

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :10/DS/2019

N° d'ordre :11/Phy/2019

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences en Physique

Spécialité: Physique Energétique

Option : Photothermique

THEME

Contribution à l'étude de la convection naturelle dans des enceintes à parois courbées remplies de nanofluides

PAR

YAHIAOUI Abdellaziz

Soutenue le: 18 / 06 / 2019

Devant le jury :

Présidente :	Pr.	CHAKER Abla	Université Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur :	Pr.	DJEZZAR Mahfoud	Université Frères Mentouri Constantine 1
Examineurs :	Pr.	NAJI Hassane	Université d'Artois Lille-France
	Pr.	GUELLAL Messaoud	Université Ferhat Abbes Sétif 1
	Dr.	TAYEBI Tahar	Université de Bordj Bou Arreridj



Je dédie ce mémoire à mon directeur de thèse
Professeur **Mahfoud DJEZZAR**, et à tous mes enseignants.

A mes parents, à ma femme et mes enfants.

A mes frères et mes sœurs.

A tous mes amis.



Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement et à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur **Mahfoud DJEZZAR**, Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine 1, pour ses efforts, ses orientations ainsi que la qualité du savoir qu'il m'a inculqué, sans oublier son temps précieux ainsi que sa disponibilité permanente, sa contribution primordiale et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Madame **Abla CHAKER**, Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine 1, qui a bien voulu présider mon jury de thèse, malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie vivement Monsieur **Hassane NAJI**, Professeur à l'Université d'Artois à Lille, Nord de la France, pour son aide précieuse, ainsi que d'avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Messaoud GUELLAL**, Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1 et Monsieur **TAYEBI Tahar**, Maître de Conférences à l'Université de Bordj Bou Arreridj, qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse et de participer à mon jury de soutenance, je leur adresse ma sincère gratitude.

Tous mes remerciements vont également, à toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Nomenclature

a	Diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
C_p	Capacité thermique du fluide ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
g	Accélération du champ de la pesanteur ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)
h	Coefficient métrique dimensionnel (m)
H	Coefficient métrique adimensionnel
L	Constante définie dans le système de coordonnées bicylindriques (m)
Nu	Nombre de Nusselt local
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
Ω	Fonction générale représentant (T^+ ou ω^+)
Γ_Ω	Coefficient adimensionnel
S_Ω	Terme de source
p	Pression au sein du fluide. ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$)
τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh
T	Température du fluide (K)
u, v	Composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
V_η, V_θ	Composantes de la vitesse suivant η et θ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
x, y, z	Coordonnées cartésiennes (m)
t	Temps (s)

Lettres grecques

α	Angle d'inclinaison ($^\circ$)
β	Coefficient de dilatation thermique a pression constante (K^{-1})

μ	Viscosité dynamique du fluide ($\text{kg. m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)
ν	Viscosité cinématique du fluide ($\text{m}^2. \text{s}^{-1}$)
ρ	Masse volumique du fluide (kg. m^{-3})
η, θ, z	Coordonnées bicylindriques
ω	Vorticité (s^{-1})
λ	Conductivité thermique du fluide ($\text{W. m}^{-1}. \text{K}^{-1}$)
ψ	Fonction de courant ($\text{m}^2. \text{s}^{-1}$)
ϕ	Fraction volumique des nanoparticules

Exposant

+	Paramètres adimensionnels
---	---------------------------

Indices

c	Froide
h	Chaude
η	Suivant la coordonnée η
θ	Suivant la coordonnée θ
nf	Nanofluide
f	Fluide de base
p	Particules solides
l	Paroi verticale gauche
b	Paroi du bas
i	Indice des nœuds suivant η
j	Indice des nœuds suivant θ .

Liste des figures

Figure 2.1 Représentation des enceintes étudiées	11
Figure 2.2 L'enceinte étudiée	12
Figure 2.3 Représentation schématique des coordonnées bicylindriques	17
Figure 3.1 Représente le domaine physique et le domaine de calcul	26
Figure 3.2 Représentation du volume de contrôle typique	27
Figure 3.3 Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage	39
Figure 3.4 Représentation du volume de contrôle typique	56
Figure 4.1 Représentation des enceintes étudiées	64
Figure 4.2 Représentation des enceintes étudiées	65
Figure 4.3 Représentation des enceintes étudiées	65
Figure 4.4 Formes des températures sinusoïdales pour les trois enceintes	66
Figure 4.5 Comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [1]	70
Figure 4.6 Nombres de Nusselt locaux de l'enceinte carrée	71
Figure 4.7 Profil de la température le long de l'axe médian horizontal pour différents types de maillage de l'enceinte carrée et pour ($Gr=10^5$, $Pr=6,2$ et $\phi=5\%$)	72
Figure 4.8 Comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [1]	73
Figure 4.9 Nombres de Nusselt locaux de l'enceinte carrée	74
Figure 4.10 Comparaison de nos résultats avec la référence [1]	75
Figure 4.11 Nombres de Nusselt locaux pour l'enceinte carrée	76
Figure 4.12 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte carrée	78
Figure 4.13 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte A	80
Figure 4.14 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte B	82
Figure 4.15 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée	84
Figure 4.16 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A	85
Figure 4.17 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B	86
Figure 4.18.I Nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale pour les enceintes carrée, A et B en fonction de la fraction volumique ϕ	87
Figure 4.18.II Nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale pour les enceintes carrée, A et B en fonction du nombre de Rayleigh	88
Figure 4.19 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte carrée	90
Figure 4.20 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte A	92
Figure 4.21 lignes de courant et isothermes pour l'enceinte B	94
Figure 4.22 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée	97

Figure 4.23 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A	98
Figure 4.24 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B	99
Figure 4.25.I Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh	100
Figure 4.25.II Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B pour différentes valeurs de la fraction volume	101
Figure 4.26 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte carrée	102
Figure 4.27 Lignes de courant et isothermes pour l'enceinte A	104
Figure 4.28 lignes de courant et isothermes pour l'enceinte B	107
Figure 4.29 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée	109
Figure 4.30 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A	110
Figure 4.31 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B	112
Figure 4.32.I Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B en fonction de la fraction volumique	113
Figure 4.32.II Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B en fonction du nombre de Rayleigh	113
Figure 4.33 Comparaison des nombres de Nusselt moyens pour les enceintes carrée, A et B	118

Liste des tableaux

Tableau 3.1 Les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , T	30
Tableau 3.2 les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , T_{Ω}	57
Tableau 4.1 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale, en fonction du nombre de nœuds (enceinte A)	66
Tableau 4.2 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas en fonction du nombre de nœuds (enceinte carrée)	67
Tableau 4.3 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas en fonction du nombre de nœuds (enceinte B)	67
Tableau 4.4.a Comparaison des valeurs des fonctions de courant et des nombres de Nusselt moyens pour un maillage de 71x71	68
Tableau 4.4.b Comparaison des nombres de Nusselt moyens (Pr= 0,702)	69
Tableau 4.4.c Comparaison des fonctions de courant et des nombres de Nusselt moyens pour un maillage de 41x41 (Pr= 0,702)	69
Tableau 5 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (différentiellement chauffées)	114
Tableau 6 Résultats des nombres de Nusselt moyens et les valeurs fonctions de courant pour les parois du bas (température constante)	115
Tableau 7 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (température constante)	115
Tableau 8 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois du bas (température sinusoïdale)	116
Tableau 9 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (température sinusoïdale)	116

Sommaire

DEDICACES	i
REMERCIEMENTS	ii
NOMENCLATURE	iii
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	3
CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE	11
2.1. Description du problème	11
2.2. Modèle monophasique	12
2.3. Hypothèses simplificatrices.....	12
2.4. Formulation du problème.....	13
2.4.1. Formulation vectorielle du problème	13
2.4.2. Formulation indicielle	14
2.4.3. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes	14
2.5. Equation de vorticité	15
2.6. Introduction des coordonnées bicylindriques.....	16
2.7. Adimensionalisation	18
2.8. Coefficients d'échange de chaleur	22
2.8.1. Nombre de Nusselt local	22
2.8.2. Nombre de Nusselt moyen	22
CHAPITRE 3 – FORMULATION NUMERIQUE	24
3.1. Introduction.....	24
3.2. Méthode de résolution numérique.....	25
3.2.1. Méthode des volumes finis	25
3.2.2. Volume élémentaire d'intégration	26
3.2.3. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable Ω dans le volume de contrôle.....	28
3.2.3.1. Intégration de l'équation du transfert	30
3.2.3.2. Linéarisation du terme source	31
3.2.3.3. Schémas de discrétisation spatiale	34
3.3. Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)	37

3.3.1. Détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$)	38
3.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	42
3.5. Discrétisation des conditions aux limites	44
3.5.1. Adimensionnement des conditions aux limites	44
3.5.1.1. Conditions aux limites des vitesses sur les frontières du domaine de calcul	44
3.5.1.2. Conditions aux limites des températures sur les frontières du domaine de calcul.....	45
3.5.2. Discrétisation des conditions aux limites des températures.....	47
3.5.3. Discrétisation des conditions aux limites de la fonction de courant	50
3.5.4. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	51
3.5.5. Discrétisation des conditions aux limites des vitesses.....	52
3.5.6. Discrétisation des composantes de la vitesse.....	52
3.6. Processus de calcul	53
3.7. Formulation numérique de l'enceinte carrée	56
3.7.1. Volume élémentaire d'intégration	56
3.7.2. Equation générale du transfert	57
3.7.3. Equation générale du transfert discrétisée	57
3.7.4. Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)	58
3.7.5. Détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$)	58
3.7.6. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	59
3.7.7. Discrétisation des conditions aux limites de la fonction de courant	61
3.7.8. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	62
3.7.9. Discrétisation des conditions aux limites des vitesses.....	62
3.7.10. Discrétisation des composantes de la vitesse	63
CHAPITRE 4 – RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	64
4.1. Introduction	64
4.2. Etude du maillage	66
4.3. Validation du code calcul	68
4.3.1. Première condition pariétale thermique.....	68
4.3.2. Deuxième condition pariétale thermique.....	72
4.3.3. Troisième condition pariétale thermique.....	75
4.4. Résultats et discussions	76
4.4.1. Première condition pariétale thermique.....	76

4.4.1.1. Enceinte carrée soumise à un gradient de température horizontal	76
4.4.1.2. Enceinte A soumise à un gradient de température horizontal	78
4.4.1.3. Enceinte B soumise à un gradient de température horizontal	80
4.4.1.4. Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée	82
4.4.1.5. Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A	84
4.4.1.6. Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B	85
4.4.1.7. Nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale chaude des enceintes carrée, A et B en fonction de la fraction volumique ϕ et du nombre de Rayleigh Ra.....	86
4.4.2. Deuxième condition pariétale thermique.....	89
4.4.2.1. Enceinte carrée chauffée par le bas par une température constante.....	89
4.4.2.2. Enceinte A chauffée par le bas par une température constante	90
4.4.2.3. Enceinte B chauffée par le bas par une température constante	92
4.4.2.4. Variation des nombres de Nusselt locaux pour les enceintes carrée, A et B.....	94
4.4.2.5. Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B	99
4.4.3. Troisième condition pariétale thermique.....	101
4.4.3.1. Enceinte carrée chauffée par le bas par une température sinusoïdale....	101
4.4.3.2. Enceinte A chauffée par le bas par une température sinusoïdale.....	103
4.4.3.3. Enceinte B chauffée par le bas par une température sinusoïdale	104
4.4.3.4. Variation des nombres de Nusselt locaux pour les enceintes carrée, A et B.....	107
4.4.3.5. Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B	112
4.4.3.6. Effet de la fraction volumique des nanoparticules sur la convection naturelle	114
4.4.3.7. Valeurs des nombres de Nusselt moyens et des fonctions de courant..	114
4.4.3.8. Comparaison des nombres de Nusselt moyens pour la deuxième et la troisième condition pariétale thermique	116
CONCLUSION GENERALE	119
ANNEXE 1 : Coordonnées bicylindriques	120
ANNEXE 2 : Approximation des dérivées partielles	135
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	140

Introduction

Au cours de ces dernières années, la convection naturelle dans des enceintes fermées de différentes formes remplies de nanofluides et soumises à différentes conditions de chauffages a fait l'objet de nombreuses études aussi bien théoriques qu'expérimentales ce qui leur permet d'être utilisées dans une multitude d'applications en ingénierie : l'industrie automotrice, le génie biomédical, le refroidissement des composants électroniques... etc.

Notre travail a pour objectif l'étude et la comparaison de la convection naturelle, laminaire et permanente dans différentes enceintes bidimensionnelles, remplies de nanofluides eau-Cu et soumises à trois différents types de condition de chauffage qui sont : premier cas (les parois horizontales des enceintes sont adiabatiques, et les parois verticales sont isothermes maintenues aux températures froide T_c et chaude T_h), deuxième cas (les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues isothermes à une température chaude constante T_h), troisième cas (Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues à une température sinusoïdale).

Etant donné l'abondance des travaux concernant le phénomène de convection naturelle au sein des nanofluides pouvant se dérouler dans des enceintes fermées, nous illustrons dans le premier chapitre, une riche étude bibliographique qui nous a permis de situer notre travail et de dégager une problématique.

Dans le deuxième chapitre nous établissons les équations de mouvement et du transfert de chaleur par le biais de la formulation vorticité-fonction de courant. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et l'approximation de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire (pour le cas des enceintes à parois courbées).

Le troisième chapitre est consacré à la formulation numérique. Dans ce chapitre nous présentons les techniques de discrétisation des équations de transfert et des conditions aux limites ainsi que les différents schémas de discrétisation. Pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles de type parabolique décrivant l'écoulement et leurs conditions aux limites associées, nous avons choisi la méthode des volumes finis, alors que pour l'équation de la fonction de courant qui est une équation aux dérivées partielles de type elliptique nous avons utilisé un développement en série de Taylor, et finalement, le système d'équations algébrique obtenu est résolu en utilisant la méthode de relaxation successive.

Dans le quatrième et dernier chapitre nous avons présenté une étude du maillage, puis nous avons validé notre code de calcul et enfin, nous avons rassemblé les résultats des simulations. Les résultats numériques des transferts de chaleur, en terme de nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois des enceintes, de la fonction de courant et des isothermes au sein du nanofluide, sont représentés graphiquement, puis analysés en fonction du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, pour voir leur effet sur les transferts de chaleur au sein des enceintes considérées.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

Les nanofluides sont obtenus en dispersant des particules de tailles nanométriques (nanoparticules) dans un fluide de base tel que l'eau, éthylène-glycol, huiles,...etc. Ces particules peuvent être de types métalliques tels que : Cu, Ag, Au,..., de types oxydes tels que : CuO, SiO₂, TiO₂, Al₂O₃,..., ou de types nanotubes de carbone (CNT).

Les nanofluides améliorent considérablement les transferts thermiques comparés aux fluides de base traditionnels ce qui leur permet d'être utilisés dans une multitude d'applications en ingénierie : l'industrie automotrice, le génie biomédical, le refroidissement des composants électroniques, les capteurs solaires, les caloducs, les réacteurs nucléaires etc. Plusieurs études ont été réalisées dans ce domaine par un certain nombre de chercheurs. **Basak et Chamkha [1]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de plusieurs types de nanofluides, ils ont considéré trois cas de chauffage (dans un premier cas ils ont imposé un gradient de température horizontal, dans un deuxième cas ils ont supposé que la paroi du bas est chauffée uniformément, celle du haut étant adiabatique tandis que les parois verticales sont isothermes froides et dans un troisième cas de chauffage, la configuration du deuxième cas est reprise mais la paroi du bas cette fois-ci est chauffée par une température non-uniforme). Ils ont trouvé que le transfert de chaleur en utilisant le nanofluide est meilleur par rapport au fluide de base. **Tayebi et Djeddar [2]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un nanofluide (Cu-eau). Ils ont trouvé que la température uniforme à la paroi inférieure donne un nombre de Nusselt plus élevé que la température variant linéairement, et pour un nombre de Rayleigh donné, une augmentation de la fraction volumique des nanoparticules provoque une augmentation du nombre de Nusselt moyen, et que cette augmentation est plus élevée dans le cas d'une température constante. **Guestal et al. [3]** ont fait une étude numérique sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte cylindrique horizontale remplie de deux nanofluides Cu-eau et TiO₂-eau. Ils ont trouvé que l'intensité du flux et le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Le transfert de chaleur augmente lorsque la longueur chauffée augmente. Le transfert de chaleur et son pourcentage d'augmentation augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique de nanoparticules. La valeur maximale du pourcentage d'augmentation du transfert de chaleur se produit lors de l'utilisation du nanofluide Cu-eau, pour une fraction volumique de 0.05 le transfert de chaleur augmente de 15.7%. **Hu et al. [4]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans un anneau excentrique rempli d'un nanofluide Cu-eau avec un flux de chaleur constant sur la paroi interne. Le nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^7$), l'excentricité ($\varepsilon = -0.625, 0$ et 0.625), la fraction volumique de nanoparticules ($0 \leq \phi \leq 0.03$) et le rapport radial est ($r = 2.33, 2.6$ et 3). Ils ont constaté que l'ajout des nanoparticules au fluide pur

modifie le schéma d'écoulement. Le nombre de Nusselt a une relation positive avec la fraction volumique des nanoparticules, le nombre de Rayleigh et le rapport radial. Le nombre de Nusselt dans le cas d'excentricité négative ($\varepsilon=-0.625$) est plus grand que les autres. **Snoussi et al. [5]** ont étudié numériquement l'amélioration du taux de transfert de chaleur par convection dans des enceintes tridimensionnelles en forme de U en utilisant les nanofluides Cu-eau et Al_2O_3 -eau. Ils ont trouvé que leurs résultats sont conformes aux prévisions publiées précédemment. En particulier, l'amélioration du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des fractions volumiques des nanoparticules, du nombre de Rayleigh, ainsi que de l'extension de la longueur des parois refroidies. **Khanafar et al. [6]** ont étudié numériquement l'amélioration du transfert de chaleur dans une enceinte rectangulaire remplie de nanofluides avec des parois verticales différentiellement chauffées. Dans leurs résultats ils ont montré que les nanoparticules en suspension augmentent considérablement le taux de transfert de chaleur pour n'importe quel nombre de Grashof. **Joshi et Pattamatta [7]** ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection dans une enceinte carrée de dimensions (40x40x200) mm remplie de nanofluide Al_2O_3 /eau. Les valeurs de la fraction volumique sont 0.3%, 1% et 2% et des nombres de Rayleigh allant de 7×10^5 à 1×10^7 . Des nanofluides MWCNT/eau avec des fractions volumiques 0.1%, 0.3% et 0.5% sont formulés et étudiés pour différents nombres de Rayleigh. Ils ont trouvé que le nanofluide MWCNT/eau, comparé au nanofluide Al_2O_3 /eau, donne des valeurs plus élevées du nombre de Nusselt pour une fraction volumique donnée. Leur étude pour la première fois démontre une amélioration de la convection naturelle avec le nanofluide MWCNT/eau. **Makulati et al. [8]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte en forme de C inclinée, remplie de nanofluide alumine-eau et soumise à un champ magnétique. Les parois internes étant froides, celles de droite sont adiabatiques, tandis que les autres parois sont soumises à une densité de flux de chaleur constante. Ils ont trouvé que l'influence du nanofluide sur le nombre de Nusselt moyen (Nu_{av}) diminue en augmentant le nombre de Hartmann (Ha). L'effet de la fraction volumique des nanoparticules peut être négligé à $\text{Ha} > 60$. L'augmentation du facteur de forme de l'enceinte (AR), fraction volumique des nanoparticules et des valeurs de l'angle d'inclinaison (α) entraînent une augmentation du Nu_{av} . L'influence de α sur le transfert de chaleur diminue par augmentation de (AR). La valeur minimum du nombre de Nusselt est obtenue pour $\text{AR}=0.2$ et $\alpha=45^\circ$. **Noghrehabadi et Samimi [9]** ont étudié numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluides CuO-eau. Les parois horizontales de l'enceinte sont adiabatiques, tandis que les parois verticales sont différentiellement chauffées. Leurs résultats montrent qu'il y'a une amélioration du taux de transfert de chaleur pour toute la gamme du nombre de Rayleigh quand les effets du thermophorèse et du mouvement brownien sont pris en compte. **Ashorynejad et Shahriari [10]** ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle du nanofluide hybride Al_2O_3 -Cu/eau dans une enceinte ouverte ondulée et soumise à un champ magnétique uniforme. Leurs résultats montrent que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann, mais il augmente proportionnellement avec le nombre de Rayleigh et la fraction volumique des nanoparticules. Le champ magnétique augmente ou diminue l'effet produit, par la présence de nanoparticules par rapport au nombre de Rayleigh. **Bezi et al. [11]** ont étudié numériquement la génération d'entropie lors de la convection naturelle au sein d'une enceinte semi-annulaire inclinée, chauffée par le haut, et

remplie de différents nanofluides à base d'eau contenant divers types de nanoparticules (Au, Ag, Cu et CuO). La fraction volumique est $0 \leq \phi \leq 0.8$ et le nombre de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 . Leurs résultats montrent que la génération d'entropie moyenne due au transfert de chaleur est renforcée par l'augmentation de ϕ et Ra. **Hoghoughi et al. [12]** ont étudié l'effet des paramètres géométriques sur la convection naturelle d'un nanofluide sur un appareil de chauffage cylindrique situé à l'intérieur d'une enceinte poreuse à parois ondulées, en utilisant la condition de non équilibre thermique local (LTNE). Ils ont trouvé que lorsque la source de chaleur cylindrique est située au fond de l'enceinte, le nanofluide devient plus homogène du fait de l'agitation provoquée par de forts tourbillons. Lorsque l'amplitude des ondulations des parois latérales augmente, le flux du nanofluide devient plus fort, ce qui conduit à une distribution plus uniforme des nanoparticules autour de l'enceinte. Aux faibles amplitudes des ondulations, le nombre de Nusselt moyen du fluide diminue quand la source de chaleur est élevée. **Tayebi et al. [13]** ont étudié la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Cu-eau) avec des conditions de chauffage uniforme et sinusoïdale. Leurs résultats montrent que la température uniforme donne un nombre de Nusselt plus élevé que celle de la température sinusoïdale et que pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh l'augmentation de la fraction volumique donne une augmentation du nombre de Nusselt moyen et que cette augmentation est plus élevée pour le cas de la température uniforme. **Abu-Nada et Oztop [14]** ont étudié numériquement l'effet de l'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire, différentiellement chauffée et remplie de nanofluides. Ils ont trouvé que l'effet de la concentration des nanoparticules sur le nombre de Nusselt est plus remarquable pour les faibles fractions volumiques, et que le pourcentage d'amélioration du transfert de chaleur en utilisant les nanoparticules diminue pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh. **Lin et Violi [15]** ont étudié le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide par convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluides (Al_2O_3 -eau), et de parois verticales différentiellement chauffées. Ils ont trouvé que la diminution du nombre de Prandtl amplifie les effets des nanoparticules en raison de l'augmentation de la diffusivité thermique efficace. **Rahimi et al. [16]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire, différentiellement chauffée et remplie d'un mélange de nanoparticules-eau. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. Les propriétés des nanoparticules influent sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur. **Sharma et Gupta [17]** ont étudié le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide dans une enceinte rectangulaire, de parois verticales différentiellement chauffées, et remplie de trois types différents de nanofluides. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme du nombre de Grashof, et que la présence des nanoparticules dans le fluide change les caractéristiques des fluides de base, et que pour les nanoparticules de Cu on obtient la plus grande valeur de la diffusivité thermique. **Abu-Nada et Chamkha [18]** ont fait une étude numérique sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire différentiellement chauffée et remplie de nanofluides (CuO-EG-eau). Ils ont prévu que le rapport d'aspect de l'enceinte aurait des effets significatifs sur le comportement du nombre moyen de Nusselt qui diminue à mesure que le rapport d'aspect de l'enceinte augmente. **Ternik et al. [19]** ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle à

l'intérieur d'une enceinte carrée remplie d'un nanofluide (Au-eau), et dont les parois verticales sont différentiellement chauffées. Leurs résultats indiquent que l'augmentation à la fois du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, augmente le taux de transfert de chaleur (le nombre de Nusselt moyen), et que l'effet des nanoparticules hautement conductrices sur l'amélioration du transfert de chaleur est plus important pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh. **Ternik et Rudolf [20]** ont étudié numériquement l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte carrée. L'enceinte dont les parois verticales sont différentiellement chauffées est remplie de différents types de nanofluides. Ils ont indiqué dans leurs résultats que le nombre de Nusselt moyen est une fonction croissante à la fois du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules. L'effet des nanoparticules hautement conductrices sur l'amélioration du transfert de chaleur est plus important pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh et que l'augmentation à la fois du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, augmentent le taux de transfert de chaleur. **Li et Peterson [21]** ont étudié expérimentalement les caractéristiques du transfert de chaleur par convection naturelle du nanofluide Al_2O_3 /eau. Les tests de température et du nombre de Nusselt du nanofluide ont démontré un écart par rapport à celle des fluides de base purs (eau distillée), et ils ont observé une diminution du coefficient de transfert de chaleur par convection naturelle avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules dans les nanofluides. **Tavman et al. [22]** ont présenté une étude expérimentale de la conductivité thermique et la viscosité des nanofluides (SiO_2 -eau) et (Al_2O_3 -eau). Leurs résultats montrent que la conductivité thermique effective des nanofluides augmente à mesure que la concentration des particules augmente indépendamment de la température du fluide. Les viscosités efficaces de ces nanoparticules augmentent avec l'augmentation de la concentration des particules, et diminuent avec l'augmentation de la température. **Cihan et al. [23]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire de parois verticales différentiellement chauffées, inclinée, remplie de nanofluide (CuO-eau) et comportant un conducteur de chaleur cylindrique circulaire dans leur centre. Leurs résultats montrent que l'ajout des nanoparticules au fluide de base augmente significativement le transfert de chaleur. Le nombre de Nusselt moyen présente au début une augmentation puis une diminution quand l'angle d'inclinaison augmente, et que le transfert de chaleur est à son maximum à $\theta=45^\circ$ pour $\text{Ra}=10^4$, et à $\theta=30^\circ$ pour $\text{Ra}=10^5$ et $\text{Ra}=10^6$. **Abu-Nada [24]** a étudié numériquement l'effet des différents modèles de la viscosité et de la conductivité thermique du nanofluide Al_2O_3 -eau sur l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire différentiellement chauffé. Il a observé que pour $\text{Ra}\geq 10^4$ le nombre de Nusselt moyen diminue en augmentant la fraction volumique des nanoparticules. Cependant, pour $\text{Ra}=10^3$ le nombre de Nusselt moyen augmente en augmentant la fraction volumique des nanoparticules et que pour $\text{Ra}\geq 10^4$ la différence est petite entre le nombre de Nusselt du modèle de **Garnett** et celle de **Chon et al.** Mais pour $\text{Ra}=10^3$ il y avait un écart qui devient plus important à haute fraction volumique des nanoparticules. **Bakhshan et Emrani [25]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire différentiellement chauffée et remplie de plusieurs types de nanofluides. Leurs résultats indiquent une augmentation du nombre de Nusselt moyen avec les nanoparticules pour toutes les valeurs du nombre de Grashof, et que la plus forte augmentation est obtenue pour les nanoparticules de Cu. **Guiet et al. [26]** ont

étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (Cu-eau) avec un élément chauffant fixé à la paroi de bas. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur est amélioré en augmentant à la fois le nombre de Rayleigh et la fraction volumique des nanoparticules, et aussi en augmentant la taille de la source de chaleur. **Basak et al. [27]** ont étudié numériquement les effets du chauffage uniforme et non-uniforme des parois inclinées sur la convection naturelle dans une enceinte triangulaire isocèle. Ils ont trouvé que le taux de transfert de chaleur global pour un chauffage non-uniforme est inférieur à celui du chauffage uniforme. **El Bouihi et al. [28]** ont étudié numériquement l'effet des conditions aux limites uniforme et sinusoïdale sur la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de nanofluide (eau-cuivre). Ils ont trouvé que l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules en suspension augmente considérablement le taux de transfert de chaleur pour n'importe quel nombre de Grashof. **Aktas [29]** a étudié numériquement les effets des flux oscillatoires sur le transfert de chaleur par convection dans une enceinte rectangulaire remplie de nanofluide (Al_2O_3 -eau). Il a observé que l'écoulement oscillant augmente de façon significative le transfert de chaleur par rapport à la conduction pure, et que l'augmentation est plus évidente dans le cas de faible concentration volumique des nanoparticules. **Mansour et al. [30-31]** ont fait une étude numérique sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans une enceinte sous forme de T remplie de différents types de nanofluides. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt moyen a augmenté avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et la fraction volumique des nanoparticules de Cu indépendamment du rapport d'aspect de l'enceinte et dans une autre étude ils ont considéré une enceinte trapézoïdale inclinée, partiellement chauffée par le haut, et remplie d'un nanofluide (Cu-eau) en présence d'un champ magnétique vertical. Ils ont trouvé que le taux de transfert de chaleur optimum est obtenu pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh en l'absence de la force magnétique. **N. Ben-Cheikh et al. [32]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée chauffée par le bas par une température non-uniforme et remplie de différents types de nanofluides. Ils ont observé une amélioration du taux de transfert de chaleur avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme des nombres de Rayleigh, et cette amélioration dépend fortement du type de nanofluide. Pour $Ra=10^6$, l'écoulement eau pure devient instationnaire, mais l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules permet le retour de l'écoulement à l'état stationnaire. **Cho et al. [33]** ont étudié les caractéristiques du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire dont la paroi basse est ondulée. L'enceinte est chauffée par le bas, et remplie de nanofluide Cu-eau. Leurs résultats ont montré que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules, et que le nombre de Nusselt moyen peut être optimisé en réglant de façon appropriée les conditions de géométrie en fonction du nombre de Rayleigh. **Nasrin et al. [34]** ont étudié numériquement les influences de la conductivité thermique et de la viscosité dans une couche mince de nanofluide (Cu-eau). Les résultats montrent que les meilleures performances du transfert de chaleur sont obtenues en utilisant les valeurs les plus élevées de la conductivité thermique, et les valeurs les plus faibles de la viscosité. **Oztop et Abu-Nada [35]** ont étudié le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide dans une enceinte rectangulaire partiellement chauffée par la paroi gauche et remplie de trois types de nanofluides. Ils ont trouvé que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent avec la fraction volumique des nanoparticules pour toute la

gamme de Rayleigh. **Sharma et Gupta [36]** ont étudié le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide dans une enceinte rectangulaire, de parois verticales différentiellement chauffées, et remplie de trois types différents de nanofluides. Ils ont trouvé que la convection naturelle, dans une enceinte carrée chauffée par le côté, est plus stable pour les nanofluides à base d'eau que pour les nanofluides à base d'autres fluides. Le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme du nombre de Grashoff, et que la présence des nanoparticules dans le fluide change les caractéristiques des fluides de base, et que les particules de Cu ont la plus grande valeur de la diffusivité thermique. En plus de la conductivité thermique, la viscosité dynamique effective joue un rôle majeur dans l'amélioration du transfert de chaleur avec l'existence d'une différence significative à partir des différents modèles adoptés. **Tavman et al. [37]** ont présenté une étude expérimentale de la conductivité thermique et la viscosité des nanofluides (SiO_2 -eau) et (Al_2O_3 -eau). Leurs résultats montrent que la conductivité thermique effective des nanofluides augmente à mesure que la concentration des particules augmente indépendamment de la température du fluide. Les viscosités efficaces de ces nanoparticules augmentent avec l'augmentation de la concentration des particules, et diminue avec l'augmentation de la température. **Yu et Choi [38]** ont étudié un modèle de **Maxwell** modifié qui comprend un nano-couche. Leur étude suggère la nouvelle approche que l'ajout de plus petites particules (diamètre < 10 nm) pourrait être potentiellement mieux que d'ajouter plus de particules pour concocter un liquide de refroidissement de nouvelle génération. **Jalal et al. [39]** ont étudié, expérimentalement et numériquement, les caractéristiques du transfert de chaleur d'un dissipateur de chaleur en utilisant le nanofluide (CuO-eau). Ils ont conclu que les nanoparticules de CuO dispersées dans l'eau augmentent le coefficient de transfert de chaleur du dissipateur de manière significative, et cela est principalement attribué à la conductivité plus élevée des nanofluides et le mouvement brownien des particules. La quantité d'augmentation du coefficient de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la concentration des particules et ne diminue pas à des nombres de Reynolds plus élevés. **Cihan et al. [40]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire de parois verticales différentiellement chauffées, inclinée, remplie de nanofluide (CuO-eau) et comportant un conducteur de chaleur cylindrique circulaire dans leur centre. Leurs résultats montrent que l'ajout des nanoparticules au fluide de base augmente significativement le transfert de chaleur. Le nombre de Nusselt moyen présente au début une augmentation puis une diminution quand l'angle d'inclinaison augmente, et que le transfert de chaleur est à son maximum à $\theta=45^\circ$ pour $\text{Ra}=10^4$, et à $\theta=30^\circ$ pour $\text{Ra}=10^5$ et $\text{Ra}=10^6$. **Sheikholeslami et al. [41]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de différents types de nanofluides, et comportant un cylindre circulaire chauffé dans son centre. Selon leurs résultats, les particules de cuivre conduisent à l'obtention de la plus grande amélioration à ce problème. **Abu-Nada [42]** a étudié numériquement l'effet des différents modèles de la viscosité et de la conductivité thermique du nanofluide Al_2O_3 -eau sur l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire différentiellement chauffé. Il a observé que pour $\text{Ra} \geq 10^4$ le nombre de Nusselt moyen diminue en augmentant la fraction volumique des nanoparticules. Cependant, pour $\text{Ra}=10^3$ le nombre de Nusselt moyen augmente en augmentant la fraction volumique des nanoparticules, et que pour $\text{Ra} \geq 10^4$ la différence est petite entre le nombre de Nusselt du model de **Garnett**

et celle de **Chon et al.**, mais pour $Ra=10^3$, il y avait un écart qui devient plus important à haute fraction volumique des nanoparticules. **Sharma et al. [43]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide dans une enceinte carrée remplie de trois types différents de nanofluides, en utilisant quatre différents types de modèle pour la viscosité effective du nanofluide. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt augmente quand la fraction volumique augmente. Les nanoparticules de Cu possèdent une valeur élevée de la diffusivité thermique comparées aux autres nanoparticules. **Öztuna et al. [44]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée différentiellement chauffée et partiellement divisée par des séparations, et remplie de différents types de nanofluide. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur diminue considérablement avec l'augmentation de séparation et augmente considérablement avec l'introduction des nanoparticules dans le fluide, et que cette augmentation est maximale pour les nanoparticules de Cu, et minimale pour les particules de Al_2O_3 . Le nombre de Nusselt moyen augmente, presque linéairement, avec les fractions volumiques. L'augmentation du nombre de Nusselt moyen, en raison de l'utilisation des nanoparticules, est de 35% pour $Ra=10^4$, jusqu'à 32% pour $Ra=10^5$ et jusqu'à 25% pour $Ra=10^6$. **Bakhshan et Emrani [45]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire différentiellement chauffée, et remplie de plusieurs types de nanofluides. Leurs résultats indiquent une augmentation du nombre de Nusselt moyen avec les nanoparticules pour toutes les valeurs du nombre de Grashof, et que la plus forte augmentation est obtenue pour les nanoparticules de Cu. **El Hattab et al. [46]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée remplie de différents types de nanofluides, et chauffée par sa paroi gauche. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules et du nombre de Rayleigh. **Oueslati et al. [47]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire différentiellement chauffée, et remplie de différents types de nanofluides. Ils ont trouvé que les nanofluides améliorent le transfert thermique, et que la meilleure amélioration est obtenue avec les nanoparticules de Cu.

A l'issue de cette rétrospective sur les travaux de recherche qui ont contribué à la compréhension du phénomène de la convection naturelle via les nanofluides, une amélioration des transferts de chaleur par convection naturelle dans des géométries à parois planes et courbées remplies de ces derniers a été observée. Ceci illustre bien l'importance de ce phénomène qui continue à susciter une attention croissante.

La majorité des travaux référentiels cités dans de ce chapitre porte sur la convection naturelle dans des enceintes, carrées et à parois courbées de différentes formes, remplies de nanofluides. La revue bibliographique considérée ici ne cite aucun travail concernant l'étude et la comparaison de la convection naturelle au sein des nanofluides confinés dans des enceintes pareilles à celles que nous avons choisi, ce qui a motivé cette investigation.

L'intérêt porté aussi, à nos géométries, est dû essentiellement aux avantages que le choix de nos enceintes est très intéressant, car il résout le problème concret de l'enceinte carrée qui se transforme automatiquement (en appliquant, volontairement ou accidentellement, des contraintes horizontales sur ces parois verticales) en enceinte A, et en enceinte B si leurs parois horizontales sont soumises à des contraintes verticales. Ce type de

problème peut être rencontré dans plusieurs cas de l'industrie, tel que le refroidissement des boites électriques ou électroniques.

Chapitre 2

Analyse théorique

2.1 Description du problème

Dans cette étude nous allons étudier et comparer la convection naturelle dans les trois enceintes représentées dans la figure 2.1. Ces enceintes qui sont remplies de nanofluid Cu-eau ($Pr=6.2$) sont soumises à trois différents types de conditions aux limites qui sont :

Première condition pariétale thermique:

Les parois horizontales des enceintes sont adiabatiques, et les parois verticales sont isothermes maintenues aux températures froide T_c et chaude T_h .

Deuxième condition pariétale thermique:

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues isothermes à une température chaude constante T_h .

Troisième condition pariétale thermique:

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues à une température sinusoïdale.

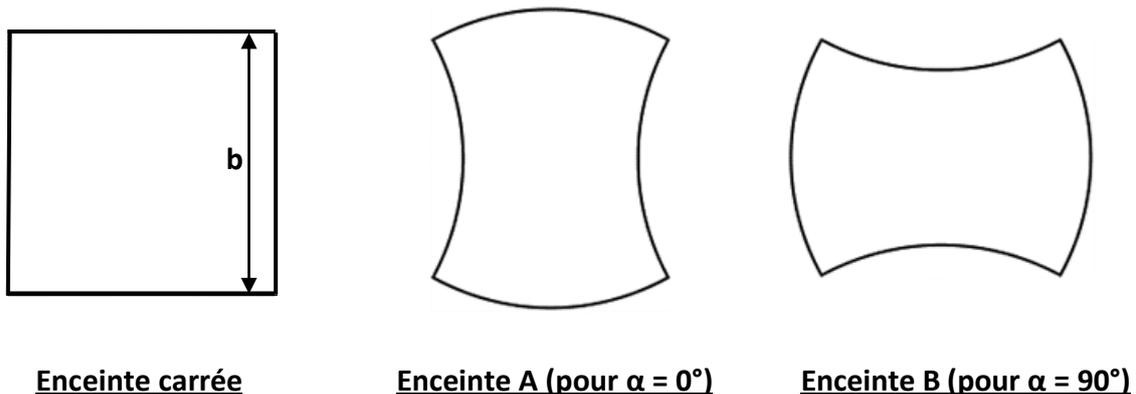


Fig. 2.1.Représentation des enceintes étudiées.

Enceinte A : enceinte à parois horizontales concaves et parois verticales convexes.

Enceinte B : enceinte à parois horizontales convexes et parois verticales concaves.

Les deux enceintes A et B sont obtenues à partir de l'enceinte représentée dans la figure 2.2 en prenant les deux valeurs de l'angle d'inclinaison α ($\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$).

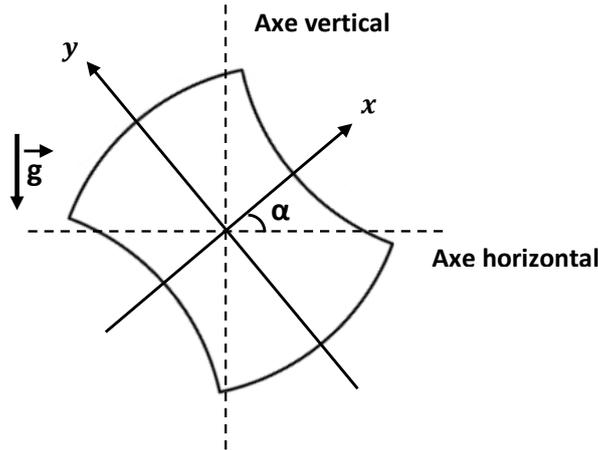


Fig. 2.2. L'enceinte étudiée.

2.2 Modèle monophasique :

Un des modèles développés qui a beaucoup attiré l'attention des chercheurs est le modèle monophasique pour les avantages qu'il présente : moins de consommation de temps de calcul et fiabilité des résultats obtenus. Considérant que les particules solides en suspension sont très fines rendant leur fluidisation simple et sans effet de glissement assurant ainsi un équilibre thermique entre les phases solides et fluides. De ce fait, **ce modèle traite le nanofluide comme un fluide homogène** sur lequel sont appliqués les principes de conservation connus sauf qu'à la place des **propriétés physiques du fluide** il s'agira de considérer les **propriétés thermo physiques du nanofluide**. Ces dernières tiennent compte des propriétés des deux phases fluide et solide.

2.3 Hypothèses simplificatrices

Dans le cadre du modèle nanofluide monophasique, la phase liquide et les nanoparticules solides sont considérées en équilibre thermique. Les hypothèses simplificatrices usuelles largement utilisées dans la dynamique des fluides sont aussi prises en compte :

- L'écoulement est bidimensionnel.
- Le nanofluide est considéré newtonien et incompressible.
- L'écoulement est laminaire établi.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le rayonnement thermique à l'intérieur du passage annulaire est négligeable.
- Les propriétés physiques du nanofluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.

$$\rho_{nf} = \rho_{nf}(p, T) = \rho_{nf}(T) = \rho_{0nf} - (\rho\beta)_{nf}(T - T_0)$$

Où : β_{nf} : est le coefficient de dilatation thermique à pression constante du nanofluide (coefficient de compression isochore).

ρ_{0nf} : La masse volumique de référence (constante).

T_0 : La température de référence (constante) associée à ρ_{0nf} .

2.4 Formulation du problème

2.4.1 Formulation vectorielle du problème

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho_{nf}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{nf} \vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement

Pour les fluides réels incompressibles :

$$\rho_{nf} \left[(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho_{nf} \vec{g} - \text{grad} p + \mu_{nf} \Delta \vec{v} \quad (2.3)$$

Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \Delta T \quad (2.4)$$

Pour notre cas : écoulement permanent, laminaire et incompressible, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, ces relations s'écrivent :

Equation de continuité

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement

$$\rho_{0nf} \left[(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = [\rho_{0nf} - (\rho\beta)_{nf} (T - T_0)] \vec{g} - \text{grad} p + \mu_{nf} \Delta \vec{v}$$

$$\text{Ce qui donne: } \rho_{0nf} \left[(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho_{0nf} \vec{g} - (\rho\beta)_{nf} (T - T_0) \vec{g} - \text{grad} p + \mu_{nf} \Delta \vec{v} \quad (2.6)$$

Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})T = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \Delta T \quad (2.7)$$

Avec :

\vec{v} : Vecteur vitesse du fluide.

\vec{g} : Vecteur accélération de la pesanteur.

P : Pression du fluide.

λ : Conductivité thermique du fluide.

T : Température du fluide.

C_p : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

t : temps

μ : viscosité dynamique du fluide

ν : viscosité cinématique du fluide

2.4.2 Formulation indicielle

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j) = 0 \quad (2.5.a)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{nf} v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{nf} v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_{nf} g_i \quad (2.6.a)$$

Equation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\rho C_p)_{nf} T) + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho C_p)_{nf} T v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_{nf} \frac{\partial T}{\partial x_j}) \quad (2.7.a)$$

Avec τ_{ij} : Tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

2.4.3 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations s'écrivent respectivement en coordonnées cartésiennes :

Nous posons maintenant $\rho_{nf} = \rho_{0nf}$ ce qui donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g T_d \sin(\alpha) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g T_d \cos(\alpha) + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.9.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

Avec $p^* = p + \rho_{nf} g z$: pression motrice

2.5 Equation de vorticité

L'introduction des variables vorticité ω et fonction de courant ψ a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression.

En dérivant les équations du mouvement (2.9.a) et (2.9.b) respectivement par rapport à y et à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g T_d \sin(\alpha) \right) \\ &+ \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g T_d \cos(\alpha) \right) \\ &+ \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11.b)$$

Et en soustrayant l'équation (2.11.a) de (2.11.b), en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité ω , nous obtenons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\text{Avec : } \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.14.b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.b)$$

Remarque:

Pour l'enceinte carrée les équations de continuité, devorticité et l'équation d'énergie s'écrivent respectivement en coordonnées cartésiennes comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.16')$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.17')$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.18')$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.19')$$

2.6 Introduction des coordonnées bicylindriques (pour les enceintes A et B)

Il est commode de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites «bicylindriques», permettent, précisément dans notre cas, d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées (η, θ, z) , les surfaces $\eta=\text{constante}$ sont des cylindres circulaires avec des axes dans le plan xz , les surfaces $\theta=\text{constante}$ sont les portions des cylindres circulaires avec des axes dans le plan yz , et les surfaces $z=\text{constante}$ sont les plans parallèles.

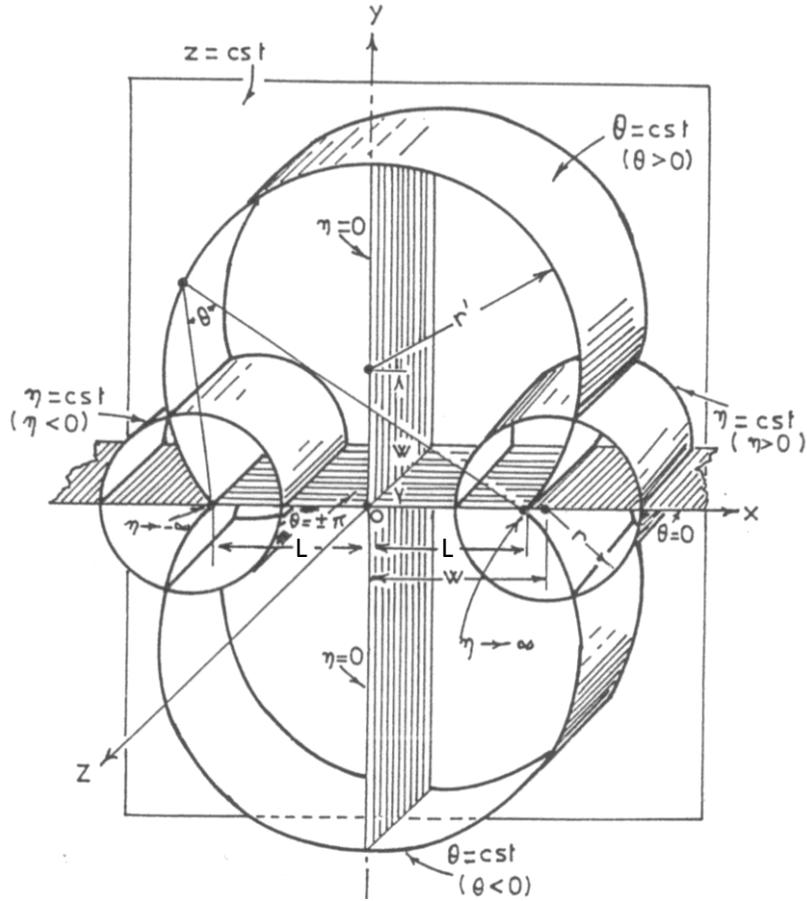


Fig. 2.3. Représentation schématique des coordonnées bicylindriques.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes (voir annexe 1) :

$$\begin{cases} x = \frac{Lsh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L\sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \end{cases} \quad (2.16)$$

Les relations (2.8), (2.10), et (2.12) s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(hV_\theta) = 0 \quad (2.17)$$

$$h \frac{\partial T}{\partial t} + V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{g}{h} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$+ \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \theta} \left\} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.19)$$

Avec :

$$h = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

$$F(\eta, \theta) = \frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \quad (2.20)$$

$$G(\eta, \theta) = \frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

V_η, V_θ : composantes du vecteur vitesse suivant les directions η et θ respectivement.

La fonction de courant ψ et de vorticité ω sont définies par les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

En introduisant la fonction de courant, de façon à vérifier l'équation de continuité il vient :

$$V_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (2.21)$$

Vérification :

$$\text{Equation de continuité : } \frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(h \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \left(-\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \theta}$$

La relation est vérifiée

$$\text{La vorticité : } \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{D'où : } \omega = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \psi$$

$$\text{Donc : } \omega = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.22)$$

2.7 Adimensionalisation

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier *a priori* la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Pour les enceintes A et B :

Nous posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$H = \frac{h}{L}, \quad V_{\eta}^+ = V_{\eta} \frac{L}{a_f}, \quad V_{\theta}^+ = V_{\theta} \frac{L}{a_f}, \quad \psi^+ = \frac{\psi}{a_f}, \quad \omega^+ = \omega \frac{L^2}{a_f}, \quad T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

$$t^+ = t \frac{a_f}{L^2}$$

Avec :

a_f : Diffusivité thermique.

L : Longueur caractéristique choisie arbitrairement égale à la distance entre les pôles apparaissant dans la relation des coordonnées (η, θ) .

$\frac{a_f}{L}$: vitesse caractéristique.

$\frac{L^2}{a_f}$: Temps caractéristique.

La température adimensionnelle :

1) Parois isothermes (verticales) :

$$T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

Avec T_h : température chaude.

T_c : Température froide.

2) Parois adiabatiques (horizontales) :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \text{ ce qui donne : } \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (2.17), (2.18) et (2.19) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+) = 0 \tag{2.23}$$

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + H V_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \tag{2.24}$$

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + H V_\eta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + H V_\theta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = P_r \cdot R_a \cdot H \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \right.$$

$$\left. \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \left. \right\} +$$

$$P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \left[\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.25)$$

Avec : $R_a = \frac{g\beta_f \Delta T L^3}{\nu_f a_f}$: nombre de Rayleigh

$P_r = \frac{\nu_f}{a_f}$: nombre de Prandtl

Les composantes V_η^+ , V_θ^+ de la vitesse adimensionnelle sont définies par :

$$\text{On a : } V_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Leftrightarrow V_\eta^+ \frac{a_f}{L} = \frac{a_f}{HL} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$$

$$\Leftrightarrow V_\eta^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \quad (2.26.a)$$

$$\text{Aussi : } V_\theta^+ = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \quad (2.26.b)$$

La vorticité adimensionnelle ω^+ est définie par :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \Leftrightarrow \frac{a_f}{L^2} \omega^+ = -\frac{1}{H^2} \frac{a_f}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.27)$$

Remarque :

Pour l'enceinte carrée :

Nous posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad U = \frac{ub}{a_f}, \quad V = \frac{vb}{a_f}, \quad \psi^+ = \frac{\psi}{a_f}, \quad \omega^+ = \omega \frac{b^2}{a_f}, \quad T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

$$t^+ = t \frac{a_f}{b^2}$$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (2.16'), (2.17'), (2.18') et (2.19') on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.28)'$$

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + U \frac{\partial \omega^+}{\partial X} + V \frac{\partial \omega^+}{\partial Y} = P_r \cdot R_a \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \frac{\partial T^+}{\partial X} +$$

$$P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \left[\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial Y^2} \right] \quad (2.29)'$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + U \frac{\partial T^+}{\partial X} + V \frac{\partial T^+}{\partial Y} = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]} \left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial Y^2} \right) \quad (2.30)'$$

Les composantes U, V de la vitesse adimensionnelle sont définies par :

$$\text{On a : } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Leftrightarrow U \frac{a_f}{b} = \frac{a_f}{b} \frac{\partial \psi^+}{\partial Y}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{\partial \psi^+}{\partial Y} \quad (2.31.a)'$$

$$\text{De la même façon : } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ donne : } V = -\frac{\partial \psi^+}{\partial X} \quad (2.31.b)'$$

La vorticité adimensionnelle ω^+ est définie par :

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \Leftrightarrow \frac{a_f}{b^2} \omega^+ = -\frac{a_f}{b^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial Y^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \omega^+ = -\left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial Y^2}\right) \quad (2.32)'$$

2.8 Coefficients d'échange de chaleur

2.8.1 Nombre de Nusselt local

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt. Les valeurs de ce dernier sur les parois des enceintes carrée, A et B sont définies comme suit :

Sur les parois verticales :

$$\text{Enceinte A : } Nu_l = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cste} \quad (2.28)$$

$$\text{Enceinte B : } Nu_l = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \Big|_{\theta=cste} \quad (2.29)$$

$$\text{Enceinte carrée : } Nu_l = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial T^+}{\partial X} \Big|_{X=cste} \quad (2.30)$$

Sur la paroi d'ubas :

$$\text{Enceinte A : } Nu_b = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \Big|_{\theta=cste} \quad (2.31)$$

$$\text{Enceinte B : } Nu_b = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cste} \quad (2.32)$$

$$\text{Enceinte carrée : } Nu_b = -\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial T^+}{\partial Y} \Big|_{Y=cste} \quad (2.33)$$

2.8.2 Nombre de Nusselt moyen

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt le long des parois des enceintes carrée, A et B se calculent comme suit :

Sur les parois verticales :

$$\text{Enceinte A : } \overline{Nu}_l = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu_l d\theta \quad (2.34)$$

$$\text{Enceinte B : } \overline{Nu}_l = \frac{1}{\eta_{NI} - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_{NI}} Nu_l d\eta \quad (2.35)$$

$$\text{Enceinte carrée : } \overline{Nu}_l = \frac{1}{b} \int_0^b Nu_l dy \quad (2.36)$$

Sur la paroi d'ubs :

$$\underline{\text{Enceinte A}} : \overline{Nu_b} = \frac{1}{\eta_{NI} - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_{NI}} Nu_b d\eta \quad (2.37)$$

$$\underline{\text{Enceinte B}} : \overline{Nu_b} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu_b d\theta \quad (2.38)$$

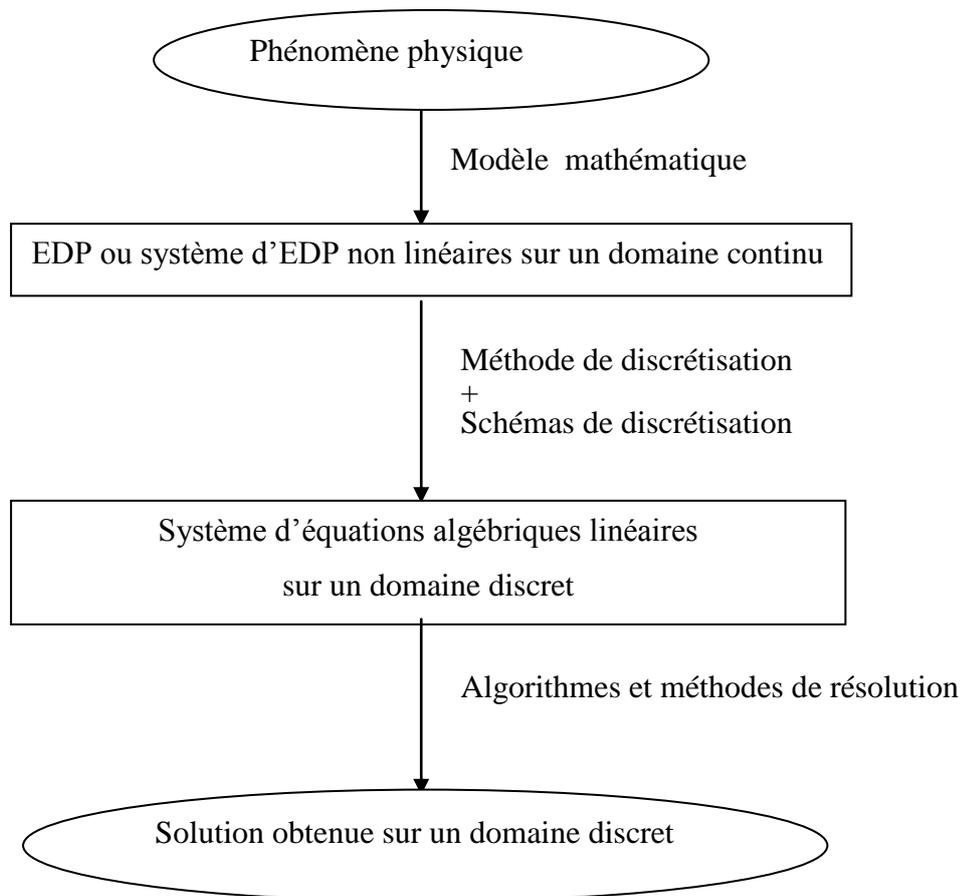
$$\underline{\text{Enceinte carrée}} : \overline{Nu_b} = \frac{1}{b} \int_0^b Nu_b dx \quad (2.39)$$

Chapitre 3

Formulation numérique

3.1 Introduction

La simulation numérique (calcul numérique) d'un phénomène physique, dans ce cas l'étude et la comparaison de la convection naturelle dans différents types d'enceintes remplies de nanofluide (eau-Cu), suit en général le principe suivant :



Le modèle mathématique constitué par une équation ou un système d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), qui régit le phénomène physique, s'exprime en utilisant une méthode de discrétisation, par un système d'équations algébriques linéaires.

Parmi les méthodes de discrétisation les plus connues citons :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode spectrale.
- La méthode des volumes finis.

3.2 Méthode de résolution numérique

Pour résoudre le système d'équations (2.24), (2.25), qui sont des équations de type paraboliques, et les conditions aux limites associées, nous choisissons, pour les discrétiser, la méthode des volumes finis, alors que pour l'équation (2.27) qui est de type elliptique, nous utilisons un développement en série de Taylor.

Les deux méthodes sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transfert, elles sont bien exposées par S.V.PATANKAR [48] et par NOGOTOV [49].

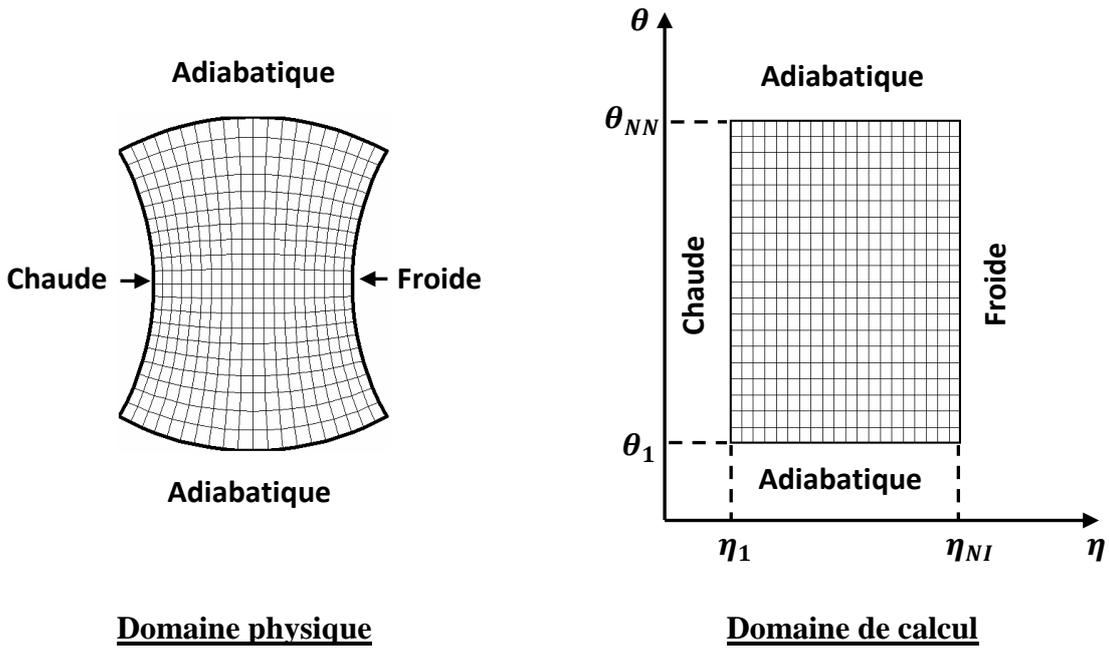
3.2.1 Méthode des volumes finis

C'est une méthode de discrétisation qui discrétise les EDP en équations algébriques pouvant être résolues numériquement.

Étapes de la méthode des volumes finis:

- 1/** Le maillage : la transformation d'un domaine physique continu (la géométrie) en un domaine de calcul discret constitué d'un certain nombre de points et de mailles (volumes finis) voir figure (3.1).
- 2/** Tous les termes des équations modélisantes sont intégrés un par un sur chaque volume de contrôle.
- 3/** Des profils ou des lois d'interpolation, entre des nœuds voisins, sont utilisées pour approcher la variation de Ω (variable générale d'écoulement).
- 4/** Obtention des équations algébriques en fonction des valeurs de Ω aux nœuds des maillages.
- 5/** La résolution du système d'équations algébriques.

Pour $\alpha = 0$:



Pour $\alpha = 90$:

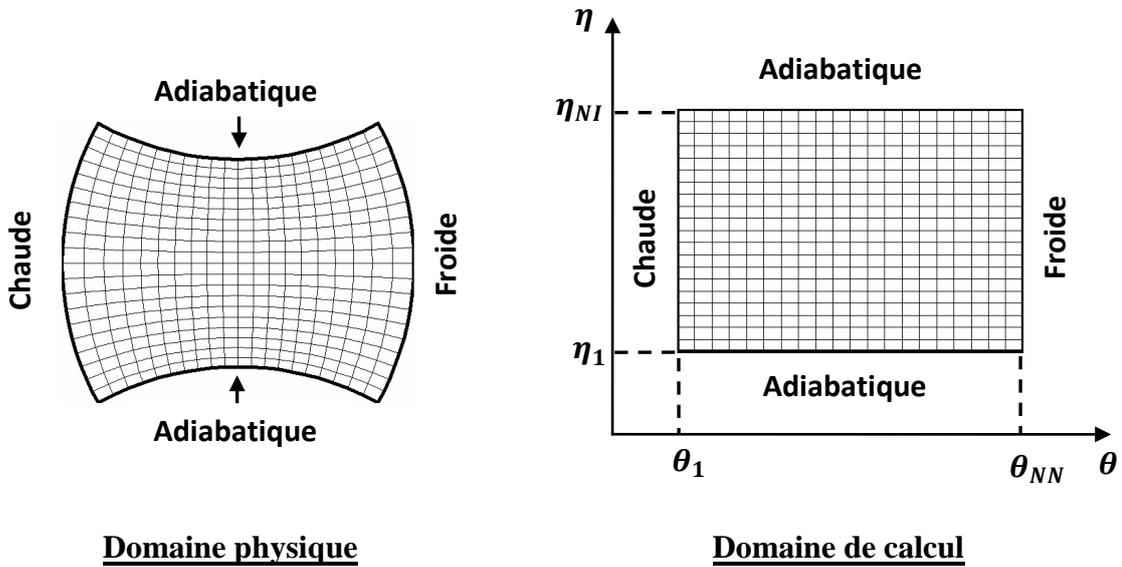


Figure 3.1 : Représente le domaine physique et le domaine de calcul.

3.2.2 Volume élémentaire d'intégration

Le domaine physique est divisé en un nombre de volumes finis, le centre d'un volume fini typique est un point «P», et ces faces latérales «est», «ouest», «nord» et «sud» sont localisées aux points e, w, n et s.

Les points E, W, N et S sont les nœuds des quatre volumes de contrôles adjacents respectivement à l'est, ouest, nord et sud du volume de contrôle typique.

Les variables (vorticité, température) sont stockées aux centres des volumes de contrôles.

Pour un nœud principal «P», les points E et W sont pris dans la direction θ , tandis que N et S sont pris dans la direction η .

La figure (3.2) représente un volume fini typique et son voisinage dans un volume de calcul.

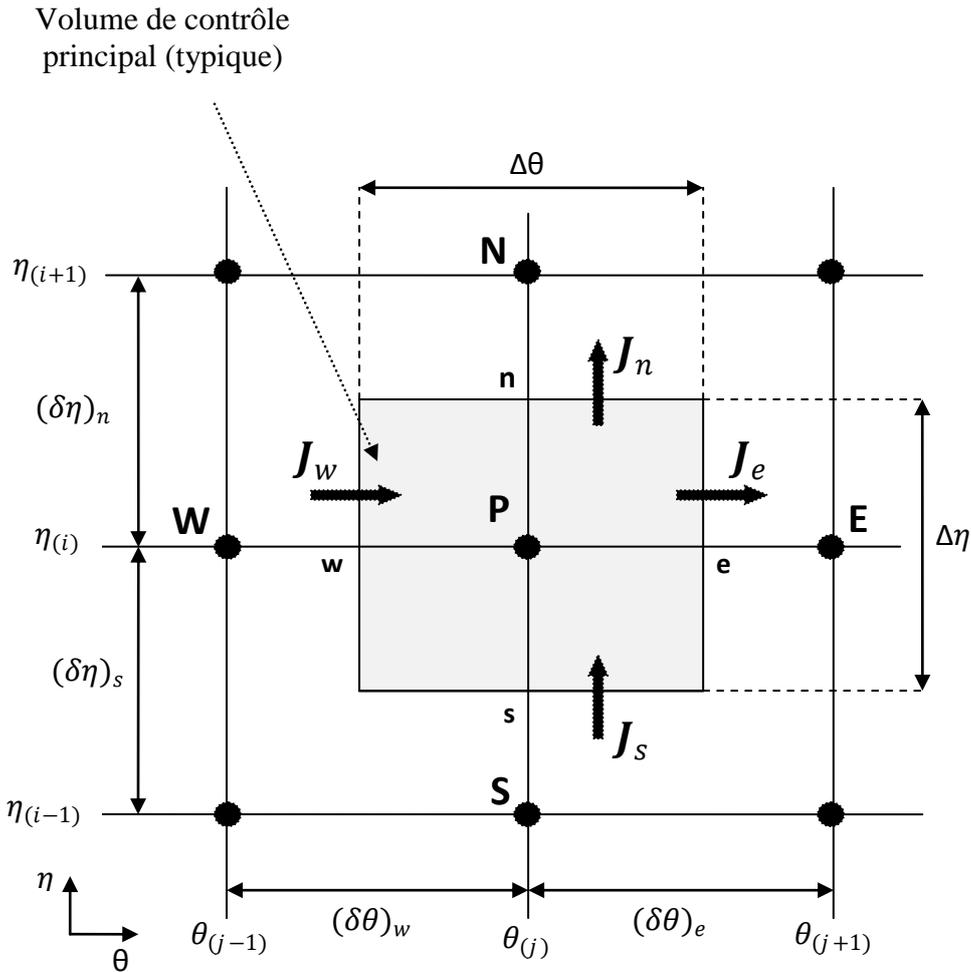


Figure 3.2 : Représentation du volume de contrôle typique.

Soit :

i : indice des nœuds suivant η

j : indice des nœuds suivant θ

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

NI : le nombre de points suivant η

NN : le nombre de points suivant θ

3.2.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable Ω dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Additionnons l'équation de la chaleur (2.24) à l'équation de continuité (2.23) multipliée par T^+ :

$$\begin{aligned} H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \left[T^+ \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+) + H V_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] + \left[T^+ \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+) + H V_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right] \\ = \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \\ \left[(1 - \phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ T^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ T^+) - \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) \\ - \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \left[(1 - \phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \end{aligned}$$

Finalement on trouve :

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ T^+) - \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \left[(1 - \phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ T^+ - \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]$$

En additionnant l'équation du mouvement (2.25) à l'équation de continuité (2.23) multipliée par ω^+ on trouve :

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ \omega^+ - P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ \omega^+ -$$

$$P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta}) = P_r R_a H \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right]$$

$$\left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} \quad (3.2)$$

Ces deux équations sont de la forme générale suivante :

$$H^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}) = S_{\Omega} \quad (3.3)$$

Le tableau suivant illustre les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , S_{Ω}

équation	Ω	Γ_{Ω}	S_{Ω}
3.1	T^+	$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}$ $\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]$	0
3.2	ω^+	$\frac{P_r}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]}$	$P_r R_a H \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right]$ $\left\{ \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right.$ $\left. + \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\}$

 Tableau 3.1. Les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , S_{Ω}

Ω : Fonction générale représente (T^+ ou ω^+)

Γ_{Ω} : Coefficient adimensionnel.

S_{Ω} : Terme de source.

3.2.3.1 Intégration de l'équation de transfert

L'équation de discrétisation d'une variable Ω est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume de contrôle fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de Ω .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} H^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t^+} dt d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}) dt d\eta d\theta \right] dz = \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} S_{\Omega} dt d\eta d\theta \right] dz \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

L'équation (3.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} H^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t^+} dt d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \eta} (J_\eta) dt d\eta d\theta \right] dz \\
 & + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) dt d\eta d\theta \right] dz = \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \int_{t^+}^{t^+ + \Delta t^+} S_\Omega dt d\eta d\theta \right] dz \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Avec :

$$J_\eta = HV_\eta^+ \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}$$

$$J_\theta = HV_\theta^+ \Omega - \Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$$

J_η, J_θ sont les flux totaux (convection plus diffusion).

De l'équation (3.5) on trouve :

$$(\Omega_p - \Omega_p^0) \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta \cdot 1}{\Delta t^+} + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \overline{S_\Omega} \cdot \Delta V \quad (3.6)$$

$\overline{S_\Omega}$: est la valeur moyenne du terme source S_Ω dans le volume de contrôle élémentaire.

J_e, J_w, J_n, J_s sont les valeurs des flux totaux aux interfaces Est, Ouest, Nord et Sud du volume de contrôle.

$$J_e = \int_s^e \left[(HV_\theta^+ \Omega)_e - \left(\Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right)_e \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_e \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_w = \int_s^e \left[(HV_\theta^+ \Omega)_w - \left(\Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right)_w \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_w \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_n = \int_w^e \left[(HV_\eta^+ \Omega)_n - \left(\Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right)_n \right] d\theta \cdot 1 = (J_\eta)_n \Delta \theta \cdot 1$$

$$J_s = \int_w^e \left[(HV_\eta^+ \Omega)_s - \left(\Gamma_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right)_s \right] d\theta \cdot 1 = (J_\eta)_s \Delta \theta \cdot 1$$

3.2.3.2 Linéarisation du terme source

Le terme source peut généralement être linéarisé en fonction de Ω_p (au nœud P) sous la forme :

$$\overline{S_\Omega} = S_0 + S_p \cdot \Omega_p$$

S_0 : la partie constante de $\overline{S_\Omega}$ qui ne dépend pas de Ω_p .

$$S_p < 0$$

Par suite l'équation (3.6) devient:

$$(\Omega_p - \Omega_p^0) \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta . 1}{\Delta t^+} + (J_n - J_s) + (J_e - J_w) = (S_0 + S_p . \Omega_p) \Delta V \quad (3.7)$$

Discretisons l'équation de continuité (2.23) :

$$\int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+) d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+) d\eta d\theta \right] dz = 0$$

$$\text{On pose } F_\eta = H V_\eta^+ \text{ et } F_\theta = H V_\theta^+$$

L'équation précédente devient:

$$\int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \frac{\partial F_\eta}{\partial \eta} d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^e \int_w^e \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} d\eta d\theta \right] dz = 0$$

Ce qui donne :

$$(F_n - F_s) + (F_e - F_w) = 0 \quad (3.8)$$

F_n, F_s, F_e, F_w sont les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle.

$$\begin{cases} F_n = (H V_\eta^+)_n . \Delta \theta . 1 \\ F_s = (H V_\eta^+)_s . \Delta \theta . 1 \\ F_e = (H V_\theta^+)_e . \Delta \eta . 1 \\ F_w = (H V_\theta^+)_w . \Delta \eta . 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

En multipliant l'équation (3.8) par la fonction Ω_p et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned} & (\Omega_p - \Omega_p^0) \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta . 1}{\Delta t^+} + (J_e - F_e \Omega_p) - (J_w - F_w \Omega_p) + (J_n - F_n \Omega_p) - (J_s - F_s \Omega_p) = \\ & = (S_0 + S_p . \Omega_p) \Delta V \quad (3.10) \end{aligned}$$

Les termes $(J_i - F_i \Omega_p)$, $i = e, w, n, s$ peuvent se mettre, d'après PATANKAR [48], sous la forme suivante :

$$J_e - F_e \Omega_p = a_E (\Omega_p - \Omega_E)$$

$$J_w - F_w \Omega_p = a_W (\Omega_W - \Omega_p)$$

$$J_n - F_n \Omega_p = a_N (\Omega_p - \Omega_N)$$

$$J_s - F_s \Omega_p = a_S (\Omega_S - \Omega_p)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} (\Omega_p - \Omega_p^0) \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta . 1}{\Delta t^+} + a_E (\Omega_p - \Omega_E) - a_W (\Omega_W - \Omega_p) + a_N (\Omega_p - \Omega_N) - a_S (\Omega_S - \Omega_p) = \\ = (S_0 + S_p . \Omega_p) \Delta V \end{aligned}$$

D'où l'équation discrétisée :

$$a_p \Omega_p = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W + a_N \Omega_N + a_S \Omega_S + b \quad (3.11)$$

Avec:

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p . \Delta V$$

$$b = S_0 \Delta V + a_p^0 \Omega_p^0$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_p^0 &= \frac{H^2 \Delta \eta \Delta \theta . 1}{\Delta t^+} \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

La fonction $A(|P|)$ est donnée, d'après PATANKAR [48], par le schéma " power law " comme suit :

$$A(|P|) = \|-0, (1 - 0, 1|P|)^5\|$$

Le symbole $\|A, B\|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de diffusion sont définies par :

$$D_e = (\Gamma_\Omega)_e \frac{\Delta \eta}{(\delta \theta)_e}$$

$$D_w = (\Gamma_\Omega)_w \frac{\Delta \eta}{(\delta \theta)_w}$$

$$D_n = (\Gamma_\Omega)_n \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_n}$$

$$D_s = (\Gamma_\Omega)_s \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_s}$$

$(\delta\theta)_e$, $(\delta\theta)_w$, $(\delta\eta)_n$ et $(\delta\eta)_s$: sont les pas d'intégrations, qui peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\theta$, $\Delta\eta$ respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$. Considérons que les interfaces e , w , n et s sont les milieux des nœuds (P,E), (P,W), (P,N) et (P,S).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = (\Gamma_\Omega)_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w = (\Gamma_\Omega)_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_n = (\Gamma_\Omega)_n \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s = (\Gamma_\Omega)_s \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Les nombres de Peclet P_e , P_w , P_n et P_s sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

3.2.3.3 Schémas de discrétisation spatiale

L'évaluation des flux de diffusion et de convection aux interfaces des volumes de contrôle après intégration se fera à l'aide des schémas de discrétisation.

Pour choisir le schéma de discrétisation approprié, il faut prendre en considération un certain nombre de critères tels que : stabilité, précision, coût de calcul numérique,... souvent les modèles les moins précis sont très robustes, tandis que les modèles les plus précis sont moins robustes et plus lents et coûtent cher.

Les différents schémas proposés par PATANKAR [48] permettant d'exprimer la fonction $A(|P|)$ sont les suivants :

Schéma des différences centrées :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = 1 - 0,5|P|$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = D_e (1 - 0,5|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_w = D_w (1 - 0,5|P_w|) + \|\ F_w, 0\|$$

$$a_n = D_n (1 - 0,5|P_n|) + \|-F_n, 0\|$$

$$a_s = D_s (1 - 0,5|P_s|) + \|\ F_s, 0\|$$

Remarque :

- Le schéma des différences centrées est stable pour $|P| \leq 2$ et donne des coefficients (a_E, a_W, a_N, a_S) positifs, et la précision du schéma sera acceptable.
- Pour $|P| > 2$ les coefficients de l'équation discrétisée peuvent être négatifs, et dans ces conditions les résultats ne respectent pas la physique du phénomène.
- Ce schéma est utilisé dans le cas où la convection ne domine pas la diffusion, mais il n'est pas recommandé d'être utilisé au calcul des écoulements.

Schéma Upwind :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = 1$$

Alors les coefficients seront :

$$a_E = D_e + \|-F_e, 0\|$$

$$a_w = D_w + \|\ F_w, 0\|$$

$$a_n = D_n + \|-F_n, 0\|$$

$$a_s = D_s + \|\ F_s, 0\|$$

Remarque :

- Pour le schéma Upwind les coefficients de l'équation discrétisée ne sont jamais négatifs (schéma inconditionnellement stable).

- schéma non approprié pour les faibles valeurs de $|P|$.

- le schéma Upwind est appliqué pour les écoulements à dominance convective suivant le sens de l'écoulement.

Schéma Exponentiel:

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\exp(|P|) - 1}$$

Alors les coefficients seront :

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(\frac{F_e}{D_e}) - 1} \quad , \quad a_w = \frac{F_w}{\exp(\frac{F_w}{D_w}) - 1}$$

$$a_N = \frac{F_n}{\exp(\frac{F_n}{D_n}) - 1} \quad , \quad a_s = \frac{F_s}{\exp(\frac{F_s}{D_s}) - 1}$$

Remarque :

Ce schéma est assez peu utilisé car :

- Les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement.
- Il n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

Schéma hybride :

La fonction $A(|P|)$ est définie comme suit :

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0,5|P|))$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = \max(-F_e, D_e - 0,5F_e, 0)$$

$$a_w = \max(-F_w, D_w - 0,5F_w, 0)$$

$$a_N = \max(-F_n, D_n - 0,5F_n, 0)$$

$$a_s = \left\| -F_s, D_s - 0,5F_s, 0 \right\|$$

Remarque :

- le schéma hybride est une combinaison améliorée entre le schéma centré et le schéma Upwind.

- Avec ce schéma l'erreur est maximale pour $|P| \cong 2$.

Schéma Power Law :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = \left\| 0, (1-0,1|P|)^5 \right\|$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée seront :

$$a_E = D_e \left\| 0, (1-0,1|P_e|)^5 \right\| + \left\| 0, -F_e \right\|$$

$$a_W = D_w \left\| 0, (1-0,1|P_w|)^5 \right\| + \left\| 0, F_w \right\|$$

$$a_N = D_n \left\| 0, (1-0,1|P_n|)^5 \right\| + \left\| 0, -F_n \right\|$$

$$a_S = D_s \left\| 0, (1-0,1|P_s|)^5 \right\| + \left\| 0, F_s \right\|$$

Remarque :

Le schéma Power Law est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, c'est pourquoi nous avons opté pour le choix de ce schéma.

3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0$$

En remplaçant dans l'équation (3.3) la fonction Ω par la température adimensionnelle T^+ et le terme source S_Ω par zéro, l'équation de la chaleur discrétisée sera :

$$a_P T_P^+ = a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + b \quad (3.15)$$

Avec : $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0$

$$b = a_P^0 \Omega_P^0$$

a_E, a_W, a_N, a_S et a_P^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.12).

3.3.1 Détermination des coefficients F_i , D_i et P_i ($i = n, s, e, w$)

Le calcul des coefficients a_E, a_W, a_N, a_S nécessite la détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$).

Remplaçons les vitesses adimensionnelles V_η^+ par : $\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$ et V_θ^+ par : $-\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ dans le système (3.9) on obtient :

$$F_n = \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n$$

$$F_s = \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s$$

$$F_e = \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e$$

$$F_w = \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w$$

En appliquant une interpolation linéaire (différence centrée), et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance des nœuds on trouve :

$$\psi_n^+ = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2}$$

$$\psi_s^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2}$$

$$\psi_e^+ = \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2}$$

$$\psi_w^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de NOGOTOV [49], comme suit :

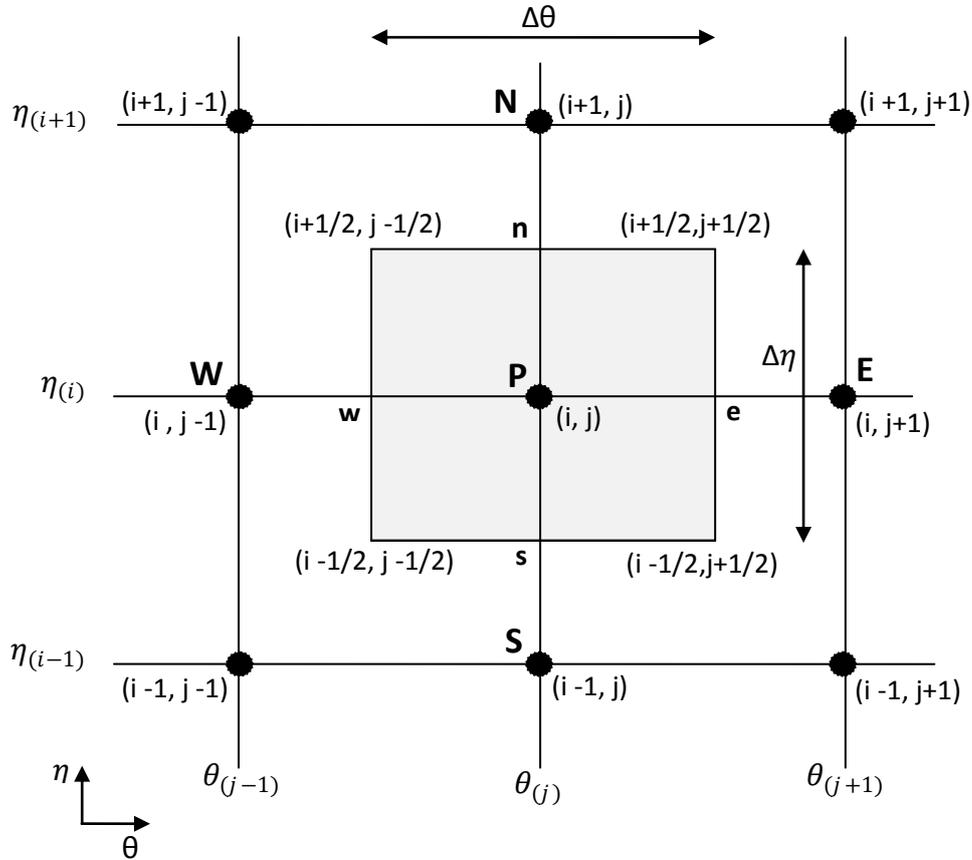


Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage.

A l'interface " e " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \psi^+(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j)}{4\Delta \eta}$$

A l'interface " w " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) - \psi^+(i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \eta}$$

A l'interface " n " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - \psi^+(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

A l'interface " s " :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - \psi^+(i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i-1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \theta}$$

Et les expressions F_e, F_w, F_n et F_s deviennent :

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.16.a)$$

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.16.b)$$

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.16.c)$$

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.16.d)$$

Pour l'équation de la chaleur, le coefficient $\Gamma_\Omega = \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]$ (voir tableau 3.1).

En portant cette valeur dans le système (3.13), les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s s'écrivent :

$$D_e = D_w = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\eta}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\theta}$$

$$D_n = D_s = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\theta}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\eta}$$

Et les nombres de Péclet dans le système (3.14) deviennent :

$$P_e = F_e = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\theta}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\eta} \quad P_n = F_n = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\eta}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\theta}$$

$$P_w = F_w = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\theta}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\eta} \quad P_s = F_s = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \Delta\eta}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f} \Delta\theta}$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.15), on symbolise les nœuds W , P , E et S respectivement par :

$$(i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i-1, j)$$

Les coefficients a_E , a_W , a_N , a_S et a_P^0 sont pris aux nœuds (i, j)

Donc l'équation (3.15) peut s'écrire comme suit :

$$a_P T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) + b \quad (3.17)$$

3.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_\eta^+ \omega^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_\theta^+ \omega^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta}) = S_{\omega^+}$$

En remplaçant dans l'équation discrétisée (3.11) :

- La fonction Ω par: la vorticité adimensionnelle ω^+ .
- Le terme S_P par: zéro ($S_P = 0$)
(le terme source S_{ω^+} est indépendant de la vorticité ω^+).

Nous obtenons l'équation discrétisée de quantité de mouvement:

$$a_P \omega_P^+ = a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + b \quad (3.18)$$

$$\text{Avec : } a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0$$

$$b = S_0 \Delta V + a_P^0 \Omega_P^0$$

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \cdot 1$$

$$S_0 = P_r R_a H \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right. \\ \left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\}$$

Les coefficients a_E , a_W , a_N , a_S et a_P^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.12).

Comme dans l'équation de quantité de mouvement le terme Γ_{Ω} égal à :

$$\Gamma_{\Omega} = P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \text{ (Voir tableau (3.1))}$$

Aux interfaces e, w, n et s les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s seront :

$$D_e = D_w = P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

$$D_n = D_s = P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}$$

Et les nombres de Péclet dans le système (3.14) deviennent:

$$P_e = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}$$

$$P_n = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

$$P_w = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta}$$

$$P_s = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta}$$

Avec : F_e, F_w, F_n et F_s ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.16.a), (3.16.b), (3.16.c) et (3.16.d).

Finalement dans l'équation (3.18) le coefficient « b » a pour expression :

$$b = H^3 P_r R_a \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right.$$

$$\left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right\} \Delta \eta \cdot \Delta \theta + a_p^0 \Omega_p^0$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2\Delta \theta}$$

En prenant les mêmes notations précédentes, pour les nœuds W, P, E et S qui sont respectivement :

$$(i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i-1, j)$$

L'équation (3.18) peut s'écrire comme suit :

$$a_p \omega^+(i, j) = a_E \omega^+(i, j+1) + a_W \omega^+(i, j-1) + a_N \omega^+(i+1, j) + a_S \omega^+(i-1, j) + b \quad (3.19)$$

Les coefficients $a_E, a_W, a_N, a_S, a_p^0$ et b sont pris au nœuds (i, j) .

3.5 Discrétisation des conditions aux limites

3.5.1 Adimensionnement des conditions aux limites

3.5.1.1 Conditions aux limites des vitesses sur les frontières du domaine de calcul

Pour les trois conditions pariétales thermiques:

Pour les enceintes A et B :

$V_\theta = V_\eta = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$: Condition de non-glissement des particules de fluides sur les parois de l'enceinte rigides et imperméables.

Ce qui donne les conditions aux limites adimensionnelles suivantes:

$$V_\theta^+ = V_\eta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{Avec : } \omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right)$$

Pour l'enceinte carrée :

$$u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = u(b,y) = 0$$

$$v(x,0) = v(x,b) = v(0,y) = v(b,y) = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

D'où les conditions aux limites adimensionnelles :

$$U(X,0) = U(X,b) = U(0,Y) = U(b,Y) = 0$$

$$V(X,0) = V(X,b) = V(0,Y) = V(b,Y) = 0$$

$$U = \frac{\partial \psi^+}{\partial Y} = 0, \quad V = -\frac{\partial \psi^+}{\partial X} = 0$$

3.5.1.2 Conditions aux limites des températures sur les frontières du domaine de calcul

Première condition pariétale thermique:

- Sur la paroi verticale droite (froide) :

Pour les trois enceintes carrée, A et B :

Nous avons : $T = T_c$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = 0$

- Sur la paroi verticale gauche (chaude) :

Pour les trois enceintes carrée, A et B:

Nous avons : $T = T_h$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = 1$

- Sur les parois horizontales (adiabatiques) :

Pour l'enceinte A :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial \theta} = 0$

Pour l'enceinte B :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$

Pour l'enceinte carrée :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial Y} = 0$

Deuxième et troisième condition pariétale thermique:

Pour les trois enceintes carrée, A et B :

- Sur les parois verticales :

Nous avons : $T = T_c$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = 0$

- Sur la paroi horizontale du haut (adiabatique) :

Pour l'enceinte A :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial \theta} = 0$

Pour l'enceinte B :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$

Pour l'enceinte carrée :

Nous avons : $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ ce qui donne : $\frac{\partial T^+}{\partial Y} = 0$

- Sur la paroi horizontale du bas (isotherme chaude) : **(deuxième cas)**

Pour les trois enceintes carrée, A et B :

Nous avons : $T = T_h$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = 1$

- Sur la paroi horizontale du bas (sinusoïdale chaude) : **(troisième cas)**

Pour l'enceinte carrée:

Nous avons : $T = (T_h - T_c) \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) + T_c$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = \sin(\pi X)$

Pour l'enceinte A:

Nous avons : $T = (T_h - T_c) f(\eta) + T_c$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = f(\eta)$

Avec :

$$f(\eta) = \cos(\pi\eta/2\eta_l) \quad , \quad \eta_l = 0.82288$$

Pour l'enceinte B:

Nous avons : $T = (T_h - T_c) g(\theta) + T_c$

La température adimensionnelle $T^+ = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$ sera : $T^+ = g(\theta)$

Avec :

$$g(\theta) = \sin[\pi(\theta - \theta_l)/(\theta_m - \theta_l)]$$

$$\theta_l = 1.97505 \quad , \quad \theta_m = 4.306991535$$

3.5.2 Discrétisation des conditions aux limites des températures

- **Pour $T^+ = 1$** : l'équation (3.15) nous donne

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \quad \text{et} \quad b = 1$$

- **Pour $T^+ = 0$** : l'équation (3.15) nous donne

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \quad \text{et} \quad b = 0$$

- **Pour $T^+ = \sin(\pi X)$** : l'équation (3.15) nous donne (enceinte carrée)

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \text{ et } b = \sin(\pi X)$$

- **Pour $T^+ = g(\theta)$** : l'équation (3.15) nous donne

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 1 \text{ et } b = g(\theta)$$

- **Pour $\frac{\partial T^+}{\partial \theta} = 0$ (condition de l'enceinte A)** nous pouvons écrire :

Pour la paroi horizontale inférieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j)}{\Delta \theta} = 0 \text{ ce qui donne : } T^+(i, j+1) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit: } T^+_E = T^+_P$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_E = 1$$

$$a_N = a_W = a_S = 0$$

$$b = 0$$

Pour la paroi horizontale supérieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i,j-1) - T^+(i,j)}{\Delta \theta} = 0 \text{ ce qui donne: } T^+(i, j-1) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit: } T^+_W = T^+_P$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_W = 1$$

$$a_E = a_S = a_N = 0$$

$$b = 0$$

- **Pour** $\frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0$ (**condition de l'enceinte B**) nous pouvons écrire :

Pour la paroi horizontale inférieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i, j)}{\Delta \eta} = 0 \text{ ce qui donne : } T^+(i+1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit: } T_N^+ = T_P^+$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_P = 1$$

$$a_N = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0$$

$$a_P^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

Pour la paroi horizontale supérieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i-1, j) - T^+(i, j)}{\Delta \eta} = 0 \text{ ce qui donne : } T^+(i-1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit : } T_S^+ = T_P^+$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_P = 1$$

$$a_S = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = 0$$

$$a_P^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

- **Pour** $\frac{\partial T^+}{\partial Y} = 0$ (**condition de l'enceinte carrée**) nous pouvons écrire :

Pour la paroi horizontale inférieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i, j)}{\Delta Y} = 0 \text{ ce qui donne : } T^+(i+1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit: } T_N^+ = T_P^+$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_N = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0$$

$$a_p^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

Pour la paroi horizontale supérieure (adiabatique):

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i-1, j) - T^+(i, j)}{\Delta Y} = 0 \text{ ce qui donne : } T^+(i-1, j) = T^+(i, j)$$

$$\text{D'où on écrit : } T_S^+ = T_P^+$$

L'équation (3.15) nous donne:

$$a_p = 1$$

$$a_S = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = 0$$

$$a_p^0 = 0 \text{ et } b = 0$$

3.5.3 Discrétisation des conditions aux limites de la fonction de courant

Condition sur la paroi horizontale inférieure (i = 1, j) :

$$\omega^+(1, j) = -\frac{1}{H^2(1, j)} \left[\frac{\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{-7\psi^+(1, j) + 8\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure (i = NI, j) :

$$\omega^+(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI, j)} \left[\frac{\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{-7\psi^+(NI, j) + 8\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{2(\Delta\eta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale gauche (i , j = 1) :

$$\omega^+(i,1) = -\frac{1}{H^2(i,1)} \left[\frac{\psi^+(i+1,1) - 2\psi^+(i,1) + \psi^+(i-1,1)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{-7\psi^+(i,1) + 8\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3)}{2(\Delta\theta)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale droite (i , j = NN) :

$$\omega^+(i,NN) = -\frac{1}{H^2(i,NN)} \left[\frac{\psi^+(i+1,NN) - 2\psi^+(i,NN) + \psi^+(i-1,NN)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{-7\psi^+(i,NN) + 8\psi^+(i,NN-1) - \psi^+(i,NN-2)}{2(\Delta\theta)^2} \right]$$

3.5.4 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right)$$

Réécrivons cette équation sous la forme :

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)$$

L'équation (2.27) donne:

$$-H^2(i,j) \omega^+(i,j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}$$

Pour discrétiser cette équation nous utiliserons le développement en série de Taylor, ce qui donne :

$$-H^2(i,j) \omega^+(i,j) = \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j) - 2\psi^+(i,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1) - 2\psi^+(i,j)}{(\Delta\theta)^2}$$

Et qui conduit à écrire :

$$-H^2(i, j)\omega^+(i, j) = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2}$$

$$-2\psi^+(i, j) \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]$$

Ce qui donne la fonction de courant au nœud P $\langle\langle \psi^+(i, j) \rangle\rangle$ qui est exprimée en fonction de celles aux nœuds W, E, N et S comme suit :

$$\psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left[H^2(i, j)\omega^+(i, j) + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} \right. \\ \left. + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \quad (3.20)$$

3.5.5 Discrétisation des conditions aux limites des vitesses

Condition sur la paroi horizontale inférieure (i=1) :

$$\left. \frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^+(1, j) + 4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^+(1, j) = \frac{4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{3}$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure (i = NI) :

$$\psi^+(NI, j) = \frac{4\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale gauche (j = 1) :

$$\left. \frac{\partial\psi^+}{\partial\theta} \right|_{i,1} = \frac{-3\psi^+(i, 1) + 4\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{2\Delta\theta} = 0$$

$$\psi^+(i, 1) = \frac{4\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale droite (j = NN) :

$$\psi^+(i, NN) = \frac{4\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2)}{3}$$

3.5.6 Discrétisation des composantes de la vitesse

Nous choisissons les différences centrées pour discrétiser les composantes adimensionnelles V_η^+ , V_θ^+ de la vitesse.

$$V_\eta^+ = \frac{1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \Big|_{i, j} = \frac{1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta\theta} \right]$$

$$V_\theta^+ = \frac{-1}{H(i, j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \Big|_{i, j} = \frac{-1}{H(i, j)} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta\eta} \right]$$

Avec: $1 < I < NI$

$1 < J < NN$

3.6 Processus de calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.17), (3.19) et (3.20) nous utilisons la méthode proposée par NOGOTOV [49].

En choisissant une méthode itérative à coefficients de relaxation, ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - \alpha_T) T^n(i, j) + \frac{\alpha_T}{a_p} \left[a_E T^n(i, j+1) + a_W T^{n+1}(i, j-1) \right]$$

$$+ a_N T^n(i+1, j) + a_S T^{n+1}(i-1, j) \quad (3.21)$$

$$\omega^{n+1}(i, j) = (1 - \alpha_\omega) \omega^n(i, j) + \frac{\alpha_\omega}{a_p} \left[a_E \omega^n(i, j+1) + a_W \omega^{n+1}(i, j-1) \right]$$

$$+ a_N \omega^n(i+1, j) + a_S \omega^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) \quad (3.22)$$

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - \alpha_\psi) \psi^n(i, j) + \frac{\alpha_\psi}{2} \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1}$$

$$\left[\frac{\psi^n(i+1, j) + \psi^{n+1}(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i, j+1) + \psi^{n+1}(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i, j) \omega^+(i, j) \right] \quad (3.23)$$

Avec:

n : ordre de l'intégration.

$\alpha_T, \alpha_\omega, \alpha_\psi$: sont les facteurs de relaxation. Leurs valeurs dépendent de la valeur du nombre de Rayleigh R_a .

La résolution du système d'équations (3.21), (3.22) et (3.23), en utilisant le code de calcul, se fait comme suit:

1/ Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.

2/ Calcul de la distribution de la température.

3/ Calcul de la vorticité.

4/ Calcul de la distribution de la fonction de courant.

5/ Le processus itératif répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de ψ par rapport au critère de convergence suivant:

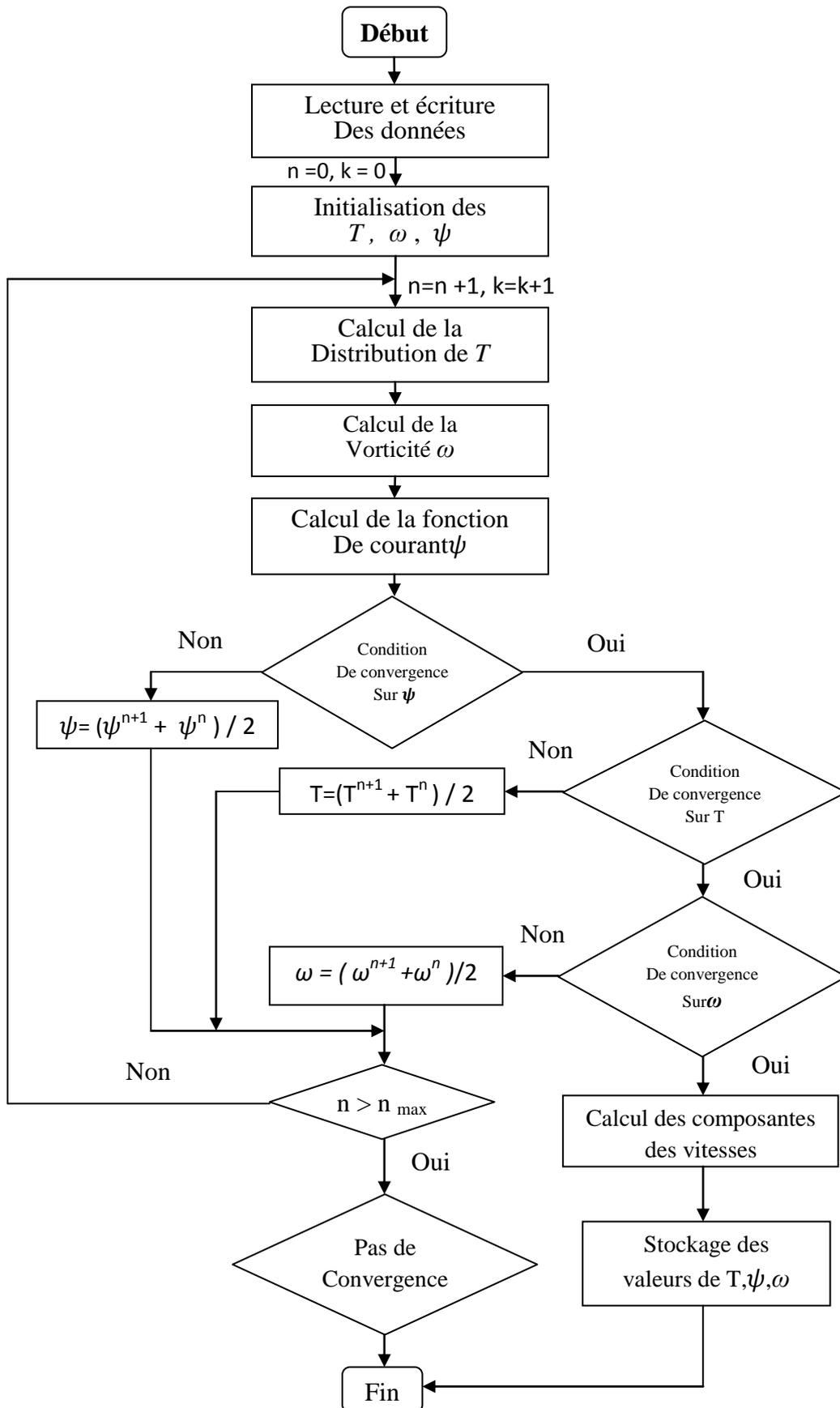
$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

6/ Le même critère est utilisé pour la température.

7/ Le même critère est utilisé pour la vorticité.

8/ Calcul des composantes de la vitesse.

9/ Stockage des valeurs de T , ω et ψ .



3.7 Formulation numérique de l'enceinte carrée

3.7.1 Volume élémentaire d'intégration

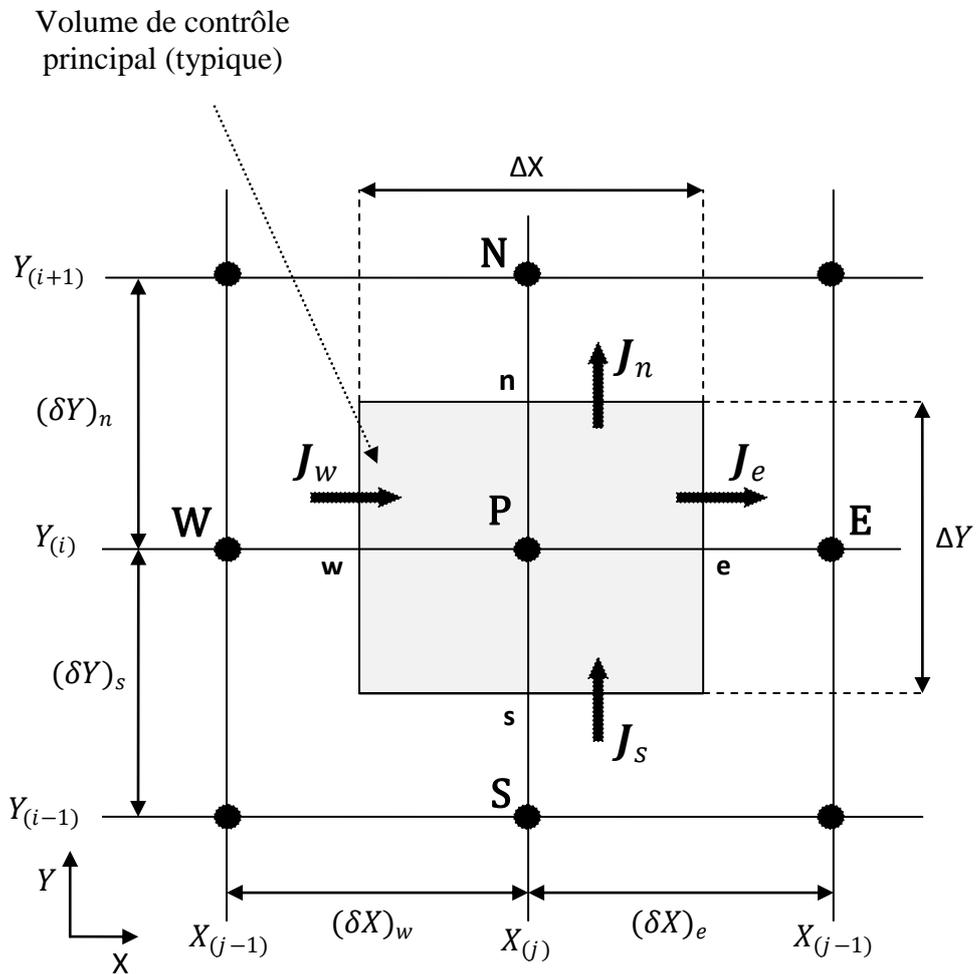


Fig. 3.2 Représentation du volume de contrôle typique.

Soit :

i : indice des nœuds suivant Y

j : indice des nœuds suivant X

$$\Delta Y = \frac{Y_{NI} - Y_1}{NI - 1}$$

$$\Delta X = \frac{X_{NN} - X_1}{NN - 1}$$

NI : le nombre de points suivant Y

NN : le nombre de points suivant X

3.7.2 Equation générale du transfert

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial X} (U \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (V \Omega - \Gamma_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Y}) = S_{\Omega} \quad (3.24)$$

Le tableau suivant illustre les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , S_{Ω}

équation	Ω	Γ_{Ω}	S_{Ω}
3.1	T^+	$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}$ $\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]$	0
3.2	ω^+	$\frac{P_r}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]}$	$P_r R_a \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \frac{\partial T^+}{\partial X}$

Tableau 3.2 : les différentes expressions des termes : Γ_{Ω} , Ω , S_{Ω}

Ω : Fonction générale représente (T^+ ou ω^+)

Γ_{Ω} : Coefficient adimensionnel.

S_{Ω} : Terme de source.

3.7.3 Equation générale du transfert discrétisée

$$a_p \Omega_p = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W + a_N \Omega_N + a_S \Omega_S + b \quad (3.25)$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \cdot \Delta V$$

$$b = S_0 \Delta V + a_p^0 \Omega_p^0, \quad \Delta V = \Delta X \cdot \Delta Y \cdot 1$$

$$\begin{cases} a_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y \cdot 1}{\Delta t^+} \\ a_E = D_e A(|P_e|) + \| -F_e, 0 \| \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \| F_w, 0 \| \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \| -F_n, 0 \| \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \| F_s, 0 \| \end{cases} \quad (3.26)$$

3.7.4 Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial X} (U T^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial T^+}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (V T^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial T^+}{\partial Y}) = 0$$

En remplaçant dans l'équation (3.3) la fonction Ω par la température adimensionnelle T^+ et le terme source S_Ω par zéro, l'équation de la chaleur discrétisée sera :

$$a_P T_P^+ = a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + b \quad (3.27)$$

$$\text{Avec : } a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0$$

$$b = a_P^0 \Omega_P^0$$

a_E, a_W, a_N, a_S et a_P^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.26).

3.7.5 Détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$)

Les expressions des coefficients F_e, F_w, F_n et F_s sont :

$$F_e = \frac{1}{4} \left[-\psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.28.a)$$

$$F_w = \frac{1}{4} \left[-\psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.28.b)$$

$$F_n = \frac{1}{4} \left[-\psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.28.c)$$

$$F_s = \frac{1}{4} \left[-\psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.28.d)$$

Les expressions des coefficients D_e, D_w, D_n et D_s sont :

$$D_e = D_w = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$D_n = D_s = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]} \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

Les expressions des nombres de Péclet sont:

$$P_e = F_e = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \frac{\Delta X}{\Delta Y}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \quad P_n = F_n = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \frac{\Delta Y}{\Delta X}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}$$

$$P_w = F_w = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \frac{\Delta X}{\Delta Y}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}} \quad P_s = F_s = \frac{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right] \frac{\Delta Y}{\Delta X}}{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}$$

3.7.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{\partial}{\partial X} (U\omega^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial \omega^+}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (V\omega^+ - \Gamma_\Omega \frac{\partial \omega^+}{\partial Y}) = S_{\omega^+}$$

En remplaçant dans l'équation discrétisée (3.11) :

- La fonction Ω par: la vorticité adimensionnelle ω^+ .
- Le terme S_p par: zéro ($S_p = 0$)

Nous obtenons l'équation discrétisée de quantité de mouvement:

$$a_p \omega_p^+ = a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + b \quad (3.29)$$

$$\text{Avec : } a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0$$

$$b = S_0 \Delta V + a_p^0 \Omega_p^0, \quad \Delta V = \Delta Y \cdot \Delta X \cdot 1$$

$$S_0 = P_r R_a \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \frac{\partial T^+}{\partial X}$$

$$D'ou b = P_r R_a \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \frac{\partial T^+}{\partial X} \cdot \Delta Y \cdot \Delta X + a_p^0 \Omega_p^0$$

$$\text{Avec : } \left. \frac{\partial T^+}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2\Delta Y}$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2\Delta X}$$

Les coefficients : a_E, a_W, a_N, a_S et a_p^0 ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.12) .

Les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s ont les expressions suivantes:

$$D_e = D_w = P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$D_n = D_s = P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

Et les nombres de Péclet seront:

$$P_e = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_e \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

$$P_n = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_n \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$P_w = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_w \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

$$P_s = \frac{1}{P_r} (1-\phi)^{2,5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right] F_s \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Avec : F_e, F_w, F_n et F_s ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.28.a), (3.28.b), (3.28.c) et (3.28.d).

3.7.7 Discrétisation des conditions aux limites de la fonction de courant

Condition sur la paroi horizontale inférieure ($i = 1, j$) :

$$\omega^+(1, j) = - \left[\frac{\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)}{(\Delta X)^2} + \frac{-7\psi^+(1, j) + 8\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2(\Delta Y)^2} \right]$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure ($i = NI, j$) :

$$\omega^+(NI, j) = - \left[\frac{\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)}{(\Delta X)^2} + \frac{-7\psi^+(NI, j) + 8\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{2(\Delta Y)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale gauche ($i, j = 1$) :

$$\omega^+(i, 1) = - \left[\frac{\psi^+(i+1, 1) - 2\psi^+(i, 1) + \psi^+(i-1, 1)}{(\Delta Y)^2} + \frac{-7\psi^+(i, 1) + 8\psi^+(i, 2) - \psi^+(i, 3)}{2(\Delta X)^2} \right]$$

Condition sur la paroi verticale droite ($i, j = NN$) :

$$\omega^+(i, NN) = - \left[\frac{\psi^+(i+1, NN) - 2\psi^+(i, NN) + \psi^+(i-1, NN)}{(\Delta Y)^2} \right]$$

$$\left. + \frac{-7\psi^+(i, NN) + 8\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2)}{2(\Delta X)^2} \right]$$

3.7.8 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

$$\omega^+ = -\left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial X^2}\right)$$

$$\text{Donne: } -\omega^+(i, j) = \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial Y^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial X^2} \Big|_{i,j}$$

D'où:

$$-\omega^+(i, j) = \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta Y)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta X)^2}$$

$$-2\psi^+(i, j) \left[\frac{1}{(\Delta Y)^2} + \frac{1}{(\Delta X)^2} \right]$$

Ce qui donne la fonction de courant au nœuds P $\langle\langle \psi^+(i, j) \rangle\rangle$ qui est exprimée en fonction de celle aux nœuds W, E, N et S comme suit :

$$\begin{aligned} \psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left[\omega^+(i, j) + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta Y)^2} \right. \\ \left. + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta X)^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta Y)^2} + \frac{1}{(\Delta X)^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.7.9 Discrétisation des conditions aux limites des vitesses

Condition sur la paroi horizontale inférieure (i=1) :

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial Y} \Big|_{1,j} = \frac{-3\psi^+(1, j) + 4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta Y} = 0$$

$$\psi^+(1, j) = \frac{4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{3}$$

Condition sur la paroi horizontale supérieure (i=NI) :

$$\psi^+(NI, j) = \frac{4\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale gauche (j=1) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial X} \right|_{i,1} = \frac{-3\psi^+(i,1) + 4\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3)}{2\Delta X} = 0$$

$$\psi^+(i,1) = \frac{4\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3)}{3}$$

Condition sur la paroi verticale droite (j=NN) :

$$\psi^+(i, NN) = \frac{4\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2)}{3}$$

3.7.10 Discrétisation des composantes de la vitesse

$$V = -\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial X} \right|_{i,j} = -\left[\frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta X} \right]$$

$$U = \left. \frac{\partial \psi^+}{\partial Y} \right|_{i,j} = \left[\frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta Y} \right]$$

Avec: $1 < I < NI$

$1 < J < NN$

Chapitre 4

Résultats et discussions

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'influence de la courbure des parois d'une cavité bidimensionnelle remplie de nanofluide (eau-Cu), et les conditions de chauffage sur la convection naturelle.

Pour cela nous considérons trois enceintes bidimensionnelles, une cavité à parois planes (carrée), une deuxième cavité à parois horizontales concaves et parois verticales convexes (enceinte A), une troisième cavité à parois horizontales convexes et parois verticales concaves (enceinte B), et les conditions pariétales suivantes.

Première condition pariétale thermique:

Les parois horizontales des enceintes sont adiabatiques, et les parois verticales sont isothermes maintenues aux températures froide T_c et chaude T_h .

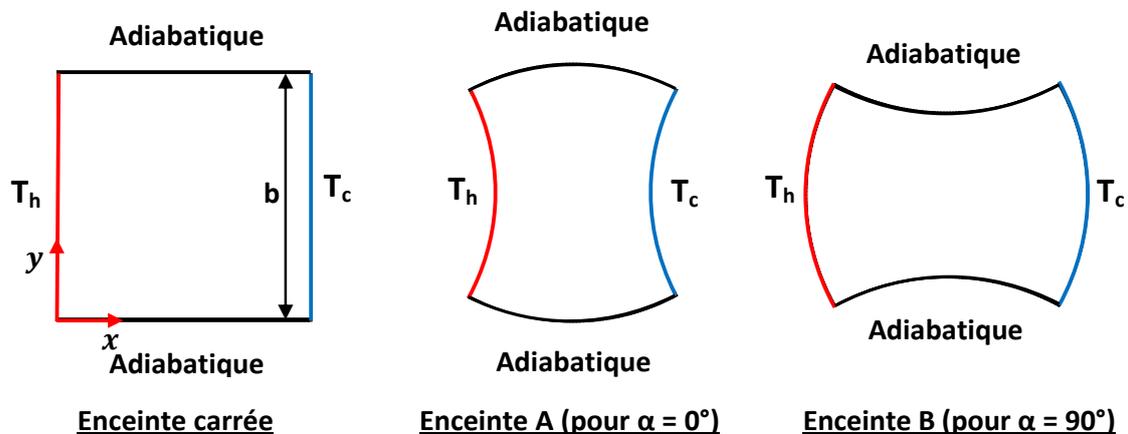


Figure 4.1 Représentation des enceintes étudiées.

Deuxième condition pariétale thermique:

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et celles du bas sont maintenues isothermes à une température chaude constante T_h .

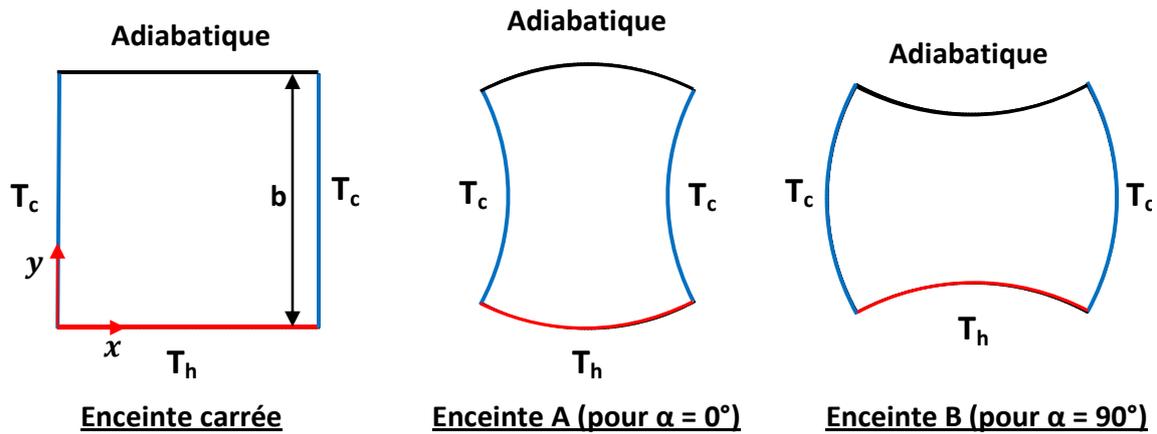


Figure 4.2 Représentation des enceintes étudiées.

Troisième condition pariétale thermique:

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et celles du bas sont maintenues à une température sinusoïdale.

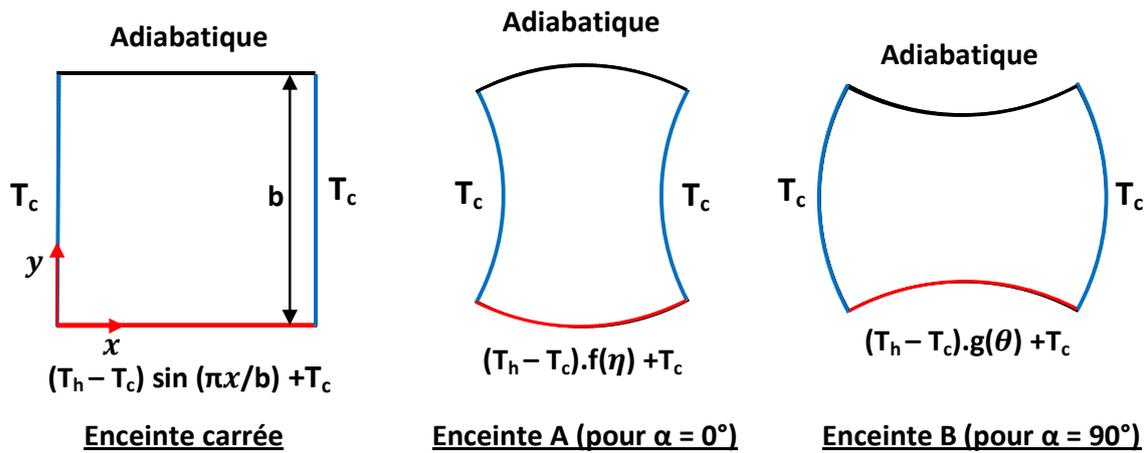


Figure 4.3 Représentation des enceintes étudiées.

$f(\eta)$, $g(\theta)$: Fonctions sinusoïdales.

Avec :

$$f(\eta) = \cos(\pi \eta / 2 \eta_1) \quad , \quad \eta_1 = 0.82288$$

$$g(\theta) = \sin[\pi(\theta - \theta_1) / (\theta_{nn} - \theta_1)]$$

$$\theta_1 = 1.97505 \quad , \quad \theta_{nn} = 4.306991535$$

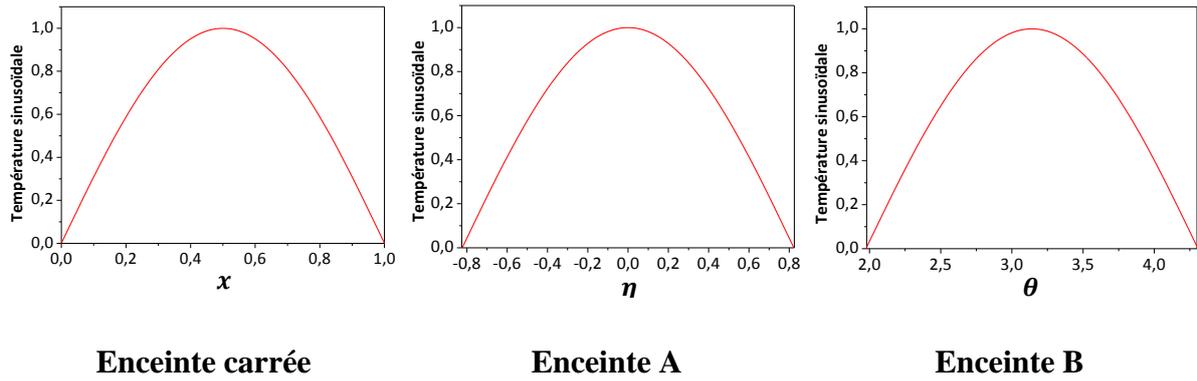


Figure 4.4 Formes des températures sinusoïdales pour les trois enceintes.

4.2 Etude du maillage

Le choix du maillage a une grande influence sur la précision des résultats et le temps de calcul, et pour voir cet effet, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour les trois configurations précédemment citées. Les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 illustrent la variation du nombre de Nusselt moyen et la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds. Notre choix s’est porté sur le maillage (71x71) qui assure un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

Pour l’enceinte A (avec la première condition pariétale thermique et pour $\phi = 0,2$):

Tableau 4.1 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale, en fonction du nombre de nœuds (enceinte A).

Nombre de	Maillage	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction								
$Ra = 10^3$	$ \psi_{\max} $	0,161	0,162	0,161	0,162	0,162	0,162	0,162	0,162
	Er (%)		0,62	0,62	0,62	0,00	0,00	0,00	0,00
	$ \overline{Nu} $	2,236	2,257	2,264	2,268	2,270	2,271	2,272	2,273
	Er (%)		0,93	0,31	0,18	0,09	0,04	0,04	0,04
$Ra = 10^4$	$ \psi_{\max} $	1,570	1,564	1,566	1,567	1,568	1,568	1,568	1,569
	Er (%)		0,38	0,18	0,06	0,06	0,00	0,00	0,06
	$ \overline{Nu} $	2,337	2,374	2,384	2,388	2,390	2,391	2,392	2,393
	Er (%)		1,56	0,42	0,17	0,08	0,04	0,04	0,04
$Ra = 10^5$	$ \psi_{\max} $	9,043	8,635	8,571	8,554	8,549	8,547	8,547	8,547
	Er (%)		4,72	0,75	0,20	0,06	0,02	0,00	0,00
	$ \overline{Nu} $	4,018	4,187	4,222	4,234	4,238	4,240	4,240	4,240
	Er (%)		4,04	0,83	0,28	0,09	0,05	0,00	0,00

Pour l'enceinte carrée (avec la deuxième condition parietale thermique et pour $\phi = 0,1$):

Tableau 4.2 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas en fonction du nombre de nœuds (enceinte carrée).

Rayleigh	Maillage ►	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction ▼								
Ra = 10 ³	$ \psi_{\max} $	0,138	0,137	0,138	0,138	0,138	0,138	0,138	0,138
	Er (%)		0,73	0,72	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	\overline{Nu}	5.760	7.165	7,948	8,490	8,903	9,236	9,516	9,756
	Er (%)		19,61	9,85	6,38	4,64	3,61	2,94	2,46
Ra = 10 ⁴	$ \psi_{\max} $	2.236	2.237	2.264	2.279	2.283	2.284	2.283	2.286
	Er (%)		0,04	1,19	0,66	0,18	0,04	0,04	0,13
	\overline{Nu}	5.992	7.534	8.352	8.906	9.326	9.663	9.945	10.187
	Er (%)		20,47	9,79	6,22	4,50	3,49	2,86	2,38
Ra = 10 ⁵	$ \psi_{\max} $	15.597	14.646	14.528	14.559	14.572	14.574	14.573	14.570
	Er (%)		6,49	0,81	0,21	0,09	0,01	0,01	0,02
	\overline{Nu}	8.291	10.621	11.613	12.237	12.693	13.051	13.347	13.599
	Er (%)		21,94	8,54	5,10	3,59	2,74	2,22	1,85

Pour l'enceinte B (avec la Troisième condition parietale thermique et pour $\phi = 0,1$):

Tableau 4.3 Variation de la valeur maximale de la fonction de courant et du nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas en fonction du nombre de nœuds (enceinte B).

Rayleigh	Maillage ►	11×11	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	71×71	81×81
	Fonction ▼								
Ra = 10 ³	$ \psi_{\max} $	0,074	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072
	Er (%)		2,78	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	\overline{Nu}	1,988	2,235	2,321	2,365	2,391	2,409	2,422	2,432
	Er (%)		11,05	3,71	1,86	1,09	0,75	0,54	0,41
Ra = 10 ⁴	$ \psi_{\max} $	0,861	0,853	0,855	0,857	0,856	0,856	0,857	0,856
	Er (%)		0,94	0,23	0,23	0,12	0,00	0,12	0,12
	\overline{Nu}	2,040	2,328	2,426	2,475	2,504	2,524	2,538	2,548
	Er (%)		12,37	4,04	1,98	1,19	0,79	0,55	0,39
Ra = 10 ⁵	$ \psi_{\max} $	7,677	7,380	7,360	7,388	7,389	7,393	7,397	7,389
	Er (%)		4,02	0,27	0,38	0,03	0,09	0,05	0,11
	\overline{Nu}	3,351	4,006	4,211	4,308	4,363	4,399	4,423	4,441
	Er (%)		16,35	4,89	2,25	1,26	0,82	0,54	0,41

4.3 Validation du code calcul

4.3.1 Première condition pariétale thermique

Les parois horizontales des enceintes sont adiabatiques, et les parois verticales sont isothermes maintenues aux températures froide T_c et chaude T_h .

Comparaison des résultats avec ceux de Tanmay Basak et Ali J. Chamkha [1] :

Tanmay Basak et Ali J. Chamkha[1] ont considéré dans leurs études, une enceinte carrée remplie de nanofluide. Ils ont considéré plusieurs types de nanofluides : cuivre–eau, TiO_2 –eau, alumine–eau, et plusieurs conditions pariétales thermiques : parois verticales différentiellement chauffées et parois horizontales adiabatiques (1^{er} cas), parois verticales froides et paroi horizontale de haut adiabatique et de bas chauffée par une température constante (uniforme) d’une part, et une température sinusoïdale (non uniforme) d’autre part (2^{ème} cas). Nous avons regroupé dans le tableau 4.4. nos valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois actives et nos valeurs maximales de la fonction de courant, et celles de Tanmay Basak et Ali J. Chamkha [1] pour leur (1^{er} cas) de nanofluide (cuivre–eau).

Tableau 4.4.a Comparaison des valeurs des fonctions de courant et des nombres de Nusselt moyens pour un maillage de 71x71.

Valeurs de Ra et de ϕ		Nos calculs	T.Basak et al [1]	Ecart relatif	Nos calculs	T.Basak et al [1]	Ecart relatif
		$ \psi_{max} $	$ \psi_{max} $	$\frac{ Résultats - Ref. }{Résultats}$	$ \overline{Nu} $	$ \overline{Nu} $	$\frac{ Résultats - Ref. }{Résultats}$
				E(%)			E(%)
$\phi = 0$	$Ra = 10^3$	1,173	1,17	0,26%	1,119	1,12	0,09%
	$Ra = 10^4$	5,158	5,2	0,81%	2,282	2,28	0,09%
	$Ra = 10^5$	11,018	11,03	0,11%	4,737	4,84	2,13%
$\phi = 0,1$	$Ra = 10^3$	0,919	0,92	0,11%	1,387	1,41	1,63%
	$Ra = 10^4$	5,236	-	-	2,481	2,52	1,55%
	$Ra = 10^5$	12,345	12,4	0,44%	5,242	5,41	3,11%
$\phi = 0,2$	$Ra = 10^3$	0,677	0,68	0,44%	1,768	1,7	4%
	$Ra = 10^4$	4,880	4,9	0,41%	2,631	-	-
	$Ra = 10^5$	13,636	13,7	0,47%	5,654	5,9	4,17%

Nos résultats sont en bon accord avec ceux de Tanmay Basak et Ali J. Chamkha [1]. La valeur absolue de l’écart relatif maximal dans tous les cas ne dépasse pas : 0,81% pour les fonctions de courant, et 4,17% pour les nombres de Nusselt moyens.

Comparaison des résultats avec ceux de Graham De Vahl Davis[50], Jiten Chandra Kalita et al [51] et Gerardo Diaz et Roland Winston[52]:

Graham De Vahl Davis [50] et Jiten Chandra Kalita et al [51] ont considéré dans leurs études, une cavité carrée de côté L remplie d’air, avec des parois verticales différentiellement

chauffées tandis que les parois horizontales sont considérées adiabatiques. Gerardo Diaz et Roland Winston[52] ont étudié eux aussi, numériquement l'effet du rayonnement de la surface sur la convection naturelle dans une enceinte parabolique avec des parois verticales adiabatiques et des parois horizontales planes différentiellement chauffées, et ils ont validé leurs résultats en considérant la même enceinte que celle de Graham De Vahl Davis[50]. Nous avons regroupé dans le tableau 4.4.b les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois, issues de nos calculs avec celles des références [50] et [51], et dans le tableau 4.4.c, nos valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois actives et nos valeurs maximales de la fonction de courant, et celles des références [50] et [52].

Tableau 4.4.b Comparaison des nombres de Nusselt moyens (Pr= 0,702).

Ra	Référence Maillage	Davis [50] (81x81)	Nos résultats (81x81)	Ecart relatif (%)	Kalita et al. [51] (41x41)	Nos résultats (41x41)	Ecart relatif (%)
10 ³	$ \overline{Nu} $	1,118	1,119	0,09	1,117	1,119	0,18
10 ⁴	$ \overline{Nu} $	2,243	2,251	0,36	2,245	2,253	0,36
10 ⁵	$ \overline{Nu} $	4,519	4,533	0,31	4,522	4,522	0,00
10 ⁶	$ \overline{Nu} $	8,800	8,829	0,31	8,829 (81x81)	8,829 (81x81)	0,00

Nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Davis [50] et de Kalita et al. [51], l'écart relatif maximal dans tous les cas ne dépasse pas : 0,36%.

Tableau 4.4.c Comparaison des fonctions de courant et des nombres de Nusselt moyens pour un maillage de 41x41 (Pr= 0,702).

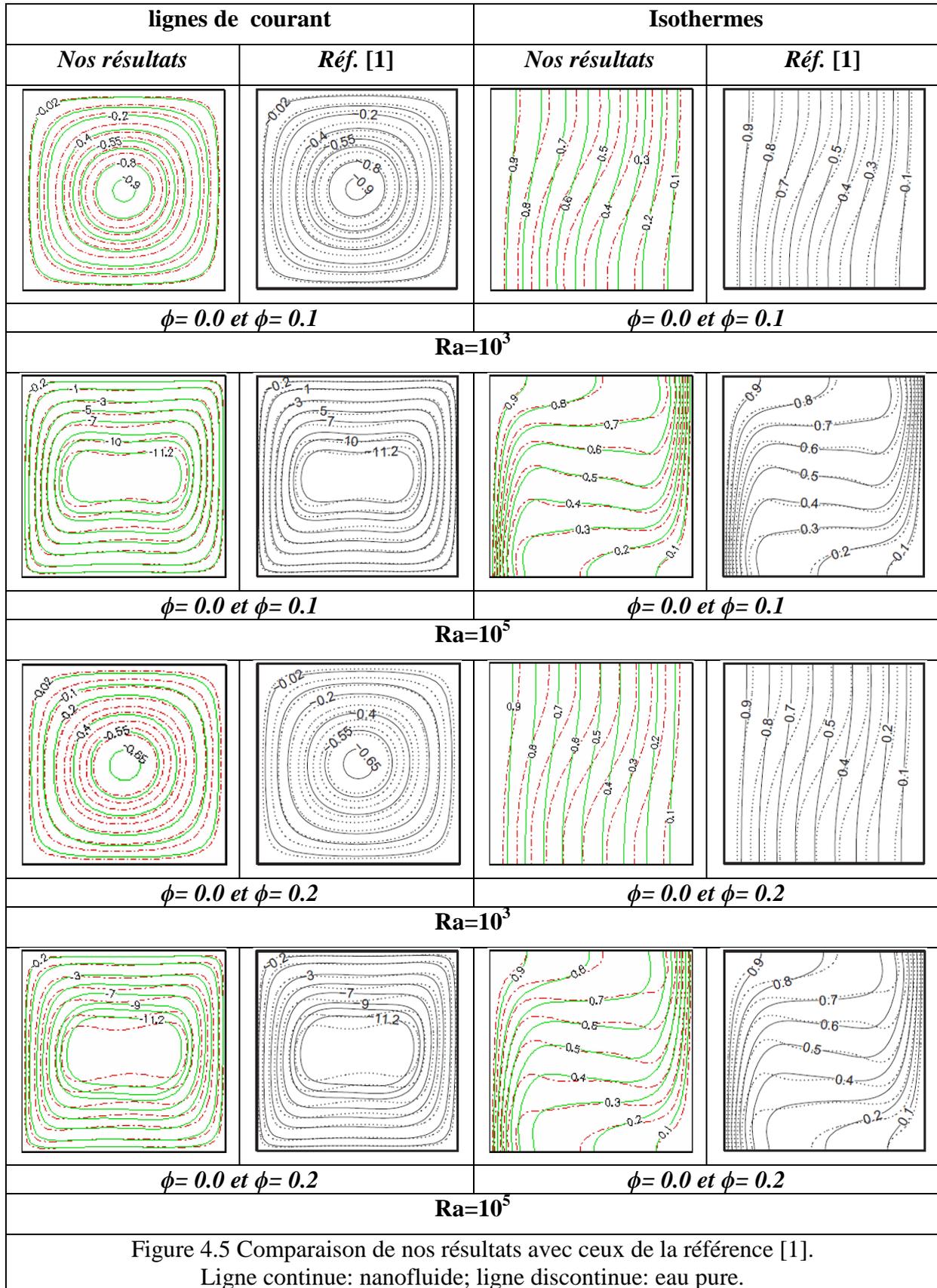
Ra	Nos calculs $ \psi_{\max} $	Davis [50] $ \psi_{\max} $	Ecart relatif (%)	Réf [52] $ \psi_{\max} $	Ecart relatif (%)	Nos calculs $ \overline{Nu} $	Davis [50] $ \overline{Nu} $	Ecart relatif (%)	Réf [52] $ \overline{Nu} $	Ecart relatif (%)
10 ³	1,172	1,174	0,17	1,172	0	1,120	1,116	0,360	1,119	0,09
10 ⁴	5,059	5,098	0,77	5,046	0,26	2,253	2,242	0,49	2,254	0,04
10 ⁵	9,649	9,644	0,05	9,550	1,04	4,522	4,523	0,02	4,545	0,51
10 ⁶	17,346	16,961	2,67	16,807	3,21	8,692	8,928	2,64	8,979	3,20

Nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Graham De Vahl Davis [50] et de Gerardo Diaz et Roland Winston[52], l'écart relatif maximal dans tous les cas ne dépasse pas : 3,20% pour les nombres de Nusselt moyens, et 3,21% pour les valeurs maximales de la fonction de courant.

Comparaison des isothermes et des lignes de courant pour l'enceinte carrée:

La comparaison de nos résultats avec ceux de Tanmay Basaket Ali J. Chamkha [1] (voir fig. 4.5 et 4.6) qui sont obtenus en considérant une enceinte carrée remplie de nanofluide Cu-eau, avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales maintenues isothermes à

des températures T_c et T_h , avec T_c (froide sur la paroi droite) et T_h (chaude sur la paroi gauche), montre un très bon accord.



Comparaison des nombres de Nusselt locaux pour l'enceinte carrée:

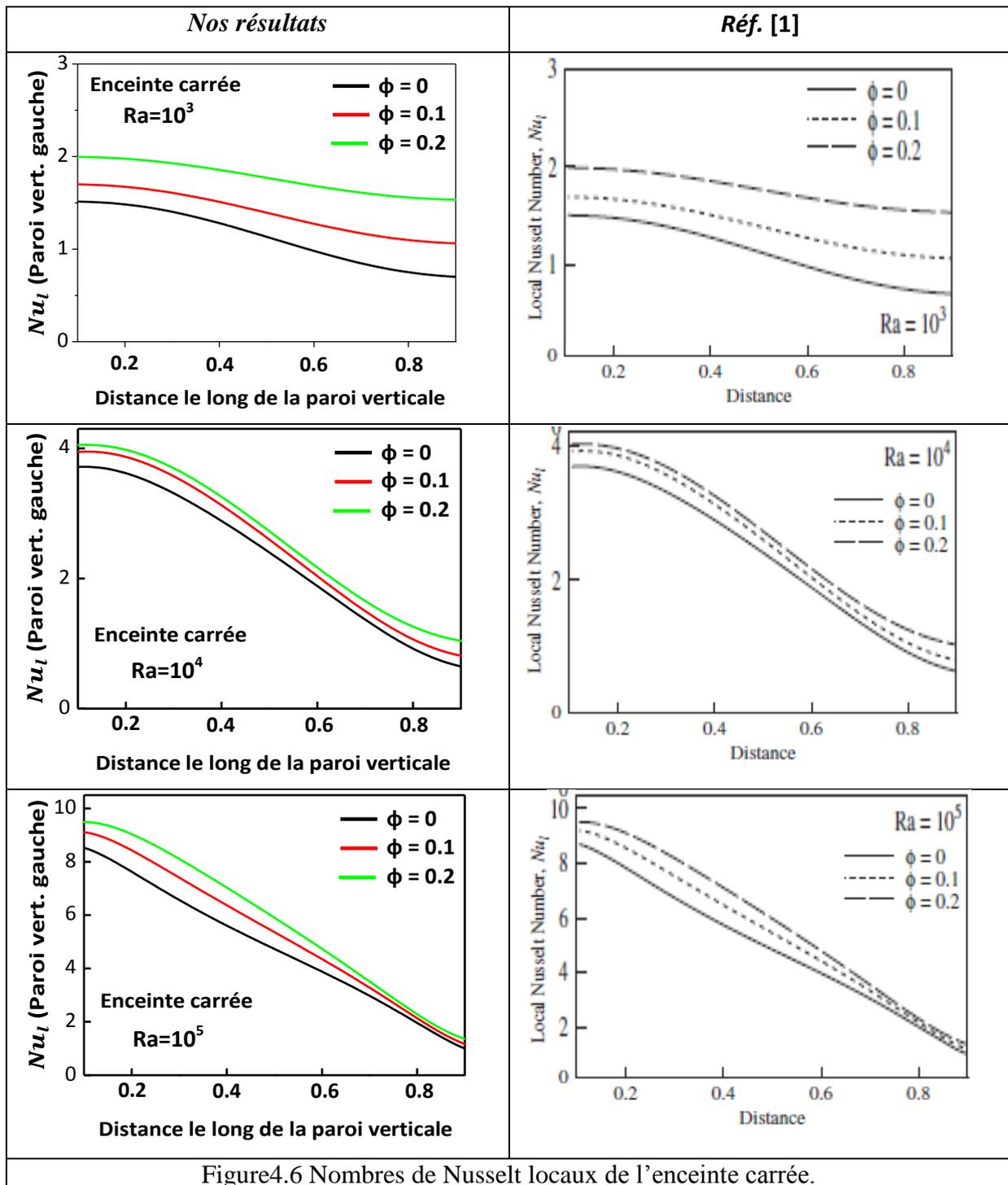


Figure4.6 Nombres de Nusselt locaux de l'enceinte carrée.

Comparaison des résultats avec ceux de Khalil Khanafer et al [6]:

Khalil Khanafer et al [6] ont considéré dans leurs études, une cavité rectangulaire de longueur L et de hauteur H remplie de nanofluide (cuivre-eau) avec un rapport d'aspect $A=L/H$ pris égal à l'unité, et des parois verticales différentiellement chauffées tandis que les parois horizontales sont considérées adiabatiques. Dans la figure4.7 nous avons présenté notre

profil de température le long de l'axe médian horizontal pour différents types de maillage et pour ($Gr=10^5$, $Pr=6,2$ et $\phi = 5\%$) et celui de Khalil Khanafer et al [6].

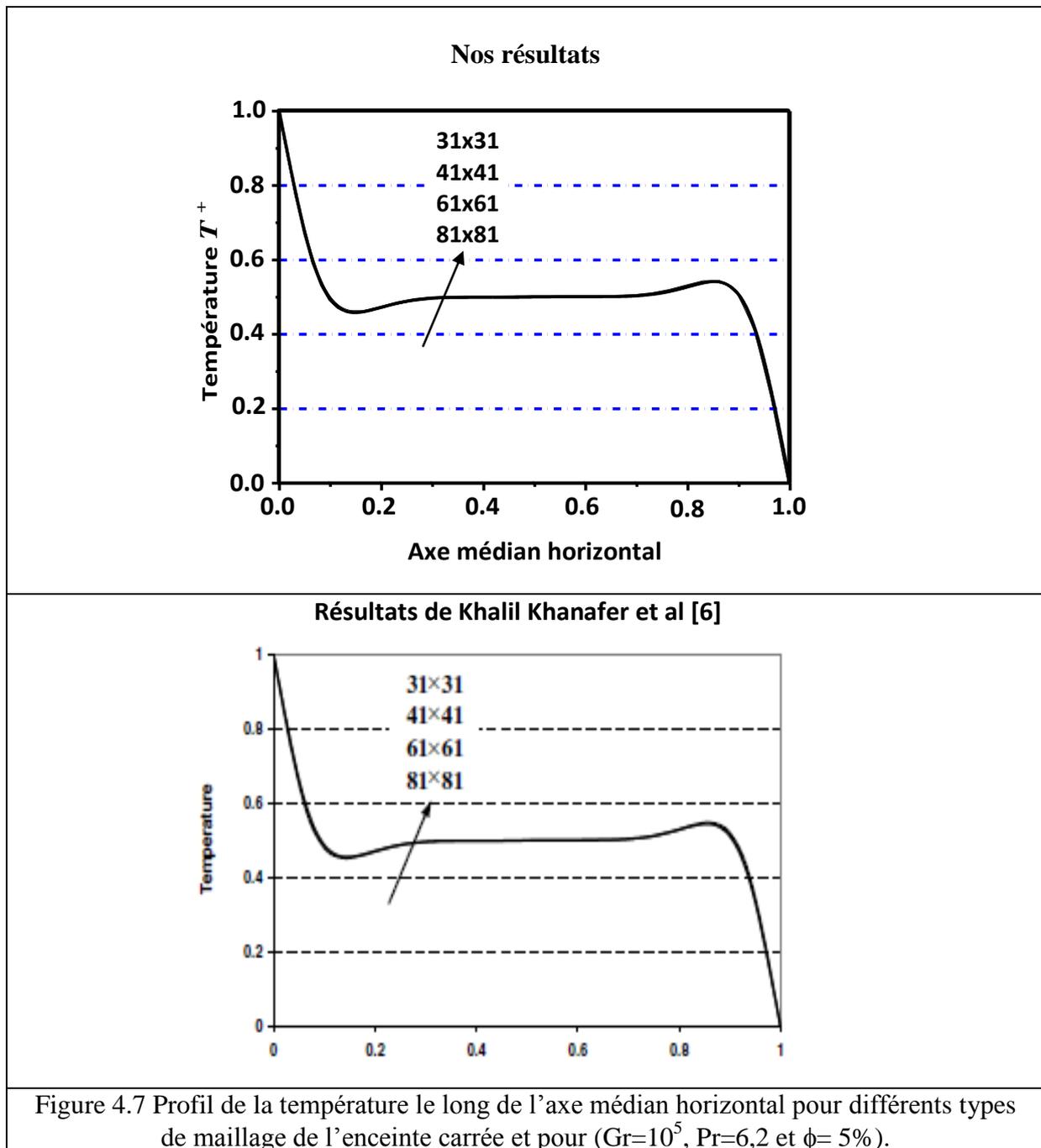


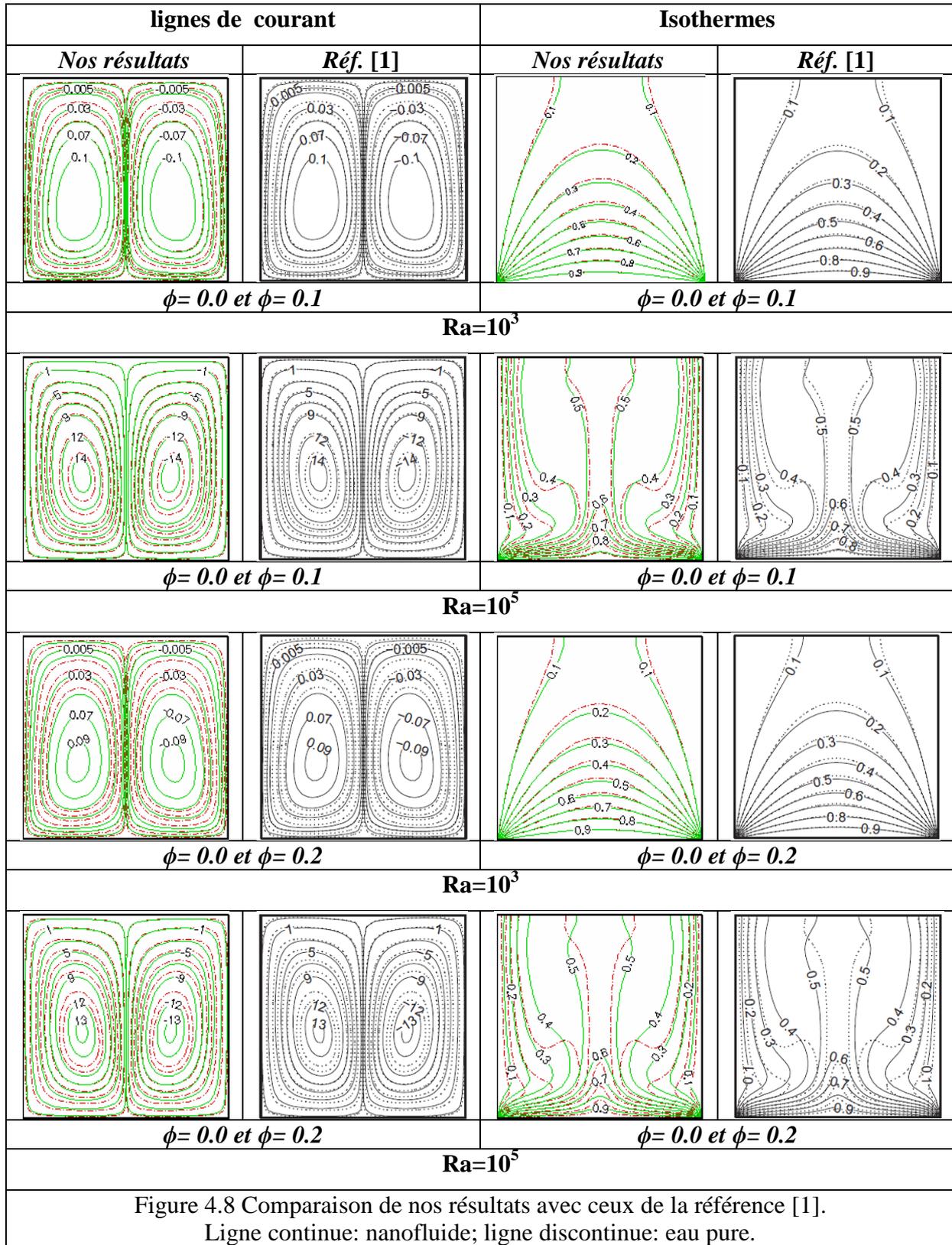
Figure 4.7 Profil de la température le long de l'axe médian horizontal pour différents types de maillage de l'enceinte carrée et pour ($Gr=10^5$, $Pr=6,2$ et $\phi = 5\%$).

Nos résultats sont en bon accord avec celles de Khalil Khanafer et al [6].

4.3.2 Deuxième condition pariétale thermique

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et celles du bas sont maintenues isothermes à une température chaude constante T_h .

Comparaison des isothermes et des lignes de courant pour l'enceinte carrée:



Comparaison des nombres de Nusselt locaux pour l'enceinte carrée:

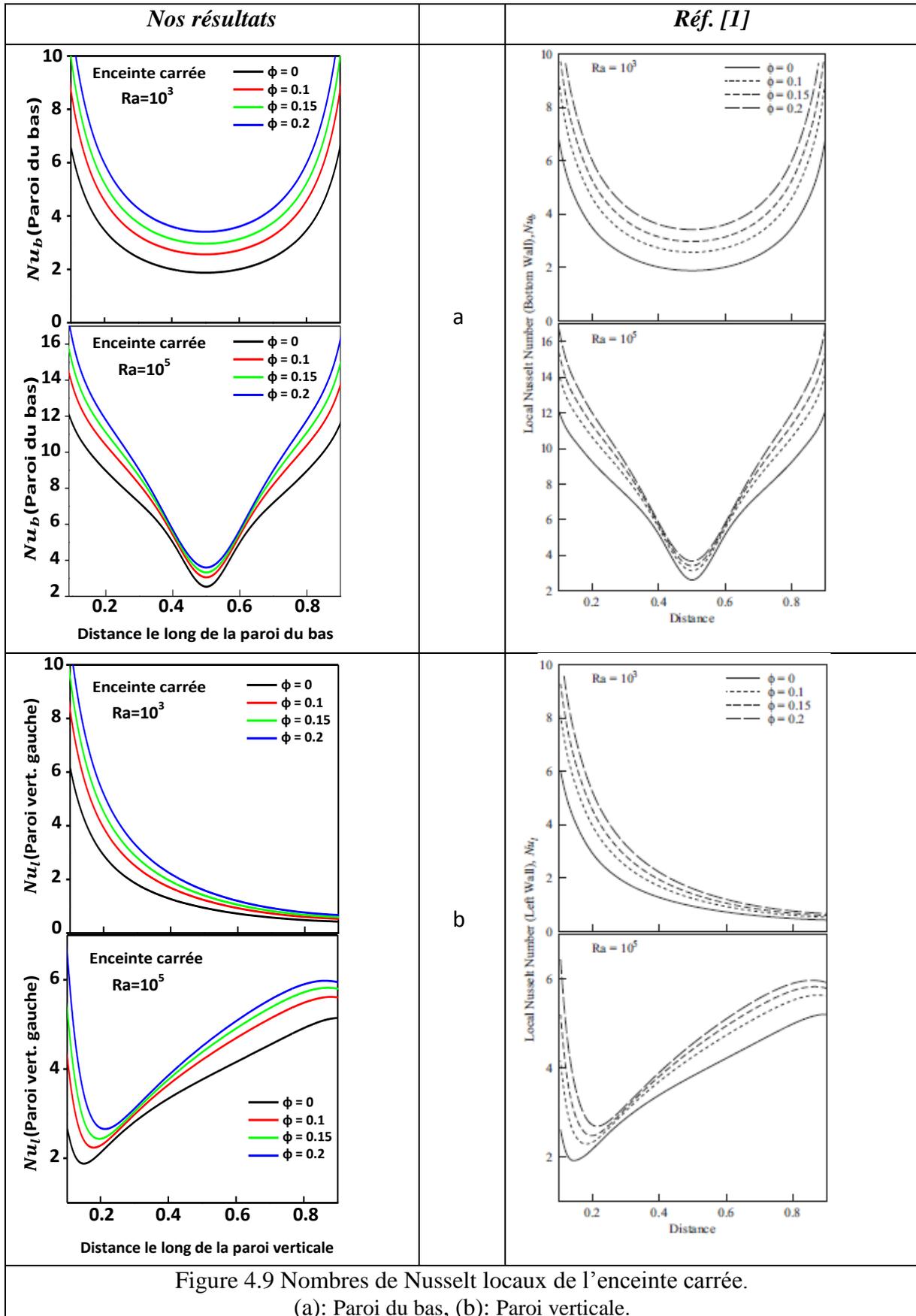


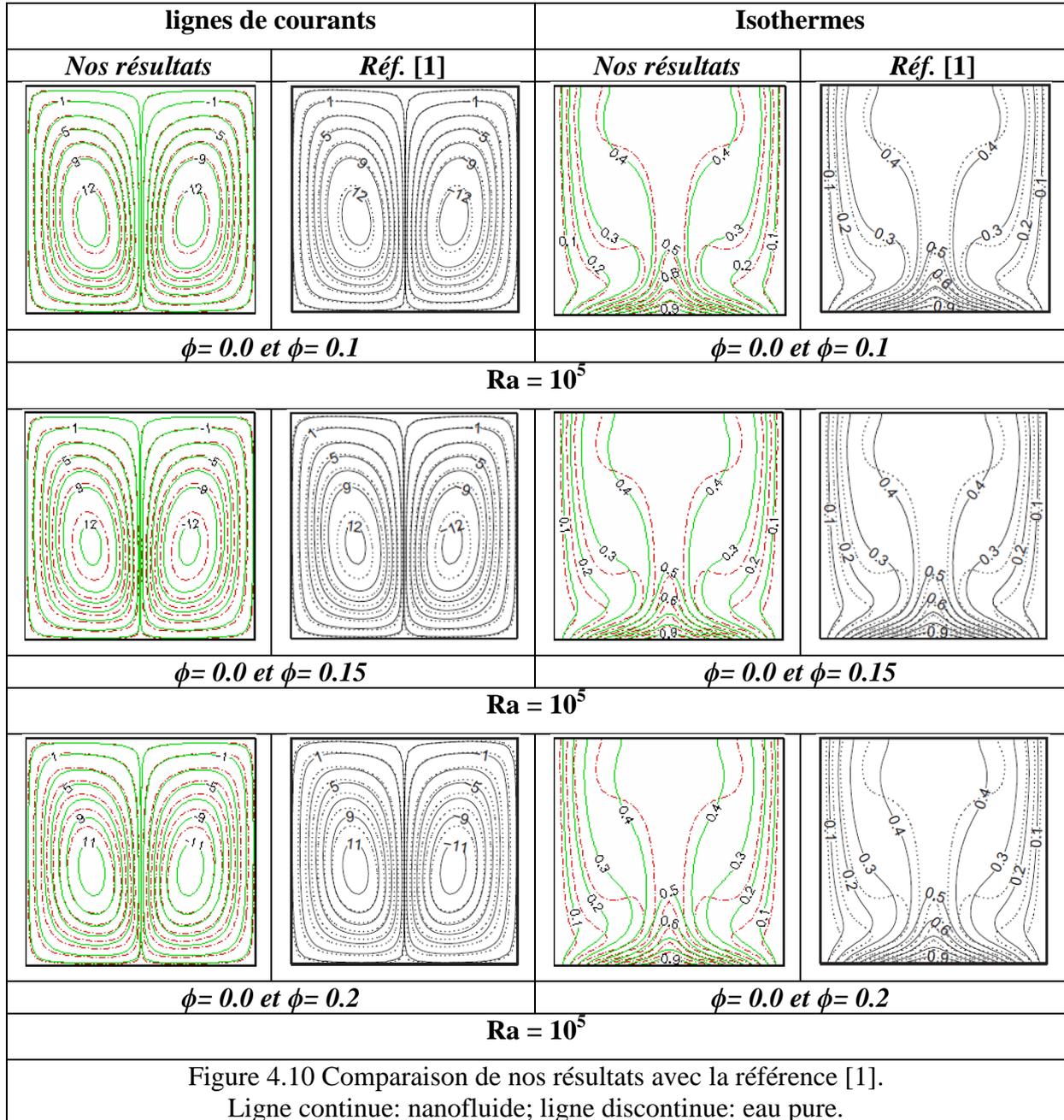
Figure 4.9 Nombres de Nusselt locaux de l'enceinte carrée.

(a): Paroi du bas, (b): Paroi verticale.

4.3.3 Troisième condition pariétale thermique

Les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et celles du bas sont maintenues à une température sinusoïdale.

Comparaison des isothermes et des lignes de courant pour l'enceinte carrée:



Comparaison des nombres de Nusselt locaux pour l'enceinte carrée:

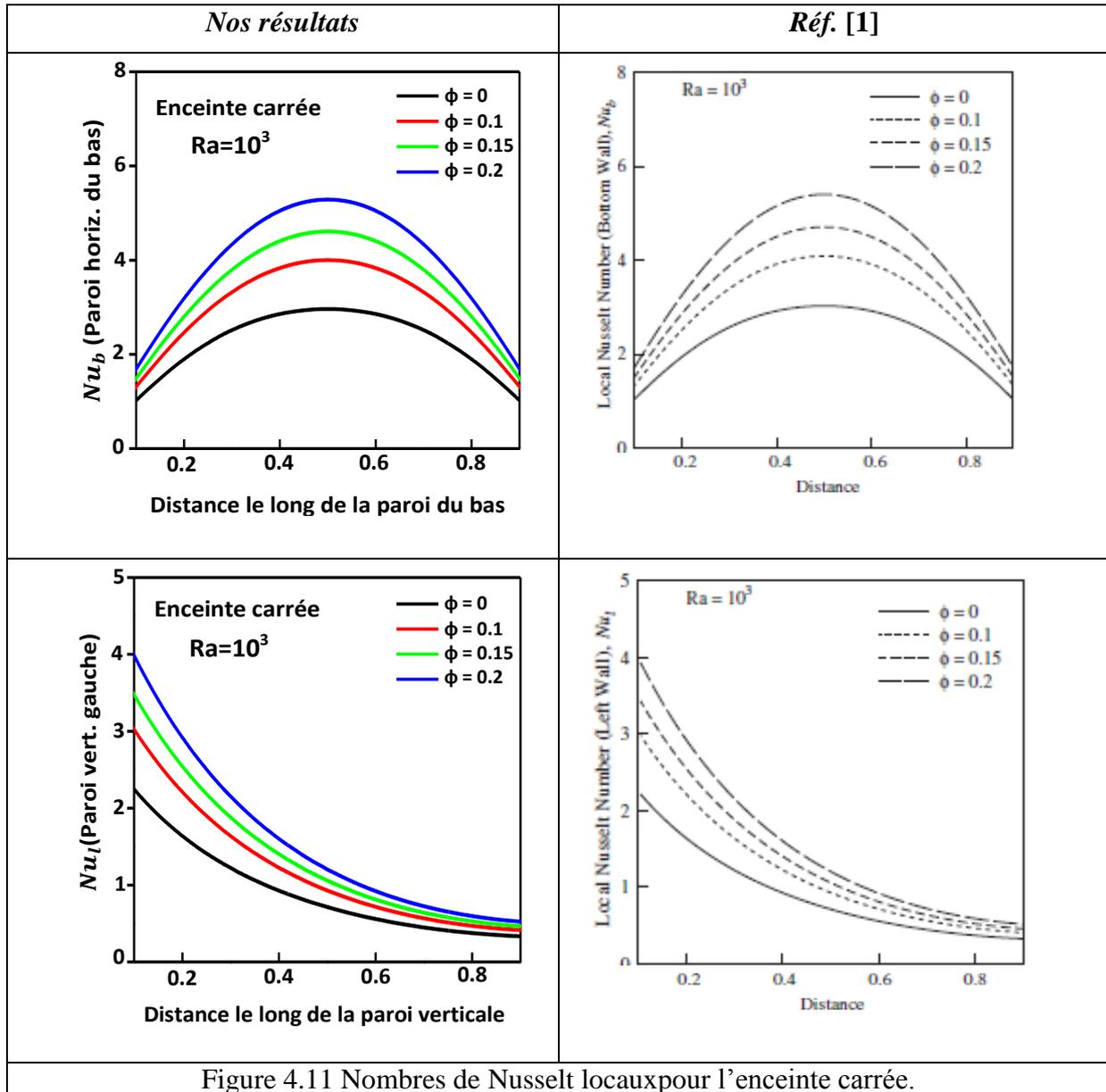


Figure 4.11 Nombres de Nusselt locaux pour l'enceinte carrée.

4.4 Résultats et discussions

4.4.1 Première condition pariétale thermique

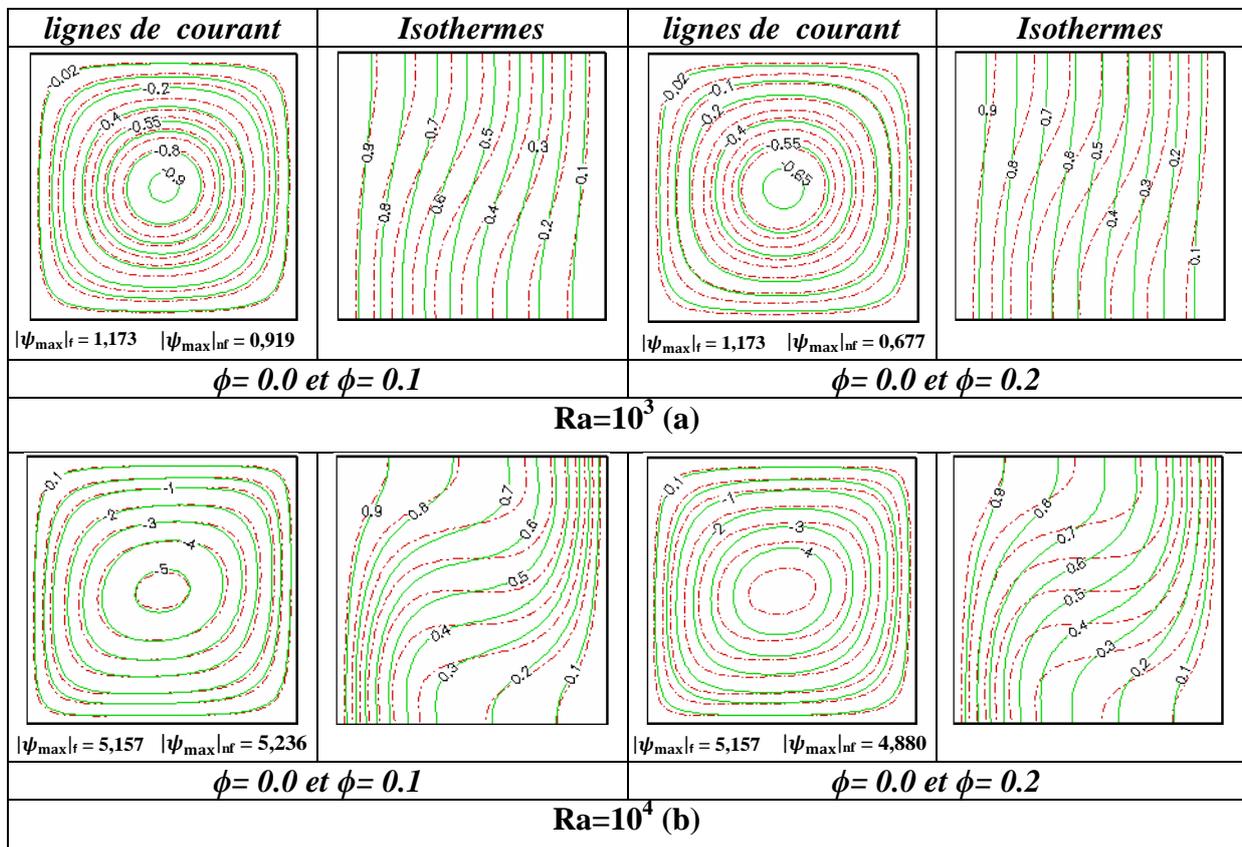
4.4.1.1 Enceinte carrée soumise à un gradient de température horizontal

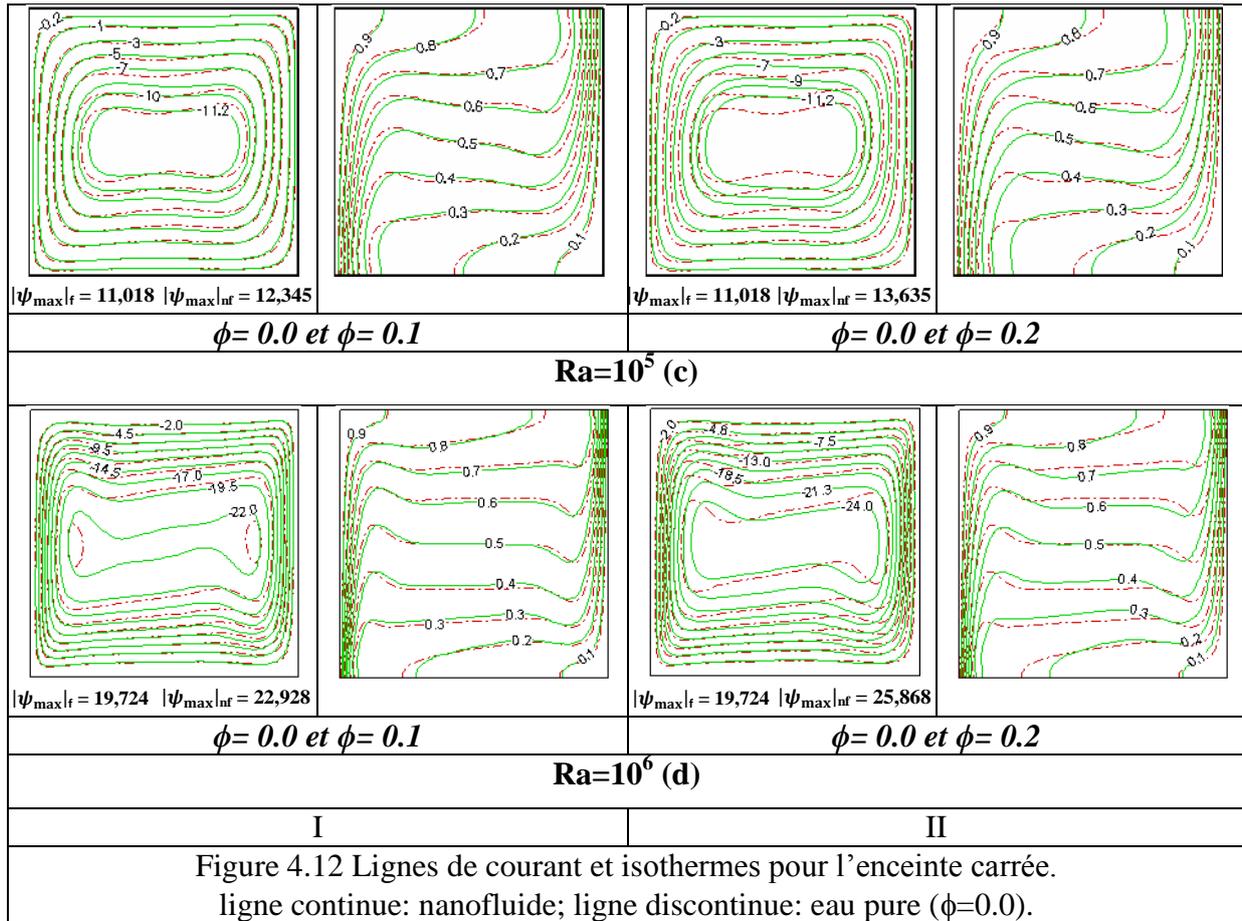
Les figures 4.12.I.a, 4.12.I.b, 4.12.I.c et 4.12.I.d et les figures 4.12.II.a, 4.12.II.b, 4.12.II.c et 4.12.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte carrée pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons un écoulement monocellulaire du fluide qualitativement similaire pour l'eau et le nanofluide pour toute la gamme : $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Mais quantitativement l'augmentation de la fraction volumique ϕ des nanoparticules entraîne une diminution de l'intensité de l'écoulement (pour $Ra=10^3$ et 10^4). Ceci peut s'expliquer par l'importance des forces visqueuses par rapport aux forces d'Archimède dans le cas des

nanofluides et donc l'écoulement est plus ou moins freiné, Par contre pour $Ra \geq 10^5$ les forces d'Archimède dominant les forces visqueuses et par conséquent l'écoulement devient plus intense pour les fractions volumiques utilisées

Pour $Ra=10^3$ les lignes isothermes du nanofluide sont légèrement déformées au centre de l'enceinte, mais restent toujours presque parallèles aux parois latérales froide (moitié supérieure) et chaude (moitié inférieure), et que cette déformation reste toujours inférieure à celle du fluide de base, les valeurs de la fonction de courant sont assez faibles, ce qui traduit une convection naturelle naissante, les transferts thermiques restent toujours dominés par un régime pseudo-conductif.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra \geq 10^4$), les figures 4.12.I.b, 4.12.I.c et 4.12.I.d et les figures 4.12.II.b, 4.12.II.c et 4.12.II.d montrent que les lignes isothermes du nanofluide et du fluide de base se modifient beaucoup et se coincident entre elles au centre de l'enceinte pour devenir presque parallèles aux parois horizontales inactives dans ces régions pour $Ra \geq 10^5$, et épouser la forme des parois actives verticales tout en étant très serrées ce qui dénote d'un transfert de chaleur très intense dans ces régions-là. Aussi les figures montrent que les cellules des lignes de courant s'élargissent au centre de l'enceinte pour $Ra \geq 10^5$ et deviennent très serrées près des parois actives verticales. Les valeurs de la fonction de courant correspondant à ces figures augmentent significativement surtout pour le nanofluide tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante. L'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle surtout pour le nanofluide, et diminue aussi sensiblement l'écart entre les lignes isothermes du nanofluide et du fluide de base près des parois latérales.





4.4.1.2 Enceinte A soumise à un gradient de température horizontal

Les figures 4.13.I.a, 4.13.I.b, 4.13.I.c et 4.13.I.d, et les figures 4.13.II.a, 4.13.II.b, 4.13.II.c et 4.13.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte A, pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0$, 0.1 et 0.2. Nous remarquons que le régime de l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule épousant la forme de l'enceinte, qualitativement similaire pour l'eau et le nanofluide pour toutes la gamme : $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et $\phi=0$, 0.1 et 0.2. Mais quantitativement l'écoulement s'intensifie en ajoutant les nanoparticules de cuivre au fluide de base pour $Ra \geq 10^5$ ce qui a permis aux forces de flottabilité de vaincre les forces de viscosité du nanofluide, le contraire est observé pour $Ra < 10^5$ où les valeurs de la fonction de courant maximale diminuent en ajoutant ces nanoparticules.

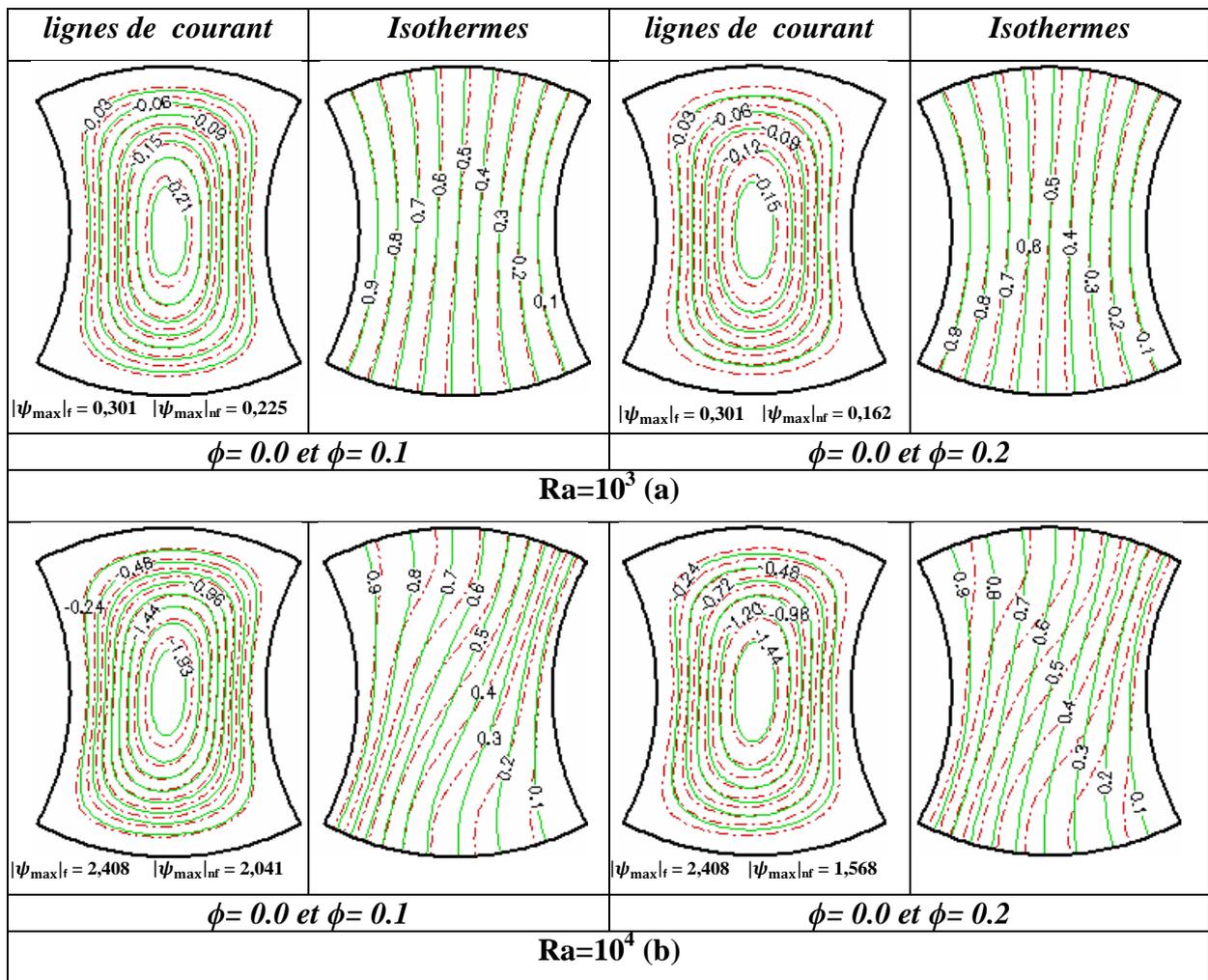
Pour $Ra=10^3$, la figure 4.13.I.a montre que les lignes isothermes du nanofluide épousent le profil des parois verticales et restent parallèles entre elles. Les isothermes du nanofluide se superposent avec celles du fluide de base. Les lignes de courant, du nanofluide et du fluide de base qui sont presque identiques, restent concentriques. Cette configuration montre que nous sommes en présence d'un régime pseudo-conductif.

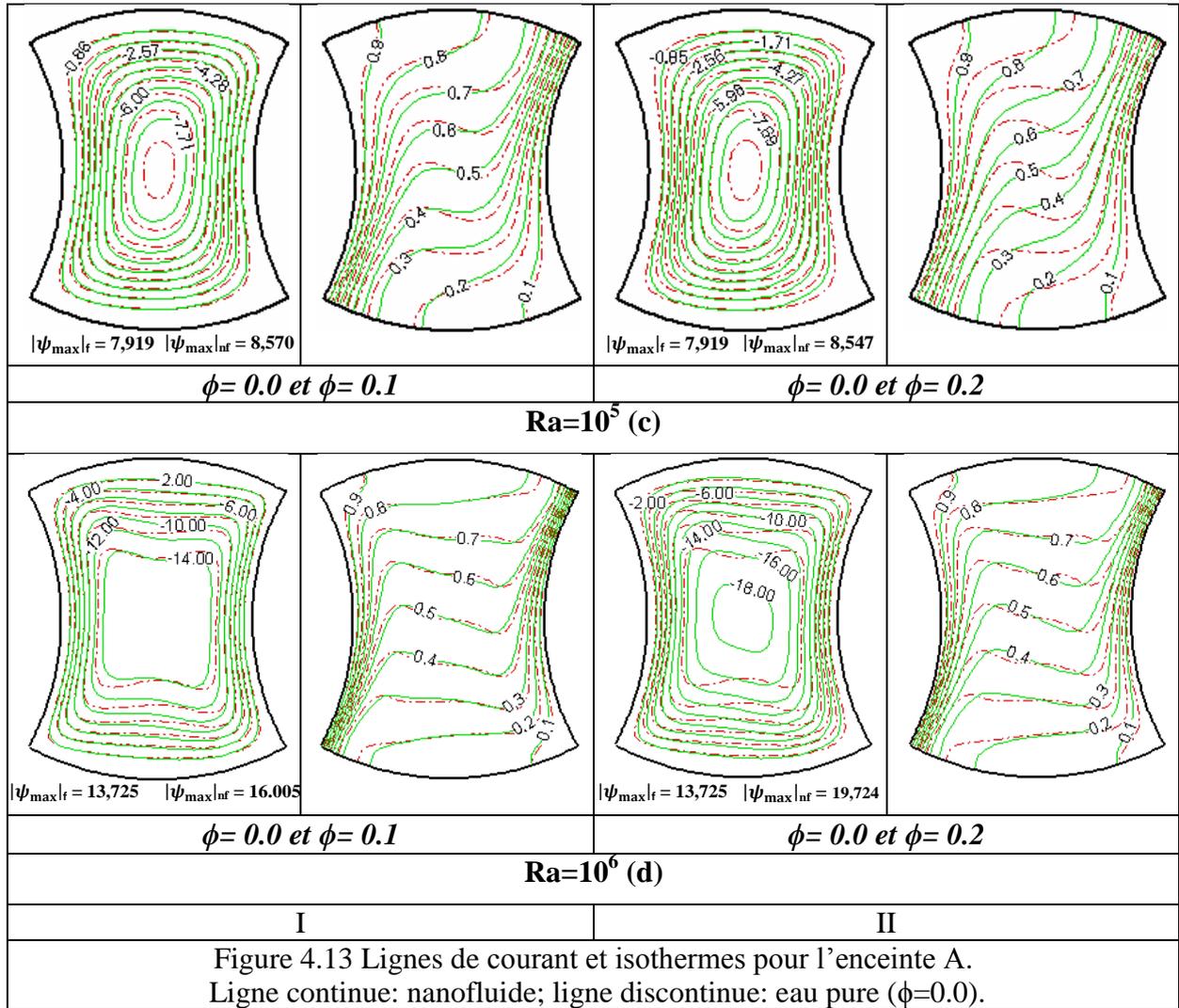
Pour $Ra=10^4$, la figure 4.13.I.b montre que les lignes isothermes se modifient légèrement ce qui dénote une convection naturelle naissante, celles du nanofluide s'écartent légèrement de celles du fluide de base, près des parois horizontales.

Chapitre 4 – Résultats et discussions

Les figures 4.13.I.c, 4.13.I.d et les figures 4.13.II.c et 4.13.II.d correspondant aux valeurs $Ra=10^5$ et 10^6 montrent que les lignes isothermes du nanofluide et du fluide de base se déforment pour devenir, au milieu de l'enceinte, presque parallèles aux parois horizontales de l'enceinte A pour $Ra=10^5$ et que ces déformations sont plus importantes pour $Ra=10^5$. Les valeurs de la fonction de courant augmentent pour $Ra \geq 10^5$, le transfert thermique dans ce cas s'opère par convection.

D'autre part nous remarquons aussi qu'à partir de $Ra=10^4$ les lignes isothermes du nanofluide et du fluide de base commencent à se coïncider entre elles et devenir plus serrées du côté bas de la paroi chaude et du côté haut de la paroi froide pour finir d'être très serrées sur ces régions là, ce qui explique que le transfert de chaleur par convection commence à être plus intense dans ces régions.





4.4.1.3 Enceinte B soumise à un gradient de température horizontal

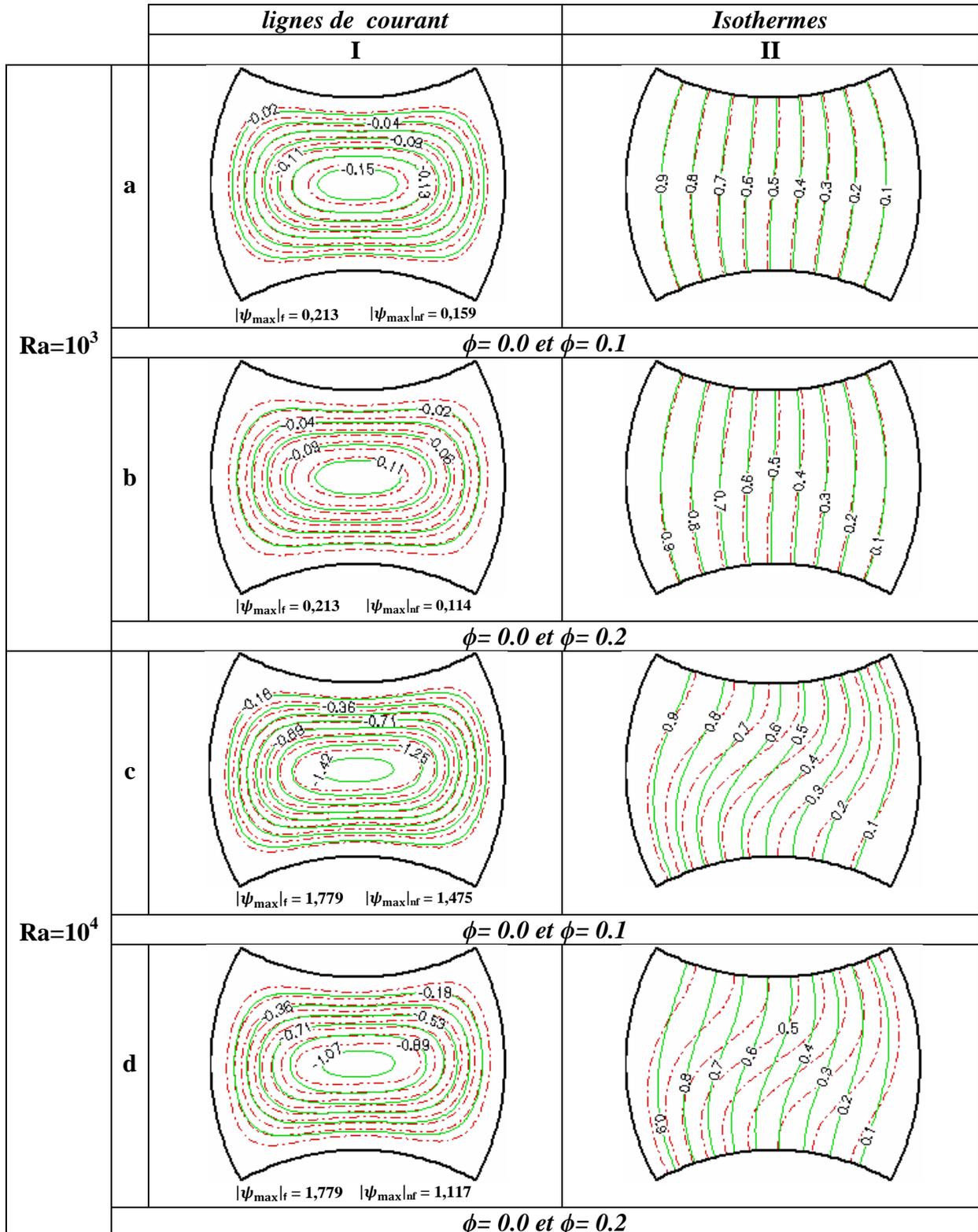
Les figures 4.14.I.a, 4.14.I.b, 4.14.I.c, 4.14.I.d, 4.14.I.e, 4.14.I.f, 4.14.I.g et 4.14.I.h, et les figures 4.14.II.a, 4.14.II.b, 4.14.II.c, 4.14.II.d, 4.14.II.e, 4.14.II.f, 4.14.II.g et 4.14.II.h représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte B, pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0$, 0.1 et 0.2. Nous remarquons que le régime de l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule épousant la forme de l'enceinte.

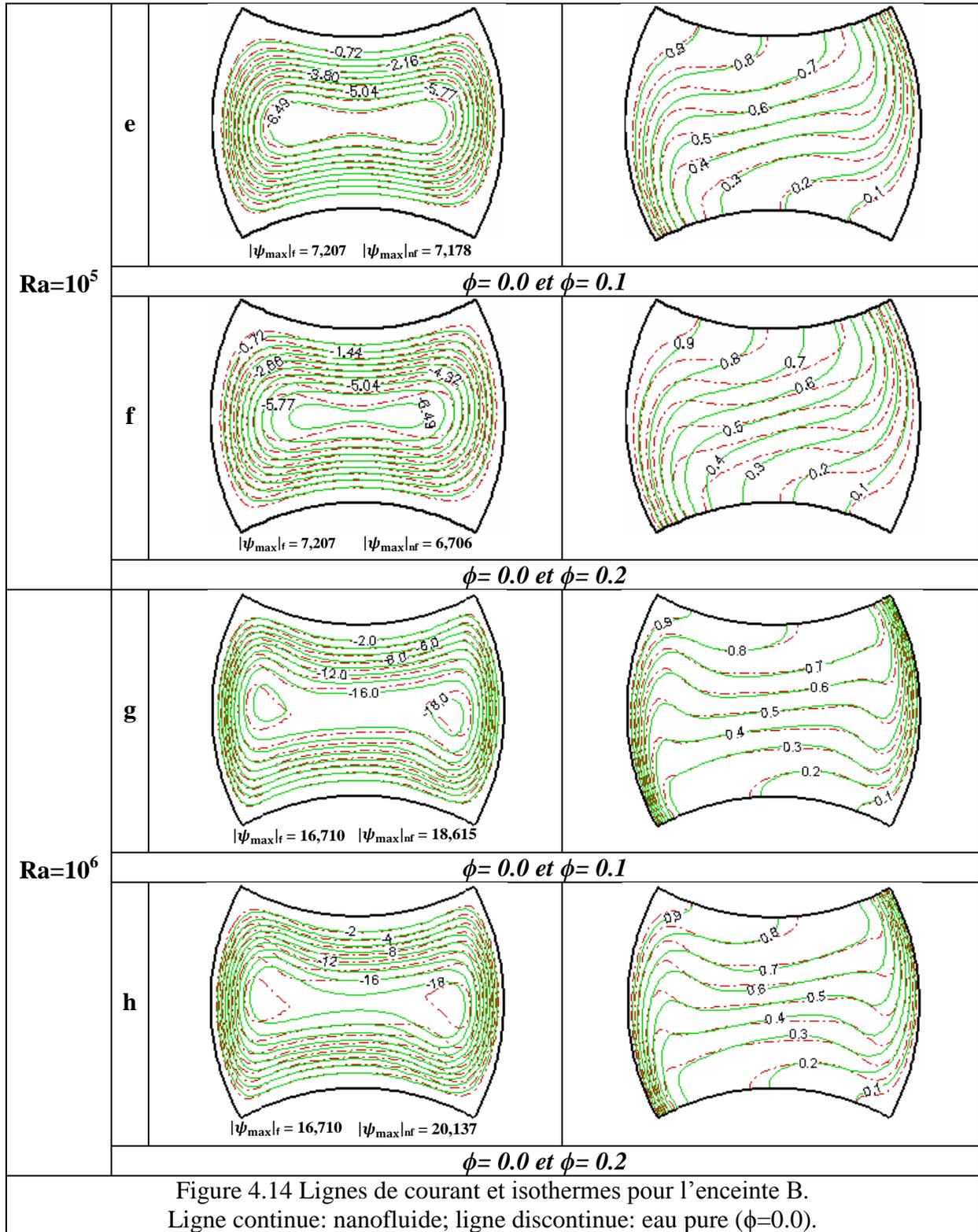
Pour $Ra=10^3$ les figures 4.14.I.a, 4.14.I.b, 4.14.II.a et 4.14.II.b montrent que les lignes isothermes épousent le profil des parois verticales et restent parallèles entre elles avec une coïncidence entre les lignes isothermes du nanofluid et du fluide de base, et que les lignes de courant restent concentriques. Les valeurs de la fonction de courant dénotent que les cellules tournent très lentement, cette configuration montre que nous sommes en présence d'un régime pseudo-conductif.

Pour $Ra=10^4$, les figures 4.14.II.c et 4.14.II.d montrent que les lignes isothermes se modifient légèrement ce qui dénote une convection naturelle naissante, celles du nanofluid s'écartent légèrement de celles du fluide de base, près des parois horizontales.

Chapitre 4 – Résultats et discussions

Les figures 4.14.I.e, 4.14.I.f, 4.14.II.e et 4.14.II.f et les figures 4.14.I.g, 4.14.I.h, 4.14.II.g et 4.14.II.h correspondant aux valeurs $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ montrent que les lignes isothermes du nanofluide se déforment et deviennent très serrées du côté bas de la paroi chaude et du côté haut de la paroi froide, ceci d'une part, d'autre part les valeurs de la fonction de courant augmentent considérablement, ce qui explique que le transfert de chaleur par convection naturelle devient plus intense.





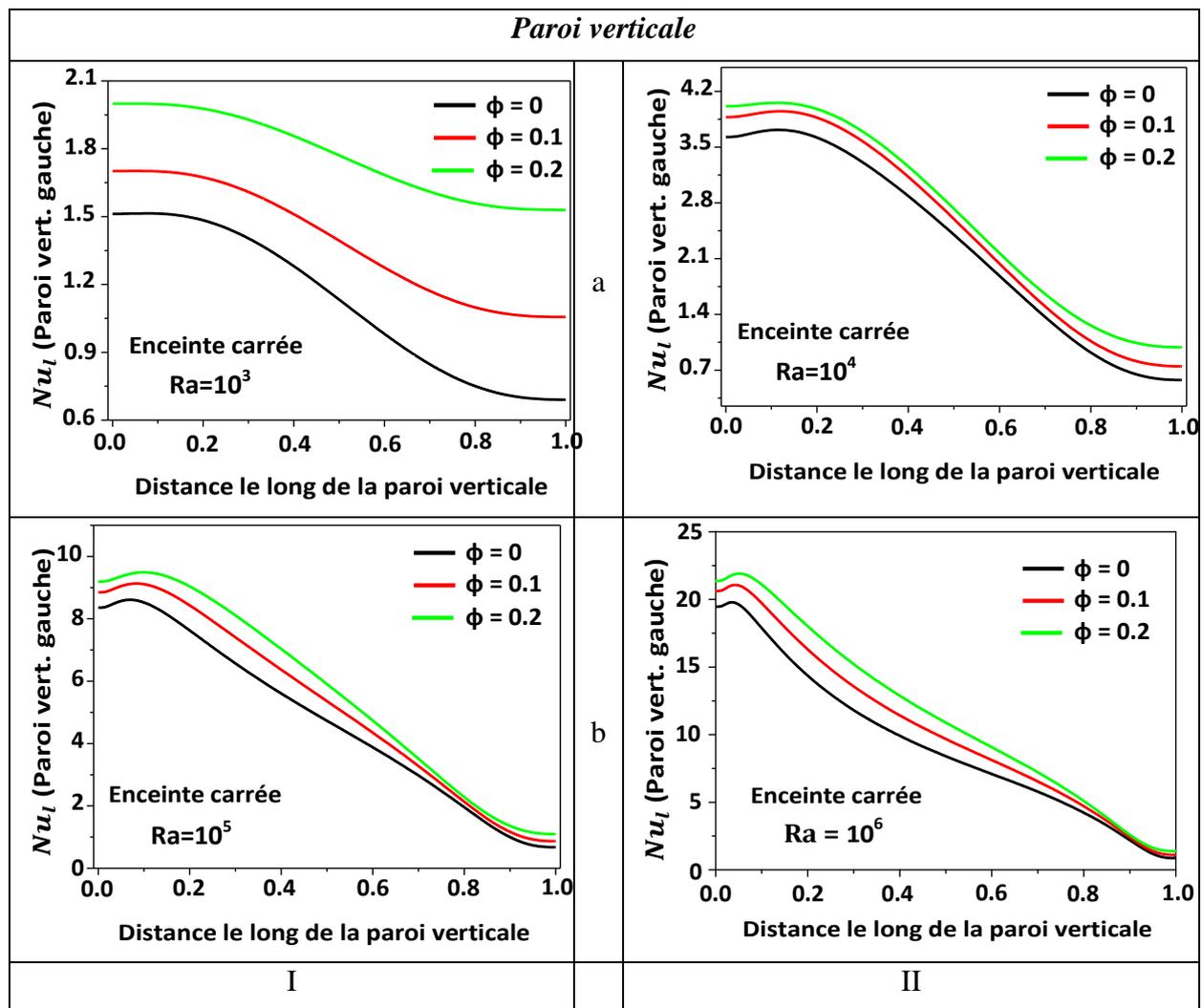
4.4.1.4 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée

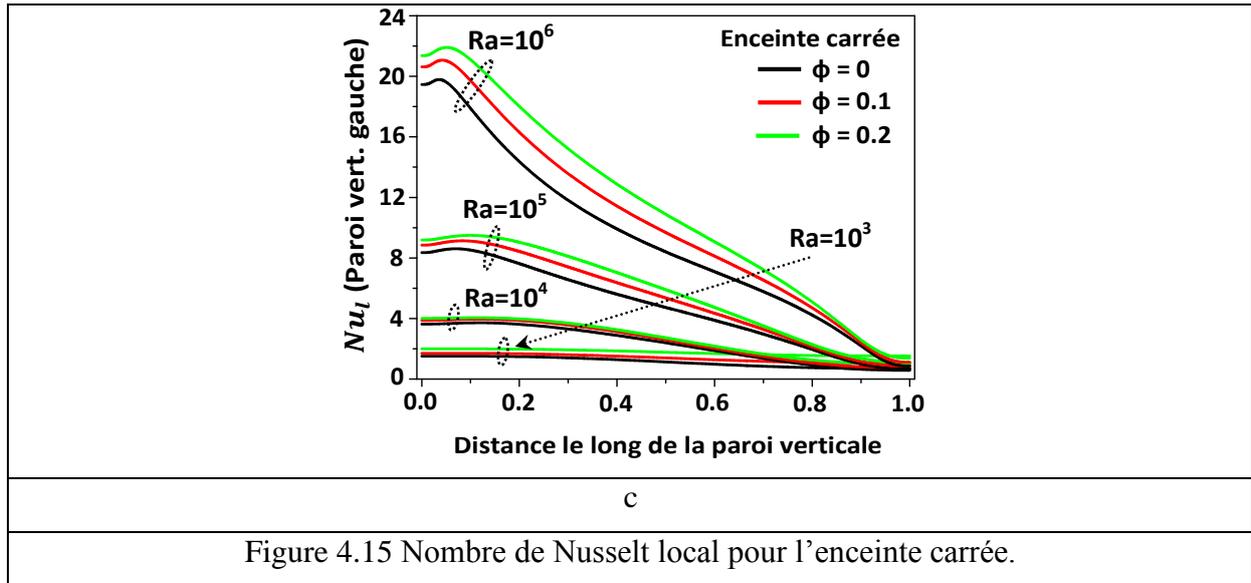
La figure 4.15 représente les variations du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude de l'enceinte carrée pour les valeurs suivantes : nombre de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et la fraction volumique $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons que :

1/ Pour toute la gamme des fractions volumiques et des nombres de Rayleigh, le nombre de Nusselt local sur la paroi verticale chaude atteint son maximum en bas de celle-ci puis sa valeur diminue en ascendant cette dernière pour arriver à son minimum du côté haut, et cela veut dire que le fluide arrive vers la paroi en bas, ce qui traduit un gradient de température important à cet endroit et il la quitte en haut, et donc le gradient de température est moins important dans ce cas.

2/ Pour la même coordonnée y le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, cela veut dire que l'échange de chaleur est meilleur pour des nombres de Rayleigh et des fractions volumiques des nanoparticules élevées.

3/ Les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs 0, 0.1 et 0.2 de la fraction volumique diminuent en augmentant la valeur du nombre de Rayleigh surtout du côté haut de la paroi.



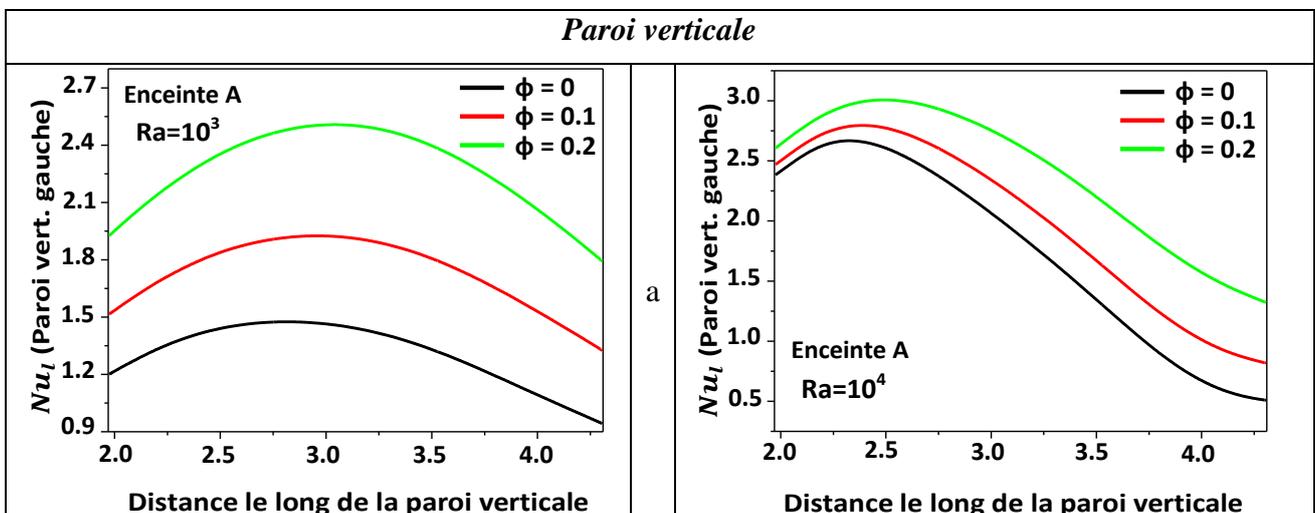


4.4.1.5 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A

D'après les courbes de la figure 4.16 nous pouvons dire que :

1/ Pour toute la gamme des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 et pour le nombre de Rayleigh $Ra=10^3$, le nombre de Nusselt local sur la paroi verticale chaude passe par son maximum proche du milieu (du côté bas) de la paroi, puis sa valeur diminue de part et d'autre de cette dernière pour arriver à son minimum des deux côtés haut et bas. Mais pour des nombres de Rayleigh élevés ($Ra=10^4, Ra=10^5, Ra=10^6$) le nombre de Nusselt local et par conséquent le transfert de chaleur atteint son maximum à un endroit très proche du côté bas de la paroi, puis sa valeur diminue de façon monotone en descendant celle-ci pour passer par son minimum du côté haut, et cela se traduit sur les figures 4.13.I.c, 4.13.I.d et les figures 4.13.II.c, 4.13.II.d par une zone où les isothermes sont très serrées en bas de la paroi.

2/ Pour la même coordonnée y , le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, sauf pour une petite zone du côté haut de la paroi.



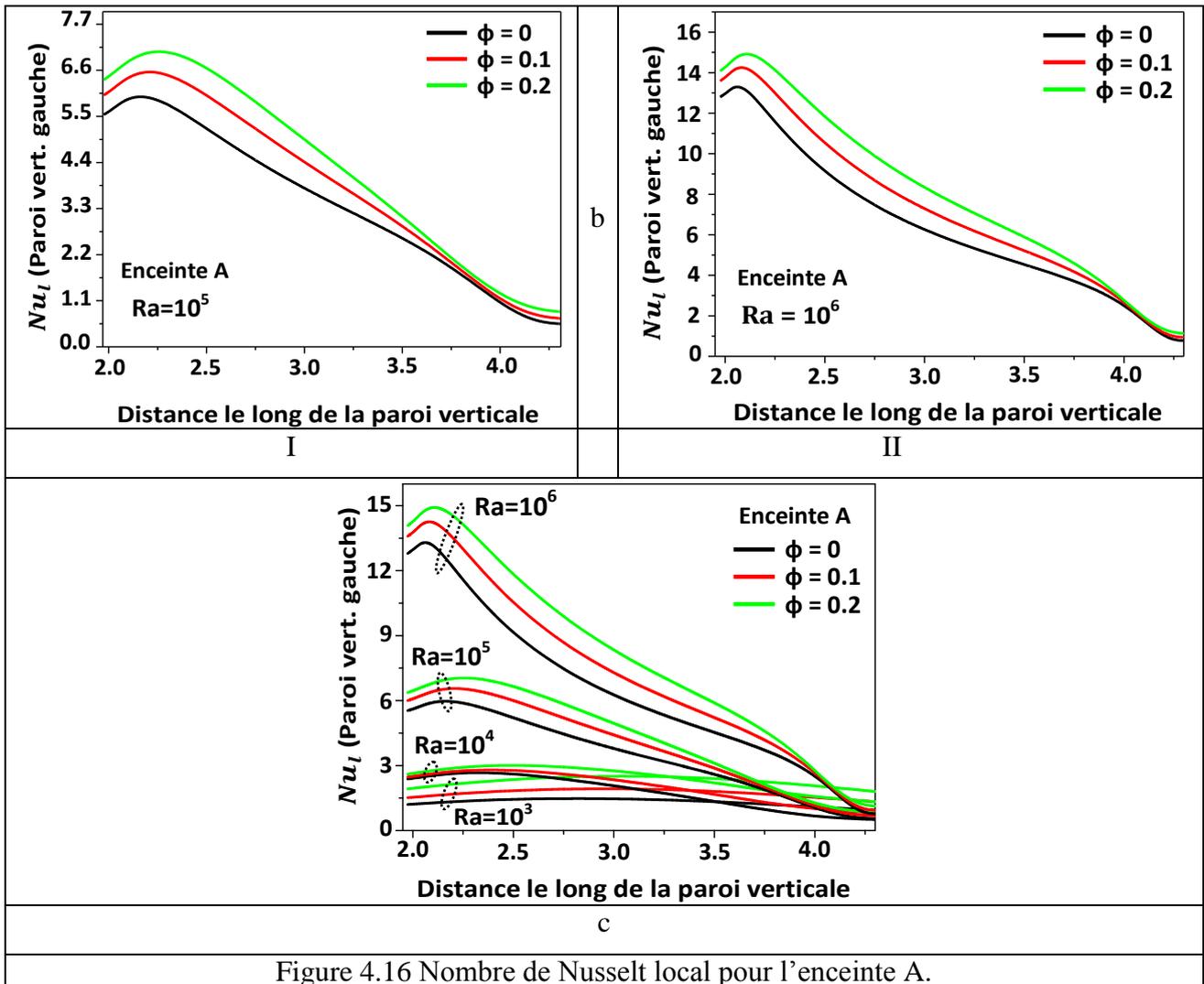


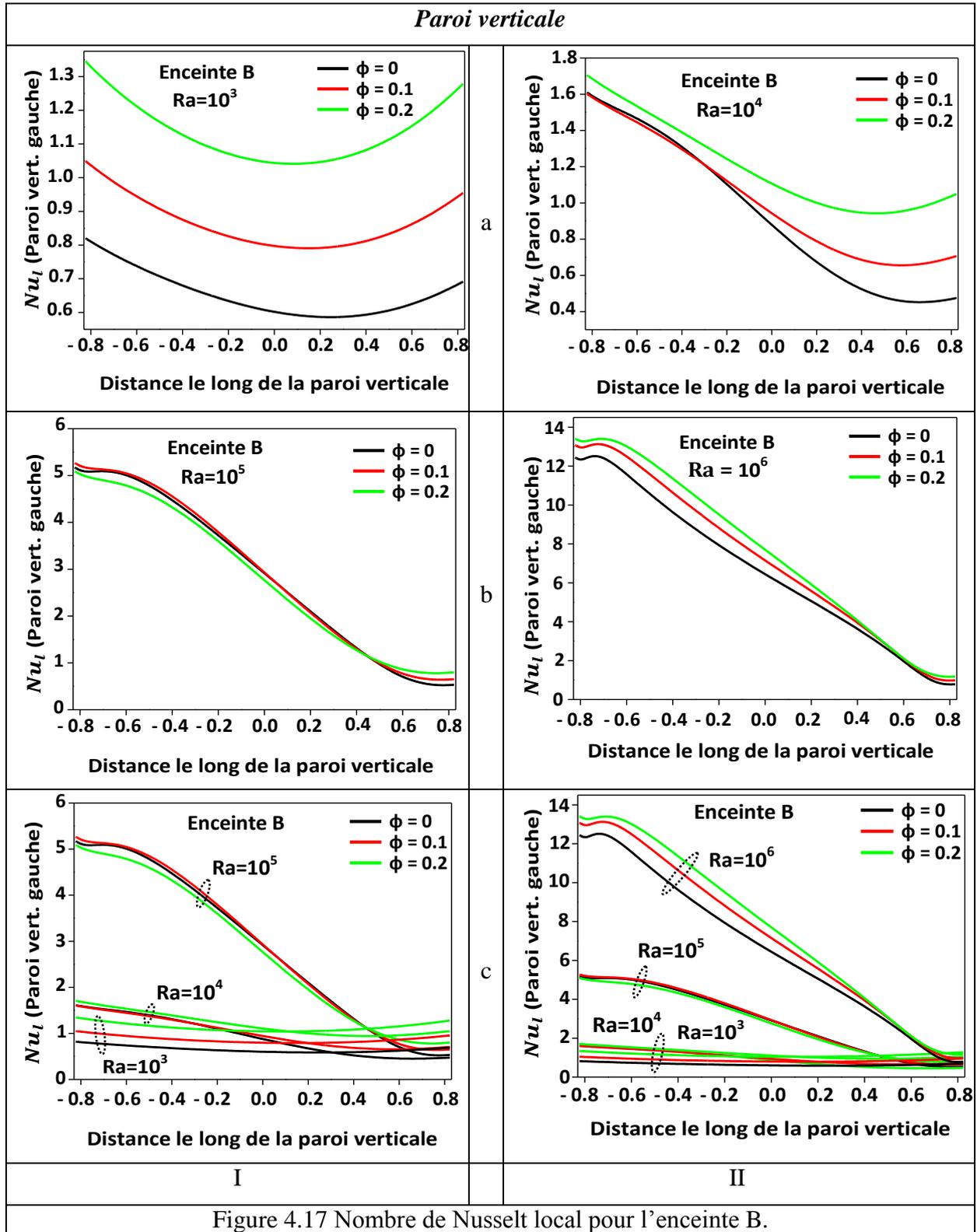
Figure 4.16 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A.

4.4.1.6 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B

D'après les courbes de la figure 4.17 nous remarquons que :

1/ Pour toute la gamme des fractions volumiques $\phi = 0, 0.1$ et 0.2 et pour le nombre de Rayleigh $Ra=10^3$, le nombre de Nusselt local sur la paroi verticale chaude passe par son minimum proche du milieu (du côté haut) de la paroi, puis sa valeur augmente de part et d'autre de cette dernière pour arriver à son maximum des deux côtés haut et bas. Mais pour des nombres de Rayleigh élevés ($Ra=10^4, Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) le nombre de Nusselt local prend son maximum du côté bas de la paroi, puis sa valeur diminue vers son minimum en descendant celle-ci.

2/ Pour la même coordonnée y , le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules, sauf pour $Ra=10^5$ où la fraction volumique des nanoparticules n'a presque aucune influence sur l'amélioration du transfert de chaleur.



4.4.1.7 Nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale chaude des enceintes carrée, A et Ben fonction de la fraction volumique ϕ et du nombre de Rayleigh Ra

Les figures 4.18.I.a, 4.18.I.b, 4.18.I.c et 4.18.I.d et les figures 4.18.II.a, 4.18.II.b et 4.18.II.c montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente à la fois avec l'augmentation du nombre de Rayleigh d'une part et avec l'augmentation de la fraction volumique des

nanoparticules d'autre part, et que le transfert thermique est meilleur dans l'enceinte A pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh, mais en augmentant celui-ci, le transfert thermique devient meilleur dans l'enceinte carrée et s'améliore plus dans celle-ci pour des nombres de Rayleigh plus élevés ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) et en augmentant la fraction volumique des nanoparticules. Ces figures montrent aussi que le nombre de Nusselt moyen augmente d'une façon presque linéaire, avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.

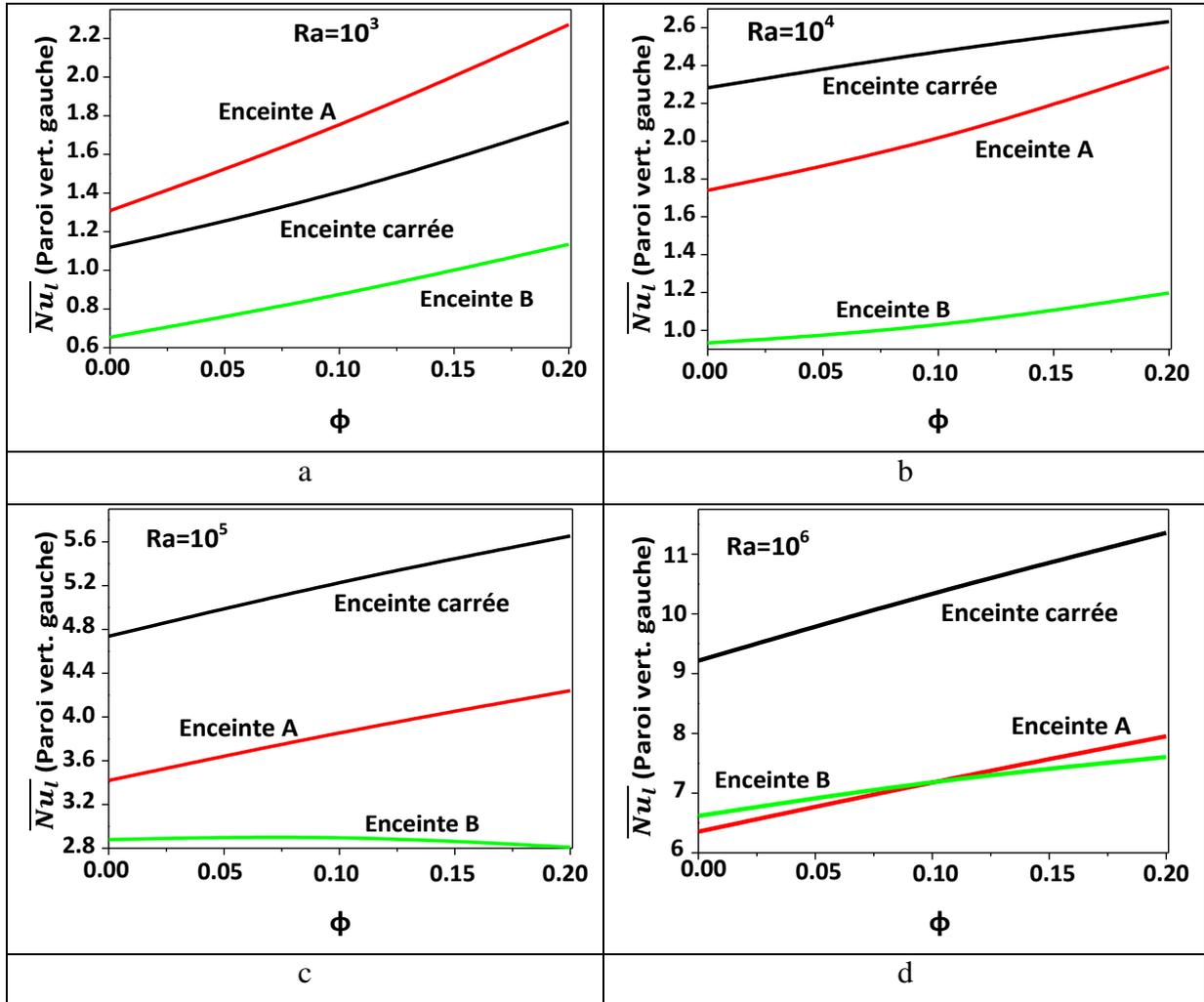
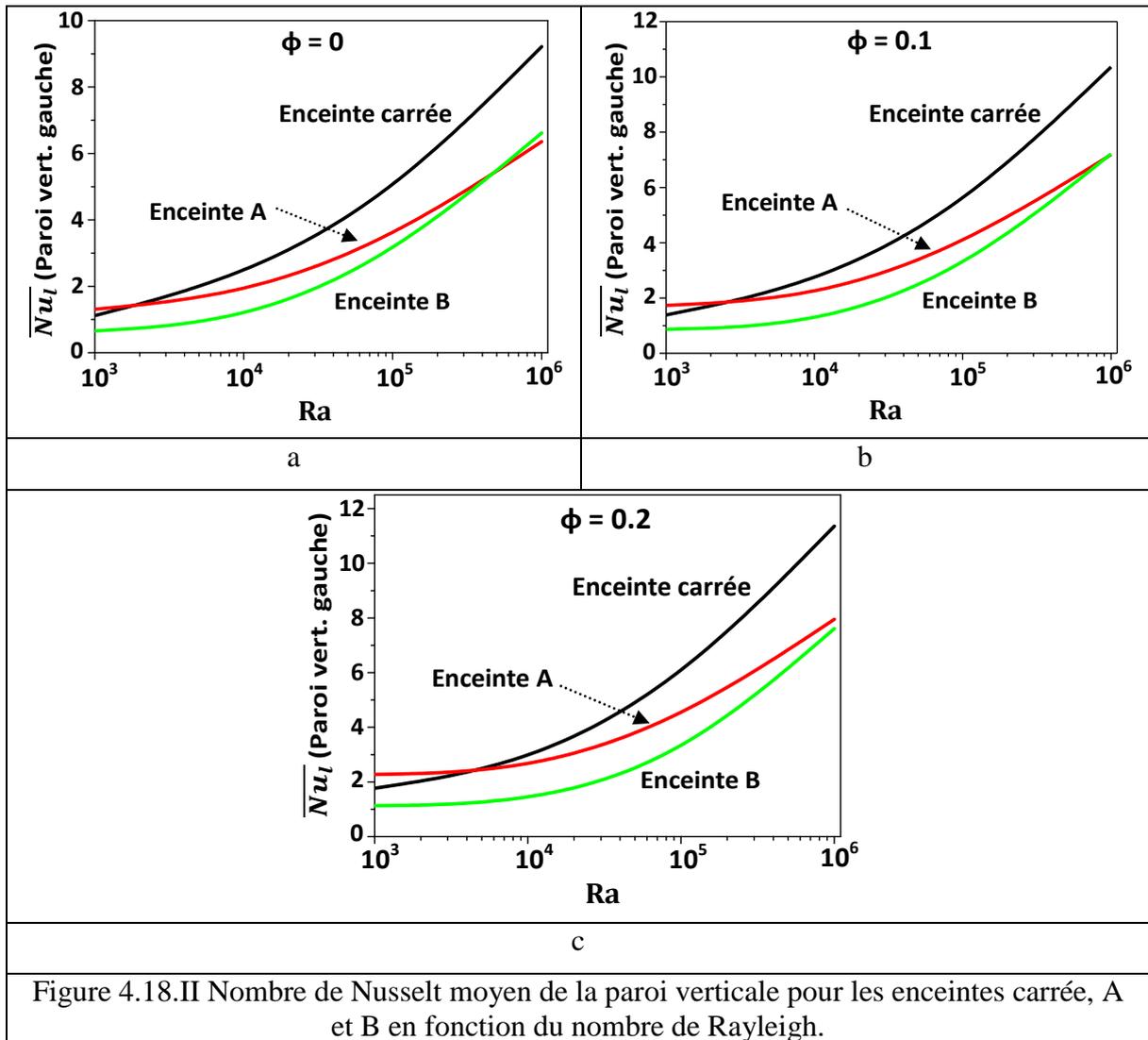


Figure 4.18.I Nombre de Nusselt moyen de la paroi verticale pour les enceintes carrée, A et B en fonction de la fraction volumique ϕ .



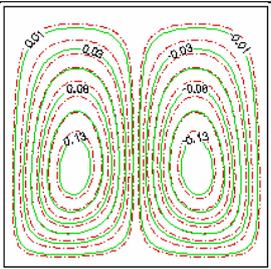
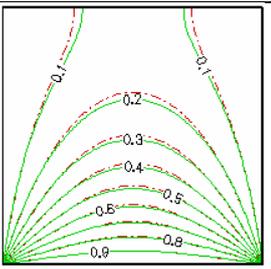
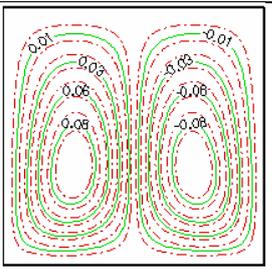
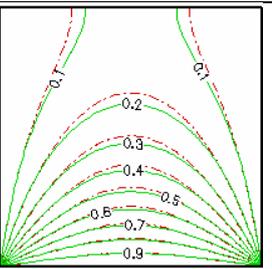
4.4.2 Deuxième condition pariétale thermique

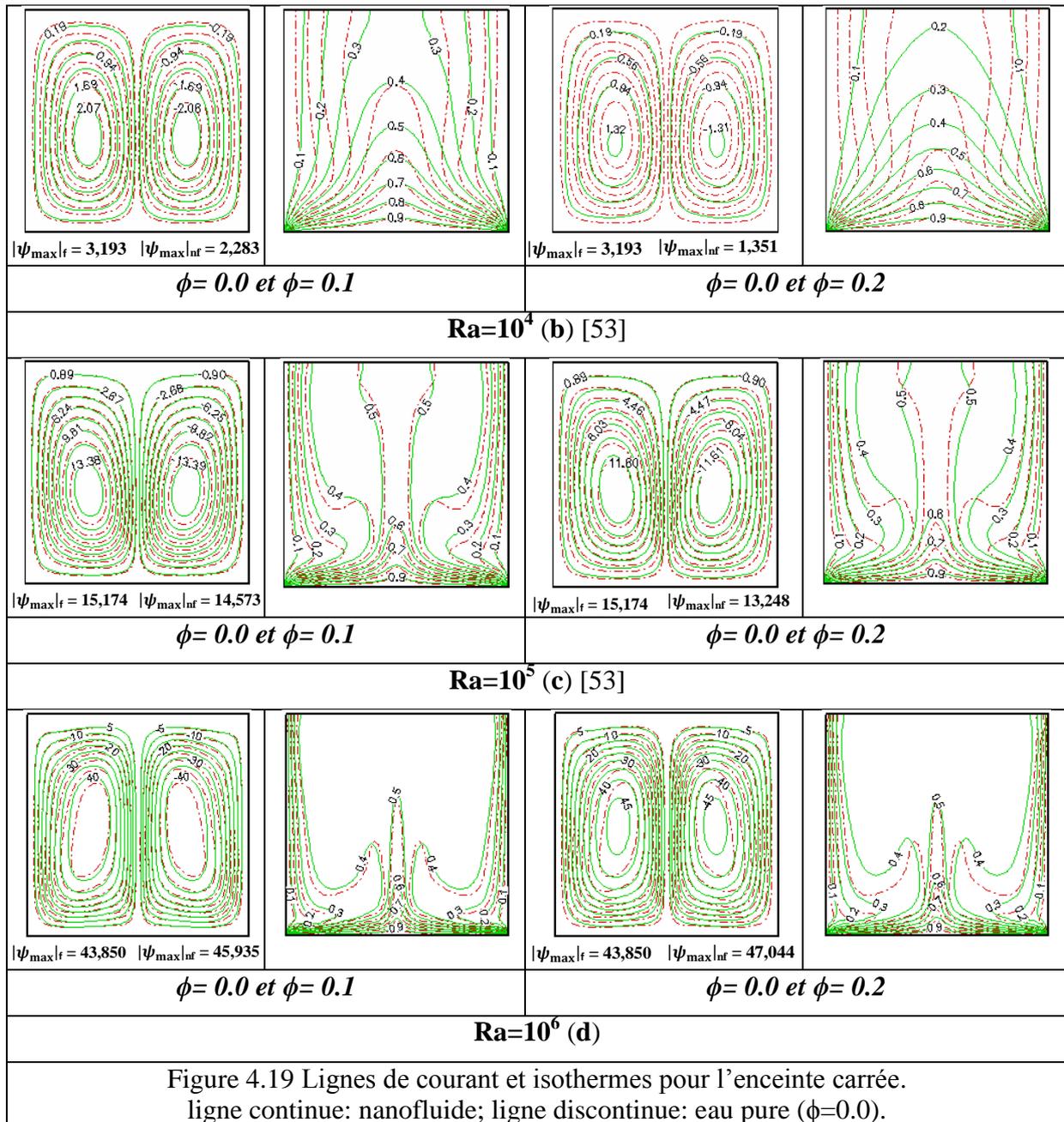
4.4.2.1 Enceinte carrée chauffée par le bas par une température constante

Les figures 4.19.I.a, 4.19.I.b, 4.19.I.c et 4.19.I.d et les figures 4.19.II.a, 4.19.II.b, 4.19.II.c et 4.19.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte carrée pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3$, 10^4 et 10^5 et des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons un écoulement bicellulaire du fluide symétrique par rapport à l'axe médian vertical de l'enceinte qualitativement similaire pour l'eau et le nanofluide pour toute la gamme : $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Mais quantitativement l'intensité de l'écoulement est plus forte au centre de la cavité pour les faibles valeurs de ϕ et cela est à cause de la viscosité du fluide qui augmente avec la fraction volumique des nanoparticules.

Pour $Ra=10^3$ le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction surtout sur la zone centrale de l'enceinte. Les distributions de température de l'eau pure et du nanofluide sont presque identiques à proximité de la paroi inférieure de la cavité, ici l'ajout de nanoparticules n'affecte pas l'allure des isothermes.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra=10^4$) les lignes isothermes commencent à se rapprocher entre elles, près des parois verticales et de celle du bas pour finir d'être très serrées à ces endroits pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$, ce qui signifie que le transfert de chaleur s'améliore près des parois, tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante et que l'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle. De même les écarts entre les isothermes du nanofluide et de l'eau pure, qui sont causés par la présence des nanoparticules et qui augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique ϕ des nanoparticules, se réduisent près des parois de l'enceinte.

<i>lignes de courant</i>	<i>Isothermes</i>	<i>lignes de courant</i>	<i>Isothermes</i>
I		II	
			
$ \psi_{\max} _f = 0,196$ $ \psi_{\max} _{nf} = 0,138$		$ \psi_{\max} _f = 0,196$ $ \psi_{\max} _{nf} = 0,097$	
$\phi = 0.0$ et $\phi = 0.1$		$\phi = 0.0$ et $\phi = 0.2$	
$Ra=10^3$ (a) [53]			



4.4.2.2 Enceinte A chauffée par le bas par une température constante

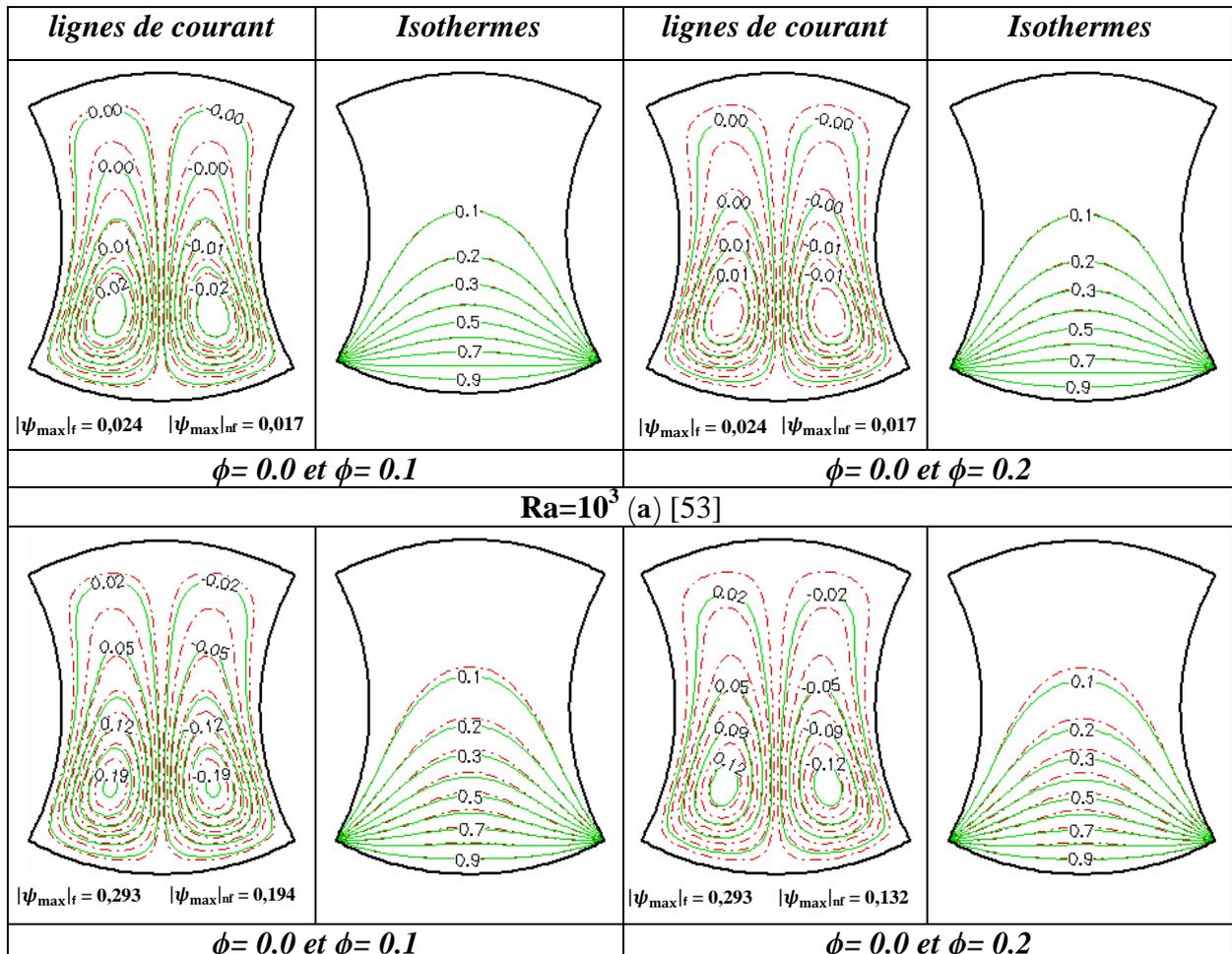
Les figures 4.20.I.a, 4.20.I.b, 4.20.I.c et 4.20.I.d et les figures 4.20.II.a, 4.20.II.b, 4.20.II.c et 4.20.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte A, pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 .

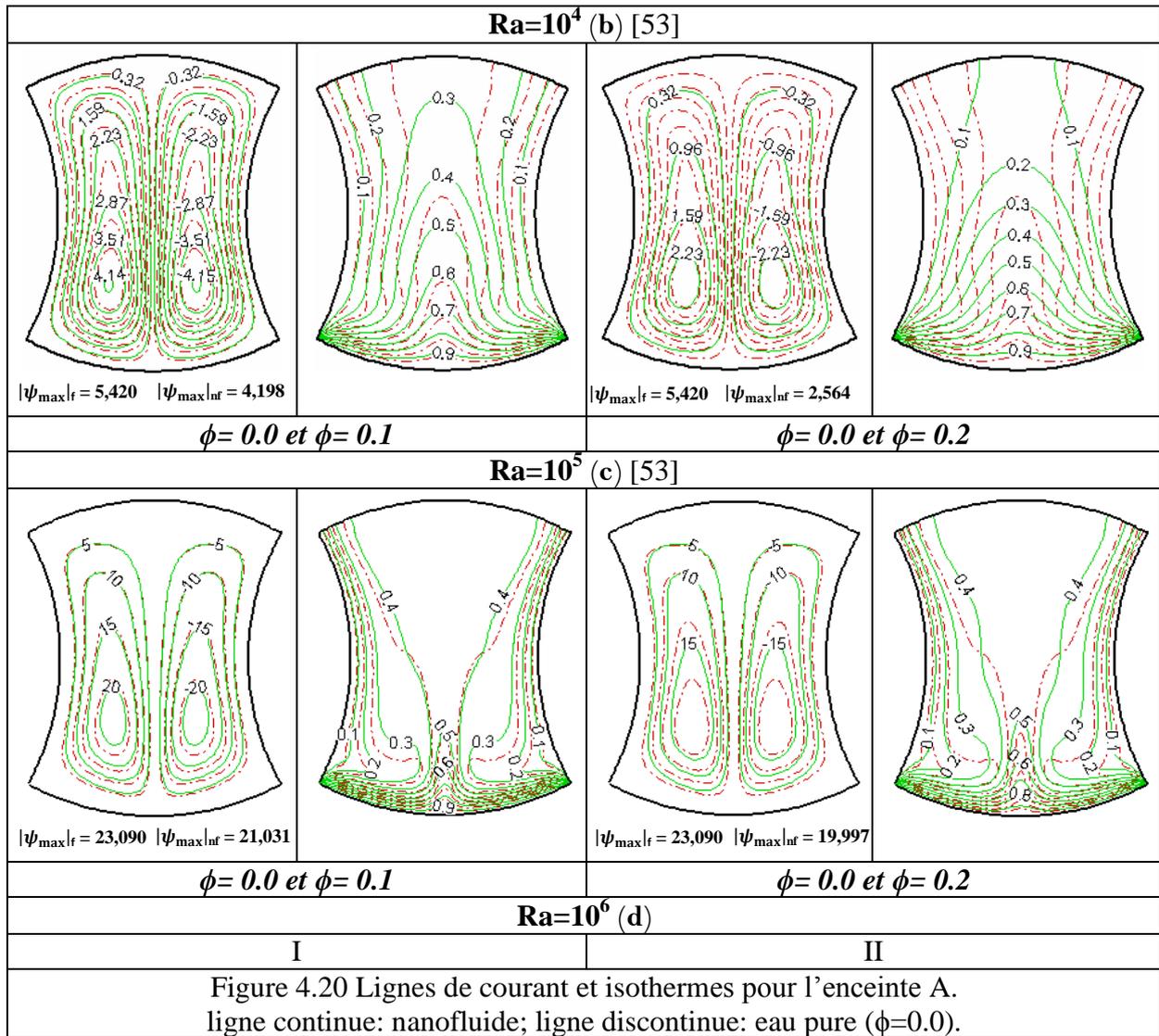
Pour $Ra=10^3$ (fig. 4.20.I.a et 4.20.II.a) l'écoulement du fluide est localisé à la moitié basse de l'enceinte avec de très faibles valeurs de la fonction de courant, et de même pour les lignes isothermes qui sont presque parallèles entre elles, et qui ne sont pas influencées par la présence du nanofluide. Le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction dans la moitié basse de l'enceinte, la moitié haute de celle-ci est une zone morte.

Pour $Ra=10^4$ (fig.4.20.I.b et 4.20.II.b) l'effet de la présence des nanoparticules commence à apparaître sous forme d'un décalage entre les isothermes de l'eau pure et du nanofluide. Le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction avec l'apparition d'une convection naturelle naissante.

Pour $Ra=10^5$ (fig.4.20.I.c et 4.20.II.c) le transfert de chaleur s'opère dans toute l'enceinte. Les deux vortex et les isothermes occupent toute la cavité avec un transfert thermique relativement intense sur les parois de l'enceinte. Le transfert thermique est dominé par la convection naturelle. Nous remarquons aussi l'apparition d'une amélioration du transfert thermique dans le fluide de base par rapport au nanofluide correspondant à $\phi=0.2$, près de la moitié supérieure de la paroi verticale qui se traduit par une zone où les isothermes correspondant au fluide de base deviennent plus serrées sur celle-ci comme le montre la figure 4.20.II.c. Le transfert de chaleur qui est moins intense pour le nanofluide dans ce cas est dû essentiellement à la courbure de la paroi (paroi convexe qui freine l'écoulement du fluide) et la viscosité du nanofluide.

Pour $Ra=10^6$ (fig.4.20.I.d et 4.20.II.d) les lignes isothermes se rapprochent entre elles, près des parois verticales et de celle du bas et deviennent très serrées à ces endroits, ce qui signifie que le transfert de chaleur s'améliore significativement près des parois, tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante et que l'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de cette dernière.





4.4.2.3 Enceinte B chauffée par le bas par une température constante

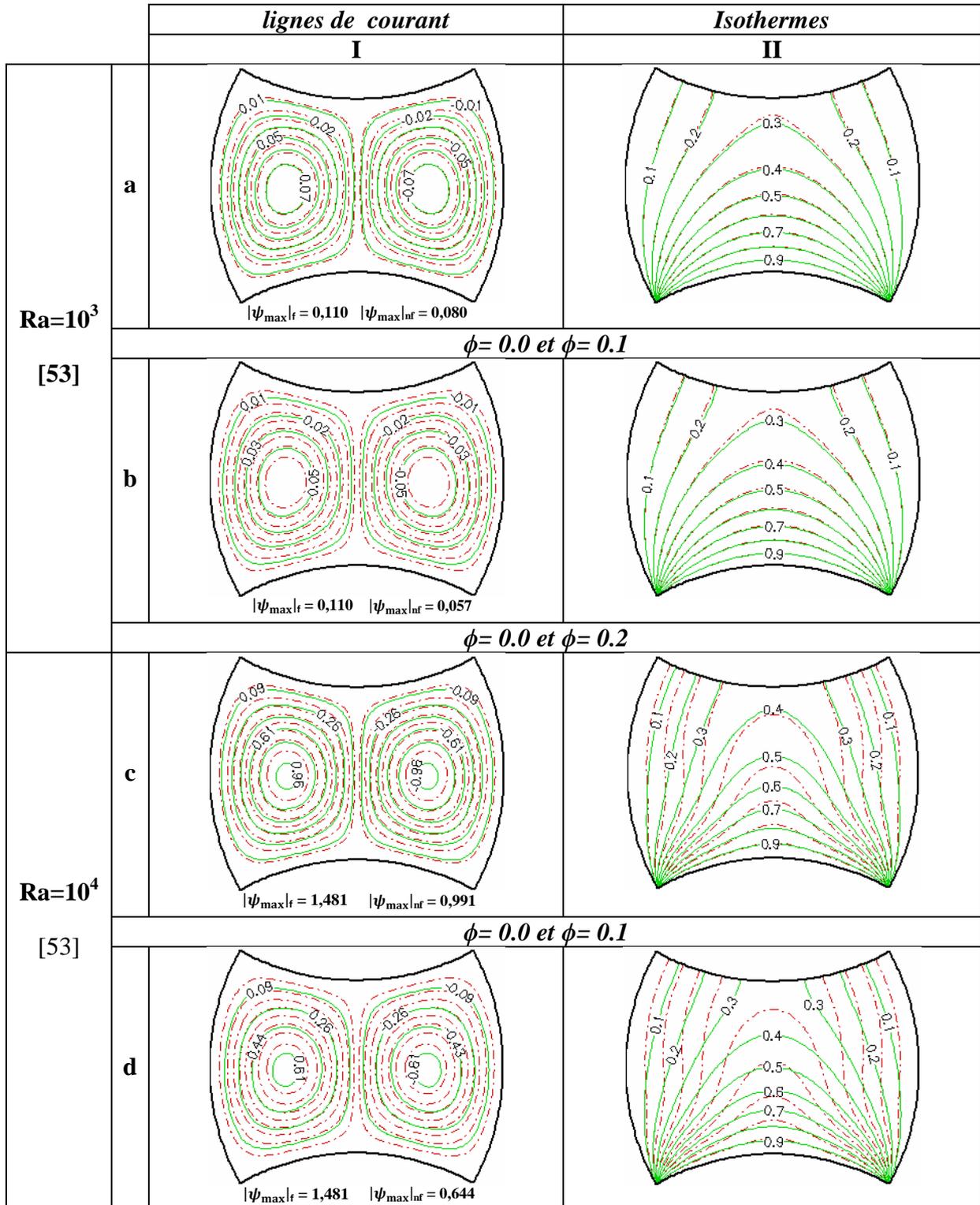
Toutes les figures de ce paragraphe représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte B, pour des nombres de Rayleigh $Ra= 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 .

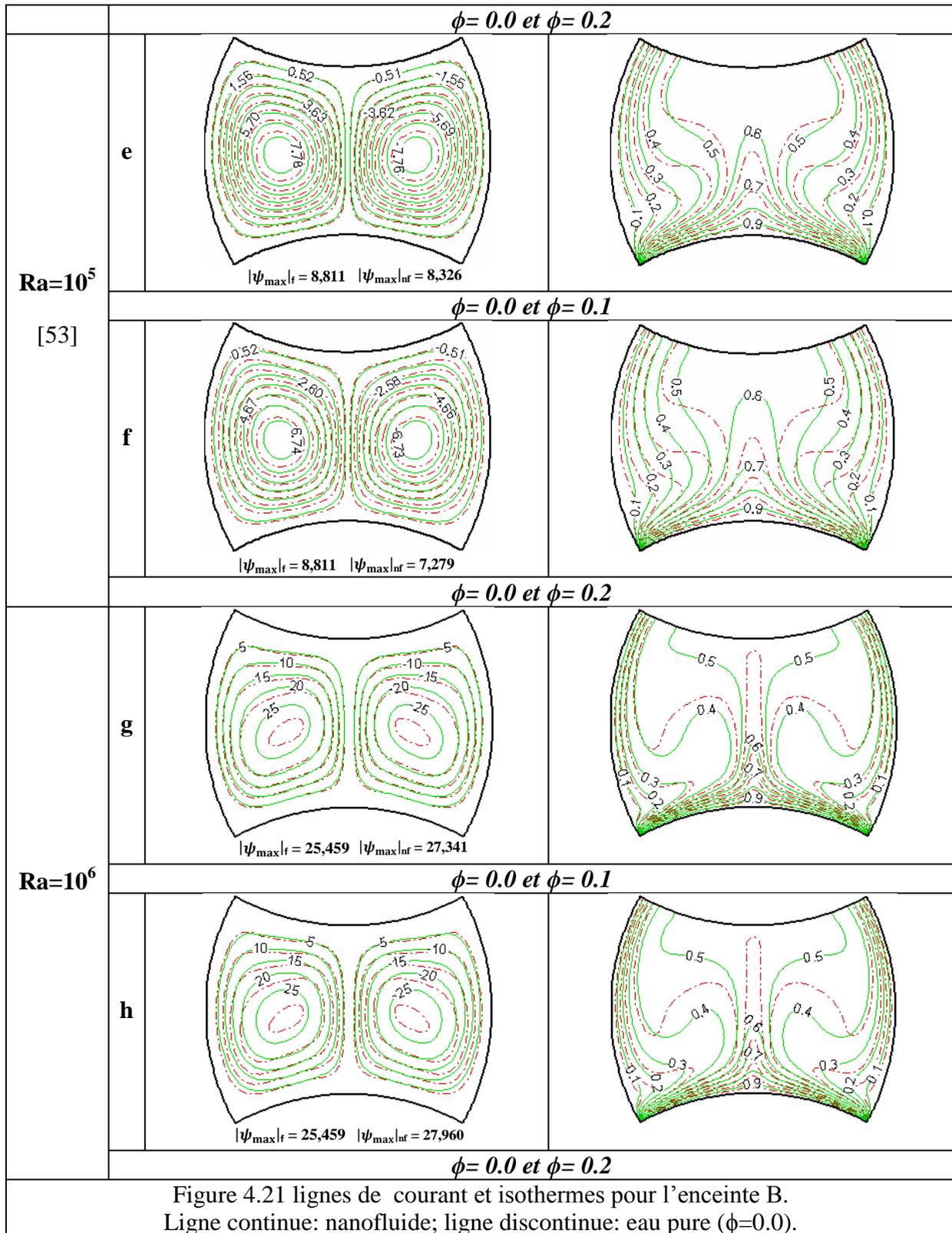
Pour $Ra=10^3$ les lignes isothermes sont presque parallèles à la paroi horizontale chaude de l'enceinte B, et les valeurs de la fonction de courant sont très faibles, le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction surtout dans la zone centrale de l'enceinte. L'effet de la présence des nanoparticules apparaît loin des parois et augmente avec l'augmentation de la fraction volumique.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra \geq 10^4$) les lignes isothermes se rapprochent entre elles près des parois verticales concaves (la courbure de ces dernières permet un meilleur écoulement du fluide), et elles deviennent aussi très serrées au niveau de la paroi du bas particulièrement pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$. De même, les valeurs de la fonction de courant augmentent, ce qui signifie que le transfert thermique par convection naturelle s'intensifie. Nous remarquons que les écarts entre les isothermes du nanofluide et de l'eau

pure augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique ϕ des nanoparticules surtout loin des parois.

Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh l'échange de chaleur s'améliore surtout sur la moitié supérieure des parois verticales et de part et d'autre de la paroi du bas se traduisant par des isothermes très serrées dans ces zones (Fig. 4.21.II.e, 4.21.II.f, 4.21.II.g et 4.21.II.h).





4.4.2.4 Variation des nombres de Nusselt locaux pour les enceintes carrée, A et B

Les figures 4.22.I.a, 4.22.I.b, 4.22.I.c et 4.22.I.d, les figures 4.23.I.a, 4.23.I.b, 4.23.I.c et 4.23.I.d et les figures 4.24.I.a, 4.24.I.b, 4.22.I.c et 4.24.I.d représentent les variations du nombre de Nusselt local le long de la paroi du bas des enceintes carrée, A et B pour les

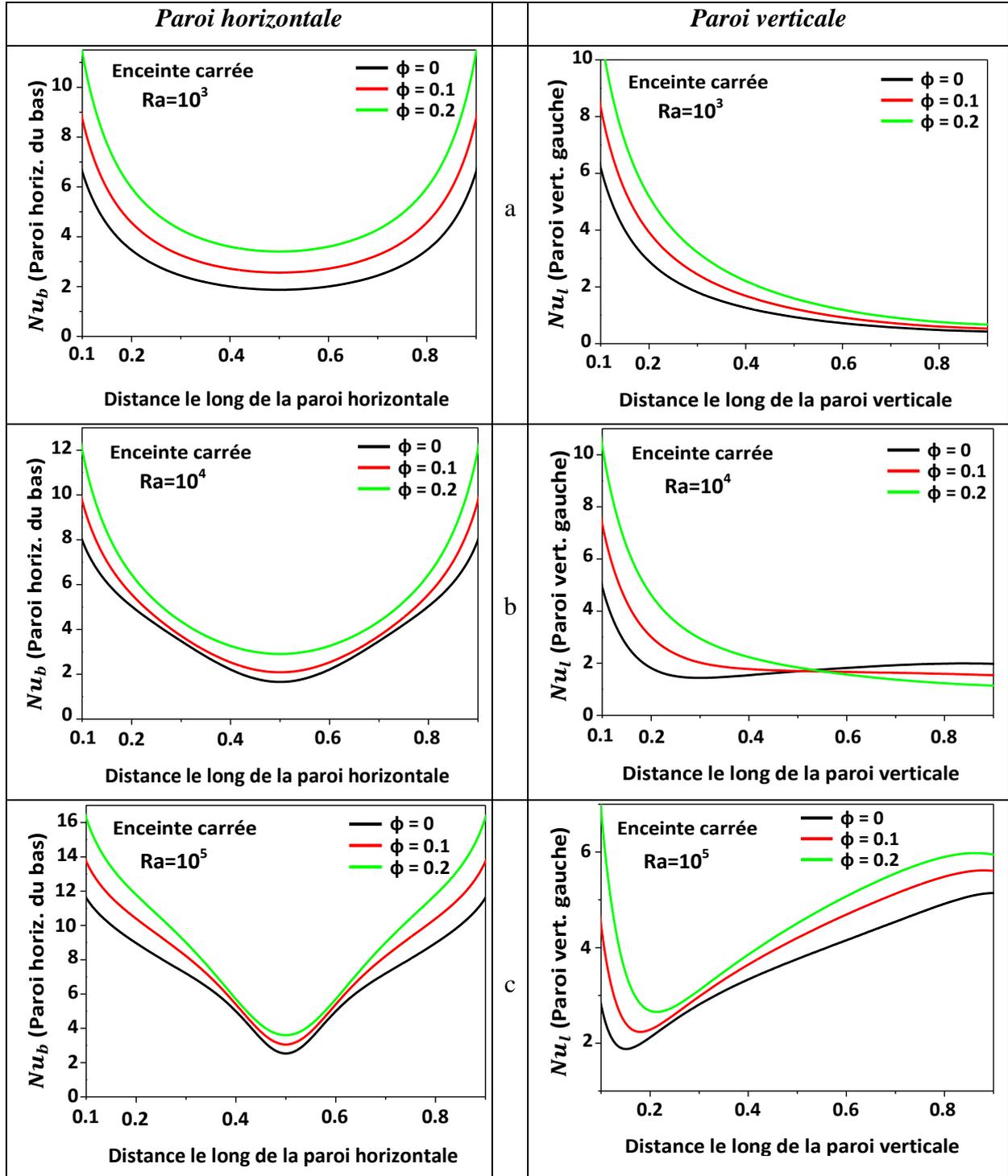
valeurs suivantes du nombre de Rayleigh $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et la fraction volumique $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons que :

Pour $Ra=10^3$ les courbes des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs $0, 0.1$ et 0.2 de la fraction volumique ont les mêmes allures et restent parallèles entre elles du fait que les distributions des isothermes sont presque identiques pour l'eau pure et le nanofluide, comme le montrent les figures 4.19.I.a et 4.19.II.a et les figures 4.20.I.a et 4.20.II.a et les figures 4.21.I.a et 4.21.II.a, ainsi le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction, par contre pour des nombres de Rayleigh élevés ($Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt locaux diminuent en allant vers le centre de la paroi de bas à partir des deux coins de celle-ci, pour presque s'annuler pour l'enceinte A. Ceci nous permet de dire que, l'amélioration du transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base, apparaît mieux près des deux coins de la paroi qu'au centre de celle-ci en régime convectif. Nous remarquons aussi que pour toute la gamme des nombres de Rayleigh utilisée, les valeurs les plus élevées des nombres de Nusselt locaux sont obtenues pour la fraction volumique la plus importante, sauf dans l'enceinte A où les valeurs de ces nombres de Nusselt deviennent presque égaux au centre de la paroi. Comme nous remarquons aussi que les valeurs de ces nombres de Nusselt locaux atteignent leurs valeurs maximales près des deux coins de la paroi du bas, puis commencent à diminuer en allant vers le centre de celle-ci là pour devenir minimums.

Les figures 4.22.II.a, 4.22.II.b, 4.22.II.c et 4.22.II.d, les figures 4.23.II.a, 4.23.II.b, 4.23.II.c et 4.23.II.d et les figures 4.24.II.a, 4.24.II.b, 4.24.II.c et 4.24.II.d représentent les variations du nombre de Nusselt local le long de **la paroi verticale** des enceintes carrée, A et B pour les valeurs suivantes du nombre de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et les fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons que :

Pour toute la gamme des fractions volumiques utilisées $\phi=0, 0.1$ et 0.2 et pour les nombres de Rayleigh $Ra=10^3$ et $Ra=10^4$, le nombre de Nusselt local sur la paroi verticale atteint sa valeur maximale en bas de celle-ci, puis sa valeur diminue le long de cette dernière pour arriver à son minimum du côté haut où il s'annule pour l'enceinte A. Mais pour des nombres de Rayleigh élevés ($Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) le nombre de Nusselt local et par conséquent le transfert de chaleur est maximum en bas de l'enceinte, puis sa valeur diminue pour passer par son minimum à une distance proche du bord inférieur de la paroi puis augmente légèrement de façon monotone en ascendant la paroi (sauf pour $\phi=0.2$ dans l'enceinte A où il continue à baisser), et cela se traduit sur les isothermes des figures (4.19.I.c, 4.19.II.c, 4.19.I.d, 4.19.II.d), (4.20.I.c, 4.20.II.c, 4.20.I.d, 4.20.II.d) et (4.21.I.c, 4.21.II.c, 4.21.I.d, 4.21.II.d) par une couche limite thermique très mince en bas de la paroi puis son épaisseur augmente à une distance proche du bord inférieur de la paroi pour rediminuer de nouveau en ascendant celle-ci, sauf que dans l'enceinte A, le nombre de Nusselt diminue continuellement pour $\phi = 0.2$ en ascendant cette paroi (voir Fig. 4.23.II.c). Nous remarquons aussi que les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs $0, 0.1$ et 0.2 de la fraction volumique diminuent en allant vers le haut de la paroi latérale pour $Ra=10^3$. Ceci nous permet de dire que, l'amélioration du transfert de chaleur apportée au fluide de base par ajout des nanoparticules, diminue en ascendant la paroi latérale, mais pour $Ra=10^5$ cette

amélioration apparaît sur toute la paroi latérale sauf pour une petite zone près du bord bas de cette dernière pour l'enceinte carrée, amélioration qui diminue en descendant la paroi latérale pour l'enceinte B et s'inverse à partir de la moitié haute de cette dernière dans l'enceinte A, pour que le transfert de chaleur devient meilleur pour le fluide de base.



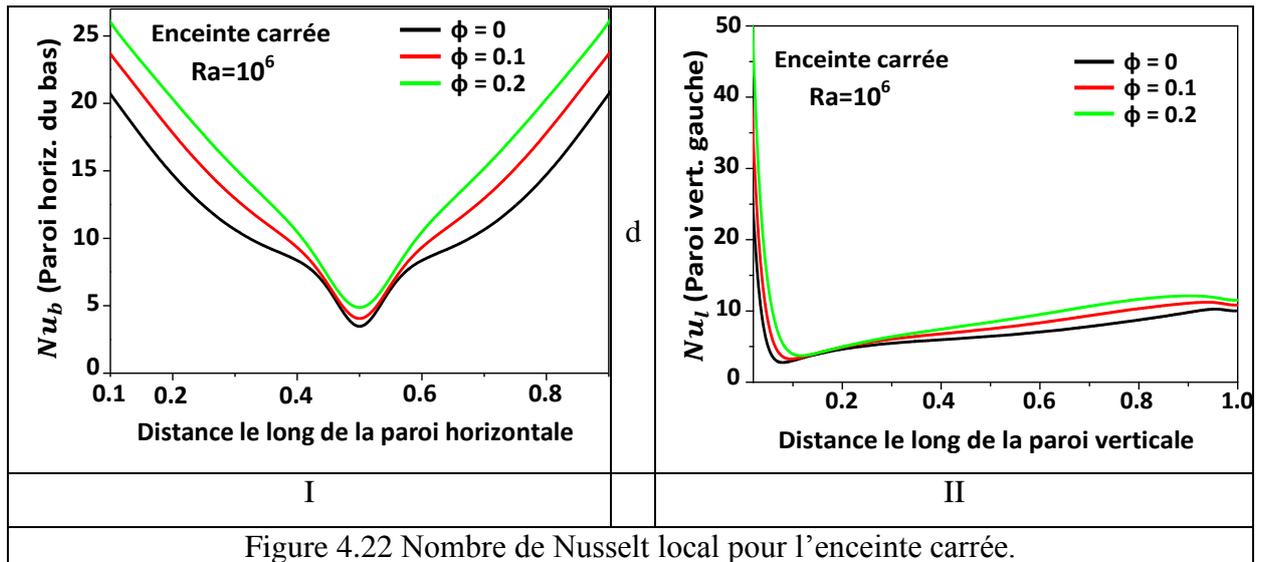
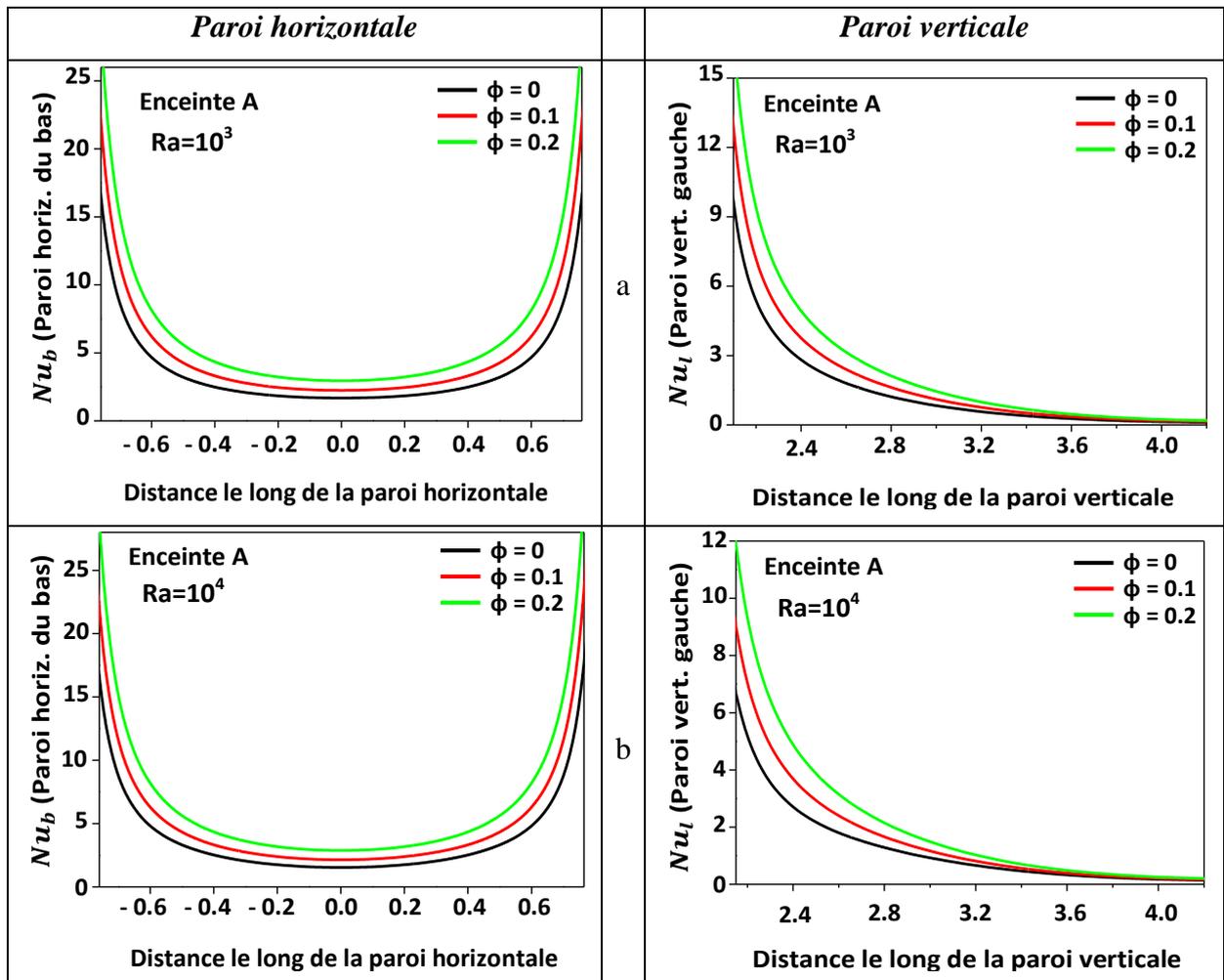
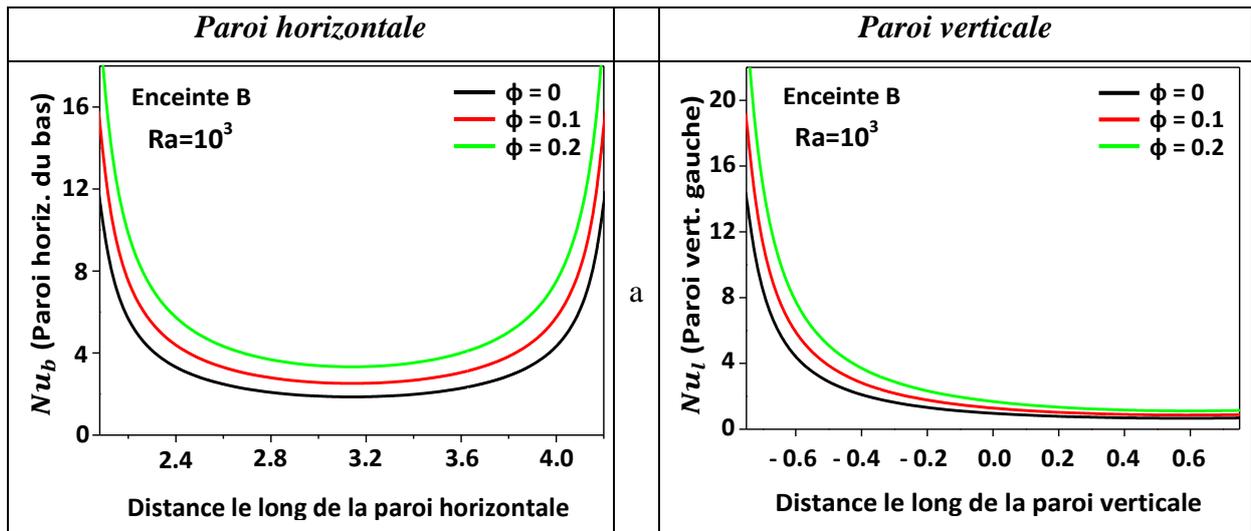
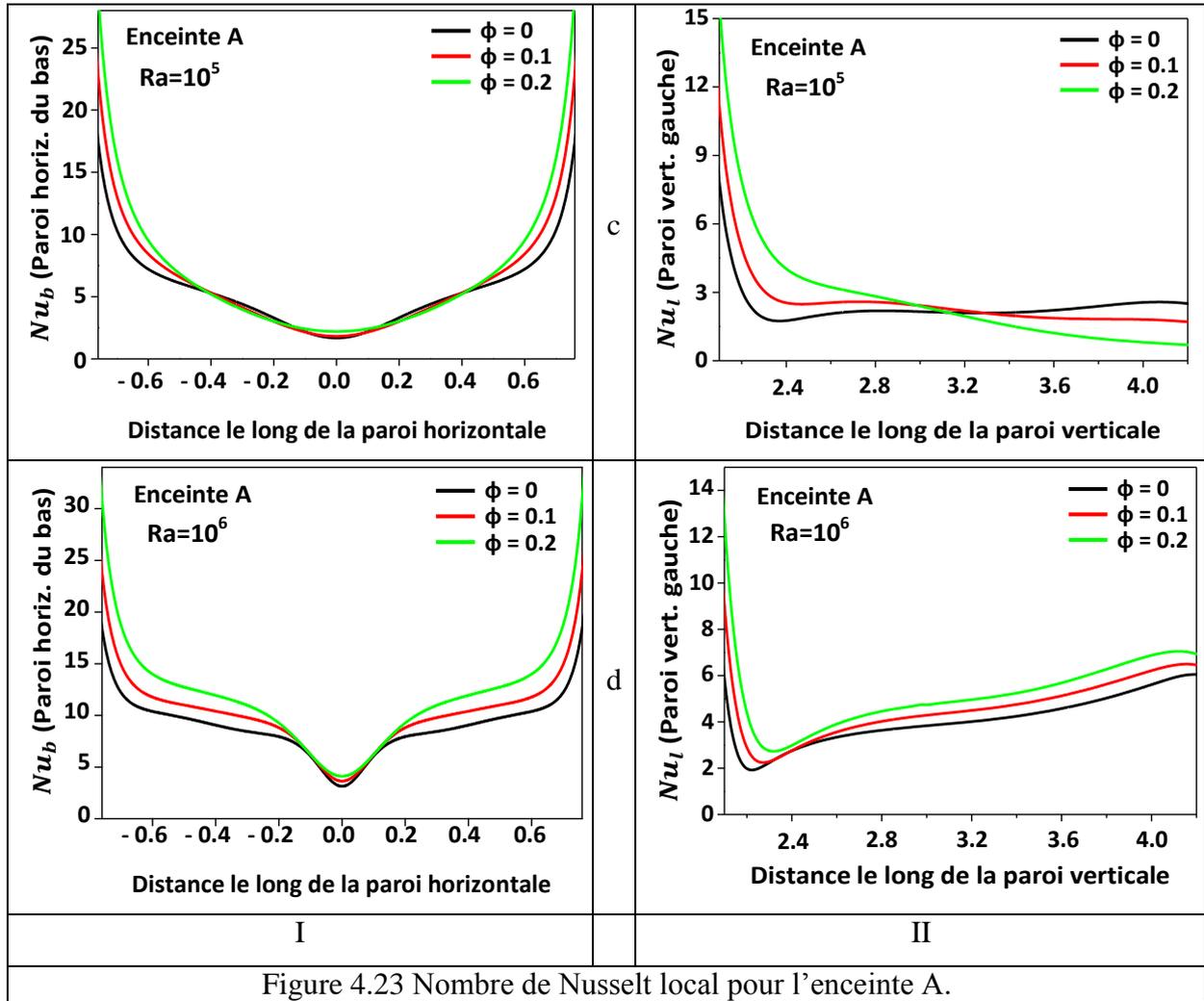


Figure 4.22 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte carrée.





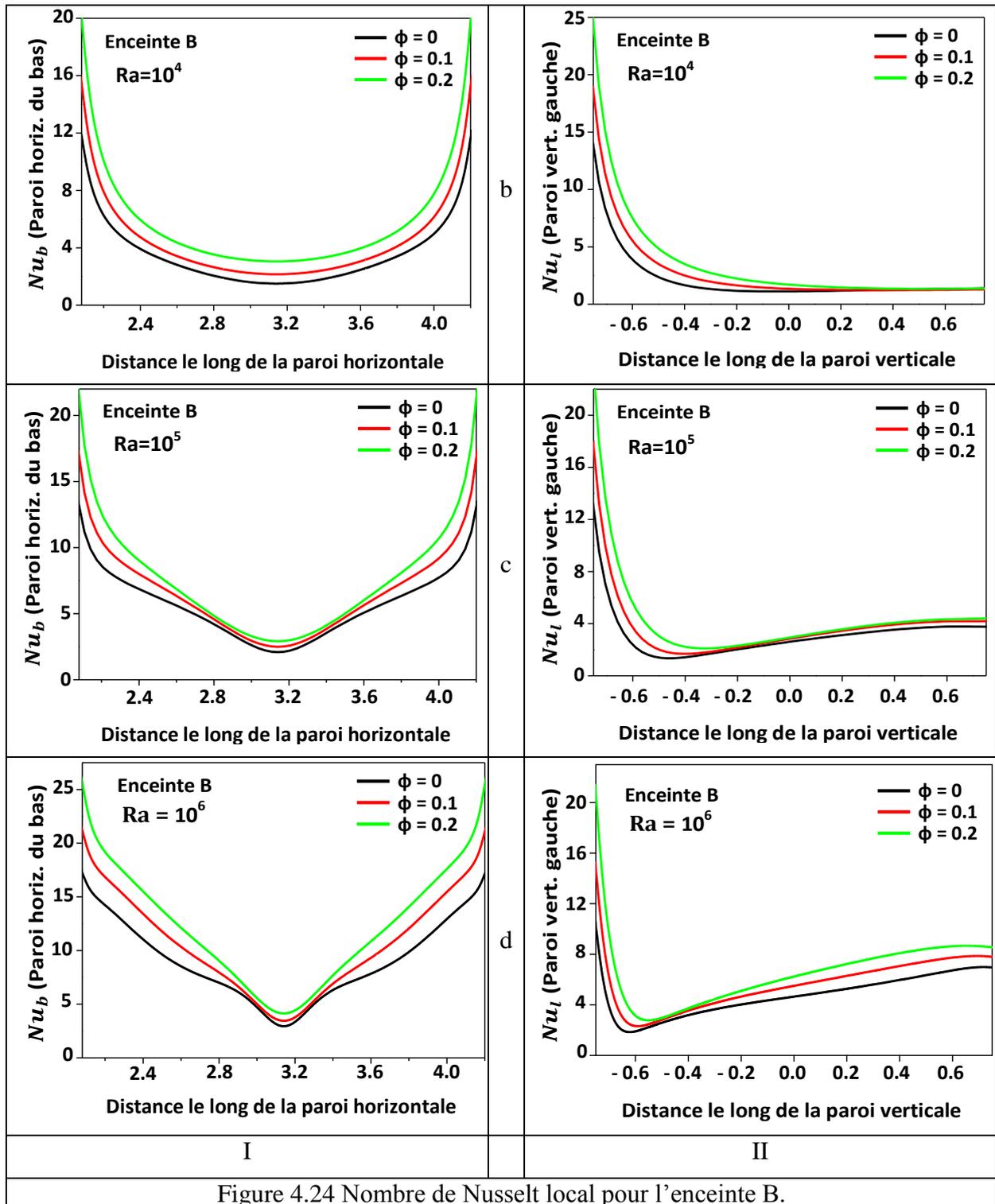
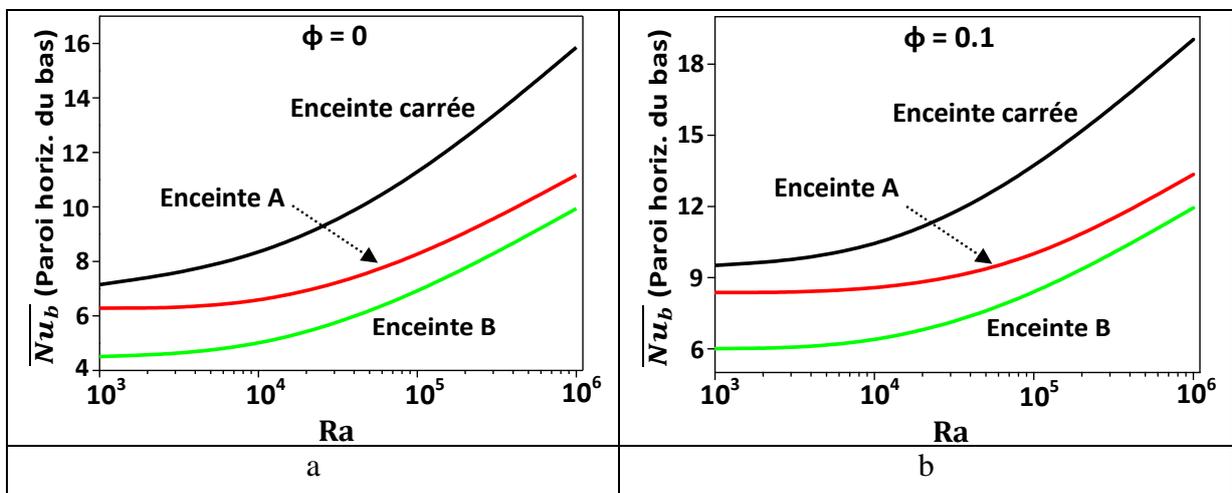
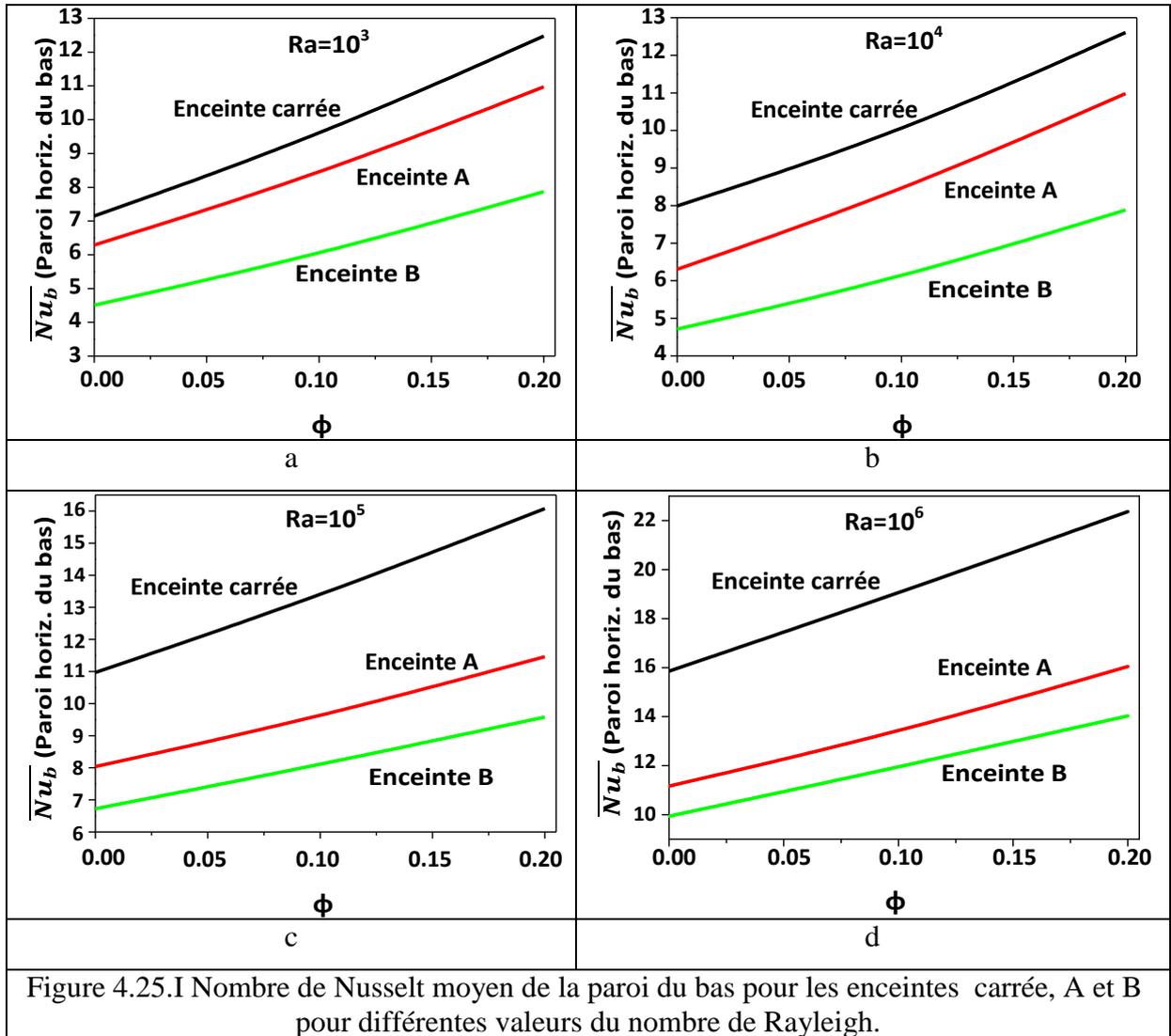


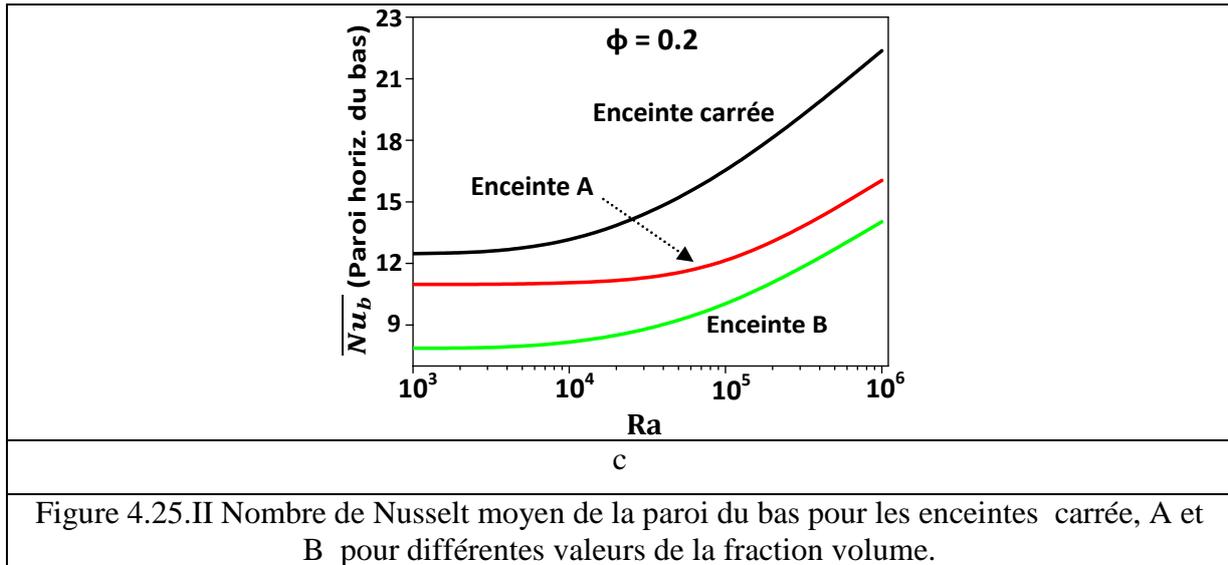
Figure 4.24 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B.

4.4.2.5 Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B

Les figures 4.25.I.a, 4.25.I.b, 4.25.I.c et 4.25.I.d et les figures 4.25.II.a, 4.25.II.b et 4.25.II.c montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente à la fois avec l'augmentation du nombre de Rayleigh d'une part et avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules d'autre part, et que le transfert thermique dans l'enceinte carrée est meilleur que celui dans les deux autres enceintes A et B, et s'améliore plus pour des nombres de Rayleigh plus élevés ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) et en augmentant la fraction volumique des

nanoparticules. Ces figures montrent aussi que le nombre de Nusselt moyen augmente d'une façon presque linéaire, avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.





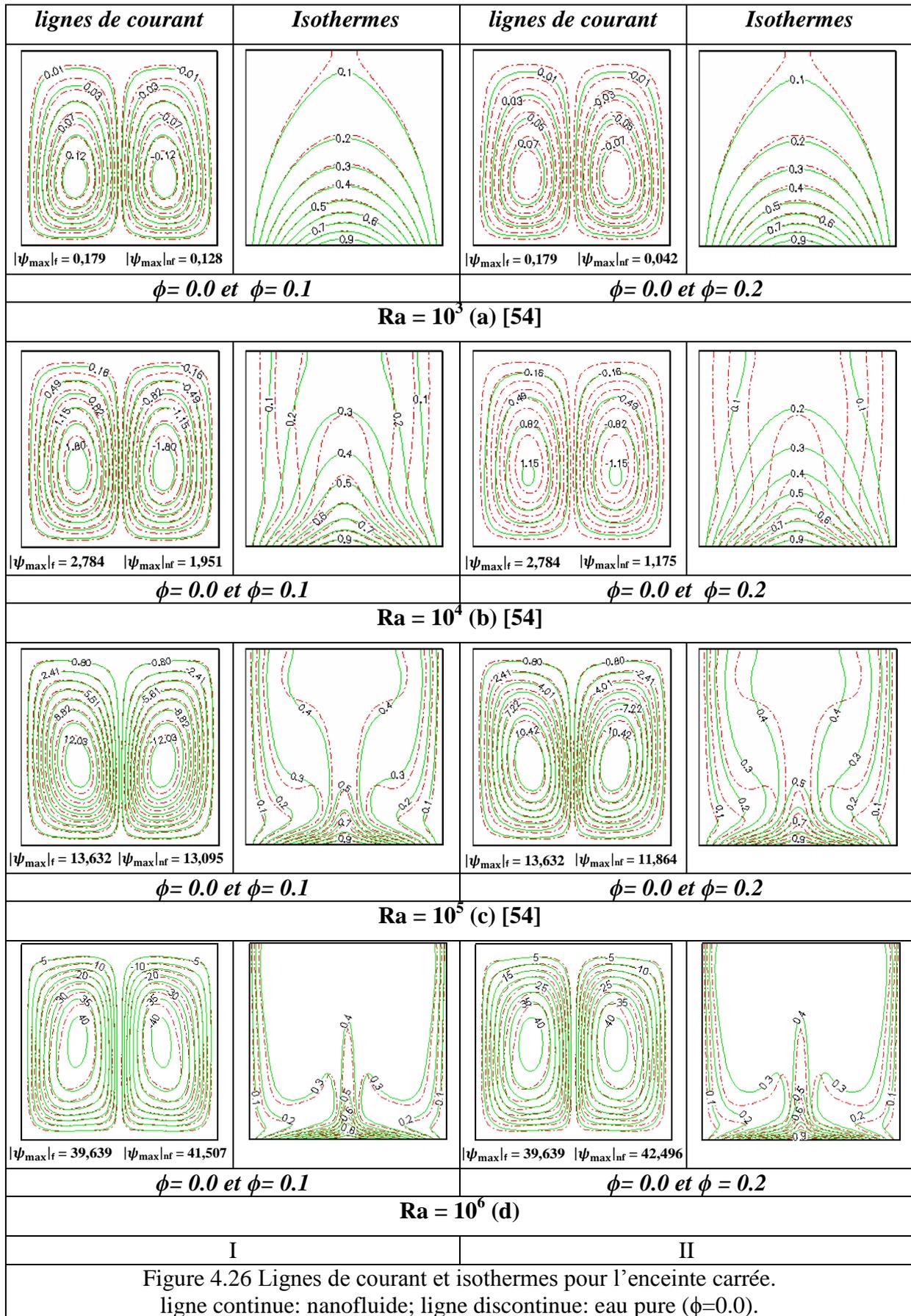
4.4.3 Troisième condition pariétale thermique

4.4.3.1 Enceinte carrée chauffée par le bas par une température sinusoïdale

Les figures 4.26.I.a, 4.26.I.b, 4.26.I.c et 4.26.I.d et les figures 4.26.II.a, 4.26.II.b, 4.26.II.c et 4.26.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte carrée pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0$, 0.1 et 0.2. Nous remarquons un écoulement bicellulaire du fluide symétrique par rapport à l'axe médian vertical de l'enceinte qualitativement similaire pour l'eau et le nanofluide pour toute la gamme : $Ra=10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 et $\phi=0$, 0.1 et 0.2. Mais quantitativement l'intensité de l'écoulement est plus forte au centre de la cavité pour les faibles valeurs de ϕ , cela est dû à la viscosité du fluide qui augmente avec la fraction volumique des nanoparticules.

Pour $Ra=10^3$, le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction, surtout dans la zone centrale de l'enceinte. Les distributions de température de l'eau pure et du nanofluide sont presque identiques à proximité de la paroi inférieure de la cavité, et les isothermes ne sont pas influencées par la présence du nanofluide.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra=10^4$) les lignes isothermes commencent à se rapprocher entre elles près des parois verticales et celle du bas pour finir d'être très serrées à ces endroits pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$, ce qui signifie que le transfert de chaleur s'améliore près des parois, tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante et que l'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle. De même les écarts entre les isothermes du nanofluide et de l'eau pure, qui sont causés par la présence des nanoparticules et qui augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique ϕ des nanoparticules, se réduisent près des parois de l'enceinte (voir fig. 4.26.I.c, 4.26.II.c, 4.26.I.d et 4.26.II.d).



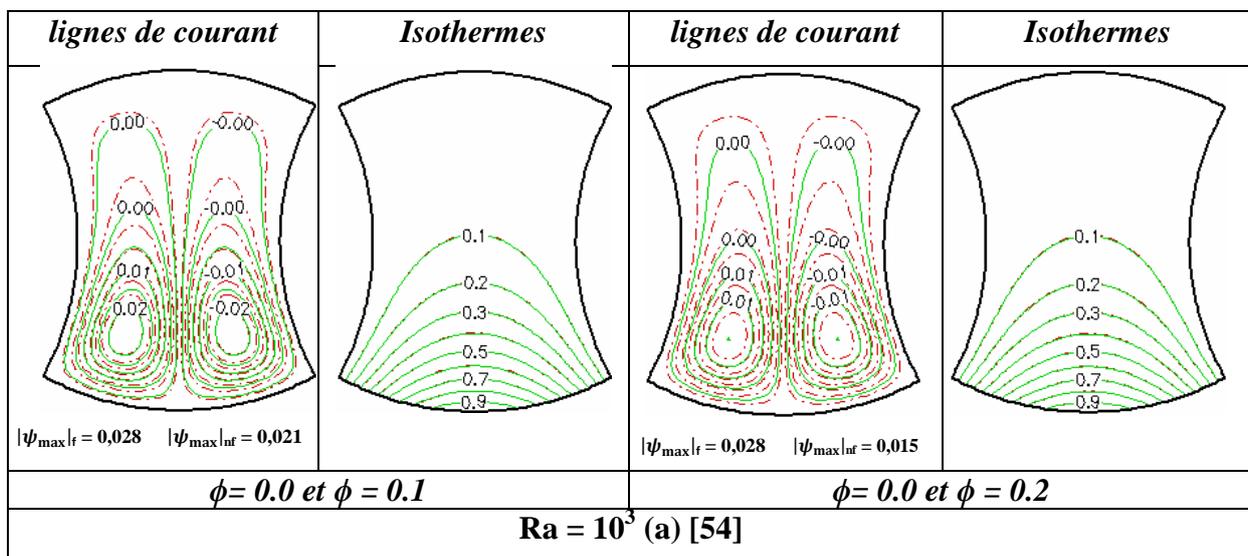
4.4.3.2 Enceinte A chauffée par le bas par une température sinusoïdale

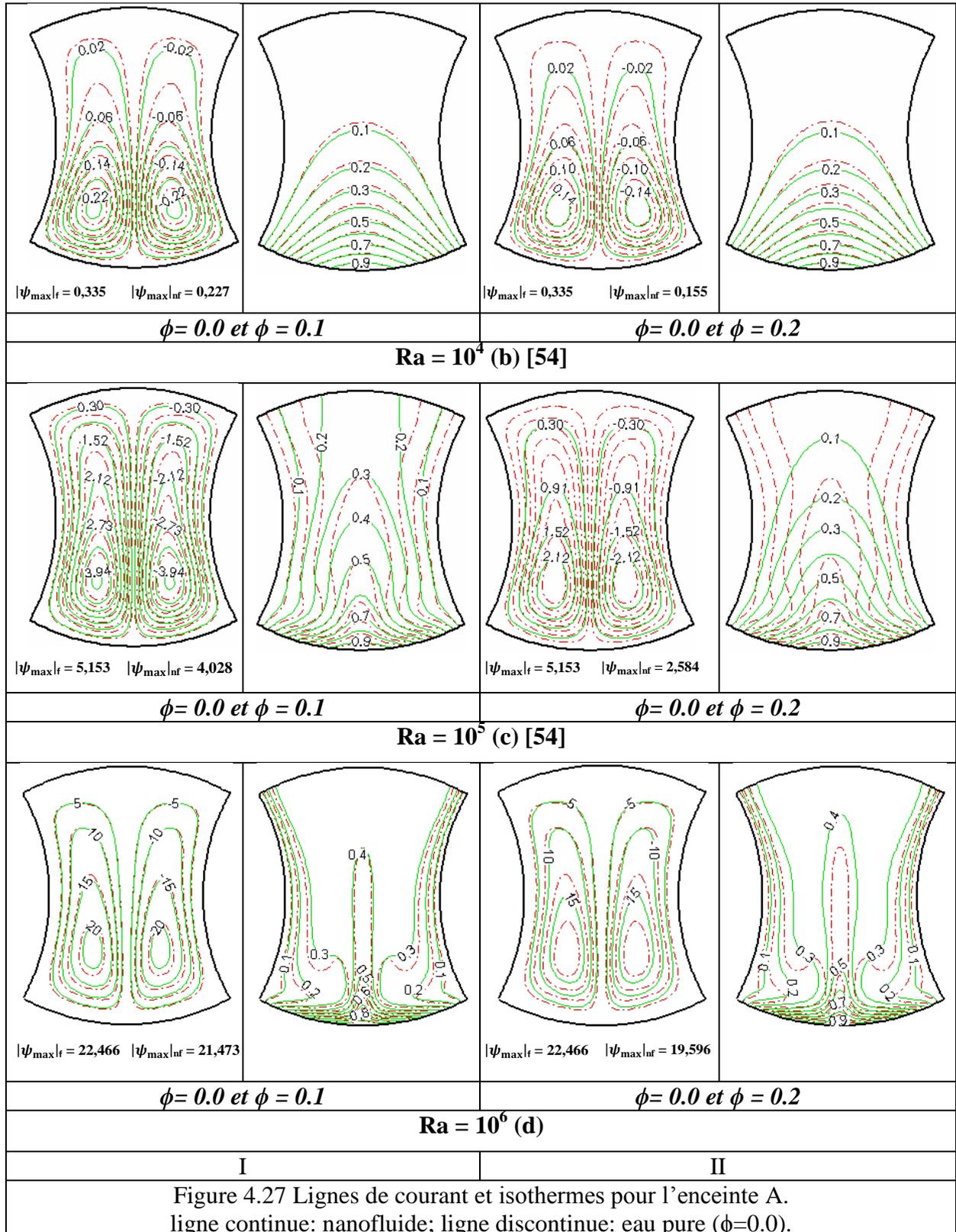
Les figures 4.27.I.a, 4.27.I.b, 4.27.I.c et 4.27.I.d et les figures 4.27.II.a, 4.27.II.b, 4.27.II.c et 4.27.II.d représentent les lignes de courant et les isothermes dans l’enceinte A, pour des nombres de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et des fractions volumiques $\phi=0, 0.1$ et 0.2 .

Pour $Ra=10^3$ (fig. 4.27.I.a et 4.27.II.a) l’écoulement du fluide est localisé à la moitié basse de l’enceinte avec de très faibles valeurs de la fonction de courant, et de même pour les lignes isothermes qui sont presque parallèles entre elles, et qui ne sont pas influencées par l’ajout des nanoparticules. Le transfert thermique s’opère essentiellement par conduction dans la moitié basse de l’enceinte, la moitié haute de celle-ci est une zone morte.

Pour $Ra=10^4$ (fig. 4.27.I.b et 4.27.II.b) l’effet de la présence des nanoparticules commence à apparaître sous forme d’un décalage entre les isothermes de l’eau pure et du nanofluide. Dans ce cas là, nous sommes en présence d’une convection naturelle naissante.

Pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ (fig. 4.27.I.c, 4.27.II.c, 4.27.I.d et 4.27.II.d) le transfert de chaleur s’opère dans toute l’enceinte. Les deux vortex et les isothermes occupent toute la cavité avec un transfert thermique relativement intense sur les parois de l’enceinte. Ce dernier est dominé par la convection naturelle. Nous remarquons aussi l’apparition d’une amélioration du transfert thermique dans le fluide de base par rapport au nanofluide correspondant à $\phi = 0.2$ pour $Ra=10^5$, près de la moitié supérieure de la paroi verticale qui se traduit par une zone où les isothermes correspondant au fluide de base deviennent plus serrées au voisinage de celle-ci, comme le montre la figure 4.27.II.c. Le transfert de chaleur qui est moins intense pour le nanofluide dans ce cas est dû essentiellement à la courbure de la paroi (paroi convexe qui freine l’écoulement du fluide) et la viscosité du nanofluide. Par contre pour $Ra=10^6$ le transfert thermique s’améliore considérablement pour le fluide de base ainsi que pour les différentes fractions volumiques du nanofluide, ce qui est bien illustré par les figures 4.27.I.d et 4.27.II.d, qui montrent que les lignes isothermes se rapprochent près des parois actives et deviennent très serrées près de ces dernières.





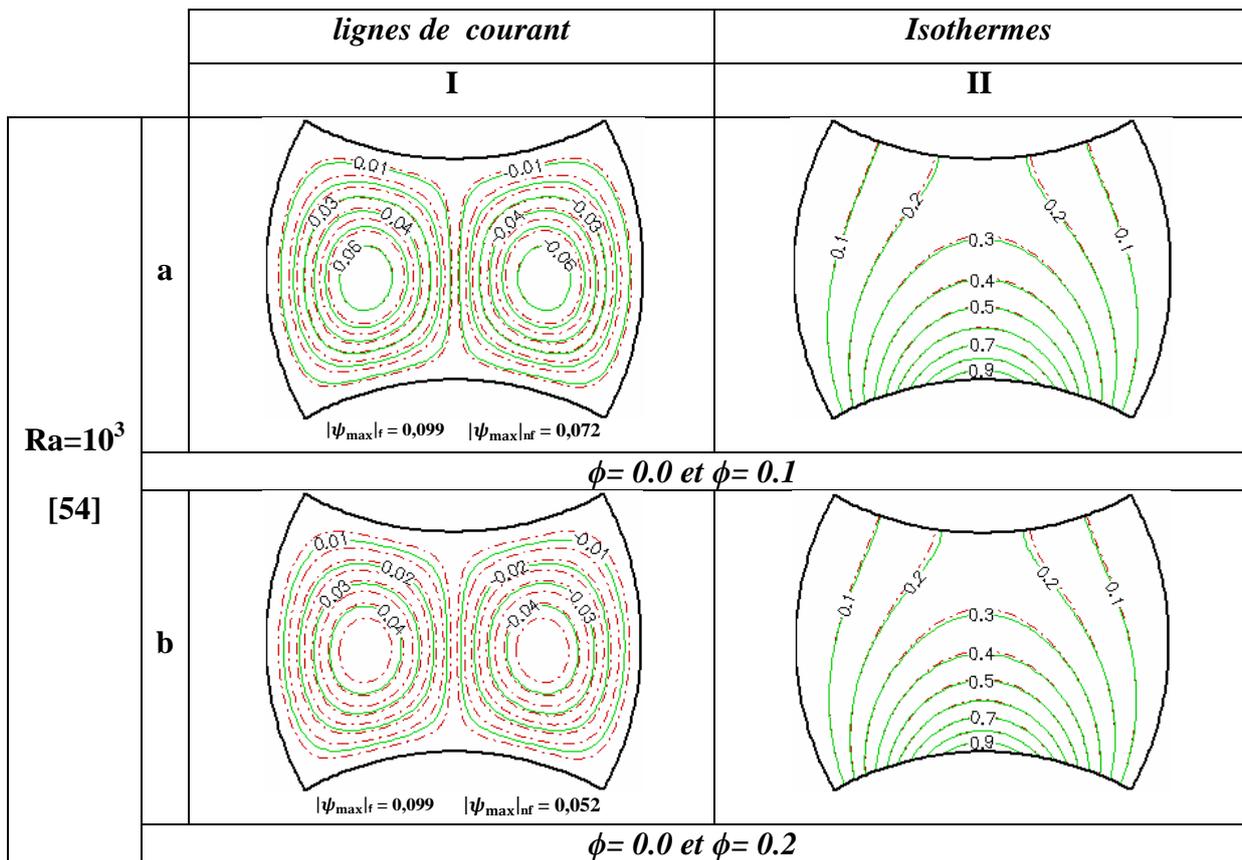
4.4.3.3 Enceinte B chauffée par le bas par une température sinusoïdale

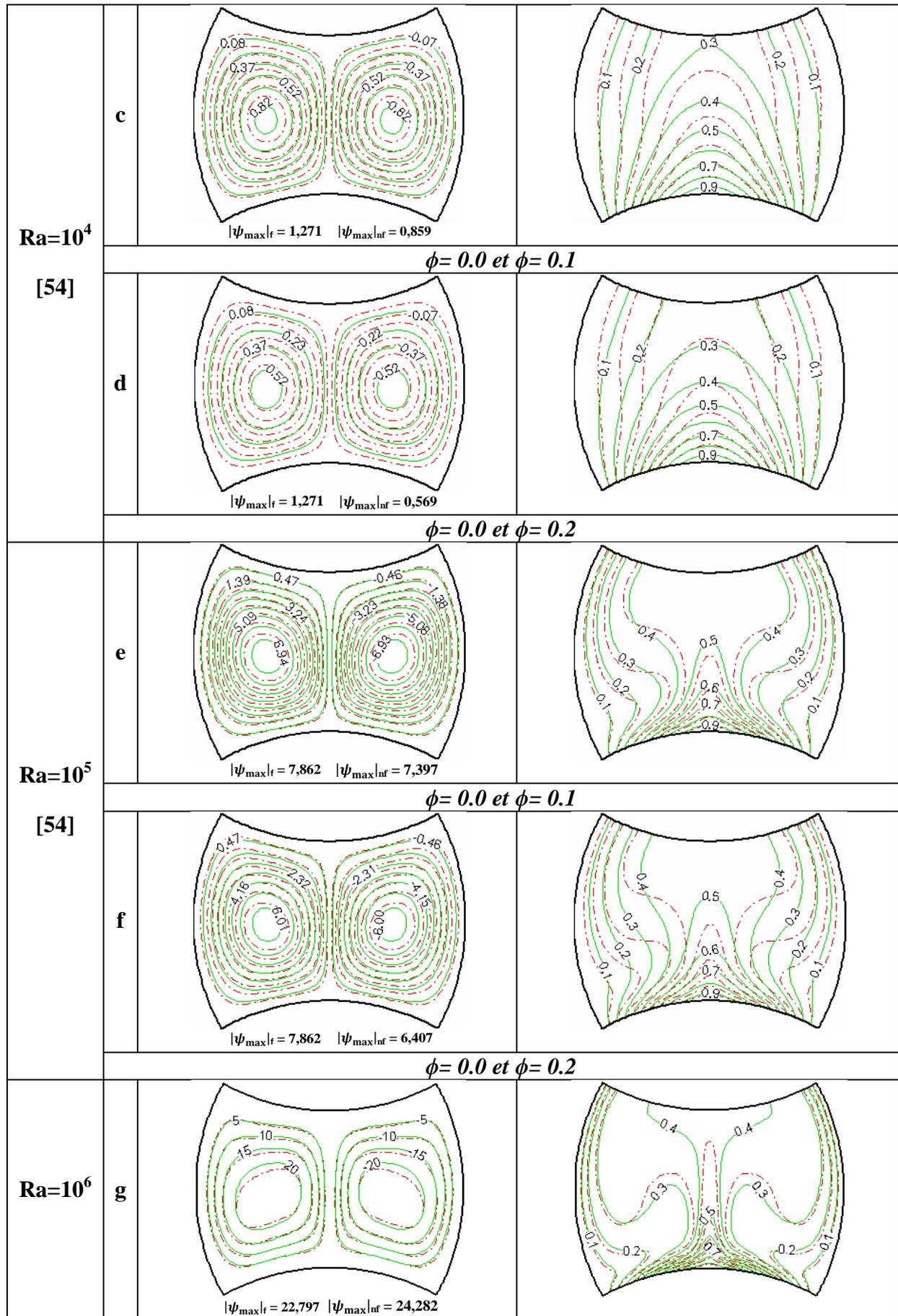
Toutes les figures de ce paragraphe représentent les lignes de courant et les isothermes dans l'enceinte B, pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et des fractions volumiques $\phi = 0, 0.1$ et 0.2 .

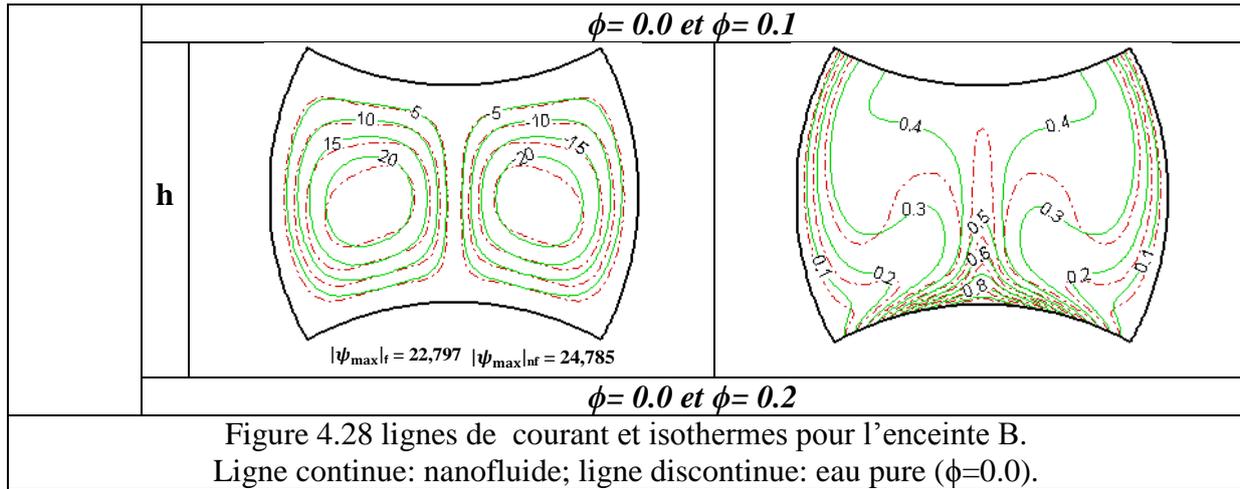
Pour $Ra=10^3$ les lignes isothermes sont presque parallèles entre elles, et les valeurs de la fonction de courant sont très faibles, le transfert thermique s'opère essentiellement par conduction surtout dans la zone centrale de l'enceinte.

Pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra=10^4$) les lignes isothermes commencent à se rapprocher des parois verticales concaves (qui permettent un meilleur écoulement du fluide) et celle du bas et deviennent très serrées à ces endroits pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$, de même les valeurs de la fonction de courant augmentent, ce qui signifie que le transfert thermique par convection naturelle s'intensifie dans ces endroits. Nous remarquons que les écarts entre les isothermes du nanofluide et de l'eau pure augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique ϕ des nanoparticules surtout loin des parois.

Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh l'échange de chaleur s'améliore surtout sur la moitié supérieure des parois verticales et de part et d'autre de la paroi du bas se traduisant par des isothermes très serrées dans ces zones (Fig. 4.28.II.e, 4.28.II.f, 4.28.II.g et 4.28.II.h).







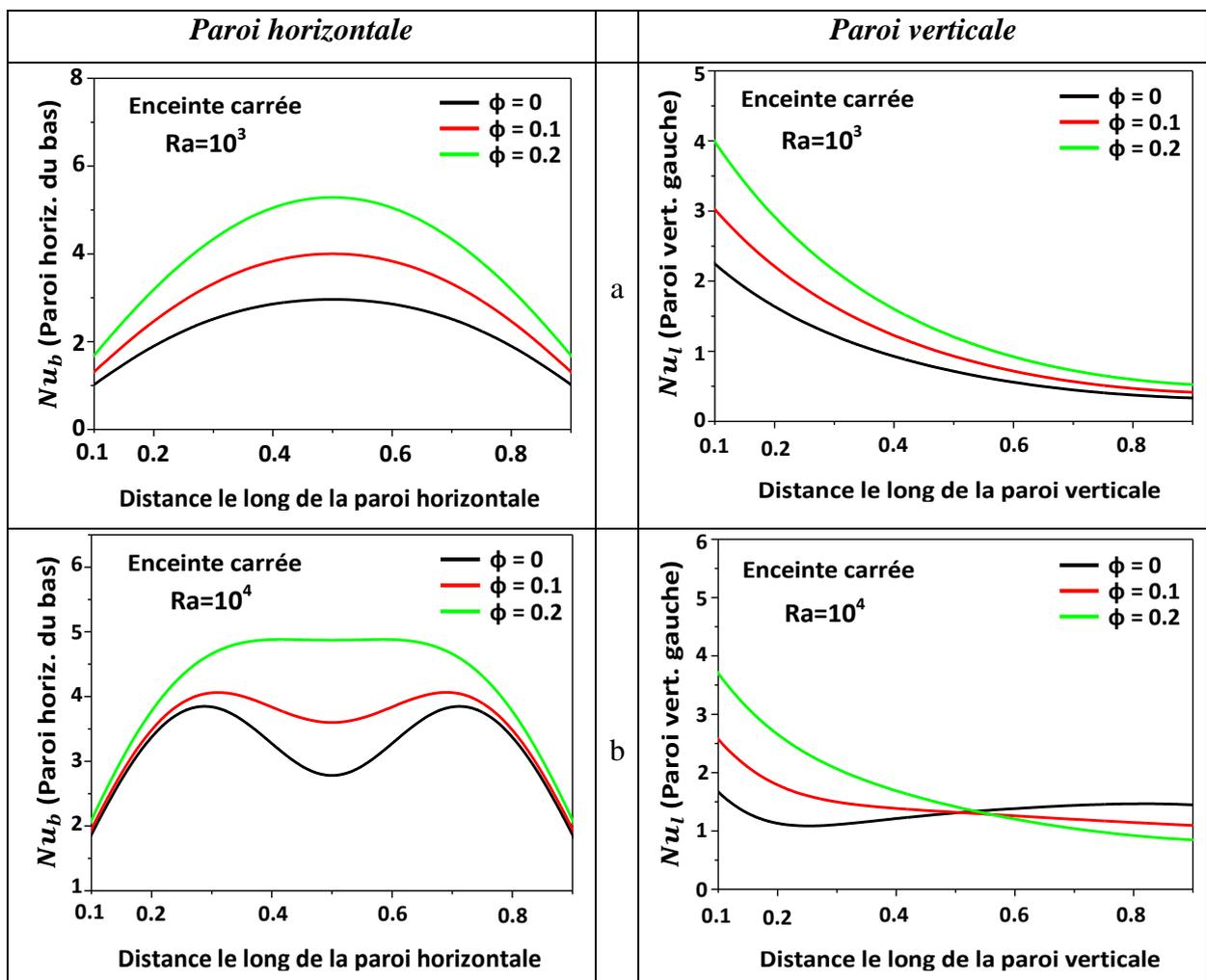
4.4.3.4 Variation des nombre de Nusselt locaux pour les enceintes carrée, A et B

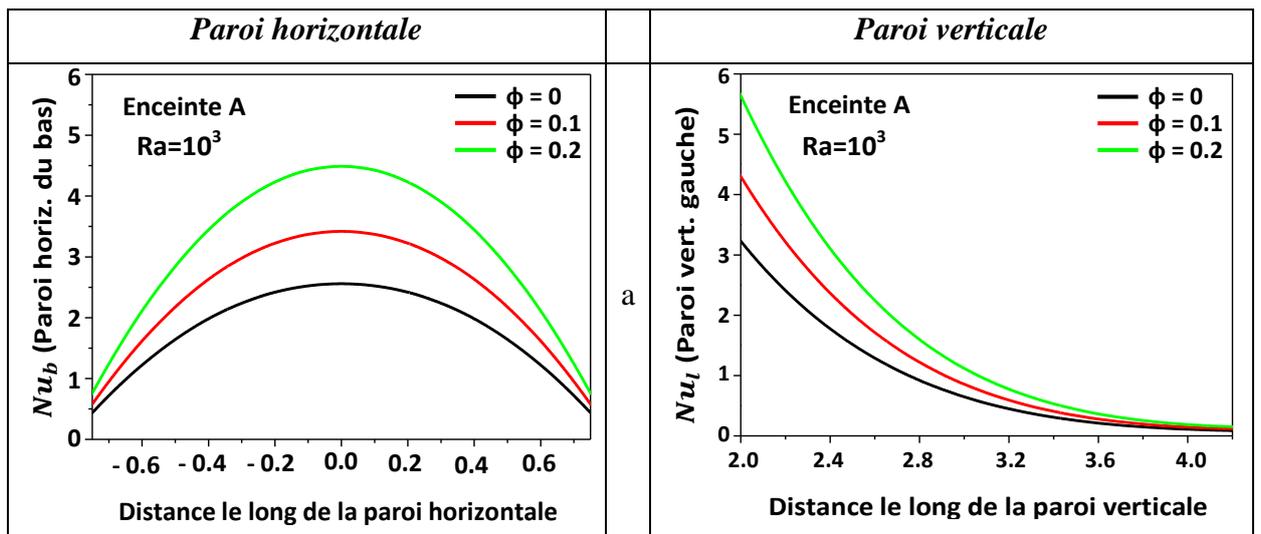
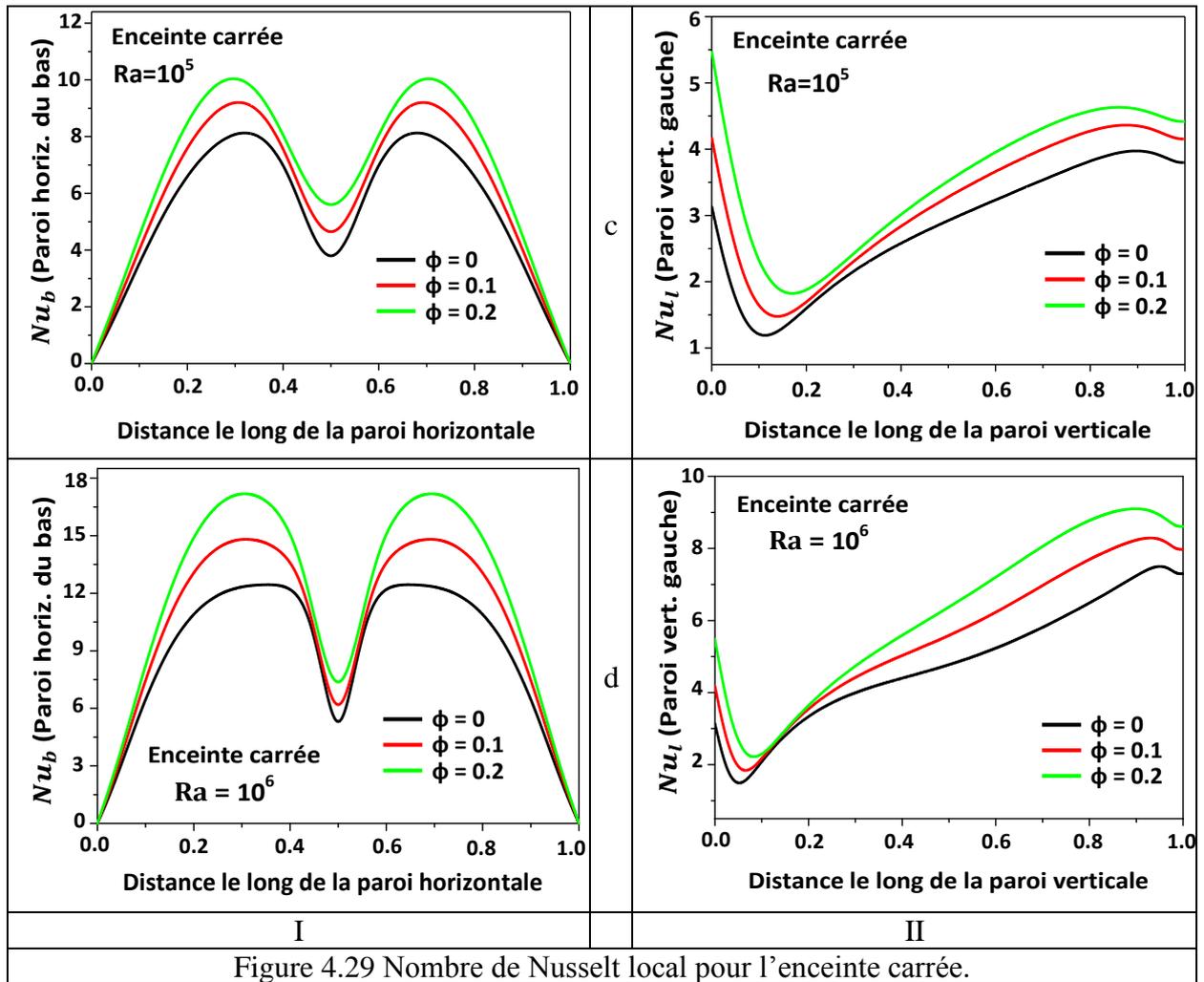
Les figures 4.29.I.a, 4.29.I.b, 4.29.I.c et 4.29.I.d, les figures 4.30.I.a, 4.30.I.b, 4.30.I.c et 4.30.I.d et les figures 4.31.I.a, 4.31.I.b, 4.31.I.c et 4.31.I.d représentent les variations du nombre de Nusselt local le long de **la paroi du bas** des enceintes carrée, A et B pour les valeurs suivantes du nombre de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et de la fraction volumique $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons que :

Pour $Ra=10^3$ les courbes des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs 0, 0.1 et 0.2 de la fraction volumique ont les mêmes allures et passent par des maximums aux centre des parois, mais les écarts entre elles augmentent de plus en plus en se dirigeant vers le centre de la paroi du bas à partir des deux coins de celle-ci (et restent parallèles entre elles) ceci se traduit par les distributions des isothermes des figures 4.26.I.a et 4.26.II.a, 4.27.I.a, 4.27.II.a, 4.28.II.a et 4.28.II.b qui se rapprochent aux parois du bas des enceintes en se dirigeant vers le centre de celles-ci (elles sont presque identiques pour l'eau pure et le nanofluide), ainsi le transfert thermique s'opère donc essentiellement par conduction. Par contre pour des nombres de Rayleigh élevés, les courbes des nombres de Nusselt locaux changent leurs allures mais elles conservent les diminutions des écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt locaux en allant vers les deux coins des parois du bas. Ceci nous permet de dire que, l'amélioration du transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base, est meilleure près des centres des parois qu'aux coins de celle-ci en régime convectif. Nous remarquons aussi que pour $Ra=10^3, Ra=10^4, Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ les valeurs les plus élevées du nombre de Nusselt local sont obtenues pour la fraction volumique la plus importante. Nous remarquons aussi que les valeurs de ces nombres de Nusselt locaux sont minimales près des deux coins de la paroi du bas.

Les figures 4.29.II.a, 4.29.II.b, 4.29.II.c et 4.29.II.d, les figures 4.30.II.a, 4.30.II.b, 4.30.II.c et 4.30.II.d et les figures 4.31.II.a, 4.31.II.b, 4.31.II.c et 4.31.II.d représentent les variations du nombre de Nusselt local le long de **la paroi verticale** des enceintes carrée, A et B pour les valeurs suivantes : nombre de Rayleigh $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 et fraction volumique $\phi=0, 0.1$ et 0.2 . Nous remarquons que : Pour toute la gamme de la fraction volumique $\phi=0, 0.1$ et 0.2 et pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^3$, le nombre de Nusselt local sur la paroi verticale atteint son maximum en bas de celle-ci puis sa valeur diminue le long de

cette dernière pour arriver à son minimum du côté haut où il s'annule pour l'enceinte A. Mais pour des nombres de Rayleigh élevés ($Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) le nombre de Nusselt local (et par conséquent le transfert de chaleur) est maximum en bas de cette paroi, puis sa valeur diminue pour passer par son minimum à une distance proche du bord inférieur de cette dernière, puis augmente légèrement de façon monotone en descendant la paroi considérée, cela se traduit donc sur les isothermes des figures (4.26.I.c, 4.26.II.c, 4.26.I.d et 4.26.II.d) pour l'enceinte carrée, des figures (4.27.I.c, 4.27.I.d, et 4.27.II.d) pour l'enceinte A, et des figures (4.28.II.e, 4.28.II.f, 4.28.II.g et 4.28.II.h) pour l'enceinte B, par une couche limite thermique très mince en bas de la paroi puis son épaisseur augmente à une distance proche du bord inférieur de cette dernière, pour rediminuer de nouveau en descendant celle-ci, sauf que dans l'enceinte A ce nombre de Nusselt diminue continuellement pour $\phi=0.2$ en descendant cette paroi (voir fig. 4.30.II.c).





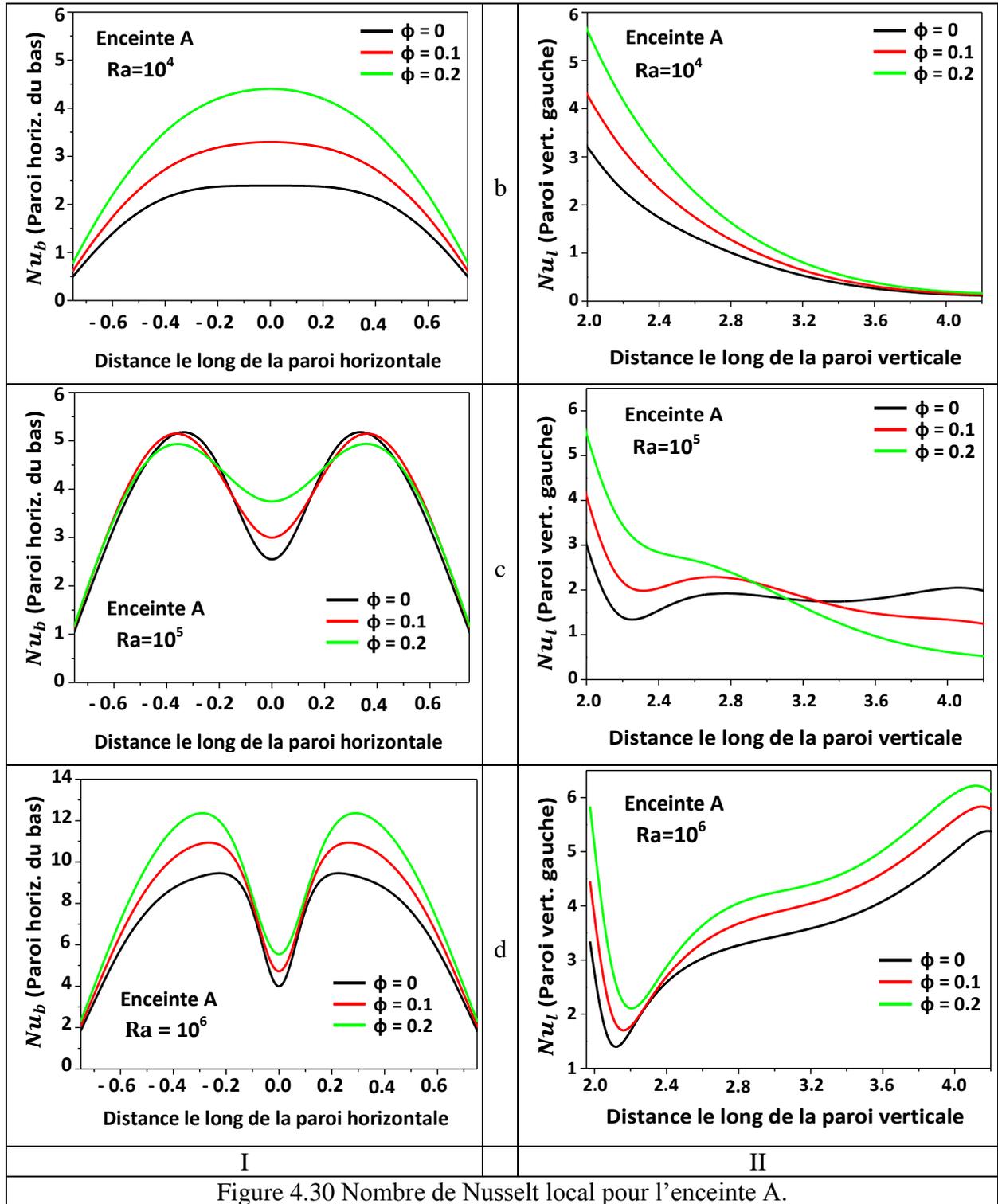
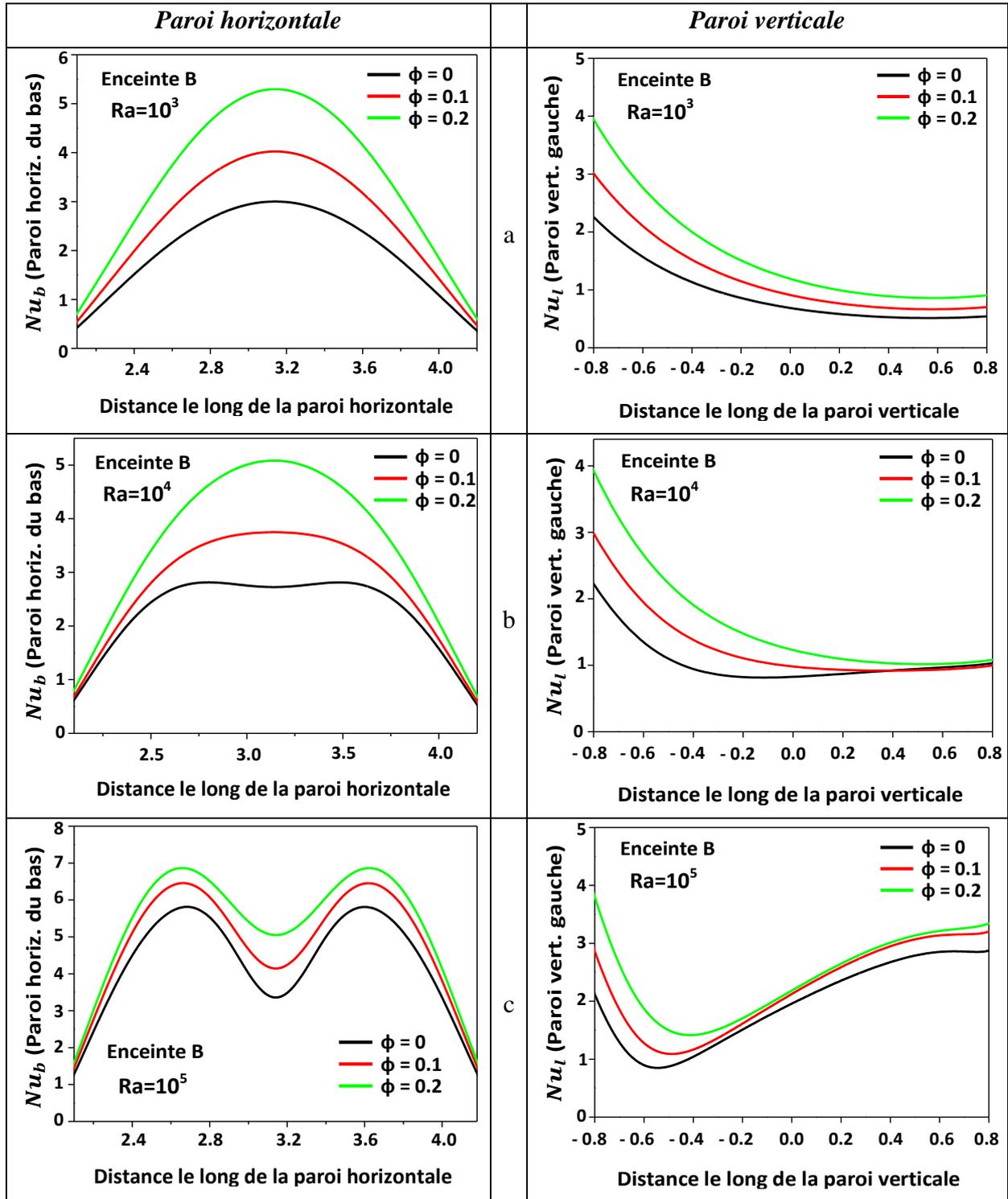


Figure 4.30 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte A.



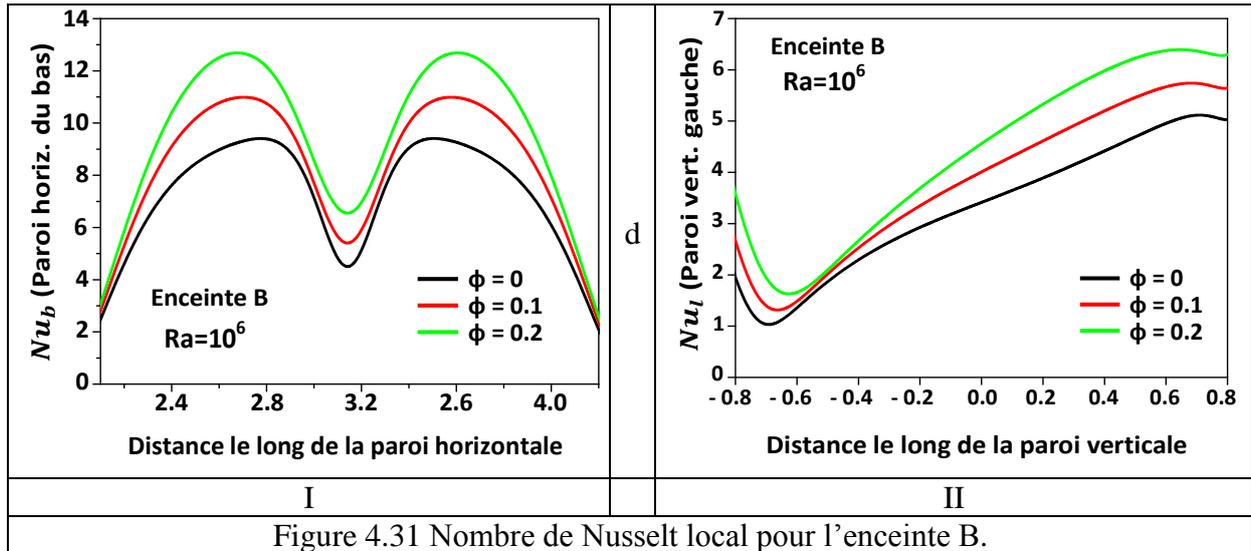
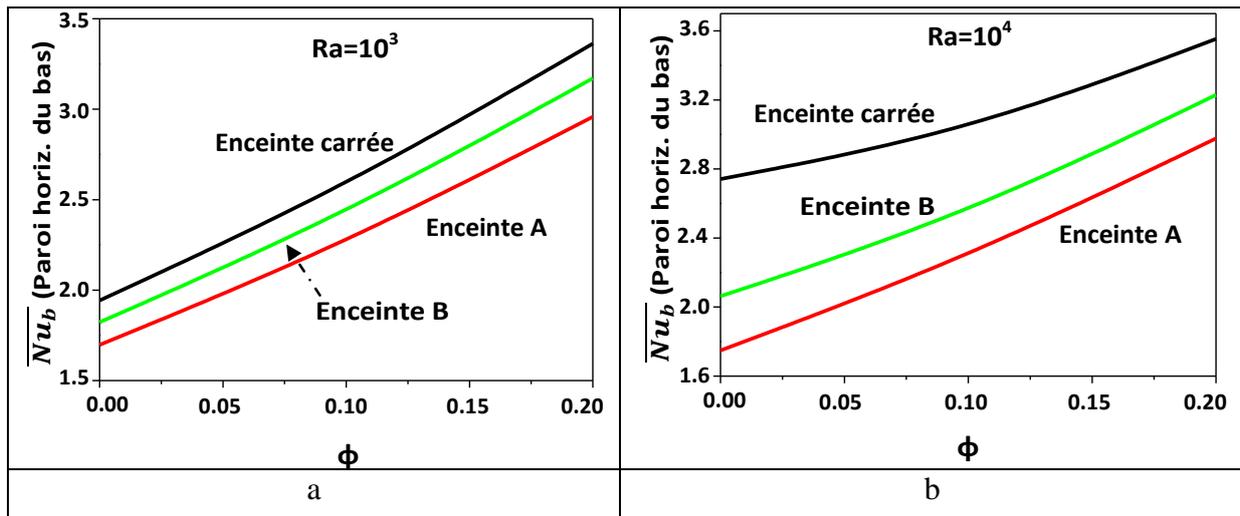


Figure 4.31 Nombre de Nusselt local pour l'enceinte B.

4.4.3.5 Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B

Les figures 4.32.I.a, 4.32.I.b, 4.32.I.c et 4.32.I.d et les figures 4.32.II.a, 4.32.II.b et 4.32.II.c montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente à la fois avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules d'une part et avec l'augmentation du nombre de Rayleigh d'autre part, et que le transfert thermique dans l'enceinte carrée s'améliore significativement comparé à celui des deux autres enceintes A et B, pour des nombres de Rayleigh plus élevés ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) et en augmentant la fraction volumique des nanoparticules.

Ces figures montrent aussi que le nombre de Nusselt moyen augmente d'une façon presque linéaire, pour les trois enceintes considérées, avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules.



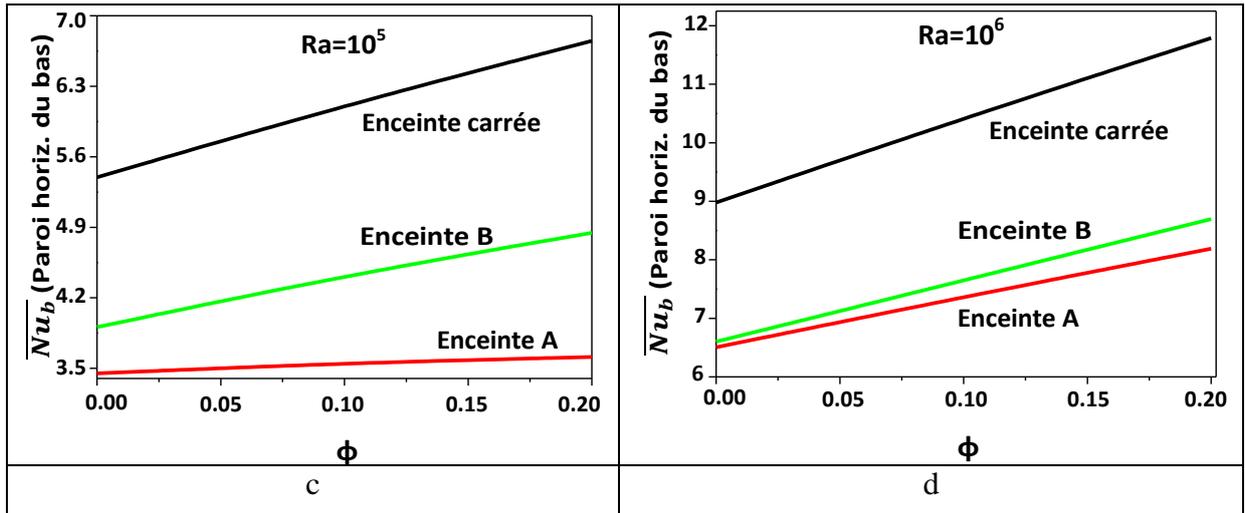


Figure 4.32.I Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B en fonction de la fraction volumique.

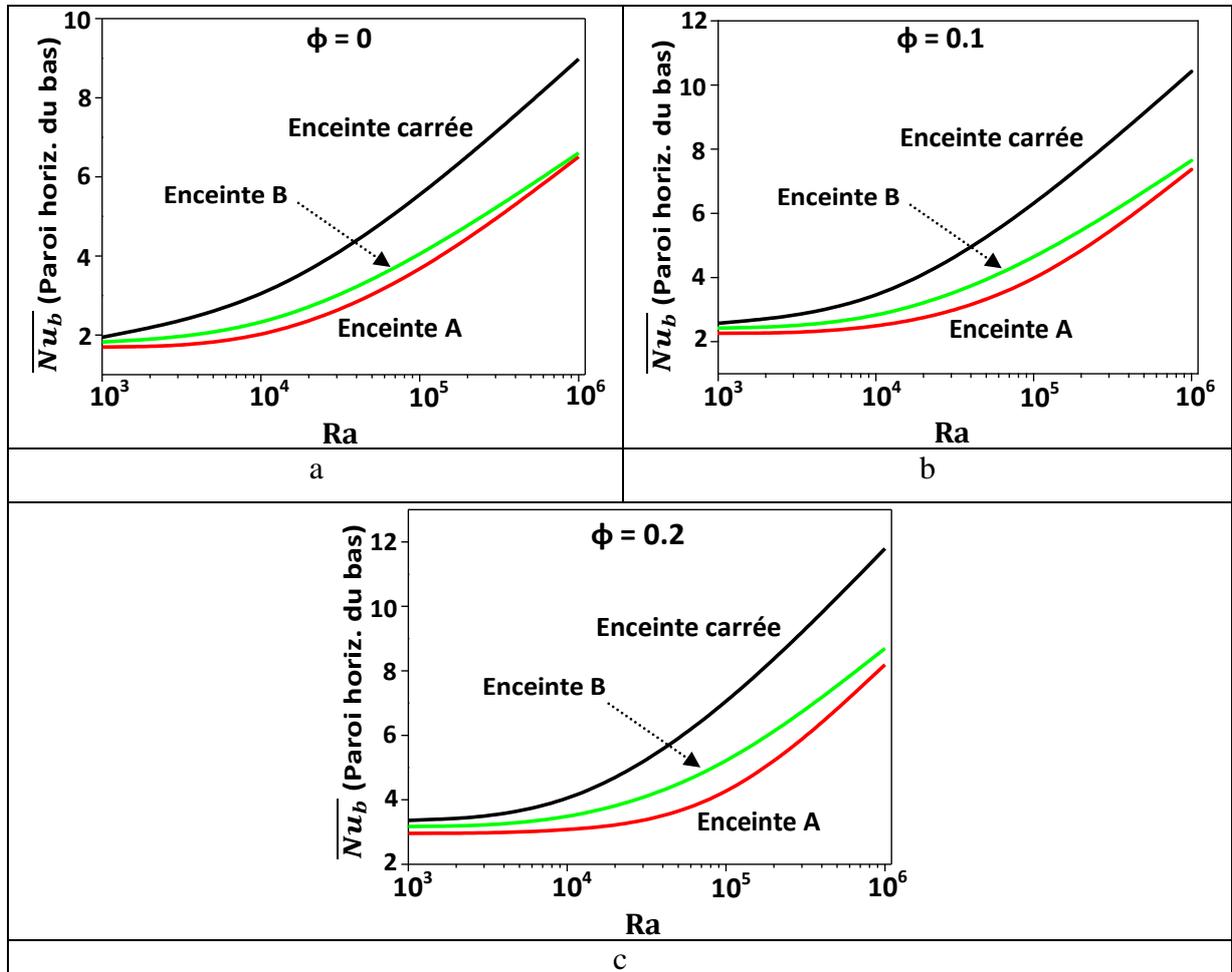


Figure 4.32. II Nombre de Nusselt moyen de la paroi du bas pour les enceintes carrée, A et B en fonction du nombre de Rayleigh.

4.4.3.6 Effet de la fraction volumique des nanoparticules sur la convection naturelle

La comparaison du transfert de chaleur au sein du nanofluide pour les valeurs de la fraction volumique des nanoparticules $\phi=0.0, 0.1$ et 0.2 nous permet de mieux visualiser l'effet de la viscosité du nanofluide (qui freine la convection naturelle surtout près des parois) sur la convection naturelle et le transfert de chaleur au sein du nanofluide, parce que l'ajout des nanoparticules au fluide de base (l'eau pure) augmente les valeurs de la fraction volumique des nanoparticules et rend le nanofluide plus dense et plus visqueux. Dans notre travail les figures 4.12, 4.13 et 4.14 (première condition pariétale thermique), les figures 4.19, 4.20 et 4.21 (deuxième condition pariétale thermique) et les figures 4.26, 4.27 et 4.28 (troisième condition pariétale thermique) montrent qu'en faisant une comparaison entre les fonctions de courant et les isothermes pour $\phi=0.0, 0.1$ et 0.2 nous remarquons que l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules diminue l'intensité des fonctions de courant et cela se manifeste aussi sur le champ des vitesses au sein du nanofluide qui diminue lui aussi, ce qui favorise le transfert de chaleur par conduction par rapport à la convection, surtout pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra \leq 10^4$) (exemple des figure 4.19.a et 4.19.b), mais pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra \geq 10^5$) l'effet de l'ajout des nanoparticules se manifeste clairement sur la convection naturelle dans le nanofluide (exemple de la figure 4.19.c). Cela nous permet de dire que l'intérêt des nanofluides sur le transfert de chaleur se manifeste beaucoup plus pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh ($Ra \geq 10^5$).

4.4.3.7 Valeurs des nombres de Nusselt moyens et des fonctions de courant

Première condition pariétale thermique

Tableau 5 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (différentiellement chauffées).

Fraction volumique	Rayleigh	Enceinte carrée		Enceinte A		Enceinte B	
		$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $
$\phi = 0$	10^3	1,119	1,173	1,309	0,301	0,653	0,213
	10^4	2,282	5,157	1,740	2,408	0,933	1,779
	10^5	4,737	11,018	3,420	7,919	2,879	7,207
	10^6	9,217	19,724	6,354	13,725	6,616	16,710
$\phi = 0,1$	10^3	1,387	0,919	1,736	0,225	0,866	0,159
	10^4	2,481	5,236	1,994	2,041	1,013	1,475
	10^5	5,242	12,345	3,865	8,570	2,921	7,178
	10^6	10,359	22,928	7,188	16,005	7,214	18,615
$\phi = 0,2$	10^3	1,768	0,677	2,272	0,162	1,134	0,114
	10^4	2,632	4,880	2,392	1,568	1,197	1,117
	10^5	5,654	13,635	4,240	8,547	2,809	6,706
	10^6	11,358	25,868	7,953	19,724	7,606	20,137

Deuxième condition pariétale thermique

Tableau 6 Résultats des nombres de Nusselt moyens et les valeurs fonctions de courant pour les parois du bas (température constante).

Fraction volumique	Rayleigh	Enceinte carrée		Enceinte A		Enceinte B	
		$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $
$\phi = 0$	10^3	7,150	0,196	6,287	0,024	4,506	0,110
	10^4	7,991	3,193	6,305	0,293	4,716	1,481
	10^5	10,971	15,174	8,039	5,420	6,722	8,811
	10^6	15,855	43,850	11,166	23,090	9,940	25,459
$\phi = 0,1$	10^3	9,516	0,138	8,372	0,017	6,001	0,080
	10^4	9,945	2,283	8,380	0,194	6,067	0,991
	10^5	13,347	14,573	9,581	4,198	8,095	8,326
	10^6	19,037	45,935	13,349	21,031	11,937	27,341
$\phi = 0,15$	10^3	10,908	0,116	-	-	-	-
	10^4	11,159	1,781	-	-	-	-
	10^5	14,662	14,000	-	-	-	-
$\phi = 0,2$	10^3	12,473	0,097	10,975	0,012	7,867	0,057
	10^4	12,606	1,351	10,979	0,132	7,881	0,644
	10^5	16,076	13,248	11,460	2,564	9,580	7,279
	10^6	22,364	47,044	16,042	19,997	14,029	27,960

Tableau 7 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (température constante).

Fraction volumique	Rayleigh	Enceinte carrée		Enceinte A		Enceinte B	
		$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $
$\phi = 0$	10^3	2,595	0,196	2,073	0,024	3,328	0,110
	10^4	3,036	3,193	2,085	0,293	3,454	1,481
	10^5	4,567	15,174	3,011	5,420	4,464	8,811
	10^6	7,097	43,850	4,672	23,090	6,078	25,459
$\phi = 0,1$	10^3	3,452	0,138	2,760	0,017	4,431	0,080
	10^4	3,681	2,283	2,766	0,194	4,479	0,991
	10^5	5,434	14,573	3,419	4,198	5,521	8,326
	10^6	8,367	45,935	5,420	21,031	7,446	27,341
$\phi = 0,15$	10^3	3,957	0,116	-	-	-	-
	10^4	4,093	1,781	-	-	-	-
	10^5	5,901	14,000	-	-	-	-
$\phi = 0,2$	10^3	4,524	0,097	3,619	0,012	5,808	0,057
	10^4	4,598	1,351	3,621	0,132	5,825	0,644
	10^5	6,394	13,248	3,893	2,564	6,724	7,279
	10^6	9,627	47,044	6,328	19,997	8,945	27,960

Troisième condition pariétale thermique

Tableau 8 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois du bas (température sinusoïdale).

Fraction volumique	Rayleigh	Enceinte carrée		Enceinte A		Enceinte B	
		$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $
$\phi = 0$	10^3	1,943	0,179	1,697	0,028	1,823	0,099
	10^4	2,741	2,784	1,749	0,335	2,063	1,271
	10^5	5,396	13,632	3,451	5,153	3,910	7,862
	10^6	8,979	39,639	6,507	22,466	6,601	22,797
$\phi = 0,1$	10^3	2,572	0,128	2,258	0,021	2,422	0,072
	10^4	3,016	1,951	2,288	0,227	2,538	0,859
	10^5	6,112	13,095	3,552	4,028	4,423	7,397
	10^6	10,421	41,507	7,366	21,473	7,649	24,282
$\phi = 0,15$	10^3	2,943	0,108	-	-	-	-
	10^4	3,237	1,525	-	-	-	-
	10^5	6,446	12,570	-	-	-	-
$\phi = 0,2$	10^3	3,362	0,042	2,958	0,015	3,171	0,052
	10^4	3,553	1,175	2,977	0,155	3,229	0,569
	10^5	6,751	11,864	3,613	2,584	4,845	6,407
	10^6	11,790	42,496	8,191	19,596	8,695	24,785

Tableau 9 Résultats des nombres de Nusselt moyen et fonctions de courant pour les parois verticales (température sinusoïdale).

Fraction volumique	Rayleigh	Enceinte carrée		Enceinte A		Enceinte B	
		$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $	$ \overline{Nu} $	$ \psi_{\max} $
$\phi = 0$	10^3	1,021	0,179	0,895	0,028	0,922	0,099
	10^4	1,441	2,784	0,926	0,335	1,055	1,271
	10^5	2,831	13,632	1,860	5,153	1,976	7,862
	10^6	4,811	39,639	3,593	22,466	3,321	22,797
$\phi = 0,1$	10^3	1,351	0,128	1,191	0,021	1,224	0,072
	10^4	1,587	1,587	1,209	0,227	1,292	0,859
	10^5	3,202	13,095	1,912	4,028	2,247	7,397
	10^6	5,541	41,507	4,024	21,473	3,852	24,282
$\phi = 0,15$	10^3	1,546	0,108	-	-	-	-
	10^4	1,703	1,525	-	-	-	-
	10^5	3,378	12,570	-	-	-	-
$\phi = 0,2$	10^3	1,765	0,042	1,560	0,015	1,602	0,052
	10^4	1,869	1,175	1,572	0,155	1,638	0,569
	10^5	3,539	11,864	1,934	2,584	2,474	6,407
	10^6	6,226	42,496	4,441	19,596	4,381	24,785

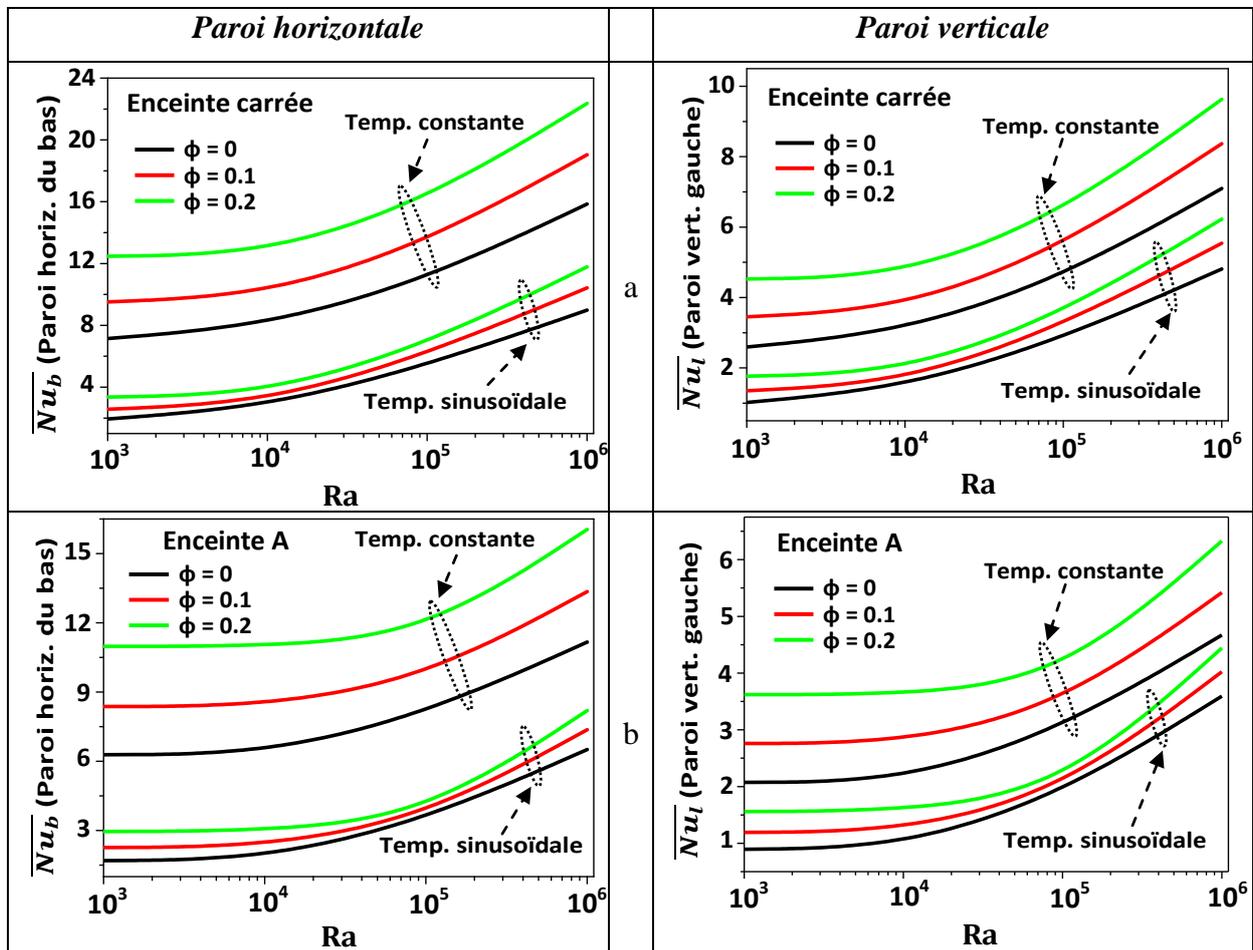
4.4.3.8 Comparaison des nombres de Nusselt moyens pour la deuxième et la troisième condition pariétale thermique

Toutes les figures de ce paragraphe montrent que les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt moyens pour la température constante sont plus grands que celles pour la

température sinusoïdale, et pour l'enceinte A, les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt moyens pour la température sinusoïdale diminuent de plus en plus que les nombres de Rayleigh augmentent jusqu'à $Ra=10^5$ puis s'élargisse de nouveau jusqu'à $Ra=10^6$.

Les figures 4.22.I (a,b,c et d), 4.23.I (a,b,c et d) et 4.24.I (a,b,c et d) et les figures 4.29.I (a,b,c et d), 4.30.I (a,b,c et d) et 4.31.I (a,b,c et d) montrent qu'en se dirigeant aux milieux des parois du bas des enceintes, les valeurs des nombres de Nusselt locaux correspondants aux valeurs 0, 0.1 et 0.2 de la fraction volumique diminuent pour la température constante, et augmentent pour la température sinusoïdale.

L'amélioration du transfert de chaleur par ajout des nanoparticules au fluide de base, est meilleure près des centres des parois qu'aux coins de celle-ci en régime convectif pour la température sinusoïdale, et pour la température constante l'amélioration est meilleure près des deux coins de la paroi qu'au centre de celle-ci en régime convectif.



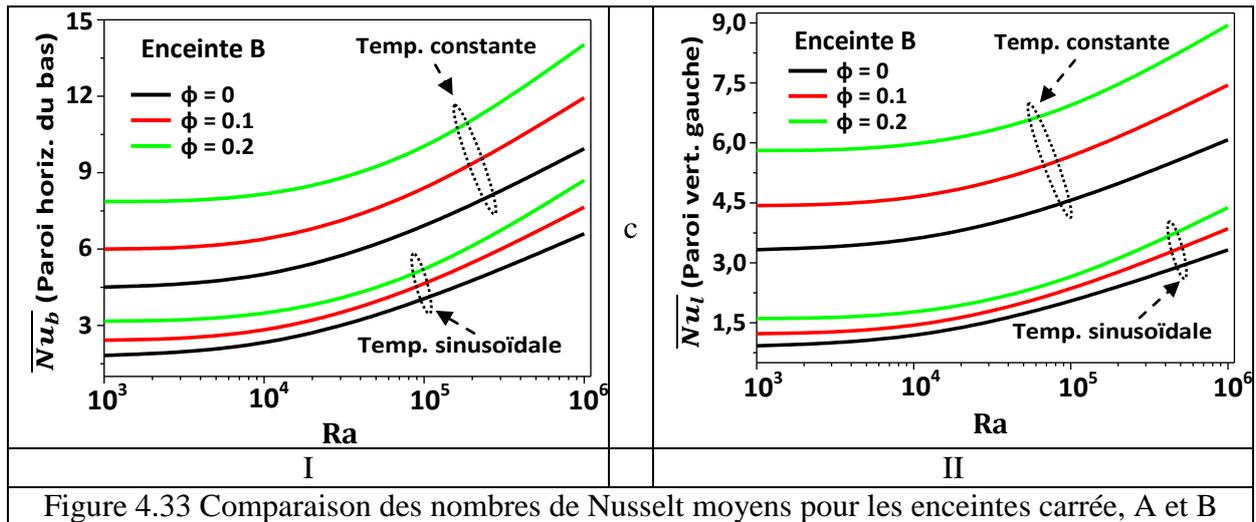


Figure 4.33 Comparaison des nombres de Nusselt moyens pour les enceintes carrée, A et B

Conclusion Générale

L'efficacité des nanofluides dépend de plusieurs facteurs tel que : la fraction volumique des nanoparticules, la nature, la taille, la forme des nanoparticules et le type du fluide de base.

Dans notre travail nous avons trouvé que :

1/ L'échange de chaleur dans l'enceinte convexe verticalement est meilleur que celui dans les deux autres enceintes à faible valeur du nombre de Rayleigh pour le cas où les parois verticales actives sont différentiellement chauffées.

2/ Pour des nombre de Rayleigh plus élevés ($Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$) l'échange de chaleur devient meilleur dans l'enceinte carrée pour le cas où les parois verticales actives sont différentiellement chauffées.

3/ Les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme des nombres de Rayleigh considérés.

4/ Le transfert de chaleur est meilleur dans le nanofluide par rapport au fluide de base.

5/ L'augmentation à la fois du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules augmente le taux de transfert de chaleur.

6/ L'effet du nanofluide sur la convection naturelle se manifeste beaucoup plus pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh ($Ra=10^6$) car les forces de flottabilité arrivent à vaincre les forces de viscosité qui restaient dominantes pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh.

7/ Les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt moyens pour une excitation thermique constante sont plus grands que ceux pour celle qui est sinusoïdale.

8/ Pour l'enceinte convexe verticalement, les écarts entre les valeurs des nombres de Nusselt moyens correspondants aux valeurs 0, 0.1 et 0.2 de la fraction volumique diminuent, pour les températures sinusoïdale et constante, à partir de $Ra=10^4$ puis augmentent de nouveau à partir de $Ra=10^5$ jusqu'à $Ra=10^6$.

9/ L'échange de chaleur pour le cas de la température constante est meilleur que celui de la température sinusoïdale pour toute la gamme des nombres de Rayleigh considérés et de la fraction volumique des nanoparticules.

Annexe 1

Coordonnées bicylindriques

A.1 Propriétés de quelques fonctions

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha) = 1$$

$$ch(2\alpha) = ch^2(\alpha) + sh^2(\alpha) = 1 + 2sh^2(\alpha) = 2ch^2(\alpha) - 1$$

$$sh(2\alpha) = 2ch(\alpha)sh(\alpha)$$

$$e^x = ch(x) + sh(x)$$

$$e^{-x} = ch(x) - sh(x)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A.2 Coordonnées bicylindriques

A.2.1 Introduction

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la figure (A.1), nous observons dans le plan (xy) deux groupes de cercles:

- Les cylindres définis par $u=\text{constant}$, tracés autour des deux pôles $x=-L$ et $x=+L$, centrés sur l'axe (x) .
- Les cylindres définis par $v = \text{constant}$, centrés sur l'axe (y) . La translation de ces cercles parallèlement à l'axe (z) engendre une famille de cylindres. Les coordonnées (η, θ, z) sont dites "coordonnées bicylindriques".

Les surfaces $\eta = \text{constantes}$ sont des cylindres dont les axes sont dans le plan (xz) ; les surfaces $\theta=\text{constantes}$ sont des cylindres avec des axes dans le plan (yz) et les surfaces $z=\text{constantes}$ sont des plans parallèles.

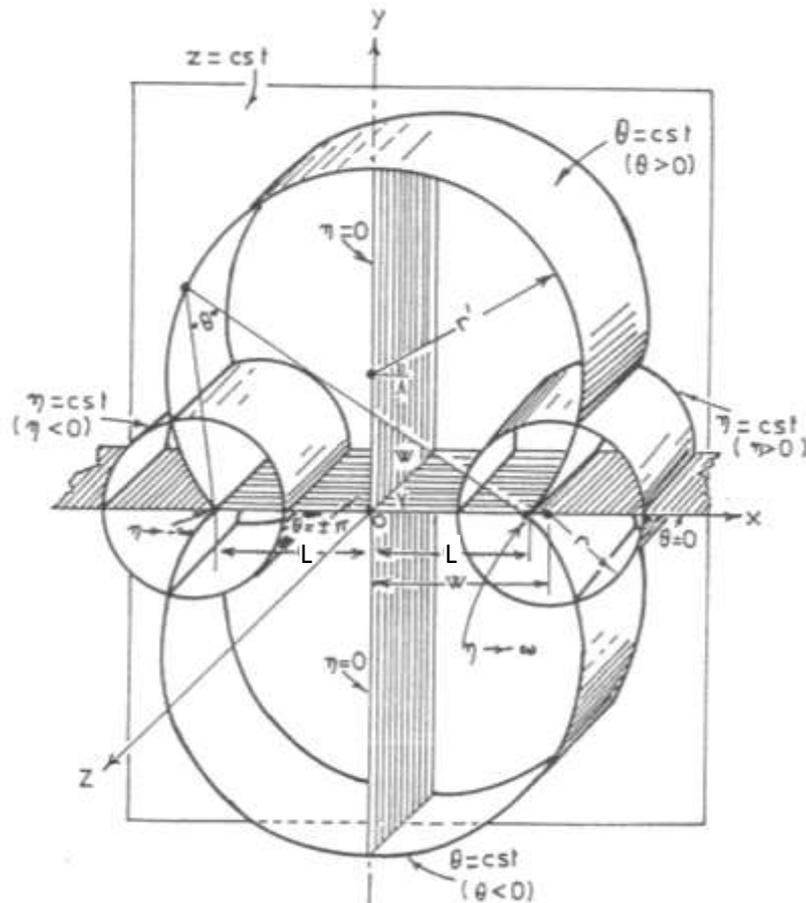


Fig. A.1. Représentation schématique des coordonnées bicylindriques.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes:

$$\begin{cases} x = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit:

Considérons la fonction g définie par:

$$g(z_1) = L \operatorname{coth}(z_1) \text{ avec : } z_1 = \frac{\eta - i\theta}{2}$$

Posons: $g(z_1) = x + i y$

Prenons: $f(w) = \operatorname{coth}(w)$ avec : $w = \eta - i\theta = 2z_1$

On peut écrire: $f(w) = \frac{ch(w)}{sh(w)} = \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} = \frac{e^\eta \cdot e^{-i\theta} + e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}{e^\eta \cdot e^{-i\theta} - e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}$

D'où: $f(w) = \frac{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - i \sin(\theta)] + [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + i \sin(\theta)]}{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - i \sin(\theta)] - [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + i \sin(\theta)]}$

Ce qui donne:

$$f(w) = \frac{ch(\eta) \cos(\theta) - i sh(\eta) \sin(\theta)}{sh(\eta) \cos(\theta) - i ch(\eta) \sin(\theta)}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur on trouve:

$$f(w) = \frac{ch(\eta) sh(\eta) \cos^2(\theta) + i ch^2(\eta) \cos(\theta) \sin(\theta) - i sh^2(\eta) \cos(\theta) \sin(\theta) + ch(\eta) sh(\eta) \sin^2(\theta)}{sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)}$$

$$f(w) = \frac{ch(\eta) sh(\eta) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + i \cos(\theta) \sin(\theta) [ch^2(\eta) - sh^2(\eta)]}{sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)}$$

Puisque :

$$sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) = sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \cos^2(\theta) - ch^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta)$$

$$sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) = -\cos^2(\theta) [ch^2(\eta) - sh^2(\eta)] + ch^2(\eta) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]$$

$$= ch^2(\eta) - \cos^2(\theta)$$

$$= 1 + sh^2(\eta) + \sin^2(\theta) - 1$$

$$= sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)$$

Donc: $sh^2(\eta) \cos^2(\theta) + ch^2(\eta) \sin^2(\theta) = ch^2(\eta) - \cos^2(\theta) = sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)$

On aura : $f(w) = \frac{ch(\eta) sh(\eta) + i \cos(\theta) \sin(\theta)}{sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)}$

Puisque : $sh(2\eta) = 2ch(\eta) sh(\eta)$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Aussi : $2sh^2(\eta) + 2\sin^2(\theta) = (2sh^2(\eta) + 1) - (1 - 2\sin^2(\theta)) = ch(2\eta) - \cos(2\theta)$

On aura : $f(w) = \frac{sh(2\eta)}{ch(2\eta) - \cos(2\theta)} + i \frac{\sin(2\theta)}{ch(2\eta) - \sin(2\theta)}$

$$\text{Donc : } g(z_1) = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} + i \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \sin(\theta)} = x + i y$$

Par identification on trouve :

$$x = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \quad (\text{A.2})$$

$$y = \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \quad (\text{A.3})$$

A.3 Démonstration géométrique

A partir de la relation (A.2) on trouve :

$$\cos(\theta) = \operatorname{ch}(\eta) - \frac{L}{x} \operatorname{sh}(\eta)$$

la relation (A.3) donne : $L \sin(\theta) = y[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]$

$$\frac{x}{y} L \sin(\theta) = x[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)] = L \operatorname{sh}(\eta)$$

Donc : $\sin(\theta) = \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta)$ (A.4)

Puisque : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

On trouve : $[\operatorname{ch}(\eta) - \frac{L}{x} \operatorname{sh}(\eta)]^2 + [\frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta)]^2 = 1$

Multipliant les deux membres par : $\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$, avec $\eta \neq 0$

On trouve : $[x \operatorname{coth}(\eta) - L]^2 + y^2 = \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$

$$x^2 \operatorname{coth}^2(\eta) - 2L x \operatorname{coth}(\eta) + L^2 + y^2 = \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

$$x^2 [\operatorname{coth}^2(\eta) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\eta)}] - 2L x \operatorname{coth}(\eta) + y^2 = -L^2 \quad (\text{A.5})$$

De cette relation : $\operatorname{ch}^2(\eta) - \operatorname{sh}^2(\eta) = 1$

On tire : $\frac{ch^2(\eta)}{sh^2(\eta)} - 1 = \frac{1}{sh^2(\eta)}$

D'où : $\coth^2(\eta) - 1 = \frac{1}{sh^2(\eta)}$ et $\coth^2(\eta) - \frac{1}{sh^2(\eta)} = 1$

Alors (A.5) donne :

$$x^2 - 2Lx\coth(\eta) + L^2\coth^2(\eta) - L^2\coth^2(\eta) + y^2 = -L^2$$

$$[x - L\coth(\eta)]^2 + y^2 = L^2[\coth^2(\eta) - 1]$$

D'où : $[x - L\coth(\eta)]^2 + y^2 = \frac{L^2}{sh^2(\eta)}$, $\eta \neq 0$

C'est l'équation d'une famille de cercles dont les centres sont : $(L\coth(\eta), 0)$ et les rayons :

$$R = \frac{L}{|sh(\eta)|} , \text{ avec } : \eta \neq 0$$

On remarque que :

1/ La valeur du rayon R tend vers l'infini quand η devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface η se réduit au plan yz .

2/ Lorsque η varie de : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ le centre du cercle se déplace sur l'axe (x, x') entre : $-L$ et $-\infty$ et entre : $+\infty$ et $+L$ respectivement.

D'autre part :

La relation (A.3) donne : $L\sin(\theta) = y[ch(\eta) - \cos(\theta)]$

$$ch(\eta) = \frac{L}{y}\sin(\theta) + \cos(\theta)$$

(A.4) donne : $sh(\eta) = \frac{x}{y}\sin(\theta)$

Puisque : $ch^2(\eta) - sh^2(\eta) = 1$ on trouve :

$$\left[\frac{L}{y}\sin(\theta) + \cos(\theta)\right]^2 - \left[\frac{x}{y}\sin(\theta)\right]^2 = 1$$

Multiplions les deux membres par : $\left[\frac{y}{\sin(\theta)}\right]^2$, avec : $\theta \neq 0 + k\pi$, k : nombre entier

$$[L + y\cotg(\theta)]^2 - x^2 = \frac{y^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$L^2 + y^2 \cotg^2(\theta) + 2L y \cotg(\theta) - x^2 = \frac{y^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$y^2 \left[\cotg^2(\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] + 2L y \cotg(\theta) - x^2 = -L^2$$

Puisque : $1 + \cotg^2(\theta) = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \Leftrightarrow \cotg^2(\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} = -1$

On trouve : $y^2 - 2L y \cotg(\theta) + x^2 = L^2$

$$x^2 + y^2 - 2L y \cotg(\theta) + L^2 \cotg^2(\theta) = L^2 + L^2 \cotg^2(\theta)$$

$$x^2 + [y - L \cotg(\theta)]^2 = L^2 [1 + \cotg^2(\theta)]$$

$$x^2 + [y - L \cotg(\theta)]^2 = \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}, \quad \theta \neq 0 + k\pi, \quad k : \text{nombre entier}$$

C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon : $R = \frac{L}{|\sin(\theta)|}$ qui passent par deux Points

fixes (pôles) de coordonnées $(x = +L, y = 0)$, $(x = -L, y = 0)$.

Pour $y=0$: $x^2 + L^2 \cotg^2(\theta) = \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}$

$$x^2 = L^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\theta)} - \cotg^2(\theta) \right]$$

$$x^2 = L^2 \Leftrightarrow x = \pm L$$

On remarque que :

1/ La valeur du rayon R tend vers l'infini quand θ devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface θ se réduit au plan xz .

2/ Lorsque θ varie de $]0, \pi[$ le centre du cercle se déplace sur l'axe (y, y') entre $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

A.4 Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes, un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $(ds)^2$ est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (du_1)^2 + h_2 (du_2)^2$$

u_1, u_2 : des coordonnées curvilignes .

h_1, h_2 : coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a $h_x = h_y = 1$, et en coordonnées bicylindriques :

$$h_\eta = h_\theta = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \text{ et } h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations :

$$\begin{cases} x = \frac{L sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L \sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \end{cases} \quad \eta \neq 0, \theta \neq 0 + 2k\pi, k : \text{nombre entier}$$

Et les définitions suivantes :

$$h_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$h_\theta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$h_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

A.4.1 calcul des dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{sh(\eta)[ch(\eta) - \cos(\theta)] - sh^2(\eta)\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [ch^2(\eta) - ch(\eta)\cos(\theta) - sh^2(\eta)]$$

Puisque : $ch^2(\eta) - sh^2(\eta) = 1$

On trouve :

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - ch(\eta)\cos(\theta)]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 - ch(\eta)\cos(\theta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [-\sin(\theta) sh(\eta)]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\sin(\theta) sh(\eta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [-\sin(\theta) sh(\eta)]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\sin(\theta) sh(\eta)]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{\cos(\theta)[ch(\eta) - \cos(\theta)] - \sin^2(\theta)\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} \{\cos(\theta) ch(\eta) - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\}$$

Puisque : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

On trouve : $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{L}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2} [ch(\eta) \cos(\theta) - 1]$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [ch(\eta) \cos(\theta) - 1]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Résumé :

On remarque que : $\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2$, $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$

Ce qui nous mènent a : $h_\eta^2 = h_\theta^2$

A.4.2 calcul des coefficients métriques

$$h_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$h_\eta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} \left\{ [1 - ch(\eta) \cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta) sh(\eta)]^2 \right\}$$

$$h_\eta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 + ch^2(\eta) \cos^2(\theta) - 2ch(\eta) \cos(\theta) + sh^2(\eta) \sin^2(\theta)]$$

Comme : $ch^2(\eta) \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) = ch^2(\eta) - \sin^2(\theta)$

$$h_\eta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [1 + \cos^2(\theta) + sh^2(\eta) - 2ch(\eta) \cos(\theta)]$$

$$h_\eta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [\cos^2(\theta) + ch^2(\eta) - 2ch(\eta) \cos(\theta)]$$

$$h_\eta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^4} [ch(\eta) - \cos(\theta)]^2$$

$$h_\eta^2 = h_\theta^2 = \frac{L^2}{[ch(\eta) - \cos(\theta)]^2}$$

$$h_\eta = h_\theta = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)}, \quad \theta \neq 0 + 2k\pi, \quad k : \text{nombre entier}, \eta \neq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$h_z^2 = 0 + 0 + 1 = 1$$

A.4.3 Les opérateurs différentiels

A.4.3.1 En coordonnées cartésiennes

A.4.3.1.1 Champ scalaire

Operateur Nabla: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Laplacien : $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

A.4.3.1.2 Champ de vecteur

Soit le vecteur \vec{F}

Divergence : $\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$

Propriété : $\overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \nabla^2 f = \Delta f$

Le divergent d'un gradient est le laplacien.

A.4.3.2 En coordonnées curvilignes

Le principal avantage de l'utilisation des coordonnées curvilignes est de transformer un domaine physique de géométrie complexe en un domaine de calcul de géométrie simple, elles permettent de transformer des courbes en droites et facilitent, de ce fait, le calcul des aires.

η, θ, z coordonnées curvilignes .

Soit : $\overrightarrow{e}_\eta, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z$ vecteurs unitaires suivant η, θ, z .

$$h_1 = h_\eta, h_2 = h_\theta, h_3 = h_z$$

$$\text{Operateur Nabra : } \overrightarrow{\nabla} \Omega = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \overrightarrow{e}_\eta + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$

$$\text{Gradient : } \overrightarrow{\text{grad}} \Omega = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \overrightarrow{e}_\eta + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \overrightarrow{e}_z \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Laplacien : } \Delta \Omega = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Divergence : } \overrightarrow{\text{div}} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2 F_3) \right]$$

F_1, F_2, F_3 : composantes de \vec{F} suivant : η, θ, z .

Rotationnel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial z} (h_2 F_2) \right] \overrightarrow{e}_\eta + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_3 F_3) \right] \overrightarrow{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 F_1) \right] \overrightarrow{e}_z \end{aligned}$$

A.5 Formulation des équations de continuité, de la chaleur et de la quantité de mouvement dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales

A.5.1 Equation de continuité

Posons : $h_1 = h_\eta, h_2 = h_\theta, h_3 = h_z$

Puisque : $h_\eta = h_\theta, h_z = 1$ on aura : $h_1 = h_2 = h, h_3 = 1$

Et comme le problème est bidimensionnel alors :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \text{ donne : } \frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) = 0$$

V_η, V_θ : composantes du vecteur vitesse en coordonnées curvilignes orthogonales.

A.5.2 Equation d'énergie

Puisque : $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} T) = \Delta T$

L'équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\operatorname{grad}}) T = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} T) \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{A.7}) \text{ donne : } (\vec{V} \vec{\operatorname{grad}}) T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$(\text{A.8}) \text{ donne : } \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} T) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

$$(\text{A.9}) \text{ donne : } \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\text{D'où : } h \frac{\partial T}{\partial t} + V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

A.5.3 Equation de quantité de mouvement

L'équation (2.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\operatorname{grad}}) \omega = \frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} \omega) \quad (\text{A.11})$$

Réécrivons cette équation en coordonnées orthogonales curvilignes.

$$\text{On a : } (\vec{V} \vec{\operatorname{grad}}) \omega = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

$$\frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} \omega) = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right]$$

Pour le terme: $\frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right]$ déterminant tous d'abord :

$\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ en coordonnées orthogonales curvilignes.

Puisque: $dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

Alors pour le système :

$$\begin{cases} x = \frac{L \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y = \frac{L \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \end{cases}$$

$$dx = \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] d\eta - \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] d\theta \quad (\text{A.12})$$

$$dy = -\frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)] d\eta - \frac{L}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2} [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)] d\theta \quad (\text{A.13})$$

Déterminant les expressions de $d\eta$ et $d\theta$ en fonction de dx et dy

Le déterminant du système d'équation (A.12), (A.13) est:

$$\det = \frac{-L^2}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^4} \{ [1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)]^2 + \sin^2(\theta) \operatorname{sh}(\eta) \}$$

$$\det = \frac{-L^2}{[\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)]^2}$$

$$\det = -h_\eta^2 = -h_\theta^2$$

Et par suite:

$$d\eta = \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L} dx - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{L} dy$$

$$d\theta = -\frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L} dy - \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(\eta)}{L} dx$$

Puisque : $d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy$$

On obtient:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta)}{L}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{L}$$

Comme les dérivées partielles de T par rapport à x et y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Nous obtenons:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{L} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{L} [\sin(\theta) sh(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{L} [\sin(\theta) sh(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{L} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

En portant ces relations dans l'expression : $\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha)$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) = \left\{ \frac{1}{L} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \cos(\alpha) + \frac{1}{L} [\sin(\theta) sh(\eta)] \sin(\alpha) \right\} \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{L} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \sin(\alpha) - \frac{1}{L} [\sin(\theta) sh(\eta)] \cos(\alpha) \right\} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) = \frac{ch(\eta) - \cos(\theta)}{L} \left\{ \left[\frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) + \frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ \left. + \left[\frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) - \frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) = \frac{ch(\eta) - \cos(\theta)}{L} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right. \\ \left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\}$$

$$\text{Avec: } h = \frac{L}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

$$F(\eta, \theta) = \frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

$$G(\eta, \theta) = \frac{\sin(\theta) sh(\eta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$$

Finalement, l'équation de quantité de mouvement (A.11) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{g}{h} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\ \left. + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (A.13)$$

En remplaçant les grandeurs suivantes: ρ_{nf} , $(\rho\beta)_{nf}$, μ_{nf} , λ_{nf} et $(\rho C_p)_{nf}$ par leurs définitions (qui suivent) dans les équations de quantité de mouvement (A.13), et de l'énergie (A.10) on trouve les équations finales.

A.6 Définition des grandeurs physiques

La masse volumique du nanofluide :

$$(\rho)_{nf} = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_f$$

La diffusivité thermique :

$$a_{nf} = \frac{K_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$$

La conductivité thermique donnée par Maxwell [55]:

$$\lambda_{nf} = \lambda_f \frac{(\lambda_p + 2\lambda_f) - 2\phi(\lambda_f - \lambda_p)}{(\lambda_p + 2\lambda_f) + \phi(\lambda_f - \lambda_p)}$$

La capacité thermique du nanofluide:

$$(\rho C_p)_{nf} = \phi(\rho C_p)_p + (1 - \phi)(\rho C_p)_f$$

Le coefficient de dilatation thermique du nanofluide:

$$(\rho\beta)_{nf} = \phi \rho_p \beta_p + (1 - \phi) \rho_f \beta_f$$

La viscosité dynamique du nanofluide donnée par Brinkman model [56]:

$$(\mu)_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}}$$

A.7 Equations finales

Equation d'énergie

$$H^2 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + H V_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_f}}{\left[(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f} \right]} \left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right)$$

Equation de quantité de mouvement

$$H^2 \frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + H V_{\eta}^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = P_r \cdot R_a \cdot H \left[\frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_p} + 1} \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_p}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right] \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \right.$$

$$\left. \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] + \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \left. \right\} +$$

$$P_r \left[\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]} \right] \left[\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right]$$

Annexe 2

Approximation des dérivées partielles

Approximation des dérivées partielles aux frontières par le développement en série de Taylor :

1 Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ sur les parois horizontales

Paroi horizontale inférieure (i = 1, j) :

Le développement en série de Taylor de la fonction de courant au voisinage de la paroi (i = 1, j) donne:

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + 0[\Delta \eta]^3$$

$$\psi^+(3, j) = \psi^+(1, j) + \frac{2\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + 0[\Delta \eta]^3$$

Eliminons les dérivées secondes en soustrayant la deuxième relation de la première multipliée par quatre (4) on obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i=1, j} = \frac{-3\psi^+(1, j) + 4\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j)}{2\Delta \eta} + 0[\Delta \eta]^2$$

Paroi horizontale supérieure (i = NI, j) :

Procédons de la même manière que précédemment au voisinage de la paroi (i = NI, j) :

$$\psi^+(NI-1, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} + 0[\Delta \eta]^3$$

$$\psi^+(NI-2, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{2\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} + 0[\Delta \eta]^3$$

On obtient :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i=NI, j} = \frac{3\psi^+(NI, j) - 4\psi^+(NI-1, j) + \psi^+(NI-2, j)}{2\Delta \eta} + 0[\Delta \eta]^2$$

2 Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}$ sur les parois verticales

Paroi verticale gauche (i , j = 1) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j=1} = \frac{-3\psi^+(i,1) + 4\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3)}{2\Delta\theta} + 0[\Delta\theta]^2$$

Paroi verticale droite (i , j = NN) :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j=NN} = \frac{3\psi^+(i,NN) - 4\psi^+(i,NN-1) + \psi^+(i,NN-2)}{2\Delta\theta} + 0[\Delta\theta]^2$$

3 Approximation de $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2}$ sur les parois horizontales

Paroi horizontale inférieure (i = 1 , j) :

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi (i= 1, j) dans la direction de η :

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^3} + 0[\Delta\eta]^4$$

$$\psi^+(3, j) = \psi^+(1, j) + \frac{2\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \frac{(2\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^3} + 0[\Delta\eta]^4$$

On multiplie la première relation par 8 et on retranche de celle obtenue la deuxième relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} \right|_{i=1, j} = \frac{-7\psi^+(1, j) + 8\psi^+(2, j) - \psi^+(3, j) - 6\Delta\eta \cdot g_1}{2(\Delta\eta)^2} + 0[\Delta\eta]^2$$

Avec : $g_1 = \left. \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} \right|_{i=1, j}$

Paroi horizontale supérieure (i = NI , j) :

$$\psi^+(NI-1, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} - \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^3} + 0[\Delta\eta]^4$$

$$\psi^+(NI-2, j) = \psi^+(NI, j) - \frac{2\Delta\eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} + \frac{(2\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} - \frac{(2\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^3}$$

$$+ 0[\Delta\eta]^4$$

On obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(NI, j)}{\partial \eta^2} \right|_{i=NI, j} = \frac{-7\psi^+(NI, j) + 8\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI-2, j) + 6\Delta\eta \cdot g_2}{2(\Delta\eta)^2} + 0[\Delta\eta]^2$$

$$\text{Avec : } g_2 = \left. \frac{\partial \psi^+(NI, j)}{\partial \eta} \right|_{i=NI, j}$$

4 Approximation de $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2}$ sur les parois verticales

Paroi verticale gauche (i, j = 1) :

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi (i, j=1) dans la direction de θ , et en suivant les mêmes démarches que pour la paroi horizontale, on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i, j=1)}{\partial \theta^2} \right|_{i, j=1} = \frac{-7\psi^+(i,1) + 8\psi^+(i,2) - \psi^+(i,3) - 6\Delta\theta \cdot g_3}{2(\Delta\theta)^2} + 0[\Delta\theta]^2$$

$$\text{Avec : } g_3 = \left. \frac{\partial \psi^+(i,1)}{\partial \theta} \right|_{i, j=1}$$

Paroi verticale droite (i, j = NN) :

On procédant de la même manière que sur la paroi (i, j=1) on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i, j=NN)}{\partial \theta^2} \right|_{i, j=NN} = \frac{-7\psi^+(i, NN) + 8\psi^+(i, NN-1) - \psi^+(i, NN-2) + 6\Delta\theta \cdot g_4}{2(\Delta\theta)^2} + 0[\Delta\theta]^2$$

$$\text{Avec : } g_4 = \left. \frac{\partial \psi^+(i, NN)}{\partial \theta} \right|_{i, j=NN}$$

5 Approximation de $\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2}$ autour du point i

Développons en série de Taylor la fonction de courant autour du point i dans la direction de η :

$$\psi^+(i-1, j) = \psi^+(i, j) - \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial\psi^+(i, j)}{\partial\eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2\psi^+(i, j)}{\partial\eta^2} - \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3\psi^+(i, j)}{\partial\eta^3} + 0[\Delta\eta]^4$$

$$\psi^+(i+1, j) = \psi^+(i, j) + \frac{\Delta\eta}{1!} \frac{\partial\psi^+(i, j)}{\partial\eta} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!} \frac{\partial^2\psi^+(i, j)}{\partial\eta^2} + \frac{(\Delta\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3\psi^+(i, j)}{\partial\eta^3} + 0[\Delta\eta]^4$$

En prenant les deux premiers termes de la première relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i, j) - \psi^+(i-1, j)}{\Delta\eta}$$

C'est la dérivée d'ordre 1 de la fonction ψ^+ , au point (i , j), approchée par la méthode des différences finies régressives d'ordre 1 .

En prenant les deux premiers termes de la deuxième relation on obtient :

$$\left. \frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i, j)}{\Delta\eta}$$

C'est la dérivée d'ordre 1 de la fonction ψ^+ , au point (i , j), approchée par la méthode des différences finies progressives d'ordre 1 .

En soustrayant la première relation de la deuxième on obtient :

$$\left. \frac{\partial\psi^+}{\partial\eta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j)}{2\Delta\eta}$$

Approximation par la méthode des différences finies centrales d'ordre 2

En additionnant les deux relations précédentes on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2\psi^+(i, j)}{\partial\eta^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{(\Delta\eta)^2}$$

Approximation par la méthode des différences finies centrées d'ordre 2

6 Approximation de $\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial^2\psi^+}{\partial\theta^2}$ autour du point j

Procédons de la manière que précédemment autour du point j on trouve :

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i, j-1)}{2\Delta\theta}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^+(i, j)}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{(\Delta\theta)^2}$$

Références bibliographiques

- [1] T. Basak, A. J. Chamkha, Heatline analysis on natural convection for nanofluids confined within square cavities with various thermal boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass transfer* 55 (2012) 5526-5543.
- [2] T. Tayebi, M. Djezzar, Numerical Study of Natural Convection Flow in a Square Cavity with Linearly Heating on Bottom Wall Using Copper-Water Nanofluid, *J. Nanofluids* Vol. 4, pp. 38-49 (12), (2015).
- [3] M. Guestal, M. Kadja, M. T. Hoang, Study of heat transfer by natural convection of nanofluids in a partially heated cylindrical enclosure, *Case Studies in Thermal Engineering* 11 (2018) 135–144.
- [4] Y. Hu, D. Li, S. Shu, X. Niu, Natural convection in a nanofluid-filled eccentric annulus with constant heat flux wall: a lattice Boltzmann study with immersed boundary method, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 86 (2017) 262–273.
- [5] L. Snoussi, N. Ouerfelli, X. Chesneau, A. J. Chamkha, Fethi Bin Muhammad Belgacem & Amenallah Guizani, Natural Convection Heat Transfer in a Nanofluid Filled U-Shaped Enclosures: Numerical Investigations, *Heat Transfer Engineering*, ISSN: 0145-7632 (Print) 1521-0537 (2017)
- [6] K. Khanafer, K. Vafai, M. Lightstone, Buoyancy – driven heat transfer enhancement in a two – dimensional enclosure utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (2003) 3639-3653.
- [7] P. Joshi, A. Pattamatta, An Experimental Study on Buoyancy Induced Convective Heat Transfer in a Square Cavity using Multi-Walled Carbon Nanotube (MWCNT)/Water Nanofluid, *Journal of Physics Conference Series* 745(3) 032033 September 2016.
- [8] N. Makulati, A. Kasaeipoor, M. M. Rashidi, Numerical study of natural convection of a water–alumina nanofluid in inclined C-shaped enclosures under the effect of magnetic field, *Advanced Powder Technology*, Volume 27, Issue 2, March 2016, Pages 661-672
- [9] A. Noghrehabadi, A. Samimi, Natural Convection Heat Transfer of Nanofluids Due to Thermophoresis and Brownian Diffusion in a Square enclosure, *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)* ISSN: 2249 – 8958, Volume-1, Issue-6, August 2012.
- [10] H. R. Ashorynejad, A. Shahriari, MHD natural convection of hybrid nanofluid in an open wavy cavity, *Results in Physics*, Volume 9, June 2018, Pages 440-455.
- [11] S. Bezi, B. Souayeh, N. BenCheikh, B. Ben-Beya, Numerical simulation of entropy generation due to unsteady natural convection in a semiannular enclosure filled with

nanofluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 124, September 2018, Pages 841-859.

[12] G. Hoghoughi, M. Izadi, H. F. Oztop, N. Abu-Hamdeh, Effect of geometrical parameters on natural convection in a porous undulant-wall enclosure saturated by a nanofluid using Buongiorno's model, *Journal of Molecular Liquids*, Volume 255, 1 April 2018, Pages 148-159.

[13] T. Tayebi, M. Djezzar and K. Saadaoui, Effect of Sinusoidal Thermal boundary Condition on Natural Convection in a Cavity Filled with Cu-Water Nanofluid, *J. Nanofluids* Vol. 2, pp. 120-126 (2013).

[14] E. Abu – Nada, H. F. Oztop, Effects of inclination angle on natural convection in enclosures filled with Cu – water nanofluid, *International Journal of Heat and Fluid Flow* (2009), doi: 10.1016/j.ij Heat Fluid Flow.2009.02.001

[15] K. C.lin, A. Violi, Natural convection heat transfer of nanoluids in a vertical cavity: effects of on uniform particle diameter and temperature on thermal conductivity, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31 (2010) 236-245.

[16] M. Rahimi, A. A. Ranjbar, M. J. Hosseini, M. Abdollahzadeh, Natural convection of nanoparticule – water mixture near its density inversion in a rectangular enclosure, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39 (2012) 131-137.

[17] S. Sharma, A. k. GUPTA, Numerical simulation of heat transfer of nanofluids in an enclosure, CSIRO, Melbourne, Australia 9-11 December 2009.

[18] E. Abu – Nada, A. J. Chamkha, Effect of nanofluid variable properties on natural convection filled with a CuO- EG – Water nanofluid, *International Journal of Thermal Sciences* 49 (2010) 2339e2352.

[19] P. Ternik, R. Rudolf, Z. Zunic, Numerical study of heat transfer enhancement of homogeneous water – Au nanofluid under natural convection, *Materials and Technology* 46 (2012) 3, 257-261.

[20] P. Ternik, R. Rudolf, Heat transfer enhancement for natural convection flow of water – based nanofluids in a square enclosure, *Int j simul model* 11 (2012) 1, 29-39.

[21] G. H. Li, G. P. Peterson, Experimental studies of natural convection heat transfer of Al₂O₃/DI water nanoparticle suspensions (nanofluids), Hidawi Publishing Corporation *Advances in Mechanical Engineering* Vol 2010, Article ID 742739, 10 pages doi: 10.1155/2010/742739.

[22] I. Tavman, A. Turgut, M. Chirtoc, H.P. Schuchmann, S. Tavman, Experimental investigation of viscosity and thermal conductivity of suspensions containing nanosized ceramic particles, *International Scientific Journal* Vol 34 Issue 2 (2008) pages 99-104.

- [23] A. Cihan, K. Kahveci, and C. Susantez, Buoyancy driven heat transfer of water-based CuO nanofluids in a tilted enclosure with a heat conducting solid cylinder on its center, Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III.
- [24] E. Abu-Nada, Effects of variable viscosity and thermal conductivity of Al₂O₃-Water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, Int. J. Heat Fluid Flow (2009), doi: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.02.003.
- [25] Y. Bakhshan, Seyed Hossein Emrani, Investigation the behavior of nanofluids in a rectangular enclosure in order to enhance the heat transfer coefficient, J. Basic. Appl. Sci. Res., 3(1)976-986, 2013.
- [26] J. Guet, M. Reggio, and P. Vasseur, Natural Convection of Nanofluids in a Square Enclosure with a Protruding Heater, Mechanical Engineering Volume 2012, Article ID 167296, 11 pages.
- [27] T. Basak, S. Roy, S. K. Babu and A. R. Balakrishnan, Finite element analysis of natural convection flow in a isosceles triangular enclosure due to uniform and non-uniform heating at the side walls. International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (2008) 4496-4505.
- [28] I. El Bouihi, R. Sehaqui, Numerical study of natural convection in a two dimensional enclosure with a sinusoidal boundary thermal condition utilizing nanofluid, Engineering, 2012, 4, 445-452.
- [29] M. K. Aktas, Thermal convection of a water-based nanofluid in a enclosure with an oscillating wall, Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 Vol III WCE 2011.
- [30] M. A. Mansour, A. Y. Bakier and M. A. Y. Bakier, Natural convection of the localized heat sources of T-shaped nanofluid-filled enclosures, American Journal of Engineering Research, 2320-0936 Vol-02, Issue-07, pp-49-61.
- [31] M. A. Mansour, A. Y. Bakier and M. A. Y. Bakier, MHD Natural convection in the localized heat sources of an inclined trapezoidal nanofluid-filled enclosure, American Journal of Engineering Research, e-ISSN: 2320-0847 p-ISSN: 2320-0936 Vol-02, Issue-09, pp-140-161.
- [32] N. Ben-Cheikh, A. J. Chamkha, B. Ben- Beya, T. Lilin, Natural Convection of Water-Based Nanofluids in a Square Enclosure with Non-Uniform Heating of the Bottom Wall, Journal of Modern Physics, 2013, 4, 147-159 doi: 10.4236/jmp.2013.42021.
- [33] C. C. Cho, H.T. YAU and C. K. CHEN , Numerical Investigation in to Natural Convection Heat Transfer Enhancement of Copper- Water Nanofluid in a Wavy Wall Enclosure, Thermal Science, Year 2012, Vol. 16, No. 5, pp. 1309-1316.
- [34] R. Nasrin, M. A. Alim and A. J. Chamkha, Numerical Investigation in to Natural Convection Heat Transfer Enhancement of Copper- Water Nanofluid in a Wavy Wall Enclosure, International Journal of Energy & Technolog 6 (2) (2014) 1- 9.

- [35] H. F. Oztop, E. Abu-Nada, Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29 (2008) 1326- 1336.
- [36] S. Sharma, A. k. GUPTA, Numerical simulation of heat transfer of nanofluids in an enclosure, CSIRO, Melbourne, Australia 9-11 December 2009.
- [37] I. Tavman, A. Turgut, M. Chirtoc, H.P. Schuchmann, S. Tavman, Experimental investigation of viscosity and thermal conductivity of suspensions containing nanosized ceramic particles, *International Scientific Journal Vol 34 Issue 2* (2008) pages 99-104.
- [38] W. Yu, S.U.S. Choi, The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: A renovated Maxwell model, *Journal of Nanoparticle Research* 5:167–171, 2003.
- [39] M. Jalal, H. Meisami and M. Pouyagohar, Experimental Study of CuO/Water Nanofluid Effect on Convective Heat Transfer of a Heat Sink, *Middle-East Journal of Scientific Research* 13 (5): 606-611, 2013 ISSN 1990-9233
- [40] A. Cihan, K. Kahveci, and C. Susantez, Buoyancy driven heat transfer of water-based CuO nanofluids in a tilted enclosure with a heat conducting solid cylinder on its center, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III*.
- [41] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandry, G. Domairry, Free convection of nanofluid filled enclosure using lattice Boltzmann method(LBM), *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 34(7), 833–846 (2013) DOI 10.1007/s10483-013-1711-9
- [42] E. Abu-Nada, Effects of variable viscosity and thermal conductivity of Al₂O₃-Water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, *Int. J. Heat Fluid Flow*(2009), doi: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.02.003.
- [43] S. Sharma, A. Kumar Gupta, Numerical simulation of heat transfer of nanofluids in an enclosure, *Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO, Melbourne, Australia, 9-11 December 2009*.
- [44] S. Öztuna, K. Kahveci, Natural convection heat transfer of nanofluids in a partially divided enclosure, *J. of Thermal Science and Technology*, 33, 1, 139-154, 2013 ISSN 1300-3615.
- [45] Y. Bakhshan, S. H. Emrani, Investigation the behavior of nanofluids in a rectangular enclosure in order to enhance the heat transfer coefficient, *J. Basic. Appl. Sci. Res.*, 3(1)976-986, 2013.
- [46] M. Elhatab, R. Mir, Y. Elhammani, T. Mediouni, Simulation numérique de la convection naturelle des nanofluides dans une enceinte carrée chauffée par une source de chaleur, *Revue Internationale d'Héliotechnique N° 45* (2013) 51-59

- [47] F. S. Oueslati, R. Bennacer, Heterogeneous nanofluids: natural convection heat transfer enhancement, *Nanoscale Research Letters* 2011,6:222
- [48] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, Mc Graw-Hill book Company, New York, (1980).
- [49] E. F. Nogotov, *Applications of Numerical Heat Transfer*, Mc Graw-Hill book Company, New York, (1978).
- [50] Davis, D. V. G., Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution. *Int. J. Numer. Method fluid*, 3: 249 – 264. (1983).
- [51] J. C. Kalita, D. C. Dalal, and A. K. Dass, Fully Compact Higher-Order Computation of Steady-State Natural Convection in a Square Cavity, *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 066703-1-066703-13, (2001).
- [52] G. Diaz and R. Winston, Effect of Radiation on Natural Convection in Parabolic Enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 53: 891- 906, (2008).
- [53] A. Yahiaoui, M. Djezzar, H. Naji, Simulating of heat transfer enhancement via a water-based nanofluid in enclosures with curved side walls, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 100 : 118-132, (2019).
- [54] A. Yahiaoui, M. Djezzar, H. Naji, Numerical computation of natural convection inside a curved-shape nanofluid-filled enclosure with nonuniform heating of the bottom wall, *International Journal of Modern Physics C*, 30, (2019).
- [55] J. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2nd edn. Oxford University Press, Cambridge, UK (1904).
- [56] H.C. Brinkman. *J. Chem. Phys.* 20. 571 (1952).

Résumé :

Dans notre investigation nous avons étudié et comparé la convection naturelle laminaire et permanente dans des enceintes bidimensionnelles (enceinte carrée, enceintes à parois courbées) remplies de nanofluide (eau–Cu) et soumises à trois conditions pariétales thermiques différentes qui sont : premier cas (les parois horizontales des enceintes sont adiabatiques, et les parois verticales sont isothermes maintenues aux températures froide T_c et chaude T_h), deuxième cas (les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues isothermes à une température chaude constante T_h), troisième cas (les parois verticales des enceintes sont maintenues isothermes à une température T_c froide, et les parois horizontales de haut sont considérées adiabatiques et de bas sont maintenues à une température sinusoïdale). Le fluide est considéré newtonien et l'écoulement est incompressible. Les valeurs du nombre de Rayleigh considérés sont : 10^3 , 10^4 , 10^5 et 10^6 , le nombre de Prandtl est fixé à 6.2 et la fraction volumique ϕ est prise égale à : 0, 0.1 et 0.2. La méthode numérique utilisée dans cette étude est la méthode des volumes finis. Les résultats numériques obtenus montrent que le taux du transfert thermique augmente à la fois avec l'augmentation de la fraction volumique et du nombre de Rayleigh, et que le nombre de Nusselt moyen et par conséquent le transfert thermique augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour toute la gamme des nombres de Rayleigh utilisés, et que l'effet du nanofluide sur la convection naturelle se manifeste beaucoup plus pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh.

Mots-clés: convection naturelle, nanofluides, enceintes à parois courbées, vorticité-fonction de courant, simulation numérique.

Title: Contribution to the study of natural convection in curved wall enclosures filled with nanofluids.

Abstract:

In our investigation we have studied and compared the laminar and permanent natural convection in two-dimensional enclosures (square enclosure, enclosures with curved walls) filled with nanofluid (water-Cu) and subject to three different types of boundary conditions that are: first case (horizontal walls of enclosure are adiabatic, and vertical walls are isothermal maintained at cold temperature T_c and hot temperature T_h), second case (vertical walls of enclosures are maintained isothermal at a cold temperature T_c , horizontal top walls are considered adiabatic and bottom walls are maintained isothermal at a constant hot temperature T_h), third case (vertical walls of the enclosures are maintained isothermal at a cold temperature T_c , horizontal top walls are considered adiabatic and bottom walls are maintained at a sinusoidal hot temperature). We considered a Newtonian fluid and the flow is incompressible. The values of Rayleigh number are: 10^3 , 10^4 , 10^5 and 10^6 , the Prandtl number is fixed to 6.2 and the volume fraction ϕ is taken equal to: 0, 0.1 and 0.2. The method used in this study is the finite volume method. The numerical results obtained show that the heat transfer rate increases both with increasing the volume fraction and the Rayleigh number, and that the average Nusselt number and therefore the heat transfer increases with the increase of the volume fraction of the nanoparticles for the full range of Rayleigh numbers, and that the effect of the nanofluid on natural convection is much more manifest for higher values of Rayleigh number.

Keywords: Natural convection, Nanofluids; enclosures with curved walls, vorticity-Streamlines, Numerical simulation.

العنوان:

المساهمة في دراسة الحمل الحراري الطبيعي في تجاويف بجران منحنية مملوءة بمائع نانوفلويدي

ملخص:

في عملنا قمنا بدراسة و مقارنة الحمل الحراري الطبيعي الرقائقي والدائم في تجاويف ثنائية الأبعاد (تجويف مربع، تجاويف بجران منحنية) مملوءة بالنانوفلويد ماء - Cu وتخضع لثلاثة أنواع مختلفة من الشروط الحدية وهي: الحالة الأولى (الجارين الأفقيين للتجاويف أعتبرا كظيمين والجارين الشاقوليين أفترضا ثابتي درجة الحرارة و خاضعين لدرجة حرارة باردة T_c و ساخنة T_h)، الحالة الثانية (الجران الشاقولية للتجاويف متساوية الحرارة و خاضعة لدرجة حرارة ثابتة باردة T_c و الجدران الأفقية العلوية معتبرة كظيمة و السفلية متساوية الحرارة و خاضعة لدرجة حرارة ثابتة و ساخنة T_h)، الحالة الثالثة (الجران الشاقولية للتجاويف متساوية الحرارة و خاضعة لدرجة حرارة ثابتة باردة T_c و الجدران الأفقية العلوية معتبرة كظيمة و السفلية خاضعة لدرجة حرارة جيبية). المائع معتبر نيوتونيان والجريان أعتبر غير منضغط. قيم عدد Rayleigh هي: 10^3 , 10^4 , 10^5 , و 10^6 ، عدد Prandtl مثبت على القيمة 6.2 والنسبة الحجمية ϕ أخذت تساوي: 0 ، 0.1 و 0.2. الطريقة العددية المستخدمة في هذه الدراسة هي طريقة الحجم المنتهية. النتائج الرقمية المتحصل عليها تظهر أن معدل تحويل الحرارة يزداد في نفس الوقت مع زيادة كل من النسبة الحجمية وعدد Rayleigh ، وأن عدد Nusselt المتوسط وبالتالي التحويل الحراري يزداد مع زيادة النسبة الحجمية للنانوجسيمات من أجل كل مجموعة قيم Rayleigh المستخدمة ، وأن تأثير النانوفلويد على الحمل الحراري الطبيعي هو أكثر وضوحا من أجل الأرقام الأعلى لعدد Rayleigh .

المفاتيح:

الحمل الطبيعي، النانوفلويد ، تجويف بجران منحنية، التدويم-دوال التيارات، المحاكات العددية.