, ce qui a permis aux forces d'Archimède de vaincre à ce stade-là, les forces de viscosité, même pour des valeurs de la fraction volumique ( $\Phi$ ) plus importantes, ce qui traduit donc, un passage d'un transfert conductif à un transfert convectif.



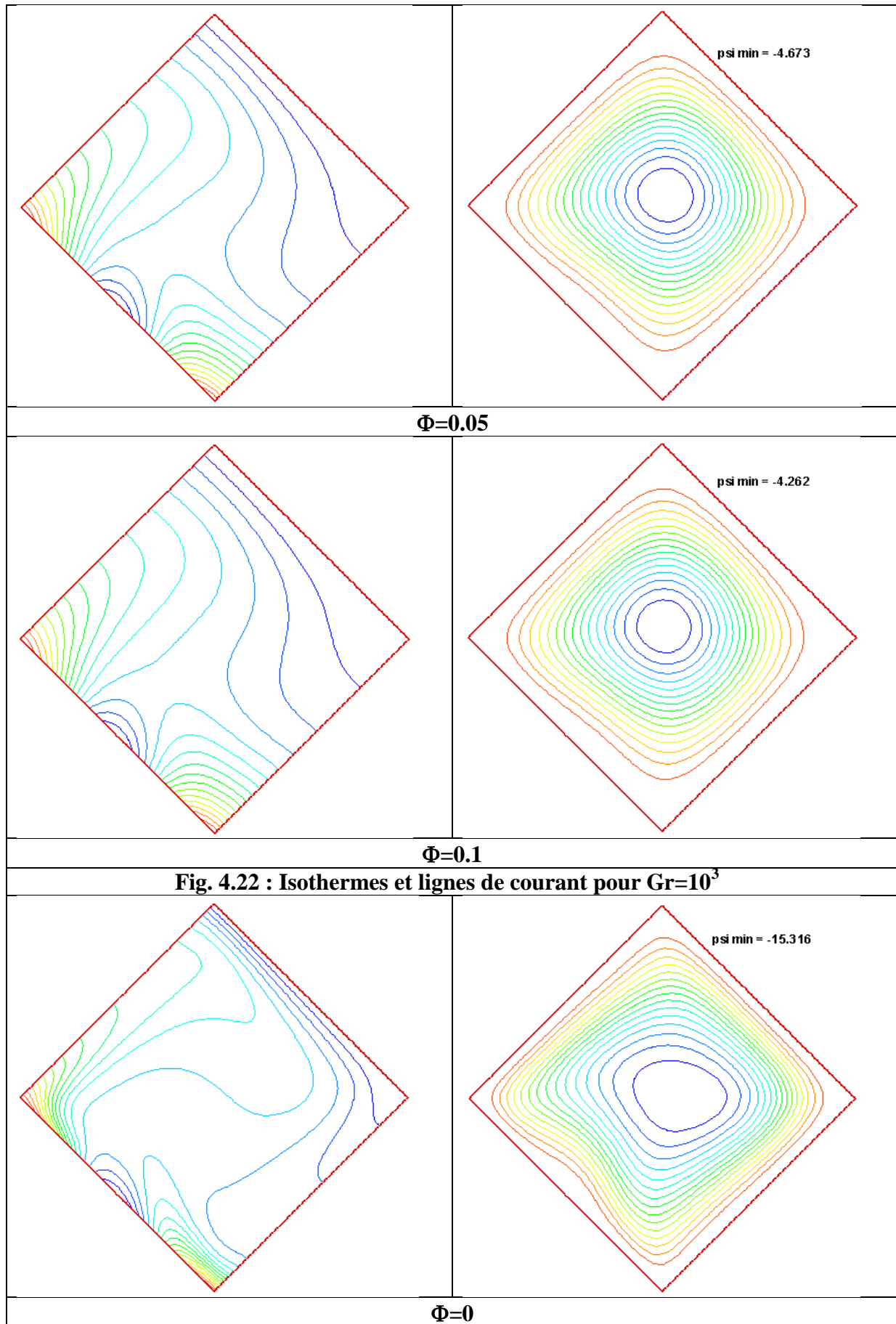


Fig. 4.22 : Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^3$



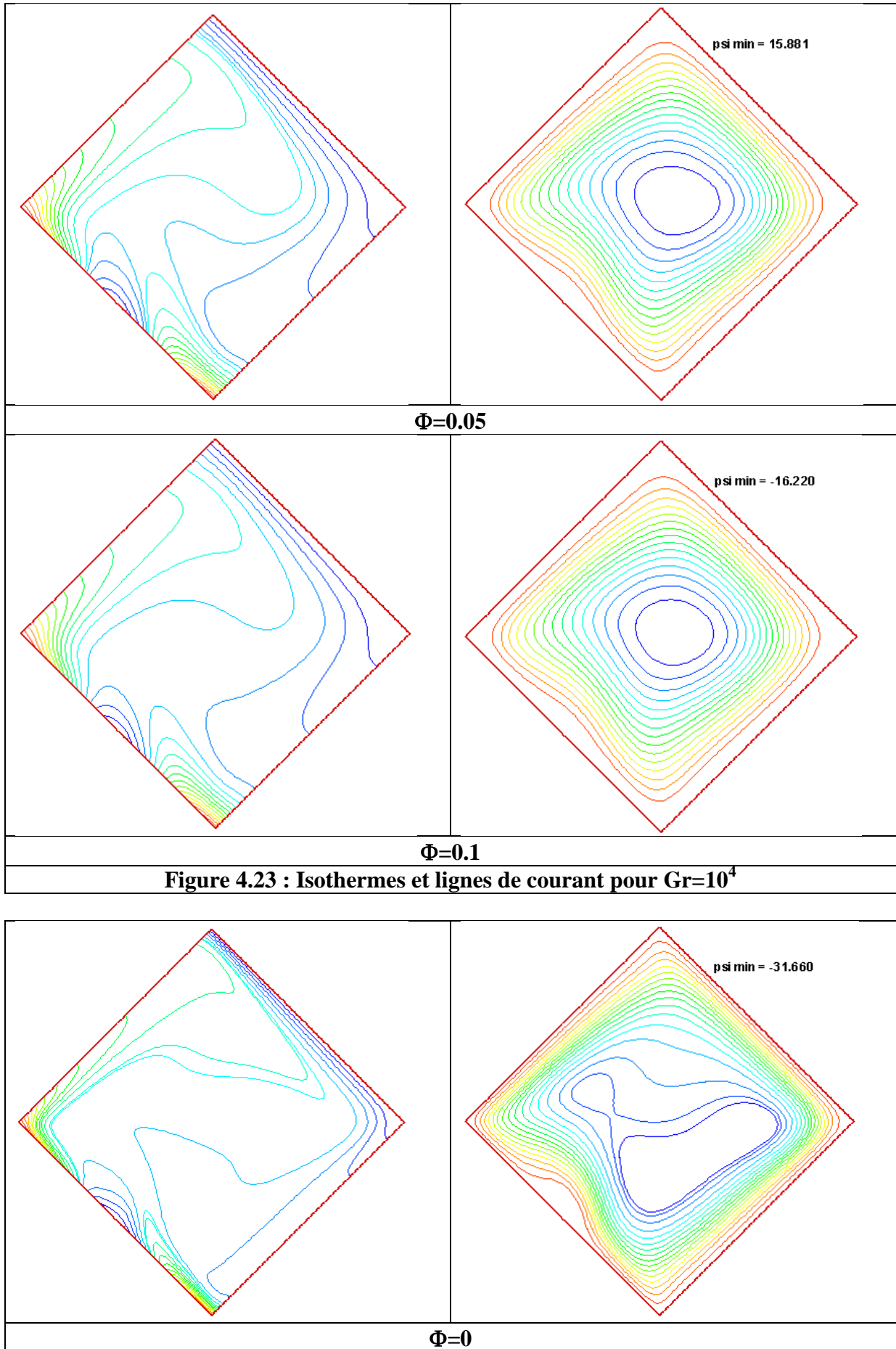
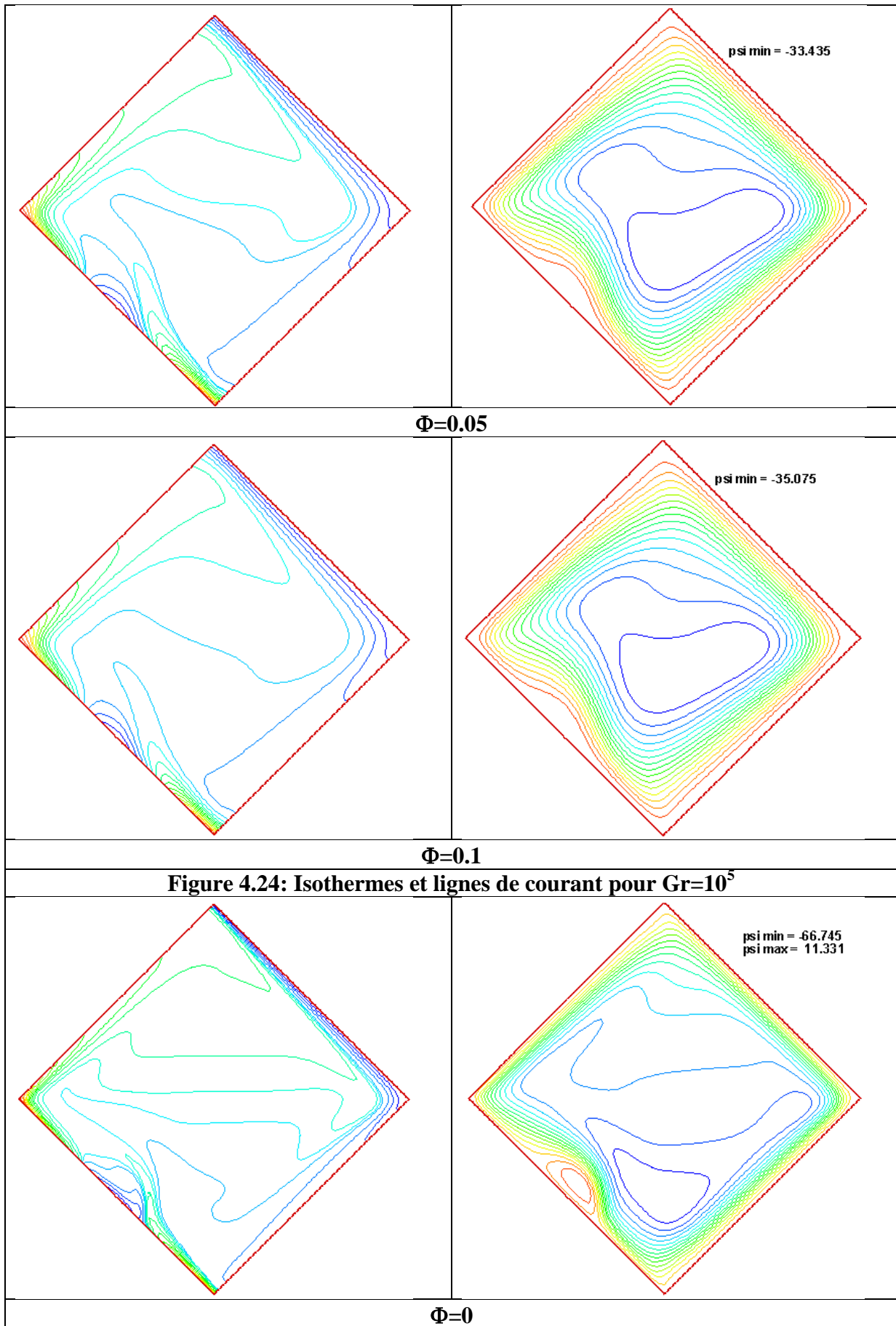
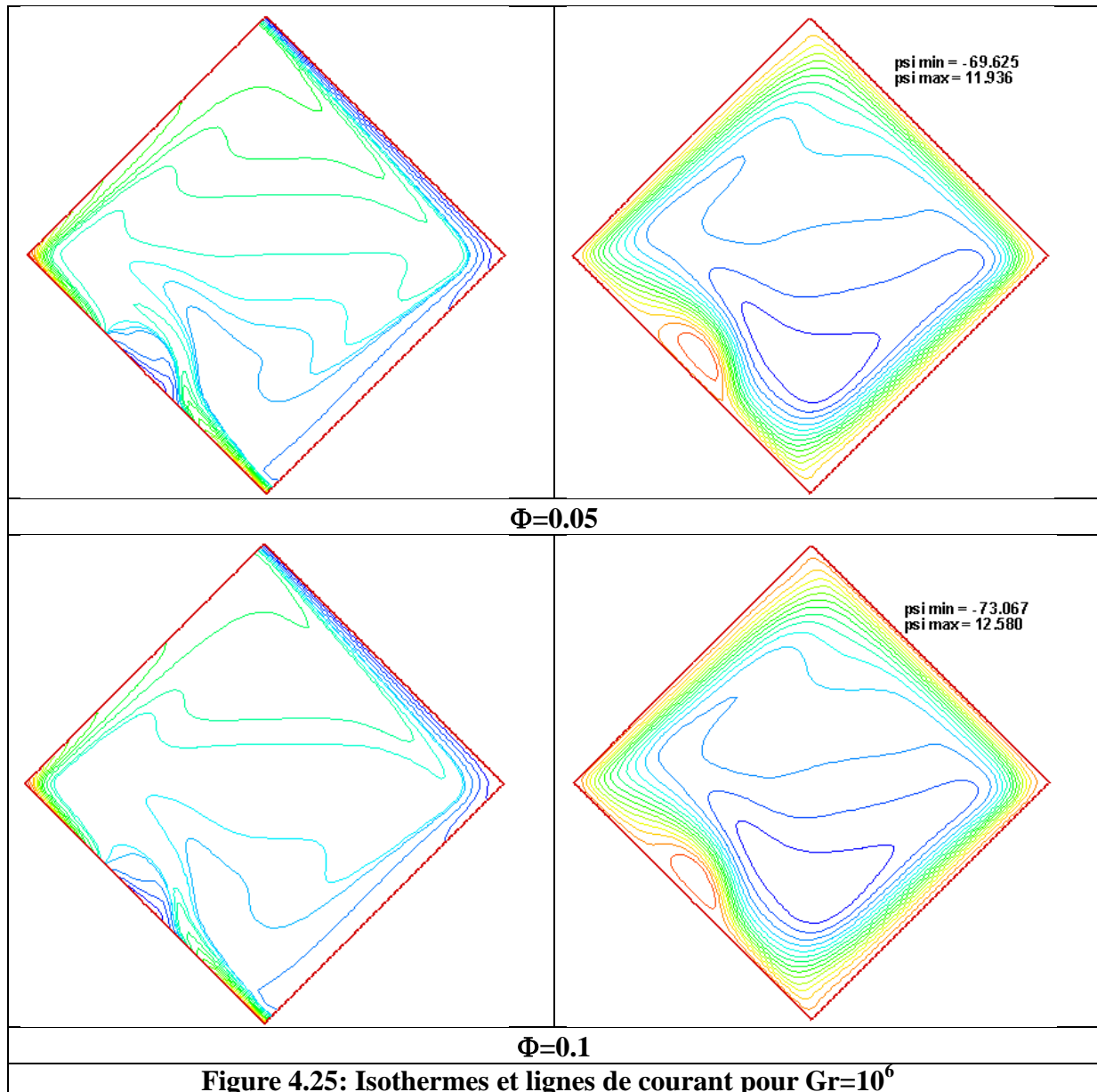


Figure 4.23 : Isothermes et lignes de courant pour  $Gr=10^4$





#### **4.7.2. Comparaison entre les variations des Nombres de Nusselt moyens de la troisième et la quatrième condition pariétale thermique**

Pour une meilleure comparaison, la variation des nombres de Nusselt moyens le long des parois excitées périodiquement dans le troisième et le quatrième cas de chauffage, avec le nombre de Grashof ( $Gr$ ) et la fraction volumique ( $\Phi$ ) des nanoparticules est illustrée sur la figure 4.26. Pour une valeur donnée de  $\Phi$ , le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Grashof dans les deux cas considérés, mais cette augmentation est plus importante pour le quatrième cas. Cela signifie que les valeurs de la température de la paroi périodique sont supérieures à celles du troisième cas, ceci d'une part, d'autre part pour un nombre de Grashof donné, une augmentation de la fraction volumique des nanoparticules entraîne une augmentation du nombre de Nusselt moyen.

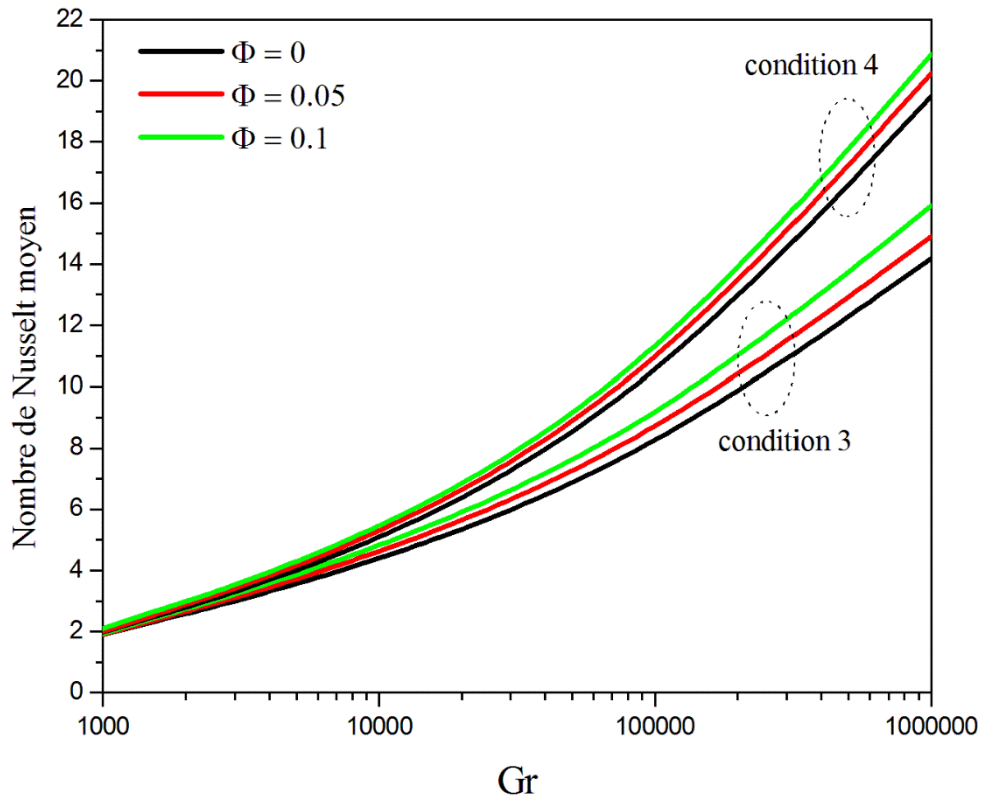


Figure 4.26: Variations des Nombres de Nusselt moyens de la troisième et la quatrième condition pariétale thermique

Conclusion

# Conclusion

## Conclusion

Cette étude présente la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et transitoire dans une enceinte cubique allongée, de grand axe horizontal, inclinée d'un angle  $\varphi$  eu égard au plan horizontal, remplie d'un nanofluide à base de Cu-Eau. Les parois verticales sont actives en appliquant des conditions de chauffage périodiques et les parois horizontales sont adiabatiques, dans un premier, un troisième et un quatrième cas de chauffage, dans le deuxième cas de chauffage nous imposons un gradient de température à deux parois opposées avec  $T_{ch} > T_{fr}$ , et nous maintenons les deux autres parois adiabatiques.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie. La méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation des équations, nous avons utilisé l'algorithme SIMPLER pour le couplage pression-vitesse. Ce modèle qui suppose le nanofluide monophasique repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. L'influence du nombre de Grashof et la fraction volumique, sur l'écoulement en régime instationnaire, a été notamment examinée.

Les résultats des simulations numériques ont montré que la conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Grashof  $\leq 10^3$ , pour toutes les conditions thermiques pariétales considérées. Pour des nombres de Grashof  $> 10^3$ , le rôle de la convection devient prépondérant, pour le premier et le deuxième cas de chauffage, Le transfert de chaleur dans la paroi active (température sinusoïdale en fonction du temps) pour le premier cas de chauffage est supérieur à celui de la température constante sur la paroi chaude pour le deuxième cas de chauffage. Les résultats montrent aussi que le nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof et la fraction volumique, alors que pour la troisième et la quatrième condition pariétale thermique considérée c'est au dessus d'un nombre de Grashof de l'ordre de  $10^4$  que la convection commence à apparaître. Dans les deux cas considérés, l'intensité de l'écoulement augmente avec la fraction volumique de nanoparticules. Les résultats des simulations ont montré que le transfert de chaleur dans la paroi active pour le quatrième cas de chauffage est meilleur que celui du troisième cas.

Il serait intéressant de proposer comme suite à ce travail l'hybridation de deux nanofluides et voir l'effet sur l'intensification du transfert de chaleur.

## Références Bibliographiques

- [1] **K. Hwang, J. H. Lee et S. Jang**, Buoyancy-driven heat transfer of waterbased  $Al_2O_3$ nanofluids in a rectangular cavity, *International Journal of Heat and Mass transfer*50, pp. 4003-4010, (2007).
- [2] **E. Bilgen et R. B.Yedder**, Natural convection in enclosure with heating and cooling by sinusoidal temperature profiles on one side, *International Journal of Heat and Mass transfer* 50, pp.139-150, (2007).
- [3] **S. Das, N. Putra et P. Thiesen**, Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids, *International Journal of Heat and Mass transfer*125, pp. 567-574, (2003).
- [4] **T. Tayebi et M. Djezzar**, Numerical Study of Natural Convection Flow in a Square Cavity with Linearly Heating on Bottom Wall Using Copper-Water Nanofluid, *Journal of Nanofluids* Vol. 4, pp. 38-49 (12), (2015).
- [5] **K. Khanafer, K. Vafai et M. Lightstone**, Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 46,pp. 3639-3653, (2003).
- [6] **R.Y. Jouet et S.C. Tzeng**, Numerical research of nature convective heat transfer enhancement filled with nanofluids in rectangular enclosures, *International Journal of Heat and Mass transfer*33, pp. 727-736, (2006).
- [7] **T. Tayebi, M. Djezzar et K. Saadaoui**, Effect of Sinusoidal Thermal boundary Condition on Natural Convection in a Cavity Filled with Cu-Water Nanofluid, *Journal of. Nanofluids* Vol. 2, pp. 120-126, (2013).
- [8] **M. Jalal, H. Meisami et M. Pouyagohar**, Experimental Study of CuO/Water Nanofluid Effect on Convective Heat Transfer of a Heat Sink, *Middle-East Journal of Scientific Research* 13, pp. 606-611, (2013)
- [9] **E. Abu-Nada, Z. Masoud , H. F. Oztop et A. Campo**, Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures,*International Journal of Thermal Sciences* 49, pp. 479-491, (2010).
- [10] **E. Abu-Nada et A. Chamkha**,Effect of nanofluid variable properties on natural convectionin enclosures filled with a CuO-EG-Water nanofluid,*International Journal of Thermal Sciences* 49, pp. 2339-2352, (2010).
- [11] **L. Snoussi, N. Ouerfelli, X. Chesneau, A. J. Chamkha, F. B. M. Belgacem et A. Guizani**, Natural Convection Heat Transfer in a Nanofluid Filled U-Shaped Enclosures: Numerical Investigations, *Heat Transfer Engineering*, ISSN: 0145-7632 (Print) 1521-0537 (2017)

## Références Bibliographiques

- [12] **M. Mahmoodi** et **S.M. Sebdani**, Natural convection in a square cavity containing a nanofluid and an adiabatic square block at the center, *Superlattices and Microstructures* 52, pp. 261-275, (2012).
- [13] **M. Jahanshahi**, **S.F. Hosseinizadeh**, **M. Alipanah**, **A. Dehghani** et **G.R. Vakilinejad**, Numerical simulation of free convection based on experimental measured conductivity in a square cavity using Water/SiO<sub>2</sub> nanofluid, *International Journal of Heat and Mass transfer* 37, pp. 687-694, (2010).
- [14] **I. El Bouihi** et **R. Sehaqui**, Numerical study of natural convection in a two dimensional enclosure with a sinusoidal boundary thermal condition utilizing nanofluid, *Engineering* 4, pp. 445-452,(2012).
- [15] **F.H Lai** et **Y.T Yang**, Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluids in a square enclosure, *International Journal of Thermal Sciences* 50, pp. 1930-1941, (2011).
- [16] **C.J. Ho**, **M.W. Chen**, et **Z.W. Li**, Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity, *International Journal Thermal Sciences* 49, pp. 1345-1353, (2010).
- [17] **E. Abu-Nada** et **H. Oztop**, Effects of inclination angle on natural convection in enclosures filled with Cu–water nanofluid, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 30, pp. 669-678, (2009).
- [18] **S. Sharma** et **A. K. Gupta**, Numerical simulation of heat transfer of nanofluids in an enclosure, *Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO, Melbourne, Australia*, pp. 9-11,( 2009).
- [19] **K.S. Apurba**, **Swarnendu Sen** et **N. Chakraborty**, Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *International Journal of Thermal Sciences* 48, pp. 391-400, (2009).
- [20] **M. Rahimi**, **A. A. Ranjbar**, **M. J. Hosseini** et **M. Abdollahzadeh**, Natural convection of nanoparticule – water mixture near its density inversion in a rectangular enclosure, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39, pp. 131-137,(2012).
- [21] **E. Abu-Nada**, Rayleigh-Bénard convection in nanofluids: Effect of temperature dependent properties, *International Journal of Thermal Sciences* 50, pp. 1720-1730, (2011).
- [22] **AH. Mahmoudi**, **M. Shahi** et **AH .Raouf**, Numerical study of natural convection cooling of horizontal heat source mounted in a square cavity filled with nanofluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 37, pp. 1135-1141, (2010).
- [23] **P. Joshi** et **A. Pattamatta**, An Experimental Study on Buoyancy Induced Convective Heat Transfer in a Square Cavity using Multi-Walled Carbon Nanotube (MWCNT)/Water Nanofluid, *Journal of Physics Conference Series* 745, pp. 032-033, ( 2016).



## Références Bibliographiques

- [24] **S.M. Aminossadati** et **B. Ghasemi**, Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure, *Eur. J. Mechanics B/Fluids* 28, pp. 630-640, (2009).
- [25] **I. Tavman**, **A. Turgut**, **M. Chirtoc**, **H.P. Schuchmann**, et **S. Tavman**, Experimental investigation of viscosity and thermal conductivity of suspensions containing nanosized ceramic particles, *International Scientific Journal* 34 ,pp. 99-104, (2008).
- [26] **B. Ghasemi**, **SM. Aminossadati** et **A. Raisi**, Magnetic field effect on natural convection in a nanofluid-filled square enclosure, *International Journal. Therm. Sci.* 5, pp.1748-1756, (2011).
- [27] **M.A. Sheremet** et **I.Pop**, Mixed convection in a lid-driven square cavity filled by a nanofluid: Buongiorno's mathematical model, *App. Mathematics and Computation* 266, pp. 792-808, (2015).
- [28] **P. Ternik**, **R. Rudolf** et **Z. Zunic**, Numerical study of heat transfer enhancement of homogeneous water - Au nanofluid under natural convection, *Materials and Technology* 46, pp. 257-261,(2012).
- [29] **A. Chamkha** et **E. Abu-Nada**, Mixed convection flow in single- and double-lid driven square cavities filled with Water- $\text{Al}_2\text{O}_3$  nanofluid: Effect of viscosity models, *Eur. Journal . Mechanics B/Fluids* 36, pp. 82-96, (2012).
- [30] **K.C. Lin** et **A. Violi**, Natural convection heat transfer of nanofluids in a vertical cavity: effects of on uniform particle diameter and temperature on thermal conductivity, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31, pp. 236-245, (2010)
- [31] **G. H. Li**, et **G. P. Peterson**, Experimental studies of natural convection heat transfer of  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{DI}$  water nanoparticle suspensions (nanofluids), Hindawi Publishing Corporation *Advances in Mechanical Engineering*, Article ID 742739, 10 pages doi: 10.1155/2010/742739,(2010).
- [32] **T. Basak** et **A. J. Chamkha**, Heatline analysis on natural convection for nanofluids confined within square cavities with various thermal boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass transfer* 55,pp. 5526-5543, (2012).
- [33] **Y.Bakhshan** et **S. H. Emrani**, Investigation the behavior of nanofluids in a rectangular enclosure in order to enhance the heat transfer coefficient, *J. Basic. Appl. Sci. Res.*, 3, pp. 976-986, (2013).
- [34] **J. Guet**, **M. Reggio** et **P. Vasseur**, Natural Convection of Nanofluids in a Square Enclosure with a Protruding Heater, *Mechanical Engineering Volume*, Article ID 167296, pp. 11, (2012).
- [35] **T. Basak**, **S. Roy**, **S. K. Babu** et **A. R. Balakrishnan**, Finite element analysis of natural convection flow in a isosceles triangular enclosure due to uniform and non-uniform heating at the side walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51, pp. 4496-4505, (2008).
- [36] **A. H. Bhuiyana**, **Md. Shahidul Alam**, et **M. A. Alim**, Natural convection of water-based nanofluids in a square cavity with partially heated of the bottom wall. *Procedia Engineering*, volume 194, pp. 435-441, (2017).

## Références Bibliographiques

- [37] **H. Khorasanizadeh, J. Amani et M. Nikfar**, Numerical investigation of Cu-water nanofluid natural convection and entropy generation within a cavity with an embedded conductive baffle, Sharif University of Technology, ScientiaIranica,19, pp. 1996-2003, (2012).
- [38] **E. Sourtiji , D.D. Ganji, M. Gorji-Bandpy et S.M. Seyyedi**, Numerical study of periodic natural convection in a nanofluid-filled enclosure due to transitional temperature of heat source, Powder Technology 259, pp. 65-73, (2014).
- [39] **T. Huei Chen et Li.Yueh Chen.**, Study of buoyancy-induced flows subjected to partially heated sources on the left and bottom walls in a square enclosure, International Communications in Heat and Mass Transfer 33, pp. 529-535, (2006).
- [40] **Z.T. Yu, W. Wang, X. Xu, L. W. Fan , Y. C. Hu et K. F. Cen**, A numerical investigation of transient natural convection heat transfer of aqueous nanofluids in a differentially heated square cavity, International Communications in Heat and Mass Transfer38, pp. 585-589,(2011).
- [40] **S.Z. Heris, S.G. Etemad et M.N. Esfahany**, Experimental investigation of oxide nanofluids laminar flow convective heat transfer, International Journal of Thermal Sciences 46, pp. 1219-1231, (2007).
- [41] **G.R. Kefayati, S.F. Hosseinizadeh , M. Gorji et H. Sajjadi**, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in tall enclosures using water/SiO<sub>2</sub> nanofluid , International Communications in Heat and Mass Transfer 38, pp. 795-805, (2011).
- [42] **H. F. Oztop et E. Abu-Nada**, Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids, International Journal of Heat and Fluid Flow 29, pp. 1326-1336, (2008).
- [43] **K. Kalidasan , R. Velkennedy et P. R.Kanna**, Natural convection heat transfer enhancement using nanofluid and time-variant temperature on the square enclosure with diagonally constructed twin adiabatic blocks , Applied Thermal Engineering 92, pp. 219-235, (2016).
- [44] **A.K .Santra, S.Sen et N. Chakraborty**, Study of heat transfer augmentation in a differentially heated square cavity using copper–water nanofluid, International Journal of Thermal Sciences 47, pp. 1113–1122, (2008)
- [45] **F. S.Oueslati et R. Bennacer**, Heterogeneous nanofluids: natural convection heat transfer enhancement, Nanoscale Research Letters,pp. 6, (2011).
- [46] **R. Nasrin, M. A. Alim et A. J. Chamkha**, Numerical Investigation in to Natural Convection Heat Transfer Enhancement of Copper- Water Nanofluid in a Wavy Wall Enclosure, International Journal of Energy &Technology 6, pp. 1-9, (2014).
- [47] **C.C. Cho, H.T.Yau et C.K. Chen**, Numerical Investigation in to Natural Convection Heat Transfer Enhancement of Copper- Water Nanofluid in a Wavy Wall Enclosure, Thermal Science 16, pp. 1309-1316, (2012).

## Références Bibliographiques

- [48] **A. Cihan, K. Kahveci et C. Susantez**, Buoyancy driven heat transfer of water-based CuO nanofluids in a tilted enclosure with a heat conducting solid cylinder on its center, Proceedings of the World Congress on Engineering 3, (2012).
- [49] **P. Ternik et R. Rudolf**, Heat transfer enhancement for natural convection flow of water – based nanofluids in a square enclosure, Int.J.simul.model 11, pp. 29-39, (2012).
- [50] **S. Sharma et A. K. GUPTA**, Numerical simulation of heat transfer of nanofluids in an enclosure, CSIRO, Melbourne, Australia ,pp. 9-11 ,( 2009).
- [51] **A. Noghrehabadi et A. Samimi**, Natural Convection Heat Transfer of Nanofluids Due to Thermophoresis and Brownian Diffusion in a Square enclosure, International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT) 6, pp. 2249 – 8958,( 2012).
- [52] **M. K. Aktas**, Thermal convection of a water-based nanofluid in a enclosure with an oscillating wall, Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 Vol III WCE (2011).
- [53] **S. Öztuna et K. Kahveci**, Natural convection heat transfer of nanofluids in a partially divided enclosure, J. of Thermal Science and Technology, 33, pp. 139-154,(2013).
- [54] **E. Abu-Nada**, Application of nanofluids for heat transfer enhancement of Separated flows encountered in a backward facing step, International Journal Heat Fluid Flow 29, pp. 242-249, (2008).
- [55] **J. Maxwell**, A Treatise on Electricity and Magnetism, 2nd ed, Oxford University Press, Cambridge, UK (1904).
- [56] **H.C. Brinkman**, The viscosity of concentrated suspensions and solutions, Journal. Chem. Phys. 20, pp. 571-581, (1952).
- [57] **E. Abu-Nada, Z. Masoud et A. Hijazi** , Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids, Int. Comm. Heat Mass Transf 35 (5), pp. 657-665, (2008).
- [58] **R.J. Krane et J. Jessee**, Some detailed field measurements for a natural convection flow in vertical square enclosure, 1st ASME-JSME Therm, Eng. Joint Conf. 1 323–329,(1983) .
- [59] **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and fluid flow, (McGraw-Hill Book Company), pp. 113-137, New York, (1980).
- [60] **K. Azzouz, T. Tayebi et M. Djezzar**, Effect of Periodic Heating Conditions on Natural Convection in an Enclosure Filled with Copper-Water Nanofluid, Journal of Nanofluids, volume 8, issue 6, pp.1281–1294,(2019).

## **Résumé :**

Dans cette étude, nous présentons une solution numérique de la convection naturelle instationnaire dans une enceinte cubique remplie d'un nanofluide, inclinée d'un angle  $\varphi$ . La paroi gauche est soumise à une température sinusoïdale avec le temps et la paroi droite maintenue à une température froide  $T_{fr}$  et les côtés opposés sont adiabatiques, ceci étant une première condition pariétale thermique. Dans un second cas de chauffage, nous imposons un gradient de température à deux parois opposées avec  $T_{ch} > T_{fr}$ , et nous maintenons les deux autres parois adiabatiques. Pour un troisième et un quatrième cas, un chauffage périodique est imposé à cette paroi verticale. La paroi droite de l'enceinte est maintenue à une température constante ( $T_{fr}$ ); cependant, les autres parois sont adiabatiques. Le nombre de Prandtl est fixé à 6.2 (cas de l'eau) mais le nombre de Grashof et la fraction volumique varient. En se plaçant dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, l'algorithme SIMPLER est utilisé pour coupler les champs de vitesse et de pression. Les résultats issus de ce dernier cas sont comparés avec d'autres résultats similaires existant dans la littérature qualitativement et quantitativement.

**Mots-clés :** convection naturelle, équations de Boussinesq, enceintes fermées cubiques, nanofluide.

**Title:** Contribution to the study of unsteady natural convection in inclined cubic enclosures

**Abstract:**

In this study, we present a numerical solution of unsteady natural convection in a cubic enclosure filled with a nanofluid, inclined at an angle  $\varphi$ . The left wall at a sinusoidal temperature with time and the right wall maintained at a cold temperature  $T_{fr}$  and adiabatic opposite sides for a first case. In a second case of heating, we impose the opposite sides  $T_{ch}$  and  $T_{fr}$  with  $T_{ch} > T_{fr}$ , and both other adiabatic walls. For a third and a fourth case, periodic heating is imposed on this vertical wall. The right wall of the enclosure is maintained at a constant temperature ( $T_{fr}$ ); however, the other walls are adiabatic. The Prandtl number is fixed at 6.2 (case of water) but the Grashof number and the volume fraction varies. Using the Boussinesq approximation. The SIMPLER algorithm was used to couple the velocity and pressure fields. We compare results from the latter with other similar results existing in the literature qualitatively or quantitatively.

**Keywords:** natural convection, Boussinesq equations, cubic closed enclosures, nanofluid.

**العنوان :** مساهمة في دراسة الحمل الحراري الطبيعي غير المستقر في حاويات مكعبة مائلة

**ملخص:**

قمنا في إطاره ذا العمل بدراسة عددية لظاهرة انتقال الحرارة عن طريق الحمل الطبيعي، الموجود في تجويف لفضاء متوازي مستطيلات و مائل بزاوية  $\rho$  بالنسبة لمستوى افقى. ه ذا الفضاء مملوء بنانو فلوريد ، يتدفق بصفة مؤقتة. نأخذ القيمة 6.2 لعدد Prandtl ثابتة (حالة الماء) و لكن عدد Grashof يتغير. باستعمال مقارنة بوسينسك . كتب نموذج هذا التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية : معادلات السرعة والضغط. بالنسبة لشروطه ذا التسخين، افترضنا في الحالة الأولى تسخين الجدار الايسر بدرجة حرارة جيبيية متعلقة بالزمن والجدار الأيمن تحت درجة حرارة  $T_{fr}$  والجداران المتبقيان كظومان. أما في الحالة الثانية سخن الجداران المتقابلان تحت درجة حرارة  $T_{fr}$  و  $T_{ch}$  مع  $T_{ch} > T_{fr}$ . والجداران المتبقيان المتقابلان كظوما. لحالة الثالثة والرابعة ، يتم فرض درجة حرارة جيبيية على هذا الجدار الايسر. يتم الحفاظ على الجدار الأيمن عند درجة حرارة ثابتة ( $T_{fr}$ ) , واما الجداران الأخران كظومان. برامج معلوماتية مختلفة وضعت للقيام بمختلف الحسابات لدراسة هدين الجزئيين، باستعمال طريقة الحجم المنتهية. بعدها قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج مماثلة لأبحاث أخرى.

**الكلمات المفتاحية :** الحمل الطبيعي ، معادلات بوسينسك ، فضاء مكعب ،

طريقة الحجم المنتهية. نانو فلوريد